UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MATEUS DE MOURA MACIEL

O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ELABORAÇÃO DE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM ESCOLAS ESTADUAIS DO AGRESTE PERNAMBUCANO

CARUARU
2025

MATEUS DE MOURA MACIEL

O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ELABORAÇÃO DE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM ESCOLAS ESTADUAIS DO AGRESTE PERNAMBUCANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECM da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, como requisito para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Edelweis Jose Tavares Barbosa

CARUARU

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Maciel, Mateus de Moura.
O ensino de probabilidade na educação básica: elaboração de propostas didáticas em escolas estaduais do agreste pernambucano / Mateus de Moura Maciel. - Caruaru, 2025.
157 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2025.
Orientação: Edelweis Jose Tavares Barbosa.
Inclui referências.

1. Ensino de probabilidade; 2. Formação de professores; 3. Teoria Antropológica do Didático (TAD); 4. Praxeologias; 5. Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP). I. Barbosa, Edelweis Jose Tavares. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

MATEUS DE MOURA MACIEL

O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ELABORAÇÃO DE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM ESCOLAS ESTADUAIS DO AGRESTE PERNAMBUCANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECM da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Centro Acadêmico do Agreste, como requisito para a obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

.

Aprovado em: 27/02 /2025.

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Edelweis Jose Tavares Barbosa (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

_____

Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

_____

Prof. Dr. José Luiz Cavalcante (Examinador Externo)
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, por me conceder o dom da graça de concluir mais um ciclo em minha trajetória acadêmica. Segundo, à minha família, que sempre estiveram comigo durante todo o processo, me apoiando e incentivando na busca pela realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Neste espaço, gostaria de expressar a minha gratidão a todas as pessoas que contribuíram, de alguma forma, ao longo de todo o percurso para construção deste trabalho e conclusão deste ciclo.

Inicialmente, agradeço primeiramente a Deus, pai celestial dono de todas as graças alcançadas em minha trajetória pessoal e profissional. Pois sem a benção dele nada disso estaria acontecendo em minha vida.

À minha família, de modo especial aos meus pais, José Telmo Maciel e Rita de Moura Maciel que sempre estiveram ao meu lado, me encorajando, incentivando, sem medir esforços para me apoiar em minhas decisões. Aos meus irmãos, Aritelma, Alrivan, José Almir, Arivaldo, Albiana, Arielson, Aricélio e a Jayslãn, por todo o estímulo e companheirismo ao longo de minha trajetória acadêmica.

Ao meu orientador, Prof Dr. Edelweis José Tavares Barbosa, uma pessoa extremamente especial, a quem tive a oportunidade de conhecer durante a defesa do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da Graduação, e que espero levar pra vida. Um excelente ser humano e profissional que dispensa comentários, sempre presente nos momentos mais desafiadores desse ciclo, compreendendo e sanando minhas dúvidas e dificuldades. Sou eternamente grato por todo apoio, confiança e incentivo, orientações e paciência ao longo dessa jornada.

À banca examinadora, formada pelo Prof. Dr. José Luiz Cavalcante da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e o Prof. Dr. Fernando Emílio de Almeida do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE) e Colaborador do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), minha sincera gratidão por aceitarem o desafio de analisar e avaliar, partilhando valiosas sugestões para o aprimoramento e fortalecimento da pesquisa.

Ao Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), por me conceder a oportunidade de realizar o sonho de ser Mestre em Educação Matemática. Agradeço de forma especial, aos coordenadores do Programa e ao corpo docente, pelo excelente acolhimento, carinho, parceria e pela significativa partilha de experiências e conhecimentos ao longo dessa jornada.

Aos meus amigos colegas do PPGECM, Debby Matos, Talyta Sampaio, Déric Vinícius, Débora Caroline, Erivonaldo Alves, Katieli Santos, Mariana Ferreira e Jussara Maria, que sempre estiveram à disposição para me ajudar da melhor maneira possível a manter o foco e tornar a trajetória mais leve.

À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), pelo financiamento estudantil.

RESUMO

Os conhecimentos probabilísticos são essenciais para a compreensão e utilização em contextos diversos. A probabilidade como objeto de ensino é fundamental para o desenvolvimento do pensamento crítico, autônomo e reflexivo do estudante. No entanto, apesar de sua importância, o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade ainda enfrenta vários desafios, especificamente relacionados a formação de professores para o trabalho com esse objeto de ensino em sala de aula. Sendo assim, partindo da própria complexidade do conceito no Ensino Médio, a presente pesquisa tem como objetivo geral: Construir Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. Para alcançar o objetivo geral, recorremos à três (03) objetivos específicos, a saber: a) Analisar o discurso institucional em torno do ensino de probabilidade para o Ensino Médio em documentos oficiais; b) Analisar as praxeologias de livros didáticos para o ensino de probabilidade no Ensino Médio; e c) Propor Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. Partindo desses pressupostos, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores baliza teoricamente nossa pesquisa. No âmbito da TAD, usamos a noção de praxeologia, que é uma importante ferramenta da teoria que nos permite analisar e compreender a difusão dos saberes no interior das instituições de ensino. Com base na TAD e na praxeologia, buscamos compreender as relações institucionais em torno do objeto de ensino probabilidade a partir de documentos oficiais como os PCN, PCNEM, OCNEM, BNCC e duas coleções de livros didáticos, e subsidiamos a construção de um modelo alternativo para abordagem do conceito por meio de uma AEP. Neste sentindo, essa pesquisa foi desenvolvida por intermediário de três etapas. Na primeira etapa, analisamos as orientações curriculares presentes nos documentos oficias sobre o objeto de ensino probabilidade; Na segunda etapa, realizamos a análise praxeológica de duas coleções de obras didáticas, uma aprovada no PNLD 2021 e outra no PNLD 2015, ambas publicadas mesmo autor, com a finalidade de investigar as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) existentes no material didático. Nesse processo de escolha e análise das obras didáticas, o objetivo foi comparar as praxeologias presentes nos materiais didáticos, com a finalidade de revelar se houveram modificações nas organizações exibidas de uma coleção de obra didática para outra; Na terceira etapa, realizamos a proposição da AEP, sequência de ensino que se enquadra como um modelo alternativo e reflexivo para o trabalho docente com a probabilidade no Ensino Médio de maneira investigativa e contextualizada. A partir desse processo analítico, os resultados encontrados nessa investigação indicam que as praxeologias presentes nas obras didáticas são do tipo rotineiras e incompletas, não havendo uma discussão de componentes praxeológicos suficientes para resolver as tarefas propostas. Além disso, observamos que as Organizações Praxeológicas (OP) não evoluem ao longo das avaliações realizadas pela noosfera. Ou seja, entre o período de 2015 e 2021, as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) não passaram por adaptações de modo a potencializar o ensino de probabilidade no Ensino Médio. Ou seja, as obras seguem a mesma organização para abordagem do conceito. Nas coleções analisadas, a probabilidade é predominantemente abordada através de organizações relacionadas à jogadas de sorte e azar, sem uma contextualização real do objeto de ensino em contextos cotidianos. Sendo assim, diante dos dados encontrados e da elaboração da AEP, ressaltamos a importância de mobilizar uma formação com professores do Ensino Médio para a abordagem do conceito de maneira real e investigativa, de modo a conduzir o aluno como sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Ensino de probabilidade; Formação de professores; Teoria Antropológica do Didático (TAD); Praxeologias; Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP).

ABSTRACT

Probabilistic knowledge is essential for understanding and using it in different contexts. Probability as a teaching object is fundamental to the development of critical, autonomous and reflective thinking in students. However, despite its importance, the process of teaching and learning probability still faces several challenges, specifically related to teacher training for working with probability in the classroom. Therefore, based on the very complexity of the concept in secondary education, the general objective of this research is to build Study and Research Activities (SRA) for teaching probability in secondary education. In order to achieve the general objective, we have resorted to three (03) specific objectives: a) Analyze the institutional discourse surrounding the teaching of probability in secondary education in official documents; b) Analyze the praxeologies of textbooks for the teaching of probability in secondary education; and c) Propose Study and Research Activities (SRA) for the teaching of probability in secondary education. Thus, the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), developed by Yves Chevallard and his collaborators, provides the theoretical basis for our research. In this sense, we use the notion of praxeology, which is an important tool of the ATD that allows us to analyze the diffusion of knowledge within educational institutions. Based on ATD and praxeology, we sought to understand institutional relations based on official documents such as the PCN, PCNEM, OCNEM, BNCC and two textbook collections around the object of teaching probability and to subsidize the construction of an alternative model for approaching the concept through a PEA. This research was carried out in three stages: in the first stage, we analyzed the curricular guidelines in official documents on the object of teaching probability; in the second stage, we carried out a praxeological analysis of two collections of textbooks, one approved in the PNLD 2021 and the other in the PNLD 2015, both published by the same author. In this process of choosing and analyzing the didactic works, the aim was to compare the praxeologies present in the didactic materials, with the aim of revealing whether there have been any changes in the organizations displayed in the didactic works; in the third stage, we proposed the PEA, a teaching sequence that will serve as an alternative and reflective model for teaching probability in secondary school. The results of this investigation indicate that the praxeologies present in the didactic works are of the routine and incomplete type, with no discussion of sufficient praxeological components to solve the proposed tasks. In addition, we observed that the Praxeological Organizations (POs) do not evolve throughout the evaluations carried out by the noosphere. In other words, between 2015 and 2021, the Mathematical Organizations (MO) and Didactic Organizations (DO) were not adapted to enhance the teaching of probability in secondary education. The books follow the same organization for approaching the concept. In the collections analysed, probability is predominantly approached through organizations related to games of chance, without any real contextualization of the teaching object in everyday contexts. Therefore, in view of the data found and the preparation of the SRA, we stress the importance of mobilizing training with secondary school teachers to approach the concept in a real and investigative way, in order to lead the student as an active subject in the construction of their own knowledge.

Keywords: Probability teaching; Teacher training; Anthropological Theory of the Didactic (ATD); Praxeologies; Study and Research Activity (SRA).

LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 01 – Etapas da Transposição Didática..... 31

Esquema 02 – Questionamentos em torno do quarteto praxeológico..... 44

Esquema 03 – Características do PEP e do PEP-FP..... 54

Esquema 04 – Outros nomes da história da probabilidade..... 63

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 –	Localização da probabilidade no LD1.....	92
Figura 02 –	Introdução ao conceito de probabilidade no LD1.....	94
Figura 03 –	Definição de experimento aleatório, espaço amostral e evento.....	95
Figura 04 –	Exemplos de experimento aleatório, espaço amostral e evento.....	95
Figura 05 –	Situações referentes aos conteúdos de experimento aleatório espaço amostral e evento.....	98
Figura 06 –	Definição clássica de probabilidade.....	102
Figura 07 –	Situações referentes aos tipos e subtipos de tarefas $T_{3.1}$; $T_{3.2}$; $T_{3.3}$ e $T_{3.4}$.....	104
Figura 08 –	Situação referente a $T_{3.5}$.....	107
Figura 09 –	Introdução ao conceito de eventos complementares.....	108
Figura 10 –	Situação referente a $T_{3.6.}$	110
Figura 11 –	Situação referente a $T_{3.7}$.....	111
Figura 12 –	Introdução à probabilidade condicional.....	112
Figura 13 –	Situação referente a T_5.....	114
Figura 14 –	Introdução ao conceito de probabilidade binomial.....	116
Figura 15 –	Institucionalização do Modelo Binomial.....	116
Figura 16 –	Situação referente a $T_{6.1}$.....	117
Figura 17 –	Situação referente a $T_{6.2}$.....	118
Figura 18 –	Localização da probabilidade no LD2.....	119
Figura 19 –	Conceito de frequência relativa e probabilidade.....	121
Figura 20 –	Situações relacionadas aos subtipos de tarefas $T_{7.1}$ e $T_{7.2}$.....	122

Figura 21 –	Localização da probabilidade no LD3.....	124
Figura 22 –	Introdução ao conceito de probabilidade no LD3.....	126
Figura 23 –	Introdução ao conceito de probabilidade no LD3.....	127
Figura 24 –	Situações referentes a $T_{8.1}$, $T_{8.2}$, $T_{8.3}$ e T_{9}.....	129
Figura 25 –	Institucionalização do conceito de probabilidade.....	131
Figura 26 –	Situação referente ao tipo de tarefa T_{12}.....	132
Figura 27 –	Situação referente ao tipo de tarefa T_{15}.....	134
Figura 28 –	Modelo Epistemológico de Organização Didática.....	143

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 –	Elementos do quarteto praxeológico.....	41
Quadro 02 –	Momentos didáticos.....	47
Quadro 03 –	Competências e habilidades da BNCC para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.....	78
Quadro 04 –	Categorização da coleta e análise de dados.....	87
Quadro 05 –	Critérios da análise praxeológica.....	88
Quadro 06 –	Categorização a priori dos tipos de tarefa.....	88
Quadro 07 –	Características das obras didáticas analisada.....	91
Quadro 08 –	Distribuição dos exercícios por categoria – LD1	92
Quadro 09 –	Agrupamento das tarefas por conteúdos no LD1.....	93
Quadro 10 –	Tipos e subtipos de Tarefas referentes aos conteúdos experimento aleatório, espaço amostral e evento no LD1.....	96
Quadro 11 –	Tipos e subtipos de Tarefa referentes aos conteúdos Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos no LD1.....	102
Quadro 12 –	Expressões da intersecção, do complementar, da união e de eventos exclusivos no LD1.....	107
Quadro 13 –	Tipos de Tarefa referentes aos conteúdos Probabilidade condicional e eventos independentes no LD1.....	114
Quadro 14 –	Tipos e Subtipos de Tarefas referentes ao conteúdo de Distribuição Binomial no LD1.....	117
Quadro 15 –	Distribuição dos exercícios por categoria – LD2.....	120
Quadro 16 –	Tipos e subtipos de Tarefa referentes ao segmento Frequência Relativa e Probabilidade.....	122

Quadro 17 –	Distribuição dos exercícios por categoria – LD3.....	125
Quadro 18 –	Agrupamento das situações por conteúdo – LD3.....	126
Quadro 19 –	Tipos e subtipos de Tarefa referentes aos conteúdos de experimento aleatório, espaço amostral e evento no LD3.....	128
Quadro 20 –	Situação elaborada referente a T_{10} no LD3.....	130
Quadro 21 –	Tipos e subtipos de Tarefas referente aos conteúdos probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos no LD3	131
Quadro 22 –	Situação elaborada referente a T_{12} no LD3.....	133
Quadro 23 –	Tipos de Tarefa referentes aos conteúdos Probabilidade condicional e eventos independentes no LD3.....	134
Quadro 24 –	Situação elaborada referente a T_{15} no LD3.....	135
Quadro 25 –	Tipos e subtipos de Tarefas referentes ao conteúdo Distribuição Binomial no LD3.....	136
Quadro 26 –	Tipos de Tarefas referentes ao conteúdo Frequência Relativa e Probabilidade no LD3.....	138
Quadro 27 –	Identificação dos momentos didáticos nas obras didáticas analisadas – LD1, LD2 e LD3.....	139
Quadro 28 –	AEP – Introduzindo o conceito de probabilidade clássica.....	147

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**17**
1.1	Revisão de Literatura	22
1.2	Objetivos da pesquisa	26
2	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	**28**
2.1	**Transposição Didática**	**29**
2.2	**Teoria Antropológica do Didático**	**33**
2.2.1	Praxeologia (Organização Praxeológica)	37
2.2.1.1	Praxeologia Matemática ou Organização Matemática	42
2.2.1.2	Praxeologia Didática ou Organização Didática	44
2.2.1.3	A Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) e o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)	48
2.3	**Um breve passeio sobre elementos históricos da probabilidade**	**55**
2.4	**A formação de professores para ensinar probabilidade**	**63**
2.5	**Os documentos oficiais e a probabilidade**	**71**
2.5.1	Parâmetros Curriculares Nacionais	71
2.5.2	Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio	73
2.5.3	Base Nacional Comum Curricular	75
2.5.4	A probabilidade	80
3	**METODOLOGIA**	**85**
3.1	Critérios de escolha das obras didáticas	86
3.2	Construção e análise de dados	87
4	**ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS OBRAS DIDÁTICAS**	90
4.1	Livro Didático (LD_1): *Conexões – Matemática (2015)*	91

4.2	Livro Didático (LD_2): *Conexões – Matemática (2015)*.....	119
4.3	Livro Didático (LD_3): *Conexões – Matemática e suas Tecnologias (2021)*.....	123
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS.....**	**141**
5.1	Elaboração da proposta didática: Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP).....	146
6	**REFERÊNCIAS.....**	**151**

1 INTRODUÇÃO

A probabilidade é um objeto matemático significativamente presente em diversos contextos sociais, englobando desde a tomada de decisões até a análise de riscos e a compreensão de fenômenos aleatórios situados em nosso cotidiano. Com o recente aumento na disseminação de *fake news*, expansão de propagandas enganosas intencionais provenientes de casas de apostas por intermédio das redes sociais, das quais muitas vezes a principal finalidade é confundir os usuários, atraindo, portanto, novos apostadores, e a análise de propagação de doenças infecciosas, o domínio de conhecimentos probabilísticos torna-se indispensável para a convivência responsável das pessoas na sociedade contemporânea (Batanero, 2005; Maciel e Barbosa, 2024).

Considerando suas potencialidades para ratificar a veracidade de informações espalhadas, comportamento de fenômenos aleatórios e importância na construção de modelos de análise de contágio, prevenção e controle de doenças auto transmissíveis, é essencial analisar a razão de ser do objeto probabilidade no currículo escolar brasileiro.

De acordo com a importância de conhecimentos probabilísticos em situações do nosso dia a dia, é preciso que no processo de escolarização, os estudantes desde cedo estabeleçam uma conexão sólida com esse objeto matemático, de modo a construir uma relação substancial entre o saber escolar e o conhecimento cotidiano. Pois, assim como ressalta Lopes (2008), não é preciso que o estudante chegue ao Ensino Médio para começar a ter contato com conteúdos fundamentais para o desdobramento e ampliação de sua visão de mundo.

Em conformidade com a relevância da probabilidade no cenário social, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento normativo, menciona que a probabilidade deve ser ensinada desde os primeiros anos de escolaridade. Contudo, conforme Giordano e Vilhenha (2020), a dificuldade dos estudantes relacionada a compreensão e trabalho com objetos matemáticos como os conhecimentos probabilísticos, provém dos anos iniciais do Ensino Fundamental. E, em nosso entendimento, esse problema transita por todas as etapas de formação, quando os alunos necessitam recorrer àqueles conhecimentos que ficaram para trás no currículo escolar.

De modo específico, o cenário em torno da probabilidade é ainda mais complexo. O processo de ensino e aprendizagem desse objeto de ensino, de modo geral, é crítico. Pois, muitos professores em sua formação inicial e ao longo de suas vivências, tiveram pouco ou quase nenhum contato com o conhecimentos probabilísticos (Rodrigues, 2011).

Assim, de acordo com Rodrigues (2011), é comum que alguns docentes apresentem dificuldades para a compreensão de noções básicas da probabilidade como experimento aleatório, espaço amostral e eventos, considerando a pouca relação desses profissionais com o objeto matemático no decurso do processo de formação inicial. No Ensino Médio, essas dificuldades se tornam ainda mais perceptíveis devido à dificuldade dos professores na compreensão das diferentes abordagens e noções do conceito. Além disso, é fundamental destacar que apesar do crescente número de pesquisas em torno desse objeto de ensino, as fragilidades em torno de suas noções básicas continuam existindo. Assim, é importante reconhecermos que esse cenário pode comprometer a qualidade do ensino e fragmentar a aprendizagem dos alunos (Maciel e Barbosa, 2024; Vilhena *et al*., 2024).

Partindo dessas premissas, enfatizamos que essa pesquisa tem uma íntima relação com a minha trajetória acadêmica. Desde as primeiras aulas que frequentei na escola pública na cidade de Amparo – PB me interesso pela Matemática. Esse interesse me conduziu à escolha do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Foi lá que tive a oportunidade de refletir sobre diversas facetas da Educação Matemática, dentre elas, as teorias ligadas à Didática da Matemática.

Meu ingresso ao Núcleo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (NEPEMAT), um grupo de estudo formado por professores e alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPB, proporcionou-me a oportunidade de estudar algumas facetas da Didática da Matemática. Entre elas, destaco o estudo da difusão dos saberes, como a probabilidade, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Desde esse período, passei a criar e compreender as relações pessoais e institucionais com a probabilidade e com a TAD. Foi por estímulo desse grupo de estudos que me senti motivado a investigar sob o olhar da TAD o motivo pelo qual nas escolas a calculadora era pouco utilizada e, as vezes, até tinha seu uso vetado. Diante disso, passei a me questionar o porquê desse fenômeno.

E foi no âmbito dessas indagações que tive meu primeiro contato, de fato, com ferramentas mais específicas da TAD de Yves Chevallard. Como teoria que permite o estudo das condições e restrições para o estudo de saberes nas instituições, ela serviu de referencial, no meu Trabalho de Conclusão de Curso da Graduação para que pudesse olhar a questão do

"não uso" da calculadora sob a ótica dos livros didáticos. E foi a partir do TCC que realizei a minha primeira análise praxeológica[1].

Minha trajetória profissional teve início antes mesmo do término do curso de Licenciatura em Matemática, quando comecei a ministrar aulas de Matemática para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental em uma Escola da Rede Pública do Município de Amparo, Paraíba. Ao longo desse percurso, ao me tornar um dos poucos professores formados em Matemática da minha cidade, frequentemente era procurado por colegas docentes que lecionam Matemática na rede pública de ensino para discutir estratégias de como ensinar probabilidade para os alunos.

Foi a partir dessa relação com os professores que voltei a refletir sobre as problemáticas em torno do ensino de probabilidade, reencontrando algumas divergências entre a tríade: professor, aluno e o saber probabilidade. Será que assim como o uso da calculadora a presença desse saber sofria restrições, como observado na pesquisa de TCC? Foi no escopo dessa indagação que me encontrei motivado a investigar os fenômenos relativos ao ensino de probabilidade.

O acesso às leituras de trabalhos sobre o ensino de probabilidade nos levaram a observar alguns fenômenos e levantar questionamentos sobre a prática docente com esse objeto de ensino na educação básica, tais como: será que alguns professores manifestam dificuldades em trabalhar com esse objeto matemático? E, consequentemente, muitos alunos reproduzem essas dificuldades no processo de aprendizagem do conceito? Considerando que a probabilidade é adotada em documentos normativos como a BNCC, que orienta o ensino desse conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, é crucial investigar a autencidade dos fatores que contribuem para a ocorrência desses fenômenos e planejar ações que possam melhor subsidiar o trabalho docente com a probabilidade em sala de aula.

Ao ingressar no Mestrado, comecei a minha trajetória como membro do Grupo de Pesquisa Núcleo de Pesquisa, Extensão de Formação Docente do Agreste Pernambucano (NUPEFAP), um grupo formado por professores e alunos dos cursos de Graduação, Mestrado e Doutorado da Universidade Federal de Pernambuco do Campus Acadêmico do Agreste (CAA) e outras Instituições de Ensino Superior parceiras. Foi a partir dessa instituição (NUPEFAP) que permite o estudo de fenômenos didáticos no viés de teorias da Didática da Matemática, que obtive condições para investigar alguns fenômenos relacionados a realidade

[1] Em Maciel (2020) observamos que a calculadora é um instrumento cujo uso é estimulado em atividades envolvendo a unidade temática de números e operações, porém no 8º e 9º esse instrumento perde enfoque na coleção de livros didáticos analisados.

do ensino de probabilidade na educação básica, tomando a TAD como aporte teórico – metodológico.

Considerando a razão de ser da probabilidade nas orientações curriculares presentes em documentos normativos para o ensino do conceito, podemos refletir sobre duas hipóteses. A primeira é que a dificuldade dos alunos em compreender elementos básicos da probabilidade pode ter relação com a formação inicial de professores. A segunda hipótese é que nos cursos de Pedagogia ou Licenciatura em Matemática não são apresentados subsídios didáticos suficientes para auxiliar os professores na parte específica e pedagógica de tal objeto de ensino. Assim, no processo de formação inicial de professores, as discussões em torno da probabilidade parecem estar concentradas na aplicação de questões prontas e resoluções abstratas, desconsiderando a abordagem do conceito por meio de práticas sociais contextualizadas. (Batanero *et al*, (2015); Cavalcante, Andrade e Regnier (2016); Amorim, Pietropaolo e Silva, 2020).

Partindo desse princípio, observa-se que o problema com o ensino de probabilidade vai além da formação básica. Esse apontamento pode ser evidenciado quando, mesmo na Licenciatura em Matemática, essas discussões didáticas sobre o objeto de ensino são incipientes, muitas vezes se limitando à concepção clássica do conceito. Desse modo, os estudantes da Licenciatura em Matemática, mesmo já tendo cursado a disciplina de introdução à probabilidade, ainda manifestam uma relação pessoal fragilizada com o conceito. Nessa perspectiva, além da questão da formação docente, há também a própria complexidade do conceito, isto é, a aprendizagem da probabilidade e suas noções deve ser um processo gradual e que possibilitem aos estudantes o confronto com erros e vieses que são comuns nesse processo (Cavalcante; Lima e Andrade, 2021; Moura e Samá, 2016).

Assim, é essencial voltarmos nossos olhares, especialmente, para o cenário prático e pedagógico dos professores da educação básica. Considerando as fragilidades no processo de formação inicial sobre a probabilidade, é relevante investigar as instituições, essas como dispositivos sociais presentes nos espaços escolares utilizadas para auxiliar e apoiar os docentes no trabalho com a probabilidade em sala de aula. Isso implica na análise de materiais disponíveis e na oferta de formações pedagógicas, para que os professores possam refletir sobre suas praxeologias de ensino, compreender a prática institucional e fortalecer suas relações pessoais e institucionais com os elementos probabilísticos.

Tendo em vista as lacunas sobre o ensino de probabilidade na educação básica, é importante refletir sobre a abrangência de novos estudos sobre esse saber, que contemple a literatura com dispositivos didáticos alternativos para complementar o material didático já existente e disponível nas instituições de ensino, utilizado pelos professores da educação básica

para a abordagem do conceito. Pois, apesar da vasta e rica literatura sobre o ensino e aprendizagem da probabilidade a nível nacional e internacional, a agenda de pesquisa denota a importância da contemplação de novos estudos que possam ampliar as discussões e também subsidiar a elaboração de produtos educacionais, promovendo formação com professores. Nesse sentido, não é sobre dizer o que o professor sabe ou não, mas fazer como os produtos disponíveis estejam em consonância com a realidade do aluno e cheguem aos professores e estes possam refletir sobre sua utilidade e aplicação.

De acordo com os desafios referentes ao ensino de probabilidade na educação básica, que são refletidos também nos cursos de formação inicial de professores, é fundamental revelar com o auxílio das ferramentas da TAD, as imposições existentes na transição entre o Saber a Ensinar e o Saber Ensinado que condicionam o trabalho docente com esse objeto matemático. Nesse sentido, considerando a importância dos conhecimentos probabilísticos no dia a dia das pessoas, seu ensino resumido a resolução de questões prontas pode tornar o processo de formação básica insuficiente, de modo a torna o conhecimento escolar ineficaz para utilidade no cotidiano.

No intuito de compreender a difusão do objeto matemático probabilidade no âmbito das instituições de ensino, por intermédio da TAD e suas ferramentas é possível analisar o desencadeamento das práticas para o ensino desse conceito ou qualquer outro conteúdo matemático desenvolvidas na esfera institucional.

Essa teoria é composta por ferramentas teóricas – metodológicas, como a Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), dispositivo pedagógico que nos permite investigar e questionar o domínio de conteúdos pelos professores e alunos, reforçando que as praxeologias para o ensino e aprendizagem de objetos matemáticos podem superar o método de práticas tradicionais condensadas em memorização e aplicação de fórmulas. Assim, com base na Organização Didática (OD), denominada de AEP, é possível problematizar e investigar os conceitos matemáticos, proporcionando um modelo de ensino e aprendizagem a partir de situações de investigação, transformando o conhecimento escolar em um objeto visivelmente presente no cotidiano do aluno.

Consideramos a praxeologia uma importante ferramenta da TAD. Por meio desse dispositivo analítico é possível olhar para a difusão dos saberes na prática docente a partir de alguns contextos, por exemplo: Como o objeto matemático probabilidade é ensinado pelo professor? Como e quais competências e habilidades da BNCC estão sendo refletidas no planejamento docente para o ensino de probabilidade? Qual a atenção do currículo institucional atribuída ao objeto de ensino probabilidade? Quais as Organizações Matemáticas (OM) e

Didáticas (OD) presentes nas coleções de materiais didáticos disponibilizados pela escola para o trabalho docente com a probabilidade? Até que ponto as praxeologias encontradas nas obras didáticas estimulam o desenvolvimento de uma aprendizagem refletiva e autônoma?

Diante de todos os questionamentos exibidos anteriormente, com a finalidade de buscar respostas para a questão coração dessa pesquisa, nosso foco é trabalhar com base nas duas últimas indagações. Nesse processo, compreendemos que identificando as condições e restrições para a ocorrência das práticas no núcleo dos materiais didáticos, podemos revelar alguns fatores do modelo dominante de ensino que sustentam as práticas atuais. E assim, com base nas evidências identificadas, podemos subsidiar a construção de uma proposta didática que sirva como material de apoio alternativo e reflexivo ao docente para o ensino de probabilidade na educação básica sob uma perspectiva contextualizada e investigativa.

Assim, as motivações que nos levaram a pensar na elaboração de uma proposta didática para o ensino de probabilidade partem do princípio de que, conforme (Chevallard, 1998, *apud* Barbosa, 2011), não existe um ambiente institucional ideal em que todas as praxeologias sejam bem constituídas, de modo que não possam envelhecer, serem questionadas e substituídas, composta por tarefas bem definidas maneiras de fazer eficientes e incontestáveis.

Portanto, com a intenção de contribuir com uma reflexão sobre as praxeologias que caracterizam o cenário atual do ensino de probabilidade na educação básica e de propor alternativas para a reconstrução dessas organizações, a questão a ser respondida por meio desta pesquisa foi: *Como o professor pode utilizar Atividades de Estudo e Pesquisa - AEP, vinculados ao ensino da probabilidade, com a finalidade de desenvolver esse objeto do saber no processo de ensino conforme a BNCC*?

1.1. Revisão de Literatura

Para iniciar a investigação sobre a temática em questão, decidimos realizar uma busca inspirada no procedimento Estado da Arte. Esse procedimento é essencial para quantificar e investigar o panorama atual das produções científicas em um determinado recorte temporal. Em nossa pesquisa, temos a intenção de realizar o levantamento bibliográfico e descrever algumas características específicas dos trabalhos. Portanto, o intuito da nossa investigação é fazer uma revisão bibliográfica tomando como base estrutural o Estado da Arte, embora compreendemos que o que foi desenvolvido nessa revisão não é caracterizado como Estado da Arte.

Essa etapa da pesquisa tem por finalidade analisar as contribuições, o atual cenário, impactos na sociedade e principais conclusões das pesquisas desenvolvidas, fornecendo elementos fundamentais das produções acadêmicas existentes, reunindo questionamentos ou

problemas que não foram discutidos ou respondidos e que ainda provocam uma lacuna sobre um determinado fenômeno na literatura disponível, permitindo a realização de novos estudos.

Partindo desse pressuposto, para iniciar o processo de análise, utilizamos como base para essa revisão o Catálogo de Teses e Dissertações e o Portal de Periódicos da Capes. Desse modo, dividimos esse mapeamento em dois momentos: 1º Levantamento de Teses e Dissertações; 2º Levantamento de artigos publicados em Periódicos. Para essas duas fases, estabelecemos o recorte temporal de uma década, enquadrando os trabalhos desenvolvidos entre 2013 e Junho de 2023.

Catálogo de Teses e Dissertações: Palavras – Chave e número de pesquisas encontradas

Como nosso intenção inicial era trabalhar com a proposição de sequências didáticas para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, no primeiro momento de busca, pesquisamos por trabalhos através do descritor "ensino de probabilidade", destacamos as palavras entre aspas para singularizar, informando ao algoritmo a intenção de resumir a busca apenas à pesquisas relacionadas à temática de nosso interesse. Nesse processo investigativo, encontramos o total de 93 pesquisas. Diante o total de trabalhos encontrados, apenas 08 destes destinam-se a elaboração ou validação de sequências didáticas para o ensino de probabilidade na educação básica, todos na modalidade dissertação.

De acordo com o número de trabalhos encontrados anteriormente, percebemos a necessidade de uma segunda busca na mesma plataforma. Considerando o número de produções encontradas inicialmente insuficientes, utilizamos um dos operadores booleanos e fizemos o uso do descritor "Probabilidade" AND "sequência didática". Por intermédio desse descritor, encontramos 224 trabalhos voltados para a temática de nosso interesse. No entanto, apenas mais 02 trabalhos destinam-se às discussões voltadas para o ensino de probabilidade com base na proposição de sequências didáticas, e que não tínhamos identificado através do primeiro descritor de busca. Os demais trabalhos exibidos nessa busca não possuíam relação com a temática de nosso interesse ou já tinham sido identificados e contabilizados a partir da primeira busca.

Portal de Periódicos Capes: Palavras – Chave e número de pesquisas encontradas

Feito a análise anterior no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, com o objetivo de aprofundar nossa busca por trabalhos sobre o ensino de probabilidade na educação básica com base na constituição de sequências didáticas, buscamos por periódicos no Portal de

Periódicos Capes, considerando os mesmos descritores de busca utilizados para o mapeamento na plataforma de buscas anterior.

Desse modo, com o intuito de investigar o que vem sendo produzido e discutido sobre a temática na última década, mapeamos os artigos produzidos entre os anos de 2013 e o mês de junho de 2023. Para a primeira busca, utilizamos o descritor composto por um operador booleano "probabilidade" *AND* "sequência didática" para direcionar a busca apenas aos trabalhos de nosso interesse. A partir do uso desse primeiro descritor, encontramos 17 publicações. Entre eles, 08 artigos abordam questões relacionadas ao ensino de probabilidade na educação básica com base no uso de sequências didáticas. Para uma segunda busca, utilizamos o descritor "ensino de probabilidade na educação básica", na qual não identificamos nenhum artigo relacionado à temática de nosso interesse.

Algumas considerações em torno das produções acadêmico-científicas mapeadas

Inicialmente, salientamos que, para a veracidade das características e contribuições específicas relacionadas aos trabalhos identificados nesse mapeamento, como título, autor(es), etapa de formação em que a sequência foi aplicada, características da sequência, modalidade dos trabalhos (Dissertações e artigos) entre outras, podem ser encontradas em Maciel e Barbosa (2024)[2].

Assim, destacamos que, no escopo desse mapeamento, foi possível identificar uma série de trabalhos que abordam o ensino de probabilidade com base na proposição de sequências didáticas para o trabalho com o conceito na educação básica, com maior ênfase no Ensino Médio. No entanto, de acordo com as características das atividades exibidas nos modelos de sequências propostos, observamos que a probabilidade, em maior parte, é abordada de forma dinâmica, utilizando o jogo como um artefato para o ensino do conceito. No sentido quantitativo em torno da construção de sequências para o ensino de probabilidade, é perceptível que há uma crescente sobre a proposição de modelos alternativos para auxiliar o docente no processo de formação do aluno.

Contudo, é importante destacar que os modelos observados nos trabalhos encontrados seguem uma perspectiva da abordagem probabilística por intermédio do que é denominado por D'Ambrósio (2008) de "causa e efeito", sendo "causa" o problema e efeito a "resolução", sem

[2] O estudo de Maciel e Barbosa (2024), partiu da necessidade de compreender o cenário acadêmico-científico do saber probabilidade com base na construção de propostas de ensino, como a sequência didática como produto alternativo para auxiliar os professores no processo de abordagem da probabilidade na educação básica. Para maiores informações sobre os trabalhos mapeados e suas características, acesse: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/12182/11604.

uma contextualização sobre o objeto, sua importância e existência no meio social. Nesse contexto, o processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático é promovido de forma direta, sem uma profundidade reflexiva sobre sua razão de ser, ou seja, do porquê ensinar ou aprender determinadas noções da probabilidade, de modo a facilitar sua identificação em situações vivenciadas em seu dia a dia.

Chevallard (2009), compara esse modelo de formação à uma visita a um monumento. Por esse processo, compreendemos que a relação do estudante com o objeto é restrita ao espaço escolar, podendo não influenciar significativamente em sua vida cotidiana. No âmbito da visita aos monumentos, significa que o aluno pode conhecer o objeto e descrevê-lo em algumas situações, mas não utilizá-lo de modo a contemplar suas atividades cotidianas. Partindo desse princípio, sentimos a necessidade de trabalhar o conceito de modo a aproximar os conhecimentos escolares dos conhecimentos cotidianos, no intuito de promover uma aprendizagem ativa.

Sendo assim, no sentido de ampliar essas discussões sobre o ensino de probabilidade com base na proposição de um dispositivo didático, em nosso estudo subsidiaremos a construção de uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, com a finalidade de disponibilizar aos professores um material de apoio reflexivo, promovendo uma formação matemática baseada em um procedimento investigativo.

De acordo com o número de pesquisas encontradas e o produto educacional (sequência didática) subsidiado nesses estudos, podemos dizer que existe uma demanda para elaboração de novos trabalhos, principalmente na perspectiva da construção de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), dispositivo da TAD que vai nos permite conduzir um percurso de estudo investigativo sobre o conceito, mobilizando uma reflexão para a construção ou reconstrução de praxeologias de ensino ou aprendizagem, de forma que em nossa revisão de literatura, não identificamos pesquisas estruturadas nesse sentido.

Focamos no Ensino Médio, partindo da própria complexidade do conceito nessa etapa de formação básica, com a finalidade de mobilizar a construção de um modelo alternativo para auxiliar os professores a orientar e mobilizar os alunos em situações de formulação de problemas e levantamento de hipóteses de um ponto de vista investigativo em situações reais, desconstruindo a ideia de que a aprendizagem matemática é abstrata, resumida a memorização e aplicação de fórmulas, respostas únicas e acabadas.

Sendo assim, asseguramos nosso estudo centrado na TAD, considerando seus instrumentos de análise, como a praxeologia, que nos ajudará compreender melhor a relação e dinâmica das práticas institucionais na difusão do saber probabilidade, aspecto que entendemos

que nos oferecerá robustos para conduzir o processo de proposição da AEP para o ensino de conceitos probabilísticos.

Pensamos na elaboração da AEP, com base em sua dimensão didática para que pesquisadores e professores possam refletir sobre questões do tipo: como orientar os professores a utilizarem roteiros que guiem os estudantes na construção de uma aprendizagem matemática por meio de atividades investigativas, e em seguida: como estimular os alunos a acompanhar ou escrever roteiros, motivando-os a desenvolver o seu pensar matemático em torno da probabilidade sobre uma determinada tarefa, de modo que ele sinta-se estimulado a interpretar, investigar e escrever de forma lógica e dedutiva, sobre uma situação apresentada pelo docente.

Ao propormos a AEP para o ensino de probabilidade na educação básica, acreditamos que traremos importantes contribuições no desenvolvimento de novos estudos que contemple o estudo deste objeto do saber e também na construção de processos de formação de professores com vistas a ofertar aos docentes um importante material para reflexões sobre o ensino e aprendizagem da probabilidade.

1.2. Objetivos

Nesta seção, a partir da questão de pesquisa: *Como o professor pode utilizar Atividades de Estudo e Pesquisa - AEP, vinculados ao ensino de probabilidade no Ensino Médio, com a finalidade de desenvolver esse objeto do saber no processo de ensino conforme a BNCC?* apresentaremos o objetivo geral e específicos que foram traçados para conduzir o processo investigativo no intuito de responder à questão de pesquisa do nosso estudo.

1.2.1. Objetivo Geral

A partir da questão de pesquisa, traçamos o seguinte objeto geral: Construir Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.

1.2.2. Objetivos Específicos

Diante do questionamento a ser respondido e do objetivo geral, traçamos os seguintes objetivos específicos:

a) Analisar o discurso institucional em torno do ensino de probabilidade para o Ensino Médio em documentos oficiais;
b) Analisar as praxeologias em livros didáticos para o ensino de probabilidade no Ensino

Médio;

c) Propor Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio;

Apresentadas algumas motivações, questionamentos, justificativa e objetivos sobre a presente pesquisa, a seguir apresentaremos o segundo capítulo, no qual discutimos os tópicos da fundamentação teórica, capítulo que traz uma abordagem dos elementos relacionados à Transposição Didática; Teoria Antropológica do Didático; História da probabilidade; A formação de professores para o ensino de probabilidade; E os documentos oficiais e a probabilidade.

No terceiro capítulo, exibimos os aspectos metodológicos que descrevem o desenvolvimento desse estudo. Nesta seção, apresentamos elementos como a abordagem da pesquisa, sua classificação quanto aos objetivos, procedimentos e o material de coleta e as categorias de análise de dados. No quarto capitulo, apresentamos a análise praxeológica dos materiais didáticos selecionados. No quinto capítulo, elaboramos a síntese da análise praxeológica, apresentando as condições e restrições identificadas nas obras didáticas. Em seguida, no mesmo capítulo, exibimos o modelo alternativo denominado Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. Por fim, são apresentadas as Considerações finais e as referências utilizadas para o embasamento teórico da pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Didática da Matemática é um campo da Educação Matemática, cuja sua função é analisar e explicar os fenômenos didáticos que moldam o processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos. Segundo D'Amore (2007), o termo "didática" possui dupla funcionalidade: se por um lado esse termo pode ser compreendido como um campo científico de investigação de fenômenos didáticos, por outro, está relacionado à arte de articular o processo de ensino. Nesta pesquisa, nos referimos a Didática da Matemática como um campo científico que, por intermédio de suas teorias, permite-nos compreender a dimensão institucional dos saberes matemáticos a serem ensinados e aprendidos.

Neste estudo, tratamos de abordar dois aspectos fundamentais relacionados a Didática da Matemática: a Transposição Didática (TD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Com base no foco do nosso estudo, consideramos fundamental explorar a transição do objeto de ensino probabilidade, desde sua fabricação até o ponto de se tornar um objeto a ser ensinado. O princípio que explica a trajetória do saber de modo a se tornar objeto de ensino ou conhecimento é denominado de Transposição Didática (TD).

Da mesma maneira, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) é uma das esferas da Didática da Matemática, que tem por finalidade investigar as ações humanas em seus mais diversos e complexos campos das atividades. Com base nas ferramentas de análise dessa teoria, podemos explorar elementos do sistema de ensino e compreender a dimensão institucional para o ensino de objetos matemáticos. Como uma de suas funções é investigar a relação entre os elementos primordiais do sistema didático professor → aluno → saber, suas ferramentas analíticas nos ajudarão a relevar as condições e restrições, no contexto das instituições visitadas, para a abordagem do objeto probabilidade no Ensino Médio.

Entre as instituições visitadas neste estudo, destacamos os documentos normativos que orientam o processo de formação básica do aluno, como: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e duas coleções de livros didáticos.

No processo de investigação desses documentos, buscaremos compreender a ecologia do objeto matemático probabilidade no Ensino Médio. Especificamente, compreendemos que, ao analisar o ecossistema relacionado à probabilidade nos documentos normativos, configura-se possível identificar a existência, sua abordagem ao longo do tempo e eventuais mudanças institucionais sobre objeto matemático na transição de um documento para outro.

Nesse processo, abordamos também alguns pontos relevantes da história da probabilidade e sua evolução de modo a se tornar objeto de ensino. A abordagem desse passeio histórico, dá-se devido a necessidade de compreender a evolução, a formalização matemática do conceito e o surgimento de suas diferentes abordagens. Além disso, destacamos alguns desafios enfrentados pelos professores em pleno século XXI, para o trabalho com a probabilidade em sala de aula.

Desse modo, a TAD nos ajudará a revelar parte das condições estabelecidas ao professor para o ensino de probabilidade, partindo da importância dada a esse objeto de ensino no currículo escolar, considerando sua relevância para a convivência do indivíduo em sociedade.

Além da relevância desse saber nos primeiros anos de formação da educação básica, no Ensino Médio a necessidade do aluno dominar elementos básicos se intensifica devido ao surgimento de novas aplicações e diferentes abordagens do objeto de ensino. E, segundo a BNCC, nessa última etapa de formação, espera-se que o aluno desenvolva plenas condições de relacionar os conteúdos escolares com as atividades cotidianas, com o objetivo de compreender os acontecimentos (fenômenos aleatórios) no mundo real.

Desse modo, faz-se necessário que o desenvolvimento do pensamento probabilístico seja constante durante todas as modalidades de formação básica, com a finalidade de potencializar os conhecimentos do aluno para uso adequado desse conhecimento em sua realidade, conforme adverte a BNCC. Sendo assim, acreditamos que o papel do professor nesse processo é atribuir metodologias instigadoras, que estimule o aluno a estabelecer vínculos entre o saber escolar e os fenômenos presentes em seu cotidiano. Para esse fim, destacamos a necessidade do professor empregar o uso de metodologias de investigação, que coloque o aluno em situação autônoma de aprendizagem, de modo a relacionar o conhecimento escolar com as adversidades cotidianas, por meio de situações de investigação.

2.1. A Transposição Didática (TD)

Em sua dimensão conceitual, a Transposição Didática (TD) é entendida como uma entidade de elaboração dos objetos de estudo. Esse processo é responsável por construir e transformar o saber de acordo com as necessidades de seu destinatário. Dá-se o nome de Transposição Didática devido a sua função que é transpor o saber ao sistema de ensino. Em vista disso, o termo “Didático” é utilizado em consideração as modificações aplicadas ao saber, tornando-o objeto de ensino.

A noção de Transposição Didática (TD) tem suas raízes no pensamento do sociólogo Michel Verret e reestruturação a partir das necessidades analíticas de Yves Chevallard. Esse

processo tem por finalidade explicar por meio de ciclos, a transformação do saber, tornando-o um objeto de conhecimento social.

Inicialmente, o saber, em sua fase original, não é ensinável. Contudo, à medida em que as transformações são processadas, algumas características originais do saber começam a se modificar, adaptando-se à realidade institucional e social de uma determinada comunidade ou instituição de ensino. Assim, de acordo com essas modificações, a transformação do Saber Científico em objeto de ensino ou conhecimento escolar não ocorre de forma neutra. Nessa transição do saber por diferentes transformações há todo um engajamento que influencia como as adaptações aplicadas ao saber devem ser realizadas, de tal modo a torná-lo ensinável e, consequentemente, aprendido. Nessa perspectiva, Chevallard (1991) define o processo de Transposição Didática (TD) destacando que:

> um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado Transposição Didática (p.45).

