UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

ARTHUR CRISTOPHER DE SOUZA

CONCEPÇÕES DO CONCEITO DE VOLUME:

Um estudo sobre as percepções dos licenciandos de matemática

Caruaru

2025

ARTHUR CRISTOPHER DE SOUZA

CONCEPÇÕES DO CONCEITO DE VOLUME:

Um estudo sobre as percepções dos licenciandos de matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientador: Prof. Me. Edson Carlos Sobral de Sousa

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Souza, Arthur Cristopher de.
CONCEPÇÕES DO CONCEITO DE VOLUME: Um estudo sobre as percepções dos licenciandos de matemática / Arthur Cristopher de Souza. - Caruaru, 2025.
43 p. : il.

Orientador(a): Edson Carlos Sobral de Sousa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.
Inclui referências.

1. Volume. 2. Geometria. 3. Teoria dos Campos Conceituais. 4. Formação de Professores. 5. Ensino Superior. I. Sousa, Edson Carlos Sobral de. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

ARTHUR CRISTOPHER DE SOUZA

CONCEPÇÕES DO CONCEITO DE VOLUME:

Um estudo sobre as percepções dos licenciandos de matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 09/04/2025

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Me. Edson Carlos Sobral de Sousa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Me. Jaíne Macêdo Ferreira (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho à minha mãe Maria Elba da Silva, por sempre acreditar em mim e me apoiar com seu amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus por tornar possível esta conquista, iluminando minha trajetória nos momentos mais difíceis.

À minha família, por sempre ter sido meu porto seguro, apoiando meus sonhos e projetos, em especial à minha mãe Maria Elba da Silva.

Ao meu companheiro de vida Wallyson César Oliveira da Silva, por todo apoio e companheirismo de sempre, meu muito obrigado.

Aos professores que passaram pela minha formação docente, suas contribuições foram essenciais para a construção da minha identificação como profissional docente. Em especial ao meu orientador Profº Me Edson Carlos Sobral de Sousa, que foi essencial para a elaboração deste trabalho em minha reta final da graduação, e às professoras participantes da banca de avaliação Profª Drª Cristiane de Arimatéa Rocha e Profª Me. Jaíne Macêdo Ferreira pelas contribuições oferecidas a este trabalho, grato por todo apoio.

Aos amigos e colegas que conheci ao decorrer do curso, que tornaram a jornada mais leve com auxílio, amizade e companheirismo nos momentos difíceis.

RESUMO

O presente trabalho apresenta como objetivo geral analisar as estratégias mobilizadas por estudantes cursistas de uma disciplina da licenciatura em Matemática ao responderem problemas sobre diferentes conceitos relacionados a volume. Logo, buscamos realizar o desenvolvimento de um questionário para identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e a análise das respostas obtidas. Para fundamentar a discussão, foram abordados os tópicos "Teoria dos Campos Conceituais" de Gérard Vergnaud e "Volume como Conceito" no referencial teórico. Esta pesquisa se classifica como uma pesquisa qualitativa, de natureza exploratória, a qual contou com os momentos de aplicação do questionário e a análise dos dados obtidos a partir do questionário aplicado. A aplicação do questionário aconteceu em uma turma do curso de licenciatura em Matemática composta por licenciandos em Matemática e estudantes dos cursos de Engenharia Civil e de Produção. Para a análise dos resultados, as respostas obtidas foram divididas em quatro categorias determinadas por critérios a serem correspondidos pelas respostas. A análise das respostas obtidas foi realizada sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, de forma a identificar elementos da mesma que estejam relacionados com os dados obtidos. Os resultados obtidos demonstraram uma maior quantidade de acertos plenos em quatro das cinco questões presentes no questionário, apresentando assim um bom indicativo a respeito das concepções pertencentes aos participantes.

Palavras-chave: Volume; Geometria; Teoria dos Campos Conceituais; Formação de Professores; Ensino Superior.

ABSTRACT

The general objective of this study is to analyze the strategies used by undergraduate students in a Mathematics course when answering problems about different concepts related to volume. Therefore, we sought to develop a questionnaire to identify the students' prior knowledge and analyze the answers obtained. To support the discussion, the topics “Theory of Conceptual Fields” by Gérard Vergnaud and “Volume as a Concept” were addressed in the theoretical framework. This research is classified as a qualitative research, of an exploratory nature, which included the moments of application of the questionnaire and the analysis of the data obtained from the questionnaire applied. The questionnaire was applied to a class of the undergraduate Mathematics course composed of undergraduate Mathematics students and students of the Civil and Production Engineering courses. To analyze the results, the answers obtained were divided into four categories determined by criteria to be matched by the answers. The analysis of the answers obtained was carried out from the perspective of the Theory of Conceptual Fields, in order to identify elements of it that are related to the data obtained. The results obtained demonstrated a greater number of correct answers in four of the five questions present in the questionnaire, thus presenting a good indication regarding the conceptions belonging to the participants.

Keywords: Volume; Geometry; Theory of Conceptual Fields; Qualitative Research; University Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Entre as áreas da Matemática, a Geometria é uma na qual é possível haver diversas relações entre os conteúdos nela presentes e situações presentes na realidade dos estudantes, uma vez que a Geometria abrange o estudo de propriedades de sólidos geométricos, os quais fazem parte desta realidade.

Um dos conceitos presentes na Geometria que os estudantes costumam apresentar dificuldades durante o ensino básico é o conceito de volume. De acordo com Rogenski e Pedroso (s.d.) isto é notável ao perceberem suas dificuldades em relação à visualização, às relações existentes entre as formas e ao se depararem com cálculos envolvendo área e volume, não compreendendo suas aplicações em diferentes contextos. Logo, é possível compreender como ministrar os conteúdos desta temática pode ser um desafio para o professor.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC é oportunizado ao estudante o desenvolvimento de habilidades necessárias para compreender conhecimentos geométricos, passando a ser capaz de "interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras" (Brasil, 2018, p. 527). O desenvolvimento dessas habilidades pode auxiliar o estudante a compreender questões relacionadas ao conceito de volume quando o mesmo estiver no ensino médio.

Porém, é comum que, mesmo durante a etapa do ensino médio, o estudante não compreenda bem as relações entre os sólidos geométricos e suas respectivas fórmulas para determinações de propriedades como área e volume, uma vez que, devido a diversos fatores externos à sala de aula, o ensino desses conteúdos acaba por não conseguir abranger o desenvolvimento desses conceitos, tendo como foco a aplicação mecanizada dessas fórmulas nos problemas referentes ao conteúdo. Soares (2022) destaca uma crítica presente na BNCC a esta metodologia de ensino, a qual afirma que

> [...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018, p. 272-273).

Com este exemplo, a BNCC busca demonstrar como era possível realizar o cálculo da área de figuras planas na ausência de fórmulas, sendo este método importante para o desenvolvimento da compreensão do conceito.

Para que o estudante obtenha o máximo de proveito no ensino superior se faz importante que essas concepções a respeito dos conceitos geométricos estejam bem estabelecidas em seus níveis de compreensão a respeito do conteúdo, para que as relações entre os demais conceitos matemáticos estejam melhor esclarecidas para si.

Diante deste cenário, surge uma curiosidade referente ao estado de compreensão do conceito de volume por estudantes do ensino superior, uma vez que se faz importante que sua compreensão tenha sido bem estabelecida durante a educação básica. Logo, elaboramos o seguinte questionamento: Quais estratégias são mobilizadas por licenciandos em Matemática ao responderem problemas sobre diferentes conceitos relacionados a volume?

Para tanto, desenvolvemos a presente pesquisa com o objetivo geral de analisar as estratégias mobilizadas por estudantes cursistas de uma disciplina da licenciatura em Matemática ao responderem problemas sobre diferentes conceitos relacionados a volume. Destarte, foram construídos os seguintes objetivos específicos:

- Classificar os erros e acertos apresentados por estudantes da licenciatura em matemática nas resoluções de problemas sobre conceitos de volume;
- Discutir as estratégias empregadas pelos participantes na resolução dos problemas;
- Compreender como os conceitos de volume foram empregados nas estratégias de resolução.

Para atender a este objetivo, buscamos realizar o desenvolvimento de um questionário para identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e a análise das respostas obtidas.

Ao decorrer deste trabalho foram abordados os tópicos “Teoria dos Campos Conceituais” de Gérard Vergnaud e “Volume como Conceito” no referencial teórico. Na metodologia definimos qual o tipo da nossa pesquisa e foram selecionadas as perguntas pertencentes ao questionário. Na sessão dos resultados, as respostas obtidas pelos estudantes foram analisadas e divididas em categorias, para que fosse possível identificar padrões de respostas de modo objetivo.

2 ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida a partir dos estudos de Gérard Vergnaud. Segundo Vergnaud o conhecimento, de modo geral, está organizado em campos conceituais e que o seu domínio por parte do indivíduo "ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem" (Vergnaud, 1982, p.40 *apud* Moreira, 2002). Vergnaud não considera o conhecimento como sendo um elemento isolado que pertence a uma determinada disciplina, e sim como uma união de campos conceituais que compõem o conhecimento.

Carvalho Jr. e Aguiar Jr. (2008, p. 211) elucidam que na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud "o ponto fundamental da cognição é o processo de conceitualização do real, atividade psicológica interna ao sujeito que não pode ser reduzida nem a operações lógicas gerais, tampouco às operações puramente linguísticas" Sendo assim, a conceitualização do real é um processo gradual que ocorre à medida que o indivíduo consegue adquirir domínio sobre um determinado conteúdo que está estudando.

Vergnaud reconhece que sua teoria dos campos conceituais possui inspirações em teorias surgidas dos estudos de Piaget e Vigotsky, tendo grande importância em sua teoria os conceitos de esquema, derivado do trabalho de Piaget, e a valorização de elementos inerentes ao processo de aprendizagem derivados do legado de Vigotsky como a interação social, a linguagem e a simbolização para a consolidação do domínio de um campo conceitual (Moreira, 2002).

É possível resumir a teoria dos campos conceituais como

> [...] uma teoria cognitivista neopiagetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e na técnica, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise de seu domínio (Moreira, 2002, p. 8).

Tal definição auxilia na compreensão dos objetivos que essa teoria pretende alcançar, delimitando sua atuação na área das ciências. Moreira (2002) define como conceitos-chave para a compreensão da teoria dos campos conceituais, além do conceito de campo conceitual, os conceitos de esquema, situação, invariante operatório e a concepção de conceito segundo a própria teoria.

Para Vergnaud, campo conceitual é "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (Vergnaud, 1982, p. 40 *apud* Moreira, 2002, p. 8). Logo, percebe-se a complexidade pela qual o conceito de campo conceitual se caracteriza, tornando-se compreensível a razão pela qual o seu domínio não ocorra em um curto período de tempo.

Tendo o objetivo de justificar a utilização do conceito de campo conceitual para a construção do conhecimento, Vergnaud apresenta três argumentos principais, sendo estes:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Vergnaud, 1983, p.393 *apud* Moreira, 2002, p.09).

Estes argumentos demonstram a complexidade que compõe os elementos de um campo conceitual, enfatizando as maneiras que um conceito se estabelece de acordo com sua teoria.

Carvalho Jr. e Aguiar Jr. (2008) afirmam que na teoria dos campos conceituais o desenvolvimento cognitivo depende de forma considerável da situação e da conceitualização específicas. Segundo Vergnaud (1996 *apud* Santana *et al.*, 2015) a situação pode ser compreendida como uma tarefa teórica ou empírica a ser realizada pelo indivíduo, sendo uma situação complexa uma combinação de tarefas. De acordo com esse contexto, a situação será responsável por direcionar o desenvolvimento, à medida que exigirá do indivíduo uma racionalização para realizar a tarefa decorrente da situação.

