UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Giovane Paes Galindo Neto

K-Teoria e Operadores de Fredholm

Recife

2021

Giovane Paes Galindo Neto

K-Teoria e Operadores de Fredholm

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Dr. Henrique de Barros Correia Vitório

Recife

2021

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Neto, Giovane Paes Galindo.
K-teoria e operadores de Fredholm / Giovane Paes Galindo Neto. - Recife, 2021.
67f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.
Orientação: Henrique de Barros Correia Vitorio.
Inclui referências.

1. K-teoria; 2. Operadores de Fredholm; 3. Periodicidade de Bott. I. Vitorio, Henrique de Barros Correia. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

GIOVANE PAES GALINDO NETO

K-TEORIA E OPERADORES DE FREDHOLM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 29/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitório (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ricardo Turolla Bortolotti (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Drª. Ana Cláudia da Silva Moreira (Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Dedicado a todos que me ajudaram a chegar até aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Essa dissertação começa por introduzir resultados básicos sobre a teoria de fibrados vetoriais para em seguida definir os anéis de K-teoria, definidos a partir de diferenças formais de fibrados vetoriais. Destacamos as propriedades cohomológicas dessa teoria assim como a operação de produto externo. A partir dessa operação entendemos o principal teorema da K-teoria, o teorema da periodicidade de Bott, que torna a teoria cohomológica em uma cohomologia cíclica. Fazemos também uma revisão sobre operadores de Fredholm em espaços de Hilbert, assim como o índice destes operadores e definimos os operadores de Wienner-Hopf. Em seguida definimos os fibrados de Hilbert e usamos o teorema de Kupier para mostrar que esses fibrados são triviais e então construimos o *index bundle* que generaliza a definição dos operadores de Fredholm para fibrados de Hilbert, associando um elemento do anel de K-teoria para cada operador de Fredholm nos fibrados de Hilbert. Usamos então essa construção para criar uma inversa do mapa de Bott e assim provar o teorema da periodicidade de Bott.

Palavras-chaves: Fibrados vetoriais complexos, K-teoria, Periodicidade de Bott, Operadores de Fredholm, Index Bundle, Teorema de Atiyah-Jänich

ABSTRACT

This dissertation begins by introducing basic results on the theory of vector bundles and then defining the K-theory rings, defined based on formal differences of vector bundles. We highlight the cohomological properties of this theory as well as the external product operation. From this operation we understand the main theorem of K-theory, Bott's periodicity theorem, which turns the cohomological theory into a cyclic cohomology. We also review Fredholm operators in Hilbert spaces, as well as the index of these operators and define the Wienner-Hopf operators. Next, we define the Hilbert bundles and use Kupier's theorem to show that these bundles are trivial and then we construct the *index bundle* that generalizes the definition of the Fredholm operators for Hilbert bundles, associating an element of the ring of K -theory for each Fredholm operator in Hilbert bundles. We then use this construction to create an inverse of the Bott map and thus prove Bott's periodicity theorem.

Keywords: Complex vector bundles, K-theory, Bott's Periodicity, Fredholm Operators, Index Bundle, Atiyah-Jänich Theorem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em torno dos anos 60, M. Atiyah e F. Hirzebruch desenvolveram a K-teoria. Eles associaram a cada espaço topológico compacto um anel comutativo $K(X)$, a partir de classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre X. Estendendo a noção de $K(X)$, definiram também os anéis $K^{-n}(X)$ para $n > 0$ e surgiu assim uma teoria de cohomologia generalizada que, devido a toda estrutura extra do anel $K(X)$, provou-se bastante útil.

O resultado central da K-teoria é o Teorema da Periodicidade de Bott. A versão original desse teorema, devida a R. Bott, estabelece (no caso complexo) a periodicidade (de período 2) dos grupos de homotopia estável dos grupos unitários $U(n)$. Como observado por Atiyah, esse resultado se transporta para a K-teoria na forma de um isomorfismo

$$\beta : K(X) \to K^{-2}(X). \tag{1.1}$$

Esse isomorfismo estabelece o carácter cíclico dessa nova teoria de cohomologia, que por sua vez se provou fundamental em muitas aplicações da K-teoria, como, por exemplo, no problema que procura saber se existem álgebras de divisão reais em dimensões diferentes de 1, 2, 4 e 8. Dessa forma, colaboraram no avanço de diversas outras teorias.

Talvez a maior influência da K-teoria seja na Teoria do Índice, extensivamente desenvolvida por Atiyah e I. Singer. Nas palavras de Atiyah (ATIYAH, 2018):

> *"The full development of index theory in its various generalizations makes extensive use of K-theory, and conversely index theory can be used to give proofs of the basic periodicity theorem. In fact, K-theory and index theory really become fused into a single theory in which it is hard to disentangle the topology from the analysis."*

A Teoria do Índice estuda, de certa forma, o comportamento de invariantes topológicos e analíticos de operadores diferenciais agindo em seções de fibrados vetoriais. Um dos resultados mais profundos da matemática do século 20 é o Teorema do Índice de Atiyah-Singer. Em linhas gerais, esse resultado diz: dado um operador diferencial elíptico

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(F),$$

onde E e F são fibrados vetoriais sobre uma variedade compacta M, o seu *índice analítico*

$$Index(D) = Dim\ \ker(D) - Dim\ coker(D),$$

que é finito por causa da elipticidade de D e da compacidade de M, pode ser também calculado de uma maneira puramente topológica em termos do que se chama o símbolo principal $\sigma(D)$ de D.

Uma das generalizações desse teorema diz respeito a uma família de operadores elípticos parametrizada por um espaço topológico compacto X

$$D_x : \Gamma(E) \to \Gamma(F), \;\; x \in X.$$

Para uma tal família, a noção adequada de índice analítico não é mais dada por um número inteiro, mas sim por uma classe de K-teoria $Index(D) \in K(X)$, também chamada de *index bundle* da família D, que de certa forma dá informação sobre como $\ker(D_x)$ e $coker(D_x)$ variam com x. Nesse contexto, o Teorema do Índice de Atiyah-Singer mostra mais uma vez como a classe $Index(D)$ pode ser obtida por uma construção puramente topológica. De maneira geral, um operador linear L cujos núcleo $\ker(L)$ e co-núcleo $coker(L)$ têm dimensão finita é chamado operador de Fredholm.

Nessa dissertação, iremos buscar uma ligação entre topologia e análise, desenvolvendo uma ideia semelhante à descrita acima, mas em um contexto mais simples. Consideraremos uma classe de operadores lineares conhecidos como *operadores de Wiener-Hopf*, que são geralmente utilizados para solução de equações diferenciais, em especial, em problemas de previsões. Dada uma função contínua $f : S^1 \to \mathbb{C}$, o operador de Wiener-Hopf com símbolo f é o operador linear $T_f : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$, onde $\mathbb{H}_0$ é o espaço de Hilbert das funções $u \in L^2(S^1, \mathbb{C})$ com séries de Fourier da forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, dado por

$$T_f(u) \;=\; P(fu),$$

onde $P : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ é a projeção ortogonal sobre $\mathbb{H}_0$. Quando f toma valores em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, o operador T_f é de Fredholm e o seu índice analítico coincide com o invariante topológico dado por menos o número de rotação $w(f;0)$ da curva f em torno da origem

$$Index(T_f) \;=\; -w(f;0).$$

Trocando $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}^n$, obtemos operadores de Wiener-Hopf $T_f : \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n$, onde agora $f : S^1 \to M_n(\mathbb{C})$. Nesse caso, quando f toma valores em $GL_n(\mathbb{C})$, T_f é de Fredholm e $Index(T_f) \;=\; -w(det \circ f; 0)$. Esses resultados são provados no capítulo 4 e não dizem respeito a K-teoria. Esta desempenha um papel ao se considerar uma família de operadores de Wiener-Hopf parametrizada por um espaço topológico compacto X. Primeiramente, no contexto de famílias de operadores de Fredholm em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, a construção do index bundle estabelece um isomorfismo de grupos

$$Index : [X, \mathcal{F}(\mathbb{H})] \longrightarrow K(X),$$

onde $\mathcal{F}(\mathbb{H})$ é o conjunto dos operadores de Fredholm em $\mathbb{H}$, e $[X, \mathcal{F}(\mathbb{H})]$ é o conjunto das classes de homotopias de funções contínuas $L : X \to \mathcal{F}(\mathbb{H})$. Esse é um resultado devido a Atiyah e K. Jänich que é provado no capítulo 5. Uma família de operadores de Wiener-Hopf parametrizada por X é do tipo

$$T_{f_x} : \mathbb{H}_0 \otimes E_x \longrightarrow \mathbb{H}_0 \otimes E_x, \quad x \in X,$$

onde $x \mapsto E_x$ define um fibrado vetorial E sobre X e $f_x : S^1 \to GL(E_x)$. Através de uma leve generalização da construção do index bundle que permite que o espaço de Hilbert também varie com o ponto x, define-se o índice analítico da família $T_f = \{T_{f_x}\}_{x \in X}$ como sendo uma classe de K-teoria

$$Index(T_f) \in K(X).$$

Mostraremos nesse trabalho como essa construção fornece um homomorfismo $\alpha : K^{-2}(X) \to K(X)$ que é a inversa do homomorfismo (1.1). Isso provará que β é de fato um isomorfismo. Também, como β é construído em termos puramente K-teoréticos, obtemos o índice analítico $Index(T_f)$, aplicando-se uma construção topológica aos dados (E, f) usados para se definir a família T_f.