Sendo assim, o termo Transposição Didática (TD) está diretamente ligado ao modo como o conhecimento é elaborado e transformado em objeto de ensino. Quando o saber sai de seu ciclo inicial, conhecido como a fase de elaboração, ele passa por outras etapas de adaptação. Chevallard (1991) enfatiza que um saber idealizado como Saber a Ensinar passa por um processo semelhante ao de uma metamorfose, permitindo sua adequação para ocupar um espaço entre o currículo escolar. O processo que institui o Saber a Ensinar em objeto de ensino é denominado de Transposição Didática (TD).

Bosch e Gascón (2006) enfatizam que o processo de transposição tem início fora do ambiente escolar, por intermédio da seleção dos conteúdos a serem ensinados, procedimento que ocorre devido as necessidades e problemáticas sociais. A partir dessa categorização dos conteúdos, inicia-se o processo de simplificação ou adaptação, etapa essencial para desconstruir os saberes e transformá-los em objetos de ensino. Uma das primeiras contribuições da transposição é evidenciar que a Matemática não pode ser interpretada na realidade escolar sem antes recorrer às entidades responsáveis pela construção do Saber a Ensinar. Um dos vários motivos que justificam a necessidade da visita às entidades superiores está na compreensão das influências e exigências da *noosfera* para a abordagem de um determinado objeto de ensino em sala de aula.

Uma outra importante contribuição da Transposição Didática diz respeito ao surgimento da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Entre os anos de 1980 e 1985, os fenômenos

relacionados à Transposição Didática (TD) foram reformulados em função de estudar os objetos do conhecimento e suas relações institucionais a partir de uma perspectiva ecológica.

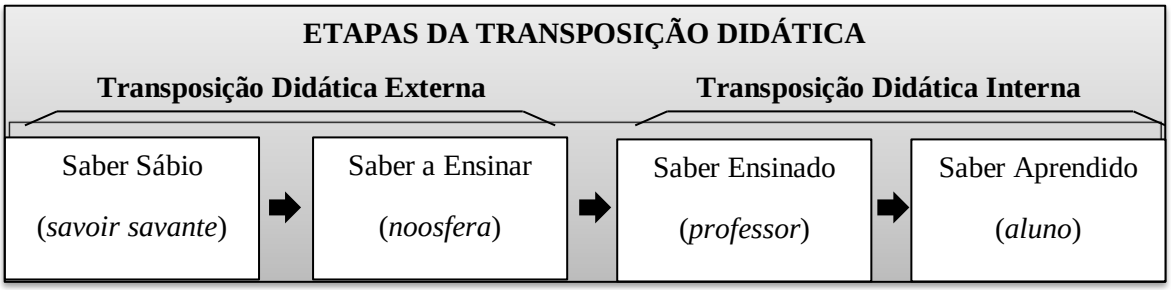
Com a necessidade de estudar a modelação da prática e a importância de detalhar, tanto a dimensão material quanto o corpus matemático, no âmbito da TAD surge a noção de praxeologia. Essa ferramenta da teoria, permite analisar as ações humanas, considerando que as atividades matemáticas são subconjuntos das atividades humanas e que toda atividade pode ser modelada pelo quarteto praxeológico, essa ferramenta configura-se como uma relevante noção da teoria para a compreensão do desdobramento das práticas sociais (Chevallard, 1999; Bosh e Gascón, 2006).

De modo geral, a definição fundamental da TAD reside na discussão de que toda atividade humana pode ser compreendida mediante a identificação dos elementos que compõem um modelo praxeológico. Incorporada na Didática da Matemática, a TAD, idealizada por Yves Chevallard, é reconhecida como um alargamento da Transposição Didática (TD) em função de suas limitações para o estudo das condições e restrições da difusão dos saberes no interior das instituições de ensino. Nesse sentido, a TAD teve como principal encargo institucional ampliar o escopo de análise da TD (Chevallard, 1996). Com a responsabilidade de justificar essa ampliação, o autor da teoria salienta que:

> O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise conduziu-me a propor uma teorização em que todo objeto possa aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas há também o objeto "escola", o objeto "professor", o objeto "aprender, o objeto "saber", o objeto "dor de dente", o objeto "fazer pipi", etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (Chevallard, 1996, p.127).

Para o estudo do processo de construção da matemática escolar, é importante descrever as diferentes fases de adaptação pelas quais o saber é submetido. Esse processo é composto por quatro etapas, cuja função é descontextualizar o Saber Científico, transformando-o em saber ensinado ou aprendido. As simplificações que ocorrem nesse processo podem ser visualizadas, conforme Esquema 01.

Esquema 01: Etapas da Transposição Didática



Fonte: adaptado de Cavalcante (2018)

O processo ligado à Transposição Didática Externa (TDE), está relacionado com as adaptações do saber em sua trajetória no exterior das instituições de ensino ou sala de aula. Essa fase (TDE) engloba as etapas de transformação denominadas no Esquema 01 de "Saber Sábio" e "Saber a Ensinar", que são designados como o momento da elaboração do conteúdo e seleção do objeto a ser ensinado e, consequentemente, compreendido.

Quando o Saber Sábio se transforma em Saber a Ensinar *(noosfera)*, ocorre a primeira aplicação evolutiva. Essa transição entre as etapas envolve os agentes que moldam o sistema de ensino de uma determinada sociedade, como pesquisadores, autores de livros didáticos, Ministério da Educação, Secretaria de Educação, etc. A *noosfera* também desempenha um papel essencial em decidir quais saberes devem permanecer ou serem removidos de documentos oficiais, instituições de ensino e livros didáticos, considerando o envelhecimento do objeto de ensino e a necessidade de adaptação ou substituição do mesmo.

Já na Transposição Didática Interna (TDI), o saber sai da *noosfera* e adentra a instituição escolar e a sala de aula. Nesse processo, o saber passa de Saber a Ensinar a Saber Ensinado. O professor é o principal agente dessa transformação. Na última etapa da transposição na TDI, o saber ensinado se transforma em Saber Aprendido, momento em que o saber é internalizado e transformado em conhecimento pelo aluno. É importante destacar que o processo de TDI está localizado na relação institucional entre o professor, o aluno e o saber em jogo.

Em resumo, observa-se que os ciclos da TDE são denominados processos didáticos e não didáticos, ocorrendo no exterior das instituições de ensino. Já as etapas da TDI consistem nas transformações que acontecem no interior das instituições escolares, onde o saber é mobilizado de modo a se tornar conhecimento.

De maneira geral, o Saber Sábio é elaborado pelos cientistas, enquanto o Saber a Ensinar é o momento de interferência da *noosfera*, responsável por criar conexões entre o saber original e o sistema de ensino. Por sua vez, o Saber Ensinado refere-se ao entendimento do professor sobre os elementos a serem ensinados, conforme propostos pela *noosfera*. Por fim, o Saber Aprendido é a interpretação do aluno sobre o que foi ensinado pelo professor.

Partindo dessa breve discussão sobre a TD, entendemos que nosso estudo está localizado na etapa TDE, haja vista que o foco principal é analisar o ambiente praxeológico duas coleções de livros didáticos e realizar a proposição de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. Partido desses princípios, ratifica-se que essa pesquisa encontra-se situada na etapa que Chevallard (1991) define como Saber a Ensinar, considerando a análise documental em torno do objeto de ensino probabilidade e a atividade elaborada como modelo alternativo.

No processo de TD, segundo Gascón (2018), é possível identificar elementos que possibilitam analisar a estrutura dos modelos de ensino atuais, buscando compreender sua eficácia no desenvolvimento de práticas sociais, sejam elas acadêmicas ou profissionais. No âmbito da transposição, enquanto as características do modelo dominante refletem o presente das práticas institucionais instituídas em torno de um determinado objeto de ensino, a Atividade de Estudo e pesquisa (AEP) surgem como uma proposição alternativa para que o modelo dominante possa, por exemplo, ser validado, questionado e superado.

Dessa forma, a TD viabiliza investigar o contexto das práticas institucionais na transição do Saber Ensinado e Saber Aprendido, relevando os critérios das escolhas aplicados à seleção de conteúdos que compõem o currículo escolar, na estrutura de materiais didáticos de apoio ao docente e na organização do ensino das matrizes curriculares. A partir dessa investigação, torna-se viável questionar a *noosfera* e propor modelos alternativo como forma de ampliar o número de possibilidades de práticas no processo de ensino e aprendizagem de determinados objetos de ensino.

2.2. A Teoria Antropológica do Didático

Diante o direcionamento do nosso estudo, ressaltamos que a TAD desempenha um importante papel nesse processo. Por meio das ferramentas teórico – metodológicas da teoria é possível revelar a ecologia e razão de ser dos objetos de ensino no interior das instituições didáticas. Nesse sentido, segundo Cavalcante (2018), a palavra ecologia tem o mesmo sentido do que é empregado na biologia, indicando a epistemologia da palavra como o estudo das relações entre o homem e o meio social. Um exemplo disso é a análise da relação pessoal de um grupo de pessoas com o objeto de ensino probabilidade, que pode ser visualizada sob a ótica de um conjunto de fatores que determina o núcleo de interação e as relações institucionais com os conhecimentos probabilísticos no seio de determinadas instituições.

Assim, através da TAD e suas ferramentas de análise é possível compreender com são refletidas no processo de ensino e aprendizagem as particularidades que asseguram a existência do saber e sua integração ao currículo escolar ou instituição.

Para o estudo das relações institucionais, Chevallard (1996) admite quatro conceitos primitivos: a noção de Objeto (O), Relação Pessoal (X, O), Pessoa (X) e Instituição (I). Para o autor da teoria tudo pode ser considerado um objeto, como, por exemplo, um computador, um software como o GeoGebra, um conceito como o de probabilidade, uma teoria, o número 2, o nome dois, as pessoas, as instituições, um sentimento, uma emoção, etc. Parafraseando o autor,

compreende-se que a noção de objeto é ampla, construindo a ideia dessa noção tanto a partir de uma realidade material quanto imaterial.

Além disso, para existência de um objeto O, destacam-se algumas condições que devem ser levadas em consideração: I - Inicialmente, o objeto (O) deve ser reconhecido por pelo menos uma pessoa ou instituição; II - Um objeto (O) pode não existir para as mesmas pessoas ou instituições; III – O objeto (O) Pode existir para mais de uma pessoa ou instituição; IV - A existência de um objeto (O) depende de sua relação com pessoas ou instituições.

De acordo com as condições para a existência de um objeto (O), é possível afirmar que essa noção não existe no vácuo, sem que que haja o reconhecimento de uma Pessoa (X) ou uma instituição (I). Quando um objeto existe para um indivíduo, sua presença é denota a partir de R(X,O), evidenciando a Relação Pessoal de um indivíduo (X) com o objeto (O). O mesmo se aplica para a existência de objeto (O) na realidade de uma instituição, relação que o autor da teoria representa por R(I,O).

A segunda noção é a de Relação Pessoal, representada pelo par ordenado (X, O). De acordo com Chevallard (2009), essa noção é estruturada por um conjunto composto por todas as interações e ciclos de intimidade que um indivíduo (X) pode ter desenvolvido com um determinado objeto (O). A partir dessa conexão entre denotada de R(X, O), se estabelece o conceito de Relação Pessoal R(X, O).

Partindo desses princípios, destacamos que um saber como o de probabilidade é um objeto no âmbito da TAD, uma vez que esse objeto de ensino é reconhecido por uma pessoa ou por uma instituição. Conhecer um objeto significa criar uma relação pessoal com ele. Essas relações pessoais estão, consequentemente, condicionadas pela relação institucional. Por exemplo, a relação de um professor de Matemática com a probabilidade é diferente da relação do professor de Pedagogia, que, em sua base de formação inicial, precisa transitar por outros conteúdos além da Matemática. De maneira análoga, Santos e Menezes (2022) salientam que:

> Um objeto O que identificamos como cadeira só existe porque a população (pessoa) e a sociedade (instituição) a reconhecem como tal e, assim, satisfaz a sua condição de existência. [...] devemos perceber que alguns objetos não existem (ou ainda não existem) para algumas instituições. Por exemplo, o Tardígrafo, animal microscópico que vive em finas películas de água, é objeto de estudo para os biólogos, mas não é conhecido pela maioria de nós. (p. 650).

Nessa perspectiva, evidencia-se que há objetos que podem existir para os professores, que os conhecem e constroem uma relação pessoal ou institucional com eles. Contudo, para os alunos, esses objetos podem ainda se constituir como um elemento desconhecido e que será reconhecido à medida em que os estudantes estabeleçam uma relação com o professor e/ou instituição, que, ao longo do processo de ensino e aprendizagem farão com o que esses objetos

existam também para os alunos. Além disso, essa relação pode variar dependendo da instituição na qual o objeto possui uma estabilidade de vida.

A terceira noção é a de Pessoa (X). Chevallard (1999 *apud* Santos e Menezes, 2022) adverte que esse conceito possui três estágios: Indivíduo, Sujeito e Pessoa. O primeiro estágio, o de Indivíduo, corresponde às condições biológicas comuns a todos os seres humanos, ou seja, somos seres biologicamente iguais, possuindo, portanto, características inalteráveis ao longo de nossas vidas. Já o segundo estágio, denotado de sujeito, é caracterizado de acordo com vínculo do Indivíduo com uma ou mais instituições. Nessa transição por diferentes instituições, ele se assujeita às regras e demandas institucionais, tornando-se um sujeito parcial de uma determinada instituição. Por fim, o estágio de Pessoa constrói-se a partir do conjunto de interações e experiências vivenciadas pelo Indivíduo ao longo de sua trajetória, transitando por diversas instituições.

Assim, os Indivíduos que transitam por diversas instituições vão se constituindo como Pessoa. Nessas instituições, eles criam ou modificam as relações com os objetos presentes, de maneira que, ao longo de sua vida, essas relações passam a compor o universo cognitivo das pessoas ou simplesmente o equipamento praxeológico. Nesse contexto, o universo cognitivo corresponde ao conjunto de objetos com os quais o indivíduo estabelece relações durante sua trajetória pelas instituições às quais ele se assujeitou (Chevallard, 2018).

Portanto, fica evidente que, ao longo de nossas vidas, transitamos por diversas instituições. Enquanto Indivíduos, continuamos sólidos e imutáveis, o que se modifica é o nosso estágio de Pessoa, ou seja, nossas relações com o mundo e objetos que conhecemos nas instituições pelas quais passamos. Conforme Cavalcante (2018), a noção de Pessoa deve ser compreendida de forma dinâmica, especialmente, no processo de ensino e aprendizagem da probabilidade, pois nesse núcleo de aprendizado atuam elementos didáticos, epistemológicos e psicológicos. Dessa forma, a Pessoa é sempre um sujeito biológico, social e psicológico.

Nessa perspectiva, Chevallard (2003 apud Barbosa, 2017) enfatiza que os indivíduos são sujeitos membros de instituições desde o nascimento, momento em que se inicia o processo de socialização. No âmbito dessa sistematização, a família é a primeira e mais importante instituição, responsável por influenciar no desenvolvimento de habilidades essenciais, como andar e falar e assimilar contextos culturais. Além da família, a escola desempenha um papel fundamental na caracterização do indivíduo nesse processo de formação social. É a escola a instituição encarregada por desenvolver competências para o reconhecimento de letras, sílabas, números, diferenciando-os e auxiliando na formação de palavras, bem como no domínio de leitura, escrita e contagem.

Outro conceito primitivo importante é a noção de instituição I, compreendida como um dispositivo social. De acordo com Cavalcante (2018), na TAD, as instituições são entendidas como agentes que interferem e moldam a cognição dos sujeitos. No caso das instituições formais de ensino, elas abrigam e mantém relações institucionais com diversos objetos do saber. Logo, na TAD, o termo dispositivo social é amplo, podendo incluir entidades como: a escola, a família, a religião, a bíblia, o livro didático, um minicurso, um evento, um relacionamento, etc.

Nas vertentes da dimensão institucional, existem as macro e as micro instituições. O significado de macro instituição é genérico, podendo se referir a uma entidade social com maior escopo de responsabilidade e autonomia sob as demais, incluindo o funcionamento de instituições menores. Por exemplo, no sistema de ensino, os materiais didáticos, as etapas de formação básica e os professores são exemplos de micro instituições que pertencem a uma determinada macro instituição educacional. Por outro lado, as escolas, as secretarias de educação municipais e estaduais ilustram micro instituições que fazem parte da macro instituição Ministério da Educação.

Na TAD, um saber é objeto de pelo menos uma instituição (I), e, para sua vivência, esse objeto deve estar em conformidade com as regras institucionais estabelecidas por (I), tornando-se sujeito parcial ou total dessa instituição. O saber probabilidade, para sua integração ao currículo escolar, passou por diversas transformações, se constituindo como saber matemático e adaptando-se às necessidades da instituição currículo escolar. Esse processo ocorre na Transposição Didática (TD), onde o saber passa de Saber Científico ou Acadêmico para a etapa de Saber a Ensinar.

Nesse processo de integração ao currículo, também são levadas em consideração as razões de ser do objeto, como: “O que é C? De onde vem? Por que isso precisa ser ensinado? Qual a sua razão de estar na matemática escolar? Que propostas de ensino existem para C? O que é dito ou conhecido sobre C?” (Ruiz-Olarría, 2015, p. 137 – 138).

A TAD possibilita responder a esses questionamentos apontados anteriormente por meio de visita a diversas instituições, podendo ser uma delas o livro didático. Além disso, com os dispositivos da teoria, é permitido analisar as ações ou prática do professor, destacando as condições e restrições para o desempenho do trabalho docente com um devido objeto de ensino dentro de uma determinada instituição. De modo inerente, Santos e Menezes (2015. p. 649) enfatizam que, assegurados na TAD, é possível “[...] analisar um dos problemas do professor que é preparar seu curso de aulas e depois colocá-lo em prática, ou seja, como organizar um objeto de estudo (matemático) e fazê-lo funcionar em sala de aula.”

Nos pressupostos da TAD, percebe-se que o processo de ensino de objetos matemáticos é composto por condições e restrições que influenciam e devem ser levadas em consideração tanto no estudo da prática docente quanto na análise de materiais de apoio ao professor. Chevallard (2009) enfatiza que, para uma pessoa ou instituição tudo pode ser condicionado. Isto é, dentro das condições necessárias para o desenvolvimento de uma prática social, existem também as restrições, que podem ser definidas como condições que impossibilitam a realização do trabalho docente com um determinado saber matemático. Simultaneamente, há as condições que sustentam a prática do professor, permitindo sua autonomia para o desenvolvimento do seu trabalho em sala de aula.

Desse modo, ao invés de analisarmos as condições e as restrições de maneira separada, podemos olhar para o trabalho do professor sob uma mesma perspectiva condicional. Nesse sentido, de acordo com Chevallard (2009), para uma determinada pessoa ou instituição tudo é, em princípio, condição – e uma condição também pode ser uma restrição. Assim, podemos classificar esses estágios (condição e restrição) como condições, que, de fato, permitem a realização do trabalho docente de maneira adequada condizente com as orientações curriculares e demandas sociais, e também como condições que por algum motivo didático, impossibilitam que o desenvolvimento de uma prática ocorra de forma suficiente dentro de uma determinada instituição.

Ao olhar para o objeto de ensino probabilidade, escolhemos o livro didático como cenário de investigação, no intuito de compreender as condições presentes nesse documento para a abordagem de conhecimentos probabilísticos.

Nessa trajetória de investigação, podemos levantar alguns questionamentos e buscar respostas a partir da visita aos documentos, tais como: o material analisado estimula, de fato, o estudo objeto matemático? Quais os conceitos de probabilidade são abordados? Quantas questões estão presentes no livro didático para o ensino desse conceito no Ensino Médio? Quantas técnicas distintas podem ser exploradas nas situações propostas no material? Quais conhecimentos sobre o conceito podem ser mobilizados pelos alunos? Como é a organização de mobilização desses conhecimentos: técnico ou investigativo? Essas são algumas das questões que podem ser respondidas por meio da prática institucional. Mas como analisar essa prática e compreender esses aspectos? É partir daí que começamos a abordar a noção de praxeologia, que discutiremos a seguir.

2.2.1. Praxeologias (Organização Praxeológica)

O termo praxeologia vem da etimologia grega, onde *praxis* corresponde à prática ou ação *e logia* ao estudo ou conhecimento. Desse modo, realizar uma investigação praxeológica significa estudar a prática ou ação do conhecimento humano. Na TAD, a praxeologia é considerada uma de suas principais ferramentas de análise. Essa noção é integrada por um conjunto de elementos que permitem a investigação do desenvolvimento das atividades humanas, com ênfase nas atividades matemáticas.

Depois da antropologia cognitiva, o termo praxeologia é fundamental, e é considerado o coração da TAD. A praxeologia permite modelar a realidade das práticas institucionais em termos de tipos de tarefas, técnicas para cumpri-las, tecnologias que explicam as técnicas, e as teorias que dão sustentação as tecnologias. Assim, simbolicamente, o quarteto [T, τ, θ, Θ] compõe uma praxeologia.

De acordo com Chevallard (1996), toda atividade humana pode ser esquematizada por esses quatro elementos que formam o quarteto praxeológico [Tipo de tarefa (T), Técnica (τ), Tecnologia (θ), Teoria (Θ)]. Definitivamente, esses elementos são distribuídos em dois blocos, denominados de: Saber – Fazer ou prático – técnico [T, τ], (que está diretamente ligado aos tipos de tarefas e técnicas para o cumprimento de uma determinadas tarefas) e o bloco Saber ou tecnológico – teórico [θ, Θ], (que referente as tecnologias e teorias que justificativa e sustentam as possíveis técnicas desenvolvidas). De modo geral, Almouloud (2015) adverte que:

> Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular a atividade matemática. De acordo com o autor, toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica (p. 11).

Para Chevallard (1999), as atividades humanas são derivadas em tarefas (t), ou tipos de tarefa (T) a serem cumpridas, expressas por verbos ou gêneros de ação. Na Matemática, os mais comuns são: calcular, demonstrar, construir, elaborar, encontrar, determinar, etc. Esses elementos devem ser complementados por um grau de especificidade relativamente preciso. No âmbito dessas implicações, é possível notar que (t) é um elemento extraído de (T). Nessa perspectiva, enfatiza-se que $t \in T$ (t pertence a T). Essas tarefas ou subtipos de tarefas são composições que traçam o percurso de resolução para um dado determinado tipo de tarefa T. Assim, evidencia-se que um tipo de tarefa pode ser composto por mais de uma tarefa (subtipo de tarefa).

Almouloud (2015) enfatiza ainda a importância da complementação aos gêneros. Ele ressalta que esses verbos de ação, se utilizados sozinhos, podem ser caracterizados como gêneros de uma tarefa, tais como: calcular, decompor, demonstrar, somar, dividir, extrair,

dentre outros. Por outro lado, somar dois números inteiros, resolver uma equação do 2° grau, calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento, são exemplos de tipos de tarefa explícitos, conduzidos por tarefas do tipo t, como "Calcular o resultado da soma entre os números 14 e 10; Resolver uma equação do tipo $ax^2 - bx + c = 0$; Determinar a probabilidade de sair um número múltiplo de ímpar no lançamento de um dado cúbico não viciado", são ilustrações de tarefas extraídas de supostos tipos de tarefa.

Já a técnica é um elemento da praxeologia definido como a maneira de fazer uma determinada atividade. Sendo mais breve, uma técnica é um possível percurso de procedimentos traçados para executar um tipo de tarefa qualquer. Representado por (τ), de acordo com o autor da teoria, pode existir uma única ou um conjunto de técnicas para um mesmo tipo de tarefa T. Assim, a partir de uma ou mais tarefas extraídas de um único tipo de tarefa específico, pode haver mais de uma técnica com as mesmas ou maiores precisões para resolver T. Assim, conforme Chevallard (1999), uma técnica pode ser superior a outra, se não como um todo para resolver T, mas em maior parte de T.

É importante ressaltar que as técnicas podem variar de uma instituição para outra. Por exemplo, a técnica utilizada por um aluno dos anos iniciais para resolver uma multiplicação pode ser diferente de uma técnica apresentada por um aluno dos anos finais do Ensino Fundamental. Um dos fatores para justificar essa mudança é a transição por diferentes instituições, considerando que, nesse processo, as praxeologias podem ser reconstruídas ou substituídas. Chevallard (1999) faz uma divisão entre as técnicas: (I) técnicas institucionalmente reconhecidas (aquelas que existem no interior da instituição I na qual o indivíduo está vinculado); (II) técnicas alternativas (que são aquelas que existem, mas pertencem a outras instituições I).

Um importante nicho a ser frisado, embasado em Chevallard (1999), é que as técnicas nem sempre serão de natureza algorítmica. O modelo de uma técnica é representado de acordo com o contexto institucional e de gênero do tipo de tarefa a ser executado. Por exemplo, os tipos de tarefa "passar uma roupa", "passear com a família", "lavar a louça", "andar de bicicleta" são amostras de que as técnicas não serão, necessariamente, de cunho algorítmico. Por outro lado, "Calcular a probabilidade de um evento (A) ocorrer" é um tipo de tarefa que vai necessitar de um procedimento de natureza algorítmica. Assim, o modelo representativo das técnicas algorítmicas podem aparecer com maior frequência nas instituições de ensino, nas quais predominam o processo de ensino e aprendizagem de saberes matemáticos.

Já a tecnologia *(θ)*, que nada mais é do que um elemento do quarteto praxeológico que existe para explicar e justificar as técnicas desenvolvidas no processo de resolução de um

determinado tipo de tarefa T, é um componente que tem por finalidade detalhar a técnica, explicando os motivos dela ser eficiente e cumprir o tipo de tarefa proposto.

No contexto da TAD, pode existir mais de uma tecnologia na execução de um mesmo tipo de tarefa. Isso Justifica-se pelo fato de que uma única técnica pode não ser suficiente para a resolução de uma situação proposta, dada a complexidade da questão. Um exemplo disso é o cálculo da probabilidade por meio da união de eventos, que pode envolver a definição de probabilidade clássica e a propriedade da união de eventos como técnica principal pra solucionar o tipo de tarefa. Presume-se que, nesse procedimento técnico, seja necessária duas tecnologias: uma para justificar o uso da definição de probabilidade clássica e outra para a aplicação da união de eventos.

Chevallard (1999) define uma tecnologia (θ) como um discurso racional que tem como um de seus principais fundamentos justificar racionalmente uma determinada técnica (τ) indicada ou sugerida, assegurando sua eficiência na realização de um determinado tipo de tarefa. Partindo desse princípio de justificação, Araújo (2009, p. 38) ressalta que na "matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio de uma demonstração". Ademais, para qualquer que seja o tipo de tarefa T, sempre existirá pelo menos um embrião tecnológico para esclarecer a técnica (τ).

Além da função de justificar racionalmente uma técnica, que é o primeiro objetivo de uma tecnologia, Chevallard (1999) ainda considera a existência de mais dois objetivos, tais como: tornar intelegível e esclarecer uma técnica (τ), e assegurar a elaboração de outras técnicas. Se o primeiro objetivo é garantir que se cumpra de forma eficiente o tipo de tarefa T proposto, o segundo é explicar o porquê do funcionamento da técnica ter sido considerado suficiente e bem definido. Por fim, o terceiro objetivo de uma tecnologia é garantir a produção de novas técnicas, mais precisas e adequadas para a resolução precisa de determinados tipos de tarefa T.

O quarto e último componente que integra o quarteto praxeológico é a teoria *(Θ)*, elemento que mobiliza e dá sustentabilidade às tecnologias no processo de produção e validação das técnicas. Assim, toda e qualquer tecnologia é assegurada por uma teoria. Nesse sentido, Araújo (2009) destaca que:

> A *teoria* (Θ) tem como objetivo justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. "Passa-se então a um nível superior de justificação- explicação-produção, [...] retomando com relação à tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica". Chevallard adverte, no entanto, que geralmente essa capacidade de justificar e de explicar da teoria é quase sempre obscurecida pela forma *abstrata* como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente (p. 38).

Dependendo da etapa de formação na qual se pretende explorar as Organizações Praxeológicas (OP), é comum que as teorias estejam cumprindo o seu papel de sustentar as tecnologias de forma implícita, sem aparecer nos materiais institucionais utilizados para a caracterização do ambiente praxeológico. Essas evidências podem ser ligeiramente percebidas, principalmente nas etapas de formação básica, onde geralmente o foco principal está centrado no bloco Saber-Fazer.

Partindo da apresentação das características particulares dos componentes praxeológicos, no Quadro 01, apresentamos um resumo das funções definitivas desses elementos.

Quadro 01: Elementos do quarteto praxeológico

Componente	**Simbologia**	**Descrição**
Tipo de Tarefa	(T)	Tipos de Tarefas a serem efetivadas, que se constituem a partir das diversas Tarefas
Técnica	(τ)	Diferentes procedimentos utilizados para executar os Tipos de Tarefas
Tecnologia	(θ)	Método utilizado para explicar os procedimentos técnicos utilizados para execução de um determinado Tipo de Tarefa
Teoria	(Θ)	Aporte teórico utilizado para sustentar as tecnologias utilizadas no processo de explicação das técnicas

Fonte: Produção nossa

No âmbito estrutural de uma praxeologia, Chevallard (1996) ressalta que essa ferramenta analítica da teoria pode ser classificada em quatro categorias: pontual, local, regional e global. Uma praxeologia é pontual [T, τ, θ , Θ] quando há a existência de uma única tarefa específica. Enquanto na local [Ti, τi, θ , Θ], a complexidade da tarefa exige mais de uma técnica associada a uma determinada tecnologia. Por outro lado, a regional [Tij, τij, θj, Θ], quando a tarefa necessita de tarefas, técnicas e tecnologias embasadas em uma única teoria. Por fim, a global [Tijk, τijk, θjk, Θ k], são categorizadas desse modo quando há o agrupamento de várias praxeologias regionais correspondendo a várias teorias Θk (Araújo, 2009).

De maneira geral, é importante salientar que o encontro com as praxeologias regionais e globais é, geralmente, incomum em documentos institucionais voltados para a formação de estudantes na educação básica. Esses elementos podem ser identificados com mais frequência em materiais didáticos voltados para o âmbito acadêmico.

Além dessas categorizações em torno das praxeologias, ainda existem as Organizações Matemáticas e Didáticas (OM) e (OD), onde a primeira diz respeito as atividades matemáticas existentes em uma devida instituição. Enquanto a segunda refere-se ao modelo, a maneira de fazer uma OM funcionar.

A seguir, apresentaremos uma breve discussão em torno dessas noções, começando pela Praxeologia ou Organização Matemática (OM).

2.2.2. Praxeologia Matemática ou Organização Matemática

A Praxeologia Matemática (PM) ou Organização Matemática (OM) é uma ferramenta da TAD que apresenta as possibilidades para estudo de um determinado tema ou assunto nas instituições de ensino. Assim, é possível caracterizar uma OM como a estrutura curricular modelada em tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias presentes na instituição escolar, e que subsidiam a transposição de um determinado conceito. Esse conceito deve passar por adequações triviais, realizadas pelo agente responsável, entre os ciclos de Saber a Ensinar e Saber Ensinado.

De maneira similar, Barbosa (2017, p. 48) salienta que as Prexeologias Matemáticas:

> referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula, permitindo que os alunos atuem na resolução de problemas de forma adequada e, ao mesmo tempo, entendam o que é feito de maneira racional. Portanto, constituem-se em torno de tipos de tarefas (T) matemáticas executadas, de técnicas (τ) matemáticas esclarecidas, de tecnologias (θ)justificadas e de teorias (Θ) que são, a princípio, os objetos matemáticos a serem aprendidos ou construídos

De modo a complementar o que foi pontuado, observa-se que uma OM pode ser definida como a realidade matemática construída para o trabalho com determinado objeto matemático em sala de aula. Além disso, uma OM pode ser interpretada como o conjunto de atividades que existem em uma instituição para o ensino ou estudo de um determinado conceito matemático específico, como a probabilidade. De modo geral, pode-se considerar uma OM como qualquer atividade matemática presente em documentos institucionais elaborados para conduzir a prática em sala de aula.

Para Chevallard (1999), ao longo do percurso institucional, as praxeologias envelhecem e deixam de fazer sentido no processo de problematização de situações de estudo. Assim, seus artefatos tecnológicos e teóricos perdem suas credibilidades. Desse modo, surge a possibilidade de novas praxeologias, que podem ser originalmente produzidas ou mesmo reproduzidas, caso já existam em uma outra instituição social.

Santos e Menezes (2022) enfatizam que as Praxeologias Matemáticas possuem uma significativa importância para que o docente possa validar a veracidade das propostas didáticas.

Um dos papeis do professor é analisar os programas de ensino que habitam as instituições escolares, como as propostas curriculares e o livro didático, elementos que compõem os saberes matemáticos escolhidos para serem ensinados em sala de aula.

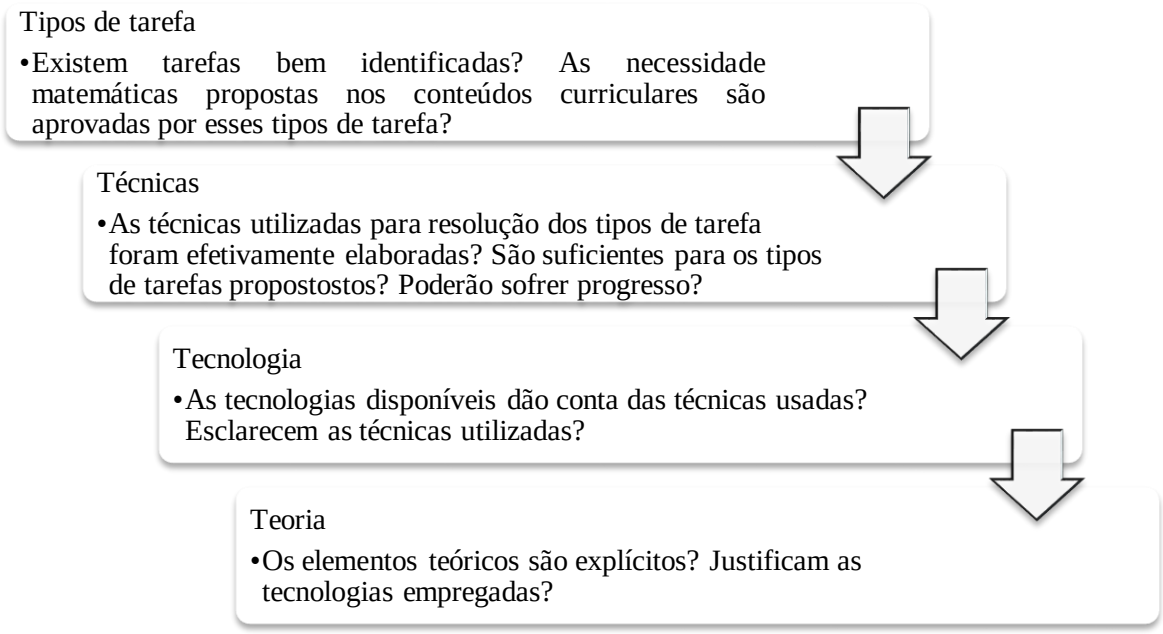
> Dentre esses outros, é importante destacar que hoje, de forma mais abrangente (em termos de acesso), o professor também tem à disposição, informações na internet (Portais do MEC, das Secretarias Estaduais e Municipais, Google, YouTube, Redes Sociais, entre outros sites), oficiais e não oficiais, mas que, diretamente ou indiretamente, influenciam na construção dessa realidade matemática porque se constituíram fontes corriqueiras de pesquisa do professor (Lopes, 2020, p. 56).

Assim, o trabalho do docente enquanto investigador de uma OM diz respeito a analisar rigorosamente os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias contidas nas obras didáticas destinadas ao ensino de um determinado saber matemático em uma devida instituição de ensino. Nesse processo de análise, o objetivo principal dos professores é investigar e validar a credibilidade das Praxeologias Matemáticas direcionadas ao trabalho docente em sala de aula, se elas estão em acordo com a realidade de documentos normativos e cotidianas dos estudantes.

Nessa perspectiva, Fonseca (2004 apud Barbosa, 2017) enfatiza que a descrição das Organizações Matemáticas (OM) em níveis (prático, técnico, tecnológico, teórico) é suficiente, inicialmente, para modelar a atividade matemática institucional. Esse é um dos postulados da TAD, que deve ser testado empiricamente. Vale ressaltar ainda que, assim como existem possibilidades para análise de documentos oficiais, na posição de pesquisador também é possível investigar as Organizações Matemáticas (OM) presentes na prática ou planejamento do professor. Considerando o docente como sujeito ou agente responsável pela transposição do saber, é possível verificar como ocorre o processo de transformação do Saber a Ensinar em Saber Ensinado através das observações da prática docente.

De modo geral, esse processo permite ao agente responsável pela análise, investigar a validade das praxeologias que vivem nas instituições de ensino. É fundamental que ele verifique se elas estão alinhadas com a realidade dos indivíduos sujeitos de uma determinada comunidade escolar, se é preciso realizar adaptações ou se é necessário elaborar novas praxeologias de ensino. Para avaliar a confiabilidade das organizações existentes no núcleo de uma determinada instituição I, é essencial considerar algumas questões, conforme Esquema 02 a seguir.

Esquema 02: Questionamentos em torno do quarteto praxeológico



Fonte: adaptado de Barbosa (2011, p. 68 – 69)

Além das Organizações Matemáticas (OM) discutidas aqui, existem também as Organizações Didáticas (OD), que contemplam o estudo de uma OM. Se por um lado, pensamos em colocar uma OM em prática, por outro, há a necessidade de refletir sobre como mobilizá-la. Assim, a seguir apresentaremos uma breve discussão mais detalhada em torno das Praxeologias Didáticas (OD).

2.2.3. Praxeologia Didática ou Organização Didática

A Praxeologia Didática ou Organização Didática (OD) corresponde a maneira como o professor desempenha o trabalho pedagógico com um determinado objeto de ensino. Assim, uma OD tem por finalidade gerenciar o funcionamento de uma OM na esfera de uma determinada instituição educacional.

Essa organização busca orientar o docente no processo de proposição de estratégias didáticas no intuito de responde à questões do tipo: *como ensinar um determinado conteúdo em um dado nível de ensino?* Por exemplo, ao introduzir um objeto de ensino específico como a probabilidade, podemos refletir sobre questionamentos do tipo: *como calcular a probabilidade de comprar um bilhete na mega sena e ele ser premiado?* Essa tarefa é conduzida por uma Organização Didática (OD), que tem o objetivo de investigar elementos específicos do saber em jogo, como por exemplo: *Como ensinar a definição clássica da probabilidade?*

Desse modo, compreendemos uma Organização Didática (OD) como um meio de mobilizar o funcionamento regular de uma Organização Matemática (OM). Assim, partindo desse pressuposto, entendemos que uma OD deve envolver um planejamento efetivamente ligado a maneira de “Como ensinar C?”.

Bittar (2017) alerta que, em muitos casos, uma OD escolhida para cumprir uma tarefa do tipo “como ensinar tal conteúdo” tem uma forte relação com as crenças do professor de como o aluno pode aprender ou como o docente acredita que ele aprende. “Se o professor acredita que a aprendizagem ocorre por meio de reforço e estímulo, então isso transparecerá em sua escolha sobre a forma como cumprirá a tarefa “ensinar um determinado conteúdo” (Bittar, 2017, p. 380).

De maneira geral, enquanto uma Organização Matemática (OM) condiciona o estudo de um determinado objeto matemático por meio de tipos de tarefas T a serem cumpridos por técnicas τ, esclarecidas e justificadas por tecnologias θ, sustentada por teorias Θ, a Organização Didática (OD) é responsável por dirigir o estudo dessa realidade matemática de modo a tornar o Saber Ensinado em Saber Aprendido.

Um exemplo disso é quando somos orientados a realizar o estudo sobre o conceito de probabilidade em um determinado nível de escolaridade específico, como o Ensino Médio, por exemplo. A Organização Didática (OD) refere-se à seleção de estratégias didáticas utilizadas para facilitar a transformação do saber em conhecimento pelo aluno. Além disso, é importante salientar que essa organização não se limita à prática docente. Ela se encontra-se presente também em documentos institucionais, como o livro didático, principal referência didática utilizada para fins pedagógicos.

Partindo desse princípio, nessa pesquisa, focamos no estudo dessa organização a partir do livro didático, analisando como ela encontra-se presente nos materiais didáticos com a finalidade de orientar o trabalho com conhecimentos probabilísticos, assumindo a responsabilidade de coordenar as Organizações Matemáticas (OM). É essencial destacar que uma Organização Didática (OD) nem sempre será exibida de forma instigadora e estimulante. Em conformidade com Bittar (2017), muitas delas serão construídas a partir da crença pessoal do professor. Se o docente acredita que o aluno aprende por meio de memorização de procedimentos e fórmulas, consequentemente, não haverá indícios de uma Organização Didática (OD) que conduza uma Organização Matemática (OM) mediante um percurso de estudo investigativo.

Chevallard (1999) salienta que, assim como qualquer Organização Praxeológica (OP), uma Organização Didática (OD) também pode ser analisada do ponto de vista do quarteto

praxeológico (tipos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria). Além disso, existem os momentos didáticos, uma ferramenta que possibilita ao professor refletir sobre suas Praxeologias Didáticas. Esses momentos didáticos, ou de estudo, são divididos em seis encontros, cada um com uma função específica, cujo objetivo é apresentar uma realidade funcional do estudo de um determinado saber.

Nessa organização funcional, o *primeiro momento* de estudo é denominado de primeiro encontro com uma Organização Matemática (OM). Esse pode ser definido como o primeiro encontro ou reencontro com o objeto a ser estudado, que pode ocorrer de diversas formas. Podendo acontecer por intermédio do primeiro contato com um problema ou determinado tipo de tarefa T a ser resolvido (Chevallard, 1999).

O *segundo momento didático* é o de exploração de um tipo de tarefa (T) e elaboração de uma técnica relativa a T. Segundo Chevallard (1999), o estudo e a resolução de um problema se complementam. Quando o estudante tem seu primeiro encontro com uma Organização Matemática (OM), a próxima ação é compreender a complexidade do objeto estudado, identificando o tipo de tarefa T e refletindo sobre a elaboração de pelo menos uma técnica para cumprir o problema proposto. O autor da teoria ainda enfatiza que estudar um determinado problema é um caminho coberto de possibilidades para produzir e desenvolver técnicas relativas a diversas situações do mesmo tipo.

O *terceiro momento didático* é o da constituição do ambiente teórico – tecnológico. Chevallard (1999) ressalta que esse momento está em conformidade com os momentos anteriores Por trás de um tipo de tarefa T e uma técnica elaborada, há sempre um discurso teórico – tecnológico para justificar e validar a técnica elaborada, mesmo que de forma implícita. O autor da teoria ainda destaca que, em algumas instituições, esse momento pode ser considerado como a primeira etapa de estudo de uma Organização Matemática (OM) em uma determinada obra didática.

O *quarto momento didático* dedica-se ao trabalho com a técnica, que tem por finalidade aprimorá-la, tornando-a mais eficiente e confiável. Nesse estágio, é possível investigar a veracidade do procedimento aplicado e criar novas técnicas para resolver um mesmo problema proposto. Além disso, esse processo de estudo incorpora o aperfeiçoamento da tecnologia, visando expandir seu domínio sobre as técnicas desenvolvidas.

O *quinto momento didático* é o da institucionalização. Esse momento de estudo tem como objetivo definir o que é, de fato, utilizado para efetivar uma determinada Organização Matemática (OM). É nesse estágio que se determina o que é importante para a compreensão e

trabalho com um objeto de ensino em questão. Assim, esse momento de estudo tem como finalidade principal indicar com exatidão a OM elaborada (Santos e Menezes, 2022, p. 665).

O *sexto momento didático* é o da avaliação, que tem por finalidade validar a relação pessoal e institucional do aluno com o objeto de estudo. Chevallard (1999) descreve esse momento, enfatizando que, na prática, chega um momento em que é necessário refletir sobre o que foi aprendido, realizando uma investigação dos meios que os alunos absorveram e conseguem mobilizar na prática. Nesse estágio, é refletido sobre o que os alunos conseguiram internalizar dos procedimentos técnicos, tecnológicos e teóricos apresentados pelo professor ou materiais didáticos específicos. Para essa especificidade, Barbosa (2017) enfatiza que:

> O momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é aquela na qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos. O aluno observa, na realização de sua solução (em classe ou no livro), determinadas maneiras de fazer, analisadas e avaliadas para desenvolver sua própria solução (p. 54).

Esses momentos didáticos definidos por Chevallard (1999), configuram-se funcionalmente importante para o estudo de objetos matemáticos de maneira eficiente. Em conformidade com o autor da teoria, esses momentos permitem-nos refletir sobre a organização de um determinado saber em jogo em diferentes contextos. A seguir, no Quadro 02, apresentamos um resumo dos momentos discutidos anteriormente.

Quadro 02: Momentos Didáticos

Momento	**Descrição**
Primeiro Momento	Primeiro encontro com uma Organização Matemática (OM) ou questão de estudo;
Segundo Momento	Exploração de um tipo de tarefa T e elaboração de uma técnica τ relativa a T;
Terceiro Momento	Constituição do ambiente tecnológico – teórico;
Quarto Momento	Trabalho da técnica τ
Quinto Momento	Institucionalização
Sexto Momento	Avaliação das relações pessoais e institucionais com o objeto de estudo;

Fonte: adaptado de Barbosa (2017)

É fundamental destacar, de acordo com Chevallard (1998; 1999), que esses momentos não, precisamente, necessitam seguir uma ordem cronológica de exibição. O autor da teoria

adverte que antes de tudo, esses momentos configuram-se como uma realidade funcional, antes de se tornar uma realidade cronológica.

Através desses momentos didáticos ou de estudo, Chevallard (1999) estimula a refletir sobre algumas questões essenciais, como por exemplo: Como realizar o primeiro encontro com uma Organização Matemática (OM)? Como devem ser estruturados os tipos de tarefa T? Como dirigir o estudo exploratório de um determinado tipo de tarefa T? Quais técnicas são eficazes para os tipos de tarefa encontrados? Quais elementos tecnológicos e teóricos estão presente nas técnicas aplicadas? Como se dá o processo de institucionalização? Como realizar o momento de avaliação? Para responder de forma única, provisória e genérica a esses questionamentos, o autor da teoria ressalta que a criação de situações didáticas adequadas é uma possibilidade de integrar todo esse processo didático.

A seguir, apresentamos uma discussão em torno de um dispositivo da TAD que nos permite direcionar o processo de ensino e aprendizagem por intermédio de uma pedagogia de investigação, ferramenta fundamental da teoria que nos permite a elaboração de situações a partir de contextos reais, incorporando fatores sociais e culturais da comunidade estudantil. A seguir, faremos algumas considerações sobre a pedagogia de investigação denominada de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP).