Segundo Vergnaud:

> o saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por 'problema' é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução (1990, p. 52 *apud* Carvalho Jr. e Aguiar Jr., 2008, p.213).

Portanto, para Vergnaud o problema irá proporcionar que o desenvolvimento ocorra no indivíduo, uma vez que ao se deparar com o problema o indivíduo necessitará elaborar raciocínios lógicos com o conhecimento que trouxe de outras situações, tendo em mente o objetivo de solucionar o problema proposto.

Morais (2013) traz como exemplo o campo conceitual das grandezas e medidas, o qual envolve as grandezas massa, tempo, comprimento, volume, entre outras, que apresentam relação com instrumentos de medição e conteúdos matemáticos em geral. A partir desse exemplo podemos compreender como os elementos de um determinado campo conceitual se relacionam, quais características tais elementos compartilham.

2.1 Conceito

Para Vergnaud, o conceito é, na teoria dos campos conceituais, formado por um grupo de três conjuntos C = (S, I, R) sendo estes o conjunto das situações, os invariantes e as representações simbólicas respectivamente (Moreira, 2002; Carvalho Jr.; Aguiar Jr., 2008).

O conjunto S é composto por situações que dão sentido ao conceito. Essas situações representam a entrada em um campo conceitual, sendo responsáveis pelo sentido que é atribuído ao conceito, logo uma variedade de situações contribui para que um conceito seja significativo (Carvalho Jr.; Aguiar Jr., 2008). Tomando como exemplo um contexto no qual o estudante deverá realizar algumas operações aditivas, tem-se que as operações são as situações ou tarefas que o estudante deverá solucionar, ao realizá-las terá sido introduzido ao conceito de adição.

2.1.1 Esquema

Um conceito que está relacionado ao conceito de situações, dentro da teoria dos campos conceituais, é o conceito de esquema, que é definido como “a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações” (Vergnaud, 1990, p. 136 apud Moreira, 2002, p. 12). Moreira (2002) afirma que o conceito de esquema foi introduzido por Piaget para que fosse possível dar conta de explicar as formas de organização das habilidades sensório motoras e intelectuais.

Há vários tipos de esquemas, como exemplos é possível citar esquemas de percepções gestuais como o ato de contar objetos e fazer um gráfico ou diagrama, esquemas verbais como realizar um discurso entre outros (Vergnaud, 1998 *apud* Moreira, 2002). Baseando-se nesses exemplos é possível concluir que esquemas são formas de externalização do raciocínio para que seja possível concluir uma determinada situação.

Com o intuito de se aprofundar no conceito de esquema e facilitar a compreensão, Moreira (2002) apresenta especificações que são denominadas por Vergnaud como ingredientes dos esquemas, quais são:

> 1. metas e antecipações (um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos); 2. regras de ação do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação; 3. invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o

> reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas; 4. possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação. (Moreira, 2002, p. 12-13).

Dessa forma, essas especificações exercem um papel de delimitar características que um esquema deve apresentar, facilitando a compreensão a respeito de sua função dentro da teoria dos campos conceituais.

Vergnaud (1993) reconhece que os esquemas se referem a situações ou classes de situações, nas quais ele distingue entre classes que o indivíduo dispõe das competências necessárias para resolver a situação e classes nas quais o indivíduo não irá dispor de tais competências, levando-o assim a realizar um processo de reflexão das ações a serem tomadas e a tentativas que o levarão ao sucesso ou ao fracasso (*apud* Moreira 2002).

Moreira (2002) apresenta exemplos de como o conceito de esquema funciona de forma diferente nas duas classes, sendo aplicadas para a primeira classe condutas que são automatizadas e organizadas por um só esquema enquanto que para a segunda classe é possível observar a utilização de vários esquemas, uma vez que o indivíduo não tem certeza sobre qual esquema será efetivo para a classe de situações em questão. De forma geral, todas as condutas são compostas por uma parte automatizada e uma parte de decisão consciente (Moreira, 2002), uma vez que alguns esquemas são capazes de solucionar um tipo muito abrangente de situações, enquanto outras situações irão demandar mais decisões conscientes que outras.

Para Vergnaud (1998, p. 177) “a relação entre situações e esquemas é a fonte primária da representação e, portanto, da conceitualização” (*apud* Moreira, 2002, p. 13). Logo, é possível perceber como Vergnaud defende que os esquemas devem relacionar-se com as situações em si, para que através desta relação possa se desenvolver o conhecimento.

2.1.2 Invariantes Operatórios

Dentre os ingredientes de um esquema, os invariantes operatórios constituem a base conceitual implícita que permite que o indivíduo obtenha a informação pertinente a ele, inferindo as regras de ação mais pertinentes considerando a informação obtida e os objetivos a alcançar (Vergnaud, 1996 apud Carvalho Jr. e Aguiar Jr., 2008).

Para Vergnaud, os invariantes operatórios também podem ser designados pelas expressões conceito em ação e teorema em ação (1993 apud Moreira, 2002). “Teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante” (Vergnaud, 1998, p. 167 *apud* Moreira, 2002, p. 14).

Tem-se como exemplo de um teorema em ação a seguinte situação proposta ao estudante: “O consumo de farinha é, em média, 3,5 kg por semana para dez pessoas. Qual a quantidade de farinha necessária para cinquenta pessoas durante 28 dias? Resposta de um aluno: 5 vezes mais pessoas, 4 vezes mais dias, 20 vezes mais farinha; logo, 3,5 x 20 = 70 kg” (Vergnaud, 1994, p. 49 *apud* Moreira, 2002, p. 14). Logo, o teorema em ação pode ser considerado como um raciocínio utilizado pelo estudante para obter a resposta que o problema solicita, o qual possui estrutura lógica fundamentada nos conceitos estudados.

E como exemplos de conceitos em ação pode-se considerar número cardinal, ganho e perda, estado inicial e final entre outros (Moreira, 2002). Portanto, conceitos em ação podem ser compreendidos como conceitos que estão implícitos no problema, que o estudante necessita identificar para conseguir solucioná-lo.

3 VOLUME COMO CONCEITO

Ao abordar o conceito de volume é interessante verificar como ocorreu ao longo da História o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos necessários para a determinação de medidas de área e de volume.

De acordo com Mer (2017) a geometria surgiu devido a necessidade de resolver problemas práticos das áreas de astronomia, agricultura, arquitetura e engenharia. Logo, é a partir dos estudos provenientes da geometria que os problemas destas naturezas passam a ser investigados e resolvidos.

Segundo Oliveira (2007) textos antigos originados das civilizações orientais apresentam situações cotidianas nas quais são necessárias a determinação de dados quantitativos, como determinar a capacidade de um celeiro ou o volume necessário de tijolos para uma construção, porém aponta que apesar desses textos contribuírem para a construção de modelos matemáticos, estes não apresentam uma estrutura que deixe esclarecido o processo de construção da aritmética ou da geometria.

Logo, Oliveira (2007) compreende que originalmente a Matemática era apresentada como um conjunto de regras a serem seguidas para obter um determinado resultado e não havia uma preocupação em solucionar essas questões através de um processo reflexivo dos conceitos. Esta concepção se apresentava como um fator limitante para a compreensão de conceitos mais complexos que viriam a ser discutidos posteriormente.

Durante o período do Egito Antigo, por volta de 1550 a. C., é possível constatar através do papiro de Rhind que os egípcios utilizavam a comparação de medidas para determinar valores aproximados de área, costumando utilizar valores possíveis de determinar com exatidão como a área de um quadrado para determinar a área de uma figura geométrica a qual não conseguiam determinar com exatidão como o círculo (Oliveira, 2007).

Segundo Boyer (1974) o problema 48 do Papiro Ahmes sugere uma maneira pela qual os egípcios conseguiram determinar a área do círculo:

> Nesse problema o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área 4 1/2 unidades. À área do octógono, que não difere muito da de um círculo inscrito no quadrado, é sessenta e três unidades, o que não está longe da área do quadrado com lado de oito unidades. Que o número $4(8/9)^2$ desempenhava papel comparável ao de nossa constante x parece ser confirmado pela regra egípcia para calcular a circunferência do círculo, segundo a qual a razão da área de um círculo para a circunferência é igual à da área do quadrado circunscrito para seu perímetro (Boyer, 1974, p. 13).

De acordo com Boyer (1974) ao analisar documentos originários da época do Egito Antigo, como o Papiro Ahmes, é apresentada uma maneira de calcular a área do triângulo isósceles, que consistia em multiplicar a metade de sua base pela sua altura. Boyer afirma que Ahmes justifica este método sugerindo que é possível observar o triângulo isósceles como a junção de dois triângulos retângulos, logo um pode ser deslocado de maneira a formar um retângulo com o outro triângulo restante.

Oliveira (2007) aborda que, a partir do século V a.C., para os geômetras gregos, surgiu a necessidade de se definir com mais precisão conceitos que ainda não haviam sido bem esclarecidos como figura, grandeza, quantidade, medida e posição, com a finalidade de justificar as propriedades que estavam sendo investigadas na época. De acordo com esta linha de pensamento, Platão acreditava que os matemáticos utilizam de figuras visíveis que se assemelhavam a figuras geométricas para construir seus raciocínios (Oliveira, 2007). Assim, os problemas matemáticos eram em sua maioria problemas nos quais era possível visualizar figuras geométricas e determinar suas medidas.

Contudo, para Oliveira (2007) essa linha de pensamento da época inviabilizou o processo de reflexão sobre a possibilidade de articulação entre a experimentação e a matemática, ocasionando na impossibilidade de que ocorresse comprovação de resultados sustentados em bases empíricas, sempre sendo necessário recorrer a construções geométricas e argumentações lógicas para que os problemas fossem solucionados. Esta tendência demonstrou ser limitante para o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que restringia a possibilidade de que houvesse a resolução de problemas por outras linhas de pensamento.

De acordo com Oliveira (2007), o ponto de vista de Aristóteles se diferenciava do ponto de vista de Platão no que diz respeito a manter o foco de interesse nas mudanças da natureza e no estabelecimento das causas primitivas. Dessa forma, Aristóteles "considerou que as investigações dos matemáticos incidem sobre objetos abstratos, que são criados a partir de objetos do mundo físico, dos quais foram retiradas todas as qualidades físicas sensíveis como peso, massa e cor" (Moreno *et al.*, 2000 *apud* Oliveira, 2007, p. 19). Logo, de acordo com esta perspectiva, figuras geométricas como esfera e cilindro seriam derivadas de objetos físicos como uma bola e um copo, respectivamente.

Contudo, Oliveira (2007) levanta a questão de que apesar dos estudos de Aristóteles apresentar relações com o mundo real, o filósofo adotou uma estrutura formal para organizar todos os conhecimentos a respeito da natureza, o que acabou resultando em uma fragilidade na sua forma de organizar o conhecimento.

Em seguida, por volta de 300 a.C., Euclides se destacou como um dos maiores pensadores gregos ligados à Matemática, tendo grande contribuição com sua obra intitulada "Os Elementos", que além de apresentar conhecimentos da área da geometria também aborda outras áreas da Matemática como "propriedades, teoria dos números e álgebra elementar (geométrica), enumera várias definições, nove axiomas, 465 proposições e cinco postulados" (Mer, 2017, p. 25). Analisando este período histórico, é possível concluir que a Matemática obteve grandes avanços através dos estudos de Euclides, os quais foram capazes de estabelecer teoremas que se mantêm relevantes até os dias atuais.