Essa dissertação está dividida do seguinte modo:

O Capítulo 2 faz uma breve revisão dos conceitos básicos de fibrados vetoriais seguido de alguns resultados importantes para o desenvolvimento da K-teoria. O Capítulo 3 define os funtores $K(X)$, suas variações e estuda suas propriedades cohomológicas e multiplicativas, finalizando com o enunciado do teorema de periodicidade. No Capítulo 4, desenvolve-se a teoria dos operadores de Fredholm e de Wiener-Hopf em espaços vetoriais. Por fim, no Capítulo 5 carrega-se essas construções fibra a fibra para fibrados vetoriais definindo o Index Bundle e provando os teoremas de Atiyah-Jänich e da periodicidade de Bott.

2 ALGUMAS DEFINIÇÕES E RESULTADOS SOBRE FIBRADOS VETORIAIS

Ao longo dessa dissertação, os espaços topológicos envolvidos serão sempre considerados Hausdorff. Também, dados espaços topológicos X e Y, por *mapa* $f : X \to Y$ entenderemos sempre uma função contínua.

Esta seção tem como principal referência (ATIYAH, 2018). Os detalhes que omitiremos podem ser encontrados nela.

2.1 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

Definição 2.1.1. Um fibrado vetorial complexo sobre um espaço topológico X é um espaço topológico E munido de um mapa sobrejetivo $\pi : E \to X$ tal que

i) $\pi^{-1}(\{x\})$ tem uma estrutura de espaço vetorial complexo para todo ponto $x \in X$; essa pré-imagem é dita a fibra sobre x e é denotada por E_x.

ii) Para todo $x \in X$, existem um aberto U_x de X , contendo x, e um homeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{C}^n$ (para certo n), que envia cada fibra $E_y = \pi^{-1}(\{y\})$ linearmente sobre $\{y\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$. Um tal homeomorfismo é dito uma trivialização local do fibrado vetorial.

Daqui por diante, por fibrado vetorial (ou simplesmente fibrado) entenderemos um fibrado vetorial complexo.

No item ii) da definição acima, é claro que a função $x \mapsto n$ é localmente constante (e portanto é constante nas componentes conexas de X). Quando o n não varia, ele é dito o posto do fibrado vetorial.

Denotaremos por $E|_U = \pi^{-1}(U)$ a restrição do fibrado a um sunconjunto $U \subset X$. Escreveremos também $\underline{\mathbb{C}}^n$ para representar o fibrado trivial $X \times \mathbb{C}^n \to X$.

Dado um mapa $f : X \to Y$ e um fibrado vetorial E sobre Y, o pullback de E por f é um fibrado vetorial sobre X, denotado por f^*E, cuja fibra sobre cada ponto $x \in X$ é igual a fibra de E sobre $f(x)$

$$(f^*E)_x = E_{f(x)}.$$

Uma maneira de se construir f^*E é: $f^*E = \{(x, v) \ : \ \pi(v) = f(x)\} \subset X \times E$, e definir o mapa de projeção $f^*E \to X$ como sendo a restrição do mapa de projeção $X \times E \to X$.

Podemos também transformar operações algébricas entre espaços vetoriais em operações entre fibrados. Dado E, F fibrados vetoriais sobre X definimos:

$$\begin{aligned}
E \oplus F &:= \bigcup_{x \in X} E_x \oplus F_x \\
E \otimes F &:= \bigcup_{x \in X} E_x \otimes F_x \\
Hom(E, F) &:= \bigcup_{x \in X} Hom(E_x, F_x) \\
E^* &:= \bigcup_{x \in X} E_x^*
\end{aligned}$$

onde $Hom(E_x, F_x)$ é o espaço das tranformações lineares de E_x para F_x e E_x^* denota o dual de E_x. Esses conjuntos podem ser dotados de topologias naturais de modo torná-los fibrados vetoriais (com respeito aos mapas de projeção naturais).

Sejam E, F são fibrados sobre X com mapas de projeção π_1, π_2, respectivamente. Um homomorfismo entre E e F é um mapa $\phi : E \to F$ tal que: 1) ϕ envia fibra sobre x em fibra sobre x, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & F \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

e 2) $\phi_x := \phi|_{E_x} : E_x \to F_x$ é linear. Escreveremos $\mathcal{L}(E, F)$ para representar o conjunto dos homomorfismos de E para F. Um homomorfismo é dito um isomorfismo se for também um homeomorfismo. Denotaremos o conjunto dos isomorfismos de E para F por $Iso(E, F)$. Quando $F = E$, um isomorfismo $\phi : E \to E$ é chamado de automorfismo de E, e denotaremos $GL(E) := Iso(E, E)$.

Dados um homomorfismo $\phi : E \to F$ entre dois fibrados sobre Y e um mapa $f : X \to Y$, definimos também o homomorfismo $f^*\phi$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&f^*\phi : f^*E \longrightarrow f^*F \\
&(f^*\phi)_x = \phi_{f(x)}
\end{aligned}$$

Esta definição faz sentido pois $(f^*E)_x = E_{f(x)}$.

Uma seção de um fibrado vetorial E sobre X é um mapa $s : X \to E$ tal que $\pi \circ s = Id_X$, onde $\pi : E \to X$ é o mapa de projeção do fibrado. Denotamos por $\Gamma(E)$ o conjunto de todas as seções de E. Esse conjunto é um espaço vetorial complexo com as operações naturais de soma de seções e multiplicação de seções por escalares.

Por fim, denotaremos por $Vect(X)$ o conjuntos das classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre X. Damos a esse conjunto uma estrutura de semigrupo abeliano usando a operação de soma direta $\oplus$, isto é definimos o mapa

$$Vect(X) \times Vect(X) \rightarrow Vect(X)$$
$$(E, F) \rightarrow E \oplus F$$

2.2 EXTENSÃO DE HOMOMORFISMOS

Seja X um espaço compacto e $A \subset X$ fechado. Queremos discutir nessa seção a extensão de seções e de homomorfismos entre fibrados que estão definidos apenas sobre A.
Utilizaremos o Lema de Tietze, cuja demonstração pode ser encontrada em (MUNKRES, 2000).

Lema 2.2.1. *Lema da Extensão de Tietze.*
Sejam X um espaço topológico normal , $A \subset X$ fechado, V um espaço vetorial (real ou complexo) e $f : A \rightarrow V$ um mapa . Então existe mapa $g : X \rightarrow V$ tal que $g|_A = f$.

Lema 2.2.2. *Se E é um fibrado vetorial sobre X e s é uma seção de $E|_A$ então existe $\overline{s} \in \Gamma(E)$ tal que $\overline{s}\ |_A = s$.*

Demonstração. Para o caso em que E é trivial, ou seja, $E = X \times V$ para certo espaço vetorial complexo V a seção é um mapa

$$s : A \longrightarrow A \times V$$
$$s(x) = (x, f(x))$$

para uma certa função contínua $f : A \rightarrow V$. Pelo lema da extensão de Tietze podemos estender f a $g : X \rightarrow V$ e definir $\overline{s} : X \rightarrow X \times V$ por $s(x) = (x, g(x))$.
Para o caso em que E é um fibrado qualquer, como X é compacto podemos tomar cobertura aberta $U_1, ..., U_n$ onde $E|_{U_i}$ é trivial para todo i.
Podemos então definir seções $s_i \in \Gamma(E|_{U_i})$ tal que $s_i|_{A \cap U_i} = s|_{A \cap U_i}$. Tomando então uma partição da unidade (ϕ_i) em X, subordinada a cobertura $U_1, ..., U_n$ definimos $\overline{s}$ por

$$\overline{s} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i s_i$$

∎

Observe que um homomorfismo entre fibrados $\phi : E \to F$ sobre X define uma seção do fibrado $Hom(E,F)$ por

$$s_\phi : X \to Hom(E,F)$$
$$x \mapsto \phi_x$$

Reciprocamente, dado uma seção s de $Hom(E,F)$ podemos definir um homomorfismo entre $\phi : E \to F$ pondo $\phi_x = s(x)$. Isso define um isomorfismo

$$\Gamma(Hom(E,F)) \cong \mathcal{L}(E,F)$$

Segue então do lema anterior, que todo homomorfismo entre fibrados $\phi : E|_A \to F|_A$ pode ser estendido a um homomorfismo $\overline{\phi} : E \to F$. Já um isomorfismo entre fibrados não pode, em geral ser estendido a um isomorfismo sobre todo o espaço X, mas temos o seguinte resultado

Proposição 2.2.1. *Seja $\phi : E|_A \to F|_A$ um isomorfismo. Então existe aberto $U \supset A$ de X e um isomorfismo $\overline{\phi} : E|_U \to F|_U$ tal que $\overline{\phi}|_A = \phi$.*

Demonstração. Sabemos pela discussão acima que o mapa ϕ pode ser estendido a um homomorfismo $\Psi : E \to F$. Definimos então o aberto U como sendo o conjunto dos $x \in X$ tais que Ψ_x é um isomorfismo e tomamos $\overline{\phi} = \Psi|_U$. ∎

2.3 INVARIÂNCIA POR HOMOTOPIA

Denotaremos por I o intervalo $[0,1]$ da reta e dada uma homotopia $f : X \times I \to Y$ denotaremos por f_t o mapa $f_t : X \to Y$, $f_t(x) = f(x,t)$.