2.2.4. A Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) e o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

A Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), assim como o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), são noções metodológicas da TAD propostas por Yves Chevallard e seus colaboradores, que permitem mobilizar o processo de ensino e aprendizagem por meio de uma metodologia de investigação. Embasada no paradigma de questionamento do mundo, essas ferramentas se constituem por intermédio de uma intervenção didática agindo sobre um problema didático clássico que limita a execução ou compreensão de um determinado saber em uma devida instituição.

As noções de AEP e PEP são colocadas em prática a partir de uma questão de investigação, também denominada de questão geratriz, representada de forma análoga por Q_0 ou Q, que coloca o sujeito em situação de mobilizar conhecimentos prévios e desenvolver, dependendo da complexidade de Q, novos conhecimentos sobre o objeto de investigação ou até mesmo transitar por outras áreas científicas, função que se remete especificamente ao PEP.

No âmbito da investigação de um problema podem surgir novas indagações derivadas de Q, com a finalidade de unir subsídios suficientes para apresentar uma resposta coração, denotada por $R^{\heartsuit}$ ao questionamento incialmente proposto, representado por Q.

A AEP, assim como o PEP são dispositivos recentes no âmbito da TAD, que surgiram com o objetivo de superar o modelo que, configura-se como clássico ou monumentalista conforme Chevallard (2009), que ainda predomina o sistema de ensino. Neste sentido, o autor da teoria utiliza a palavra "monumentalista" se referindo a questionável pedagogia clássica. No âmbito dessa intervenção pedagógica, o professor e o aluno são conduzidos a construir um contrato didático implícito, que tem como fundamento uma aprendizagem matemática fragmentada, resumida ao reconhecimento e aplicação de fórmulas para solucionar questões prontas.

No modelo de ensino clássico ou monumentalista, o aluno assume um papel passivo na aprendizagem, tornando-se reprodutor do conhecimento partilhado pelo professor. Neste contexto, quem define o que o aluno vai aprender e como aprender é o docente que, em muitos casos, utiliza o livro didático como principal e única fonte de apoio. É importante frisar que não estamos dizendo que o uso do material didático seja inadequado, mas indicando uma análise criteriosa dessas obras. Pois, os conteúdos precisam estar contextualizados e em concordância com a cultura e a realidade do estudante, permitindo a eles estabelecer conexões entre o conhecimento escolar e suas vivências cotidianas. Pois, de acordo com Chevallard (2015, p. 177), a principal falha que resulta na insistência da predominância do paradigma clássico:

> Tem a ver com a escolha dos "monumentos" a visitar na escola. Como sabemos, esta escolha é geralmente o resultado combinado de uma tradição duradoura, por um lado, e de reformas agitadas e irregularmente espaçadas, por outro. De forma alguma, ao que parece, as decisões tomadas vão além do que os responsáveis por esta escolha consideram oportuno, adequado ou mesmo "bom" para a edificação das gerações crescentes. De modo algum, ao que parece, a escolha dos monumentos a visitar não é feita numa base experimental ou, pelo menos, numa base experiencial ampla e supostamente relevante. (Tradução nossa)

Compreendemos que o uso do livro didático é uma atividade indispensável no processo de ensino e aprendizagem, considerando que o material é a principal Organização Didática (OD) designada como uma importante fonte de consulta mais próxima ao professor. Além disso, no âmbito do trabalho com a AEP, em alguns momentos, os estudantes serão destinados a trabalhar com resoluções de exercícios e aplicação de fórmulas, como enfatizado por Bosch e Gascón (2010).

Assim, não se trata de afirmar que o uso do material didático prejudica o desenvolvimento cognitivo do indivíduo no percurso de aprendizagem, mas de superar a visão de que ensinar é apenas transferir conhecimentos. Nesse sentido, concordamos com Freire (1996) quanto ao papel do professor como mediador e facilitador, enquanto o dever do aluno é assumir o papel de protagonista, responsável por construir sua própria aprendizagem. Assim, no estudo dirigido com o auxílio de uma AEP ou PEP, o indivíduo estará assumindo essa

autonomia na construção de seu conhecimento matemático a partir de uma questão proposta pelo diretor de estudo (professor).

É importante salientar que um dos problemas principais no processo de implementação dessa pedagogia de investigação é que na cultura de ensino atual:

> Parece que muitas pessoas têm uma propensão a evitar todas as questões para as quais a resposta não é óbvia para elas. O que o novo paradigma didático pretende criar é um novo ethos cognitivo no qual, quando surgir qualquer questão Q, X a considerará e, sempre que possível, a estudará para chegar a uma resposta coração valiosa Chevallard (2015, p. 178, tradução nossa).

Tendo como referência uma Organização Didática (OD) limitada, em muitos casos resumida a uma pedagogia baseada em termos concretos e abstratos de ensinar e aprender Matemática, Chevallard (2005) decide articular uma inovação curricular composta por Organizações Didáticas baseadas em AEP e PEP para o estudo dos saberes matemáticos. Junior (2022) enfatiza que as AEP são pedagogias desenvolvidas a partir de questionamentos, que podem ser definidas como métodos progressistas de operar relações instigadoras e liberais entre o aprendiz e o saber em jogo.

De modo semelhante, Chevallard (2009) exalta a proposição da AEP com o específico objetivo de distanciar o sistema de ensino da pedagogia clássica, formalizando o processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos. Essa Organização Didática (OD) valoriza a construção do conhecimento matemático através de Organizações Matemáticas (OM) de investigação, promovendo uma participação ativa e significativa do aluno.

Na proposição dessa pedagogia, busca-se estimular o aluno a construir e se engajar ativamente com o problema a ser pesquisado, sentindo-se estimulado a formular hipóteses, derivar novas problemáticas, traçar diferentes abordagens técnicas, descartar possibilidades e discutir possíveis resultados com os colegas de grupo, afim de apresentar uma resposta sólida $R^{\heartsuit}$ ao questionamento inicial.

Tanto a AEP como o PEP são organizações que podem ser definidas como modelos pedagógicos com uma intenção didática de instruir o ensino de Matemática por meio de atividades reais de pesquisa e experimentação. De modo específico e descritivo, Júnior (2022, p. 44) enfatiza que uma AEP é "uma Organização Didática realizada em uma classe X, orientada e dirigida por um professor Y, que vai administrar o encontro dos alunos X, com certa quantidade de entidades praxeológicas, no estudo de uma determinada questão Q".

Nesse sentido, Ruiz – Olarria (2015) ressalta que, nesse processo, a colaboração dos formadores Y não consiste em fornecer respostas parciais para tornar o objeto investigado conhecido pelos agentes X, mas em orientá-los na elaboração de trajetos que possam levá-los a

um encontro com o saber em jogo e, sobretudo, introduzi-los nos moldes específicos da questão geratriz.

Para o trabalho com essas pedagogias de investigação propostas por Chevallard, Dias e Júnior (2018) destacam a necessidade de analisar os conhecimentos prévios da classe X, tendo em vista que esse procedimento será de fundamental importância para a elaboração da questão geratriz Q, problemática geral de investigação.

Desse modo, compreendemos que para propor a questão de investigação, é necessário ao menos a análise de uma proposta institucional, como uma coleção de livros didáticos adotada por uma instituição de ensino. No que se refere à proposição da AEP, esse processo decorre da necessidade de identificar as Organizações Praxeológicas (OP) presentes na obra analisada e fornecer subsídios para construção de um novo modelo de ensino alternativo.

Dias e Júnior (2018), ressaltam a relevância do uso de recursos auxiliares no processo de projeção de uma AEP ou PEP. Entre os recursos, destacam- se o livro didático, os cadernos do aluno e do professor, o próprio professor, a internet, os pais, etc. Esses recursos enfatizados pelos autores são considerados fundamentais para subsidiar o processo de elaboração das AEP. Para a realização de uma análise que poderá resultar em um processo investigativo é importante olharmos para esses materiais no intuito de caracterizar o modelo das praxeologias de ensino atuais, coletando subsídios que serão fundamentais para esboçar uma AEP ou um PEP.

De modo a corroborar, Ruiz – Olarria (2015) ressalta que para a construção de praxeologia de aprendizagem ou de ensino é indispensável a análise das Organizações Matemáticas (OM) presentes no seio das instituições escolares que conduzem o ensino de um determinado conteúdo, como a probabilidade. Ao realizar essa caracterização da pedagogia atual, pode-se detectar a nutrição do modelo dominante, os pontos de fragilidade dos blocos que compõem o modelo praxeológico, criando possibilidades para validar as praxeologias atuais e pensar em reconstruir novas praxeologias de ensino ou aprendizagem.

Um exemplo da importância da análise do domínio de X, destacada por Dias e Júnior (2018), são as próprias condições e restrições para o trabalho com um determinado objeto de ensino, como a probabilidade. Para a construção de uma questão de investigação eficaz que aborde a dimensão de como ensinar esse conceito, é essencial observar elementos relacionados a realidade docente em sala de aula, afim de compreender as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) utilizadas pelo professor para ensinar o conteúdo. A partir da realidade identificada, o próximo passo é elaborar uma questão bem definida, que faça sentido para X, de modo que ele possa refletir sobre sua prática e considerar a construção de novas praxeologias.

Nesse sentido, o percurso investigativo sob auxílio de uma AEP ou PEP, a classe X será conduzida a refletir sobre suas praxeologias de ensino ou aprendizagem atuais, sendo incentivada a reconstruir seus planejamentos de curso sobre um determinado conceito. Esse estudo investigativo poderá resultar na superação do modelo dominante ou na construção de uma nova abordagem de um conteúdo específico. O principal objetivo da AEP é questionar a pedagogia dominante e apresentar possibilidades para elaboração de novos métodos de abordagem, tanto para ensinar quanto para aprender Matemática de modo significativo e real.

Essas ferramentas teórico-metodológicas necessitam de uma organização por parte do diretor de estudo, que será o responsável por conduzir o processo de investigação, apresentando possíveis caminhos para a construção de questões complementares. Essa organização deve ser baseada em um roteiro estabelecido pelo diretor, mas não apresentado diretamente à classe, caracterizando um contrato didático implícito entre o mediador Y e a classe X. dessa forma, o diretor não deve intervir diretamente no processo de investigação da classe X, ficando sob sua responsabilidade apenas validar os caminhos traçados pelos participantes e as respostas encontradas pelos sujeitos pertencentes a classe X.

De acordo com as categorias determinadas por Júnior (2022), onde X ocupa a classe de professores ou alunos em formação e Y o lugar do pesquisador ou diretor, esse processo pode ser inicialmente representado pelo sistema didático S (X, Y, Q). Contudo, essa ordem pode sofrer alterações ao longo do desenvolvimento do percurso de investigação, dependendo das necessidades ou dificuldades encontradas por X durante a busca por respostas para Q.

Se durante o processo investigativo, Y percebe a necessidade de traçar novos caminhos metodológicos, como realizar entrevistas com professores ou analisar o livro didático ou cadernos de professores ou alunos, os elementos que antes formavam o sistema didático passarão a sofrer alterações em seus posicionamentos estabelecidos inicialmente. De modo a corroborar, Neves (2020, p. 29), salienta que:

> Em alguns momentos é possível modificar o sistema didático S (X; Y; Q) para S (X; ξ; Q) quando o pesquisador realiza entrevistas com os estudantes ou analisa o caderno dos estudantes; S (Y; ξ; Q) quando o pesquisador realiza entrevistas com os professores ou analisa o plano de aulas do trimestre proposto pelos professores; e até ampliando o sistema didático para S (X; Y; ξ; Q) quando nas seções de estudos as AEPs são desenvolvidas nas salas de aula com os estudantes que interagem com os professores durante o processo.

Nesse processo de alternância entre as posições dos sujeitos, considera-se a tríade de dialéticas proposta por Chevallard (2009), denominadas de: topogênese, cronogênese e mesogênese. A topogênese diz respeito à posição do diretor de estudo (pesquisador ou professor), que mediará a elaboração da AEP ou PEP. Essa fase indica que, dependendo das

necessidades enfrentadas, a posição do diretor pode mudar ao longo da investigação. Sendo X a classe de estudantes e Y o diretor, Y pode, em determinadas circunstâncias, ocupar a posição de X. A mesogênese corresponde a evolução do *milieu*, que, em um dado momento, depende das ações realizadas na topogênese. Já a cronogênese, é o princípio que determina o tempo do percurso investigativo, seja ele configurado em dias, semanas ou meses (Vilhena, 2022).

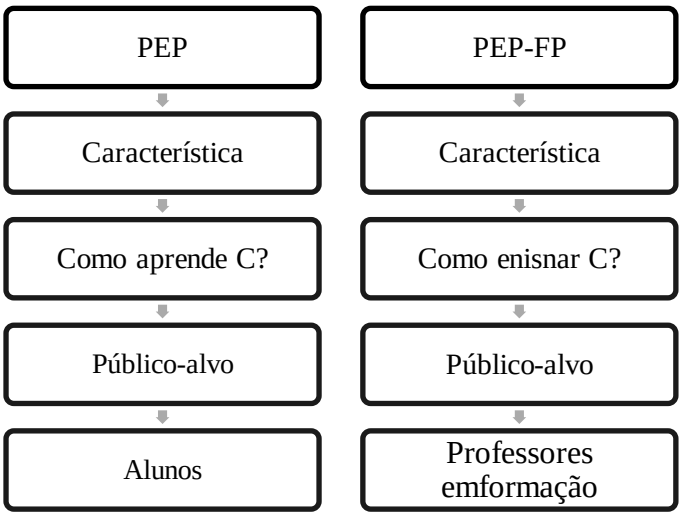
Caracterizando o nosso estudo a partir dos elementos do sistema Herbatiano S (X; Y; Q) M) ⊇R, temos que X representa os professores de Matemática em efetivo exercício no Ensino Médio, Y o pesquisador (denominado também como diretor de estudo), responsável por analisar a realidade docente e propor as AEP. O elemento Q se refere à questão geradora que será investigada, M são os meios utilizados em busca de $R^{\bullet}$ (ou o conjunto de respostas para as questões derivadas de Q), e $R^{\bullet}$ a resposta final e geral ao questionamento inicial Q.

No cenário de investigação sobre objetos matemáticos, existe também o que pode ser denominado de PEP-FP, um dispositivo especificamente destinado à formação de professores. A elaboração de um PEP-FP começa a partir de uma problemática com ênfase no trabalho docente com um determinado conteúdo específico, visando compreender, validar e aperfeiçoar as práticas pedagógicas relacionadas a um objeto de ensino específico em uma determinada instituição.

De um modo mais específico, o PEP-FP diz respeito ao tipo de estudo a ser elaborado, a partir da classe X investigada. Quando decidimos propor um estudo com uma classe de professores em formação inicial ou continuada em exercício sobre um problema de ensino, como a dificuldade de ensinar um determinado conteúdo C, nesse caso precisaremos propor de uma questão Q-FP que estudará a problemática dentro dos conhecimentos, grupo social e cultura de X.

Dessa forma, o PEP, dito tradicional, está centrado na organização das Praxeologias Matemáticas e Didáticas construídas pelos alunos. O objetivo do diretor de estudo nesse processo de investigação é compreender a relação pessoal e institucional dos estudantes com um determinado conteúdo C. Essa investigação é construída a partir de indagações do tipo: Como aprender C?". Em contra partida, o PEP-FP tem como objetivo focar em indagações do tipo: "Como ensinar C?". Assim a diferença entre esses dispositivos está centrada nas características particulares de cada um. O diretor de estudo é quem define o tipo de dispositivo didático que será desenvolvido, a partir da escolha da classe X e do que ele deseja investigar. Essas particulares entre o dispositivo podem ser melhor visualizadas no esquema a seguir.

Esquema 03: Características do PEP e do PEP-FP



Fonte: Produção nossa

Neste sentindo, é importante destacar que a AEP pode ser incorporada como complemento dos dois dispositivos. Além disso, na prática, um aspecto que diferencia a AEP do PEP é a complexidade da questão geratriz. Isto é, quando a problemática proposta induz a classe X a transitar por áreas além do objeto de ensino, é cabível ao diretor de estudo a proposição de um PEP. Por outro lado, se a questão geradora limita-se ao estudo de um conteúdo específico, o dispositivo caracteriza-se como uma AEP. Em muitos casos, a AEP é utilizada como etapas de composição de um PEP.

Desse modo, apesar de sua importância no processo investigativo, é relevante ressaltar que a AEP, assim como enfatizado por Vilhena (2022), possui suas limitações. Esse dispositivo é limitado no sentido de que, através desse dispositivo, não é possível caracterizar o modelo epistemológico dominante em torno de um determinado saber. Isso ocorre porque a AEP é mais voltada para o estudo de temas específicos e proposição de atividades alternativas. Por exemplo, por meio da AEP, é possível analisar as Organizações Praxeológicas (OP) presentes em obras didáticas para o ensino de probabilidade e, com base na análise, propor novas questões.

Para estudos de maior amplitude, que tenha por finalidade caracterizar o modelo de ensino monumentalista, recomenda-se o PEP, noção metodológica constituída a partir das limitações da AEP, que permite o estudo das condições epistemológicas e institucionais de um saber em um período temporal maior. Nesse sentido, Vilhena (2022) destaca que:

> Outro fator limitante da pedagogia do AEP é que se trata de questões propostas pelo professor por necessidades didáticas e que podem perder o sentido para os alunos no decorrer da construção das OM. Neste sentido, houve a necessidade de construir um novo modelo didático, que pudesse integrar as AEP, de modo a ter um olhar mais amplo do ensino que é a pedagogia do PEP. (p. 104).

Assim, observa-se que as AEP são subconjuntos de um PEP ou elementos que podem ser inseridos em etapas que mobilizam o processo de construção do PEP. Ou seja, para elaborar um PEP pode ser necessário a proposição de AEP, que podem atuar como subsídios auxiliares para responder à questão geratriz proposta no início de uma investigação.

Uma AEP é desempenhada por meio de um conjunto de questionamentos e possíveis respostas a uma pergunta genérica, que deve conter características de uma Organização Matemática (OM) específica. Além disso, a AEP representa uma das várias formas de fazer uma OM funcionar no contexto de estudo de um objeto de matemático em jogo.

Olhando para a probabilidade do ponto de vista da TAD, podemos trazer algumas indagações, como por exemplo: Enquanto saber, quais as relações institucionais com a probabilidade no Ensino Médio? Quais as relações pessoais dos professores que ensinam Matemática no Ensino Médio com a probabilidade? Que praxeologias são encontradas nos livros didáticos? O que ensinar de probabilidade no Ensino Médio e por quê ensinar? Essas são algumas derivadas (Q_1, Q_2, Q_3...), que podem surgir a partir de uma questão geratriz sob auxílio de uma pedagogia de investigação.

Nesse sentindo, com base nos questionamentos anteriores, para estudarmos a legitimidade das Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) operadas no ensino de probabilidade, consideramos fundamental analisar as relações institucionais com o objeto matemático a partir dos documentos normativo e obras didáticas. Esses documentos caracterizam parte do modelo dominante para o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio.

De acordo com a definição de uma AEP e suas funcionalidades, nosso estudo centrará na proposição dessas atividades para o ensino de probabilidade a partir de uma caracterização das Organização Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) presentes em coleções de obras didáticas. Partindo desse pressuposto, a AEP proposta nessa pesquisa buscará satisfazer as orientações curriculares estabelecidas pela BNCC, elaboradas para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.

2.3. Um Breve passeio sobre Elementos Históricos da Probabilidade

Na Idade Média, por volta do século XV, as crenças nos deuses exerciam grandes interferências sobre as vivências das pessoas, influenciando, exclusivamente nas tomadas de decisões pelos povos daquela época. Todos os fenômenos eram interpretados como resultado da vontade divina, e qualquer consequência na vida pessoal daquelas pessoas, fosse negativa ou positiva, era creditada na influência da força divina. As possibilidades de obter êxito ou

fracasso em situações cotidianas eram entendidas como consequência do quanto cada pessoa era abençoada ou amaldiçoada pelos deuses.

Ao longo do tempo, com a evolução da humanidade e o progresso dos estudos matemáticos, deu-se início a construção de um alicerce que mais tarde se tornaria um conhecimento fundamental, que causaria grande impacto na trajetória daqueles que confiavam seu destino as suas crenças religiosas. Foram as observações em jogos de azar que, de fato, atribuíram uma razão matemática além das crenças divinas. Assim, os povos que creditavam o destino de suas apostas à vontade dos deuses passaram a refletir sobre a elaboração de um modelo matemático apto a estabelecer previsões sobre acontecimentos futuros e favorecer suas ambições econômicas, aumentando suas possibilidades de vencer.

De modo semelhante, Coutinho (2007, p. 51) salienta que:

> Os povos que viviam na Mesopotâmia ou no Egito Antigo associavam a ideia do acaso às intervenções divinas ou sobrenaturais. Referimo-nos aqui às práticas de consulta de presságios ou às predições das pitonisas a fim de prever o futuro e interpretar a vontade dos deuses. Este tipo de relação com o acaso, associando-o com a crença em intervenções divinas, será uma constante no comportamento humano ao longo do tempo. Podemos, ainda atualmente, identificá-la em certas culturas, em certos ritos (prática de vidência, etc).

Sobre a ideia de acaso, Bennet (2003 apud Almeida, 2018) enfatiza que naquela época era comum as pessoas se envolverem com jogos de azar, como o tabuleiro, jogos com ossos e o estrálago (também conhecido como jogo de dados). O autor ainda destaca que foram necessários alguns milênios para ocorrer a transformação do estrálago no dado de seis faces, evolução que começou com a construção de objetos com duas, quatro, seis e até oito faces. Esses experimentos eram utilizados para o estudo do acaso e da aleatoriedade, com o intuito de identificar estratégias favoráveis em partidas envolvendo jogos de azar.

Atualmente, é possível dizer que o acaso e as crenças perpassaram por todas as civilizações e encontram-se significativamente presentes nas ações e decisões humanas. Na mesma intensidade desses conceitos, os jogos de azar, apesar de seus ricos, também garantem seu espaço no mercado de apostas. Jogos com o lançamento de dados, roletas giratórias e cartas são exemplos de alguns dos vários jogos de azar presentes nas bets, que já existiam nas antigas civilizações. Nesse contexto, concordamos com Melo e Reis (2011, p. 03), quando os autores enfatizam que “Os jogos de azar sempre foram admirados pelos homens. Ao se lançar a sorte sobre o jogo, as pessoas acreditam que podem obter um resultado favorável e, assim adquirir bens de maneira rápida”.

Vários debates sobre a história da probabilidade indicam que os princípios que deram origem a esse objeto matemático com capacidade estimativa foram discutidos simultaneamente

na Itália, a partir das observações realizadas por estudiosos da época, como Lucca Paccioli e Gerolamo Cardano. Esses foram os primeiros nomes a se interessar em explorar as chances de adquirir vantagens em situações envolvendo jogos de azar.

Dentre os vestígios históricos que discutem o surgimento da probabilidade, é comum encontrarmos referências ao nome do italiano Luca Paccioli, cujo sua identidade ganhou destaque na história da descoberta desse objeto matemático por intermédio de uma de suas grandes e famosas obras, a *summa*, publicada em Veneza, cidade italiana, por volta do ano de 1494.

No que se refere a probabilidade, o nome de Paccioli está vinculado a história como um dos primeiros a estudar esse conceito. Esse reconhecimento se originou através da construção de problemas, sendo um dos mais famosos o problema dos pontos. Esse contexto coloca dois jogadores em disputa por um prêmio, com a condição de que a partida seja finalizada quando um deles atingir a marca de seis pontos. Se por algum motivo, o jogo não seja finalizado, quais providências probabilísticas podem ser aplicadas se, na suspensão da partida, houver uma diferença de pontos no placar alcançado pelos competidores?

Apesar de seu esforço para apresentar uma solução viável ao problema proposto, enfatiza-se que Paccioli não conseguiu reunir argumentos suficientes para fornecer uma resposta concreta e satisfatória ao problema dos pontos.

> A primeira tentativa de resolução deste problema foi dada pelo próprio Paccioli, mas fracassou. A solução de Paccioli afirmava que, as apostas deveriam ser divididas na proporção de 5 para 3, ou seja, na proporção exata de partidas vencidas por cada jogador no momento em que o jogo foi interrompido (Zindel, 2018, p. 7).

Existindo essa lacuna na solução concreta do problema apresentado por Paccioli, mais tarde na França, foram construídos problemas semelhantes que contribuíram fortemente para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade. Assim, apesar da resposta questionável de Paccioli ao problema dos pontos, para Coutinho (2007), a situação proposta pelo italiano pode ser considerado o ponto de partida para a introdução ao cálculo da probabilidade.

Ainda segundo a autora, o problema dos pontos de Paccioli influenciou outros estudiosos, como Fermat e Pascal a trocarem cerca de cinco correspondências discutindo a questão levantada por Paccioli. Mais tarde, esses estudiosos desencadearam novas investigações, abrindo outros horizontes sobre o pensamento probabilístico. Por volta de 1654, esse processo investigativo impulsionou o surgimento da geometria do acaso, reunindo elementos que hoje são parte da Teoria da Probabilidade (Coutinho, 2007).

Valorizando a contribuição de Paccioli, como um importante elemento que fomentou o surgimento da Teoria da Probabilidade, Viali (2008) destaca que:

> O problema dos pontos que ele (Pacioli) estudou foi semelhante ao que Pascal e Fermat viriam a solucionar e que é considerado, como de fato, o início da Teoria da Probabilidade. Pacioli trabalhou com Leonardo da Vinci (1452 - 1519) que ilustrou sua obra Divina Proportione (Divina Proporção), que segundo consta, negligenciou sua pintura dado o interesse que tinha pela Geometria. (p.03)

Outra importante contribuição para o estudo da probabilidade foi também a do italiano Gerolamo Cardano. Seu interesse em se envolver e estudar os jogos de azar culminou na escrita da obra intitulada *Liber de Ludo Aleae*, que em português significa Livro dos jogos de azar. Esse manuscrito foi dedicado a discussão das possibilidades do acaso. Sobre as colaborações de Cardano no âmbito da probabilidade, enfatiza- se ainda que:

> Cardano decidiu estudar as probabilidades para ganhar em jogos de azar, analisando seriamente as probabilidades de retirar azes de um baralho de cartas e de obter "setes" com dois dados. Os resultados dessas pesquisas foram publicados em um manual para jogadores chamado *Liber de Ludo Aleae* (O Livro dos Jogos de Azar - 1526). A palavra *alae* refere-se aos jogos de dados, *aleatorius* da mesma raiz, refere-se a jogos de azar em geral. (Zindel, 2018, p. 8)

Apesar da importância das contribuições sobre a probabilidade desenvolvidas na Itália, o foco dos estudos sobre o objeto matemático descola-se para a França. Os primeiros estudos sobre a Teoria da Probabilidade em solo francês são gestados por nomes como Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Foram esses estudiosos os responsáveis por analisar as observações realizadas anteriormente por outros intelectuais, para, de fato, realizar a consolidação e sistematização do objeto matemático probabilidade.

Por volta de 1654, Fermat e Pascal começaram a se debruçar por meio de estudos relacionados à probabilidade. Os primeiros avanços foram registrados por meio de cartas trocadas entre os dois pesquisadores. Em suas comunicações iniciais, já se discutia a possibilidade de solucionar problemas probabilísticos semelhantes ao problema dos pontos, proposto por Paccioli, mas sem sucesso na Itália. No problema elaborado por Fermat e Pascal se discutia a possibilidade de dividir o prêmio entre dois jogadores extremamente competentes, levando em consideração a marcação do último ponto antes da suspensão do jogo (Eves, 2011).

É importante enfatizar que nenhum outro estudioso antes de Fermat e Pascal, havia desenvolvido conceito essencial em torno do cálculo da probabilidade. Se, por um lado, houveram grandes descobertas que influenciaram a consolidação desse objeto matemático, por outro, foram os franceses que se aprofundaram nas teorias da probabilidade e desenvolveram soluções para importantes problemas não resolvidos, elaborados por outros estudiosos, como o problema dos pontos de Paccioli.

Após as colaborações de Fermat e Pascal, o holandês Christian Huyngens escreveu seu primeiro livro sobre jogos de azar. Segundo historiadores, a obra publicada por Huygens sobre probabilidade intitulada "*De ratiociniis in ludo aleae"* (Sobre o raciocínio em jogos de azar),

dedica um considerável quantitativo de páginas a determinação das expetativas de obter sucesso em um jogo de azar. Em seu livro, "Huygens resolve 14 problemas relacionados a jogos de azar. Inclusive os últimos cinco problemas são fundamentados nas correspondências entre Pascal e Fermat, resumidos em 1656 e conhecidos como "*The Gambler´s Ruin"* (Zindel, 2018, p. 10).

Zindel (2018) destaca que a obra de Huygens é reconhecida como a primeira a comportar problemas que discutem aspectos relacionados ao cálculo da probabilidade. No âmbito desse cenário, as contribuições de Huygens foram tão importantes no campo da probabilidade quanto os estudos realizados por Fermat e Pascal, no que diz respeito aos raciocínios construtivos da Teoria da Probabilidade. Pois, além de ser uma das primeiras obras a abordar cálculos probabilísticos, influenciou grandes matemáticos, como Jacob Bernoulli, a estudar e realizar novas observações em torno desse objeto matemático.

As contribuições referentes ao objeto matemático probabilidade apresentadas pelo suíço Jacob Bernoulli (1604 – 1705) são constatadas pelo estudo da Lei dos Grandes Números (LGN), um teorema fundamental abordado em sua obra *Ars Conjectandi*, publicada em 1713. Esse teorema resulta em um dos importantes significados da probabilidade, conhecido como probabilidade frequentista, empirista ou experimental.

A Lei dos Grandes Números (LGN) de Bernoulli consiste em afirmar que, ao realizar um experimento repetidamente diversas vezes, os resultados tendem a se aproximar do valor esperado, com base no cálculo a priori das chances de um determinado evento ocorrer. Exaltando a importância do surgimento desse conceito, Coutinho (2007, p. 62) destaca que:

> A partir dessa mudança de status da probabilidade, podemos identificar uma nova maneira de estimar as chances de realização de um evento: o método experimental. Tal enfoque supõe que a probabilidade é um dado objetivo ligado ao evento e à experiência. Esta estimação é justificada pela convergência da sequência das frequências observadas, dados intrínsecos da experiência repetida, independentemente da posição subjetiva do observador.

Bernoulli não se limitou apenas a experimentos envolvendo a probabilidade a priori. Suas observações foram embasadas em inúmeras tentativas com o intuito de aproximar a probabilidade de um determinado evento ocorrer, considerando um grande número de repetições sob as mesmas condições estabelecidas. As ideias de Bernoulli consistiam em testar se, quanto mais um determinado experimento é repetido, mais as chances de ocorrer um evento do tipo (A) se aproximam das previsões a priori.

Esse conceito de Bernoulli possui um grande impacto nos experimentos realizados atualmente com dados e moedas não viciadas. Todavia, é importante esclarecer que, ao adotar a interpretação frequentista, não estamos afirmando que, ao lançar uma moeda um número

considerável de 100 vezes, vamos obter a igualdade no resultado entre o número de caras e coroas. O que se propõe é que, quanto mais vezes a moeda for lançada, maior será a possibilidade do número de caras e coroas se aproximar da igualdade.

Após as contribuições de Bernoulli em torno do objeto matemático probabilidade, segundo Coutinho (1994), Thomas Bayes (1701-1761) principiou investigações que atualmente são conhecidas como a interpretação subjetiva da probabilidade. De acordo com Zindel (2018), Bayes é protagonista da obra intitulada "*Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances"* publicada em 1763, após sua morte. Conforme a autora, a I aborda os parâmetros relacionados a Teoria da Probabilidade e a seção II apresenta soluções binomiais. Nas entrelinhas do conhecimento probabilístico, Coutinho (1994, p. 18) sublinha que:

> Os métodos bayesianos têm sua origem na ideia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado a partir de um valor tomado "a priori" e recalculado em função dessa observação, de onde a classificação de "subjetiva". Note-se bem a diferença entre esta e a concepção de Jacques Bernoulli, dita "objetiva", uma vez que dependia apenas do número de observações feitas sobre o evento estudado.

Outro dado importante em torno do conceito estendem-se aos estudos realizados por Simon Laplace (1749-1827), que no âmbito do objeto matemático probabilidade escreveu uma obra intitulada "*Théorie Analytique des Probabilité"* (Teoria Analítica da Probabilidade). Nos parâmetros contidos nessa obra, Laplace "demonstra também seus estudos sobre cálculo integral envolvendo beta, gama e a ideia de função geradora e transformadora. E afirma: No fundo a teoria de probabilidades é apenas conhecimento do senso comum expresso em números" (Zindel, 2018, p. 17).

Além disso, outra importante obra de Laplace em torno da probabilidade é intitulada *"Essai philosophique sur les probabilités"* (Um ensaio filosófico sobre a probabilidade). Nela, o francês discutiu os princípios da teoria e realizou suas aplicações em diferentes contextos, tais como "jogos de azar jogos de azar, filosofia natural, ciência morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade" (Viali, 2008, p. 150).

No escopo dessa obra, Laplace apresentou dez princípios gerais do cálculo da probabilidade. Apesar dos diversos mecanismos desenvolvidos por outros estudiosos aplicados aos jogos de azar e experiência com situações envolvendo outros fenômenos, é impossível ocultar a importância desses princípios para compreendermos a dimensão conceitual do objeto matemático probabilidade e sua presença em atividades cotidianas e currículo escolar.

O significado clássico da probabilidade, por exemplo, embora tenha sido influenciado pelas contribuições de Fermat, Pascal e o próprio Huygens, assim como pelas colaborações de Bernoulli no cálculo da probabilidade, contribuições que iniciaram o processo de

sistematização da probabilidade como um relevante conhecimento matemático, a interpretação clássica do conceito começa a se consolidar somente a partir dos estudos de Laplace, abordados em uma de suas obras intitulada de “ensaio filosófico sobre a probabilidade”, exclusivamente presente nas mediações do primeiro princípio estabelecido na obra (Coutinho, 2007).

Entre os princípios estabelecidos por Laplace, destacamos três, a saber: O primeiro princípio “é a própria definição de probabilidade, que é a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de todos os casos possíveis”, (Laplace, 2019, p. 15). Por exemplo, a probabilidade de ocorrência de um evento (A) é calculada dividindo-se o número de casos favoráveis para ocorrência de (A) pelo número de casos possíveis.

Um exemplo para esse princípio é o lançamento de um dado não viciado de seis faces numeradas de 1 a 6. A probabilidade de ocorrência de qualquer um desses resultado (sair qualquer número entre 1 e 6) pode ser calculada por meio do que é enfatizado por Laplace. Assim, através do primeiro princípio, é possível determinar a probabilidade a priori de ocorrência de um evento qualquer, levando em consideração a representação fracionária envolvendo essas duas partes, ou seja, a razão entre os casos favoráveis e o total de casos possíveis.

De modo a colaborar com o primeiro, no segundo princípio Laplace (2019, p. 15) enfatiza que:

> Mas isso supõe os vários casos igualmente possíveis. Se não forem assim, determinaremos primeiro as suas respectivas possibilidades, cuja apreciação exata é um dos pontos mais delicados da teoria do acaso. Então a probabilidade será a soma dos casos de cada caso favorável.

No terceiro princípio, Laplace salienta que um dos pontos mais importantes na Teoria da Probabilidade, e o que mais favorece as ilusões, é a maneira como essas probabilidades aumentam ou diminuem pela combinação mútua. Por exemplo, “Se os eventos são independentes um do outro, a probabilidade de sua existência combinada é o produto de suas respectivas probabilidades”. (Laplace, 2019, p. 15).

A partir dessa breve discussão sobre alguns princípios apresentados por Laplace, verifica-se que o primeiro deles diz respeito à definição de probabilidade clássica. Enquanto o segundo exibe subsídios da importância de equiprobabilidade. Já o terceiro, por sua vez, aborda elementos relativos a probabilidade de ocorrência de eventos independentes. Além disso, nos demais princípios há vestígios de esperança matemática e cálculo com probabilidade, (Cavalcante, 2018).

Após a apresentação de alguns princípios em torno da probabilidade e as descobertas de Laplace, estudos relacionados à Teoria da Probabilidade continuam por Henry Poincaré (1854

-1912), estudioso de naturalidade francesa, tem seu nome vinculado à história do conceito, em razão de sua trajetória como professor de cálculo de probabilidades. Durante esse percurso, Poincaré levanta alguns questionamentos sobre o objeto matemático probabilidade.

Segundo Zindel (2018), Poincaré faz importantes reflexões sobre a probabilidade a partir conexão entre causa e efeito, onde a ocorrência do segundo evento depende iminentemente das circunstâncias em que o primeiro efeito ocorreu. Ainda, segundo a autora (2018, p. 19), "Poincaré, talvez tenha sido o primeiro a desenvolver uma base matematicamente rigorosa para o entendimento da relação de causa-efeito e importância das informações no processo de tomada de decisão". Além disso, Poincaré adverte que:

> Muitas pessoas acham bastante natural rezar por chuva ou por sol, embora achem ridículo rezar por um eclipse... Um décimo de grau em qualquer ponto, e o ciclone irrompe aqui, e não ali, espalhando a destruição sobre países que teria poupado. Poderíamos ter previsto isso se conhecêssemos aquele décimo de grau, mas... tudo parece dever-se à atividade do acaso (Zindel, 2018, p.19)

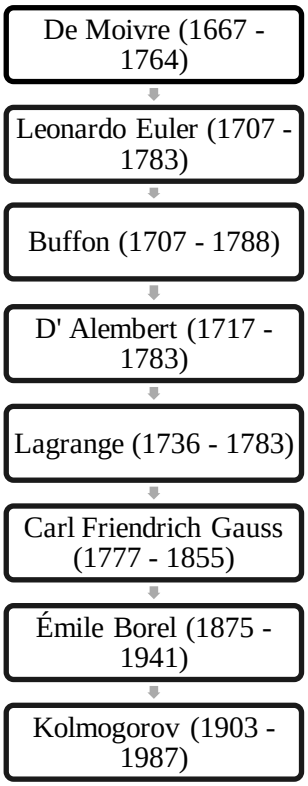
A partir da percepção de Poincaré sobre a concepção de acaso, destaca-se que "Uma mente infinitamente poderosa, infinitamente bem informada sobre as leis da natureza, poderia ter previsto todos os eventos desde o início do século. Se tal mente existisse, não poderíamos jogar com ela nenhum jogo de azar, pois, perderíamos" (Zindel, 2018, p 18).

Ainda assim, Poincaré ressalta a importância da definição de acaso e da existência das leis da probabilidade. O francês propõe uma modernização em relação ao conceito de acaso, justificando que toda causa tem um efeito, mesmo que este seja desconhecido. Para essa representação, o francês utiliza o exemplo de um cone em equilíbrio, enfatizando que, ao colocá-lo sobre um determinado ponto de equilíbrio, sabemos que ele vai cair, mas desconhecemos para qual lado será suspenso. Esse acontecimento, segundo Poincaré, será decidido pelo acaso, devido a ação da força gravitacional exercida sobre o cone (Coutinho, 1994).

A partir dos estudos sobre o acaso, Poincaré chama atenção para a força da natureza, que ainda desconhecemos. O francês enfatiza que, se tivéssemos absoluto conhecimento e domínio dessas forças, poderíamos melhorar nosso desempenho de previsões sobre o que poderia acontecer no futuro em uma determinada situação. Contudo, mesmo com uma compreensão parcial dessas leis da natureza, não podemos prever um resultado exato de ocorrência de um evento específico, apenas uma aproximação. Poincaré ainda alerta que pequenos deslizes nas condições iniciais em um estudo provisório de um experimento podem causar grandes impactos nos resultados finais, gerando assim um fenômeno em que ele denomina de fortuito.

Além de Henri Poincaré e as leis do acaso, existem várias contribuições de outros importantes nomes da história da probabilidade, tais como ilustramos a seguir, conforme Esquema 04.

Esquema 04: Outros nomes da história da probabilidade



Fonte: Produção nossa

Ressaltamos ainda que a importância de discutir aspectos relacionados à história do conceito habita no fato de que esse contexto pode subsidiar procedimentos estimuladores e despertar curiosidade no processo de ensino e aprendizagem da probabilidade. A partir de um passeio histórico é possível construir importantes pedagogias nas quais os alunos terão a oportunidade de compreender a existência do saber matemático, conhecendo suas transformações em diferentes civilizações.

Ademais, por intermédio da discussão histórica do conceito, atualmente é permitido afirmar que o estudo da probabilidade não se limita à abordagens relacionadas à jogadas de sorte ou azar, mas é fundamental para a construção de modelos matemáticos para a compreensão de fenômenos aleatórios reais presentes em nosso cotidiano. Além dessas contribuições, através do contexto histórico é possível também estudar o problema epistemológico do objeto matemático em questão.

2.4 A formação de professores para ensinar probabilidade

Os desafios relacionados à formação de professores não se englobam em um debate recente. Mesmo em pleno século XXI, ainda lidamos com diversos obstáculos que precisam ser superados. No contexto da formação matemática, a defasagem na formação inicial do professor é vista como um problema complexo que exige a mobilização de diversas estratégias para uma resposta urgente.

É importante frisar que formar professores não é uma tarefa trivial, particularmente porque há lacunas na formação básica que podem ser refletidas na formação inicial docente. Desse modo, a qualidade de formação básica pode se estagnar como um desafio no processo de formação profissional. Além disso, há as próprias dificuldades que se manifestam durante a formação inicial, que necessitam ser compreendidas e corrigidas.

Um dos desafios que predomina a formação inicial de professores diz respeito ao plano de curso. Isto é, as matrizes curriculares nesse processo podem não estar em consonância com as necessidades pedagógicas e didáticas da educação básica. Assim, compreendemos que pode haver uma falha na formação de professores, pois os saberes aprendidos na academia, muitas vezes, podem não ser refletidos ou suficientes para o trabalho docente na educação básica.

Nessa perspectiva, ressaltamos a importância de que, em um curso de formação de professores, o olhar formativo não fique efetivamente centrado nos conhecimentos específicos da área, pois o enfoque pedagógico e didático precisam ser levados em consideração nesse processo. Afinal, de pouco adianta um o professor dominar os conhecimentos axiomáticos de probabilidade se não consegue ensinar as noções básicas do conceito na educação básica.

Assim, enfatizamos que é preciso que haja equilíbrio entre o plano de curso da formação inicial e as diretrizes presentes em documentos normativos que orientam o processo de formação básica dos estudantes. Para assegurar uma formação cidadã que atenda às demandas da sociedade, é essencial que haja uma convergência entre a formação inicial do professor e o currículo escolar, com a finalidade de formar cidadão ativos, críticos, reflexivos e conscientes de seus direitos e deveres. Caso haja disparidade entre essas instituições, ocorrerá um descompasso entre o que o aluno aprende, o que deveria aprender e como ele aprende e deveria aprender.

Quando ocorre essas divergências, o desempenho dos alunos, em muitos casos, é refletido em avaliações de larga escala, que são processos avaliativos que buscam diagnosticar o progresso de aprendizagem dos estudantes ao longo de seus percursos nas etapas de formação básica.

Um reflexo da aprendizagem em Matemática pode ser observado através do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA). No último exame, os resultados destacam

que as médias obtidas por estudantes brasileiros permaneceram basicamente nas mesmas do exame aplicado em 2018. A aviação destaca que, em 2022, o Brasil obteve um desempenho médio de 379 pontos em Matemática, pontuação inferior a países como o Chile, Uruguai e Peru. Além disso, sob uma perspectiva estatística, enfatiza-se que não há uma diferença significativa entre a média obtida por estudantes brasileiros, colombianos e argentinos (INEP,2023). Assim, de acordo com a média, nota-se que, mesmo após quatro anos da homologação da BNCC, não houve uma progressão significativa na aprendizagem dos estudantes brasileiros.

Segundo a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), em sua última versão disponibilizada ainda em 2022, a situação do Brasil em relação ao desempenho dos alunos em Matemática é preocupante, os dados obtidos por meio desse processo indicam que 73% dos estudantes brasileiros de até 15 anos apresentam condições precárias em relação ao domínio de conhecimentos matemáticos, conforme explicitado pelo Ministério da Educação. (INEP, 2023).

Desse modo, é de fundamental importância analisar o desenho das práticas docentes no interior das instituições de ensino. Nesse processo investigativo, é indispensável observar como as práticas pedagógicas e os documentos institucionais foram influenciados pela homologação da BNCC de modo a tornar o aluno um sujeito ativo, afastando-o cada vez mais da posição passiva. O ensino limitado a explanação e aplicação de fórmulas e a aprendizagem baseada em atividades prontas, é um processo de ensino e aprendizagem que se mostra superado. Esse modelo de formação fragiliza a aprendizagem dos alunos e suas visões sobre os conhecimentos matemáticos estudados. Um reflexo disso é a posição do Brasil em rankings disponibilizados por avaliações de larga escala, como o PISA.

Com o intuito de compreender os fenômenos que reproduzem essas dificuldades no desempenho dos alunos em relação ao domínio de conhecimentos matemáticos, é importante também olhar para o perfil e papel do professor como mediador e facilitador do conhecimento. Pois, como enfatizado por Chevallard (2009), a prática do professor é moldada por condições que permitem seu trabalho de forma autônoma e por restrições que limitam seu papel como mediador. Essas limitações podem estar em conformidade com as dificuldades emanadas da formação inicial ou até mesmo com as regras estabelecidas pelas instituições escolares ou entidades superiores.

Shulman (1986) ressalta que, para ensinar, o professor precisa dominar uma tríade de conhecimentos relacionados ao objeto de ensino a ser ensinado: (I) conhecimento específico do conteúdo; (II) conhecimento pedagógico do conteúdo; (III) conhecimento curricular do conteúdo. Com base nesses três conceitos, o professor precisa refletir sobre como ele deve

ensinar e o que é considerado importante sobre um determinado conteúdo, de modo que os alunos aprendam e percebam a utilidade dos conhecimentos escolares em suas atividades cotidianas.

Ao refletirmos sobre um determinado objeto de ensino como a probabilidade, que segundo a BNCC deve estar presente no currículo escolar desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. E que consiste em um conteúdo amplamente presente em nosso cotidiano e de fundamental importância para a convivência do indivíduo em sociedade, a partir da tríade desenvolvida por Shulman (1986), entendemos que o professor precisa, necessariamente, possuir domínio específico do conteúdo.