Para definir o conceito de volume, será levada em consideração a classificação em quadros dada ao conceito de área elaborada por Douady e Perrin-Glorian (1989 *apud*. Figueiredo, 2013). Cada quadro é definido da seguinte maneira:

> O quadro numérico refere-se ao conjunto dos números reais não negativos. O quadro geométrico, para o conceito de área, é constituído pelas figuras que possuem superfície no mundo físico, e o quadro das grandezas são as classes de equivalências das figuras planas de mesma área, e pode ser representado pelo número e pela unidade de medida, por exemplo, $2m^2$ (Figueiredo, 2013, p. 21).

Wanderley e Souza (2020) apresentam três tipos de situações trabalhadas por Figueiredo (2013) para desenvolver o conceito de volume, sendo essas situações de comparação, de medição e de produção. Os autores descrevem cada situação e apresentam as estratégias utilizadas, sendo as seguintes:

> As situações de comparação consistem em determinar sólidos que tenham volumes iguais ou não, ordenando-os. As estratégias desenhadas podem ser visuais (perceptivas), de inclusão, de decomposição-recomposição, de imersão, de medida e comparação de modo intuitivo e sem uso de fórmulas, e de comparação de massas. As situações de medição estimulam a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. As estratégias geralmente utilizadas são a contagem de unidades, o uso de fórmulas, o princípio de Cavalieri, a imersão, o preenchimento e transvasamento. Por fim, as situações de produção são as que se caracterizam pela construção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado. As estratégias para esse contexto podem ser: composição, decomposição-recomposição e Princípio de Cavalieri (Wanderley; Souza, 2020, p. 8-9).

Portanto, o desenvolvimento do conceito de volume se dá pela realização das etapas descritas, as quais auxiliam os estudantes a compreenderem o conceito de maneira significativa.

4 METODOLOGIA

Este trabalho teve como objetivo geral analisar as estratégias mobilizadas por estudantes cursistas de uma disciplina da licenciatura em Matemática ao responderem problemas sobre diferentes conceitos relacionados a volume, para atingir tal objetivo foram adotados como métodos da pesquisa o desenvolvimento de um questionário para identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e a análise das respostas obtidas.

Esta pesquisa se classifica como uma pesquisa qualitativa, de natureza exploratória. Para Soares (2019, p. 169), "a pesquisa qualitativa se expressa mais pelo desenvolvimento de conceitos a partir de fatos, ideias ou opiniões, e do entendimento indutivo e interpretativo que se atribui aos dados descobertos, associados ao problema da pesquisa". Tal definição se adequa aos objetivos pretendidos neste trabalho.

A pesquisa contou com os momentos de aplicação do questionário e a análise dos dados obtidos a partir do questionário aplicado, apresentado na subseção.

4.1 Instrumento de coleta

O questionário foi composto por cinco questões investigativas pertencentes à pesquisa de Figueiredo (2013), que foram selecionadas de forma que atendesse critérios que possibilitem a investigação de determinadas percepções a respeito do conceito de volume.

A primeira questão, Figura 1, remete à construção de dois sólidos geométricos a partir de uma mesma quantidade de matéria prima, ou seja, de um mesmo volume, logo buscou-se analisar como os estudantes realizam a comparação entre sólidos geométricos desta natureza.

Figura 1 – Primeira questão do questionário

1. Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
b) A esfera tem volume maior que a pizza.
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

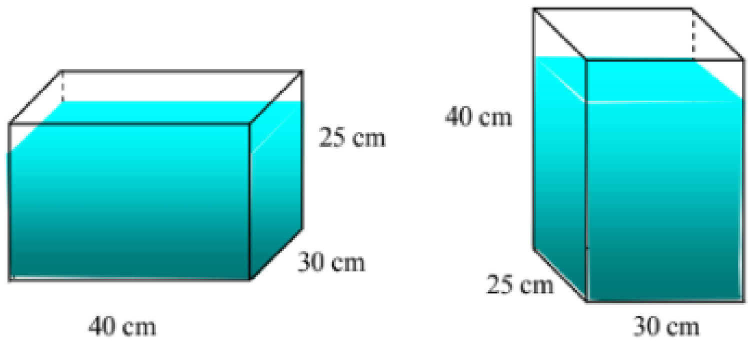
Justifique sua resposta:

Fonte: Figueiredo (2013)

A segunda questão, Figura 2, consistiu em analisar a ideia de capacidade, a partir de um sólido geométrico que contém um líquido em seu interior e muda de posição. Portanto, tivemos interesse em analisar a interpretação sobre a relação posição-capacidade do sólido.

Figura 2 – Segunda questão do questionário

2. Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



a) 5 cm
b) 32 cm
c) 8 cm
d) 24000 cm^3
e) OUTROS

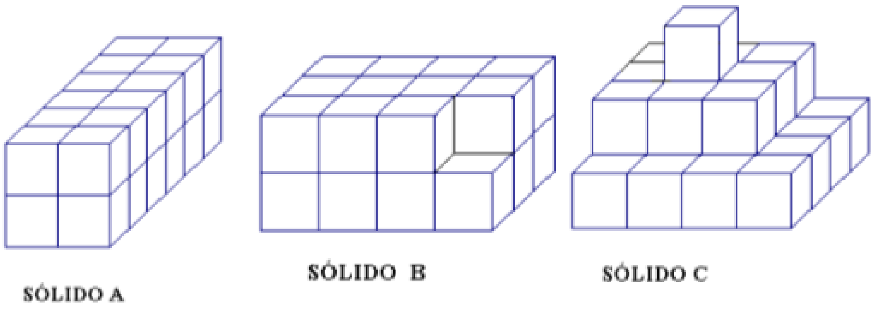
Justifique sua resposta:

Fonte: Figueiredo (2013)

A terceira questão, Figura 3, buscou analisar a ideia de comparação entre sólidos geométricos que possuem diferentes quantidades de volume, porém apresentam a mesma unidade de medida para representar esta grandeza.

Figura 3 – Terceira questão do questionário

3. Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:



a) Va = Vb= Vc
b) Va < Vb< Vc
c) Va > Vb > Vc
d) Va = Vb > Vc
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Fonte: Figueiredo (2013)

A quarta questão, apresentada na Figura 4, buscou investigar a interpretação sobre o que ocorre com o volume de um sólido geométrico quando suas medidas são alteradas a uma determinada proporção.

Figura 4 – Quarta questão do questionário

4. Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

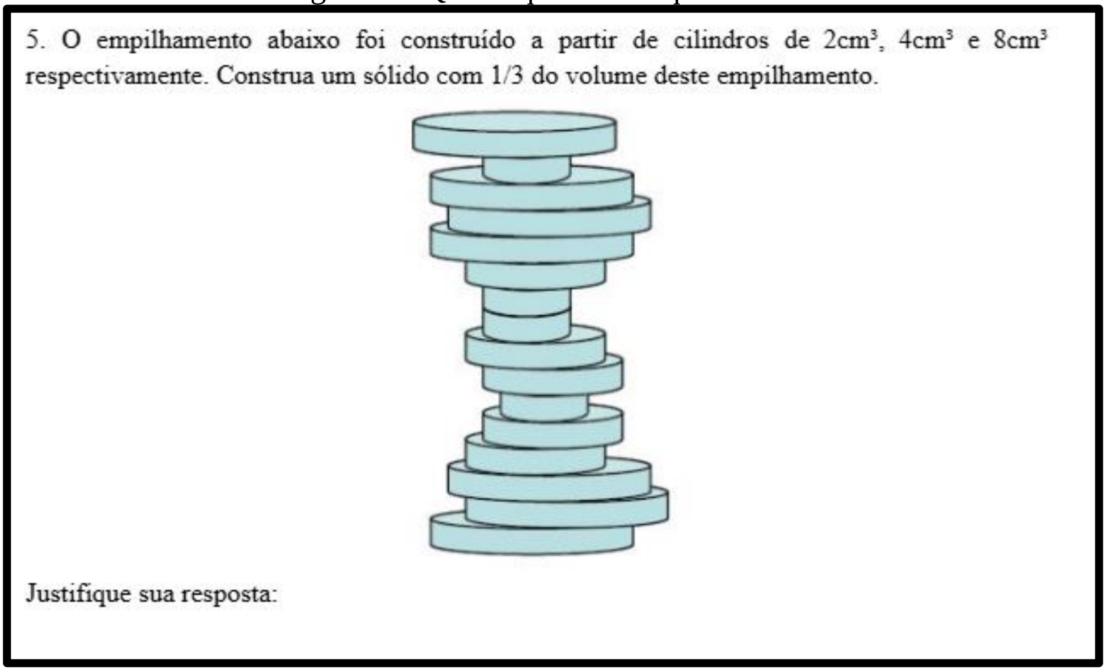
a) 20%
b) 0,8%
c) 60%
d) 72,8%
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Fonte: Figueiredo (2013)

Por fim, a Figura 5 esboça a quinta questão, na qual é apresentada uma situação de empilhamento utilizando sólidos de mesma natureza, porém apresentam três valores diferentes de volume. Sendo solicitado que o participante construa um novo sólido com uma determinada proporção relativa a este empilhamento.

Figura 5 – Quinta questão do questionário



5. O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de $2cm^3$, $4cm^3$ e $8cm^3$ respectivamente. Construa um sólido com 1/3 do volume deste empilhamento.

Justifique sua resposta:

Fonte: Figueiredo (2013)

O grupo de participantes que responderam ao questionário será apresentado na próxima subseção.

4.2 Participantes da pesquisa

A aplicação do questionário ocorreu em uma turma da disciplina “Cálculo Diferencial e Integral III”. Escolhemos realizar a aplicação nesta turma devido ao fato da maioria dos estudantes matriculados na turma já terem cursado a disciplina “Matemática III” com respaldo na estrutura curricular do curso, pois é nesta disciplina que o conceito de volume é estudado. Logo, esperou-se analisar quais interpretações os estudantes apresentavam após estudar o conceito de volume no ensino superior.

Um total de 31 estudantes participaram da pesquisa. Entre esses estudantes, 27 são estudantes do curso de licenciatura em Matemática e 4 são estudantes de cursos de engenharia, sendo 3 do curso de Engenharia de Produção e 1 do curso de Engenharia Civil. A priori, não objetivamos discutir as concepções trazidas por estudantes de outros cursos, além da licenciatura em Matemática. Porém, ao constatar a presença dos estudantes desses outros cursos, consideramos importante incluí-los na perspectiva de estabelecer um quadro comparativo.

Para que todos os estudantes tivessem suas identidades mantidas em anonimato nesta pesquisa, todos eles foram identificados por meio de códigos, sendo os códigos M-1 a M-27 para os estudantes de licenciatura em Matemática, EP-1 a EP-3 para os estudantes de Engenharia de Produção e EC-1 para o estudante de Engenharia Civil.

4.3 Métodos de análise

Para a análise dos resultados, as respostas obtidas foram divididas em quatro categorias determinadas por critérios a serem correspondidos pelas respostas. A seguir estão apresentadas as categorias e os critérios que cada uma exige.