Teorema 2.3.1. *Se $f : X \times I \to Y$ é uma homotopia e $E \in Vect(Y)$ então*

$$f_0^* E \cong f_1^* E$$

Demonstração. Denote por $\pi : X \times I \to X$ a projeção na primeira cordenada.
Observe primeiro que:

$$f^*E|_{(x,t)} = E_{f(x,t)} = E_{f_t(x)} = f_t^* E|_x = \pi^* f_t^* E|_{(x,t)}$$

Isso induz um isomorfismo de fibrados para cada $t \in I$

$$f^*E|_{X \times \{t\}} \cong \pi^* f_t^* E|_{X \times \{t\}}$$

Fixando agora um $s \in I$ pelo lema 2.2.1 temos que existe aberto $U \subset I$ contendo s tal que

$$f^*E|_{X\times U} \cong \pi^* f_s^* E|_{X\times U}$$

Dado $t \in U$ isso implica que

$$f_t^*E = f^*E|_{X\times\{t\}} = \pi^* f_s^* E|_{X\times\{t\}} = f_s^*E$$

Então a classe de isomorfismo de f_t^*E é localmente constante em I. Como I é conexo, isso implica que $f_0^*E \cong f_1^*E$. ■

Temos os seguintes resultados que são imediatos desse lema

Corolário 2.3.1. .

1) *Se $f : X \to Y$ é uma equivalência homotópica, então $f^* : Vect(Y) \to Vect(X)$ é um isomorfismo de semigrupos.*

2) *Se X é contrátil, $Vect(X)$ é isomorfo ao semigrupo aditivo dos inteiros não negativos.*

3) *Sejam $E \in Vect(X \times I)$ e $\pi : X \times I \to X$ a projeção. Então, E é isomorfo a $\pi^*(E|_{X\times\{0\}})$, isto é $E \cong F \times I$ para certo fibrado F sobre X (aqui, $F \times I$ é um fibrado vetorial sobre X com mapa de projeção dado pela composição das projeções $F \times I \to F \to X$).*

2.4 AS CONSTRUÇÕES E/α E $E_1 \cup_f E_2$

2.4.1 Colapsamento de fibrados

Seja $A \subset X$ um fechado, $E \in Vect(X)$ e α uma trivialização de E sobre A, isto é, um isomorfismo $\alpha : E|_A \to A \times \mathbb{C}^n$. Se $\pi : E \to X$ é a projeção então $\alpha = (\pi, T)$ para certo mapa $T : E|_A \to \mathbb{C}^n$. Defina relação de equivalência em E por $v \sim w$ se $v, w \in E|_A$ e $T(v) = T(w)$. Denote por E/α o quociente de E por essa relação de equivalência.
Intuitivamente o que fizemos aqui foi colapsar todas as fibras sobre A em um único espaço vetorial. Temos então o seguinte:

Lema 2.4.1. *O espaço E/α, munido do mapa de projeção*

$$p : E/\alpha \to X/A$$
$$p([v]) = [\pi(v)],$$

é um fibrado vetorial sobre X/A.

Demonstração. A estrutura vetorial das fibras é clara e a trivialização local sobre pontos de X/A diferentes de A/A segue da trivialização local de E. Vejamos a trivialização local sobre o ponto A/A.

Pela proposição 2.2.1 temos que o mapa α pode ser estendido a um isomorfismo num aberto $U \supset A$

$$\widetilde{\alpha} : E|_U \to U \times \mathbb{C}^n$$
$$\widetilde{\alpha} = (\pi, \widetilde{T})$$

onde $\widetilde{T}$ é uma extensão de T. Isso desce a um isomorfismo

$$E|_U/\alpha \longrightarrow U/A \times \mathbb{C}^n$$
$$[v] \longmapsto \big([\pi(v)], \widetilde{T}(v)\big)$$

E o resultado segue pois $E|_{U/\alpha} = (E/\alpha)|_{U/A}$. ■

Proposição 2.4.1. *Se α_0, α_1 são duas trivializações sobre A homotópicas via isomorfismos, isto é, α_t é um isomorfismo para todo $t \in I$ então*

$$E/\alpha_0 \cong E/\alpha_1$$

Demonstração. Seja $\alpha : E|_A \times I \to A \times \mathbb{C}^n$ a homotopia entre α_0 e α_1. Isso induz um isomorfismo

$$\beta : E|_A \times I \longrightarrow A \times I \times \mathbb{C}^n$$
$$\beta(v,t) = (\alpha_t(v), t)$$

como $E|_A \times I = (E \times I)|_{A \times I}$ temos que β é uma trivialização do fibrado $E \times I$ sobre $A \times I$. Defina agora homotopia

$$f : X/A \times I \to X \times I/A \times I$$
$$f([x],t) = [x,t]$$

Queremos ver que $f_t^*(E \times I/\beta) = E/\alpha_t$ e o resultado então seguirá do teorema 2.3.1.

Mas isso é verdade, pois

$$f_t^*(E \times I/\beta)|_{[x]} = (E \times I/\beta)|_{[x,t]} = (E/\alpha_t)|_{[x]}$$

■ O seguinte resultado pode ser obtido a partir dessa construção

Corolário 2.4.1. *Se $A \subset X$ for fechado e contrátil, então o mapa $f : X \to X/A$ induz um isomorfismo de semigrupos $f^* : Vect(X/A) \to Vect(X)$.*

Demonstração. Vamos criar uma inversa para f^*. Dado $E \in Vect(X)$, como A é contrátil segue do corolário 2.3.1 que $E|_A$ é trivial, logo existe trivialização $\alpha : E|_A \to A \times \mathbb{C}^n$. Definimos a inversa de f^* como sendo o mapa $E \mapsto E/\alpha$.
Para ver que esse mapa independe da escolha de trivialização sobre A, sejam α_0, α_1 duas tais trivializações. Considere o mapa $\alpha_0 \circ \alpha_1^{-1} : A \times \mathbb{C}^n \to A \times \mathbb{C}^n$.
Como $GL_n(\mathbb{C})$ é conexo por caminhos podemos definir mapa $\beta : A \times \mathbb{C}^n \times I \to A \times \mathbb{C}^n$ tal que $\beta_0 = Id$ e $\beta_1 = \alpha_0\alpha_1^{-1}$ e β_t é isomorfismo para todo t. Portanto $\alpha_0\alpha_1^{-1}$ é homotópico a identidade e então α_0 é homotópico a α_1 e pelo resultado anterior segue que o mapa $E \mapsto E/\alpha$ está bem definido. ■

2.4.2 Colagem de fibrados

Sejam $X = X_1 \cup X_2$ com X_1, X_2 compactos, $A = X_1 \cap X_2$, e sejam E_i fibrados vetoriais sobre X_i com mapas de projeção π_i, $i = 1, 2$. Dado um isomorfismo $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$ definimos relação de equivalência na união disjunta $E_1 \sqcup E_2$ da seguinte forma: 1) dados $v \in E_1$ e $w \in E_2$, então $v \sim w \Leftrightarrow \pi_1(v) = \pi_2(w) \in A$ e $\phi(v) = w$; 2) dados $v, w \in E_i$ (para algum i), então $v \sim w \Leftrightarrow v = w$. Denotamos por $E_1 \cup_\phi E_2$ o quociente de $E_1 \sqcup E_2$ por essa relação de equivalência.