Contudo, se na formação inicial não foram discutidas, de maneira adequada, estratégias para promover o ensino desse objeto matemático, surge a seguinte questão: é possível que o professor desenvolva estratégias de ensino desse conceito, sendo que em sua formação inicial ele trabalhou apenas a base específica do conhecimento? Como esse docente vai promover o ensino dos conceitos probabilísticos? Dominar conhecimentos específicos da área de atuação é de fundamental importância na profissão docente, mas saber como aplicá-los é o fator determinante para o êxito na aprendizagem dos alunos.

Em nossa percepção, o professor precisa possuir pleno domínio do conteúdo específico de sua área de atuação, mas também reconhecer a importância de utilizar diferentes abordagens didáticas, o que se alinha tanto ao conhecimento pedagógico quanto ao conhecimento curricular. Isso deve ser levado em consideração, tendo em vista que cada estudante aprende de maneira diferente e a realidade do estudante pode estar distante das contextualizações apresentadas em situações presentes nos livros didáticos. Assim, enfatizamos a essência do professor conhecer maneiras distintas de abordar o conteúdo em suas práticas, compreendendo que o livro didático não pode e não deve ser o único material de apoio docente na construção de suas práticas.

Desse modo, buscar por atividades de investigação é uma sugestão para o processo de aprendizagem criativo, colocando o aluno como sujeito ativo na busca pelo conhecimento. Não adianta possuir conhecimento das diferentes abordagens históricas da probabilidade e seus diversos significados e aplicações, se na prática o professor resume toda a essência do objeto de ensino em aplicação de exercícios prontos, muitas vezes retirados do livro didático, que podem ser resolvidos de imediato com o auxílio da fórmula. Qual o sentido dessa aula para o aluno? o que ele aprendeu que pode utilizar em seu cotidiano? Essas são essas algumas questões que devem ser pensadas já na elaboração do plano de curso docente.

Contudo, compreendemos que a construção de planejamento com Organizações Didáticas instigadoras não é uma tarefa simples. Por isso é fundamental considerar o contexto do professor, seu processo de formação inicial e suas limitações decorrentes desse processo. Não é porque somos licenciados em Matemática que não apresentamos fragilidades em abordar alguns conteúdos, que deveríamos ter aprendido a ensinar durante esse processo de formação.

Por exemplo, temos conhecimento que o objeto de ensino probabilidade deve ser ensinado já a partir da primeira etapa de formação. Mas, antes disso, é relevante olhar para a formação dos professores que atuam no ensino básico e refletir sobre as condições desses docentes para o trabalho com conteúdos relacionados a esse conceito em sala de aula. Pois, não se trata apenas de entender que o conteúdo deve ser ensinado, mas refletir sobre as limitações docentes para a abordagem da probabilidade e buscar alternativas, de modo que o desempenho docente com o conceito seja suficiente para consolidar o êxito no desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

Assim, para compreendermos a realidade de como a probabilidade é ensinada na educação básica, é importante entender as relações pessoais e institucionais dos professores com esse objeto de matemático, bem como os desafios enfrentados pelos professores que atuam nessa etapa de formação básica. Assim, é necessário investigar quais os obstáculos que estão sendo afrontados pelos docentes no processo de formação do aluno, considerando as orientações curriculares da BNCC para o ensino do conceito e formação cidadã.

Samá e Silva (2020) apresentam um diálogo sobre a formação de professores com ênfase nos anos iniciais, destacando o desafio enfrentado pelos docentes ao trabalhar com o conceito de probabilidade em sala de aula. Embora a abordagem desse objeto matemático esteja efetivamente presente no currículo escolar e a relevância do letramento probabilístico seja comprovada para que os estudantes compreendam os fenômenos do mundo real, existem restrições que impossibilitam o trabalho docente. É salientado pelas autoras que “tal dificuldade pode ser explicada pelo fato de que, em geral, os cursos de formação de professores dos anos iniciais raramente contemplam disciplinas de estatística ou de ensino de estatística ou probabilidade” (Samá e Silva, 2020, p. 2).

O problema apontado por Samá e Silva (2020) é uma situação frequentemente refletida no que diz respeito as diretrizes curriculares dos cursos de pedagogia. Por exemplo, Conti *et al.* (2019) alertam para a necessidade de revisão das matrizes curriculares abordadas na formação em pedagogia. Nesse processo, sobre a educação estatística, enfatiza-se que o professor com formação nesse curso é orientado a abordar esse objeto de ensino na educação básica, muitas vezes, sem sequer ter tido contado na formação inicial. Esse contexto composto por dificuldades

com elementos básicos da probabilidade são refletidos em vários estudos com professores em formação (Batanero, *et al.*, 2015; Fernandes; Viseu e Gea, 2016).

Observa-se uma lacuna na formação inicial de professores para o trabalho com noções probabilísticas. Mas se durante a formação inicial, o professor não tem acesso a conceitos específicos, didáticos e pedagógicos para ensinar probabilidade, como será o desenvolvimento de sua prática em sala de aula? De que maneira ele absorverá conhecimentos suficientes para conduzir o processo de ensino de probabilidade, de modo a formar cidadãos capacitados para o trabalho com os conceitos no dia a dia? Como ele pode desenvolver Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) adequadas, sendo que ele não teve suporte em sua formação para construir situações com a finalidade de promover estímulo, interesse e desenvolvimento da aprendizagem do aluno?

Compreendemos que essas indagações se configuram como alguns dos fatores que limitam a relação do professor com a probabilidade. Esse cenário refletido na formação inicial pode induzir o professor a fazer o uso de metodologias, muitas vezes ultrapassadas, ancoradas na pedagogia clássica ou monumentalista. Esse contexto de ensino pode apresentar vários desafios no processo de desenvolvimento do pensamento probabilístico do aluno, uma vez que as praxeologias de ensino podem ter envelhecido e não estar em consonância com a realidade dos estudantes, aspecto que pode comprometer e fragmentar a aprendizagem do indivíduo.

Reconhecemos que é comum que os professores, ao se depararem com objetos matemáticos nos quais apresentam fragilidades, considerando que não tiveram uma formação compatível com o que se deve ser ensinado sobre os conteúdos, passem a replicar os métodos de ensino pelos quais eles aprenderam enquanto alunos da educação básica. Essa fragilidade na formação inicial pode levar o docente ao uso de metodologias desempenhadas por outros professores há décadas atrás, que talvez não façam mais sentido para a cultura e sociedade atual.

Diante desse cenário, ressaltamos a importância de uma discussão mais profunda sobre o conceito de probabilidade. Nesse sentido, Souza (2016, p. 392) destaca que “ideias mais amplas sobre o ensino de probabilidade e estatística devem ser discutidas na formação dos professores, para fornecer a eles conhecimento conceitual sobre como poderiam superar o domínio de abordagens procedimentais no ensino”.

Permanecendo essa lacuna enfatizada em vários estudos sobre o domínio de noções básicas e fundamentais da probabilidade por alguns professores, torna-se um desafio construir o conhecimento por intermédio de um processo gradual, como orienta a BNCC. Se os professores não conseguem explicar nos anos iniciais as noções de acaso, aleatoriedade, certeza e incerteza, nas etapas de formação seguintes os alunos passarão a enfrentar dificuldades para

compreender outras noções básicas do conceito, como experimento aleatório, espaço amostral, eventos e outras aplicações, como a probabilidade condicional e binomial, e demais contextos que envolvem esse objeto de ensino.

Partindo desses pressupostos, torna-se essencial refletir sobre algumas questões, tais como: se o professor apresenta fragilidade na compreensão de elementos básicos da probabilidade, como seguir o modelo de progressão de aprendizagem ou conhecimentos estabelecidos pela BNCC? Porque entendemos que, se o aluno não consegue compreender a probabilidade por meio de espaços equiprováveis, é provável que, posteriormente, o mesmo apresente dificuldades para o trabalho com espaços amostrais mais complexos.

É a partir dessas dificuldades dos professores que o processo de ensino e aprendizagem passa a ocorrer por meio de métodos repetitivos, nos quais a resolução de exercícios se torna o principal meio de transmitir o conteúdo ao aluno, sem uma contextualização mais adequada com o perfil ou relação com o cotidiano do estudante. Esse tipo de prática torna a Matemática uma disciplina complexa e puramente abstrata, e seus objetos de ensino, como a probabilidade, ficam enquadrados no ambiente escolar, sem efetividade ou ligação com a realidade dos estudantes.

Quando questionados sobre como aprenderam ou desenvolvem estratégias para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, por exemplo, egressos dos cursos de Licenciatura em Matemática, em efetivo exercício em sala de aula, alguns professores destacam que a abordagem da probabilidade na formação inicial foi articulada na disciplina de estatística. Além disso, os métodos utilizados para o estudo do conceito foram completamente tecnicistas, focando na memorização e aplicação de fórmulas para resolver questões rotineiras. Desse modo, alguns professores enfatizam que, atualmente, elaboram suas práticas pedagógicas sobre a probabilidade com base nas questões extraídas de livros didáticos, planejamento que pode não ser o mais indicado para o desempenho de uma formação básica sólida e significativa (Almeida, 2018).

De modo semelhante, Cavalcante, Andrade e Régnier (2016), em um estudo realizado com professores em formação de um curso de Licenciatura em Matemática, enfatizam que os discentes enfrentam dificuldades em compreender elementos básicos da probabilidade. De acordo com os autores, “a aleatoriedade é um dos principais pontos em que os sujeitos demonstram incompreensão, embora essa fragilidade diminua à medida que os futuros professores lidam com a Probabilidade em disciplinas específicas” (p. 453).

A partir dessas circunstâncias que comprometem o conhecimento básico de atuais e futuros professores sobre os conceitos básicos da probabilidade, passamos a refletir sobre como

esse docente vai exercer o trabalho com a probabilidade na educação básica enquanto professor formador, visto que há vestígios de uma lacuna já na formação inicial de professores de Matemática para o trabalho discente com a probabilidade? Para suprir essas necessidades, entendemos que o mais recomendado seja buscar por formações contínuas sobre o conceito de probabilidade, refletir sobre as praxeologias de ensino atuais e reconstruir novas abordagens de ensino.

Considerando toda a essência da probabilidade em nosso cotidiano, torna-se indispensável que os alunos compreendam esses conceitos no mundo real. Assim, faz-se necessário que os professores reflitam sobre a relevância dos conhecimentos probabilísticos para o engajamento nas demandas da atual sociedade, como é destacado por Lopes (2008):

> A competência nesses assuntos permite aos alunos uma sólida base para desenvolverem estudos futuros e atuarem em áreas científicas como a biologia e as ciências sociais. Além disso, ao considerarmos o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões

Além disso, Lopes (2008) chama atenção para o tipo de prática pedagógica a ser utilizada no processo de ensino da estocástica. Nessa perspectiva, a autora defende que as discussões sobre esses objetos de ensino sejam conduzidas por meio de situações contextualizadas, que coloquem o aluno em uma posição ativa e em consonância com sua realidade. A aprendizagem só será significativa para a formação do indivíduo se ele conseguir construir uma ponte de concordância entre o conhecimento aprendido na escola e as atividades cotidianas.

De modo geral, de acordo com o que observamos sobre a formação de professores para o ensino de probabilidade na educação básica, constata-se que:

> [...] a existência de uma lacuna no ensino de estatística e probabilidade, de forma contextualizada, nos materiais didáticos e nas propostas educacionais oficiais. Defensor da pedagogia de projetos no ensino de estocástica, esse autor observa que essa abordagem foi muito citada, tanto pelos documentos oficiais de orientação curricular, tanto nos próprios PCN quanto por pesquisadores das mais diversas áreas, como metodologia capaz de favorecer a autonomia no ensino e na aprendizagem, em ambientes cooperativos nos quais os estudantes são sujeitos ativos, críticos e conscientes de sua responsabilidade na construção do próprio conhecimento. (Biajone, 2006 apud Giordano e Vilhena, 2020, p. 63).

Assim, ao analisar o problema do ensino de probabilidade sob a ótica da tríade estabelecida por Shulman (1986), podemos perceber que os critérios mais relacionados a insuficiência do trabalho docente com a probabilidade se aproximam principalmente dos quesitos (I) e (II), denominados por Shulman de: (I) conhecimentos específicos do conteúdo e (II) conhecimentos pedagógicos do conteúdo. Assim, indicamos a necessidade de focar no

fortalecimento desses aspectos para um desempenho docente mais eficaz no ensino de probabilidade em sala de aula, promovendo uma aprendizagem significativa sobre o conceito.

A partir dessa discussão sobre a formação de professores para o ensino de probabilidade na educação básica, percebemos a importância da elaboração de dispositivos que auxiliem o trabalho docente com a probabilidade, subsidiando o processo de ensino de modo a colocar o aluno em situações de confronto com o objeto matemático a ser estudado, por meio de uma pedagogia de investigação, estimulando o aluno no desenvolvimento de novas habilidades e construção autônoma do próprio conhecimento.

Para esse fim, a TAD dispõe da Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), uma Organização Didática (OD) com a função de questionar o atual modelo de ensino de objetos matemáticos, como a probabilidade, e se configurar como uma alternativa para ensino e aprendizagem por meio de cenários investigativos e reais.

2.5 Os documentos oficiais e a probabilidade

A educação brasileira é guiada por documentos normativos que orientam sobre o desenvolvimento do perfil do cidadão a ser formado. Nesses documentos, são estabelecidos o papel do professor e as habilidades fundamentais que devem ser desenvolvidas ao logo da trajetória do estudante na formação básica. Entre esses documentos, destacam-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); Os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCNEM); As Orientações Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio (OCNEM) e a mais nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esses são alguns dos principais documentos normativos responsáveis por estruturar o processo de ensino e aprendizagem da educação brasileira.

2.5.1. Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram homologados com o intuito de fornecer orientações e estruturar os conhecimentos necessários ao currículo escolar, apresentando fundamentos para o desenvolvimento social do indivíduo ao longo do processo de formação básica. Para esse fim formativo, são definidas orientações específicas e didáticas relacionadas aos conteúdos a serem desenvolvidos em cada etapas de ensino.

No Ensino Fundamental, o documento estrutura o processo formativo em quatro ciclos, no qual cada ciclo é composto por duas séries específicas. Isto é, o 2° e o 3º ano pertencem ao primeiro ciclo, enquanto o 4° e 5° ano integram o segundo ciclo. Seguindo essa estrutura, o 6°

e o 7° ano estão inseridos no terceiro ciclo e, por fim, o 8° e 9° ano encontram-se integrados ao quarto e último ciclo de formação do Ensino Fundamental.

No que se refere ao ensino da Matemática no Ensino Fundamental, os conteúdos da matriz curricular estão organizados por blocos temáticos, denominados: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Esses blocos são indicados para o pensamento lógico – matemático do aluno. Nesse processo de formação, espera-se que o professor integre em suas metodologias aspectos relacionados a conceitos, procedimentos e atitudes para o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo dos estudantes (Brasil, 1998).

No que diz respeito ao campo da probabilidade, as orientações relacionadas a esse objeto de ensino estão incorporadas no eixo temático denominado de Tratamento da Informação. Para o ensino desse objeto de ensino, o documento destaca a importância do aluno compreender que a natureza aleatória está significativamente presente em acontecimentos cotidianos. O documento faz uma abordagem introdutória, evidenciando também a construção do conceito de probabilidade a partir de cenários cotidianos, inicialmente introduzindo situações equiprováveis (Brasil, 1998).

A partir das orientações sobre o conceito de probabilidade observadas nos PCN, observa-se que o documento salienta, mesmo que de maneira introdutória, que a probabilidade seja ensinada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, nessa etapa de formação básica, o estudo mais estruturado do conceito é introduzido a partir do segundo ciclo de formação, com o início no 4° ano do Ensino Fundamental.

No que diz respeito ao ensino da Matemática no Ensino Médio, nos PCNEM os conteúdos são distribuídos na parte III, denominada ‘Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias’. Nesse contexto, enfatiza-se que a Matemática nessa etapa de formação deve fortalecer, no sentido de progressão, os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, buscando também criar relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Sendo assim orienta-se que:

> [...] no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização. (Brasil, 2000, p. 05).

No que se refere à probabilidade, as diretrizes curriculares enfatizam que no Ensino Médio, os estudantes desenvolvam habilidades e competências que os condicionem a “compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e

utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades" (Brasil, 2000, p. 95).

Nos PCNEM, é enfatizado que, no ensino da Matemática, o professor deve considerar que a componente é uma linguagem significativamente presente em outras áreas do conhecimento e significativamente no mundo real. E uma das formas de perceber o engajamento dos estudantes com o domínio matemático relacionando-o com outras áreas de formação e o mundo real é por intermédio das análises envolvendo elementos econômicos e estatísticos associados aos significados pessoais, políticos e sociais (Brasil, 2000). A abordagem de objetos matemáticos dessa maneira, distancia a visão da Matemática como a mobilização de um conjunto fórmulas e técnicas abstratas e aproxima o conhecimento escolar do contexto social no qual o estudante encontra-se integrado.

Refletindo sobre as orientações presentes no documento, Almeida (2018) salienta que:

> Para Matemática, os PCNEM buscam orientar os professores no intuito de formar cidadãos, trabalhando o raciocínio lógico dedutivo, com a capacidade de criar estratégias, entender estimativas, conceitos e resolver problemas reforçando a importância de uma cuidadosa abordagem de conteúdos de Contagem, Estatística e Probabilidade no ensino médio. (p. 82).

De modo geral, o objetivo dos PCNEM é orientar professores no processo de formação do aluno do Ensino Médio, incentivando-os por meio de metodologias inovadoras, subsidiar os conhecimentos de uma maneira mais eficaz e dinâmica para os estudantes, considerando os saberes aprendidos no Ensino Fundamental. Além disso, o documento visa remodelar as premissas curriculares, objetivando formar sujeitos éticos, de autonomia intelectual e desenvolvimento do pensamento crítico sobre o mundo ao seu redor (Brasil, 2000).

Considerando as limitações dos PCNEM para o Ensino Médio, posteriormente, foram elaboradas as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM), documento que visa complementar as diretrizes curriculares atribuídas aos PCNEM, e apresentar algumas reformas na base curricular. A seguir apresentaremos uma discussão mais detalhada sobre esse documento e suas recomendações para o ensino do saber probabilidade.

2.5.2. Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Pouco menos de uma década depois da homologação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), foram homologadas as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM). No volume 2, capítulo 3, o documento aborda o eixo de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. No que se refere ao ensino da Matemática, os conteúdos estão estruturados em quatro blocos: Números e Operações;

Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. De acordo com o documento, essa divisão não implica que os blocos precisam ser abordados de maneira isolada, mas sim que podem ser trabalhados de forma separada, mantendo a conexão entre os conteúdos quando possível.

Elaborado para complementar os PCNEM, este documento parte do princípio de que o processo de ensino da Matemática deve estimular os alunos no desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pensamento matemático. Segundo as OCNEM, é essencial que a escolha de conteúdos a serem abordados no processo de formação cidadã priorize a qualidade do processo em vez da quantidade de conhecimentos exibidos. Desse modo, é importante que os professores reflitam sobre a relevância dos conteúdos ensinados no Ensino Médio e sua importância na realidade do estudante, criando pontes para a percepção da Matemática em diferentes contextos.

Analisando as orientações curriculares sobre a probabilidade presentes no documento, observa-se que esse objeto matemático recebe atenção exclusiva, juntamente com o conteúdo de análise de dados. No início da abordagem sobre probabilidade, o documento ressalta a importância da inserção do conceito no currículo escolar em todos os níveis da educação básica, enfatizando sua relevância na compreensão de noções de incerteza e fenômenos aleatórios. Isso se justifica pelo fato de que os alunos enfrentam situações envolvendo esses elementos frequentemente em seus cotidianos. Nessa perspectiva:

> O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico. Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de balas de determinada cor em uma caixa. (Brasil, 2006, p. 78).

No documento, nota-se através das orientações curriculares, a preocupação em abordar o ensino do conceito de probabilidade por meio de atividades de experimentação. De acordo com as OCNEM, abordagens nessa perspectiva contribuem para a formação do aluno de modo a ampliar sua visão de mundo. Essa discussão ressalta a necessidade dos conhecimentos escolares estarem em conformidade com a realidade vivenciada pelo estudante. Caso não exista essa conexão entre o conhecimento escolar e o cotidiano, consequentemente, o aluno apresentará fragilidades, enfrentando dificuldades em utilizar os conhecimentos adquiridos na escola em sua convivência diária.

Desse modo, o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade deve promover uma visão mais realista de mundo, despertando no estudante a capacidade de questionar, investigar e validar as inúmeras informações diárias recebidas por meio das mídias. Além disso, no âmbito

da formação no Ensino Médio, o documento destaca a necessidade de que, a partir desse processo, o aluno desenvolva habilidades suficientes para compreender e levantar possiblidades, bem como formular hipóteses de equiprobabilidade, determinando as chances de ocorrência de diferentes tipos de eventos. Ademais, o documento adverte que:

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance (Brasil, p. 80, 2006).

Outro aspecto relevante sobre a probabilidade observado no documento, é que o processo de ensino do saber pode e deve ser combinado com outros recursos didáticos como as planilhas eletrônicas, *software* que ajudará o professor a melhor introduzir a noção probabilística por meio de simulações.

> Ao se usar a função "ALEATÓRIO ( )", podem-se simular experimentos aleatórios de variados níveis de complexidade, contribuindo, assim, para que o aluno atribua um significado intuitivo à noção de probabilidade como frequência relativa observada em uma infinidade de repetições (Brasil, 2006, p. 89).

Desse modo, é possível perceber que, em alguns momentos, o documento assume a responsabilidade de enfatizar que o conceito de probabilidade não pode ficar limitado à ideia de espaços amostrais equiprováveis, mas compreender que a dimensão desse conceito pode abranger cenários de espaços não equiprováveis.

De acordo com o discurso institucional expressado nas OCNEM, observa-se uma crescente na abordagem do conceito de probabilidade comparado aos documentos anteriores como os PCNEM. Nota-se um maior número de orientações didáticas para o ensino desse objeto matemático, apresentando maiores possibilidades para o trabalho com a probabilidade em sala de aula.

O documento também salienta que, para construção do pensamento probabilístico, é relevante recorrer a conteúdos estudados no Ensino Fundamental, partindo do pressuposto de a formação cidadã do indivíduo é obtida por meio de um fluxo contínuo e gradual. Esse processo contínuo possibilita ao estudante aprofundar em conhecimentos sobre os conceito adquiridos em etapas de formação anteriores.

2.5.3. Base Nacional Comum Curricular

Com a finalidade de promover mudanças fundamentais nos princípios que regulamentam o processo de formação cidadã, estabelecendo orientações e habilidades sobre os saberes a serem ensinados e o modelo de formação adequado no ensino básico, o Ministério

da Educação (MEC) por meio do Conselho Nacional de Educação (CNE) (assegurado na Resolução CNE/ nº 2, de 22 de Dezembro de 2017), determina a adesão obrigatória das escolas brasileiras à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ao longo de todas as etapas de formação da educação básica.

A BNCC é um documento curricular instituído a partir das indigências do sistema de ensino e limitações de documentos anteriores que orientavam o processo de formação básica. Em conformidade com Chevallard (2018), o envelhecimento do modelo praxeológico necessita da reconstrução ou elaboração de novas praxeologias mais eficientes para conduzir a formação cidadã. Visto isso, a BNCC é elaborada como um documento unificado, ou seja, abrangendo todos os saberes e orientações consideradas suficientes pela *noosfera* para a formação e desenvolvimento cidadão dos alunos. Homologada em 2018, a BNCC é caracterizada como:

> [...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2018, p.7).

Além das competências gerais, compostas por orientações que indicam o perfil cidadão a ser formado na educação básica, a BNCC também dispõe de competências específicas e habilidades para cada área do conhecimento. Entretanto, o documento ressalta a importância de descentralizar as disciplinas, promovendo a transdisciplinaridade entre os conteúdos de cada componente curricular. O documento, de modo geral, busca estimular o protagonismo do aluno na construção de seu próprio conhecimento.

No Ensino Fundamental, a BNCC articula objetos matemáticos em torno dos campos da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Nesse processo de formação, espera-se que o aluno desenvolva a capacidade de relacionar observações empíricas do mundo real com o conhecimento escolar, identificando possibilidades de utilizar conhecimentos matemáticos por meio da aplicação de conceitos e propriedades para resolver problemas contextualizados e diversificados em seu cotidiano. A Matemática no Ensino Fundamental "centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos" (Brasil, 2018, p. 471).

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas tecnologias, o documento orienta que nessa etapa de formação os alunos devem consolidar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental e aprofundá-los, buscando conhecer mais sobre os objetos matemáticos estudados e como eles se comportam em seu cotidiano. Nesse processo gradual, o objetivo é ampliar sua

capacidade para lidar com problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Ademais, o documento ainda ressalta a importância de construir uma visão mais integrada da Matemática, reconhecendo sua conexão com outras componentes curriculares e suas aplicações no cotidiano (Brasil, 2018). Desse modo, sobre o processo de aprendizagem contínua, o documento destaca que:

> O conjunto das competências específicas e habilidades definidas para o Ensino Médio concorre para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica e está articulado às aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental (Brasil, 2018, p. 471).

Em outras palavras, de acordo com a BNCC, a transição entre as etapas da formação básica, momento em que o aluno avança de uma etapa de formação para outra, o currículo e as práticas de ensino devem promover a progressão do conhecimento, garantindo a continuidade das experiências e aprendizagem dos alunos. Esse processo tem por finalidade consolidar e ampliar a formação integral dos estudantes, com características em consonância com os princípios da justiça, da ética e da cidadania (Brasil, 2018).

Sobre o a abordagem do objeto matemático probabilidade no Ensino Médio, Filho (2020) enfatiza que:

> Deve-se buscar novamente a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas na etapa anterior, através da resolução de problemas mais complexos, que envolvem por exemplo, métodos de contagem mais sofisticados e diferentes tipos de espaços amostrais. (p. 12)

Entendemos que essa sofisticação é o nível de complexidade das situações relacionadas ao objeto de ensino, que no Ensino Médio devem ser mais abrangentes, envolvendo mais conhecimentos. Isso permite que os alunos desenvolvam a capacidade de mobilizar diferentes maneiras de trabalhar com uma noção específica da probabilidade, como calcular o número de casos favoráveis para a ocorrência de um evento ou a quantidade de elementos do espaço amostral. Além disso, é importante que o estudante compreenda e trabalhe com situações nas quais os eventos de um mesmo espaço amostral não tenham as mesmas chances de ocorrer, desconstruindo a ideia de que todos os espaços amostrais são equiprováveis.

No intuito de satisfazer essa demanda, já no processo de formação inicial, no tocante à probabilidade, a BNCC salienta que:

> [...] os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (Brasil, 2018, p.518).

Na perspectiva da integração da probabilidade ao currículo do ensino básico, uma de suas relevantes mudanças em relação a documentos oficiais anteriores, foi a implementação da probabilidade em todos os ciclos de formação da educação básica. Se antes, a probabilidade

deveria ser estudada de forma mais sólida apenas a partir do segundo ciclo de formação, com a vigência da BNCC, passou a compor o currículo desde o primeiro ciclo de formação.

Além disso, no âmbito da formação básica orientada pela BNCC, a probabilidade passou a ser incorporada em uma unidade temática específica, com discussões voltadas para a estatística e a probabilidade, aspecto que amplia as orientações curriculares sobre o conceito. Embora a probabilidade já estivesse presente como Saber a Ensinar em outros documentos, na BNCC o conceito assume um papel mais presente no processo formativo do estudante.

No Ensino Médio, a BNCC salienta que o conteúdo seja trabalhado de modo geral, isto é, sob as orientações das mesmas competências e habilidades para todos os anos pertencentes a esta etapa de formação. Em relação ao ensino da probabilidade, o documento estabelece especificamente quatro habilidades específicas para a abordagem do conceito, como é possível observar a seguir.

> (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
> (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades. (Brasil,2018, p. 548).

Essas habilidades estão alinhadas com as competências específicas, que orientam os procedimentos metodológicos a serem utilizados, de modo que o aluno se sinta estimulado e condicionado para o desenvolvimento dos parâmetros contidos nas habilidades. Vale destacar que as habilidades presentes no documento para o ensino desse objeto matemático não contemplam todas as competências específicas. No Quadro 03 a seguir, apresentamos um recorte adaptado do documento destacando as competências e habilidades que asseguram o ensino e aprendizagem da probabilidade no Ensino Médio.

Quadro 03: Competências e habilidades da BNCC para o ensino de probabilidade no Ensino Médio

Competência	Habilidade	Descrição
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões	(EM13MAT106)	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um

socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral		tratamento médico em detrimento de outro etc.)
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade
	(EM13MAT312)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: adaptado de Brasil (2018)

De acordo com as descrições do Quadro 03, observa-se que, das cinco competências específicas da BNCC para o ensino de Matemática, a probabilidade está sustentado nas competências de número 1, 2 e 3. Desse modo, evidencia-se que a *noosfera* compreende que essas competências são satisfatórias para assegurar a formação integral do aluno sobre a probabilidade no Ensino Médio.

Vale ressalta que além das competências e habilidades específicas que foram discutidas e apresentadas no Quadro 03, o documento pressupõe a necessidade de conhecimentos probabilísticos para estudo de outros áreas do conhecimento. Um exemplo disso é a competência 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias que dispõe da habilidade (EM13CNT205): “Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências” (Brasil, 2018, p. 559)

A partir das constatações na BNCC, destaca-se a relevância do objeto matemático probabilidade na composição do currículo para a formação cidadã do indivíduo na educação básica, não apenas em Matemática, mas em outras áreas de formação, como foi possível destacar. Assim, torna-se fundamental investigar o contrato institucional em torno da probabilidade, a partir de documentos como o livro didático, com a finalidade de notar a relevância desse objeto de ensino dentro de um dos principais suportes ao professor, observando como a *noosfera* desenvolve o Saber a Ensinar probabilidade para subsidiar o processo de formação básica do estudante.

2.5.4. A Probabilidade

Tomando a BNCC como base, a aderência desse documento ao nosso estudo sobrevém pela razão do documento assumir o papel de principal e único modelo obrigatório na educação básica, composto por orientações curriculares determinantes no processo de formação integral. Como as escolas são sujeitadas a este documento, acreditamos que investigando as sequências de ensino sobre a probabilidade incorporadas nos livros didáticos encontraremos importantes subsídios para a proposição de uma Organização Didática (OD) como a Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) sustentada nas habilidades da BNCC para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.

Comprovada a importância dada à probabilidade na BNCC para a formação do aluno na educação básica, é essencial tecer alguns comentários em torno dos diferentes significados desse conceito e suas definições. De modo geral, é importante destacar que a definição deste objeto matemático é multifacetada. A probabilidade trata-se de um saber matemático que nos permite estimar as chances de ocorrência de possíveis eventos a partir da análise de fenômenos aleatórios. Para o estudo dessas previsões, a probabilidade pode ser observada, conforme Batanero (2005), por cinco significados, denominados de**: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático.** A seguir concebemos algumas discussões em torno desses significados.

Significado intuitivo: A definição intuitiva de probabilidade está em conformidade com as crenças pessoais sobre a ocorrência de um determinado evento específico. Essa interpretação do conceito está alinhada com aquilo que consideramos provável com base em nossos sentimentos e percepções. Ou seja, a interpretação intuitiva trata-se de uma estimativa de ocorrência, sem um respaldo de comprovações formais ou dados matemáticos.

Nesse significado do conceito, é comum a utilização de expressões do tipo: “é provável que aconteça”, “pode ser que aconteça”, “provavelmente sim”, “provavelmente não”, entre

outras pressuposições. Outra característica particular desse significado, é que ele pode ser utilizado por pessoas que não possuem uma relação pessoal ou institucional com a probabilidade, ou sequer sabem da existência desse objeto matemático. Sobre essa interpretação, Batanero (2005, p. 253) enfatiza que "Estas primeiras ideias, que surgem das capacidades, da esperança, da força num jogo e do conceito de um jogo equitativo, não especificam até que sejam atribuídos números a estes níveis de credibilidade para poder comparar a verossimilhança de diferentes sucessos".

Compreendemos por Batanero (2005), que nos diferentes usos da probabilidade, até que não se tenha uma comprovação por meio de cálculos considerando a estimativa dada pela relação entre os números de casos favoráveis e os casos possíveis ou outras expressões matemáticas, que não podemos construir uma expectativa real ou verídica, estamos lidando com a probabilidade intuitiva. Em síntese, o significado intuitivo não pode ser representado por uma razão matemática.

Significado clássico: A definição de probabilidade clássica ou laplaciana é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Com base nessa abordagem do conceito, podemos estimar previsões antecipadas sobre a possibilidade de ocorrência de um determinado evento. Nesse contexto, "os elementos do espaço amostral são equiprováveis, ou seja, em um determinado experimento aleatório cada subconjunto do conjunto espaço amostral têm as mesmas chances de ocorrer" (Maciel e Barbosa, 2024, p. 141).

Sendo assim, nesse cenário probabilístico, a chance de sucesso de um evento é calculada em um cenário de um número finito de possibilidades. Nessa perspectiva, para o cálculo da probabilidade clássica, emprega-se uma expressão matemática do tipo fracionária, denotada por:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Números de casos favoráveis}}{\text{Números de Casos totais}}$$

Por intermédio dessa fórmula, enfatiza-se que a estimativa de ocorrência de um evento específico é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (subconjunto do espaço amostral que favorecem a ocorrência de um dado evento) numerador, pelo número de casos totais (espaço amostral) denominador.

Significado empírico ou frequentista: Na definição de probabilidade frequentista, a estimativa de ocorrência de um evento é definida pela frequência relativa com base na razão entre o número de vezes que um evento acontece, dado um número considerável de tentativas em que o experimento foi realizado. Nesse contexto, de acordo com Maciel e Barbosa (2024), ao estudar esse significado de probabilidade, é importante observar que "há alguns fenômenos

que podemos considerar limitantes no trabalho com essa abordagem, que é a ausência de um número exato para "n" (número de experimentos a serem realizados), devendo todos ocorrer nas mesmas condições" (p. 142).

Esse significado da probabilidade possui suas raízes nas observações de Jacques Bernoulli (1654-1705) e a Lei dos Grandes Números, que indica que a probabilidade de um determinado evento ocorrer pode ser calculada observando a frequência em que ele ocorre em um grande número de ensaios, desde que sejam estabelecidas as mesmas condições para todos os ensaios. Em contra partida, de acordo com Batanero (2005, p. 254):

> Um problema prático é que na entrada de frequência nunca obtemos o valor exato da probabilidade, apenas uma estimativa. Por outro lado, é impossível realizar os experimentos exatamente nas mesmas condições. Também é difícil guardar com certeza o número de experimentos que devemos realizar para aceitar a estimativa da probabilidade como boa; No entanto, alguns destes sucessos (por exemplo, no campo da economia ou da história), alguns aleatórios, são irrepetíveis e, de acordo com esta concepção, não podemos aplicar a teoria da probabilidade para o seu estudo.

Significado subjetivo: de acordo com Batanero (2005, p. 254):

> Um novo ponto de vista surge através da regra de Bayes, que permite transformar probabilidades a priori (antes de realizar um experimento) de variações causais, observadas por suas consequências, em probabilidades a posteriori, que incorporam as informações dos dados analisados.

A interpretação da probabilidade subjetiva é baseada em nossas crenças e experiências vivenciadas. Nesse contexto, o significado subjetivo põe à prova a objetividade em torno do objeto matemático probabilidade, uma vez que são consideradas algumas evidências individuais do experimento realizado, como as experiências prévias das pessoas em ocorrência de fenômenos aleatórios semelhantes.

Assim, na concepção subjetiva, as chances de um determinado evento ocorrer podem ser percebidas de maneiras distintas. Por exemplo, em um experimento com uma moeda, uma pessoa que já realizou o experimento várias vezes pode acreditar que é mais provável sair a face "cara" virada para cima, enquanto outra, que ainda não realizou o experimento, continua a associar a probabilidade de sair "cara" ou "coroa" à ideia a priori do conceito. Considerando esse contexto, é fundamental salientar que "se na abordagem frequentista há uma forte dependência em relação ao experimento, nesta abordagem a probabilidade e seu cálculo dependem do observador e de quem realizar" (Cavalcante, 2018, p. 187).

Significado axiomático: a interpretação axiomática associa o conceito de probabilidade à noção de função, cujo espaço amostral é o domínio. Na definição axiomática, a probabilidade é estruturada por alguns axiomas. Sendo S o espaço amostral e P(A) seu subconjunto, devem ser considerados os seguintes axiomas:

1. Axioma: $P(A) \geq 0$; para todo evento A pertencente a S;

2. Axioma: P (Ω) = 1; a probabilidade do espaço amostral é igual a 1;

3. Axioma: Se A e B são conjuntos disjuntos, $P(A \cap B) = \emptyset$, então P (A ∪ B) = P(A) + P(B).

Decorrente das observações de Kolmogorov, essa interpretação da probabilidade "faz o uso desses axiomas para demonstrar as demais propriedades da probabilidade referentes aos cálculos do conceito de probabilidade" (Maciel e Barbosa, 2024, p. 144). Além disso, segundo Cavalcante (2018), o surgimento desse significado, que ocorreu por volta de 1933, foi essencial para o uso e aplicação de conhecimentos probabilísticos a partir do século XX.

Do ponto de vista prático do significado axiomático, Maciel e Barbosa (2024) ressaltam que embora:

> Essa noção de probabilidade não esteja amplamente presente em situações cotidianas, tendo em vista suas características em consonância de formalidade e complexidade, esse tratado é mais utilizado para o estudo do conceito no meio acadêmico em cursos de licenciatura ou bacharelado em matemática, por exemplo (p. 144).

Assim, compreendemos que a ausência de estudos relacionados a esse significado de probabilidade na educação básica é comum, considerando seu nível de complexidade e sua função, que é a institucionalização matemática da probabilidade. Desse modo, o estudo da probabilidade no processo de formação básica é mais voltado para as interpretações de probabilidade intuitiva, clássica, frequentista e subjetiva.

De modo geral, Batanero (2015) recomenda intensificar as investigações em torno do ensino de probabilidade, buscando novas formas de familiarizar os alunos com noções de incerteza, enfatizando que o conhecimento probabilístico não se desenvolve sem um ensino específico do conteúdo. A autora ainda ressalta a importância de analisar como os professores e alunos podem coordenar os diferentes significados do conceito. Para isso, é importante apresentar aos professores opções didáticas que permita o trabalho com essas diferentes abordagens da probabilidade em sala de aula.

Nesse processo, os conhecimentos didáticos do professor são fundamentais para desenvolver no aluno habilidades relacionadas ao conhecimento probabilístico. Assim, compreendemos que para que o professor obtenha condições didáticas necessárias para abordar esse conceito, é essencial que, já no processo de formação inicial ou por meio de formação continuada, o mediador participe de debates sobre como promover o ensino de probabilidade na educação básica, coma finalidade de desenvolver uma aprendizagem significativa, de modo que os estudantes possam adquirir os conhecimentos necessários para compreender as noções e diferentes aplicações desse saber em situações do mundo real.

Desse modo, pensamos na proposição de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) com base na necessidade de problematizar o ensino de probabilidade, contribuindo com um modelo alternativo que tenha por finalidade estimular o ensino desse conceito por meio de uma pedagogia investigativa. O método investigativo busca superar paradigmas abstratos, que, em alguns casos, conduzem o processo de formação básica relacionadas à probabilidade.

3. METODOLOGIA

Essa pesquisa adota uma abordagem de natureza qualitativa, definida conforme Silveira e Córdova (2009), como um processo de análise profunda, que não possui a intenção de uma representatividade estatística e objetiva. Assim, a finalidade desse estudo é compreender, com base na realidade das instituições, estas como dispositivos sociais educacionais, os fenômenos relativos ao ensino de probabilidade na educação básica, que não podem ser apenas quantificados, mas analisados e compreendidos em suas relações com a sociedade e ações humanas.

> A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização[...] os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos. A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais. (Silveira e Córdova, 2009, p. 33 – 34).

Na abordagem qualitativa, o pesquisador é o principal instrumento de pesquisa, estabelecendo contato direto com o *locus* de investigação. Assumindo características diversas, a pesquisa qualitativa pode lançar mão de diversos procedimentos, como etnografia, análise documental, estudos de caso, pesquisa-ação, pesquisa participante, etc (Fiorentini e Lorenzato, 2009). Nossa pesquisa, vislumbra-se por meio dessa abordagem devido ao estudo da probabilidade com base nos documentos oficiais, tais como os PCN, PCNEM, OCNEM e BNCC, além dos institucionais como as obras didáticas aprovadas no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e distribuídas às escolas.

Quanto a tipologia, nossa pesquisa classifica-se como exploratória e explicativa. Para Gil (2008), a pesquisa exploratória pode articular diversos procedimentos como levantamento bibliográfico e entrevistas com um grupo de pessoas com experiência na área, viabilizando maior familiaridade com o objeto ou problema estudado, visando a formulação de situações de pesquisas bem definidas. Partindo desse contexto, embora nossa pesquisa não tenha sujeito em forma de pessoa, exploramos elementos que conduzem o contrato institucional, como os discursos presentes em documentos oficiais e em livros didáticos, desbravando suas organizações para ensino de probabilidade no Ensino Médio.

Prosseguindo, Segundo Gil (2008), a pesquisa explicativa tem como objetivo identificar os fatores das causas e razões, a partir da análise da relação entre as variáveis existentes que levam a ocorrência de um determinado fenômeno. Visto a identificação do contrato institucional em torno do ensino de probabilidade, analisamos as evidências disponíveis nos documentos analisados, no intuito de categorizar as variáveis determinantes que caracterizam

parte do modelo dominante para o ensino de probabilidade.

Em conformidade com Fiorentini e Lorenzato (2009), quanto aos procedimentos, esta pesquisa caracteriza-se como documental. De acordo com os autores, estudos em que os documentos desempenham o papel de campo, são caracterizamos como análise documental. Por conseguinte, concebemos esses procedimentos como percursos essenciais para identificarmos a consistência das Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) presentes nos documentos institucionais para a abordagem dos conhecimentos probabilísticos.

Portanto, mediante a análise de documentos como os livros didáticos, uma das principais ferramentas utilizada pelo professor para subsidiar a transposição dos saberes matemáticos em sua fase de transformação do Saber a Ensinar, buscamos compreender as condições estabelecidas nos documentos institucionais para abordagem do conceito de probabilidade no Ensino Médio, no intuito de encontrar respostas para questões do tipo: Como as praxeologias identificadas nas coleções de livros didáticos analisadas influenciam o trabalho com a probabilidade em sala de aula, de modo a promover uma aprendizagem ativa e autônoma do estudante?

Considerando nossos objetivos e a natureza do trabalho, observa-se um caminhar metodológico que combina análise documental com a proposição de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP). A análise documental servirá para compreendermos as relações institucionais e as práticas presentes no modelo epistemológico dominante. Enquanto a AEP surge como um modelo alternativo para o ensino de probabilidade no Ensino Médio em uma perspectiva investigativa.

Com base nessas considerações, o material de investigação selecionado para esta pesquisa é composto por duas obras didáticas de Fernando Martins de Leonardo. A primeira é a 2ª edição, intitulada *Conexões – Matemática*, aprovada no PNLD 2015. E a segunda é a 1ª edição, intitulada *Conexões – Matemática e suas Tecnologias*, aprovada no PLND 2021. Para a escolha desses materiais didáticos, estabelecemos dois critérios para cada obra.

3.1. Critérios de escolha das obras didáticas:

Primeira coleção:

1. A coleção deveria ter sido aprovada no PNLD 2021;
2. A coleção deveria ter sido adotada por uma escola da rede estadual de ensino de Caruaru – PE;

Segunda coleção:

1. A coleção deveria ter sido aprovada no PNLD 2015;

2. A coleção deveria ser de mesma autoria da primeira obra;

3.2. Construção e análise de dados

A construção dos dados ocorreu por intermédio da análise documental em documentos oficiais e em duas coleções de obras didáticas. Esse procedimento de investigação realizado nos documentos oficiais como os PCN, PCNEM, OCNEM, BNCC e nos materiais didáticos (manual do professor) serviu para compreendermos as relações institucionais com a probabilidade, as organizações que vivem nesses documentos e que condicionam o ensino do objeto matemático probabilidade no Ensino Médio.

No cenário analisado, nos documentos oficiais investigamos as orientações curriculares disponíveis nos documentos para orientar o ensino de probabilidade. E nas obras didáticas, exploramos as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) a partir do contexto presente nos livros didáticos selecionados destinados ao Ensino Médio. Nesse processo, comparamos as organizações presentes nas obras didáticas do PNLD 2015 e do PNLD 2021. Dessa forma, buscamos identificar as possíveis mudanças nas praxeologias disponíveis nas coleções de livros analisadas, considerando que, com a homologação da BNCC, podem ter ocorrido transformações influenciadas pela *noosfera*. Em resumo, a análise e construção de dados ocorreram em dois momentos, conforme quadro a seguir.

Quadro 04: Categorização da construção e análise de dados

Materiais	**Análise de dados**
Documentos oficiais	Analisar os discursos em documentos como os PCN, PCNEM, OCNEM e BNCC sobre a probabilidade;
Obras didáticas	Explorar as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) presentes nas obras didáticas *Conexões – Matemática* (2015) e *Conexões – Matemática e suas Tecnologias* (2021).

Fonte: produção nossa

Sendo assim, para a construção dessa pesquisa, estabelecemos o cumprimento de três (03) etapas de investigação.

1. Etapa – Planejamento: Visita aos documentos oficiais:

Nesta primeira etapa da pesquisa, buscamos compreender, a partir dos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Parâmetros Curriculares Nacionais

para o Ensino Médio (PCNEM), Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os discursos contidos nesses documentos, entre competências e habilidades, para a abordagem da probabilidade no Ensino Médio.

2. Etapa – Análise praxeológica das obras didáticas:

Para o estudo do saber probabilidade a partir das obras analisadas, buscamos identificar como as organizações estão presentes nesses livros didáticos, de modo a condicionar ou restringir o ensino do saber probabilidade no Ensino Médio. Desse modo, no processo de análise das obras didáticas (manual do professor), nossa intenção foi identificar como a probabilidade é tratada nas obras didáticas, desde à estrutura do objeto matemático nos materiais às suas abordagens e diferentes aplicações em contextos diversos. Neste sentido, conduzimos a análise das obras didáticas de acordo com os dez critérios que estabelecemos a seguir.