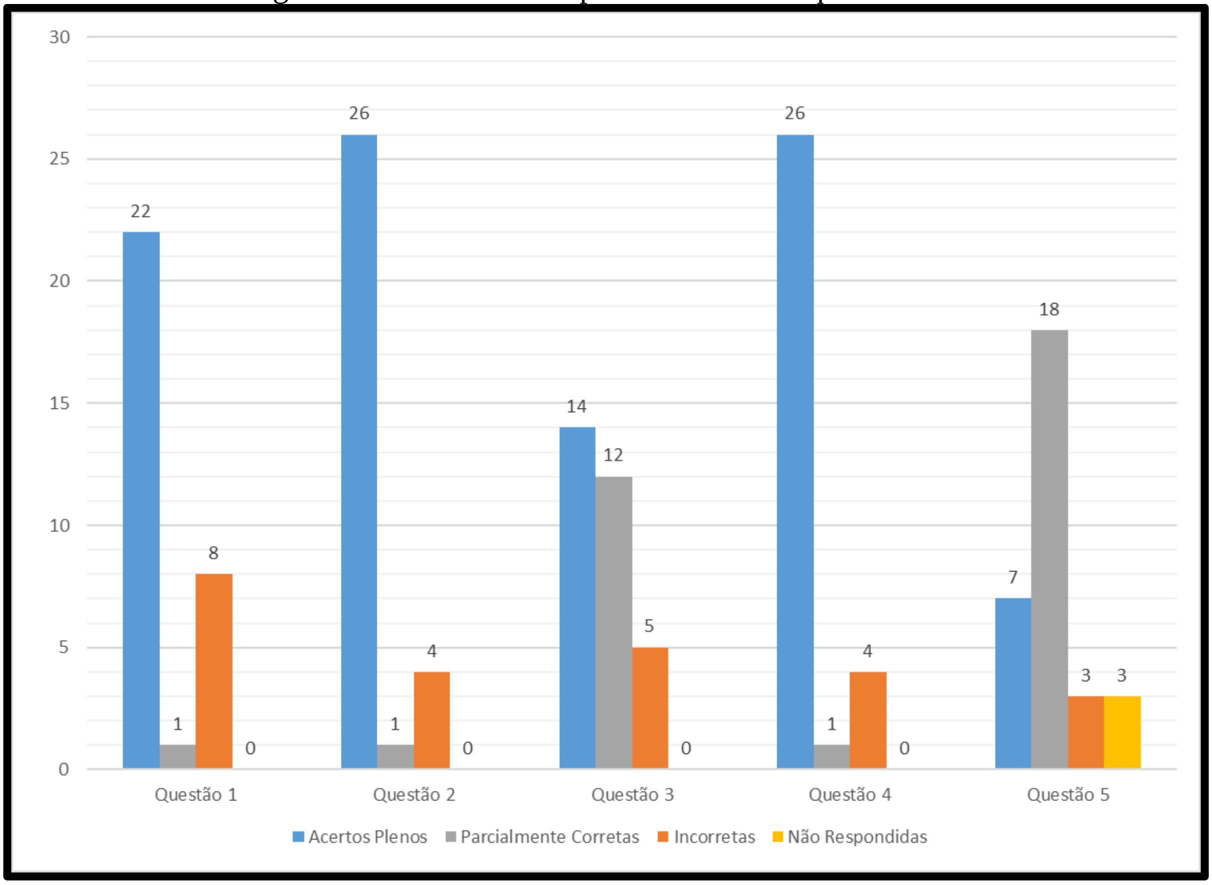
1. Acerto Pleno (AP): Para esta categoria, foram consideradas as respostas que apresentaram uso dos conceitos de volume corretamente e obtiveram total acerto da questão;
2. Parcialmente Correta (PC): Nesta categoria, foram consideradas as respostas que apresentaram uso correto do conceito de volume, porém não foram capazes de apresentar a solução correta para a questão;
3. Incorretas (I): Nesta categoria, foram consideradas as respostas que apresentaram um raciocínio que não correspondia ao exigido na questão e, consequentemente, não apresentaram a resposta correta;
4. Não respondidas (NR): Nesta categoria, foram consideradas as questões que tiveram ausência de resposta.

Por fim, a análise das respostas obtidas foi realizada sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, de forma a identificar elementos da mesma que estejam relacionados com os dados obtidos.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Quatro das cinco questões presentes no questionário obtiveram a maioria das respostas classificadas como AP, sendo essas as quatro primeiras questões, a quinta e última questão obteve a maioria das respostas classificadas como PC, também foi a única questão na qual houve ausência de respostas. As quantidades das respostas já categorizadas são apresentadas na Figura 6.

Figura 6 – Gráfico das respostas obtidas no questionário

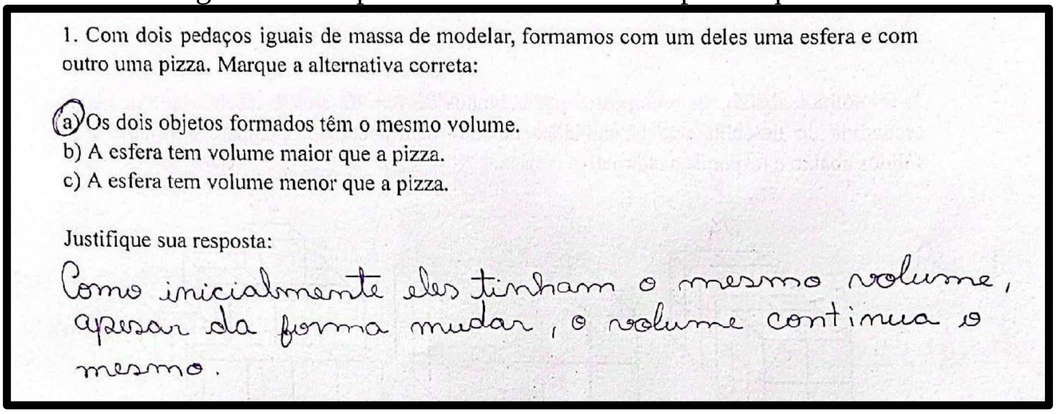


Elaborado pelo autor (2025)

O principal critério utilizado para categorizar cada resposta obtida foi considerar se a resposta elaborada pelo discente foi satisfatória para demonstrar o que era solicitado por cada questão. Nos casos em que a resposta fornecida não era totalmente satisfatória para a questão que estava sendo discutida, buscou-se analisar as estratégias que foram utilizadas e se estas estratégias foram coerentes com a proposta da questão.

Para a primeira questão, foi observado que a justificativa utilizada na maioria das respostas foi que as quantidades de massa utilizadas para formar a esfera e a pizza são as mesmas, ambas possuem o mesmo volume, uma vez que a quantidade de massa não se altera à medida que o objeto muda de formato. Temos como exemplo a resposta do estudante M-12 apresentada na Figura 7.

Figura 7 – Resposta do estudante M-12 para a questão 1


1. Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

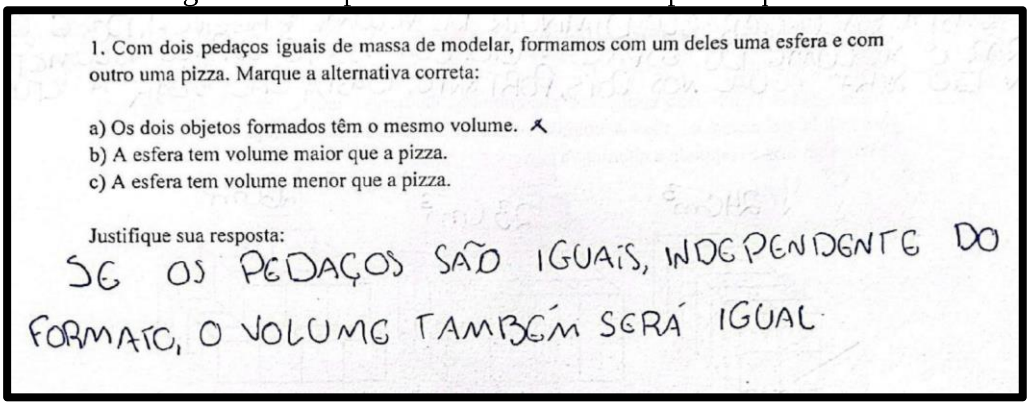
a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
b) A esfera tem volume maior que a pizza.
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:
Como inicialmente eles tinham o mesmo volume, apesar da forma mudar, o volume continua o mesmo.

Acervo da pesquisa (2025)

A resposta de M-12 destaca que o formato pode ser desprezado quando trata-se de duas figuras que busca-se compreender o volume. O estudante M-14, na Figura 8, ilustra uma outra resposta semelhante à anterior, trabalhando a ideia de conservação do volume.

Figura 8 – Resposta do estudante M-14 para a questão 1


1. Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

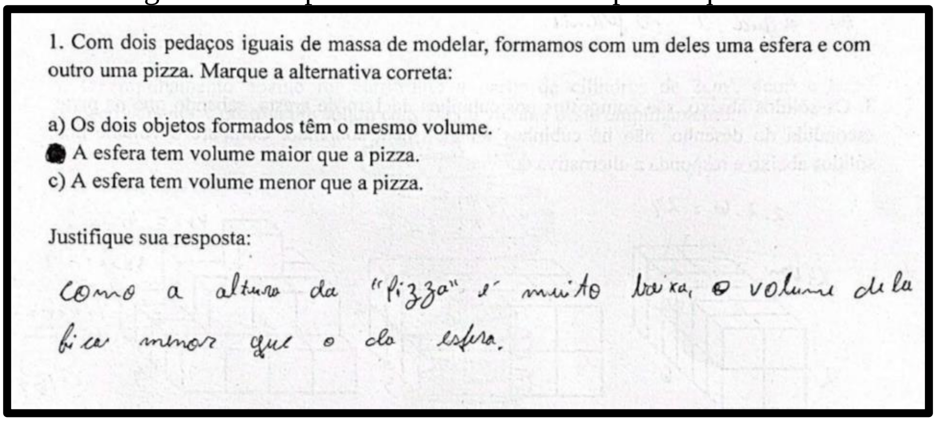
a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume. X
b) A esfera tem volume maior que a pizza.
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:
SE OS PEDAÇOS SÃO IGUAIS, INDEPENDENTE DO FORMATO, O VOLUME TAMBÉM SERÁ IGUAL.

Acervo da pesquisa (2025)

M-14 destaca a independência do formato ao se trabalhar o volume, este fato deixa evidente que o grupo classificado como AP compreende que a transformação da forma não altera o volume. No entanto, houveram respostas que alegavam que o formato de esfera possuiria volume maior em comparação ao formato de pizza. Temos como exemplo a resposta do estudante M-1 na Figura 9.

Figura 9 – Resposta do estudante M-1 para a questão 1



1. Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
b) A esfera tem volume maior que a pizza.
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:

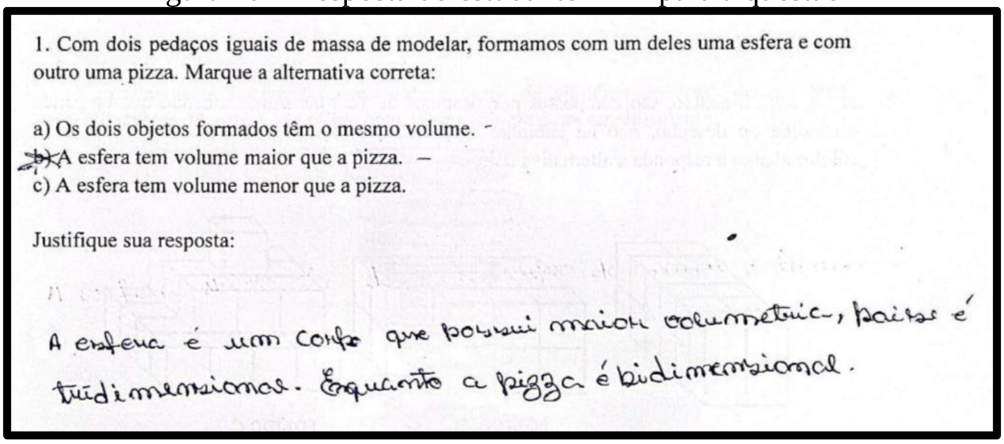
como a altura da "pizza" é muito baixa, o volume dela fica menor que o da esfera.

Acervo da pesquisa (2025)

A justificativa de M-1 diz respeito ao formato de pizza ter uma “altura” menor em comparação ao formato de esfera. Deste modo, observamos que o estudante pode estar convicto na equação geral do cálculo de volume - $Volume\ =\ Área\ da\ base\ \cdot altura$ - e, portanto, a “altura” da pizza implica um menor volume quando comparado à “altura” (diâmetro) da esfera.