Lema 2.4.2. *$E_1 \cup_\phi E_2$ é um fibrado vetorial sobre X munido do mapa de projeção*

$$\pi : E_1 \cup_\phi E_2 \longrightarrow X$$
$$\pi([v]) = \pi_i(v), \quad se\ v \in E_i$$

Demonstração. A estrutura vetorial em cada fibra é clara e a trivialização local sobre um ponto fora de A segue de E_1 e E_2 serem localmente triviais.
Dado $a \in A$ tome uma vizinhança fechada $V_1 \subset X_1$ de a onde E_1 é trivial e existe um aberto $U_1 \subset V_1$, contendo a. Temos assim isomorfismo

$$f_1 : E|_{V_1} \to V_1 \times \mathbb{C}^n$$

Restringindo esse mapa a $A \cap V_1$ e tomando $f_2^A = f_1|_{A\cap V_1} \circ \phi_{A\cap V_1}^{-1}$ temos isomorfismos

$$f_1^A : E_1|_{V_1\cap A} \to V_1 \cap A \times \mathbb{C}^n$$
$$f_2^A : E_2|_{V_1\cap A} \to V_1 \cap A \times \mathbb{C}^n$$

Pela proposição 2.2.1 podemos estender f_2^A a um isomorfismo num aberto $U_2 \subset X_2$, que contém a,

$$f_2 : E|_{U_2} \to U_2 \times \mathbb{C}^n.$$

Então o seguinte mapa está bem definido e é um isomorfismo

$$f_1 \cup_\phi f_2 : (E_1 \cup_\phi E_2)|_{U_1\cup U_2} \to (U_1 \cup U_2) \times \mathbb{C}^n$$
$$f_1 \cup_\phi f_2([v]) = f_i(v), \quad se\ v \in E_i$$

■

Os seguintes resultados seguem diretamente da definição.

Proposição 2.4.2. .

1) *Se E é um fibrado sobre X, $E_i = E|_{X_i}$ então*

$$E_1 \cup_{Id_{E|_A}} E_2 \ \cong \ E$$

2) *Se E_i' são outros fibrados sobre X_i e $\phi' : E_1'|_A \to E_2'|_A$ é um isomorfismo então*

$$(E_1 \cup_\phi E_2) \oplus (E_1' \cup_{\phi'} E_2') \cong (E_1 \oplus E_1') \cup_{\phi\oplus\phi'} (E_2 \oplus E_2')$$

$$(E_1 \cup_\phi E_2) \otimes (E_1' \cup_{\phi'} E_2') \cong (E_1 \otimes E_1') \cup_{\phi\otimes\phi'} (E_2 \otimes E_2')$$

3) $(E_1 \cup_\phi E_2)^* \cong E_1^* \cup_{\phi^{*-1}} E_2^*$

Proposição 2.4.3. *Se $\phi_0 : E_1|_A \to E_2|_A$ é homotópico, via isomorfismos, a $\phi_1 : E_1|_A \to E_2|_A$ então*

$$E_1 \cup_{\phi_0} E_2 \cong E_1 \cup_{\phi_1} E_2.$$

Demonstração. Seja $\phi : (E_1 \times I)|_{A\times I} \to (E_2 \times I)|_{A\times I}$ a homotopia entre ϕ_0 e ϕ_1 e considere o mapa

$$f_t : X \to X \times I$$
$$x \mapsto (x, t)$$

Queremos ver que $f_t^*(E_1 \times I \cup_\phi E_2 \times I) = E_1 \cup_{\phi_t} E_2$ mas isso segue da igualdade

$$f_t^*(E_1 \times I \cup_\phi E_2 \times I)|_x = E_1 \times I \cup_\phi E_2 \times I|_{(x,t)} = E_1 \cup_{\phi_t} E_2|_x$$

e o resultado, então, segue do teorema 2.3.1. ■

2.4.3 Fibrados vetoriais sobre $X \times S^2$

O objetivo desta seção é dar uma caracterização dos fibrados vetoriais sobre um produto $X \times S^2$, onde X é um espaço topológico compacto e S^2 é a esfera bidimensional, em termos da operação de colagem descrita anteriormente. Essa caracterização será usada na demonstração da periodicidade de Bott mais adiante.

Sejam D^+ e D^- os hemisférios norte e sul de S^2, e sejam $X_1 = X \times D^+$ e $X_2 = X \times D^-$. Então $X \times S^2 = X_1 \cup X_2$, e $X_1 \cap X_2 = X \times S^1$. Dado um fibrado vetorial $E \in Vect(X)$, os produtos $E \times D^+$ e $E \times D^-$ definem, de maneira natural, fibrados vetoriais sobre X_1 e X_2, respectivamente (eles nada mais são que os pull-backs de E pelas projeções $X \times D^\pm \to X$). Suas restrições a $X_1 \cap X_2$ são $(E \times D^+)|_{X_1 \cap X_2} = (E \times D^-)|_{X_1 \cap X_2} = E \times S^1$. Logo, dado um automorfismo do fibrado vetorial $E \times S^1 \to E \times S^1$, digamos $f : E \times S^1 \to E \times S^1$, obtemos um fibrado vetorial sobre $X_1 \cup X_2 = X \times S^2$

$$(E, f) = E \times D^+ \cup_f E \times D^-$$

Um tal automorfismo f pode ser identificado com um mapa $f : S^1 \to GL(E)$ (munimos $GL(E)$ com a topologia induzida pela escolha de uma métrica Hermitiana qualquer em E).

Para $X = \{pt\}$,um único ponto, essa construção fornece um fibrado vetorial $(\mathbb{C}^n, f)$ sobre S^2, para cada n e para cada mapa $f : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$.

Proposição 2.4.4. *A construção acima satisfaz*

i) *Se $f \simeq g$ via automorfismos, então $(E, f) = (E, g)$.*

ii) $(F, f) \otimes (G, g) = (F \otimes G, f \otimes g)$.

iii) $(F, f) \oplus (G, g) = (F \oplus G, f \oplus g)$.

iv) $\pi_X^*(E) = (E, Id)$, *onde $\pi_X : X \times S^2 \to X$ é a projeção, e $Id : S^1 \to Aut(E)$ é a função constante igual ao automorfismo identidade.*

Demonstração. A única demonstração que não é direta das propriedades de fibrados obtidos por colagem é a $iv)$ mas que segue direto do fato que $\pi_X^*(E) = E \times S^2$. ■

Vejamos agora que todo fibrado vetorial sobre $X \times S^2$ é da forma (E, f) para certos E e f.

Teorema 2.4.1. *Seja X um espaço topológico compacto e $F \in Vect(X \times S^2)$, seja $E = F|_{X\times\{1\}}$, tratando E como fibrado sobre X. Então existem isomorfismos*

$$\phi_+ : F|_{X\times D^+} \to E \times D^+$$
$$\phi_- : F|_{X\times D^-} \to E \times D^-$$

normalizados, isto é $\phi_\pm|_E : E \to E$ é a identidade, além disso $F = (E, f)$, onde $f = \phi_+ \circ \phi_-^{-1}$. Se $\overline{\phi_+}$ e $\overline{\phi_-}$ são outra escolha de isomorfismos normalizados, então $\overline{f} = \overline{\phi_+} \circ \overline{\phi_-}^{-1}$ é homotópica a f.

Demonstração. Seja $i : X \to X \times D^+$ a inclusão de X em $X \times \{1\}$ e $\pi : X \times D^+ \to X$ a projeção então

$$\pi^*(i^*(F|_{X\times D^+})) \cong \pi^*(E) \cong E \times D^+$$

Por outro lado, como X é retrato por deformação de $X \times D^+$, temos que $i \circ \pi \cong Id$, então

$$E \times D^+ \cong \pi^*(i^*(F|_{X\times D^+})) \cong (i \circ \pi)^*(F|_{X\times D^+}) \cong Id^*(F|_{X\times D^+}) \cong F|_{X\times D^+}.$$

Portanto, existe isomorfismo $\phi_+ : F|_{X\times D^+} \to E \times D^+$, compondo esse isomorfismo com

$$\phi_+^{-1}|_{E\times\{1\}} \times Id_{D^+} : E \times D^+ \to E \times D^+,$$

podemos tornar ϕ_+ normalizado.
Analogamente, definimos ϕ_- e, portanto, tomando $f = \phi_+ \circ \phi_-^{-1}$ fica claro que

$$F = (E, f).$$

Seja agora $\overline{\phi_+}$ e $\overline{\phi_-}$ outras escolhas de isomorfismos normalizados, podemos tratar $\overline{\phi_+} \circ \phi_+^{-1} : E \times D^+ \to E \times D^+$ como um mapa $D^+ \to GL(E)$, então, como $\{1\}$ é retrato por deformação de D^+ e $\overline{\phi_+} \circ \phi_+^{-1}(1) = Id \in GL(E)$, temos que $\overline{\phi_+} \circ \phi_+^{-1}$ é homotópica ao mapa constante igual à identidade, portanto, $\overline{\phi_+} \simeq \phi_+$ via isomorfismos. Analogamente, $\overline{\phi_-} \simeq \phi_-$ e portanto $f \simeq \overline{f}$. ■

Por fim, vejamos que o mapa $(F, f) \mapsto f$ é funtorial.