Quadro 05: Critérios da análise praxeológica

1. Identificamos a quantidade de capítulos da obra didática;	6. Contamos e agrupamos as questões por conteúdos;
2. Identificamos a probabilidade no sumário da obra didática;	7. Identificamos vestígios das Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD);
3. Localizamos a probabilidade na obra didática (Capítulo e/ou seção);	8. Agrupamos as questões por tipos e subtipos de tarefas;
4. Identificamos a quantidade de seções que abordam a probabilidade como objeto de ensino;	9. Exploramos e indicamos possíveis técnicas;
5. Identificamos as modalidades de exercícios presentes nas obras didáticas e o número de questões propostas em cada modalidade;	10. Exploramos a presença de vestígios tecnológicos-teóricos;

Fonte: Produção nossa

A priori, nossa hipótese é de que as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) presentes nas obras didáticas são predominantemente do tipo rotineiras, que não estimulam o aluno no processo de construção ativa de seu próprio conhecimento. Assim, no quadro a seguir apresentamos algumas categorias de tipos de tarefa que consideramos do tipo rotineiras e que, possivelmente, podem aparecer com frequência nos livros didáticos que iremos analisar.

Quadro 06: Categorização a priori dos tipos de tarefa

Primeira Categoria: Noções básicas de probabilidade

➢ $T_{1.\ CNEA}$ Compreender e/ou dá exemplos de experimento aleatório; ➢ $T_{2.\ REA}$ Representar o Espaço Amostral Equiprovável e não Equiprovável; ➢ $T_{3\ RTE}$ Representar ou identificar os Diferentes Tipos de Eventos;
Segunda Categoria: Cálculo de probabilidade a priori ➢ $T_{4.\ CPDE}$ Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento específico; ➢ $T_{5.\ CPEME}$ Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos mutuamente exclusivos; ➢ $T_{6.\ CPUE}$ Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos por meio da união de eventos; ➢ $T_{7.\ CPEC}$ Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos complementares; ➢ $T_{8.\ DPOE(A\|B)}$ Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento A, conhecendo a probabilidade de ocorrência de B; ➢ $T_{9.\ CPEI(A)}$ Calcular a probabilidade da ocorrência de eventos independentes;

Fonte: Produção nossa

É importante destacar que os tipos de tarefa presentes no quadro anterior são apenas modelos de tipos de tarefas que imaginamos encontrar nas obras analisadas. Nesse processo, ressaltamos que poderá ocorrer a aparição de outros tipos de tarefas que não mencionamos anteriormente. Enfatizamos ainda que, no decorrer do estudo praxeológico das obras, passará a existir outros elementos distintos: como as técnicas, procedimentos utilizados para resolver os tipos de tarefas propostos, as tecnologias que sustentarão o uso e validade das técnicas indicadas, além de vestígios de teoria, componente responsável por fundamentar as tecnologias utilizadas para justificar as técnicas.

3. Etapa – Proposição de Atividades de estudo e Pesquisa (AEP):

Nesta etapa, desenvolveremos uma sequência de ensino denominada de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), dispositivo que oferecerá subsídios alternativos para uso exclusivo de professores de Matemática no Ensino Médio. Esse modelo será construído com base nas habilidades específicas para o ensino de conceitos probabilísticos de acordo com a BNCC para o processo de formação do aluno sobre esse objeto matemático.

Além disso, é importante frisar que o modelo será construído a partir das observações encontradas na identificação do ambiente praxeológico presente nas obras didáticas. Sendo assim, na seção a seguir, apresentamos a análise praxeológica do material didático escolhido.

4. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS OBRAS DIDÁTICAS

As coleções de livros didáticos que analisamos foram escritas pelo autor Fábio Martins de Leonardo, licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo - USP. Os materiais de investigação tratam-se da 2ª edição, publicada em 2013 e aprovada no PNLD 2015, e a 1ª edição, publicada em 2020 e aprovada no PNLD 2021.

A coleção aprovada no PNLD 2015 é composta por três volumes, sendo que cada um é direcionado a um ano específico (1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio). Já a coleção aprovada no PLND 2021 é composta por seis volumes, todos destinados ao processo de formação do Ensino Médio. Nesse caso, cabe à escola "indicar quais volumes deverão ser destinados a cada ano do Ensino Médio. Não há limite de indicação de volume por ano. Mas se um determinado volume for indicado para um ano específico, esse mesmo volume não poderá ser indicado para outro ano" (Guia PNLD, 2021, p. 23).

Nessa nova estrutura do PNLD, a coleção de obras didáticas de Fábio Martins de Leonardo destinada ao Ensino Médio, *Conexões – Matemática e suas Tecnologias* está distribuída da seguinte maneira: 1º volume: Grandezas, álgebra e algoritmos; 2° volume: Funções e aplicações; 3º volume: Estatística e probabilidade; 4° volume: Trigonometria; 5° volume: Geometria plana e espacial; 6º volume: Matrizes e geometria analítica.

Comparando o processo de escolha dos materiais didáticos entre o PNLD de 2015 e o PNLD de 2021, observa-se que houve uma mudança na quantidade de obras didáticas, englobando as novas demandas sociais e pedagógicas sugeridas pela *noosfera*. Se no PNLD 2015 a responsabilidade de alocar os volumes das obras didáticas aos anos específicos de formação era dos autores dos livros didáticos, no PLND 2021 essa ação passou a ser atribuída às instituições de ensino.

Para o início da análise, consultamos o sumário de cada obra didática para averiguar a presença da probabilidade como objeto de ensino no material. Nesse processo, descartamos o livro do 1º ano do Ensino Médio referente ao PNLD 2015, uma vez que o material didático não aborda o objeto do conhecimento de nosso interesse. E, na coleção relacionada ao PLND 2021, focamos no volume 3, que aborda a probabilidade como objeto de ensino e descartamos os demais, que não possuem tratativas sobre o objeto matemático. Desse modo, os volumes de livros didáticos analisados foram descritos, conforme quadro a seguir.

Quadro 07: Características das obras didáticas analisadas

Título da Obra didática	Volume	Ano de formação	PLND
Conexões – Matemática	2	2º ano	2015
Conexões – Matemática	3	3º ano	2015
Conexões – Matemática e suas tecnologias	3	Único	2021

Fonte: Produção nossa

Nessas coleções de obras didáticas, os conteúdos matemáticos são organizados em capítulos, cada um dedicado a um objeto específico do conhecimento que representa o tema central. Dentro de cada capítulo, os conteúdos são estruturados em seções, as quais são subdivididas em subseções que exploram conceitos e elementos fundamentais relacionados aos objetos matemáticos em foco.

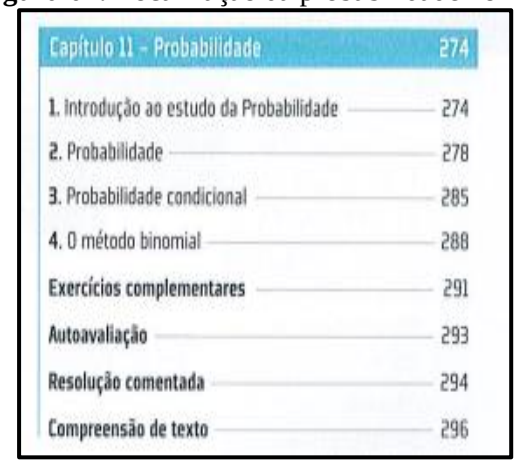
Para facilitar a identificação das obras didáticas, denominaremos os materiais didáticos de LD_1, LD_2 e LD_3. Assim, a seguir, apresentamos a estrutura dos conteúdos compostos nas obras didáticas e realizamos a análise praxeológica do capítulo ou seção na qual a probabilidade está vinculada como objeto de ensino.

4.1. Livro Didático (LD_1): *Conexões – Matemática (2015)*

No processo de análise do ambiente praxeológico, começamos por localizar a probabilidade no LD_1. Nessa obra didática, os conteúdos abordados são distribuídos por capítulo, conforme apresentado a seguir: 1º Capítulo: Ciclo trigonométrico (1ª volta); 2º Capítulo: Principais funções trigonométricas; 3º Capítulo: Complementos e aprofundamento da trigonometria; 4º Capítulo: Superfícies poligonais, círculo e áreas; 5º Capítulo: Introdução à geometria espacial; 6° Capítulo: Poliedros; 7° Capítulo: Corpos redondos; 8º Capítulo: Matrizes e determinantes; 9º Capítulo: Sistemas lineares; 10º Capítulo: Análise combinatória; 11º Capítulo: Probabilidade.

No LD_1, as discussões em torno da probabilidade são exibidas no capítulo 11 e divididas em quatro seções, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 01: Localização da probabilidade no LD_1



Fonte: De Leonardo (2013, p. 6)

Verifica-se que o LD_1 possui, ao todo, 296 páginas, das quais 23 delas são destinadas ao estudo da probabilidade. Em termos percentuais evidencia-se que, aproximadamente, 8% da obra é dedicada ao trabalho com a probabilidade.

Além disso, é importante destacar que, neste LD, cada seção é acompanhada por dois tipos de atividades: os **Exercícios Resolvidos**, que exemplificam a aplicação prática dos conceitos, e os **Exercícios Propostos**, voltados à prática do aluno e à consolidação dos conhecimentos adquiridos. Além disso, no final de cada capítulo, há a categoria de **Exercícios complementares** e atividades de **Autoavaliação,** categorias destinadas à fixação de aprendizagem. De modo geral, ao todo, são quatro categorias de atividades presentes no LD_1.

Feita essa abordagem inicial da estrutura do LD_1, o próximo passo foi explorar as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) presentes no capítulo 11 para a abordagem da probabilidade como saber a ser ensinado. Como o capítulo é dividido em quatro categorias de atividades, a seguir, mostramos a quantidade de situações exibidas na obra didática por categoria.

Quadro 08: Distribuição dos exercícios por categoria

Categoria	**Quantidade**
Exercícios resolvidos	13
Exercícios propostos	38
Exercícios complementares	23
Autoavaliação	11
Total	**85**

Fonte: Produção nossa

Em seguida, para facilitar a classificação das questões por tipos de tarefas, agrupamos as situações compostas nas categorias de exercícios com base nos conteúdos abordados em cada seção do capítulo e apresentamos o percentual (%) de representatividade do número de questões relacionados a cada conteúdo sobre a probabilidade disponíveis no LD_1, conforme apresentamos no quadro a seguir.

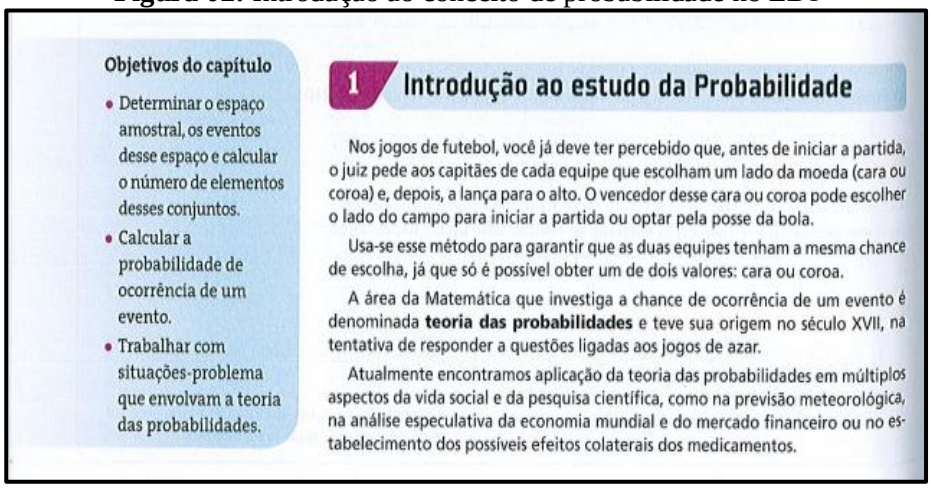
Quadro 09: Agrupamento das tarefas por conteúdos

Conteúdos	**Quantidade**	**Percentual (%)**
Experimento aleatório, espaço amostral e evento	13	15, 29%
Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos	49	57, 65%
Probabilidade condicional e eventos independentes	15	17, 65%
Método binomial	8	9, 41%
Total	**85**	**100%**

Fonte: Produção nossa

Na organização do LD_1, o primeiro momento didático (Encontro com a OM) é assinalado por intermédio de uma discussão envolvendo o experimento aleatório do lançamento da moeda. O uso da moeda nesse contexto é caracterizado como um artefato utilizado em uma partida de futebol para as escolhas dos lados do campo e a posse de bola inicial. Nesse mesmo trecho, o autor apresenta um marco histórico relacionado à origem da Teoria da Probabilidade, destacando seu surgimento por volta do século XVII e importância em atividades cotidianas, conforme ilustrado figura a seguir.

Figura 02: Introdução ao conceito de probabilidade no LD1



Objetivos do capítulo

- Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.
- Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria das probabilidades.

1 Introdução ao estudo da Probabilidade

Nos jogos de futebol, você já deve ter percebido que, antes de iniciar a partida, o juiz pede aos capitães de cada equipe que escolham um lado da moeda (cara ou coroa) e, depois, a lança para o alto. O vencedor desse cara ou coroa pode escolher o lado do campo para iniciar a partida ou optar pela posse da bola.

Usa-se esse método para garantir que as duas equipes tenham a mesma chance de escolha, já que só é possível obter um de dois valores: cara ou coroa.

A área da Matemática que investiga a chance de ocorrência de um evento é denominada **teoria das probabilidades** e teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar.

Atualmente encontramos aplicação da teoria das probabilidades em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica, como na previsão meteorológica, na análise especulativa da economia mundial e do mercado financeiro ou no estabelecimento dos possíveis efeitos colaterais dos medicamentos.

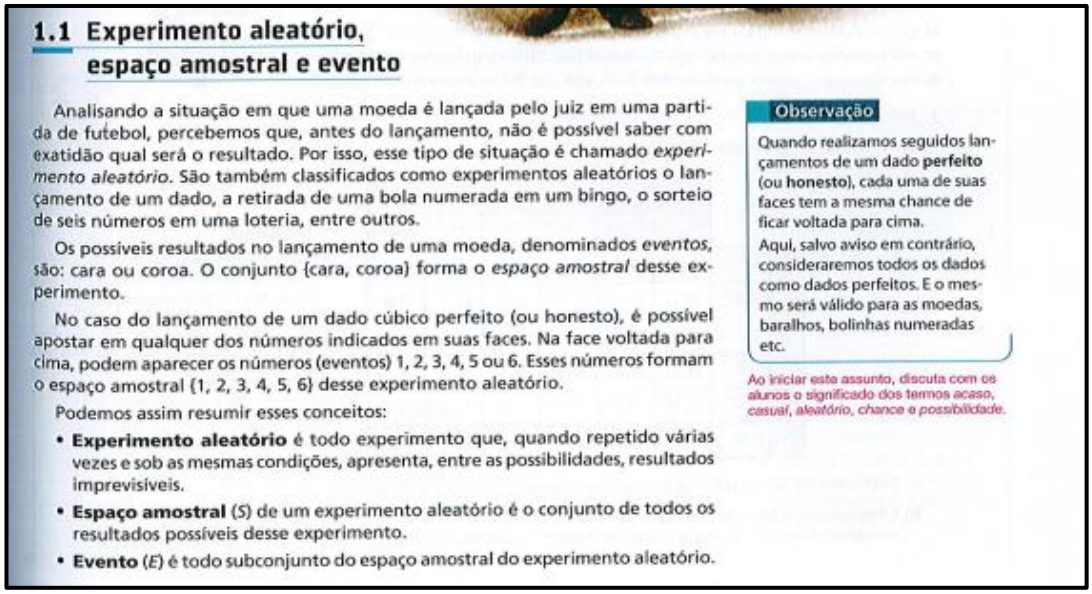
Fonte: De Leonardo (2013, p. 274)

Esse recorte histórico apresentado pelo autor é de fundamental importância, pois além de ilustrar parte dos fundamentos da origem da probabilidade, faz menção de como esse saber encontra-se presente em atividades cotidianas, transformando uma discussão histórica em exemplos práticos. Nesse estágio inicial sobre o conteúdo, ocorre uma performance significativa, uma transformação da Transposição Didática, onde o Saber Sábio passa a se constituir como Saber a Ensinar ou objeto de ensino, adaptando-se à realidade institucional e cotidiana das pessoas.

Por se tratar de uma abordagem introdutória em torno do conceito de probabilidade no Ensino Médio, como o próprio enunciado do capítulo destaca, olhando para os elementos do quarteto praxeológico, notamos que a Organização Didática (OD) presente na obra encontra-se efetivamente ligada ao bloco Saber-Fazer.

Além disso, notamos que as definições de cada noção básica da probabilidade e classificação de eventos são do tipo explicativas e exemplificativas, sem o uso de expressões matemáticas, como podemos observar a seguir.

Figura 03: Definição de experimento aleatório, espaço amostral e evento



1.1 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Analisando a situação em que uma moeda é lançada pelo juiz em uma partida de futebol, percebemos que, antes do lançamento, não é possível saber com exatidão qual será o resultado. Por isso, esse tipo de situação é chamado *experimento aleatório*. São também classificados como experimentos aleatórios o lançamento de um dado, a retirada de uma bola numerada em um bingo, o sorteio de seis números em uma loteria, entre outros.

Os possíveis resultados no lançamento de uma moeda, denominados *eventos*, são: cara ou coroa. O conjunto {cara, coroa} forma o *espaço amostral* desse experimento.

No caso do lançamento de um dado cúbico perfeito (ou honesto), é possível apostar em qualquer dos números indicados em suas faces. Na face voltada para cima, podem aparecer os números (eventos) 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Esses números formam o espaço amostral {1, 2, 3, 4, 5, 6} desse experimento aleatório.

Podemos assim resumir esses conceitos:

- **Experimento aleatório** é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.
- **Espaço amostral** (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.
- **Evento** (E) é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Observação

Quando realizamos seguidos lançamentos de um dado **perfeito** (ou **honesto**), cada uma de suas faces tem a mesma chance de ficar voltada para cima.

Aqui, salvo aviso em contrário, consideraremos todos os dados como dados perfeitos. E o mesmo será válido para as moedas, baralhos, bolinhas numeradas etc.

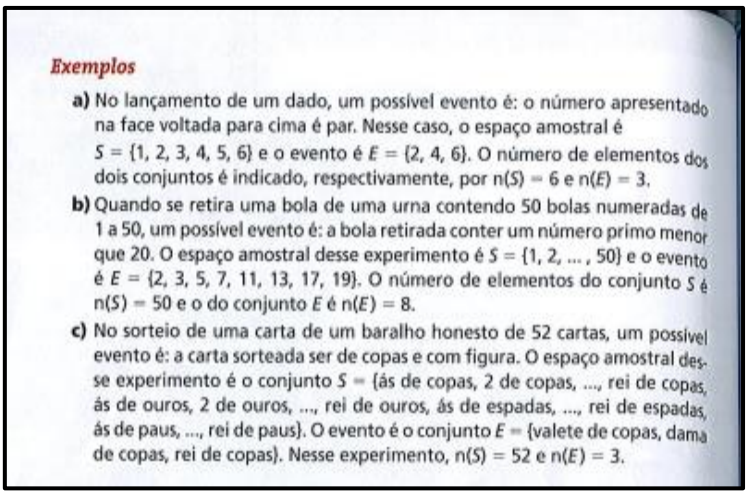
Ao iniciar este assunto, discuta com os alunos o significado dos termos *acaso*, *casual*, *aleatório*, *chance* e *possibilidade*.

Fonte: De Leonardo (2013, p. 275)

No sentido de contextualizar as ideias de experimento aleatório, espaço amostral e evento, observa-se que o autor do LD1 acompanha o raciocínio da situação anterior, integrando exemplos dessas noções diretamente na mesma situação. Em seguida, o autor faz a apresentação de suas definições, como pode ser observado anteriormente, na Figura 03.

Posteriormente, o autor apresenta três exemplos: o primeiro trata do lançamento de um dado, o segundo da retirada de uma bola de uma urna e o terceiro do sorteio de uma carta de um baralho. Entendemos que esses exemplos parecem ter sido indicados com o intuito de reforçar, na prática, as noções de probabilidade apresentadas.

Figura 04: Exemplos de experimento aleatório, espaço amostral e evento



Exemplos

a) No lançamento de um dado, um possível evento é: o número apresentado na face voltada para cima é par. Nesse caso, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o evento é $E = \{2, 4, 6\}$. O número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por $n(S) = 6$ e $n(E) = 3$.

b) Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: a bola retirada conter um número primo menor que 20. O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, \ldots, 50\}$ e o evento é $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. O número de elementos do conjunto S é $n(S) = 50$ e o do conjunto E é $n(E) = 8$.

c) No sorteio de uma carta de um baralho honesto de 52 cartas, um possível evento é: a carta sorteada ser de copas e com figura. O espaço amostral desse experimento é o conjunto S = {ás de copas, 2 de copas, ..., rei de copas, ás de ouros, 2 de ouros, ..., rei de ouros, ás de espadas, ..., rei de espadas, ás de paus, ..., rei de paus}. O evento é o conjunto E = {valete de copas, dama de copas, rei de copas}. Nesse experimento, $n(S) = 52$ e $n(E) = 3$.

Fonte: De Leonardo (2013, p. 276)

Percebe-se a partir desses exemplos, o trabalho das noções em contextos diferentes. Contudo, o estágio praxeológico não evolui do bloco Saber-Fazer. Nesse trecho, de acordo com

Chevallard (1999), ocorre o segundo momento didático (exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma possível técnica relativa).

Em seguida, o autor do LD_1 apresenta explicações para justificar a classificação de eventos, como simples, certo e impossível, enfatizando que:

> Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado **evento simples** ou **evento elementar.** Se coincidir com o espaço amostral, o evento será chamado **evento certo.** Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, "obter um número natural menor que 7" é um evento certo. Se for o conjunto vazio, o evento será chamado de **evento impossível**. Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, "obter um número maior que 6" é um evento impossível (De Leonardo, 2013, p. 276).

Partindo desse princípio, observando a estrutura para a abordagem do primeiro eixo de conteúdos, relacionado a **Experimento aleatório, espaço amostral e evento**, nota-se que o autor do LD_1 apresenta o conteúdo na seguinte sequência: Situação contextualizada → Definição de experimento aleatório, espaço amostral e evento → Exemplo → Definição de evento simples, certo e impossível → Exercícios resolvidos →Exercícios propostos.

No processo de análise das situações, observamos que nas categorias de atividades propostas (exercícios proposto, complementares e de autoavaliação), o autor do LD_1 não apresenta possíveis técnicas para direcionar o professor no processo de abordagem dos conceitos de probabilidade, deixando o procedimento de resolução sob responsabilidade docente. Desse modo, além da identificação e agrupamento das questões, entendemos ser necessário a indicação de possíveis técnicas para cada tipo ou subtipo de tarefa encontrado na obra didática, além dos demais elementos que compõem uma praxeologia.

No intuito de explorar o ambiente praxeológico, a etapa seguinte foi fazer a leitura das questões, identificar características de verbo ou gênero, segundo Chevallard (1999), tais como (identificar, descrever, analisar, calcular, representar, etc) e particularidades dos elementos (experimento aleatório, elementos do espaço amostral e eventos) nas situações, e agrupá-las em tipos e subtipos de tarefas, conforme quadro a seguir.

Quadro 10: Tipos e subtipos de Tarefas referentes aos conteúdos experimento aleatório, espaço amostral e evento no LD_1

Tipo de tarefa	Subtipo de tarefa	Quantidade
T_1: Identificar, e analisar o espaço amostral e eventos específicos;	$T_{1.1}$: Identificar o número de elementos e eventos de um experimento aleatório;	5
	$T_{1.2}$: Identificar a quantidade de elementos do espaço amostral e	2

	analisar o grau de probabilidade para ocorrência de eventos específicos;	
	$T_{1.3}$: Identificar a quantidade de elementos do espaço amostral e eventos específicos em experimentos simultâneos;	3
T_2: Calcular o número de elementos do espaço amostral;	-	3

Fonte: Produção nossa

Com base nessa análise, é possível perceber que as OD fornecidas pelo material para guiar os alunos no processo de resolução das atividades propostas são as definições de cada conceito e os exercícios resolvidos. Ou seja, o autor do LD_1 apresenta modelos que espera ser replicado pelos alunos em situações similares.

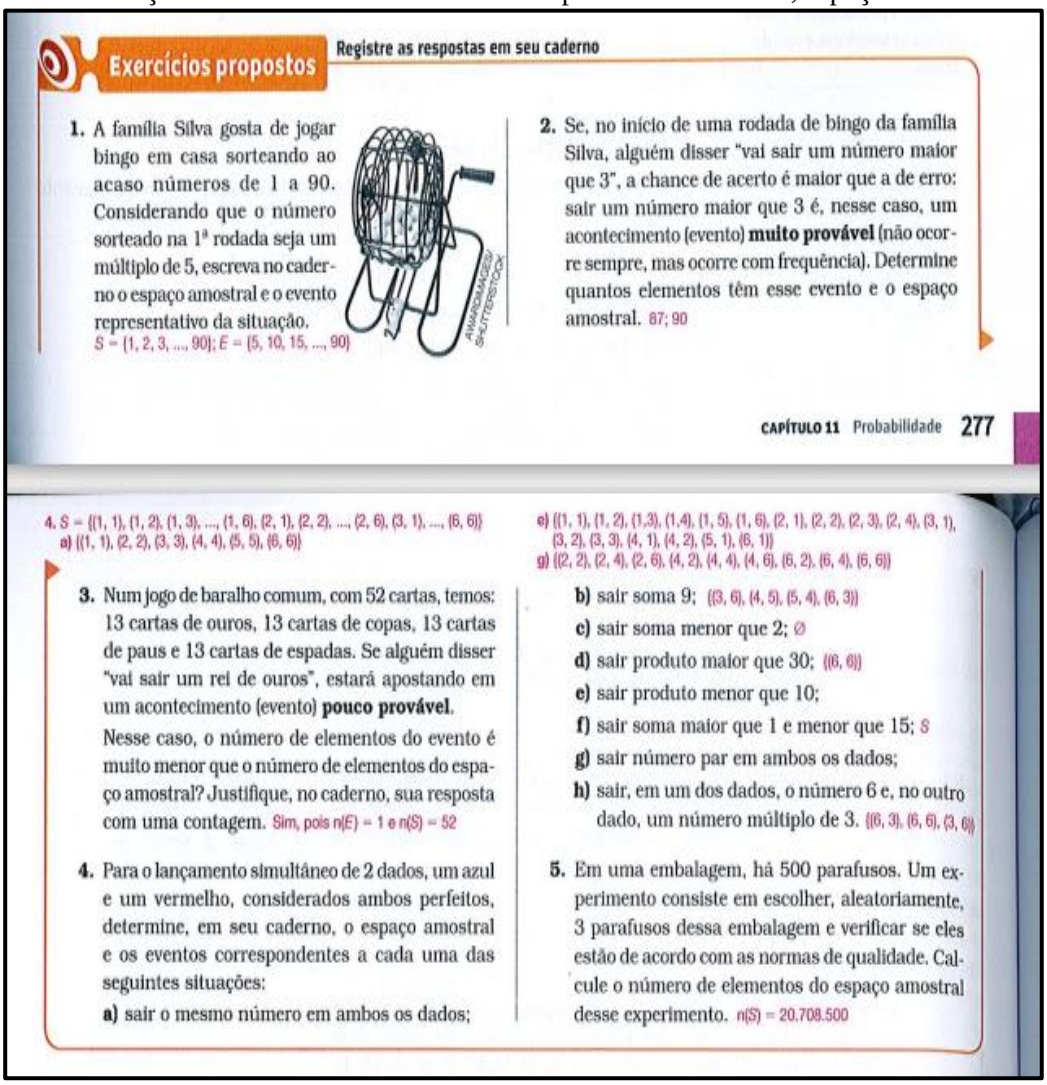
Nessa linha de pensamento, concordamos com Terêncio e Bittar (2020), quando os autores salientam que a existência de atividades resolvidas antes dos problemas a serem solucionados pode ocorrer em função do desejo do autor de que o estudante siga os mesmos passos em situações futuras.

É importante destacar que, ao observamos o agrupamento presente no Quadro 10, é possível notar que, em T_1, embora haja mais de um subtipo de tarefa, o cumprimento das tarefas segue um padrão de resolução semelhante. Nesse tipo de tarefa específico, o foco principal é a identificação e descrição do número de elementos do espaço amostral, o único aspecto que torna seus subtipos de tarefas distintos é a forma de representação dessa noção.

Por exemplo, em $T_{1.1}$, independentemente do experimento aleatório, a técnica baseia-se na contagem do número de resultados possíveis e favoráveis do ensaio. Enquanto isso, em $T_{1.2}$ necessita-se apenas da análise do número de casos possíveis e favoráveis. Por fim, em $T_{1.3}$, a resolução exige procedimentos adicionais, como o cálculo do produto entre o número de elementos de cada experimento e a representação em pares ordenados (x, y), onde x corresponde ao caso favorável do primeiro experimento e y ao do segundo.

A seguir, apresentamos algumas situações propostas pelo autor do LD_1, que estão em consonância com os tipos e subtipos de tarefas desses conteúdos, e analisamos as praxeologias presentes nessas questões para o trabalho com as noções de experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Figura 05: Situações referentes aos conteúdos de experimento aleatório, espaço amostral e evento



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. A família Silva gosta de jogar bingo em casa sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na 1ª rodada seja um múltiplo de 5, escreva no caderno o espaço amostral e o evento representativo da situação.
$S = \{1, 2, 3, ..., 90\}$; $E = \{5, 10, 15, ..., 90\}$

2. Se, no início de uma rodada de bingo da família Silva, alguém disser "vai sair um número maior que 3", a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento (evento) **muito provável** (não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos têm esse evento e o espaço amostral. 87; 90

AMARITAMAGES/SHUTTERSTOCK

CAPÍTULO 11 Probabilidade 277

4. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)\}$
a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

3. Num jogo de baralho comum, com 52 cartas, temos: 13 cartas de ouros, 13 cartas de copas, 13 cartas de paus e 13 cartas de espadas. Se alguém disser "vai sair um rei de ouros", estará apostando em um acontecimento (evento) **pouco provável**.
Nesse caso, o número de elementos do evento é muito menor que o número de elementos do espaço amostral? Justifique, no caderno, sua resposta com uma contagem. Sim, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$

4. Para o lançamento simultâneo de 2 dados, um azul e um vermelho, considerados ambos perfeitos, determine, em seu caderno, o espaço amostral e os eventos correspondentes a cada uma das seguintes situações:
a) sair o mesmo número em ambos os dados;
e) $\{(1, 1), (1, 2), (1,3), (1,4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$
g) $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
b) sair soma 9; $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
c) sair soma menor que 2; $\emptyset$
d) sair produto maior que 30; $\{(6, 6)\}$
e) sair produto menor que 10;
f) sair soma maior que 1 e menor que 15; S
g) sair número par em ambos os dados;
h) sair, em um dos dados, o número 6 e, no outro dado, um número múltiplo de 3. $\{(6, 3), (6, 6), (3, 6)\}$

5. Em uma embalagem, há 500 parafusos. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 3 parafusos dessa embalagem e verificar se eles estão de acordo com as normas de qualidade. Calcule o número de elementos do espaço amostral desse experimento. $n(S) = 20.708.500$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 277-278)

Percebe-se que parte da técnica necessária para cumprir o subtipo $T_{1.1}$, questão 1, é apresentada no próprio enunciado, como o número de elementos do espaço amostral igual a 90. Além disso, na resolução desse subtipo de tarefa, o autor fornece, de forma sutil, alguns elementos do procedimento técnico para orientar os professores de como conduzir o processo de resolução da situação, como a descrição de alguns elementos referentes ao número de casos favoráveis e o total de casos possíveis. Assim, a resolução das questões agrupadas em $T_{1.1}$, é indicada pelos seguintes elementos:

$T_{1.1}$:

- ✓ τ_{DCCP} – Descrever e contar o número de casos possíveis;
- ✓ τ_{DCCF} – Descrever e contar o número de casos favoráveis;
- ✓ θ_1 – Definição de experimento aleatório, espaço amostral e eventos;
- ✓ Θ_1 – Teoria da probabilidade;

Como dissemos, os demais subtipos de tarefas subsequentes de T_1 seguem, de modo geral, um mesmo percurso resolutivo. Por exemplo, em $T_{1.2}$, questões 2 e 3, as técnicas principais são τ_{DCCP} (Descrever e contar o número de casos possíveis) e τ_{DCCF} (Descrever e contar o número de casos favoráveis). Por fim, para cumprir o subtipo de tarefa, solicita-se que o aluno analise o número de casos possíveis e favoráveis, e verifique se um determinado evento tem baixa ou alta probabilidade de ocorrer.

$T_{1.2}$:

- ✓ τ_{DDCP} – Descrever e contar o número de casos possíveis;
- ✓ τ_{DDCF} – Descrever e contar o número de casos favoráveis;
- ✓ τ_{ACEO} – Analisar se as chances de um determinado evento ocorrer é muito ou pouco provável;
- ✓ θ_1: Definição de experimento aleatório, espaço amostral e eventos;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Como os tipos de tarefas seguem o mesmo percurso de resolução, os elementos relacionados ao bloco tecnológico-teórico são os mesmos. De modo semelhante, em $T_{1.3}$, os procedimentos utilizados também incluem τ_{DCCP} (Descrever e contar o número de casos possíveis) e τ_{DCCF} (Descrever e contar o número de casos favoráveis). A diferença está na representação do espaço amostral e dos eventos, como é possível observar na parte técnica sugerida na questão 4. No entanto, o cumprimento desse subtipo de tarefa específico, envolve procedimentos técnicos adicionais, como podemos observar a seguir.

$T_{1.3}$:

- ✓ τ_{CNCP}: Calcular o resultado do produto entre o número de elementos de casos possíveis de cada experimento;
- ✓ τ_{RCPO}: representar o número de casos possíveis e favoráveis em pares ordenados;
- ✓ θ_1: Definição de experimento aleatório, espaço amostral e eventos;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Desse modo, no LD_1, para o cumprimento das tarefas do tipo $T_{1.3}$, a explicação sobre o cálculo do número de elementos do espaço amostral e a representação desses elementos em pares ordenados é dada exclusivamente na categoria de exercícios resolvidos.

Para o cumprimento do tipo de tarefa T_2, questão 5, a discussão da técnica indica a presença de procedimentos inéditos. Para a execução desse tipo de tarefa, é necessário o domínio de conhecimentos combinatórios para o cálculo do número de elementos do espaço amostral devido à quantidade extensa de elementos, o que torna inviável realizar a descrição e contagem individual desses elementos. Ademais, assim como observado para o subtipo de

tarefa $T_{1.3}$, é importante frisar que o contato do aluno com esse conhecimento combinatório no capítulo do LD_1 ocorre também por intermédio de exercícios resolvidos, contexto que vai ao encontro do que foi colocado por Terêncio e Bittar (2020).

Desse modo, concluímos que a OM destinada à T_2 é mobilizada por uma OD mecânica e tecnicista, representada por uma atividade resolvida, não havendo uma maior abordagem no capítulo sobre os conhecimentos de combinação simples. Assim, indicamos uma possível técnica para solucionar T_2 da seguinte maneira:

T_2:

- ✓ τ_{CNCP}: Representar o número de elementos do espaço amostral por meio da fórmula de combinação simples:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- ✓ θ_2: Fórmula da combinação simples;
- ✓ Θ_2: Análise combinatória;

Notemos que a modificação verbal ou de gênero "Identificar" e "Calcular" entre os tipos de tarefas faz com o que as tecnologias utilizadas para amparar as técnicas desenvolvidas nos subtipos de tarefas de T_1 sejam distintas de T_2. Enquanto em T_1 utilizamos a contagem do número de elementos, em T_2 usamos a noção de combinação simples para determinar o número de elementos do espaço amostral.

De modo geral, apesar da quantidade de atividades, os procedimentos técnicos das questões são semelhantes e seguem um mesmo padrão de resolução. Ou seja, para resolver as tarefas, basta o aluno seguir os seguintes passos: descrever e contar ou representar o número de casos possíveis → descrever e contar o número de casos favoráveis. Além disso, observa-se que os experimentos aleatórios utilizados nas questões são baseados em jogos e retiradas de embalagens, sem uma relação clara com atividades cotidianas. Assim, ressaltamos a necessidade de que os experimentos aleatórios estejam mais próximos da realidade vivenciada pelo estudante, com a finalidade de promover uma aprendizagem interconectada ao seu cotidiano.

Esse processo comprova o estudo da probabilidade na obra didática com base em experimentos fictícios, sem uma contextualização mais próxima da realidade vivenciada pelo estudante. Esse tipo de abordagem enunciativa pode fortalecer um paradigma que precisa ser desconstruído no campo da probabilidade, no qual seu conceito é frequentemente associado a jogadas de sorte e azar.

Dessa forma, compreendemos que a abordagem da probabilidade seguindo esse modelo observado no LD_1, sugere um processo de formação básica assegurado no método mecânico, no qual o aluno é incentivado a reproduzir os comandos que lhes são dados para resolver situações ou realizar avaliações, sem uma maior abordagem realista dos conteúdos. É relevante enfatizar que esse método de aprendizagem centrado no uso exaustivo de fórmulas algorítmicas para resolver exercícios de fixação já não é suficiente no processo de formação matemática (Lopes, 2008).

Outro ponto a se considerar é que a compreensão das noções de espaço amostral e eventos é fundamental no contexto da probabilidade, pois essas noções encontram-se presentes como tarefas iniciais em situações mais complexas do campo probabilístico. E, caso sejam mal compreendidas e calculadas, podem resultar em um processo de resolução totalmente impreciso.

De acordo com Chevallard (1999), essas situações que são restringidas a um tipo de tarefa específico são classificadas como praxeologias do tipo pontual. Desse modo, no contexto observado nesse primeiro conjunto de conteúdos analisados, todas as atividades seguem essa mesma classificação praxeológica.

Já sobre o conjunto de conteúdos denominados de **Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos**, o autor começa introduzindo o conceito de probabilidade através de uma situação relacionada a um casal que planeja ter dois filhos. A partir desse contexto, é lançado o seguinte questionamento: "Que chances existem de esse casal ter os dois filhos do sexo masculino?" (De Leonardo, 2015, p. 278).

Por meio desta situação, notemos que o intuito do autor é introduzir o conceito de probabilidade a priori. Para esse fim, ele recorre às noções de probabilidade abordadas no conjunto de conteúdos anterior, tais como a descrição do espaço amostral e eventos, procedimento realizado para caracterizar T_1 como tipo de tarefa e comportar o seu procedimento técnico. Respondendo ao questionamento, o autor descreve o espaço amostral e o evento, dado pelas seguintes possibilidades:

$$\Omega = \{MM, MF, FF, FM\} \text{ ou } n(\Omega) = 4; \text{ e } E = \{MM\} \text{ ou } n(E) = 1$$

Sabendo que o número de casos possíveis é igual a 4 e o número de casos favoráveis é igual a 1, a chance de nascer dois filhos do sexo masculino corresponde a:

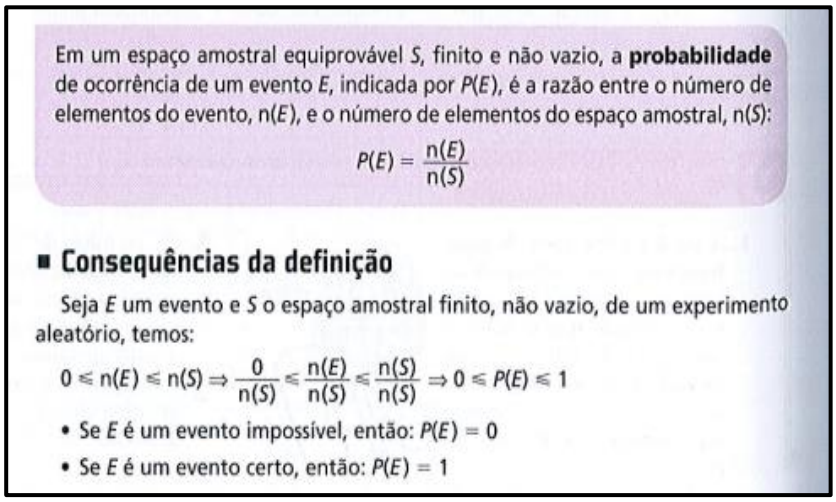
$$P(MM) = \frac{1}{n(\Omega)} = P(MM) = \frac{1}{4}$$

Neste cenário, o primeiro momento didático (encontro com a OM) é representado pela situação contextualizada e questionamento abordado inicialmente. Enquanto o segundo

momento didático (exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica) é dado pelo tipo de tarefa derivado do questionamento da situação: "T_n: Determinar a probabilidade a priori de ocorrência de eventos específicos" e da elaboração da técnica (t) baseada na definição de probabilidade clássica.

Nessa discussão inicial, o autor utiliza a contextualização (situação e resolução) para introduzir a noção de probabilidade no sentido de equiprobabilidade. Nesse caso, o cálculo da probabilidade é realizado pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis com base no espaço amostral finito, conforme figura a seguir.

Figura 06: Definição clássica de probabilidade



Em um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento E, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, $n(E)$, e o número de elementos do espaço amostral, $n(S)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Consequências da definição

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório, temos:

$$0 \leqslant n(E) \leqslant n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leqslant \frac{n(E)}{n(S)} \leqslant \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

- Se E é um evento impossível, então: $P(E) = 0$
- Se E é um evento certo, então: $P(E) = 1$

Fonte: De Leonardo (2013, p.278)

Essa figura representa o quinto momento didático (institucionalização), formalizando institucionalmente os conhecimentos utilizados na situação para introduzir a definição de probabilidade clássica.

Posteriormente, nesta seção, o autor do LD_1 apresenta os exercícios resolvidos como uma possível OD para solucionar as tarefas propostas. Em outras palavras, de modo geral, o autor do LD_1 sugere que os alunos se apropriem do conteúdo exclusivamente por meio das definições dos conceitos e a categoria de atividades resolvidas.

A seguir, exibimos os tipos e subtipos de tarefas extraídos das situações envolvendo esses conteúdos no LD_1.

Quadro 11: Tipos e subtipos de Tarefas referentes aos conteúdos Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos no LD_1

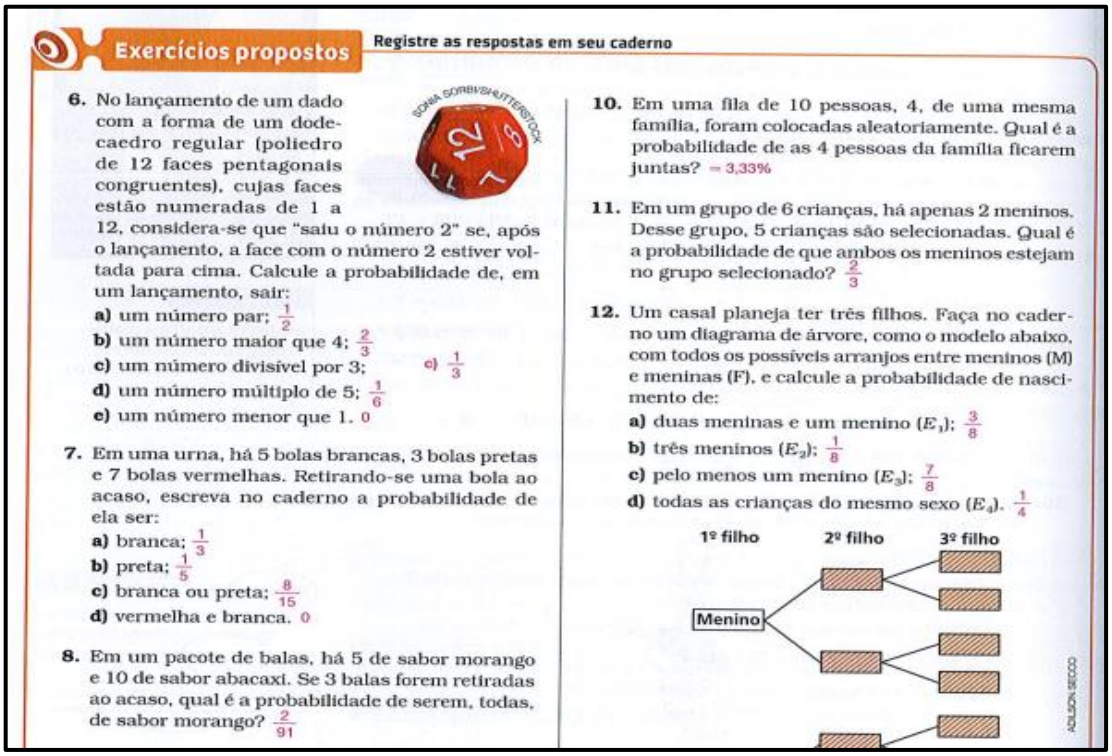
Tipo de tarefa	Subtipos de tarefas	Quantidade

T_3: Determinar a probabilidade a priori para ocorrência de eventos específicos em experimentos aleatórios;	$T_{3.1}$: Calcular a probabilidade para ocorrência de eventos específicos por meio da identificação e descrição dos elementos do espaço amostral;	9
	$T_{3.2}$: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos específicos com o espaço amostral associado à combinações simples;	12
	$T_{3.3}$: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos específicos com o espaço amostral associado à permutações;	4
	$T_{3.4}$: Desenhar o diagrama para distribuir os elementos do espaço amostral e calcular a probabilidade para ocorrência de eventos específicos;	1
	$T_{3.5}$: Calcular a probabilidade a priori para ocorrência de eventos do tipo A ou B com a intersecção maior que zero;	15
	$T_{3.6}$: Determinar a probabilidade a priori para ocorrência de eventos complementares;	5
	$T_{3.7}$: Determinar a probabilidade a priori para ocorrência de eventos mutuamente exclusivos;	3
Total	**-**	**49**

Fonte: Produção nossa

Por intermédio do agrupamento realizado, constata-se que na maioria das questões, a única diferença entre as situações propostas refere-se ao cálculo ou representação do número de casos possíveis e casos favoráveis, assim como no conjunto de conteúdos anteriores sobre **experimento aleatório, espaço amostral e evento**. Observando a figura a seguir, que apresenta situações referentes aos subtipos de tarefas $T_{3.1}$; $T_{3.2}$; $T_{3.3}$ e $T_{3.4}$ pode-se evidenciar essas circunstâncias.