Houve outra justificativa para este tipo de resposta, sendo apresentada na Figura 10 a resolução do estudante EP-2.

Figura 10 – Resposta do estudante EP-2 para a questão 1



1. Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume. –
b) A esfera tem volume maior que a pizza. –
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:

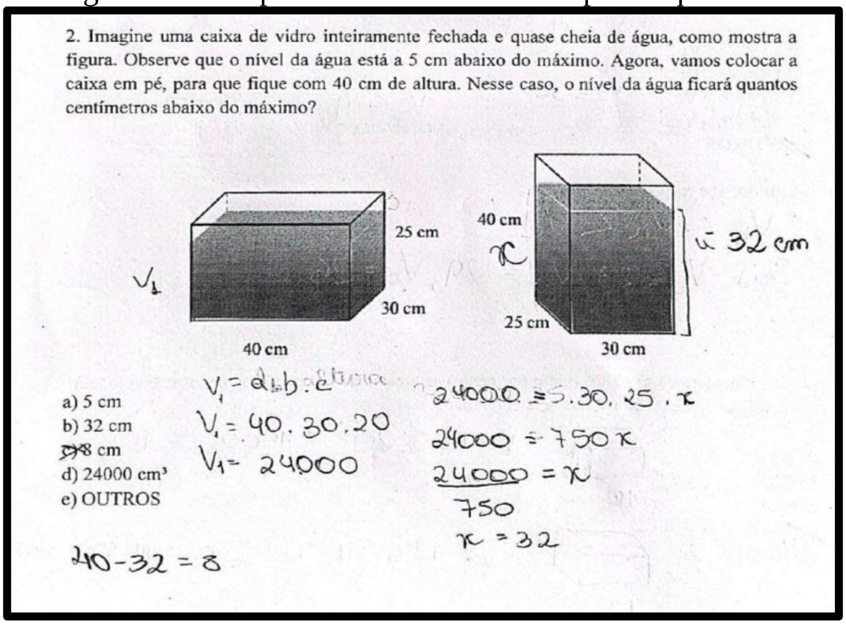
A esfera é um corpo que possui maior volumetria, pois é tridimensional. Enquanto a pizza é bidimensional.

Acervo da pesquisa (2025)

Nesta justificativa, o estudante afirma que a esfera possui volume maior devido ao fato de a esfera ser uma figura geométrica tridimensional, enquanto que a pizza é uma figura bidimensional, havendo assim um equívoco, pois ambas figuras são tridimensionais. Acreditamos que a “pizza” é um exemplo corriqueiro para ser estudada a área de figuras circulares, deste modo, EP-2 pode estar preso a esta abstração. Outro fator a ser destacado é o curso de EP-2 que não possui a disciplina de Matemática III, portanto, podemos assumir que o estudante carrega a compreensão trabalhada ainda na educação básica.

Ao analisar as respostas direcionadas para a segunda questão, categorizadas como AP, foi constatado que a estratégia mais utilizada para responder à questão foi determinar o volume ocupado pela água na primeira situação apresentada e, em seguida, determinar a altura em que o volume de água se encontrava na segunda situação, uma vez que o volume de água se manteve o mesmo. A resposta do estudante M-26 seguiu esta linha de raciocínio.

Figura 11 – Resposta do estudante M-26 para a questão 2



2. Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?

a) 5 cm
b) 32 cm
c) 8 cm
d) 24000 cm³
e) OUTROS

$V_1 = a.b.c$
$V_1 = 40.30.20$
$V_1 = 24000$

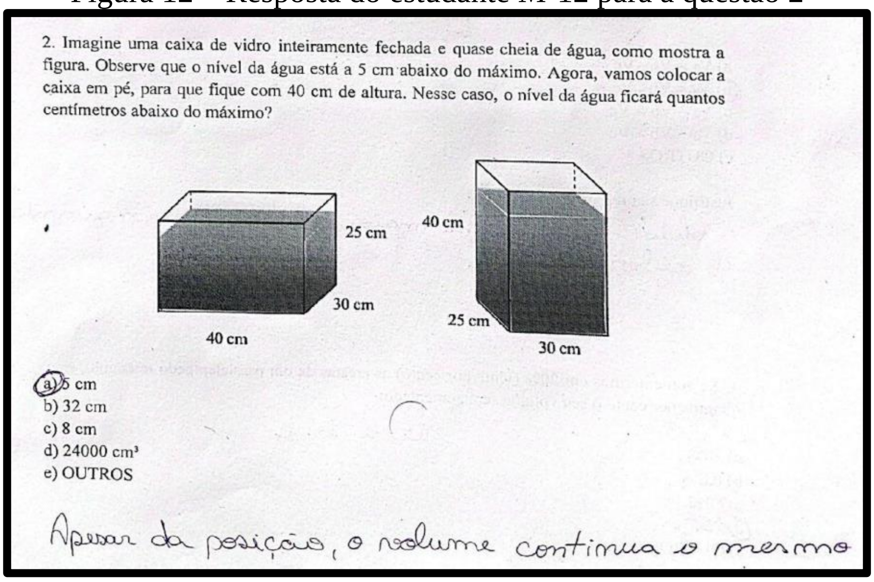
$24000 = 5.30.25.x$
$24000 = 750x$
$\frac{24000}{750} = x$
$x = 32$

$40 - 32 = 8$

Acervo da pesquisa (2025)

Para as quatro respostas categorizadas como incorretas, houveram erros relacionados à interpretação do problema. Temos como exemplo a resposta do estudante M-12.

Figura 12 – Resposta do estudante M-12 para a questão 2



2. Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?

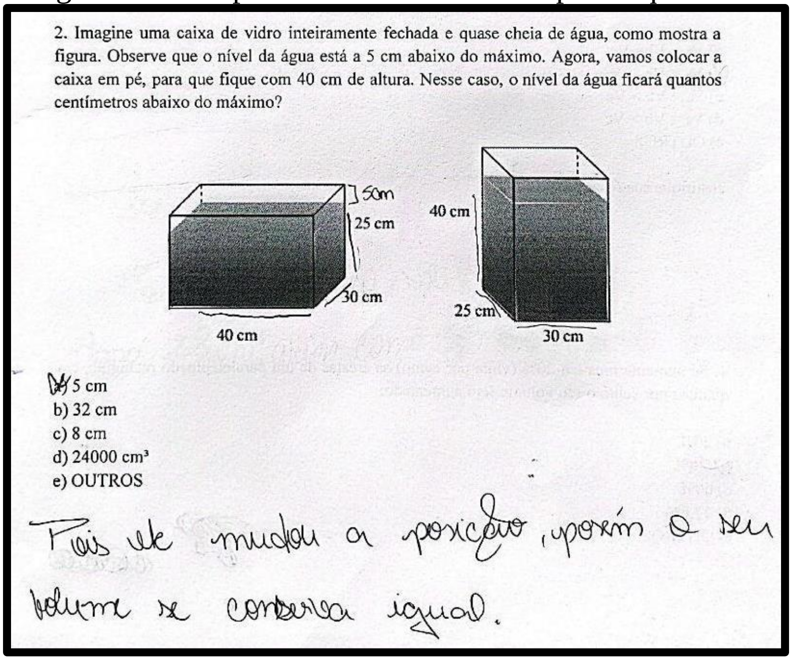
a) 5 cm
b) 32 cm
c) 8 cm
d) 24000 cm³
e) OUTROS

Apesar da posição, o volume continua o mesmo

Acervo da pesquisa (2025)

Acreditamos que os erros, exemplificados pela resposta de M-12, ocorreram devido aos discentes não terem percebido a diferença entre a altura da água e a aresta do sólido que o contém, a qual foi alterada ao deixar esse sólido em pé. Outro exemplo é a resposta do estudante M-13, ilustrada na Figura 13.

Figura 13 – Resposta do estudante M-13 para a questão 2


2. Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?

a) 5 cm
b) 32 cm
c) 8 cm
d) 24000 cm³
e) OUTROS

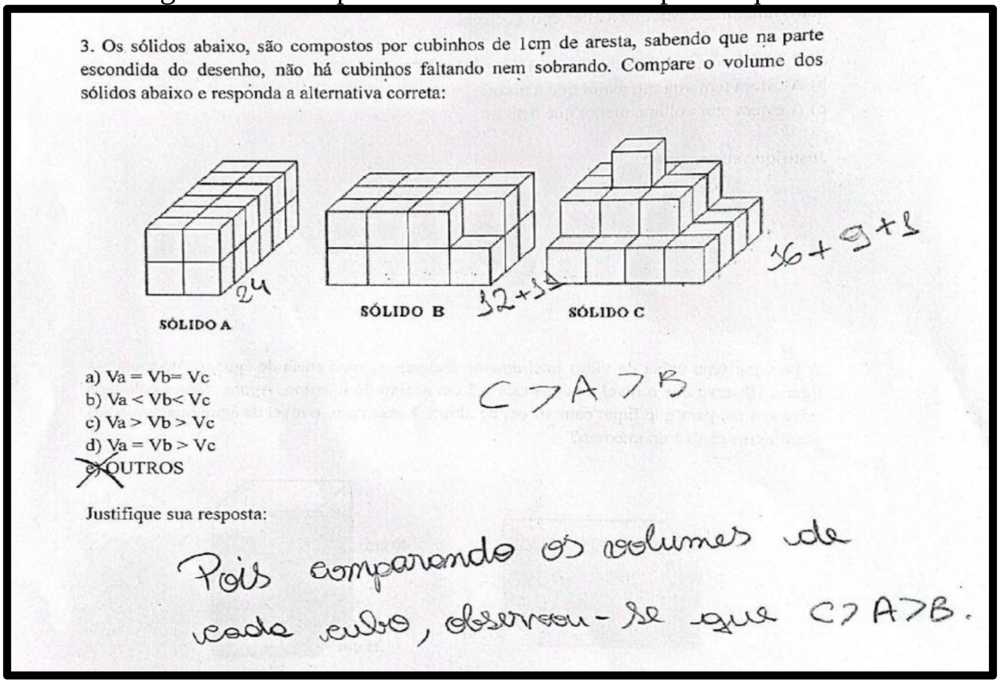
Pois ele mudou a posição, porém o seu volume se conserva igual.

Acervo da pesquisa (2025)

Observamos que M-13 compreende que o volume não se alterou, porém, o mesmo não considerou que o bloco foi movido e, portanto, a medida interpretada como altura foi alterada. Deste modo, a distância entre a superfície da água e a borda do recipiente também foi modificada.

Ao analisar as respostas à questão 3, categorizadas como AP, a principal estratégia utilizada foi a de contar as unidades de centímetros cúbicos, uma vez que os cubos contêm 1 cm de aresta, que compõem os sólidos apresentados, como mostra a resposta do estudante M-17.