Definição 2.4.1. Dado $g : X \to Y$, F fibrado sobre Y e $f : S^1 \to GL(F)$, defina funções:
i)

$$\overline{g} : X \times S^2 \longrightarrow Y \times S^2$$
$$\overline{g}(x,a) = (g(x),a)$$

ii)

$$g^*f : S^1 \longrightarrow GL(g^*F)$$
$$\big(g^*f(a)\big) \mid_{(g^*F)_x} = f(a)_{F_{g(x)}}$$

Teorema 2.4.2. *Com a notação usada na definição anterior vale*

$$\overline{g}^*(F,f) = (g^*F, g^*f)$$

Demonstração. Identifiquemos os fibrados, fibra a fibra. Seja $a \in S^2$.
Se $a \notin S^1$ então

$$\overline{g}^*(F,f)_{(x,a)} = (F,f)_{(g(x),a)} = F_{g(x)} \times \{a\} = (g^*f)_x \times \{a\} = (g^*F, g^*f)_{(x,a)}$$

Agora se $a \in S^1$

$$\overline{g}^*(F,f)_{(x,a)} = (F,f)_{(g(x),a)} = \frac{F_{g(x)} \times \{a\} \sqcup F_{g(x)} \times \{a\}}{\sim_f}$$

Por outro lado,

$$(g^*F, g^*f)_{(x,a)} = \frac{(g^*F)_x \times \{a\} \sqcup (g^*F)_x \times \{a\}}{\sim_{g^*f}} = \frac{F_{g(x)} \times \{a\} \sqcup F_{g(x)} \times \{a\}}{\sim_{g^*f}}$$

Mas as relações $\sim_f$ e $\sim_{g^*f}$ são equivalentes por definição.

∎

2.5 O FIBRADO EM LINHAS TAUTOLÓGICO SOBRE $\mathbb{C}P^n$

Existe sobre $\mathbb{C}P^n$ um fibrado vetorial $H^* \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ formado pelos elementos $(l,v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $v \in l$, note que, essa definição faz sentido, pois um elemento $l \in \mathbb{C}P^n$ é um subespaço complexo de dimensão um então podemos nos perguntar se $v \in \mathbb{C}^n$ pertence a l. Munimos esse espaço com mapa de projeção $p : H^* \to \mathbb{C}P^n$ dado pela restrição da projeção $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Chamamos esse fibrado de fibrado tautológico, pois ,essencialmente, a fibra sobre cada ponto $l \in \mathbb{C}P^n$ é o proprio l visto como subespaço.

Para vermos que isso de fato dá um fibrado vetorial, considere os $n+1$ abertos de $\mathbb{C}P^n$, $U_i = \{[x_1, ..., x_{n+1}] : x_i \neq 0\}$. Como $p^{-1}([x_1, ..., x_{n+1}]) = \{\lambda(x_1, ..., x_{n+1}) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, definimos os mapas

$$\Phi_i : H^* \mid_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$$
$$\Phi_i([x_1, ..., x_{n+1}], \lambda(x_1, ...x_{n+1})) = ([x_1, ..., x_{n+1}], \lambda x_i)$$

Esses mapas estão bem definidos e são homeomorfismos. Portanto H^* é um fibrado vetorial em linhas, isto é, um fibrado vetorial de posto 1. Ele é chamado de fibrado tautológico sobre o $\mathbb{C}P^n$.

Vamos nos ater apenas ao caso $n = 1$, então no que se segue H^* será o fibrado tautológico sobre $\mathbb{C}P^1$.

Identifiquemos o $\mathbb{C}P^1 = \{[1, z] : z \in \mathbb{C}\} \cup [0, 1]$ com a esfera S^2 de tal modo que os hemisférios norte e sul $D^\pm$ e o equador $S^1 = \partial D^\pm$ se identifiquem a

$$\begin{aligned} D^+ &= \{[1, z] : |z| \geq 1\} \cup [0, 1], \\ D^- &= \{[1, z] : |z| \leq 1\}, \\ S^1 &= \{[1, z] : |z| = 1\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos considerar H^* como um fibrado em linhas sobre S^2. Como tal, ele pode ser descrito na forma $H^* \cong (\mathbb{C}^1, f)$, para alguma $f : S^1 \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Proposição 2.5.1. *Denotando por z a função:*

$$z : S^1 \to \mathbb{C}^*$$

dada pela inclusão, temos que

$$H^* = (\mathbb{C}^1, z).$$

Demonstração. Definimos mapas $\phi_\pm : H^* \mid_{X \times D^\pm} \rightarrow D^\pm \times \mathbb{C}^1$ do seguinte modo

$$\phi_+([1, z], \lambda(1, z)) = ([1, z], \lambda z)$$
$$\phi_+([0, 1], \lambda(0, 1) = ([0, 1], \lambda)$$
$$\phi_-([1, z], \lambda(1, z)) = ([1, z], \lambda)$$

Que são claramente isomorfismos normalizados então como

$$\phi_+\Big(\phi_-^{-1}([1,z],\lambda)\Big) = \phi_+\Big([1,z],\lambda[1,z]\Big) = ([1,z],\lambda z)$$

Portanto $\phi_+ \circ \phi_-^{-1} : S^1 \to \mathbb{C}^*$ é justamente a função z.

■ Denotaremos agora por H o dual de H^*, pela proposição 2.4.2 temos que $H = (\mathbb{C}^1, z^{-1})$.

2.6 SUBFIBRADOS VETORIAIS E MÉTRICAS HERMITIANAS

Nessa seção queremos usar a teoria de subfibrados vetoriais para desenvolver um importante resultado para K-teoria sobre complementares de fibrados. Começamos com estes dois resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em (ATIYAH, 2018).

Lema 2.6.1. *Sejam $E, F \in Vect(X)$ e $\phi : E \to F$ um homomorfismo tal que $Dim(\ker(\phi_x))$ é localmente constante. Então*

$$\ker(\phi) = \bigcup_{x\in X} \ker(\phi_x)$$

e

$$Im(\phi) = \bigcup_{x\in X} Im(\phi_x)$$

são subfibrados vetoriais de E, F respectivamente. Em particular se ϕ é sobrejetivo ou injetivo então $\ker(\phi)$, $Im(\phi)$ são subfibrados.

Como $\mathbb{C}^n$ possui produto interno hermitiano, pode-se usar um argumento padrão com partições da unidade (que se aplica, pois X é compacto) e estabelecer o

Lema 2.6.2. *Dado fibrado vetorial E sobre X, existe uma métrica hermitiana para E*

Segue do primeiro resultado acima que dado um fibrado vetorial E munido de uma métrica hermitiana e um subfibrado vetorial $F \subset E$, então $F^\perp = \cup_{x\in X} F_x^\perp$ é um subfibrado vetorial de E, pois o mapa de projeção ortogonal fibra a fibra, $P : E \to F$, é um homomorfismo sobrejetivo.

Lema 2.6.3. *Toda sequência exata curta de fibrados vetoriais é split.*

Demonstração. Dada uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

Coloquemos uma métrica hermitiana em F. Então f(E) é subfibrado de F, pois f é injetivo e $f(E) \cong E$. Além disso, $f(E)^{\perp} \cong G$ então.Como $F = f(E) \oplus f(E)^{\perp}$, segue o resultado. ■

Lema 2.6.4. *Dado fibrado um vetorial E, existe homomorfismo sobrejetivo $\phi : X \times \mathbb{C}^n \to E$, para certo n.*

Demonstração. Tome uma cobertura aberta $U_1, ..., U_k$, onde $E|_{U_i}$ é trivial e sejam $\phi_i : U_i \times \mathbb{C}^{n_i} \to E|_{U_i}$ isomorfismos. Tome uma partição da unidade $\{f_i\}$ subordinada a cobertura $\{U_i\}$ e defina

$$\phi : X \times \mathbb{C}^{n_1 + ... + n_k} \to E$$
$$\phi = \sum f_i \phi_i$$

Esse mapa é fácil ver ser um homomorfismo e sobrejetivo. ■

Por fim enunciamos o resultado principal dessa seção:

Proposição 2.6.1. *Dado $E \in Vect(X)$, existe fibrado $F \in Vect(X)$ tal que $E \oplus F$ é trivial. Um tal fibrado F será dito um complementar de E.*

Demonstração. Dado E temos, pelo lema anterior, um homomorfismo sobrejetivo $\phi : P \to E$ onde P é um fibrado trivial. Temos assim sequencia exata

$$0 \longrightarrow \ker(\phi) \hookrightarrow P \xrightarrow{\phi} E \longrightarrow 0.$$

Então pelo lema 2.6.3, essa sequência é split e, portanto, $\ker(\phi)$ é complementar de E. ■

3 K-TEORIA

3.1 O FUNTOR K

Dado um espaço topológico compacto X, associamos a ele um semigrupo abeliano $Vect(X)$, no qual a operação é a dada pela soma direta de fibrados vetoriais. Similar ao processo de construção do grupo aditivo dos números inteiros a partir do semigrupo aditivo dos números naturais, vamos definir um grupo abeliano $K(X)$ adicionando inversas formais a $Vect(X)$.