Figura 07: Situações referentes aos tipos e subtipos de tarefas $T_{3.1}$; $T_{3.2}$; $T_{3.3}$ e $T_{3.4}$



Exercícios propostos — Registre as respostas em seu caderno

6. No lançamento de um dado com a forma de um dodecaedro regular (poliedro de 12 faces pentagonais congruentes), cujas faces estão numeradas de 1 a 12, considera-se que "saiu o número 2" se, após o lançamento, a face com o número 2 estiver voltada para cima. Calcule a probabilidade de, em um lançamento, sair:
a) um número par; $\frac{1}{2}$
b) um número maior que 4; $\frac{2}{3}$
c) um número divisível por 3; **c)** $\frac{1}{3}$
d) um número múltiplo de 5; $\frac{1}{6}$
e) um número menor que 1. 0

7. Em uma urna, há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, escreva no caderno a probabilidade de ela ser:
a) branca; $\frac{1}{3}$
b) preta; $\frac{1}{5}$
c) branca ou preta; $\frac{8}{15}$
d) vermelha e branca. 0

8. Em um pacote de balas, há 5 de sabor morango e 10 de sabor abacaxi. Se 3 balas forem retiradas ao acaso, qual é a probabilidade de serem, todas, de sabor morango? $\frac{2}{91}$

10. Em uma fila de 10 pessoas, 4, de uma mesma família, foram colocadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de as 4 pessoas da família ficarem juntas? ≈ 3,33%

11. Em um grupo de 6 crianças, há apenas 2 meninos. Desse grupo, 5 crianças são selecionadas. Qual é a probabilidade de que ambos os meninos estejam no grupo selecionado? $\frac{2}{3}$

12. Um casal planeja ter três filhos. Faça no caderno um diagrama de árvore, como o modelo abaixo, com todos os possíveis arranjos entre meninos (M) e meninas (F), e calcule a probabilidade de nascimento de:
a) duas meninas e um menino (E_1); $\frac{3}{8}$
b) três meninos (E_2); $\frac{1}{8}$
c) pelo menos um menino (E_3); $\frac{7}{8}$
d) todas as crianças do mesmo sexo (E_4). $\frac{1}{4}$

Fonte: De Leonardo (2013, p.280)

É possível perceber que, nas questões 6, 7 e 8, o tipo de tarefa T_1 no conjunto de conteúdos anteriores é incorporado como um procedimento técnico para suprir a resolução da tarefa proposta. Ou seja, os procedimentos que caracterizam T_1 como um tipo de tarefa são utilizados como suporte técnico para efetivar a resolução das tarefas extraídas das situações 6, 7 e 8. Essa nossa observação está em conformidade com Bittar (2017, p. 375), quando a autora enfatiza que "é importante observar que as técnicas também são tarefas. Além disso, o que é tarefa em um momento pode ser técnica posteriormente". Assim, para $T_{3.1}$, tomando como base a questão 6, indicamos o possível procedimento:

$T_{3.1}$:

- ✓ τ_{DCCP} – Descrever e contar o número de casos possíveis;
- ✓ τ_{DCCF} – Descrever e contar o número de casos favoráveis;
- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar a fórmula da definição de probabilidade clássica;

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} \text{ ou } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)};$$

- ✓ θ_1: Definição de espaço amostral e eventos;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

De maneira distinta, utilizando a questão 8 como referência para representar as situações agrupadas em $T_{3.2}$, vamos perceber que o número de elementos possíveis e favoráveis são determinados por meio da fórmula de combinação simples, uma abordagem proveniente da teoria da análise combinatória.

$T_{3.2}$:

- ✓ τ_{CNCP}: Calcular o número de elementos do espaço amostral por meio da fórmula de combinação simples:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- ✓ τ_{INKCM}: Identificar n e k para calcular o número de possibilidades distintas de retirar 3 balas de um total de 15:
- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar a fórmula do primeiro princípio de probabilidade clássica:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}\ ;$$

- ✓ θ_2: Combinação simples
- ✓ Θ_2: Análise combinatória;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Assim como observamos T_1 se configurando como parte da técnica em $T_{3.1}$, notamos que T_2 desempenha o mesmo papel no subtipo de tarefa $T_{3.2}$. Por exemplo, a técnica que define o número de elementos do espaço amostral e dos casos favoráveis segue os mesmos conhecimentos empregados na execução de T_2. Contudo, a técnica principal aplicada para determinar a probabilidade de um evento específico ocorrer em $T_{3.2}$ é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, o mesmo procedimento adotado em $T_{3.1}$.

Já no subtipo de tarefa $T_{3.3}$, questão 10, embora a teoria seja a análise combinatória, ele se distingue de $T_{3.2}$. Pois, enquanto o processo de resolução do subtipo de tarefa $T_{3.2}$ é baseado no conhecimento de combinação simples, em $T_{3.3}$ utiliza-se a noção de permutações de elementos, como será mostrado a seguir:

$T_{3.3}$:

- ✓ τ_{DCCP}: Descrever e contar o número de casos possíveis permutando elementos;
- ✓ τ_{DCFP}: Descrever e contar o número de casos favoráveis permutando elementos;
- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar a fórmula da definição de probabilidade clássica para calcular a probabilidade das 4 pessoas da mesma família ficarem juntas na fila:

$$\mathrm{P}(4\ \text{pessoas juntas}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}};$$

- ✓ θ_4: Fórmula de permutação de elementos;
- ✓ Θ_2: Análise combinatória;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Observe que o número de casos possíveis e favoráveis da tarefa se distingue da situação anterior. Contudo, o cálculo da probabilidade, ou seja, a técnica principal é realizada utilizando a definição de probabilidade clássica, assim como os subtipos $T_{3.1}$ e $T_{3.2}$.

Já o último subtipo de tarefa que segue esse mesmo padrão nos conteúdos desse conjunto é denominado de $T_{3.4}$. A principal diferença entre $T_{3.4}$ e $T_{3.1}$ habita na forma de representação do espaço amostral. Na questão 12, percebe-se que o autor do LD_1 solicita que os alunos façam a distribuição dos elementos no diagrama da árvore. Considerando que até então, não houve uma discussão sobre a elaboração do diagrama nos conteúdos analisados, o autor apresenta um modelo na situação para que os alunos reproduzam preenchendo-o com as possibilidades de eventos. Em seguida, é solicitado que os alunos calculem a probabilidade para ocorrência de eventos específicos. Vejamos uma possível indicação técnica a seguir:

$T_{3.4}$:

- ✓ τ_{CDDP}: Construir o diagrama da árvore e distribuir as possibilidades:
- ✓ τ_{DCCP}: Descrever e contar o número de casos possíveis;
- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar a fórmula do primeiro princípio de probabilidade clássica:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}};$$

- ✓ θ_1: Definição de experimento aleatório, espaço amostral e eventos;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

O percurso de resolução dos subtipos de tarefas presentes nesse conjunto de conteúdos podem ser configurados na seguinte sequência: Descrição do número de elementos do espaço amostral → Descrição do número de casos favoráveis → Cálculo da probabilidade por meio da relação entre o número de casos possíveis e casos favoráveis. Desse modo, nota-se um processo de ensino e aprendizagem conduzido por repetição de procedimentos, aspecto que é desfavorável para a promoção de uma construção ativa do conhecimento.

Essas situações encontradas no LD_1 seguem o que Chevallard (2009) denota de pedagogia monumentalista, proposta didática que orienta o processo de formação básica

conduzindo o aluno como um ser passivo de aprendizagem. Nesse modelo de ensino, o aluno é submetido ao trabalho com questões fechadas, prontas e distante de sua realidade social. O núcleo das tarefas está em identificar os elementos básicos da probabilidade e substituí-los em expressões matemáticas para alcançar o resultado previsto, sem questionamentos, contextualização ou problematizações. Neste cenário, as técnicas podem ser, em grande número algorítmicas.

Por sua vez, os demais subtipos de tarefas, correspondentes a $T_{3.5}$, $T_{3.6}$ e $T_{3.7}$ desse conjunto de conteúdos, fazem o uso de conhecimentos adicionais que interrompem a sequência de resolução observada anteriormente, exigindo a compreensão de outros conceitos, como o complementar, a intersecção e união de eventos, além da noção de eventos mutuamente exclusivos. Para esses subtipos, as técnicas principais deixam de ser baseadas na definição de probabilidade clássica. As propriedades utilizadas no LD_1 para o trabalho com esses elementos podem ser visualizadas conforme quadro a seguir.

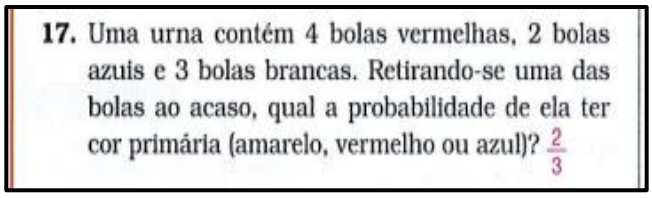
Quadro 12: Expressões da intersecção, do complementar, da união e de eventos exclusivos

Elemento	**Propriedade**
Intersecção de eventos	$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$
Complementar de eventos	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
União de eventos	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Eventos exclusivos	$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Fonte: Adaptado de De Leonardo (2013).

Em seguida, apresentamos algumas situações e vestígios de elementos praxeológicos extraídos das situações propostas no LD_1 sobre os conceitos abordados no quadro anterior.

Figura 08: Situação referente a $T_{3.5}$



17. Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 3 bolas brancas. Retirando-se uma das bolas ao acaso, qual a probabilidade de ela ter cor primária (amarelo, vermelho ou azul)? $\frac{2}{3}$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 280)

Pode-se observar que a identificação e descrição do espaço amostral dessa situação baseia-se na soma ou contagem do número total de bolas. Em seguida, aplica-se o princípio de probabilidade clássica, que, embora inicialmente usado como técnica principal em outros

subtipos de tarefas, nesse subtipo surge como um procedimento técnico complementar. Por fim, para determinar a probabilidade, emprega-se um novo procedimento, o complementar de eventos, definindo a probabilidade de se retirar uma bola de cor primária. Vejamos a descrição dos elementos praxeológicos a seguir:

$T_{3.5}$

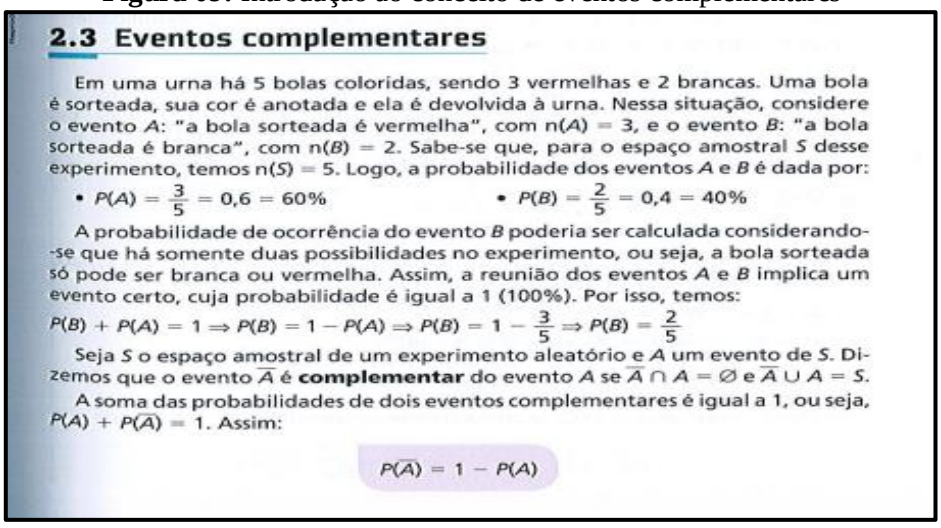
- ✓ τ_{DSEA}: Descrever e somar a quantidade de elementos do espaço amostral;
- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar a fórmula do primeiro princípio de probabilidade clássica para calcular a probabilidade de não sair uma bola de cor primária;

$$\text{P(não primária)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}};$$

- ✓ τ_{CE}: Aplicar o complementar de eventos para determinar a probabilidade de sair uma bola de cor primária;
- ✓ θ_1: Definição de experimento aleatório, espaço amostral e eventos;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;
- ✓ θ_4: Complementar de eventos;
- ✓ Θ_3: Teoria dos conjuntos;

A OD utilizada pelo autor para o funcionamento desta OM é subsidiada a partir da introdução do conceito de eventos complementares, em uma situação envolvendo a retirada de bolas de cores distintas, como podemos observar a seguir.

Figura 09: Introdução ao conceito de eventos complementares



2.3 Eventos complementares

Em uma urna há 5 bolas coloridas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. Uma bola é sorteada, sua cor é anotada e ela é devolvida à urna. Nessa situação, considere o evento A: "a bola sorteada é vermelha", com $n(A) = 3$, e o evento B: "a bola sorteada é branca", com $n(B) = 2$. Sabe-se que, para o espaço amostral S desse experimento, temos $n(S) = 5$. Logo, a probabilidade dos eventos A e B é dada por:

- $P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$
- $P(B) = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

A probabilidade de ocorrência do evento B poderia ser calculada considerando-se que há somente duas possibilidades no experimento, ou seja, a bola sorteada só pode ser branca ou vermelha. Assim, a reunião dos eventos A e B implica um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1 (100%). Por isso, temos:

$$P(B) + P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de S. Dizemos que o evento $\overline{A}$ é **complementar** do evento A se $\overline{A} \cap A = \varnothing$ e $\overline{A} \cup A = S$.

A soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1, ou seja, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Assim:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 281)

Identificamos o primeiro e o segundo momentos didáticos a partir da situação envolvendo a urna, na qual o tipo de tarefa T_n é: "Calcular a probabilidade a priori para

ocorrência de eventos complementares" e a técnica é baseada no uso de noções básicas, tais como a descrição do espaço amostral e eventos, cálculo de probabilidade por meio do princípio clássico e concluída aplicando o complementar de eventos. Já a formalização do conceito, quinto momento didático (institucionalização), é enfatizado após a resolução da tarefa. É importante destacar que a noção de eventos complementares no LD_1 é mencionada exclusivamente através do trecho ilustrado na Figura 09. Em seguida, o autor logo propõe outra situação para introduzir o conceito de união de eventos.

Embora estejamos trabalhando ainda no contexto da probabilidade a priori, a técnica aplicada para a execução do subtipo de tarefa $T_{3.5}$ é fundamentada na identificação e soma do número de elementos do espaço amostral, no cálculo utilizando o princípio clássico de probabilidade e no uso do complementar de eventos. Como pudemos observar, a técnica principal para o cálculo da probabilidade foi construída por intermédio do complementar de eventos.

Notemos que a técnica τ_{APPC} (aplicar a definição probabilidade clássica), que foi utilizada como principal abordagem para resolver $T_{3.1}$; $T_{3.2}$; $T_{3.3}$ e $T_{3.4}$, por sua vez, foi aplicada como suporte para comportar parte da técnica de $T_{3.5}$. Já a τ_{CE} (aplicar o complementar de eventos) desempenha um papel fundamental para consolidar a probabilidade do evento ocorrer, sendo, portanto, a técnica principal de $T_{3.5}$. Em situações desse tipo, observa-se a evolução de uma praxeologia pontual para uma praxeologia local, pois os tipos de tarefas deixam de ser específicos e passam a englobar outros componentes tecnológicos além da definição de probabilidade clássica, como, por exemplo, o complementar de eventos.

Prosseguindo com a análise, observamos que a abordagem relacionada a união de eventos no LD_1 também não apresenta exemplos práticos. No entanto, ao analisar a categoria de exercícios resolvidos, identificamos uma questão que pode servir como uma OD para o trabalho no contexto de parte das questões classificadas dentro do subtipo de tarefa $T_{3.6}$.

É importante destacar que para o trabalho com a união de eventos, torna-se necessário verificar a existência da intersecção de eventos. Neste sentido, no contexto apresentado no LD_1, é fundamental que os alunos compreendam em quais situações essa noção deve ser aplicada, tendo em vista as semelhanças com a propriedade de eventos mutuamente exclusivos.

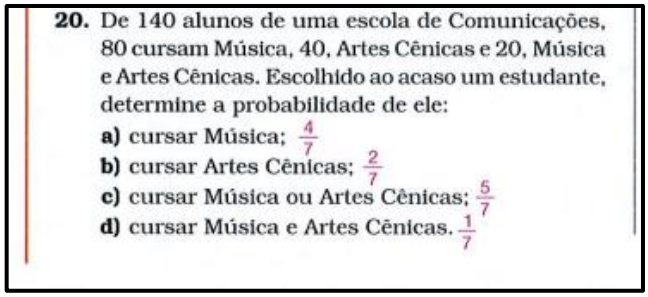
No entanto, o LD_1 não apresenta de forma explícita o papel que a intersecção de eventos desempenha na decisão de qual propriedade deve ser utilizada pelo estudante. Desse modo, na TAD, dizemos que há um vazio didático para a abordagem desses conceitos. Por isso, ressaltamos que, ao trabalhar com essas noções, é indispensável considerar dois contextos, a saber:

- Quando $P(A \cap B) > 0$, utiliza − se a propriedade da união de eventos;
- Quando $P(A \cap B) = 0$, utiliza-se a probabilidade de eventos mutuamente exclusivos;

É importante enfatizar que em situações onde a $P(A \cap B) = 0$, também é possível aplicar a propriedade da união de eventos. Contudo, em cenários onde $P(A \cap B) > 0$, a propriedade de eventos mutuamente exclusivos não é aplicável. Essas particularidades devem ser respeitadas, reconhecendo as limitações das fórmulas.

Assim, para uma melhor compreensão dessas diferentes abordagens técnicas, apresentamos a seguir situações que evidenciam essa distinção.

Figura 10: Situação referente a $T_{3.6}$


20. De 140 alunos de uma escola de Comunicações, 80 cursam Música, 40, Artes Cênicas e 20, Música e Artes Cênicas. Escolhido ao acaso um estudante, determine a probabilidade de ele:

a) cursar Música; $\frac{4}{7}$

b) cursar Artes Cênicas; $\frac{2}{7}$

c) cursar Música ou Artes Cênicas; $\frac{5}{7}$

d) cursar Música e Artes Cênicas. $\frac{1}{7}$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 284)

A indicação de um possível procedimento técnico para cumprir tarefas desse tipo pode ser executado a partir dos passos a seguir:

$T_{3.6}$:

- ✓ τ_{DCCP} – Descrever e contar o número de casos possíveis;
- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar o primeiro princípio de probabilidade clássica para resolver os itens “a” e “b”;
- ✓ τ_{UIE}: Aplicar a fórmula da união de eventos para resolver os itens “c” e “d”;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

- ✓ θ_1: Definição de experimento aleatório, espaço amostral e eventos;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;
- ✓ θ_5: União de eventos;
- ✓ Θ_3: Teoria dos conjuntos;

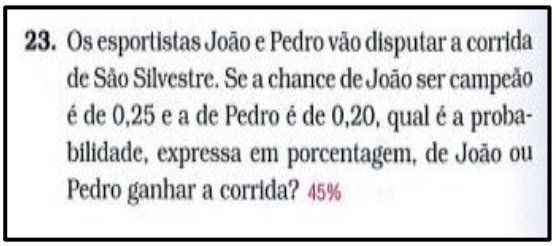
De modo geral, em relação às técnicas empregadas nos tipos de tarefas anteriores, $T_{3.6}$ incorpora um procedimento técnico adicional, que também pode ser denominado de técnica principal τ_{UIE}: (Aplicar a fórmula da união e intersecção de eventos), uma vez que esse processo

é essencial para resolver a tarefa. Contudo, apesar do número expressivo de questões, não há contextos inovadores, permanecendo, portanto, o modelo tecnicista e mecânico.

Quando se utiliza mais de uma tecnologia para resolver uma mesma tarefa, Chevallard (1999) enfatiza que a praxeologia deve é classificada como local, pois envolve a mobilização de técnicas distintas em prol do mesmo objetivo que é o cálculo da probabilidade.

De modo semelhante, no subtipo de tarefa $T_{3.7}$, apresenta-se uma situação análoga à questão anterior. Vamos observar a seguir.

Figura 11: Situação referente a $T_{3.7}$


23. Os esportistas João e Pedro vão disputar a corrida de São Silvestre. Se a chance de João ser campeão é de 0,25 e a de Pedro é de 0,20, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de João ou Pedro ganhar a corrida? 45%

Fonte: De Leonardo (2013, p. 284)

Notemos que na questão 23 não há intersecção entre o evento A (João ser campeão) e evento B (Pedro ser campeão). Ou seja, não há chance de ambos vencerem simultaneamente. Dessa forma, a questão pode ser resolvida de maneira trivial por meio da aplicação da propriedade de eventos mutuamente exclusivos. Vejamos:

$T_{3.7}$

- ✓ τ_{EME}: Aplicar a fórmula de eventos mutuamente exclusivos;
- ✓ τ_{CDP}: Converter número decimal em porcentagem;
- ✓ θ_6: Fórmula do cálculo de eventos mutuamente exclusivos;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Assim, as técnicas empregadas para comportar esse tipo de tarefa se resumem a dois procedimentos, sendo que a técnica principal é a τ_{EME} (Aplicação da fórmula de eventos mutuamente exclusivos).

Ratificando o que mencionamos anteriormente sobre a utilização da fórmula da união de eventos em situações onde a intersecção é igual a zero, temos:

$$P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2)$$

$$P(E1 \cup E2) = 0{,}25 + 0{,}20 - 0 = 0{,}45 \text{ ou } 45\%$$

Nesse contexto, fica claramente explícito que, em situações nas quais a intersecção entre dois eventos A e B é igual a zero, vale a utilização das duas propriedades: a de eventos mutuamente exclusivos e a da união de eventos. Além disso, embora exista duas possíveis

maneiras de fazer a questão, as praxeologias permanecem pontuais, tendo em vista que nos dois momentos, as tecnologias são trabalhadas de forma isoladas.

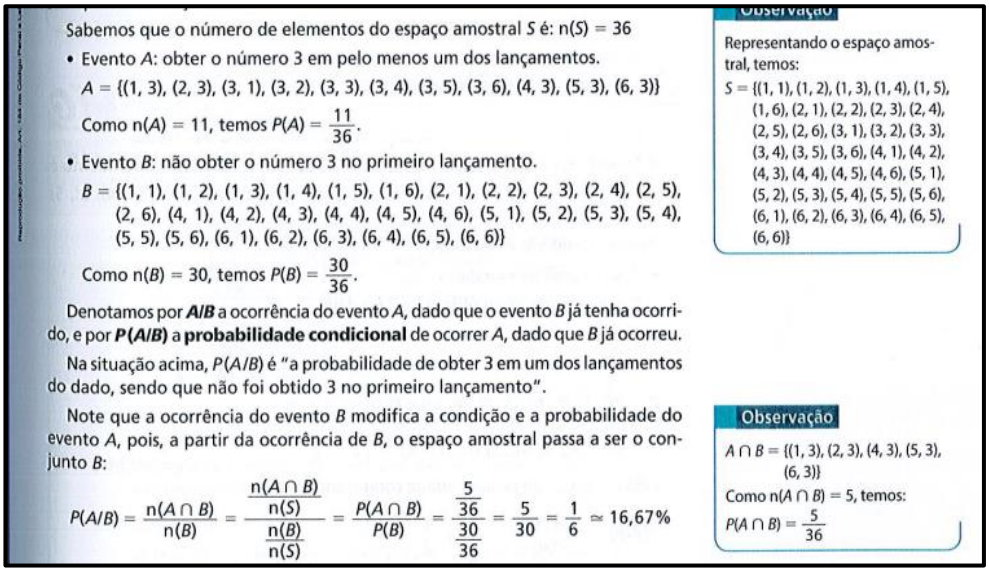
No sentindo em que o conteúdo é apresentado, percebe-se que a pedagogia tradicionalista é predominantemente explorada na obra didática. Nessa perspectiva, o trabalho do aluno concentra-se na resolução de exercícios por meio da aplicação de fórmulas. Nesse modelo de ensino "os alunos não compreendem de onde ela apareceu, não entendem o seu significado e acabam mistificando a Matemática como um conjunto de regras e fórmulas que aparecem sem justificativa" (Lopes; Teodoro e De Carvalho, 2011, p. 7).

No terceiro conjunto de conteúdos, relacionados a **Probabilidade condicional e independência de eventos**, o autor apresenta a definição de probabilidade condicional através de uma situação problema que aborda como experimento aleatório um jogo que envolve o lançamento sucessivo de um dado, cuja ideia consiste em escolher um número entre 1 e 6. Vejamos a problemática do enunciado a seguir:

> Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lanças um dado duas vezes sucessivas. Se o número aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence. Se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Dois amigos decidiram jogar. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar se não obteve o número 3 no primeiro lançamento? (De Leonardo, 2013, p. 285).

Apresentada a tarefa anterior, o autor do LD1 faz a exibição dos próximos passos para a construção do procedimento que comporta a técnica para resolver a situação sobre o lançamento sucessivo do dado, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 12: Introdução à probabilidade condicional



Sabemos que o número de elementos do espaço amostral S é: $n(S) = 36$

- Evento A: obter o número 3 em pelo menos um dos lançamentos.

$A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

Como $n(A) = 11$, temos $P(A) = \frac{11}{36}$.

- Evento B: não obter o número 3 no primeiro lançamento.

$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Como $n(B) = 30$, temos $P(B) = \frac{30}{36}$.

Denotamos por ***A/B*** a ocorrência do evento A, dado que o evento B já tenha ocorrido, e por ***P(A/B)*** a **probabilidade condicional** de ocorrer A, dado que B já ocorreu.

Na situação acima, $P(A/B)$ é "a probabilidade de obter 3 em um dos lançamentos do dado, sendo que não foi obtido 3 no primeiro lançamento".

Note que a ocorrência do evento B modifica a condição e a probabilidade do evento A, pois, a partir da ocorrência de B, o espaço amostral passa a ser o conjunto B:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Observação

Representando o espaço amostral, temos:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Observação

$A \cap B = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

Como $n(A \cap B) = 5$, temos:

$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 285)

Dada a situação, identificamos o primeiro e segundo momentos didáticos (exploração de um tipo de tarefa e uma possível técnica relativa) através da situação inicial, questionamento

e resolução. Nesse contexto inicial do conteúdo, enfatiza-se que há um meio principal para o cálculo da probabilidade condicional. Sendo esse realizado pela divisão de $P(A \cap B)$ por $P(B)$, com o denominador diferente de zero, como podemos observar na expressão matemática a seguir.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{se } P(B) \neq 0$$

Além disso, para casos específicos, a fórmula pode ser reescrita. Como, por exemplo, para o cálculo da probabilidade conjunta para ocorrência dos eventos A e B ao mesmo tempo. Neste cenário, o procedimento pode ser realizado utilizando o produto da probabilidade de B pela probabilidade condicional de A, reconhecendo que B ocorreu. Esse contexto é representado pela seguinte expressão matemática.

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

Dada essa introdução inicial sobre a probabilidade condicional, o autor do LD apresenta uma situação sobre o conceito na categoria de Exercícios Resolvidos. Em seguida, já aborda conhecimentos relacionados a eventos independentes. Para esse conceito de probabilidade, o autor do LD1 utiliza expressões matemáticas do tipo:

- Dois eventos são independentes quando a probabilidade de ocorrência de um evento A não interfere na ocorrência do evento B. Essa noção é apresentada no LD pela fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- Dois eventos são dependentes quando a probabilidade de ocorrência do evento influencia na ocorrência do evento B. Essa noção é indicada no LD pela expressão matemática:

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

Após a indicação das propriedades, o autor do LD1 utiliza um exemplo envolvendo um experimento aleatório sobre o jogo de cartas, no intuito de introduzir o que são eventos independentes. Em seguida, é apresentado um exercício resolvido que envolve a classificação de eventos independentes e dependentes. Em seguida, o autor faz a exibição das situações elencadas na categoria de exercícios propostos para que os alunos possam testar as técnicas abordadas na seção sobre tais conteúdos no LD1.

Feita essa abordagem do conceito de probabilidade condicional e independência de eventos, o próximo passo foi agrupar as situações presentes nas categorias de exercícios e explorar o ambiente praxeológico. No quadro a seguir, exibimos os tipos de tarefas que correspondem ao agrupamento das situações disponíveis nesse segmento.

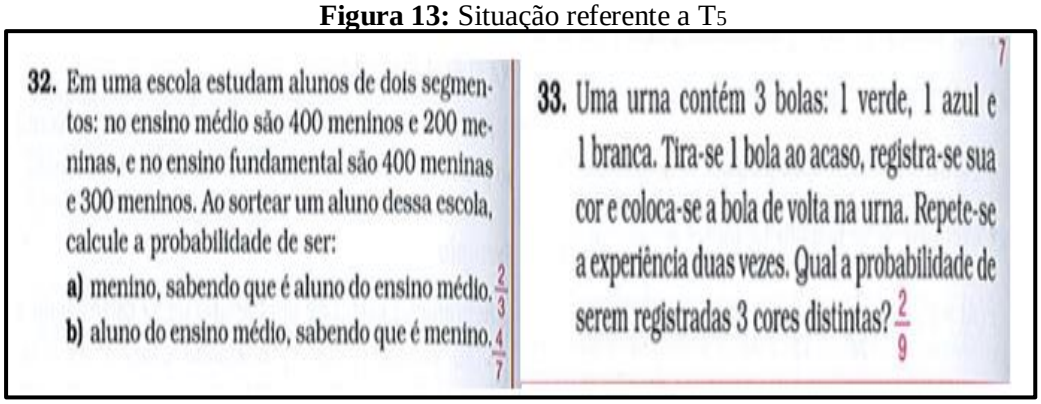
Quadro 13: Tipos de Tarefas referentes aos conteúdos Probabilidade condicional e eventos independentes no LD_1

Tipo de tarefa	Quantidade
T_4: Determinar a probabilidade de ocorrência do evento A, sabendo que B ocorreu;	9
T_5: Determinar a probabilidade de ocorrência de eventos independentes;	6

Fonte: Produção nossa

A seguir, apresentamos algumas situações das quais esses tipos de tarefas emergiram. Em seguida, indicamos o detalhamento de possíveis procedimentos técnicos para cumprir cada tipo de tarefa derivado das questões.

Figura 13: Situação referente a T_5



32. Em uma escola estudam alunos de dois segmentos: no ensino médio são 400 meninos e 200 meninas, e no ensino fundamental são 400 meninas e 300 meninos. Ao sortear um aluno dessa escola, calcule a probabilidade de ser:

a) menino, sabendo que é aluno do ensino médio. $\frac{2}{3}$

b) aluno do ensino médio, sabendo que é menino. $\frac{4}{7}$

33. Uma urna contém 3 bolas: 1 verde, 1 azul e 1 branca. Tira-se 1 bola ao acaso, registra-se sua cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se a experiência duas vezes. Qual a probabilidade de serem registradas 3 cores distintas? $\frac{2}{9}$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 284-288)

A questão 32, T_4, requer do aluno o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento A, sabendo que B ocorreu. Vimos por meio da introdução do conceito que em situações com essas características, adota-se o conceito de probabilidade condicional. Na questão 33, T_5, o aluno é instigado a trabalhar com eventos independentes, visto que a probabilidade da ocorrência do evento A não afeta as probabilidades de ocorrência do evento B ou C.

Assim, a seguir, indicamos uma possível técnica e elencamos alguns elementos praxeológico para solucionar a questão 32, referente ao tipo de tarefa T_4.

T_4:

- ✓ τ_{DSEA}: Descrever e somar a quantidade de elementos do espaço amostral para resolver os itens "a" e "b";
- ✓ τ_{DCCP}:Descrever e contar o número de casos favoráveis;
- ✓ τ_{PC}: Aplicar a fórmula condicional para calcular os itens "a" e "b":

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};$$

- ✓ θ_7: Definição de probabilidade condicional;

- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Já em T_5, questão 33, aborda-se a probabilidade de eventos independentes, na qual a ocorrência de um dado evento A não interfere na ocorrência de um devido evento B. A seguir, apresentamos uma técnica para cumprir a tarefa derivada da questão 33 do LD_1, referente à T_5 que se enquadra nesse escopo de discussão.

T_5:

- ✓ τ_{INE}: Identificar e nomear os eventos;
- ✓ τ_{IE}: Aplicar a independência de eventos para calcular a probabilidade de cada evento ocorrer;
- ✓ θ_8: Independência de eventos;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

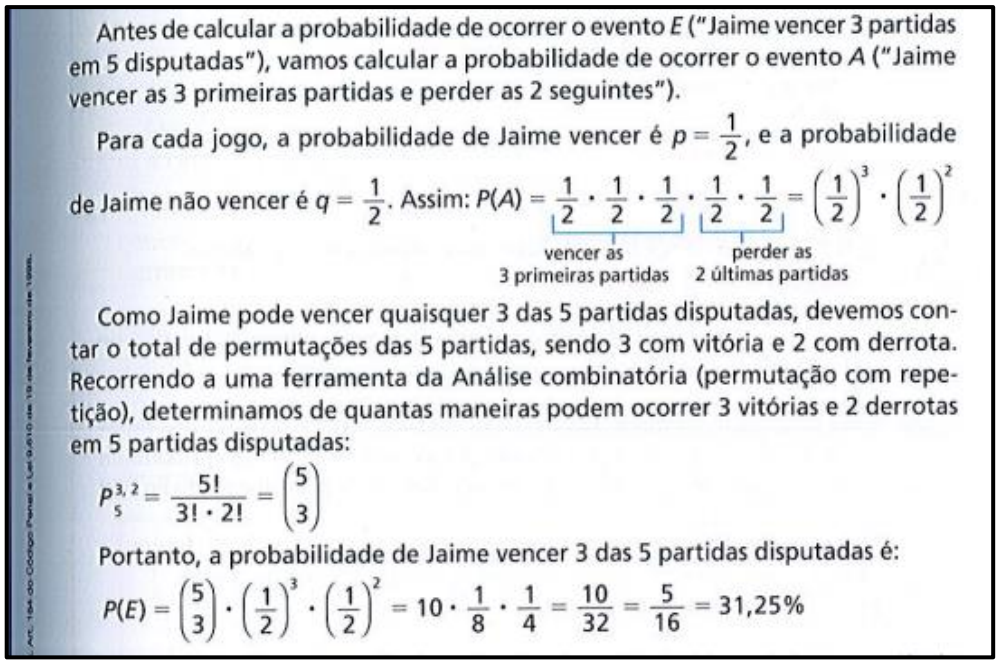
Diante do agrupamento do número total de 15 questões em dois tipos de tarefas, reforça-se o que observamos nos conjuntos de conteúdos anteriores. Isso significa dizer que, embora exista um grande número significativo de questões relacionadas à abordagem desse conceito, as situações propostas não estimulam o trabalho com essa noção de probabilidade em diferentes contextos. Em vez disso, os contextos das situações e procedimentos técnicos utilizados apontam para o uso expressivo de propriedades e memorização e aplicação de fórmulas.

Por fim, o último segmento do LD_1 apresenta conhecimentos probabilísticos relacionados à **Distribuição Binomial**. Esse modelo probabilístico é utilizado especificamente em situações em que experimentos aleatórios são realizados n vezes, para $n \geq 2$. Além disso, assim como o Modelo de Bernoulli, esses conceitos probabilísticos são usados para determinar a probabilidade em experimentos cujo resultado pode ser apenas um de dois possíveis (sucesso ou fracasso, aprovado ou reprovado, positivo ou negativo, etc).

No contexto do LD, o autor apresenta um conjunto de cenários nos quais o jogador Jaime pode vencer ou perder a partida. A probabilidade de Jaime vencer as três partidas é dada pela expressão $ppp = p^3$, enquanto a probabilidade do mesmo jogador vencer duas partidas é representada por $ppq = p^2q$. Já a probabilidade dele vencer apenas uma partida é dada por $pqq = pq^2$, e assim por diante (De Leonardo, 2013).

Em seguida, o autor apresenta o mesmo exemplo do jogo de tênis com uma outra tarefa para formalizar a ideia de Distribuição Binominal como "determinar a probabilidade de Jaime vencer 3 de 5 partidas disputadas" (De Leonardo, 2013, p. 289). Para essa tarefa, o autor propõe uma possível técnica, conforme figura a seguir.

Figura 14: Introdução ao conceito de probabilidade binomial



Antes de calcular a probabilidade de ocorrer o evento E ("Jaime vencer 3 partidas em 5 disputadas"), vamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A ("Jaime vencer as 3 primeiras partidas e perder as 2 seguintes").

Para cada jogo, a probabilidade de Jaime vencer é $p = \frac{1}{2}$, e a probabilidade de Jaime não vencer é $q = \frac{1}{2}$. Assim: $P(A) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{vencer as 3 primeiras partidas}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{perder as 2 últimas partidas}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Como Jaime pode vencer quaisquer 3 das 5 partidas disputadas, devemos contar o total de permutações das 5 partidas, sendo 3 com vitória e 2 com derrota. Recorrendo a uma ferramenta da Análise combinatória (permutação com repetição), determinamos de quantas maneiras podem ocorrer 3 vitórias e 2 derrotas em 5 partidas disputadas:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3}$$

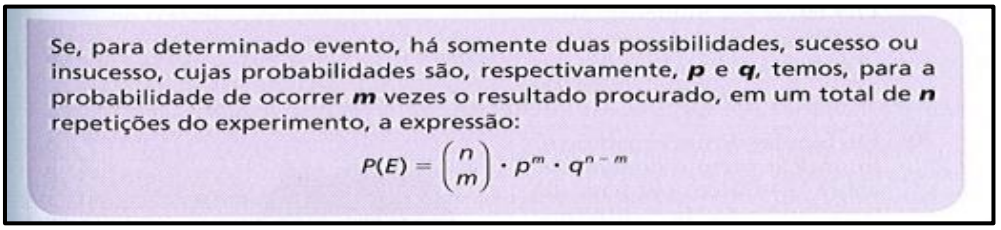
Portanto, a probabilidade de Jaime vencer 3 das 5 partidas disputadas é:

$$P(E) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 289)

Ao observar a situação e a técnica apresentada, podemos fazer referência aos momentos didáticos descritos por Chevallard (1999). Nesse contexto, identificamos o segundo momento didático (Exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica relativa). Além disso, logo após, o autor do LD1 faz a mobilização do quinto momento didático (institucionalização), abordado conforme figura abaixo.

Figura 15: Institucionalização do Modelo Binomial



Se, para determinado evento, há somente duas possibilidades, sucesso ou insucesso, cujas probabilidades são, respectivamente, $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, temos, para a probabilidade de ocorrer $\boldsymbol{m}$ vezes o resultado procurado, em um total de $\boldsymbol{n}$ repetições do experimento, a expressão:

$$P(E) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 289)

A partir desse contato inicial, observa-se que o autor também começa a abordar o conteúdo assim como na organização das seções anteriores, a saber: Situação contextualizada → Definição do conceito → Exemplo → Exercício Resolvido → Exercícios Propostos.

Agrupando as questões em tipos de tarefas, no intuito de apontar possíveis procedimentos técnicos para cada tipo proposto nesse conteúdo, encontramos os seguintes tipos e subtipos de tarefas.

Quadro 14: Tipos e subtipos de Tarefas referentes ao conteúdo Distribuição Binomial no LD_1

Tipo de tarefa	Subtipos de tarefas	Quantidade
T_6: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos específicos em experimentos aleatórios utilizando a Distribuição Binomial	$T_{6.1}$: Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos específicos por meio da distribuição e cálculo do coeficiente binomial;	6
	$T_{6.2}$: Calcular a probabilidade para ocorrência de eventos específicos utilizando a distribuição binomial e o complementar de eventos;	2

Fonte: Produção nossa

Para representar as questões agrupadas no subtipo de tarefa $T_{6.1}$ e explorar os demais elementos praxeológicos, escolhemos a questão 34 do capítulo, conforme figura a seguir.

Figura 16: Situação referente a $T_{6.1}$

Fonte: De Leonardo (2013, p. 290)

A situação pode ser resolvida sob auxílio dos seguintes elementos praxeológicos:

$T_{6.1}$:

- ✓ τ_{ADB}: Aplicar a fórmula da Distribuição Binomial;

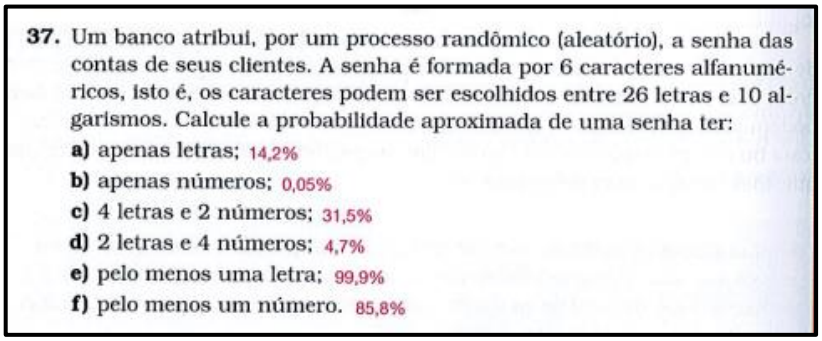
$$P(X = k) = (n\ k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} . p^k . (1-p)^{n-k}$$

- ✓ θ_9: definição de probabilidade binomial;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Na resolução do primeiro subtipo de tarefa da seção, são explorados conhecimentos probabilísticos especificamente relacionados ao momento de institucionalização do conceito.

Já para o subtipo de tarefa $T_{6.2}$, conforme destacado em sua descrição, agrupamos situações relacionadas ao cálculo da probabilidade binomial utilizando o complementar de eventos. A seguir, apresentamos a situação proposta no LD_1 para explorar o conceito de probabilidade binomial com as características de eventos complementares caracterizado como subtipo.

Figura 17: Situação referente a $T_{6.2}$



37. Um banco atribui, por um processo randômico (aleatório), a senha das contas de seus clientes. A senha é formada por 6 caracteres alfanuméricos, isto é, os caracteres podem ser escolhidos entre 26 letras e 10 algarismos. Calcule a probabilidade aproximada de uma senha ter:

a) apenas letras; 14,2%

b) apenas números; 0,05%

c) 4 letras e 2 números; 31,5%

d) 2 letras e 4 números; 4,7%

e) pelo menos uma letra; 99,9%

f) pelo menos um número. 85,8%

Fonte: De Leonardo (2013, p. 290)

$T_{6.2}$:

- ✓ τ_{PPPC}: Aplicar a fórmula primeiro princípio de probabilidade clássica;
- ✓ τ_{ADB}: Aplicar a fórmula da Distribuição Binomial;
- ✓ τ_{CE}: Aplicar a fórmula do complementar de eventos;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ θ_9: definição de probabilidade binomial;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;
- ✓ θ_4: Complementar de eventos;
- ✓ Θ_3: Teoria dos conjuntos;

A técnica apresentada para este subtipo de tarefa é composta por um conjunto de procedimentos aplicados em situações anteriores, sem a introdução de novas abordagens. Contudo, o processo de resolução é complexo e exige dos alunos uma base sólida de conhecimentos combinatórios, além de domínio no uso do complementar de eventos.

De modo geral, os procedimentos técnicos utilizados para cumprir as tarefas das situações propostas no LD_1 alocam-se em um contexto tecnicista. As atividades presentes nessa obra didática valorizam o processo de ensino e aprendizagem por meio de atividades prontas e resoluções diretas. Além disso, no LD_1, fica evidente que o desenvolvimento das habilidades do aluno em relação aos conceitos de probabilidade é mobilizado, exclusivamente, pelo método da repetição de procedimentos técnicos, característica que simboliza a aprendizagem tecnicista e mecânica, aspecto que D'Ambrósio (2008), denomina como um processo de formação demandado por causa e efeito. Ou seja, causa é a fórmula do conceito abordado e efeito é o resultado da operação.

De modo geral, para Gascón (2003, p. 24), esse modelo de OD como o qual nos deparamos no LD_1 é predominantemente tecnicista, tendo em vista que a sequência de ensino para a abordagem da probabilidade "considera o aluno como um "autômato" que melhora o

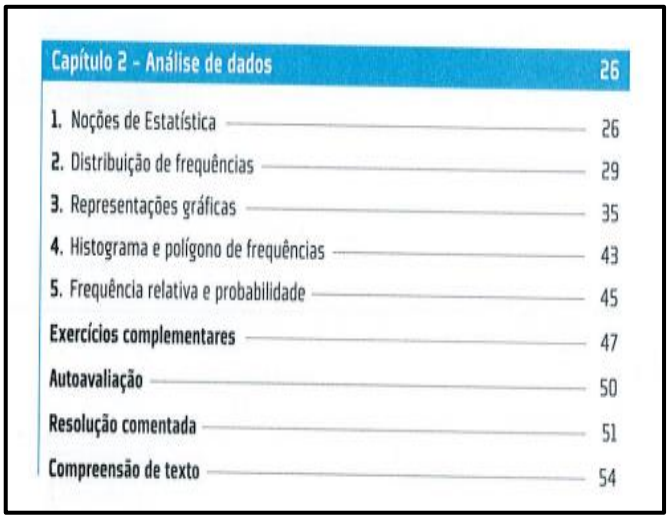
domínio das técnicas mediante a simples repetição ou que proporciona um treinamento conscienciosoˮ, aspecto que pode tornar o conhecimento ineficaz e insuficiente.

4.2. Livro Didático (LD2): *Conexões – Matemática (2015)*

Assim como na coleção volume 2 (LD1), nesta obra didática, os conteúdos matemáticos são organizados em capítulos, seguindo a mesma estrutura do LD1. Isto é, cada capítulo é destinado a um objeto de ensino específico. Além disso, os objetos de ensino de cada capítulo são divididos por seção, nas quais cada seção aborda um conteúdo específico relacionado a determinado objeto matemático.

Diferente do LD1, esse material didático é composto por 8 capítulos, ou seja, possui 3 capítulos a menos que o LD1. No Nessa obra didática, os objetos de ensino estão distribuídos por capítulo da seguinte maneira: 1º Capítulo: Matemática financeira; 2º Capítulo: Análise de dados; 3º Capítulo: Medidas estatísticas; 4º Capítulo: Conceitos básicos e a reta; 5º Capítulo: Circunferência; 6° Capítulo: Cônicas; 7º Capítulo: Números complexos; 8° Capítulo: Polinômios e equações polinomiais. No LD2, a probabilidade situa-se 5ª seção do capítulo 2, conforme figura a seguir.

Figura 18: Localização da probabilidade no LD2


Capítulo 2 - Análise de dados 26
1. Noções de Estatística 26
2. Distribuição de frequências 29
3. Representações gráficas 35
4. Histograma e polígono de frequências 43
5. Frequência relativa e probabilidade 45
Exercícios complementares 47
Autoavaliação 50
Resolução comentada 51
Compreensão de texto 54

Fonte: De Leonardo (2013, p. 5)

Logo, ao observar a distribuição dos objetos de ensino presentes na obra didática, é possível notar que não há no LD2 um capítulo exclusivo para o tratamento da probabilidade. Em vez disso, esse conteúdo encontra-se presente na 5ª seção do capítulo 2 – Análise de dados.

O LD2, em sua totalidade, é composto por 206 páginas, ou seja, possui 90 páginas a menos que o LD1. O capítulo direcionado à Análise de dados conta com 28 páginas. No entanto, a seção voltada à frequência relativa e probabilidade corresponde apenas à 2 páginas desse

capítulo. Representando essa quantidade em termos percentuais, observa-se que o autor do LD_2 dedica aproximadamente 0,97% da obra ao objeto do conhecimento probabilidade.