Figura 14 – Resposta do estudante M-17 para a questão 3


3. Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:

a) Va = Vb= Vc
b) Va < Vb< Vc
c) Va > Vb > Vc
d) Va = Vb > Vc
e) OUTROS

C > A > B

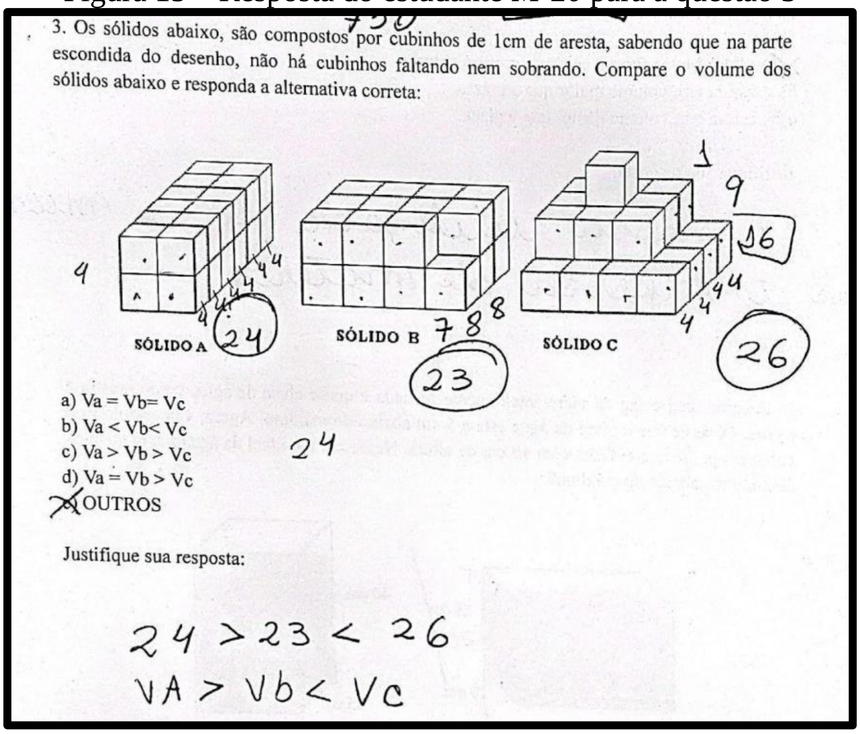
Justifique sua resposta:

Pois comparando os volumes de cada cubo, observou-se que C > A > B.

Acervo da pesquisa (2025)

Ao analisar a questão 3, foi possível constatar que todas as respostas classificadas como PC apresentaram o cálculo correto dos volumes dos sólidos apresentados na questão, porém não apresentaram a comparação correta entre os volumes desses sólidos, ver Figura 15.

Figura 15 – Resposta do estudante M-20 para a questão 3


3. Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:

a) Va = Vb= Vc
b) Va < Vb< Vc
c) Va > Vb > Vc
d) Va = Vb > Vc
e) OUTROS

24

Justifique sua resposta:

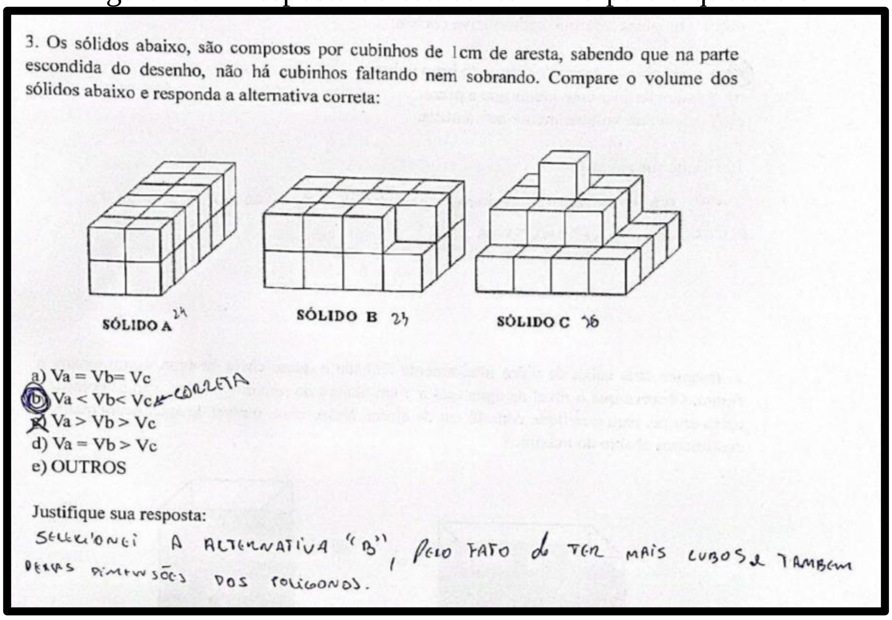
24 > 23 < 26
VA > Vb < Vc

Acervo da pesquisa (2025)

As respostas apresentaram a comparação Va > Vb < Vc, ao invés de Vc > Va > Vb, como mostra o exemplo anterior. Desse modo, observamos que estes estudantes possuem compreensão sobre o conceito de volume ao ser utilizada a mesma medida, entretanto a resposta de M-20 demonstra equívoco com relação à notação algébrica de comparação.

Em relação às respostas classificadas como incorretas, estimamos que estas ocorreram devido à possibilidade de os estudantes não possuírem domínio dos símbolos algébricos de comparação. Temos como exemplo a resposta do estudante M-19 na Figura 16.

Figura 16 – Resposta do estudante M-19 para a questão 3

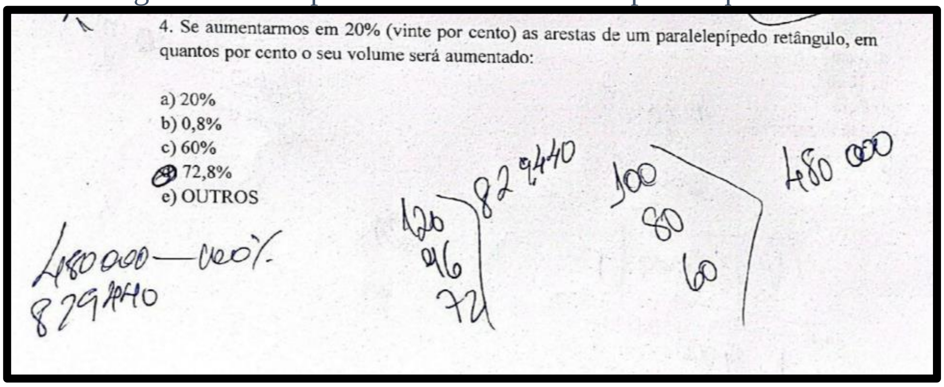


Acervo da pesquisa (2025)

É observado que o M-19 destaca o volume corretamente ao lado do título de cada sólido, porém se equivoca na marcação da alternativa. Além disso, é visto que ele varia entre duas alternativas que se diferenciam apenas pelos sinais de comparação, de modo a demonstrar que não diferencia com clareza os símbolos "maior que" e "menor que".

Para a questão 4 houve uma quantidade significativa de AP, a mesma quantidade que ocorreu na questão 2. Uma das estratégias utilizadas consistiu em atribuir valores numéricos de escolha livre às arestas do paralelepípedo retângulo e aumentá-los em 20% como a questão relatava. Temos como exemplo desta linha de raciocínio a resposta do estudante EC-1 na Figura 17.

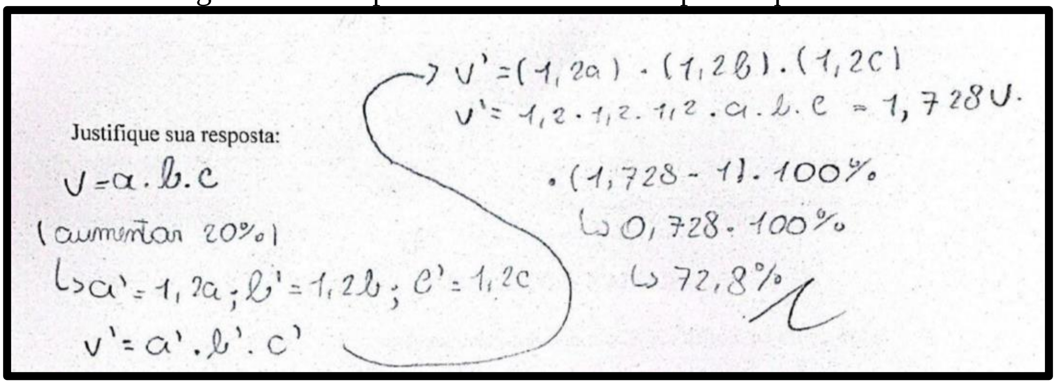
Figura 17 – Resposta do estudante EC-1 para a questão 4



Acervo da pesquisa (2025)

Uma outra estratégia utilizada consistiu em realizar uma representação algébrica do cálculo que determina o volume do paralelepípedo retângulo, atribuindo o aumento em porcentagem às suas medidas, determinando assim o valor em porcentagem que o volume aumentou. Temos como exemplo dessa linha de raciocínio a resposta do estudante M-7, ilustrada na Figura 18.

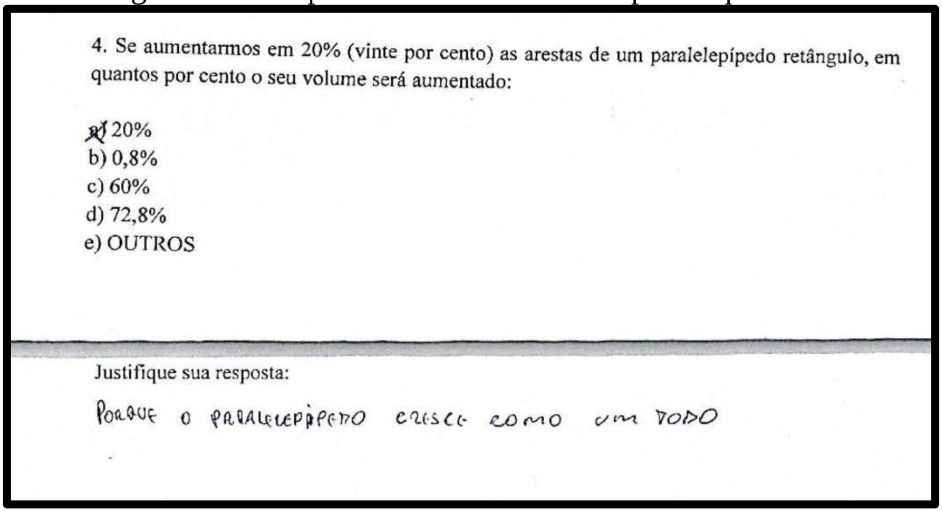
Figura 18 – Resposta do estudante M-7 para a questão 4



Acervo da pesquisa (2025)

A respeito das respostas categorizadas como incorretas, pudemos observar que essas respostas não atingiram o objetivo proposto pela questão devido à dificuldade que alguns estudantes tiveram para elaborar uma estratégia de resolução. Por exemplo, a resposta de M-19 apresentada na Figura 19.