Definimos uma relação em $Vect(X) \times Vect(X)$ por: $(E, F) \sim (\widetilde{E}, \widetilde{F})$ se existem $n \geq 0$ e um isomorfismo:

$$E \oplus \widetilde{F} \oplus \underline{\mathbb{C}}^n \cong \widetilde{E} \oplus F \oplus \underline{\mathbb{C}}^n$$

Lema 3.1.1. *A relação $\sim$ definida acima é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Reflexibilidade e simetria são claros, vejamos a transitividade. Se $(E_1, F_1) \sim (E_2, F_2)$ e $(E_2, F_2) \sim (E_3, F_3)$ temos isomorfismos

$$f : E_1 \oplus F_2 \oplus \underline{\mathbb{C}}^n \to E_2 \oplus F_1 \oplus \underline{\mathbb{C}}^n$$

$$g : E_2 \oplus F_3 \oplus \underline{\mathbb{C}}^m \to E_3 \oplus F_2 \oplus \underline{\mathbb{C}}^m$$

Pela proposição 2.6.1, existem complementares G, H de E_2, F_2, respectivamente. Considere então o isomorfismo

$$\text{f} \oplus g \oplus Id_G \oplus Id_H : (E_1 \oplus F_2 \oplus \underline{\mathbb{C}}^n) \oplus (E_2 \oplus F_3 \oplus \underline{\mathbb{C}}^m) \oplus (G \oplus H) \to (E_2 \oplus F_1 \oplus \underline{\mathbb{C}}^n) \oplus (E_3 \oplus F_2 \oplus \underline{\mathbb{C}}^m) \oplus (G \oplus H)$$

Rearranjando os termos, isso é um isomorfismo

$$E_1 \oplus F_3 \oplus (F_2 \oplus H) \oplus (E_2 \oplus G) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{n+m} \cong E_3 \oplus F_1 \oplus (F_2 \oplus H) \oplus (E_2 \oplus G) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{n+m}$$

Usando que $F_2 \oplus H$, $E_2 \oplus G$ são fibrados triviais temos que $(E_1, F_1) \sim (E_3, F_3)$. ■

Definição 3.1.1. Dado um espaço topológico compacto X, definimos a K-teoria de X, $K(X)$ como sendo o conjunto das classes de equivalência pela relação definida acima e representamos a classe de (E, F) por $[E] - [F]$.

Damos estrutura de grupo a esse conjunto a partir da operação $\oplus$ de $Vect(X)$, isto é, definimos

$$\big([E]-[F]\big)+\big([\widetilde{E}]-[\widetilde{F}]\big)=[E\oplus\widetilde{E}]-[F\oplus\widetilde{F}].$$

É fácil ver que essa operação está bem-definida, que o elemento $[\underline{\mathbb{C}}^0]-[\underline{\mathbb{C}}^0]$ é o elemento nulo, onde $\mathbb{C}^0$ é o espaço vetorial nulo $\{0\}$,. O inverso de um elemento $[E]-[F]$ é $[F]-[E]$, portanto, $K(X)$ é um grupo abeliano.

Além disso, podemos definir uma multiplicação em $K(X)$ usando o produto tensorial de $Vect(X)$, isto é, definimos

$$[E][F]=[E\otimes F]$$

e estendemos essa operação distributivamente para uma classe de K-teoria. Desse modo, temos em $K(X)$ uma estrutura de anel comutativo com identidade $[\underline{\mathbb{C}}]$.

Observação 3.1.1. Denotaremos a classe de K-teoria de $\underline{\mathbb{C}}^n$ simplesmente por n. Dado $[E]-[F]\in K(X)$ temos pela proposição 2.6.1 que existe $\widetilde{F}$ complementar de F logo:

$$[E]-[F]=[E]-[F]+[\widetilde{F}]-[\widetilde{F}]=[E\oplus\widetilde{F}]-[F\oplus\widetilde{F}]=[E\oplus\widetilde{F}]-n$$

para certo $n\geq 0$. Portanto, concluimos que todo elemento $a\in K(X)$ pode ser escrito da forma $a=[E]-n$ para certo $E\in Vect(X)$ e $n\geq 0$.

Proposição 3.1.1. *(Propriedade universal de $K(X)$)*
Dados um grupo abeliano G e um homomorfismo $\phi: Vect(X)\to G$, existe um único homomorfismo $\Phi: K(X)\to G$ tal que $\Phi([E])=\phi(E)$.

Demonstração. Como Φ deve ser um homomorfismo que satisfaz $\Phi([E])=\phi(E)$, ele necessariamente satisfará $\Phi([E]-[F])=\phi(E)-\phi(F)$. Precisamos ver apenas que essa expressão está bem definida.

Se $[E]-[F]=[\widetilde{E}]-[\widetilde{F}]$, temos isomorfismo (para certo n)

$$E\oplus\widetilde{F}\oplus\underline{\mathbb{C}}^n\cong\widetilde{E}\oplus F\oplus\underline{\mathbb{C}}^n$$

Aplicando ϕ temos

$$\phi(E)+\phi(\widetilde{F})+\phi(\underline{\mathbb{C}}^n)=\phi(\widetilde{E})+\phi(F)+\phi(\underline{\mathbb{C}}^n),$$

onde estamos usando a notação aditiva $+$ para a operação de G. A existência em G de inversos aditivos implica, portanto, que

$$\phi(E)-\phi(F)=\phi(\widetilde{E})-\phi(\widetilde{F}).$$

■

Por fim, dado uma função contínua $f : X \to Y$ a operação de pulback $f^* : Vect(Y) \to Vect(X)$, nos dá uma aplicação

$$Vect(Y) \to K(X)$$
$$E \mapsto [f^*E]$$

Como essa aplicação é aditiva, então, pela propriedade universal do $K(Y)$, ela induz um homomorfismo de grupos

$$K(Y) \to K(X)$$
$$[E] - [F] \mapsto [f^*E] = [f^*F]$$

que será também denotado por f^*. Observe também que, como $f^*(E \otimes F) = (f^*E) \otimes (f^*F)$ para todo $E, F \in Vect(X)$, então f^* é de fato um homomorfismo de anéis.

3.2 K-TEORIA RELATIVA

A partir da definição de $K(X)$ podemos definir algumas variações do funtor K que se provam muito úteis para a teoria. Veremos nessa seção como defini-las e na seção seguinte como elas se relacionam entre si.

3.2.1 Os funtores $\widetilde{K}(X)$ e $K(X, A)$

Definição 3.2.1. Dado um espaço topológico compacto X e $x_0 \in X$ um ponto fixado, seja $i : \{x_0\} \to X$ a inclusão. Definimos $\widetilde{K}(X)$ como sendo o núcleo do homomorfismo induzido $i^* : K(X) \to K(x_0)$.

Dado $E \in Vect(X)$ temos que $i^*E = \mathbb{C}^{DimE_{x_0}}$, portanto $i^*([E] - [F]) = DimE_{x_0} - DimF_{x_0}$.Segue que $\widetilde{K}(X)$ é formado pelos elementos de $K(X)$ da forma $[E] - [F]$ com $Dim\ E_{x_0} = Dim\ F_{x_0}$. Pela observação 3.1.1 podemos escrevê-los também na forma $[E] - Dim\ E_{x_0}$.

É imediato então que o seguinte mapa é um isomorfismo

$$K(X) \to \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$$
$$[E] - n \mapsto ([E] - Dim\ E_{x_0}, Dim\ E_{x_0} - n)$$

Proposição 3.2.1. *Se X, Y são espaços com pontos fixados x_0, y_0 e se $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é um mapa, então o homomorfismo induzido $f^* : K(Y) \to K(X)$ se restringe a um homomorfismo*

$$f^* : \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X)$$

Demonstração. É imediato do fato que $\forall E \in Vect(Y)$

$$Dim\ f^*E|_{x_0} = Dim\ E_{y_0}$$

■

Definição 3.2.2. Seja agora $A \subset X$ um fechado, definimos a K-teoria do par (X, A) por $K(X, A) = \widetilde{K}(X/A)$, onde o ponto destacado de X/A é A/A.

Queremos permitir que essa definição inclua o caso $A = \emptyset$ e por isso definimos

$$X/\emptyset = X^+ = X \bigsqcup \{+\}$$

Isto é, a união disjunta de X com um ponto arbitrário $+$. Além disso, tomamos como ponto destacado desse conjunto o ponto $+$.