A seção relacionada a **frequência relativa e probabilidade** é composta por 5 questões, distribuídas entre as categorias: **Exercícios Resolvidos** e **Exercícios Propostos**. Notamos que, assim como no LD_1, o capítulo possui mais duas categorias de atividades **exercícios complementares e de autoavaliação**, totalizando 04 (quatro) categorias de atividades. Contudo, ao analisarmos as questões dessas categorias, notamos que as atividades abordam conceitos relacionados a outras seções do LD_2, não contemplando conteúdos relacionados a probabilidade. Assim, a seguir, apresentamos as categorias de exercícios que contém atividades sobre a probabilidade no LD_2.

Quadro 15: Distribuição dos exercícios por categoria – LD_2

Categoria	**Quantidade**
Exercícios resolvidos	1
Exercícios propostos	4
Total	**5**

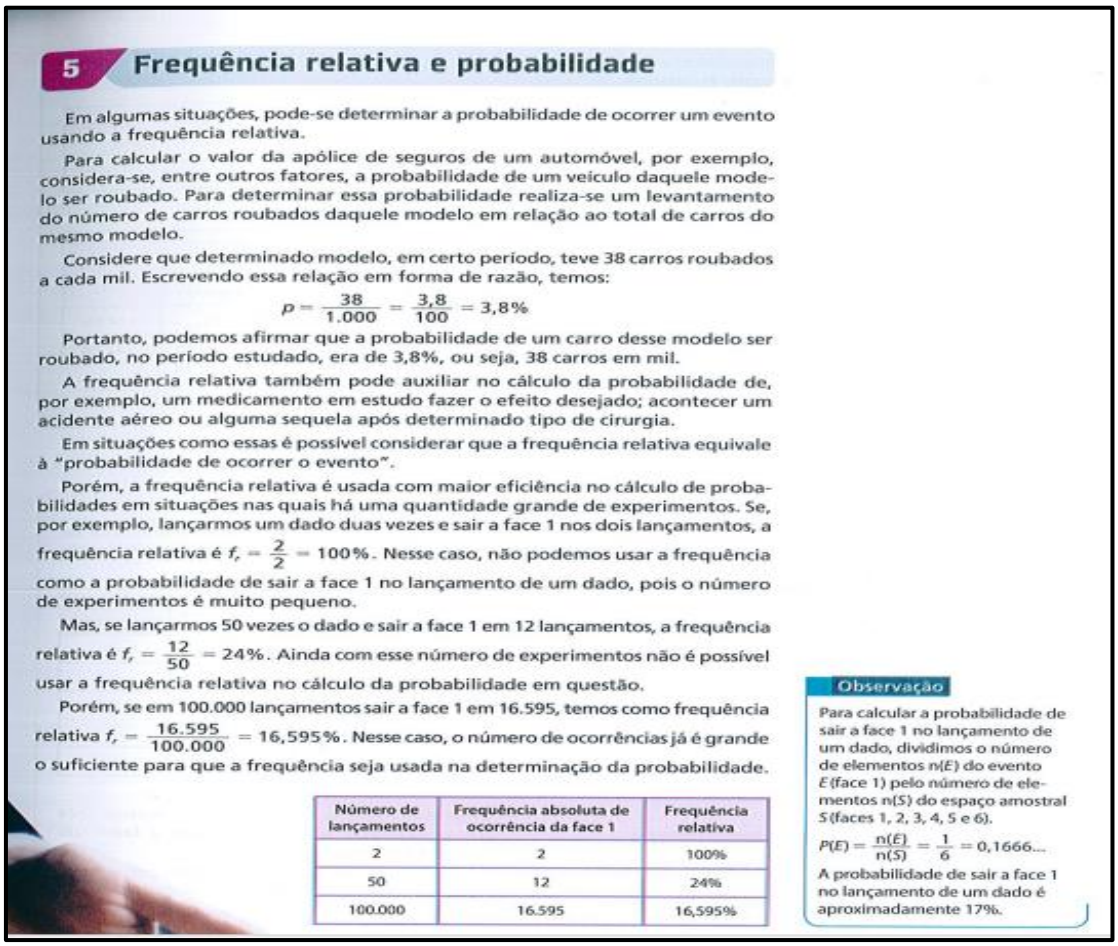
Fonte: Produção nossa

Após a contagem das questões disponíveis nas duas categorias de exercícios, pensamos em agrupar as questões por conteúdo. Contudo, como há apenas um conteúdo exclusivo para o estudo da probabilidade no LD_2, não realizamos a filtragem das questões por conjunto de conteúdo, como fizemos nas seções anteriores. Em vez disso, realizamos a contagem da quantidade de questões e, em seguida, exploramos o ambiente praxeológico nas atividades presentes nessa seção do LD_2.

Explorando as Organizações Praxeológicas (OP) presentes na obra didática, logo notamos que no LD_2 não há Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) para o estudo específico de probabilidade a priori, como foi feito no LD_1. O conteúdo apresentado nesta obra didática está relacionado ao estudo da probabilidade por meio da frequência relativa.

Neste material didático, o autor inicia a introdução do conceito, utilizando uma situação cotidiana para o trabalho com a probabilidade por intermédio da frequência relativa. Para isso, o autor apresenta o contexto, conforme figura a seguir.

Figura 19: Conceito de frequência relativa e probabilidade



5 Frequência relativa e probabilidade

Em algumas situações, pode-se determinar a probabilidade de ocorrer um evento usando a frequência relativa.

Para calcular o valor da apólice de seguros de um automóvel, por exemplo, considera-se, entre outros fatores, a probabilidade de um veículo daquele modelo ser roubado. Para determinar essa probabilidade realiza-se um levantamento do número de carros roubados daquele modelo em relação ao total de carros do mesmo modelo.

Considere que determinado modelo, em certo período, teve 38 carros roubados a cada mil. Escrevendo essa relação em forma de razão, temos:

$$p = \frac{38}{1.000} = \frac{3,8}{100} = 3,8\%$$

Portanto, podemos afirmar que a probabilidade de um carro desse modelo ser roubado, no período estudado, era de 3,8%, ou seja, 38 carros em mil.

A frequência relativa também pode auxiliar no cálculo da probabilidade de, por exemplo, um medicamento em estudo fazer o efeito desejado; acontecer um acidente aéreo ou alguma sequela após determinado tipo de cirurgia.

Em situações como essas é possível considerar que a frequência relativa equivale à "probabilidade de ocorrer o evento".

Porém, a frequência relativa é usada com maior eficiência no cálculo de probabilidades em situações nas quais há uma quantidade grande de experimentos. Se, por exemplo, lançarmos um dado duas vezes e sair a face 1 nos dois lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{2}{2} = 100\%$. Nesse caso, não podemos usar a frequência como a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, pois o número de experimentos é muito pequeno.

Mas, se lançarmos 50 vezes o dado e sair a face 1 em 12 lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{12}{50} = 24\%$. Ainda com esse número de experimentos não é possível usar a frequência relativa no cálculo da probabilidade em questão.

Porém, se em 100.000 lançamentos sair a face 1 em 16.595, temos como frequência relativa $f_r = \frac{16.595}{100.000} = 16,595\%$. Nesse caso, o número de ocorrências já é grande o suficiente para que a frequência seja usada na determinação da probabilidade.

Número de lançamentos	Frequência absoluta de ocorrência da face 1	Frequência relativa
2	2	100%
50	12	24%
100.000	16.595	16,595%

Observação

Para calcular a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, dividimos o número de elementos $n(E)$ do evento E (face 1) pelo número de elementos $n(S)$ do espaço amostral S (faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6).

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6} = 0,1666...$$

A probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado é aproximadamente 17%.

Fonte: De Leonardo (2013, p. 45).

Neste contato inicial com o conteúdo, é possível destacar alguns momentos didáticos, tais como o primeiro encontro do estudante com a OM, bem como a exploração do tipo de tarefa e encontro com a técnica, segundo momento didático. A institucionalização é apresentada em partes, primeiro sobre o cálculo da probabilidade, dado pela relação entre o número de casos favoráveis e número de casos possíveis. Depois sobre a frequência relativa, utilizando a noção a posteriori para estimar a frequência relativa de um dado experimento ocorrer.

De acordo com o trecho inicial da abordagem do conteúdo, o autor ressalta que o cálculo da probabilidade por intermédio da frequência relativa é viável a partir de um grande número de ensaios. Nessa perspectiva, ele faz a ilustração exemplificando quando é e quando não é possível utilizar a frequência relativa para o cálculo de probabilidades.

Em seguida, assim como no LD_1, no LD_2 o autor apresenta uma situação denominada de exercício resolvido, atividade que, como dissemos na análise do LD_1, entendemos como um modelo de referência para auxiliar o estudante no processo de resolução das questões subsequentes.

Logo após essa abordagem, identificamos as situações propostas a serem resolvidas pelos estudantes. Agora, analisamos os tipos e subtipos de tarefas presentes nas questões e realizamos o agrupamento das questões de acordo com as tarefas extraídas de cada uma delas. Desse modo, o agrupamento das situações ficou organizado conforme quadro a seguir.

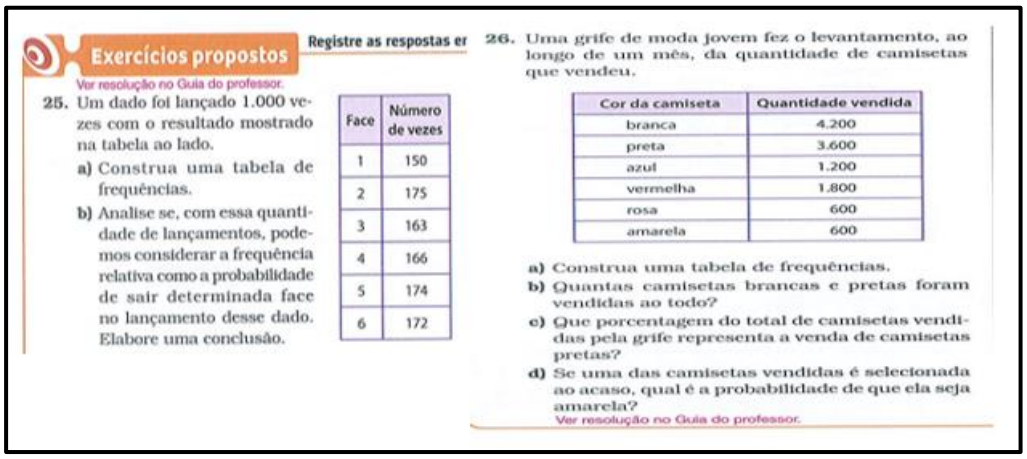
Quadro 16: Tipos e subtipos de Tarefas referentes aos conteúdos Frequência Relativa e Probabilidade no LD_2

Tipo de tarefa	Subtipos de tarefas	Quantidade
T_7: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos por meio da frequência relativa	$T_{7.1}$: Construir uma tabela de frequência e analisar se a frequência relativa configura-se como probabilidade;	2
	$T_{7.2}$: Construir uma tabela de frequência e calcular probabilidades;	3
Total	-	**5**

Fonte: Produção nossa

De acordo com as características das situações presentes neste conteúdo, agrupamentos as questões existentes em um tipo de tarefa regido por dois subtipos de tarefas. O próximo passo foi indicar possíveis técnicas para cada subtipo de tarefa, tendo em vista que, assim como no LD_1, o autor também não apresenta procedimentos técnicos para orientar os docentes no processo de resolução das situações propostas. Dessa forma, a seguir, apresentamos uma discussão do ambiente praxeológico a partir das situações abordadas no LD_2, referentes aos subtipos de tarefas $T_{7.1}$ e $T_{7.2}$.

Figura 20: Situações relacionadas aos subtipos de tarefas $T_{7.1}$ e $T_{7.2}$



Exercícios propostos — Registre as respostas er

Ver resolução no Guia do professor.

25. Um dado foi lançado 1.000 vezes com o resultado mostrado na tabela ao lado.

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Analise se, com essa quantidade de lançamentos, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado. Elabore uma conclusão.

Face	Número de vezes
1	150
2	175
3	163
4	166
5	174
6	172

26. Uma grife de moda jovem fez o levantamento, ao longo de um mês, da quantidade de camisetas que vendeu.

Cor da camiseta	Quantidade vendida
branca	4.200
preta	3.600
azul	1.200
vermelha	1.800
rosa	600
amarela	600

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Quantas camisetas brancas e pretas foram vendidas ao todo?

c) Que porcentagem do total de camisetas vendidas pela grife representa a venda de camisetas pretas?

d) Se uma das camisetas vendidas é selecionada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela seja amarela?

Ver resolução no Guia do professor.

Fonte: De Leonardo (2013, p. 46)

Notemos que para a construção de uma solução para a primeira situação, questão 25, os alunos devem prestar atenção nos pressupostos apresentados no início da seção, bem como na discussão fornecida na categoria de exercícios resolvidos. Desse modo, mostramos a seguir, alguns elementos praxeológicos para comportar a tarefa da referida questão.

$T_{7.1}$:

- ✓ τ_{CTFR}: Construir a tabela de frequência relativa:
- ✓ τ_{AFR}: Analisar se, a partir da quantidade de lançamentos, podemos considerar essa frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face do dado;
- ✓ θ_{10}: Definição de frequência relativa e probabilidade;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

Já em $T_{7.2}$, questão 26, a tarefa envolve uma situação que difere da anterior em termos de gênero, conforme Chevallard (1999). Enquanto em $T_{7.1}$ os gêneros utilizados são "construir" e "analisar", em $T_{7.2}$ o tipo de tarefa incorpora verbos como "construir" e "calcular", aspecto que demanda uma maneira de fazer distinta. Observemos a indicação da técnica a seguir.

$T_{7.2}$:

- ✓ τ_{CTFR}: Construir a tabela de frequência relativa;
- ✓ τ_{ES}: Efetuar a soma para calcular a quantidade de camisetas vendidas;
- ✓ τ_{ATFR}: Analisar a tabela e verificar o percentual que representa a quantidade de camisetas vendidas;
- ✓ τ_{PPPC}: Aplica**r** a fórmula do primeiro princípio de probabilidade clássica para calcular;
- ✓ θ_{10}: Definição de frequência relativa e probabilidade;
- ✓ θ_3: Definição de probabilidade clássica;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

De modo geral, compreendemos que, com base no número de questões, as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) presentes não estimulam o processo de ensino e aprendizagem desse conceito no Ensino Médio. Além disso, assim como na análise do LD_1, as tarefas são do tipo rotineiras, isto é, seguem um repertório meramente tecnicista segundo Gascón (2003), o que desfavorece o professor no processo de proposição de modelos de situações investigativas, nos quais o estudante é incentivado a trabalhar com objetos matemáticos por intermédio de uma abordagem ativa. Assim, de acordo com o que foi observado no LD_2, as organizações recaem sobre o modelo denominado por Chevallard (2009; 2012) de monumentalista.

4.3. Livro Didático (LD_3): *Conexões – Matemática e suas Tecnologias (2021)*

Assim como enfatizamos na apresentação das obras didáticas, a coleção de Livros didáticos referente ao PNLD 2021 é composta por 6 volumes, cada um destinado a objetos de ensino específicos. As obras didáticas de Fábio Martins de Leonardo publicadas em 2020 e aprovadas no PNLD 2021, são dividas da seguinte forma: 1º volume: Grandezas, álgebra e algoritmos; 2° volume: Funções e aplicações; 3º volume: Estatística e probabilidade; 4° volume: Trigonometria; 5° volume: Geometria plana e espacial; 6º volume: Matrizes e geometria analítica.

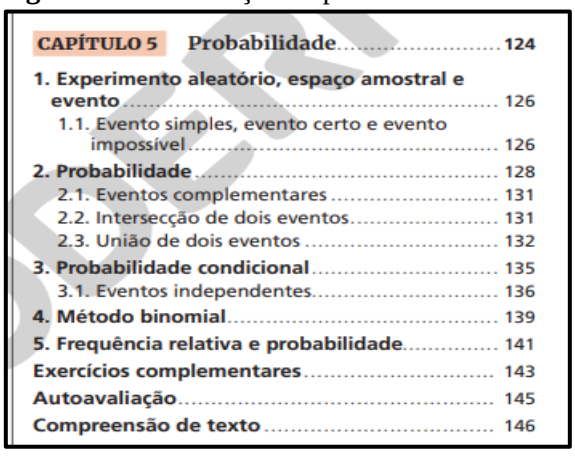
Considerando a nossa linha de interesse, focamos na análise da obra didática volume 3, direcionada ao trabalho com a estatística e a probabilidade. Nessa obra, buscamos investigar as Organizações Praxeológicas (OP) para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.

Ao adentrar no LD_3, verificamos que o material didático é composto por 5 capítulos. Comparando o número de capítulos com o LD_1 e o LD_2, observa-se que o LD_3 possui 6 capítulos a menos que o LD_1 e 3 capítulos a menos que o LD_2.

No LD_3, os objetos de ensino são distribuídos por capítulo da seguinte forma: 1º Capítulo: Organização e apresentação de dados; 2º Capítulo: Análise de dados; 3º Capítulo: Medidas estatísticas; 4º Capítulo: Análise combinatória; 5º Capítulo: Probabilidade.

Nota-se que no LD_3, a probabilidade localiza-se no último capítulo. Assim como nas obras didáticas analisadas anteriormente, no LD_3 o conceito é divido em seções, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 21: Localização da probabilidade no LD_3


CAPÍTULO 5 Probabilidade 124
1. Experimento aleatório, espaço amostral e evento 126
1.1. Evento simples, evento certo e evento impossível 126
2. Probabilidade 128
2.1. Eventos complementares 131
2.2. Intersecção de dois eventos 131
2.3. União de dois eventos 132
3. Probabilidade condicional 135
3.1. Eventos independentes 136
4. Método binomial 139
5. Frequência relativa e probabilidade 141
Exercícios complementares 143
Autoavaliação 145
Compreensão de texto 146

Fonte: De Leonardo (2020, p. 13)

Ao todo, o LD_3 possui um total de 160 páginas, das quais 23 são direcionadas ao trabalho coma probabilidade. Percentualmente, destaca-se que cerca de 14,3% da obra é dedicada a abordagem da probabilidade no Ensino Médio. Observa-se que, em comparação com o LD_1, o número de páginas para o estudo da probabilidade são iguais. Entretanto, diferente do LD_1,

nessa obra didática, o autor indica no sumário os conteúdos que são abordados na subseção de cada seção.

Inicialmente, é possível observar algumas transformações realizadas pela *noosfera* nesta obra em comparação com as obras didáticas analisadas anteriormente. Um exemplo disso está na distribuição dos conteúdos por seção. No LD_3, as seções que antes eram organizadas separadamente no LD_1 e LD_2 foram reunidas em uma única obra didática. Ou seja, no LD_3, o conteúdo de frequência relativa e probabilidade, que antes era discutida de forma particular no LD_2, agora passa a ser discutida na 5ª seção, juntando-se as demais seções previamente identificadas no LD_1.

Feita essas observações, o próximo passo foi identificar as categorias de atividades presentes na obra para o trabalho com a probabilidade. Neste cenário, constatamos que a obra didática é composta por 5 categorias de exercícios, designadas: **Exercícios Resolvidos, Pensamento Computacional, Exercícios Propostos, Exercícios complementares e autoavaliação**.

É importante destacar que a categoria de **Pensamento computacional** aparece apenas uma vez no capítulo, com características de uma situação resolvida. Ademais, os **exercícios complementares e de autoavaliação** seguem o padrão dos materiais didáticos analisados anteriormente, sendo exibidos ao final do capítulo. Com base nessas identificações, a etapa seguinte foi realizar a contagem da quantidade de questões presentes no capítulo e apresentá-las por categoria de exercício, conforme quadro a seguir.

Quadro 17: Distribuição das situações por categoria de exercício

Categoria	**Quantidade**
Exercícios resolvidos	13
Pensamento computacional	1
Exercícios propostos	46
Exercícios complementares	22
Autoavaliação	10
Total	**92**

Fonte: Produção nossa

Assim como fizemos no LD_1, para facilitar o agrupamento das questões do LD_3 em tipos de tarefas, filtramos as questões por conteúdo e calculamos o percentual (%) de representatividade das situações por conteúdo, conforme ilustrado no quadro abaixo.

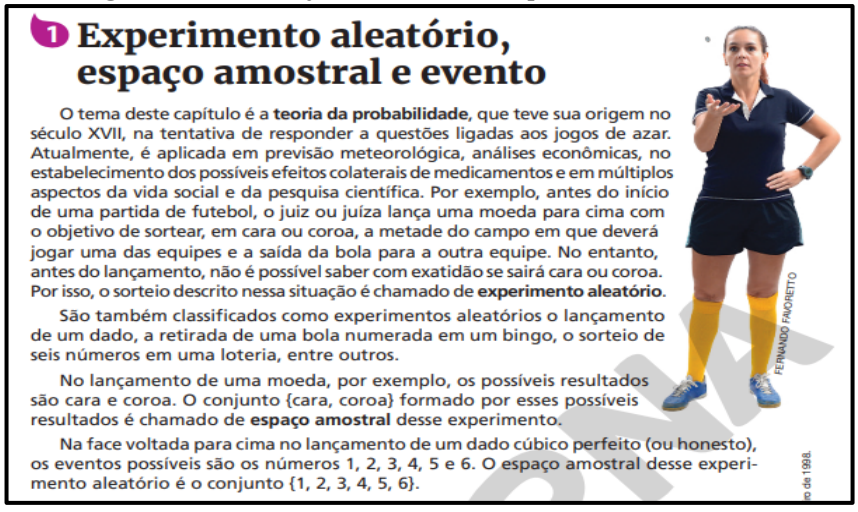
Quadro 18: Agrupamento das situações por conteúdo

Conteúdos	Quantidade	Percentual (%)
Experimento aleatório, espaço amostral e evento	14	15, 21%
Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos	48	52, 17%
Probabilidade condicional e eventos independentes	17	18, 47%
Método binomial	8	8, 70%
Frequência relativa	5	5, 43%
Total	**92**	**100%**

Fonte: Produção nossa

Observa-se que a maior quantidade de questões, assim como no LD_1, concentra-se no segundo conjunto de conteúdos. Na organização do LD_3, o autor utiliza a mesma contextualização envolvendo a história da probabilidade e a moeda como um artefato para cumprir algumas regras relacionadas à partida de futebol. Assim, o primeiro momento didático (Encontro com a OM) é gerenciado de modo semelhante ao que observamos no LD_1. Observe na figura a seguir.

Figura 22: Introdução ao conceito de probabilidade no LD_3



1 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

O tema deste capítulo é a **teoria da probabilidade**, que teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar. Atualmente, é aplicada em previsão meteorológica, análises econômicas, no estabelecimento dos possíveis efeitos colaterais de medicamentos e em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica. Por exemplo, antes do início de uma partida de futebol, o juiz ou juíza lança uma moeda para cima com o objetivo de sortear, em cara ou coroa, a metade do campo em que deverá jogar uma das equipes e a saída da bola para a outra equipe. No entanto, antes do lançamento, não é possível saber com exatidão se sairá cara ou coroa. Por isso, o sorteio descrito nessa situação é chamado de **experimento aleatório**.

São também classificados como experimentos aleatórios o lançamento de um dado, a retirada de uma bola numerada em um bingo, o sorteio de seis números em uma loteria, entre outros.

No lançamento de uma moeda, por exemplo, os possíveis resultados são cara e coroa. O conjunto {cara, coroa} formado por esses possíveis resultados é chamado de **espaço amostral** desse experimento.

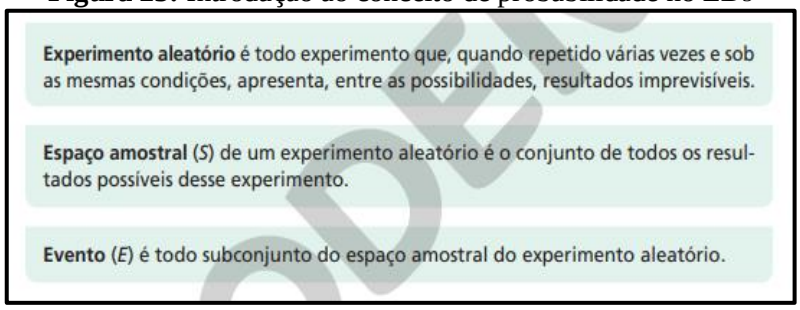
Na face voltada para cima no lançamento de um dado cúbico perfeito (ou honesto), os eventos possíveis são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O espaço amostral desse experimento aleatório é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

FERNANDO FAVORETTO

Fonte: De Leonardo (2020, p. 126)

Após essa abertura do conteúdo que indica exemplos teóricos, do surgimento da teoria da probabilidade, e situações contextualizadas que envolvem as noções de elementos básicos da probabilidade como a ideia de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos. Em seguida, o autor do LD3 apresenta as definições das noções básicas da probabilidade, na mesma sequência em que foram apresentadas no LD1 do PNLD 2015, conforme mostramos na figura a seguir.

Figura 23: Introdução ao conceito de probabilidade no LD3



Fonte: De Leonardo (2020, p. 126)

Após essa abordagem sobre as noções básicas da probabilidade, são exibidos alguns exemplos para que os alunos tenham a oportunidade de visualizar o trabalho com essas noções de modo prático, como enfatizado a seguir:

> a) No lançamento de um dado, um possível evento é: "o número na face voltada para cima é par". Nesse caso, o espaço amostral é S 5 {1, 2, 3, 4, 5, 6}, e o evento é E 5 {2, 4, 6}. O número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por n(S) 6 e n(E) 53. b) Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: "a bola retirada contém um número primo menor que 20". O espaço amostral desse experimento é S = {1, 2, ... , 50}, e o evento é E = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}. O número de elementos do conjunto S é n(S) = 50 e o do conjunto E é n(E) = 8. c) No sorteio de uma carta de um baralho de 52 cartas, um possível evento é: "a carta sorteada é de copas e com figura". O espaço amostral desse experimento é o conjunto S = {ás de copas, 2 de copas, ..., rei de copas, ás de ouros, 2 de ouros, ..., rei de ouros, ás de espadas, ..., rei de espadas, ás de paus, ..., rei de paus}. O evento é o conjunto E = {valete de copas, dama de copas, rei de copas}. Nesse experimento, n(S) = 52 e n(E) = 3 (De Leonardo, 2020, p. 126).

De acordo com o autor do LD3, esses exemplos e os exercícios resolvidos "propiciam a aplicação e ampliação dos conceitos" (De Leonardo, 2020, p. 11). Nesses exemplos acontece o segundo momento didático (exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica). Na sequência, após essa discussão, são apresentadas definições relacionadas a classificação de eventos como simples, certo e impossível. Para essa distinção entre a classificação dos eventos, o autor do LD3 utiliza as mesmas explicações diagnosticadas no LD1. Vejamos a seguir:

> Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado evento simples ou evento elementar. Se um evento coincidir com o espaço amostral, será chamado de evento certo. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número natural menor que 7" é um evento certo. Se um evento for o conjunto vazio, será chamado de

> evento impossível. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número maior que 6" é um evento impossível (De Leonardo, 2020, p. 126).

Após essa discussão em torno das noções de experimento aleatório, espaço amostral e eventos, é exibida a categoria de exercícios resolvidos. No âmbito do estudo desses conceitos, essa categoria é composta pela mesma quantidade de situações identificadas no LD_1. Já na categoria de exercícios propostos, notamos que surge uma nova situação que abordaremos mais à frente.

Além disso, assim como observado no LD_1 e no LD_2, no LD_3 o autor não apresenta possíveis técnicas para o cumprimento das situações presentes nas categorias de exercícios (proposto, complementares e de autoavaliação). Desse modo, a seguir, realizamos o agrupamento das situações em tipos e subtipos de tarefas e, em seguida, indicamos possíveis técnicas para o cumprimento das questões agrupadas.

Quadro 19: Tipos e subtipos de Tarefa referentes aos conteúdos experimento aleatório, espaço amostral e evento no LD_3

Tipo de tarefa	**Subtipo de tarefa**	**Quantidade**
T_8: Identificar e analisar classificar o espaço amostral e eventos específicos;	$T_{8.1}$: Identificar o número de elementos e eventos de um experimento aleatório;	5
	$T_{8.2}$: Identificar a quantidade de elementos do espaço amostral e analisar o grau de probabilidade para ocorrência de eventos específicos;	2
	$T_{8.3}$: Identificar a quantidade de elementos do espaço amostral e eventos específicos em experimentos simultâneos;	3
T_9: Calcular o número de elementos do espaço amostral;	-	3
T_{10}: Elaborar uma situação para o cálculo do número de elementos do espaço amostral;	-	1
Total	-	**14**

Fonte: produção nossa

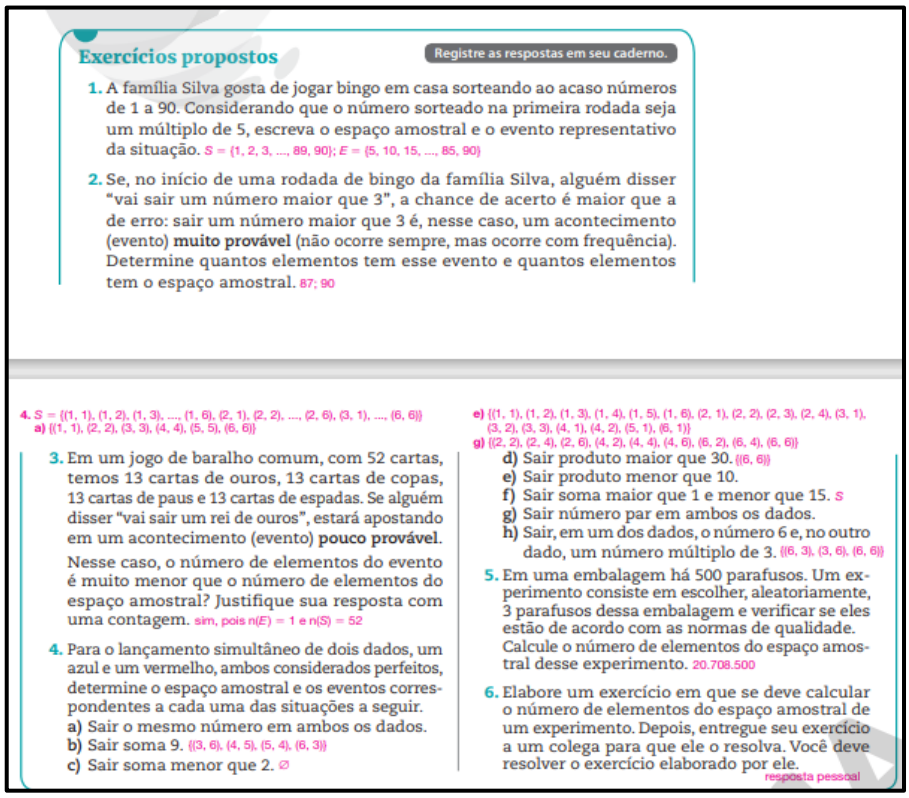
Diante da caracterização das situações em tipos e subtipos de tarefas expressadas no quadro anterior, evidencia-se que as questões disponíveis no LD_3 estão em consonância com as praxeologias observadas no LD_1. Em outras palavras, os elementos praxeológicos dos tipos de tarefas T_8 e T_9 presentes no LD_3 são refletidos nos tipos de tarefas T_1 e T_2 do LD_1. Entretanto,

no LD_3 surge um novo tipo de tarefa denotado por T_{10}, que exige a elaboração de uma situação envolvendo o cálculo do número de elementos do espaço amostral.

Do nosso ponto de vista, a situação referente a T_{10} pode ser construída de diversas maneiras, seja utilizando o princípio da contagem do número de elementos ou por intermédio de conhecimentos combinatórios. Por essa razão, optamos por configurar a situação como um novo tipo de tarefa e não como um subtipo de T_9.

Assim, a seguir, apresentamos um recorte do LD_3, composto por algumas questões que se enquadram nos tipos e subtipos de tarefas especificados no quadro anterior.

Figura 24: Situações referentes a $T_{8.1}$, $T_{8.2}$, $T_{8.3}$ e T_9



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. A família Silva gosta de jogar bingo em casa sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na primeira rodada seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação. $S = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$; $E = \{5, 10, 15, ..., 85, 90\}$

2. Se, no início de uma rodada de bingo da família Silva, alguém disser "vai sair um número maior que 3", a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento (evento) **muito provável** (não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e quantos elementos tem o espaço amostral. 87; 90

4. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)\}$
a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

3. Em um jogo de baralho comum, com 52 cartas, temos 13 cartas de ouros, 13 cartas de copas, 13 cartas de paus e 13 cartas de espadas. Se alguém disser "vai sair um rei de ouros", estará apostando em um acontecimento (evento) **pouco provável**. Nesse caso, o número de elementos do evento é muito menor que o número de elementos do espaço amostral? Justifique sua resposta com uma contagem. sim, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$

4. Para o lançamento simultâneo de dois dados, um azul e um vermelho, ambos considerados perfeitos, determine o espaço amostral e os eventos correspondentes a cada uma das situações a seguir.
a) Sair o mesmo número em ambos os dados.
b) Sair soma 9. $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
c) Sair soma menor que 2. $\varnothing$

e) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$
g) $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
d) Sair produto maior que 30. $\{(6, 6)\}$
e) Sair produto menor que 10.
f) Sair soma maior que 1 e menor que 15. S
g) Sair número par em ambos os dados.
h) Sair, em um dos dados, o número 6 e, no outro dado, um número múltiplo de 3. $\{(6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$

5. Em uma embalagem há 500 parafusos. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 3 parafusos dessa embalagem e verificar se eles estão de acordo com as normas de qualidade. Calcule o número de elementos do espaço amostral desse experimento. 20.708.500

6. Elabore um exercício em que se deve calcular o número de elementos do espaço amostral de um experimento. Depois, entregue seu exercício a um colega para que ele o resolva. Você deve resolver o exercício elaborado por ele. resposta pessoal

Fonte: De Leonardo (2020, p. 127-128)

Percebe-se que as questões 1, 2, 3 e 4, agrupadas em T_8, e a questão 5, agrupada em T_9, foram examinadas no LD_1. Vale ressaltar que as questões exibidas na figura anterior seguem a sequência de apresentação e o mesmo padrão enunciativo das questões do LD_1. As únicas alterações referem-se a inserção da questão 6, denominada de T_{10}, e à retirada da figura que ilustra o globo de um bingo, presente na questão 1 do LD_1.

Assim, como T_8 e T_9 foram cumpridas em T_1 e T_2 no LD_1, a seguir apresentamos uma situação e um possível procedimento técnico para comportar apenas o novo tipo de tarefa, questão 6, designado de T_{10} no LD_3.

Quadro 20: Situação elaborada referente a T_{10}

T_{10} – Uma fábrica de acessórios produz bonés disponíveis em três cores distintas (vermelho, rosa e amarelo). Além do mais, oferece duas opções de embalagem (sacola e caixa). Para facilitar a compra, o cliente pode escolher duas formas de realizar o pagamento (Dinheiro físico ou pix). Suponhamos que um cliente deseja fazer um pedido, quantas opções de compra ele tem, incluindo a cor do boné, embalagem e forma de pagamento?

Fonte: Produção nossa

A seguir, indicamos um possível procedimento técnico para executar a tarefa proposta em T_{10}.

T_{10}:

- ✓ τ_{DCCF}: Identificar e descrever a quantidade de casos favoráveis;
- ✓ τ_{CPNEA}: Calcular o produto entre o número de itens para identificar o número de elementos do espaço amostral;

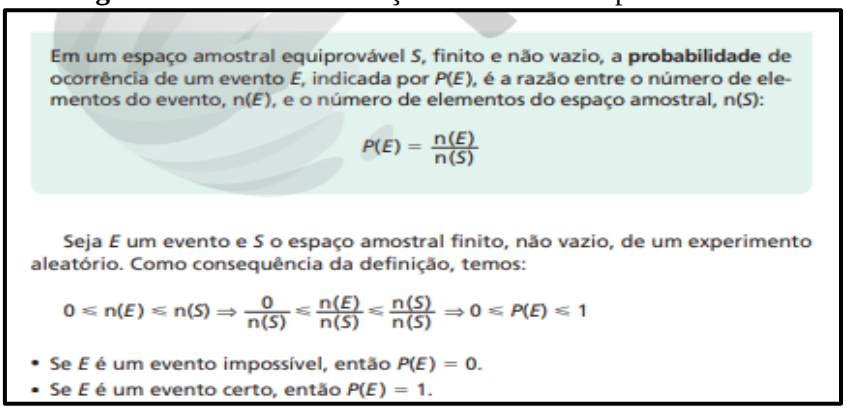
Observe que a situação está de acordo com as questões presentes nas coleções de obras didáticas analisadas, sem uma maior problematização ou complexidade na abordagem da noção de probabilidade estudada. Isso porque, as obras didáticas não dispõem de Organizações Didáticas (OD) que possam ir além do viés mecânico. Nas tarefas encontradas até aqui, o método de abordagem monumentalista é predominante, pois as situações não instigam o estudo dos conceitos probabilísticas em situações reais ou investigativas.

De modo semelhante, no âmbito dos conteúdos de **Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos,** a obra didática segue as mesmas Organizações Praxeológicas (OP) identificadas no LD_1. Vejamos a seguir:

> Suponha que um casal queira ter dois filhos. O primeiro filho poderá ser do sexo masculino (M) ou do sexo feminino (F). O segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Sabendo que a chance de nascer um filho do sexo masculino é igual à chance de nascer um filho do sexo feminino, independentemente do sexo do filho já existente, qual é a chance desse casal ter os dois filhos do sexo masculino (M, M)? Podemos responder à questão determinando o espaço amostral S e o evento E (dois filhos do sexo masculino). • S = {(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)} • E = {(M, M)} Note que n(E) 1 e n(S) 4. Dizemos que a chance de nascerem dois filhos do sexo masculino é de 1 para 4, ou seja, ¼. Nessa situação, consideramos que, para cada evento simples, existe a mesma chance de ocorrência. Quando adotamos esse critério em um espaço amostral finito, esse espaço é denominado espaço amostral equiprovável (De Leonardo, 2020, p. 128).

Assim, enfatiza-se que o primeiro e o segundo momentos didáticos acontecem de forma idêntica nas obras didáticas denominadas de LD_1 e LD_3. Ademais, o quinto momento didático (institucionalização) do objeto de ensino probabilidade é mobilizado da mesma maneira observada no LD_1. Essa institucionalização está presente no LD_3, conforme figura a seguir.

Figura 25: Institucionalização do conceito de probabilidade



Em um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento E, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, $n(E)$, e o número de elementos do espaço amostral, $n(S)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório. Como consequência da definição, temos:

$$0 \leqslant n(E) \leqslant n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leqslant \frac{n(E)}{n(S)} \leqslant \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

- Se E é um evento impossível, então $P(E) = 0$.
- Se E é um evento certo, então $P(E) = 1$.

Fonte: De Leonardo (2020, p. 128)

Após a formalização do objeto de ensino probabilidade, a sequência de ensino segue com as categorias de exercícios resolvidos e pensamento computacional. A categoria de pensamento computacional está disponível no LD3 como uma atividade resolvida envolvendo o trabalho com a probabilidade através da permutação de elementos e cálculo de probabilidades.

É importante ressaltar que a questão enquadrada nessa categoria não configura-se como uma nova situação, pois no LD1 a mesma questão encontra-se presente na categoria de exercícios resolvidos. Assim, pode-se levantar a hipótese de que no LD3 o autor faz essa abordagem de modo particular, no intuito de atender às exigências da BNCC, que salienta a importância do uso das Tecnologias Digitais da Informação e comunicação (TDICs) no processo de ensino e aprendizagem.

Após essa apresentação das definições e atividades resolvidas, apresentam-se as atividades propostas, que proporcionam os mesmos enunciados e mobilização de conhecimentos probabilísticos subsidiados nas tarefas identificadas no LD1.

A seguir, exibimos o agrupamento das situações propostas sobre os conteúdos do segmento **Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos** e, em seguida, descrevemos uma possível técnica para novos tipos ou subtipos de tarefas emergentes.

Quadro 21: Tipos e subtipos de Tarefas referentes aos conteúdos Probabilidade, união, intersecção, complementar e eventos mutuamente exclusivos no LD3

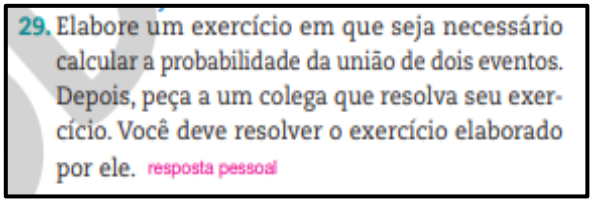
Tipo de tarefa	Subtipos de tarefas	Quantidade
T11: Determinar a probabilidade a priori para ocorrência de eventos específicos em experimentos aleatórios;	T11.1: Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos específicos por meio da identificação e descrição dos elementos do espaço amostral;	9

	$T_{11.2}$: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos específicos com o espaço amostral associado à combinações simples;	12
	$T_{11.3}$: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos específicos com o espaço amostral associado à permutações;	3
	$T_{11.4}$: Desenhar o diagrama para distribuir os elementos do espaço amostral e calcular a probabilidade para ocorrência de eventos específicos;	1
	$T_{11.5}$: Calcular a probabilidade a priori para ocorrência de eventos do tipo A ou B com a intersecção maior que zero;	14
	$T_{11.6}$: Determinar a probabilidade a priori para ocorrência de eventos complementares;	5
	$T_{11.7}$: Determinar a probabilidade a priori para ocorrência de eventos mutuamente exclusivos;	3
T_{12}: Elaborar uma situação envolvendo a união de dois eventos;	-	1
Total	-	**48**

Fonte: Produção nossa

É importante destacar que as propriedades para o cumprimento dos subtipos de tarefas referentes a T_{11} no LD_3 são exibidas do mesmo modelo utilizado no LD_1. Além disso, como as questões são as mesmas, os subtipos de tarefas relacionados ao tipo de tarefa T_{11} foram executados em T_3, no LD_1. Entretanto, a seguir, apresentamos a situação e uma possível técnica referente ao tipo de tarefa T_{12}, que surge como um novo tipo de tarefa no LD_3.

Figura 26: Situação referente ao tipo de tarefa T_{12}


29. Elabore um exercício em que seja necessário calcular a probabilidade da união de dois eventos. Depois, peça a um colega que resolva seu exercício. Você deve resolver o exercício elaborado por ele. resposta pessoal

Fonte: De Leonardo (2020, p. 135)

Para essa situação, elaboramos uma questão e indicamos uma possível técnica, observe a seguir.

Quadro 22: Situação elaborada referente a T_{12}

T_{12}: Um dado honesto de seis faces é lançado. Qual a probabilidade de sair um número primo ou maior que 3?

Fonte: Produção nossa

T_{12}:

- ✓ τ_{DCCF}: Descrever a quantidade de casos favoráveis para ocorrência de cada evento;
- ✓ τ_{UE}: Aplicar a fórmula da união de eventos e calcular a probabilidade;
- ✓ θ_5: União de eventos;
- ✓ Θ_3: Teoria dos conjuntos;

Apesar da importância da elaboração de atividades, nossa hipótese é de que as questões do LD_3 do subtipo $T_{11.5}$ servirão como referência para o aluno no processo de construção da sua situação, isso porque o material didático não estimula a construção de questões problematizadoras, resultando em situações prontas e técnicas rotineiras.

Já no conteúdo relacionado a **Probabilidade condicional e eventos independentes**, a apresentação do conteúdo está estruturado na sequência: Situação contextualizada → Definição de probabilidade condicional → Exercícios resolvidos → Situação contextualizada → Definição de eventos independentes → Exemplo → Exercício resolvido → Exercícios propostos sobre a probabilidade condicional e eventos independentes.

A situação contextualizada utilizada para exemplificar o conceito de probabilidade condicional e dada pela seguinte questão:

> Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence; se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Dois amigos decidiram jogar. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar, se não obteve o número 3 no primeiro lançamento? (De Leonardo, 2020, p. 135).

O segundo momento didático (exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica) nas duas obras didáticas acontecem por meio da mesma situação. Ainda assim, de acordo com o que observamos no LD_3, o quinto momento didático (institucionalização) é subsidiado da mesma maneira, conforme expressão matemática a seguir:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{P(B)}, \text{com } P(B) \neq 0 \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A|B)$$

Assim como no LD_1, após esse momento de formalização do conceito e exibição de exercícios resolvidos sobre a probabilidade condicional, o autor do LD_3 apresenta uma outra situação envolvendo o lançamento de um dado e uma moeda para introduzir o conceito de eventos independentes. Em seguida, ele indica as expressões matemáticas para o trabalho com eventos independentes e dependentes:

- Eventos independentes: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$;
- Eventos dependentes: $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$;

A seguir, apresentamos as situações presentes no capítulo para a abordagem da probabilidade condicional e eventos independentes agrupadas em tipos de tarefas.

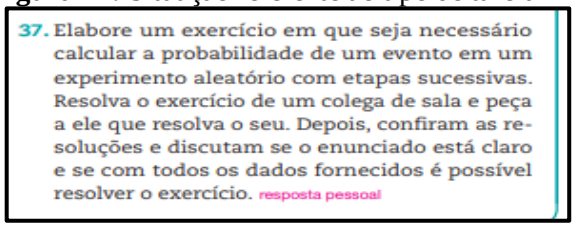
Quadro 23: Tipos de Tarefa referentes aos conteúdos Probabilidade condicional e eventos independentes no LD_3

Tipo de tarefa	**Quantidade**
T_{13}: Calcular a probabilidade condicional do evento A, sabendo que B ocorreu;	9
T_{14}: Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos independentes;	6
T_{15}: Elaborar uma situação para o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento específico em experimentos sucessivos;	1
Total	**16**

Fonte: Produção nossa

Observa-se que os tipos de tarefas T_{13} e T_{14} foram cumpridos em T_4 e T_5 no LD_1. Comparado ao LD_1, no LD_3 há duas questões a mais, na qual uma delas configura-se como um novo tipo de tarefa. Desse modo, a seguir, apresentamos a situação, em seguida, apontamos um possível procedimento técnico para comportar a situação proposta relacionada ao novo tipo de tarefa T_{15}.

Figura 27: Situação referente ao tipo de tarefa T_{15}


37. Elabore um exercício em que seja necessário calcular a probabilidade de um evento em um experimento aleatório com etapas sucessivas. Resolva o exercício de um colega de sala e peça a ele que resolva o seu. Depois, confiram as resoluções e discutam se o enunciado está claro e se com todos os dados fornecidos é possível resolver o exercício. resposta pessoal

Fonte: De Leonardo (2020, p. 138)

Embora o contexto da situação exija a troca de atividade com um colega, a seguir, vamos propor um problema nessa perspectiva e resolvê-lo.