Figura 19 – Resposta do estudante M-19 para a questão 4



4. Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

a) 20%
b) 0,8%
c) 60%
d) 72,8%
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

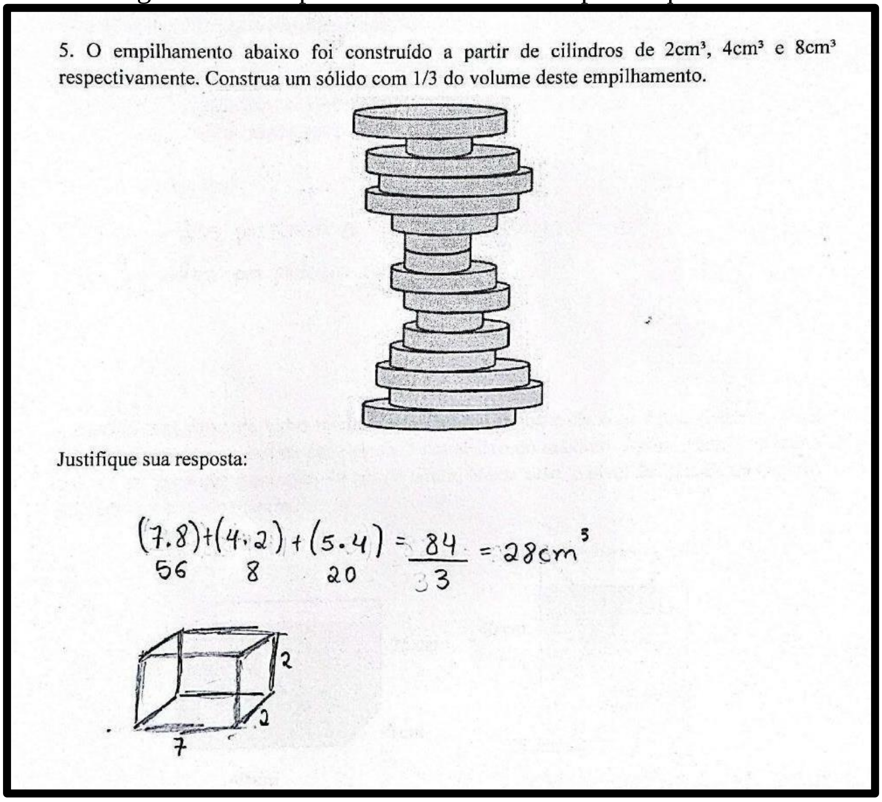
PORQUE O PARALELEPÍPEDO CRESCE COMO UM TODO

Acervo da pesquisa (2025)

O estudante estabelece uma relação direta entre as medidas do paralelepípedo retângulo e suas medidas, assumindo que o aumento da medida da aresta em 20% implica um aumento igual no volume. Tal fato demonstra que há uma lacuna na compreensão da relação medidas-volume.

Por fim, a questão 5 foi a única questão que não obteve em sua maioria respostas categorizadas como AP. Nas respostas corretas, os estudantes conseguiram interpretar o problema e houveram distintos exemplos de sólidos geométricos cuja medida de volume satisfazia a condição estabelecida pela questão. A seguir, na Figura 20, temos como exemplo a resposta do estudante M-9.

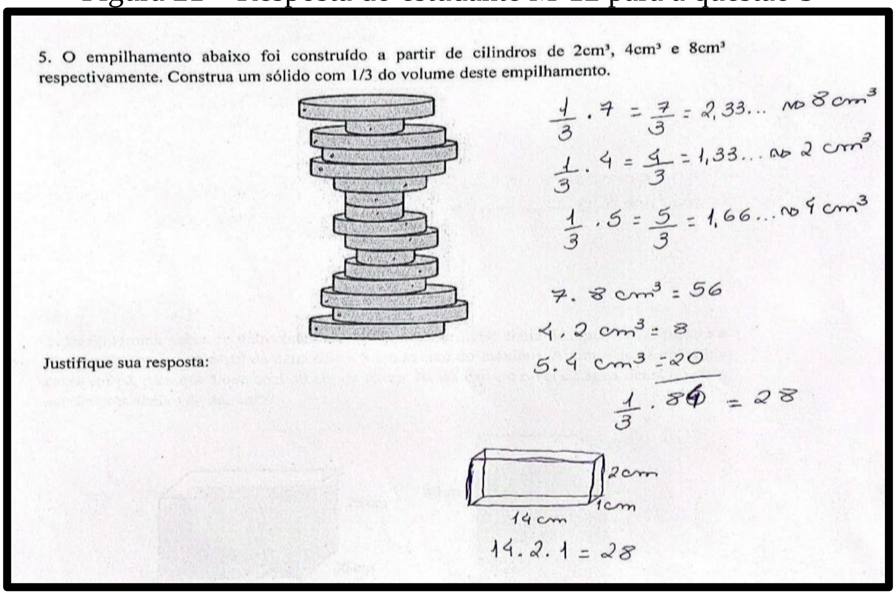
Figura 20 – Resposta do estudante M-9 para a questão 5



Acervo da pesquisa (2025)

Temos como um segundo exemplo, ilustrado na Figura 21, a resposta do estudante M-12, a qual utilizou como exemplo de sólido geométrico um paralelepípedo com arestas de comprimento diferentes em comparação com a resposta anterior.

Figura 21 – Resposta do estudante M-12 para a questão 5

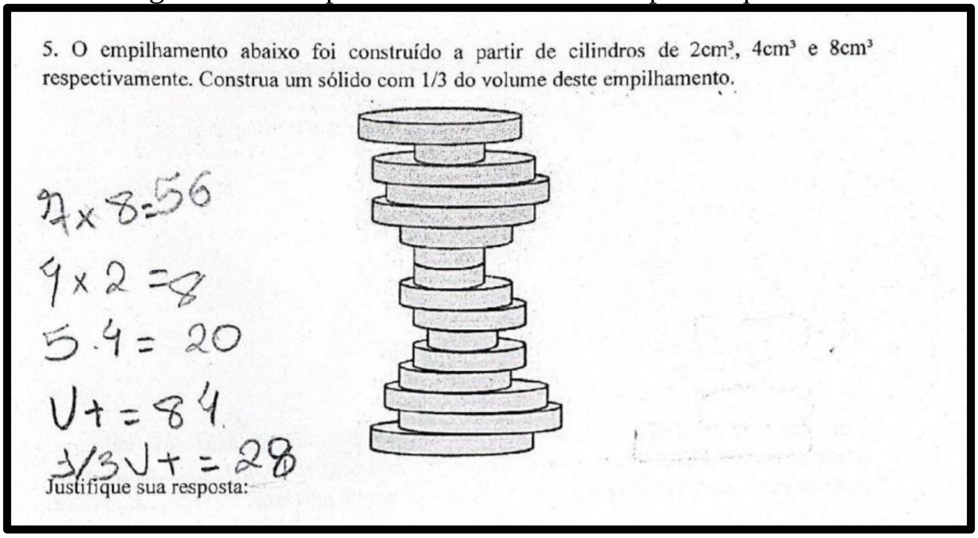


Acervo da pesquisa (2025)

Dentre os AP observou-se que os estudantes optaram por construir sólidos retangulares e evitando corpos redondos, que implicaria um cálculo mais complexo para determinar a base circular. Os sólidos desenhados, destacam também as medidas inteiras das arestas;

Na questão cinco, a maioria das respostas obtidas foram categorizadas como parcialmente corretas. Nestas respostas, os estudantes conseguiram determinar o volume do empilhamento de cilindros, porém não conseguiram construir o sólido geométrico que era solicitado pela questão, como foi o caso do estudante M-17, apresentado na figura 22.

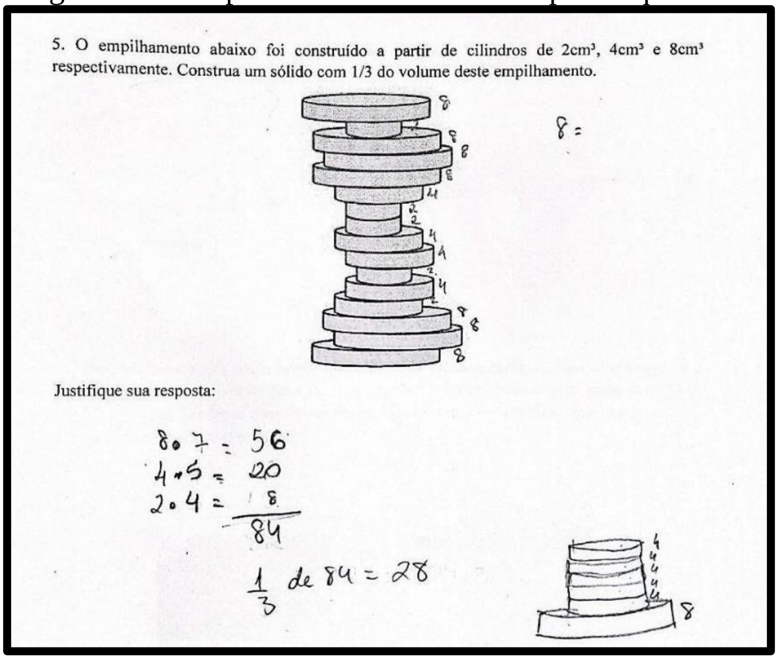
Figura 22 – Resposta do estudante M-17 para a questão 5



Acervo da pesquisa (2025)

Alguns estudantes acabaram por construir um empilhamento, utilizando os mesmos cilindros ilustrados na questão, que continha o volume descrito pela mesma, porém não apresentaram a construção do sólido geométrico que continha essa medida de volume, sendo este o caso do estudante M-11.

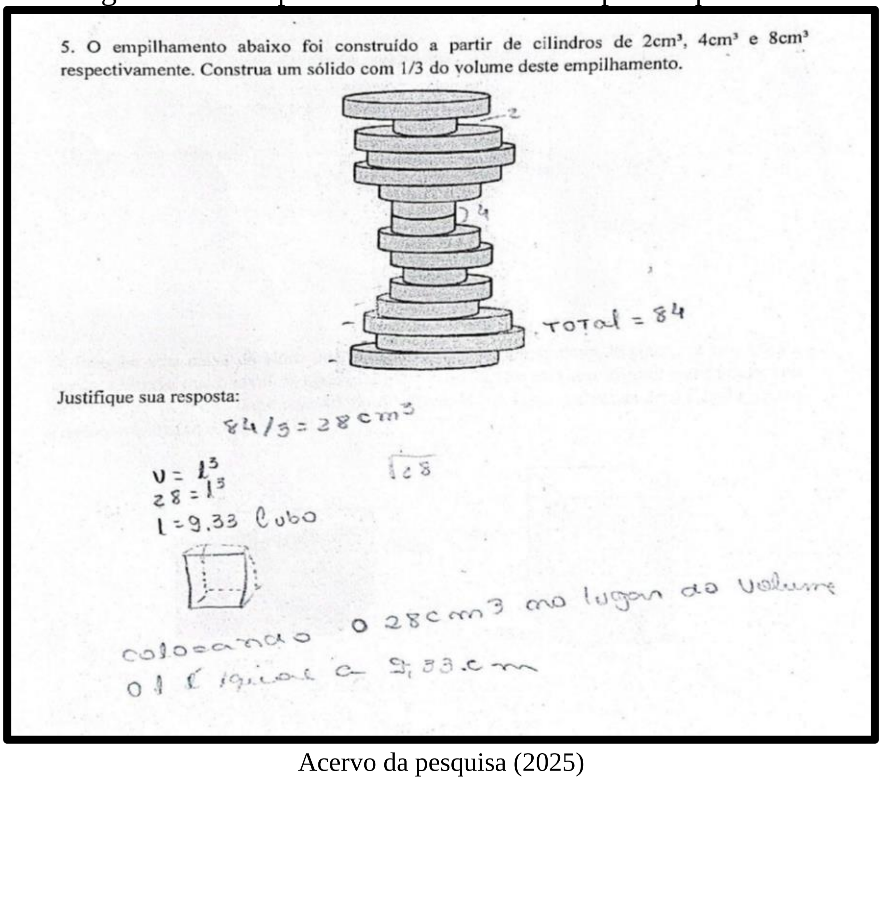
Figura 23 – Resposta do estudante M-11 para a questão 5



Acervo da pesquisa (2025)

Observamos, na resposta de M-11 que o estudante opta por organizar os cilindros e, portanto, unir diferentes sólidos geométricos, não sendo caracterizado como um único objeto. Por fim, observamos na Figura 24, o uso da estratégia correta para contar o volume, porém há um equívoco algébrico que interferiu na construção do sólido.