Temos as seguintes identificações canônicas

$$K(X, x_0) = \widetilde{K}(X),$$
$$\widetilde{K}(X^+) = K(X).$$

Onde a primeira segue do homeomorfismo $X/x_0 \cong X$, e a segunda de que um fibrado vetorial sobre X^+ é a união disjunta de um fibrado sobre X e um fibrado (trivial) sobre $+$.

3.2.2 $K^{-n}(X, A)$

A seguir dados X, Y espaços topológicos compactos com pontos fixados x_0, y_0, respectivamente, definimos o produto *smash* $X \wedge Y$ do seguinte modo

$$X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$
$$X \wedge Y := (X \times Y)/(X \vee Y)$$

E tomamos o ponto $X \vee Y / X \vee Y$ como ponto destacado de $X \wedge Y$.É facil verificar que essa operação é associativa e comutativa.

Lema 3.2.1. *Se S^n é a esfera unitária do $\mathbb{R}^{n+1}$ temos o seguinte homeomorfismo*

$$S^1 \wedge S^{n-1} \cong S^n$$

Demonstração. Usando o homeomorfismo $S^n = I^n / \partial I^n$ é facil ver que o mapa identidade

$$I \times I^{n-1} \to I^n$$

desce a um homeomorfismo

$$S^1 \wedge S^{n-1} \cong S^n$$

■ Fazemos então as seguintes definições

Definição 3.2.3. Para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} &\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}(S^n \wedge X), \\ &K^{-n}(X, A) = \widetilde{K}^{-n}(X, A) = \widetilde{K}(S^n \wedge X/A), \\ &K^{-n}(X) = \widetilde{K}^{-n}(X^+), \end{aligned}$$

com a convenção que $S^0 \wedge X = X$

Seja agora $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ um mapa. Já definimos o homomorfismo $f^* : \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X)$, e queremos agora definir um homomorfismo $\widetilde{K}^{-n}(Y) \to \widetilde{K}^{-n}(X)$ para todo inteiro $n \geq 1$. Observe primeiro que o seguinte mapa está bem definido

$$\begin{aligned} &\Sigma^n f : S^n \wedge X \to S^n \wedge Y \\ &[a, x] \longmapsto [a, f(x)] \end{aligned}$$

e, portanto definimos o homomorfismo

$$(\Sigma^n f)^* : \widetilde{K}^{-n}(Y) \to \widetilde{K}^{-n}(X)$$

3.3 PROPRIEDADES COHOMOLÓGICAS

No que segue, (X, A) denotará um par de espaços compactos, $i : A \to X$ será o mapa de inclusão e $Q : X \to X/A$ o mapa quociente.

Nosso objetivo nessa seção será estudar o comportamento da K-teoria do par (X, A).

Proposição 3.3.1. *A seguinte sequência é exata:*

$$K(X,A) \xrightarrow{Q^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(A)$$

Demonstração. Como o mapa Qi é um mapa constante de A em A/A temos que $i^* \circ Q^*(E) = (Qi)^*(E) = \underline{\mathbb{C}}^{Dim\ E_{A/A}}$, para todo $E \in Vect(X/A)$. Portanto $i^*Q^*(a) = 0$ para todo $a \in K(X,A)$.

Seja agora $[E] - n \in \ker i^*$. Como $i^*(E) = E|_A$, para $E \in Vect(X)$, temos que $[E|_A] = [\underline{\mathbb{C}}^n]$ em $K(A)$, portanto, temos isomorfismo

$$\alpha : E|_A \oplus \underline{\mathbb{C}}^m \to \underline{\mathbb{C}}^{n+m}.$$

Esse mapa é uma trivialização de $E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m$ sobre A, então podemos definir, usando a construção de fibrados por colapsamento, o seguinte elemento:

$$[(E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)/\alpha] - (n+m) \in \widetilde{K}(X/A)$$

Queremos ver que a imagem desse elemento por Q^* é justamente $[E] - n$. Para isso, basta ver que $Q^*((E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)/\alpha) \cong E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m$, que, por sua vez, segue de $Q^*((E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)/\alpha)|_A$ ser trivial e, portanto, isomorfo a $E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m|_A$. Agora estendemos esse isomorfismo a $E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m \cong Q^*((E \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)/\alpha)$ pela identidade.

■

Corolário 3.3.1. *A seguinte sequência é exata:*

$$K(X,A) \xrightarrow{Q^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A)$$

e é chamada a sequência exata do par (X,A).

A sequência exata curta do par (X,A) pode ser facilmente estendida para os funtores K^{-n}. Considere o par $(S^n \wedge X, S^n \wedge A)$, temos um homeomorfismo:

$$(S^n \wedge X)/(S^n \wedge A) \cong S^n \wedge (X/A)$$

e, portanto temos sequência exata

$$K^{-n}(X,A) \xrightarrow{\Sigma^n Q^*} K^{-n}(X) \xrightarrow{\Sigma^n i^*} K^{-n}(A)$$

Teorema 3.3.1. *(A sequência exata longa)*

Existe, para cada $n \geq 0$, um homomorfismo $\delta_n : K^{-n-1}(A) \to K^{-n}(X, A)$, chamado homomorfismo de conexão, tal que a sequência

$$\cdots \longrightarrow K^{-2}(A) \xrightarrow{\delta_1} K^{-1}(X, A) \xrightarrow{\Sigma Q^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{\Sigma i^*} K^{-1}(A) \xrightarrow{\delta_0} K^0(X, A)$$

$$\xrightarrow{Q^*} K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(A)$$

é exata. Além disso, os homomorfismos de conexão são naturais, isto é, dado $f : (X, A) \to (Y, B)$ mapa contínuo, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} K^{-n-1}(A) & \xrightarrow{\delta_n} & K^{-n}(X, A) \\ {\scriptstyle \Sigma^n f^*}\uparrow & & {\scriptstyle \Sigma^n f^*}\uparrow \\ K^{-n-1}(B) & \xrightarrow{\delta_n} & K^{-n}(Y, B) \end{array}$$

Demonstração. Ver (ATIYAH, 2018) ■ Por fim queremos obter dois corolários desse resultado.

Corolário 3.3.2. *Se A é retrato de X, então, $\forall n \geq 0$, a seguinte*

$$0 \longrightarrow K^{-n}(X, A) \xrightarrow{\Sigma^n Q^*} K^{-n}(X) \xrightarrow{\Sigma^n i^*} K^{-n}(A) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

é uma sequência exata split.

Demonstração. Existe $f : X \to A$ tal que $f \circ i = Id_A$. Observemos também que $\Sigma^n f : S^n \wedge X \to S^n \wedge A$ satisfaz $\Sigma^n f \circ \Sigma^n i = Id_{S^n \wedge A}$, então o mapa $\Sigma^n i^*$ é sobrejetivo, pois tem inversa à direita $\Sigma^n f^*$.

Pela sequência exata longa, temos sequência exata

$$K^{-n-1}(X) \xrightarrow{\Sigma^{n+1} i^*} K^{-n-1}(A) \xrightarrow{\delta_n} K^{-n}(X, A) \xrightarrow{\Sigma^n Q^*} K^{-n}(X) \tag{3.2}$$

Como $\Sigma^{n+1} i^*$ é sobrejetivo, δ_n é o operador nulo e, portanto $\Sigma^n Q^*$ é injetivo.

■

Corolário 3.3.3. *Sejam X, Y são dois espaços com pontos base fixados, $i_X : X \to X \times Y$ e $i_Y : Y \to X \times X$, as inclusões canônicas e $Q : X \times Y \to X \wedge Y$, o mapa quociente. Então, a sequência abaixo é sequência exata split .*

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{Q^*} \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i_X^* \oplus i_Y^*} \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \longrightarrow 0$$

Demonstração. Como X é retrato de $X \times Y$ e Y é retrato de $X \times Y/X$ temos, pelo resultado anterior, sequências exatas *splits*

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y/X) \xrightarrow{f^*} \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i_X^*} \widetilde{K}(X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{g^*} \widetilde{K}(X \times Y/X) \xrightarrow{(fi_Y)^*} \widetilde{K}(Y) \longrightarrow 0,$$

onde usamos que $(X \times Y/X)/Y = X \wedge Y$, $f : X \times Y \to X \times Y/X$ e $g : X \times Y/X \to X \wedge Y$ são os mapas de projeção.
Como $f^*g^* = Q^*$, temos que Q^* é injetivo; como i_X^* é sobrejetivo, i_Y^* também o é e, portanto, $I_X^* \oplus I_Y^*$ é sobrejetivo.
A exatadidão segue de

$$\ker I_X^* \oplus i_Y^* = \ker i_X^* \cap \ker i_Y^* = Im\ f^* \cap \ker i_Y^* = f^*(\ker(fi_Y)^*) = f^*(Im\ g^*) = Im\ f^*g^* = \ker Q^*.$$

Por fim, a sequência é split, pois $\pi_X^* + \pi_Y^*$ é inverso à direita de $i_X^* \oplus i_Y^*$. ∎

3.4 PRODUTO EXTERNO E PRODUTO EXTERNO REDUZIDO

Seja X, Y espaços compactos com pontos fixados x_0, y_0, respectivamente. Considere o produto tensorial $K(X) \otimes K(Y)$, ele é um anel onde a operação de multiplicação é dada por

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1a_2 \otimes b_1b_2),$$

para todo $a_1, a_2 \in K(X)$ e $b_1, b_2 \in K(Y)$.
Começamos definindo um mapa $K(X) \times K(Y) \to K(X \times Y)$. Se $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ são os mapas de projeção, definimos

$$\begin{aligned} &K(X) \times K(Y) \to K(X \times Y) \\ &(a, b) \mapsto \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b). \end{aligned}$$

Esse mapa é bilinear, logo, pela propriedade universal do produto tensorial temos um mapa

$$\begin{aligned} &K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y) \\ &a \otimes b \mapsto \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b), \end{aligned}$$

que é um homomorfismo de anéis.