Quadro 24: Situação elaborada referente a T_{15}

T_{15} – Uma sacola contém 4 fichas azuis e 6 fichas amarelas. Um experimento consiste em retirar duas fichas consecutivamente. Qual é a probabilidade de que ambas as fichas retiradas sejam da mesma cor?

Fonte: Produção nossa

Um procedimento para esse tipo de tarefa vislumbra-se um caminhar técnico descrito da seguinte forma:

T_{15}:

- ✓ τ_{DSEA}: Descrever e somar a quantidade de elementos do espaço amostral;
- ✓ τ_{PC}: Aplicar a fórmula condicional;
- ✓ τ_{SP}: Somar as probabilidades;
- ✓ θ_7: Definição de probabilidade condicional;
- ✓ Θ_1: Teoria da probabilidade;

É relevante destacar que esse modelo de situações presentes no LD_3, que consiste na elaboração de situações, pode proporcionar ao estudante um meio de sair desse repertório de questões padronizadas, abrindo espaço para um horizonte de atividades problematizadoras, questões abertas. Isso viabiliza, segundo Chevallard (2009), que o aluno troque o paradigma do conhecimento provisório por um paradigma investigativo, de questionamento do mundo. No entanto, para ocorrer essa substituição deve haver a reconstrução ou construção de novas praxeologias didáticas diferente dessas que estão sendo mobilizadas nas obras didáticas analisadas.

No conteúdo sobre o **Método Binomial**, observa-se que as Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD) seguem o mesmo repertório de apresentação do LD_1. Desse modo, é notório que as praxeologias entre as obras didáticas LD_1 e LD_3 permanecem sem mudanças. Apesar da homologação da BNCC, as organizações presentes no LD_3, pertencentes ao PNLD 2021 não passaram por transformações. A Organização Praxeológica (OP) no LD_3, para este conteúdo, é exibida na sequência: Situação contextualizada → Definição da probabilidade binomial → Exemplo →Exercício resolvido →Exercício proposto.

A situação de contextualização do conceito é a mesma apresentada no LD_1, na qual trata-se de um torneio de tênis de mesa. Assim, o momento didático (exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica relativa) é abordado com base no mesmo problema. Ademais, o quinto momento didático (institucionalização) ocorre na mesma sequência do LD_1, sem alterações no processo de apresentação desses momentos de estudo.

Ao adentrar nas questões do LD_3, relacionadas ao conceito da probabilidade binomial, observamos que as questões também são as mesmas do LD_1, ou seja, possuem os mesmos enunciados e tarefas. Além disso, seguem a mesma sequência estrutural observada no LD_1. Desse modo, assim como no LD_1, os tipos e subtipos de tarefas encontrados no LD_3 para o trabalho com o método binomial foram os seguintes.

Quadro 25: Tipos e Subtipos de Tarefas referentes ao conteúdo Distribuição Binomial no LD_3

Tipo de tarefa	Subtipos de tarefas	Quantidade
T_{16}: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos específicos em experimentos aleatórios utilizando a Distribuição Binomial	$T_{16.1}$: Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos específicos por meio da distribuição e cálculo do coeficiente binomial;	6
	$T_{16.2}$: Calcular a probabilidade para ocorrência de eventos específicos utilizando a distribuição binomial e o complementar de eventos;	2
Total	-	8

Fonte: Produção nossa

Os subtipos tipos de tarefas agrupados no quadro anterior foram cumpridos em T_6 do LD_1. Desse modo, enfatizamos que no LD_3, não há novos tipos ou subtipos de tarefas para o trabalho com a probabilidade binomial. Sendo assim, considerando que o tipo de tarefa expressado no quadro anterior já foi cumprido no LD_1, não indicaremos possíveis técnicas para a sua execução.

Além disso, diferente do que observamos nos conjuntos de conteúdos anteriores do LD_3, não identificamos novas questões para a abordagem do conceito de probabilidade binomial. Assim, percebe-se que o LD_3, especificamente sobre esse conteúdo, segue à risca o que está prescrito no LD_1. Desse modo, a expressão "Resolver e elaborar problemas" das habilidades específicas EM13MAT311 e EM13MAT312 da BNCC, não é levada em consideração na abordagem desse conceito no LD_3.

Entretanto, de acordo com o atual documento normativo, essa mudança é fundamental, considerando que:

> a justificativa do uso na BNCC de "Resolver e Elaborar Problemas" em lugar de "Resolver Problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (Brasil, 2018, p. 536).

Assim, evidenciamos que no LD_3, relacionado ao PNLD 2021, no contexto do método binomial, não houve a incorporação de novas situações que envolve o uso da expressão "Resolver e elaborar problemas", mantendo-se o direcionamento do documento anterior "Resolver problemas".

Nessa perspectiva de resolver e elaborar problemas enfatizada na BNCC, compreendemos que, se bem orientados, os estudantes podem construir problemas envolvendo situações reais do seu cotidiano, se desfazendo do trabalho com a probabilidade no contexto de situações, em grande parte, desconexas de seu dia a dia. Não foi o que observamos nas obras didáticas do PNLD 2021, pois, como dissemos, na construção das atividades, buscamos fundamentar-nos nas OD presentes no material didático.

De maneira geral, no âmbito da Transposição Didática, enfatiza-se que, no processo de transição entre uma obra didática e outra não houve influência da *noosfera*. Isso é evidenciado porque o Saber a Ensinar probabilidade na micro instituição LD_3 mantém as mesmas características do LD_1, cuja base de orientações curriculares foi fundamentada por documentos como as OCNEM.

Do mesmo modo, no conteúdo relacionado ao conceito de **Frequência relativa**, o segundo momento didático (exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica relativa) é identificado com base na mesma situação presente no LD_2. Isso ratifica que para a abordagem do conceito de frequência relativa, o autor do LD_3 faz o uso da mesma situação contextual adotada no LD_2. Já o quinto momento didático (institucionalização) aparece implicitamente no contexto de resolução da situação inicial.

Além disso, a sequência de apresentação do conteúdo LD_3 segue a mesma estrutura do LD_2, obedecendo à seguinte ordem: Situação contextualizada → Exercícios resolvidos → Exercícios propostos. Ademais, no LD_3, as questões presentes nas categorias de exercícios relacionadas a esse conteúdo mantêm as mesmas características enunciativas e sequenciais identificadas no LD_2.

Ao analisar as situações presentes nas categorias de exercícios, observamos que os tipos de tarefas extraídos das questões possuem características idênticas aos elementos praxeológicos identificados no LD_1. Essa familiaridade entre os tipos de tarefas pode ser explicada pelo fato de que as estruturas das Organizações Matemáticas (OM) presentes nas obras didáticas compartilham o mesmo contexto. Assim, a seguir, apresentamos os tipos de tarefas extraídos das situações disponíveis sobre esse conteúdo.

Quadro 26: Tipos e subtipos de Tarefas referentes ao conteúdo Frequência Relativa e Probabilidade no LD_3

Tipo de tarefa	Subtipos de tarefas	Quantidade
T_{17}: Determinar a probabilidade para ocorrência de eventos por meio da frequência relativa	$T_{17.1}$: Construir uma tabela de frequência e analisar se a frequência relativa configura-se como probabilidade;	2
	$T_{17.2}$: Construir uma tabela de frequência e calcular probabilidades;	3
Total	**-**	**5**

Fonte: Produção nossa

Como não há novas questões, não foi possível identificar novos tipos de tarefas para o trabalho com a probabilidade sobre esse conteúdo. Consequentemente, como essas tarefas já foram cumpridas no LD_2 em T_7, não indicamos possíveis técnicas para a execução das situações propostas no LD_3 sobre frequência relativa.

Ao explorar o ambiente praxeológico nessas obras didáticas, com um olhar mais direcionado ao bloco Saber – Fazer, notamos que, mesmo após oito anos da elaboração dos materiais didáticos LD_1 e LD_2, as Organizações Praxeológicas (OP) identificadas no LD_3, construído após a homologação da BNCC, em 2020, seguem, de modo geral, o que foi abordado nas obras de 2013. Para o autor dos materiais didáticos, isso sugere que, apesar das mudanças instituídas pela noosfera, tomando a BNCC como base normativa que orienta o processo de formação básica do aluno, não houve influência para a construção ou modificação das praxeologias já existentes.

No LD_3, há o acréscimo de algumas situações que requerem do aluno a elaboração de atividades envolvendo os conceitos de probabilidade presentes em alguns conteúdos nessa análise. No entanto, o número de questões apresentadas dessa maneira é mínimo e não aparece em todas as seções. Assim, compreendemos que esse tipo de tarefa aparece em algumas seções apenas por ser uma exigência estabelecida pelo documento normativo. Além disso, como a obra didática não apresenta modelos de situações cotidianas, compreendemos que o aluno pode, simplesmente, elaborar uma situação adaptando as questões presentes no material didático reproduzindo, portanto, o método tecnicista.

Além disso, nas obras didáticas analisadas, constatamos que as tecnologias são apresentadas predominantemente através de propriedades e definições dos conceitos probabilísticos. Isto é, não há uma explicação dos motivos que levaram à elaboração das

técnicas, além das propriedades, aspecto que de acordo com Cavalcante (2018) torna as tecnologias suprimidas. Esse é mais um dos fatores que contribui para a percepção de que o ensino de probabilidade é abordado nos materiais didáticos LD_1, LD_2 e LD_3 por intermédio do método tecnicista. Essa questão torna-se ainda mais visível quando tentamos promover a identificação dos momentos didáticos nas obras didáticas analisadas, conforme ilustramos a seguir.

Quadro 27: Identificação dos momentos didáticos nas obras didáticas analisadas – LD_1, LD_2 e LD_3

Momento	Descrição	Localização nas obras didáticas
1º Momento	Primeiro encontro com uma OM	Situação de introdução ao conceito
2º Momento	Exploração de um tipo de tarefa T e elaboração de uma técnica τ	Situação de introdução do conceito e/ou exemplos;
3º Momento	Constituição do ambiente tecnológico – teórico	Fórmulas de aplicação dos conceitos
4º Momento	Trabalho da técnica τ	Exemplos e exercícios resolvidos
5º Momento	Institucionalização	Definição dos conceitos abordados
6° Momento	Avaliação da relação pessoal e institucional com o objeto de estudo	Atividades de verificação de aprendizagem propostas

Fonte: Produção nossa

Compreendemos que os momentos didáticos que aparecem com mais clareza no decorrer da análise são o primeiro, o segundo e o quinto. Os demais, surgem de forma discreta e incompleta nas obras didáticas. Por exemplo, o terceiro momento, além de mecânico, tivemos que forçar a aparição das teorias relativas a cada tecnologia, que são apresentadas unicamente por meio de fórmulas, sem uma maior justificativa para o desenvolvimento das possíveis técnicas.

Já no quarto momento, o trabalho da técnica, como não há uma justificativa plausível para o desenvolvimento dos procedimentos técnicos, seu trabalho se resume a visualização de aplicação de fórmulas em questões prontas, não havendo o trabalho para o aprimoramento ou melhoramento da técnica. E por fim, o sexto momento, ocorre de forma clara, no entanto de modo rotineiro, ou seja, o aluno observa o que foi feito nas questões resolvidas e replica nas situações propostas. Assim, podemos observar que esse modelo de estudo observado nas obras didáticas encontram-se centrados, de fato, no bloco Saber-Fazer, com ênfase no método abstrato e tecnicista da Matemática.

Sendo assim, a seguir, apresentamos algumas considerações observadas, de modo geral, nas obras didáticas analisadas e a elaboração de uma proposta didática como modelo alternativo para uso docente no Ensino Médio no trabalho com alguns conceitos de probabilidade.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo sobre o nosso problema de pesquisa e o objetivo geral, consideramos a necessidade de analisar todas as questões sobre a probabilidade como Saber a Ensinar presentes nas obras didáticas LD_1, LD_2 e LD_3. Exploradas as praxeologias nos capítulos e seções das obras didáticas de Fábio Martins de Leonardo, aprovadas no PNLD 2015 e PNLD 2021, encontramos um total de 182 atividades, uma quantidade que pode-se considerar significativa para a abordagem do objeto de ensino no Ensino Médio.

No que diz respeito à identificação dos tipos de tarefas, observamos que o LD_3, aprovado no PNLD 2021, apresenta uma maior representatividade numérica em termos de questões e tipos de tarefas, com um total de 92 questões agrupadas em 10 tipos de tarefas distintos. Em comparação, no LD_1, aprovado no PNLD 2015, identificamos 85 questões distribuídas em 7 tipos de tarefas. Por fim, no LD_2, também do PNLD 2015, concentram-se 5 questões agrupadas em 1 único tipo de tarefa.

Apesar da quantidade de tipos de tarefas encontrada nas obras didáticas, é importante destacar que elas possuem um mesmo objetivo. Ou seja, as questões disponíveis no LD_1 e LD_2 são as mesmas situações presentes no LD_3. Desse modo, além das tarefas presentes em cada obra didática seguirem o mesmo padrão de resolução, consequentemente, as questões são as mesmas. Contudo, pode-se perceber que o autor das obras didáticas faz ajustes minuciosos do material didático do PNLD 2015 para o PNLD de 2021, no intuito de deixar a nova coleção em conformidade com as demandas sociais estabelecidas pela *noosfera*. Entre eles, podemos destacar as situações que demandam a elaboração de problemas.

Ao longo do estudo das Organizações Praxeológicas (OP) identificadas na visita às obras, constatamos algumas características do modelo dominante presente nas obras didáticas para a formação básica dos alunos sobre a probabilidade no Ensino Médio. Essas características nos ajudaram a compreender o cenário rotineiro das questões propostas para o trabalho com a probabilidade, destacando a predominância de praxeologias dos tipos pontuais e locais incompletas, pois não há fundamentação tecnológica e teórica para compor, de fato, uma praxeologia local.

De acordo com o ambiente praxeológico identificado nas obras didáticas, observamos que o ensino de probabilidade baseia-se exclusivamente no bloco Saber-Fazer. Ou seja, não há vestígios explícitos do bloco tecnológico – teórico. Esse bloco, também denominado de Saber, nas obras analisadas aparece revestido por expressões matemáticas abstratas, sem cumprir o papel de justificar o porquê o cumprimento de determinados tipos de tarefas são executados de

tal maneira, ou seja, as abordagens relacionadas a esse bloco são fragilizadas. Nessa perspectiva, poderá haver negligências que comprometem o entendimento da técnica e sua utilização em outras atividades, sejam elas derivadas das obras didáticas ou vivências cotidianas.

Desse modo, no cumprimento de várias tarefas, é possível perceber que as técnicas cumprem também o papel das tecnologias. Essa evidência é percebida quando as fórmulas são os únicos meios de justificar a indicação ou desenvolvimento das técnicas. Essa afirmação é comprovada, especialmente, no trabalho com conhecimentos de análise combinatória, que não há uma explicação ou justificativa para seu uso. Nesse cenário, a maneira de fazer e a razão de fazer são mobilizadas por meio das fórmulas de combinação simples ou permutação de arranjos. Essa abordagem destaca que há uma disparidade entre o bloco Saber-Fazer e o bloco Saber, tornando as praxeologias frágeis.

Os contextos apresentados nas situações disponíveis nas obras didáticas evidenciam uma predominância de experimentos aleatórios fictícios, especificamente voltados para jogos de azar, com a principal finalidade de identificar o número de casos possíveis, favoráveis e calcular a probabilidade clássica. Nessa linha de abordagem dos conceitos probabilísticos, Gascón (2003) enfatiza que há uma espécie de banalização de situações cotidianas, com um foco excessivo em atividades de treinamento, nas quais as técnicas produzidas são todas algorítmicas, excluindo situações reais que demandam a construção de procedimentos técnicos heurísticos não rotineiros.

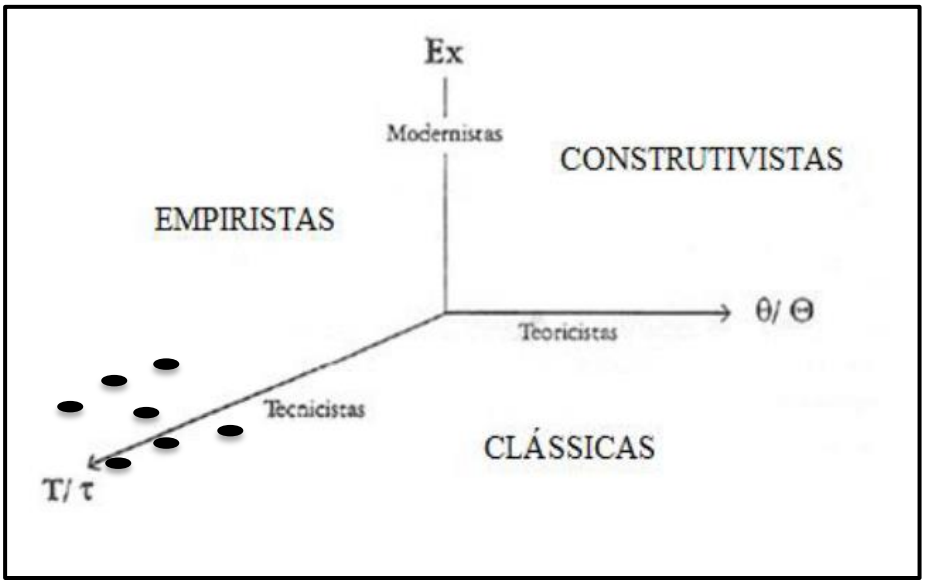
Essa abordagem tecnicista contraria o que é enfatizado na BNCC para o processo de formação básica do estudante no Ensino Médio. O documento normativo salienta que “no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio” (Brasil, 2018, p. 528). No entanto, essas orientações curriculares não são devidamente consideradas no bloco Saber-Fazer do LD3.

Além disso, é importante destacar que as questões disponíveis nas obras didáticas estão todas direcionadas a definição de probabilidade clássica, não sendo identificado vestígios das demais interpretações da probabilidade, cenário que restringe a amplitude da abordagem probabilística a uma única visão do conceito. É possível identificar questões relacionadas a frequência relativa e probabilidade, mas, além do número mínimo, as questões não estimulam o trabalho com a visão de probabilidade frequentista.

Como dissemos no decorrer da análise praxeológica, embora o material didático aprovado no PNLD 2021 seja elaborado com base as orientações curriculares da BNCC, não notamos influência significativa da *noosfera* no processo de construção das praxeologias de modo a envolver o cotidiano do aluno na obra didática de Fábio Martins de Leonardo, atualmente disponível em algumas escolas do estaduais do Ensino Médio. De acordo com Chevallard (2002), quando, ao longo do tempo, as praxeologias permanecem inalteradas, isso significa dizer que do ponto de vista do professor, pesquisador ou autor elas não envelheceram e, portanto, não precisam ser substituídas.

Em contra partida, o modelo rotineiro e mecânico que liga a probabilidade diretamente a situações de sorte ou azar observado nas questões analisadas, sem uma contextualização realista e problematização que coloque o aluno como sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento, evidencia que as praxeologias podem estar ultrapassadas e precisam ser substituídas ou reorganizadas. A partir desse cenário, utilizamos o Modelo Epistemológico de Organizações Didáticas proposto por Gascón (2003), para representar a localização da concentração das atividades presentes nas obras didáticas, conforme mostrado na figura a seguir.

Figura 28: Modelo Epistemológico de Organização Didática



Fonte: Gascón (2003, p, 24)

Os pontos inseridos na figura anterior indicam o modelo de concentração das Organizações Praxeológicas (OP) sobre a probabilidade identificadas nas obras didáticas. Desse ponto de vista tecnicista, todos os conhecimentos estudados podem ser ligeiramente esquecidos pelos alunos, logo após as avaliações realizadas nas instituições de ensino. Isso porque o Saber a Ensinar não se concretizou devidamente em Saber Aprendido. Em outras palavras, a

representação do objeto probabilidade nas obras didáticas não cria uma conexão com o mundo real no qual o estudante está integrado.

De modo geral, de acordo com as etapas de transformação da Transposição Didática, o objeto matemático, por possuir fragilidades praxeológicas, dificulta a efetividade na transição entre o Saber a Ensinar e Saber Aprendido, contexto em que o sabe é transformado em conhecimento pelo aluno.

Os conteúdos relativos à probabilidade nos livros didáticos encontram-se exclusivamente centrados no que Chevallard (2015) denomina como paradigma escolar. Nesse cenário, elementos relacionados a noções básicas e fórmulas de cálculo de probabilidade estão presentes nos materiais didáticos, permitindo que os estudantes os vejam, admirem, apreciem e utilizem para resolver as diversas atividades propostas. Contudo, os conceitos de probabilidade são apresentados de modo que os alunos não compreendam completamente seus significados, origens e para que servem. Em resumo, os objetos de ensino são tratados como monumentos, não havendo um estímulo sobre a razão de ser do objeto.

Nessa perspectiva de abordagem da probabilidade nas obras didáticas, o aluno pode se deparar com questionamentos, como os levantados por Chevallard (2015), tais como: Por que é que este conteúdo está presente nas obras didáticas? Qual é a sua utilidade? Para que serve o conceito de probabilidade clássica? Em quais situações cotidianas ele pode ser útil? Para esses tipos de questionamentos há um vazio didático que impossibilita a construção de respostas no modelo de pedagogia monumentalista, comprovadamente presente nos materiais didáticos analisados.

Essa nossa observação corrobora com os princípios da pedagogia monumentalista denominada por Chevallard, na qual o professor é o único dono do saber e o aluno é tratado como um sujeito passivo de aprendizagem. Esse processo de formação se limita ao uso exaustivo de expressões matemáticas, sem que os alunos compreendam a profundidade e importância dos conceitos probabilísticos estudados na escola para efetivo uso em seu dia a dia, recaindo sobre a desgastante e frágil pedagogia de aprendizagem tradicional.

É importante evidenciar que as instituições de ensino e os professores, ao escolherem os materiais didáticos ou desenvolverem práticas pedagógicas, precisam refletir sobre o excesso de conteúdos apresentados, essa não devendo ser a principal finalidade do currículo escolar. Embora os conteúdos possam ser mínimos, é indispensável que estejam exatamente vinculados à realidade social e cultural dos estudantes.

Como podemos formar cidadãos críticos, autônomos e reflexivos com boa capacidade de compreender os fenômenos aleatórios presentes em seus cotidianos e realizar possíveis

tomadas de decisões na vida real se a formação básica do estudante sobre a probabilidade ocorre por intermédio de uma abordagem tecnicista e experimentos aleatórios desconectados da realidade social e cultural? De modo geral, se o Saber a Ensinar não se transformar em conhecimento, os alunos não passarão de simples expectadores induzidos a assistir espetáculos ultrapassados.

Além disso, o processo de ensino e aprendizagem, não só da probabilidade, mas de qualquer outro objeto matemático, quando conduzido por intermédio do método tradicional, pode ser comparado a uma aprendizagem promovida de forma automatizada, como um objeto descartável que, ao longo do tempo, torna-se, ligeiramente, um conhecimento desprovido de utilidade.

Assim, por intermédio do bloco Saber-Fazer para o ensino de probabilidade que predomina as obras didáticas, enfatiza -se que o processo formativo nos moldes do paradigma atual não possuem respostas para questões do tipo: "O que será dos alunos se precisarem utilizar esses conhecimentos em seu cotidiano mais tarde?" Chevallard (2015, p. 179). Através das tarefas exploradas nos materiais didáticos fica subtendido que a formação matemática sobre a probabilidade é um processo de absorção do conhecimento com prazo de validade curto, muitas vezes funcionando apenas para demandas estabelecidas no âmbito escolar.

A partir do contexto encontrado nos livros didáticos, passamos a refletir sobre o papel da escola na escolha desses materiais. Reconhecendo o livro didático como um material de importante representatividade nas instituições de ensino e de fundamental relevância para o direcionamento das práticas docentes, surge alguns questionamentos, a saber? Como é realizada a escolha desses materiais? Quais critérios são levados em consideração? Quais agentes participam do processo de escolha? Por que tais materiais didáticos foram escolhidos? E mais, qual a importância desses materiais para o desenvolvimento das práticas docentes e aprendizagem dos alunos?

Para responder a esses questionamentos, necessitamos de um estudo mais profundo, que envolva a participação de outros agentes, tais como secretários(as) de educação, diretores(as) escolares, coordenadores (as) pedagógicos, professores (as) e até alunos(as). Nesse processo, além de indagar o professor sobre a escolha das obras, compreendemos que o estudo com docentes e alunos nos ajudará a identificar a influência da epistemologia dominante em torno da probabilidade em etapas da Transposição Didática relativas ao Saber Ensinado e Saber Aprendido. Através desses elementos, é possível obter respostas que podem esclarecer até que ponto a obra didática utilizada interfere na prática docente e aprendizagem do aluno.

Com o objetivo de superar o modelo de pedagogia monumentalista, a qual identificamos na visita aos materiais, Chevallard (2009; 2012; 2015) propõe um modelo de ensino denominado de 'Paradigma de Questionamento do Mundo'. Nessa pedagogia, para o estudo de um determinado objeto do saber O, é necessário que se estude O, com ou sem um mínimo auxílio de Y. O processo de ensino e aprendizagem, denotado por Chevallard de novo 'paradigma didático', envolve uma investigação conduzida por um grupo de pessoas X, abrindo um caminho de estudo e pesquisa sobre O. Esse novo paradigma é denominado de Organização Didática (OD), composta por dispositivos como Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) ou Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

Com base nas praxeologias encontradas na análise das obras didáticas, destacamos a necessidade de construir propostas didáticas que integrem atividades a esse meio do novo paradigma, mobilizando questões problematizadoras alinhadas à realidade do estudante. Esse conjunto de situações deve estimular os alunos a investigar uma determinada questão 'Q', estudar o objeto O (conceitos probabilísticos), elaborar, selecionar, aplicar e questionar técnicas, realizando o processo de validação dos procedimentos abordados, sejam esses procedimentos algorítmicos ou não.

A construção de uma proposta didática por intermédio do novo Paradigma de Questionamento do Mundo para o trabalho com a probabilidade no Ensino Médio que se distancie de questões prontas, com resoluções diretas e sem fundamentos especificamente controladas e dirigidas pelo professor, se configura como material reflexivo e alternativo dessa pesquisa para o trabalho docente com a probabilidade.

Para essa proposta, pensamos na construção da Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) como modelo alternativo, levando em consideração suas características condicionais que permitem direcionar o processo de estudo de um objeto matemático de modo específico, mais direcionado ao tema proposto. Nessa Organização Didática (OD), a questão de estudo é mais restrita e objetiva, assemelhando-se a uma situação contextualizada.

Contudo, o estudo de questões dessa natureza converge com o eixo de OD modernista, de Gascón (2003), no qual o sujeito é incentivado a resolver um problema mesmo quando ainda não se tem um conhecimento prévio sobre as tarefas e tipos de técnicas a serem mobilizadas. Desse modo, o aluno é direcionado a pesquisar e investigar de maneira ativa e autônoma sobre um determinado tema, no intuito de elaborar uma resposta coração para o problema proposto, subsidiando a construção do seu próprio conhecimento de forma autônoma e ativa.

5.1. Elaboração da proposta didática: Atividade de Estudo e Pesquisa – AEP

Com base no Paradigma de Questionamento do Mundo, proposto por Chevallard (2009; 2012; 2015) e no eixo modernista de Gascón (2003), apresentamos um modelo alternativo como proposta didática, composto por AEP para a abordagem da probabilidade no Ensino Médio. Nessa proposta, os alunos configuram-se como os agentes ativos no processo de condução do conhecimento e construção de sua própria aprendizagem.

É importante enfatizar que nessa pesquisa, o modelo alternativo não será validado, tarefa que ficará como demanda para trabalhos futuros. Assim, a seguir exibimos os modelos de AEP elaborados para o engajamento do conceito de probabilidade nessa pedagogia de investigação.

Quadro 28: AEP– Introduzindo o conceito de probabilidade clássica

PLANO DE ENSINO		
Disciplina: Matemática	**Turma:** Ensino Médio	**Conteúdo:** Probabilidade
COMPETÊNCIA(S) E HABILIDADE(S)		
Competência: (Competência específica 3): Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. **Habilidade:** (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.		
Tema da aula: Introdução ao conceito de probabilidade clássica;		
Bases conceituais: Experimento aleatório, espaço amostral, evento e a definição de probabilidade clássica;		
OBJETIVOS		
Objetivo geral: Introduzir o conceito de probabilidade clássica por meio de uma situação investigativa baseada em dados reais;		
OBJETIVOS ESPECÍFICOS		
1. Reconhecer o que é experimento aleatório, espaço amostral e eventos no contexto da situação proposta;		

2. Identificar e descrever a quantidade de casos possíveis e favoráveis para ocorrência do evento;
3. Desenvolver estratégias de encontrar uma expressão e/ou representação matemática para o cálculo da situação;

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O professor irá apresentar o contexto da situação problema e o questionamento a ser respondido, deixando os alunos refletirem sobre o problema. O intuito é que, inicialmente, os alunos utilizem seus conhecimentos prévios para começar o processo de investigação. De modo que for surgindo algumas dificuldades, o professor vai interagindo, mediando, levantando alguns questionamentos que tenha por finalidade guiar os alunos no processo de investigação. O essencial é que o processo seja desenvolvido de forma autônoma, e o professor só deve intervir quando necessário.

RECURSOS

Slides, pincel, papel, caneta, acesso à internet ou livros didáticos;

AVALIAÇÃO

A avaliação acontecerá de forma contínua, observando o engajamento dos alunos com a situação proposta, participando levantando hipóteses, questionamentos e possíveis soluções ou possíveis percursos a serem traçados para resolver o problema;

ATIVIDADE DE ESTUDO E PESQUISA (AEP)

As redes sociais são plataformas digitais que desempenham um importante papel na sociedade contemporânea, possibilitando a interação em tempo real e a comunicação entre pessoas de diferentes localidades, seja por meio de ligações, chamadas de vídeo ou envio de mensagens. Essas plataformas se tornaram o principal meio de entretenimento atingindo um público alvo de diversas faixa etária de idade, agindo tanto na esfera pessoal quanto profissional. Segundo o site do G1 em matéria publicada em 23/10/ 2024, cerca de 83% das crianças que usam internet no Brasil possuem contas em redes sociais. O estudo ainda revela que entre as plataformas mais populares no Brasil estão WhatsApp, Instagram, TikTok e YouTube. Sendo assim, havendo a possibilidade de, em uma determinada escola, estudarem alunos da zona rural e zona urbana, como identificar se a probabilidade de uso dessas redes sociais entre os alunos da zona rural e zona urbana dessa instituição de ensino são as mesmas?

QUESTÃO GERATRIZ (Q_0)
Q_0: Como desenvolver uma expressão e/ou representação que indique o resultado dessa situação?
QUESTÕES DERIVADAS
1. Qual estratégia inicial devemos utilizar para responder ao questionamento proposto? 2. Quantos alunos estudam nessa escola? 3. Quantos alunos são da zona rural? E quantos são da zona urbana? Com esses dados já é possível resolver o problema? Justifique! 4. A diferença no quantitativo de alunos de cada zona influência no resultado final? Por quê? 5. Quantos alunos utilizam as redes sociais? 6. Como organizar os dados coletados de modo a responder o problema? 7. Reflita e descreva uma expressão/fórmula para utilizar no cálculo do problema proposto. 8. Para facilitar a compreensão dos dados coletados, existe alguma forma de representá-los que você considera essencial? (Tabela, gráficos de barra, de coluna, de setor)

Fonte: Produção nossa

É importante destacar que o modelo alternativo elaborado surge como uma possibilidade para o trabalho com alguns conceitos de probabilidade no Ensino Médio por intermédio de uma situação real investigativa. Nesse modelo, destacamos elementos relacionados às noções fundamentais de introdução à definição de probabilidade clássica.

Nessa perspectiva, acreditamos que precisamos de um estudo mais profundo, no sentido de subsidiar uma formação com professores da educação básica, com a finalidade de analisar sua prática em sala de aula, além de apresentar e verificar o funcionamento desses modelos do tipo investigativo no processo de formação de professores e alunos.

Nesse processo de análise, que está diretamente relacionado à transição entre o Saber Ensinado e o Saber Aprendido, podemos levantar questões como: Outras obras didáticas selecionadas, tanto em edições anteriores do PNLD quanto no PNLD atual, e de mesmos autores, seguem essa mesma lógica de ajustar apenas o necessário para aprovação na avaliação? Quais materiais de apoio didático são utilizados pelos professores para a construção dos seus planejamentos? Por que eles escolhem tais materiais? Como o trabalho docente com a

probabilidade em sala de aula implica na utilização de conhecimentos probabilísticos no cotidiano do aluno? Ou seja, qual a relação entre o conhecimento probabilístico escolar e a realidade vivenciada pelo estudante? Esses são alguns questionamentos que podem ser levantados e desdobrados em estudos futuros.

6. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. M. C. **Um modelo didático de referência para o ensino de Probabilidade**. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018.

ALVES, L. P. S. **Ensino de probabilidade: uma proposta de sequência didática com uso dos jogos Bozó e Coup**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal de Mato Grosso - Campus Rondonópolis, Rio de Janeiro, 2021.

AMORIM, M. E.; PIETROPAOLO, R. C.; SILVA, A. F. Formação do professor de Matemática: uma discussão sobre o ensino de probabilidade. **Zetetiké,** Campinas, v. 28, p. 1-14, 2020.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 42, p. 09-34, nov. 2015.

ARAUJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França - estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

BARBOSA, E. J. T. **Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

BARBOSA, E. J. T. **Praxeologia do Professor: Análise Comparativa com os Documentos Oficiais e do Livro Didático no Ensino de Equações Polinomiais do Primeiro Grau.** Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática do PPGEC-UFRPE. Recife. 2017.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 8, n. 3, p. 247-263, 2005.

BATANERO, C. Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. **I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria.** Granada, 2013.

BATANERO, B. C.; GOMEZ, T. E.; CONTRERAS, G. J.; DIAZ, B. C. Conhecimento matemático de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em formação para o ensino de probabilidade: um estudo exploratório. **Práxis Educativa**, v. 10, n. 1, p. 11-34, 2015.

BATANERO, C. **Retos en la investigación sobre didáctica de la probabilidad.** Slides de conferência - Relme 29. [CD-ROOM]. Panamá: Ciudad de Panamá, 2015.

BENNETT, D. J. **Aleatoriedade.** São Paulo: Editora Martins Fontes, 2003.

BIAJONE, J. Trabalho de projetos: **possibilidades e desafios na formação do pedagogo**. (Dissertação de Mestrado). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2006.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké,** Campinas, v. 25, n. 3, p. 364-387, set./dez. 2017.

BRASIL**. Base nacional comum curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 years of the didactic transposition. ICMI **Bulletin,** n. 58, p. 51-65, 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action,** p.49-85, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Matemática**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, 2006.

BRASIL**. Base nacional comum curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia PNLD 2021**. Brasília: MEC, 2021. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_didatico/inicio.

CARVALHO, A.T. ; GONTIJO, C. H. ; FONSECA, M. G. Pensamento crítico e criativo no ensino de probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Educação e Pesquisa**, v. 49, p. 01- 24, 2023.

CASTILHO, C. R. **O Ensino de Probabilidade Baseado em uma Sequência Didática para o Exercício de Literacia Probabilística**. Mestrado Profissional em Educação Matemática instituição de ensino: Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2020.

CAVALCANTE, J. L. **A dimensão cognitiva na Teoria Antropológica do Didático: reflexão teórico-crítica no ensino de probabilidade na licenciatura em matemática**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática do PPGEC-UFRPE. Recife. 2018.

CAVALCANTE, J. L.; ANDRADE, V. L. V. X. D.; RÉGNIER, J.-C. O conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela análise estatística implicativa**. VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 441-445, jul/dez 2016.

CAVALCANTE, J. L.; BRITO LIMA, A. P. A.; ANDRADE, V. L. V. X. D. O ensino de probabilidade na licenciatura em matemática: considerações para um modelo epistemológico de referência. In: **Educação Matemática e Pesquisa.** São Paulo, v. 23, n. 1, p. 58-78, 2021.

CONTI, K. C.; NUNES, L. N.; ESTEVAM, E. J. G.; GOULART, A. Um cenário da Educação Estatística em cursos de Pedagogia. **REVEMAT**, 14(Educação Estatística), 1-15, 2019.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista- Estudo Epistemológico e Didático.** 1994. 151 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática** – UFSC, Florianópolis, v. 2, n.1, p.50-67, 2007.

COUTINHO, C. Q. S. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. **Educação Matemática e Pesquisa.** 7(2), pp. 185-199, 2005.

CHEVALLARD, Y. La **Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. La Pensée Sauvage, Argentina, 1991.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didáctica Das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (Original de 1992).

CHEVALLARD, Y**. Analyse des pratiques enseignants et didactique des mathématiques: c'approche anthropologique**. 1998.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In : **Recherches en Didactiques des Mathématiques** 19(2). Grenoble: La Pensée Sauvage. p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: MAURY, S.; CAILLOT, M. (Éd.). **Rapport au savoir et didactiques**. Paris: Fabert. p. 81-104, 2003.

CHEVALLARD, Y. **Vers une didactique de lacodisciplinarité**. 2004.

CHEVALLARD. Y**. La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.** 3. ed. 2. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009b.

CHEVALLARD, Y. Éléments pour une instruction publique nouvelle. **Conférence nationale sur l'enseignement des mathématique**, Lyon, 2012.

CHEVALLARD, Y. Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges**. Springer International Publishing, p. 173-187, 2015.

CHEVALLARD, Y. Uma ruptura epistemológica em ato. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L.M. S.; HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos.** Editora CRV. Curitiba, 2018.

DE LEONARDO, F. M. **Conexões – Matemática**: manual do professor\ Fábio Martins de Leonardo – 2.ed.- São Paulo; Moderna, 2013.

DE LEONARDO, F. M. **Conexões – Matemática e suas Tecnologias**: manual do professor\ Fábio Martins de Leonardo – 1.ed.- São Paulo; Moderna, 2020.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, didática da Matemática e práticas de ensino. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, n. 28, p. 179-205, 2007.

DIAS, M. A.; JUNIOR, V. B. D. S. Elementos da Teoria Antropológica do Didático para Análise das Propostas Institucionais Brasileiras e Metodológicas de Atividades e Percursos de Estudo e Pesquisa". In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos.** 1ª. ed. Curitiba: CRV. p.582, 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H.Domingues. 5.ed. Editora da Unicamp. Campinas, SP. 2011.

FERNANDES, J. A.; VISEU, F.; GEA, M. M. O conhecimento de Probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos. En L. G. W. Coan, & M. T. Moretti (Eds.), **Aplicações matemáticas com tecnologias de informação e comunicação** (pp. 123-142).

FILHO, A. B. D. F. **Probabilidade: uma proposta à luz da BNCC.** Dissertação - Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.lorianópolis, SC: Editora Insular, 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 2ª. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FONSECA, C. Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria. **Tesis Doctoral.** Departamento de MatemáticaAplicada I. Universidad de Vigo, 2004.

GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens: building blocks and instructional dilemmasIn: Jones, G. A. (Org.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,** p. 39-63, 2005.

GASCÓN, J. La necessidade de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. **Educação Matemática e Pesquisa**, p. 11 – 37, 2003.

GASCÓN, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumenos de emancipação da didática e da história da matemática. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos.** 1ª. ed. Curitiba: CRV, p.51-76, 2018.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIORDANO, C. C.; VILHENA, V. D. M. Educação Estatística e a formação de professores que ensinam Matemática no Brasil. **Brazilian Journal of Development,** v. 6, n. 12, p. 104137-104148, 2020.

JESUITA, F. T. P. **Can't Stop: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Probabilidade**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal Rural do Semiárido, Rio de Janeiro, 2022.

JÚNIOR, V. B. D. S. **Juros simples e compostos: análise ecológica, praxeológica e um Percurso de Estudo e Pesquisa.** Tese de Doutorado em Educação Matemática do PPGEM – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2017.

LAPLACE, P.S. **Um Ensaio Filosófico sobre a Probabilidade.** (Traduzido por Thomazi, 2019).

LOPES, C. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores.** Cad. Cedes, Campinas, v.28, n.74, p.57-73, 2008.

LOPES, R. N. S. **Praxeologia do professor: uma investigação do conceito de fração sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2020.

LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; DE CARVALHO, R. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetike**, v. 19, n. 2, p. 75-93, 2011.

MACIEL, M. M. **O uso da calculadora no ensino de Matemática: uma análise praxeológica em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.** Trabalho de Conclusão de Curso. CCHE-UEPB. Monteiro — PB, 2020.

MACIEL, M. M.; BARBOSA, E. J. T. Uma Revisão de Literatura sobre a proposição de sequências didáticas para o ensino de probabilidade na Educação Básica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 11, n. 33, p. 1–25, 2024.

MACIEL, M. M.; BARBOSA, E. J. T. Concepções de Professores que Lecionam Matemática no Ensino Médio Acerca das Diferentes Abordagens da Probabilidade e o Seu Ensino. In: MARTINES, P. B.; SANTOS, S. S.; BARBOSA, G. C. **PROCESSOS ESTATÍSTICOS, COMBINATÓRIOS E PROBABILÍSTICOS: Discussões Teóricas e Práticas.** Editora Metrics. Santo Ângelo, 2024.

MELO, T. B. D.; REIS, J. C. **Relações Históricas entre os Jogos de Azar e a Probabilidade**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

MOURA, T. J. **Probabilidade e Jogos Digitais: Uma Experiência com o Software GeoGebra no Ensino Médio**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal de Goiás, Rio de Janeiro, 2020.

MOURA, G. M. M.; SAMÁ, S. Ilusão da equiprobabilidade, aleatoriedade e convergência nos processos cognitivos envolvidos no raciocínio probabilístico. **VIDYA,** Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 523-538, 2016.

NEVES, A. S. **Uma Proposta para o Logos das Praxeologias Referentes ao Ensino do Aspecto Decimal da Numeração no 5º.** Dissertação de Mestrado (Programa de Pós – Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2020.

PIETROPAOLO, R. C.; SILVA, A. F. G.; CAMPOS, T. M. M.; CARVALHO, J. I. F. Conhecimentos de professores para ensinar probabilidade nos anos finais do ensino fundamental. JIEEM – **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.** v. 8, n. 3, p. 126-156, 2015.

RIBEIRO, J. P. M. Aplicação de um jogo para mudança conceitual de elementos inerentes ao conteúdo de probabilidade. **BOCEHM - Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 22, p. 71 – 86, 2021.

RODRIGUES, J. M. S. **A probabilidade como componente curricular na formação matemática inicial de professores polivalentes**. Tese de Doutorado em Educação. UFPR. Curitiba, 2011.

RUIZ-OLARRIA, A. **La Formacion Matematico-Didactica del Profesorado de Secundario: De las Matematicas por Ensenar a las Matematicas para La Ensenanza.** Tese (doutorado) - Universidad Autonoma de Madrid. Madrid, 2015.

SAMÁ, S.; SILVA, R. C. S. Probabilidade e Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir da Base Nacional Comum Curricular. **Zetetiké**, Campinas, v. 28, p. 1-21, 2020.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, p. 648-670, 2015.

SANTOS, P. G. P,; PINTO, S.M.; SILVA, M. S. Porrinha: Quando as probabilidade estão além de dados e moedas. **Revista – Estação científica, Macapá,** v. 4. n. 1, p. 97 - 105, 2014.

SILVA, M. J.; ALVES, F. J. C.; NORONHA, C. A. O ensino de probabilidade com questões sociais. **TANGRAM - Revista De Educação Matemática,** *2*(2), 47–66, 2019.

SILVEIRA, D. T.; CÓDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de Pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

SOARES, M. B. **O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades**. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Instituição de Ensino: Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

SOUZA, L. O. Formação de professores para o ensino de probabilidade: simulação conectando ideias estatísticas. **VIDYA,** v. 36, n. 2, p. 377-395, 2016.

SOUZA, J. P. V**. Sala de Aula Invertida: Uma Proposta para o Ensino de Probabilidade**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2019.

SOUZA, J. P. V.; BARBOSA, N. M. Uma experimentação com metodologia ativa: sala de aula invertida como modelo para o ensino de probabilidade. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática,** v. 15, n. 2, p. 01 – 23, 2020.

SOUZA, R. D. **Uma Sequência Didática para o Ensino da Matemática probabilística na Terceira Série do Ensino Médio com apoio de dispositivos móveis.** Dissertação de Mestrado (Programa de Pós - Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Severino Sombras, Vassouras - MG, 2015.

STRUMINSKI, L. A. F. **Uso de Jogos no Ensino de Matemática: uma Proposta de Sequência Didática para o trabalho com probabilidade**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Ponta Grossa, Rio de Janeiro, 2016.

SHULMAN, **Lee S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching.** Educational Researcher. v.15, n.2, p.4-14, 1986.

TEIXEIRA, P. J. M. "Pulando amarelinha": Um jogo para fomentar a determinação de um espaço amostral não equiprovável em um experimento aleatório. **Perspectivas Em Diálogo: Revista De Educação E Sociedade,** v. 10, n. 22, p. 289 – 312.

VILHENA, V. D. M. **Construção de um Portfólio sobre Noções de Estatística e Probabilidade como Dispositivo Didático.** Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pará, Belém, 2022.

VIALI, L. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

VIANA, S. L. S.; LOZADA, C. de O. Aprendizagem baseada em problemas para o ensino de probabilidade no Ensino Médio e a categorização dos erros apresentados pelos alunos. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–28, 2020.

VIEIRA, L. D. **O ensino de probabilidade no contexto da BNCC e à luz dos princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica.** Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática Instituição de Ensino: Universidade de Passo Fundo, 2020.

VIEIRA, L. D.; DARROZ, L. M.; ROSA, C. T. W. O ensino de probabilidade no contexto da bncc e à luz dos princípios da teoria da aprendizagem significativa crítica. **ENCITEC- Ensino De Ciências E Tecnologia Em Revista,** v. 13, n. 1, p. 330-340, 2023.

VILHENA, V. D. M et al. LETRAMENTO ESTATÍSTICO E PROBABILÍSTICO NO CONTEXTO DA BNCC: UM LEVANTAMENTO SOBRE AS PRINCIPAIS DIFICULDADES ENFRENTADAS PELOS PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO. **Revista Paidéi@-Revista Científica de Educação a Distância**, v. 16, n. 32, 2024.

ZINDEL, M. L. **Tomada De Decisão E Risco: A Contribuição Dos Matemáticos E Estatísticos.** Estadística y Sociedad, México, p.05-30, n.5, 2018.