Figura 24 – Resposta do estudante M-16 para a questão 5

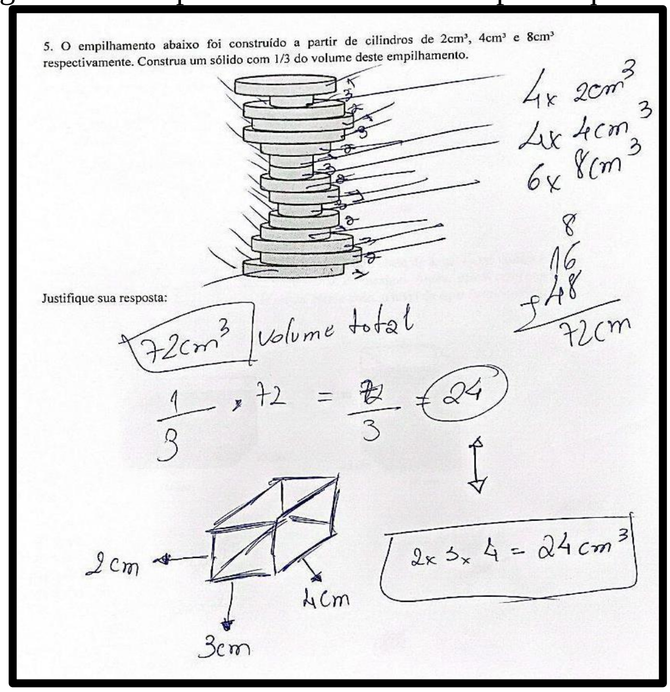


Acervo da pesquisa (2025)

Deste modo, observamos que M-16 compreende os meios para se obter o volume de um cubo, expressando a equação que relaciona a aresta ao volume. Porém, se equivocou ao usar a raiz quadrada ao invés da cúbica.

As três respostas classificadas como incorretas apresentaram diferentes erros. O estudante EC-1 cometeu um equívoco ao determinar o volume total do empilhamento, influenciando assim em todo o cálculo restante para a conclusão da questão.

Figura 25 – Resposta do estudante EC-1 para a questão 5

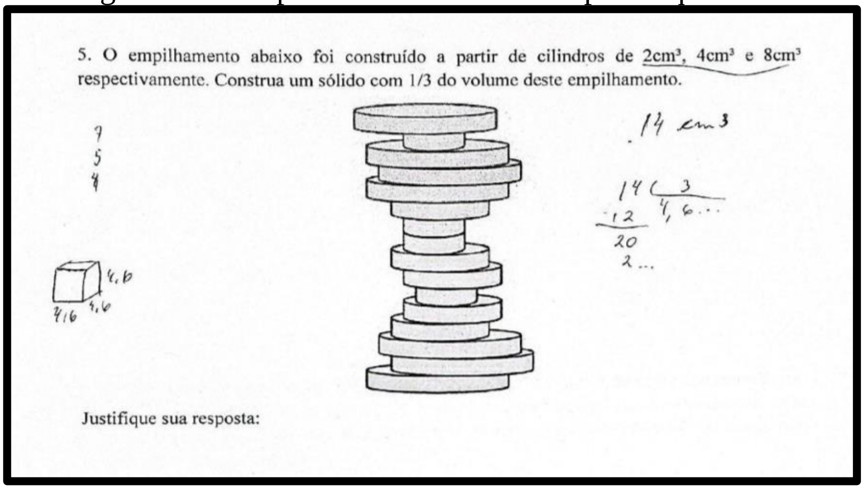


Acervo da pesquisa (2025)

Entretanto, o estudante EC-1 demonstra compreender as estratégias para se obter um sólido geométrico com volume pré-determinado.

Já o estudante M-1 cometeu um erro de interpretação ao considerar que o volume total ao qual a questão estava se referindo era a soma dos volumes dos tipos de cilindros que formavam o empilhamento.

Figura 26 – Resposta do estudante M-1 para a questão 5

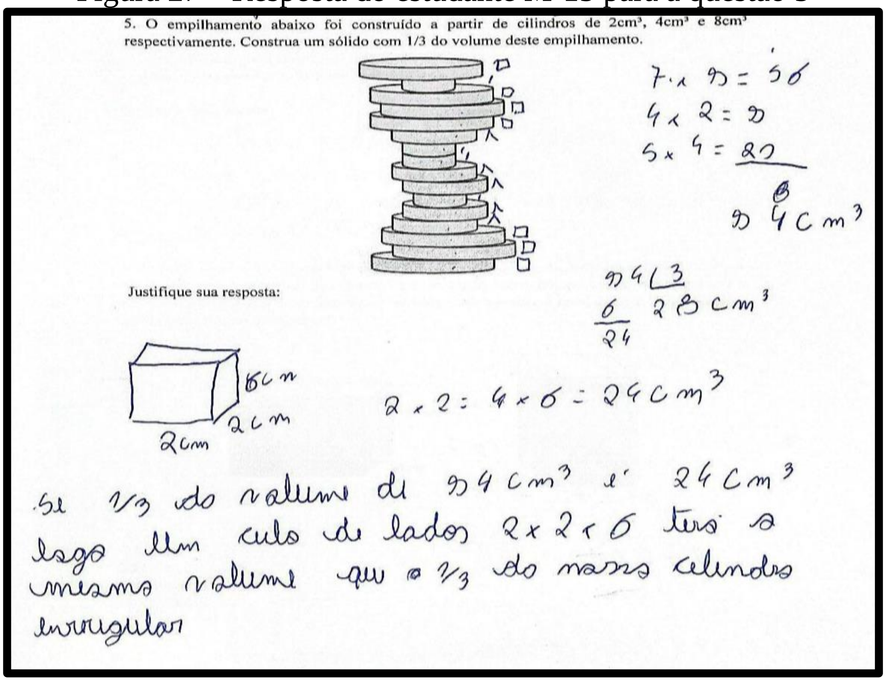


Acervo da pesquisa (2025)

Observamos, na Figura 26, que M-1 além de não compreender a proposta da questão, ele também não conseguiu formular um sólido geométrico com o volume encontrado. Observa-se que, semelhante ao apresentado por M-16, M-1 não aplica a raiz cúbica, mas, uma divisão por três, indicando que o volume é a soma de uma aresta de cada dimensão.

Por fim, o estudante M-15 calculou de forma correta o volume total do empilhamento, porém cometeu um equívoco ao calcular o valor de 1/3 desse volume, ocasionando assim em outro erro ao elaborar a resposta final.

Figura 27 – Resposta do estudante M-15 para a questão 5



Acervo da pesquisa (2025)

Acreditamos que M-15 possui domínio dos conceitos volumétricos, pois demonstra conhecer como calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, obtendo este valor multiplicando as medidas de cada dimensão. Contudo, o cálculo aritmético não obtém o valor desejado e equivoca-se nisto.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando o objetivo geral estabelecido na presente pesquisa, o qual consistiu em analisar as estratégias mobilizadas por estudantes cursistas de uma disciplina da licenciatura em Matemática ao responderem problemas sobre diferentes conceitos relacionados a volume, pudemos constatar que o mesmo foi contemplado nas etapas que compõem o trabalho.

Os resultados obtidos demonstraram uma maior quantidade de acertos plenos em quatro das cinco questões presentes no questionário, apresentando assim um bom indicativo a respeito das concepções pertencentes aos licenciandos. Desta maneira, os resultados possibilitaram a constatação de diferentes estratégias mobilizadas pelos licenciandos.

Ao analisar as respostas classificadas como PC é possível constatar que, mesmo quando os estudantes apresentam conhecimento assimilado de aspectos geométricos, é possível que a resposta desenvolvida não seja satisfatória para a questão em discussão, uma vez que o desenvolvimento da solução para questões como 3, 4 e 5 pode requerer um conhecimento assimilado pertencente a um outro campo de conhecimento da Matemática, como Álgebra.

Foi possível constatar a importância da disciplina "Matemática III" para o curso de licenciatura em Matemática, visto que, entre os participantes que não eram estudantes do curso de licenciatura em Matemática, apenas um desenvolveu uma resposta categorizada como AP para a questão 1, enquanto os outros três estudantes oriundos de outros cursos desenvolveram respostas incorretas. Por outro lado, as respostas desenvolvidas para as questões 1 e 2 demonstram que o conceito de volume não ser alterado pelo formato da matéria que constitui este volume é bem consolidado pelos estudantes do curso de licenciatura em Matemática.

Foi possível perceber uma relação inicial entre os resultados obtidos e o conceito C = (S, I, R) presente na Teoria dos Campos Conceituais, sendo possível traçar um paralelo entre os seguintes elementos: as situações (S) representadas pelos problemas apresentados; os invariantes operatórios (I) representados pelas mobilizações e estratégias apresentadas pelos estudantes e as representações (R) representadas pelos elementos utilizados para o desenvolvimento de soluções.

A pesquisa que ora foi apresentada tem entre as suas limitações o curto tempo de interação entre pesquisador e participante, deste modo compreendemos que para ser desenvolvida uma análise mais aprofundada à luz da Teoria dos Campos Conceituais seria necessário mais tempo para identificar os invariantes operatórios, regras de ação e teoremas em ação dos estudantes, deste modo os esquemas dos estudantes se tornariam mais evidente. Outro fator influente para o curto espaço de tempo citado foi o calendário acadêmico do semestre vigente à esta pesquisa, o qual determinou recesso de um mês durante o semestre. Desta forma, consideramos que pesquisas com menos participantes e mais instrumentos de coleta poderão proporcionar análises aprofundadas a respeito dos esquemas de cada estudante.

Acreditamos que as discussões neste trabalho podem contribuir para futuros estudos em áreas de conhecimentos que se fizeram presentes nesta pesquisa, como as relações algébricas, porcentagem e razão e proporção. Desta forma, a realização de pesquisas para compreender a consolidação desses conceitos por parte de um determinado grupo de estudantes se torna viável.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CARVALHO JR., G. D.; AGUIAR JR., O. Os Campos Conceituais de Vergnaud Como Ferramenta Para o Planejamento Didático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**. Florianópolis, v. 25, n. 2, p. 207-227, ago. 2008.

FIGUEIREDO. A. P. N. B. **Resolução de Problemas Sobre a Grandeza Volume por Alunos do Ensino Médio**: Um Estudo Sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 184f. 2013. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13227 Acesso em 18 fev. 2025.

MER, I. A. S. V. D. **Aprendizagem do Conceito de Volume**: Uma Proposta Didática Compartilhada com Licenciandos da Matemática. 103f. 2017. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia. Ituiutaba, MG, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/19712 Acesso em 18 fev. 2025.

MORAIS, L. B. **Análise da Abordagem da Grandeza Volume em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio**. 134f. 2013. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13239 Acesso em 31 jan. 2025.

MOREIRA, M. A. A Teoria Dos Campos Conceituais de Vergnaud, O Ensino de Ciências e A Pesquisa Nesta Área. **Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

OLIVEIRA, G. R. F. **Investigação do Papel das Grandezas Físicas na Construção do Conceito de Volume**. 173f. 2007. Tese. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, 2007. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/4091/1/arquivo5452_1.pdf Acesso em 31 jan. 2025.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O ensino da geometria na educação básica**: realidade e possibilidades. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em 25 mar. 2025.

SANTANA, E.; ALVES, A. A.; NUNES, C. B. A Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1162-1180, dez. 2015.

SOARES, D. R. **Ensino do Conceito de Volume no Ensino Fundamental:** Análise De Propostas Contidas Em Pesquisas Realizadas Na Perspectiva Histórico-Cultural. 98f. 2022.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, ES, 2022. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/2096/TCC_Ensino_Conceito_Volume_Ensino_Fundamental.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 24 mar. 2025.

SOARES, S. J. Pesquisa Científica: Uma Abordagem Sobre O Método Qualitativo. **Revista Ciranda**. Montes Claros (MG), v. 1, n. 3, p. 168-180, jan./dez. 2019.

WANDERLEY, R. A. J.; SOUZA, M. A. V. F. Lesson Study como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática sobre o Conceito de Volume. **Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS**. Campo Grande (MS), v. 13, n. 33, p. 1-20, 2020.