Esse mapa é conhecido como o produto externo e é imediato ver que se restringe a um homomorfismo

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \times Y)$$

Pelo corolário 3.3.3 a sequência

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{Q^*} \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i_X^* \oplus i_Y^*} \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \longrightarrow 0$$

é exata. Temos mapa injetivo, $\widetilde{K}(X \wedge Y) \to \widetilde{K}(X \times Y)$ então podemos considerar $\widetilde{K}(X \wedge Y) \subset \widetilde{K}(X \times Y)$. Queremos ver que o produto externo é, na verdade, um homomorfismo

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$$

Basta então vermos que se $a \in \widetilde{K}(X)$ e $b \in \widetilde{K}(Y)$ então $i_X^*(a \otimes b) = 0$ e $i_Y^*(a \otimes b) = 0$. Com efeito,

$$i_X^*(a \otimes b) = i_X^*(\pi_X^*(a)\pi_Y^*(b)) = i_X^*\pi_X^*(a)i_X^*\pi_Y^*(b) = (\pi_X i_X)^*(a)(\pi_Y i_X)^*(b)$$

Mas o mapa $\pi_Y i_X$ é o mapa constante $X \mapsto y_0$ e portanto $(\pi_Y i_X)^* = 0$.
Mais precisamente temos a seguinte

Definição 3.4.1. Definimos o produto externo reduzido por

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$$
$$a \otimes b \mapsto (Q^*)^{-1}(\pi_X^*(a)\pi_Y^*(b))$$

onde $Q : X \times Y \to X \wedge Y$ é o mapa quociente.

Seja agora $A \subset X$, $B \subset Y$ subespaços fechados. O produto externo reduzido nos dá um mapa

$$K(X, A) \otimes K(Y, B) \to \widetilde{K}(X/A \wedge Y/B).$$

Usando então o homeomorfismo

$$X/A \wedge Y/B \cong X \times Y/(X \times B \cup A \times Y),$$

e usando a notação $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$, escrevemos esse mapa da forma

$$K(X, A) \otimes K(Y, B) \to K((X, A) \times (Y, B)).$$

No caso em que $X = Y$, usamos o mapa diagonal $X/A \cup B \to X \times X/(X \times A \cup B \times X)$ que induz um homomorfismo

$$\widetilde{K}((X, A) \times (X, B)) \xrightarrow{\Delta^*} \widetilde{K}(X, A \cup B).$$

E compomos o produto externo reduzido com esse mapa para efinir o homomorfismo

$$K(X, A) \otimes K(X, B) \to K(X, A \cup B).$$

Tomando também $B = \emptyset$, temos o mapa

$$K(X, A) \otimes \widetilde{K}(X) \to K(X, A).$$

Esse mapa induz uma estrutura de $\widetilde{K}(X)$-módulo em $K(X, A)$. Como todos os mapas definidos até o momento são mapas naturais, isto é, definidos a partir de pullbacks de mapas entre espaços, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.1. *A sequência exata*

$$K(X, A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

é uma sequência de homomorfismos de $\widetilde{K}(X)$-módulos, onde a estrutura de $\widetilde{K}(X)$-módulo de $\widetilde{K}(A)$ é dada pelo mapa $\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$.

Por fim estendemos a definição do produto externo reduzido para os funtores $K^{-n}(X, A)$. Lembrando que

$$K^{-n}(X, A) = \widetilde{K}(S^n \wedge (X/A)),$$

e que existem homeomorfismos canônicos $(S^n \wedge X/A) \wedge (S^m \wedge Y/B) \cong S^{n+m} \wedge (X/A \wedge Y/B)$ e $X/A \wedge Y/B \cong X \times Y/(X \times B \cup A \times Y)$, obtemos um homomorfismo

$$K^{-n}(X, A) \otimes K^{-m}(Y, B) \to K^{-n-m}((X, A) \times (Y, B)).$$

Novamente, se $X = Y$, usamos o mapa diagonal para definir um mapa

$$K^{-n}(X, A) \otimes K^{-m}(X, B) \to K^{-n-m}(X, A \cup B).$$

E para finalizar, tomando $m = 0$ e $B = \emptyset$, temos um homomorfismo

$$K^{-n}(X, A) \otimes K(X) \to K^{-n}(X, A),$$

o que dá uma estrutura de $K(X)$-módulo para $K^{-n}(X, A)$.

3.5 PERIODICIDADE DE BOTT

O teorema da periodicidade de Bott é o resultado chave da K-teoria. Ele estabelece um isomorfismo $K(X) \cong K^{-2}(X)$, simplificando o estudo da K-teoria de um espaço apenas a $K(X)$ e $K^{-1}(X)$.

Usando o produto externo reduzido consideramos o mapa

$$\widetilde{K}(X^+) \otimes \widetilde{K}(S^2) \to \widetilde{K}(S^2 \wedge X^+).$$

Como $\widetilde{K}(X^+) \cong K(X)$ e $\widetilde{K}(S^2 \wedge X^+) = K^{-2}(X)$ podemos escrever esse mapa do seguinte modo

$$K(X) \otimes \widetilde{K}(S^2) \to K^{-2}(X).$$

Usando esse mapa fazemos a seguinte definição:

Definição 3.5.1. Sejam H^* o fibrado tautológico sobre S^2 definido na seção 2.5 e H o seu dual. Como $[H] - 1 \in \widetilde{K}(S^2)$ definimos o mapa de Bott :

$$\begin{aligned} \beta : K(X) &\to K^{-2}(X) \\ a &\mapsto a([H] - 1), \end{aligned}$$

que é um homomorfismo de $K(X)$- módulos

Teorema 3.5.1. *(Teorema da periodicidade de Bott)*
O mapa de Bott β é um isomorfismo de $K(X)$-módulos.

A demonstração desse teorema será feita na última seção da dissertação. Vejamos algumas consequências desse resultado agora.

Corolário 3.5.1. *Para todo $n \geq 0$ temos um isomorfismo*

$$K^{-n}(X, A) \cong K^{-n-2}(X, A).$$

Demonstração. É claro que o mapa de Bott se restringe a um isomorfismo

$$\widetilde{K}(X) \cong \widetilde{K}^{-2}(X).$$

Tomando $X = S^n \wedge X/A$, temos um isomorfismo

$$\widetilde{K}^{-n}(X, A) \cong \widetilde{K}^{-n-2}(X, A).$$

que por sua vez nos da um isomorfismo

$$K^{-n}(X,A) \cong K^{-n-2}(X,A).$$

■

Usando esses isomorfismos a sequência exata longa de um par (X,A) se reduz a uma sequência exata circular:

$$\begin{array}{ccccc} K(X,A) & \longrightarrow & K(X) & \longrightarrow & K(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^{-1}(A) & \longleftarrow & K^{-1}(X) & \longleftarrow & K^{-1}(X,A) \end{array}$$

4 OPERADORES DE FREDHOLM

Os espaços de Hilbert que estaremos interessados nessa dissertação serão complexos, separáveis e de dimensão infinita. Daqui por diante, por espaço de Hilbert entenderemos um espaço desse tipo.

Dado um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{H})$, ou simplesmente $\mathcal{L}$, a álgebra dos operadores limitados $L : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Em $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ consideraremos a norma $\|L\| = \sup_{\|u\|=1} \|L(u)\|$.

Uma referência para esta seção é o capítulo 3 de (ARVESON, 2001).

4.1 OPERADORES DE FREDHOLM

Definição 4.1.1. Dizemos que um operador $L \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ é de Fredholm se $\ker(L)$ e $coker(L)$ tem ambos dimensão finita. Lembramos que o $coker(L)$ é definido por $\mathbb{H}/Im(L)$. Denotamos o conjunto desses operadores por $\mathcal{F}(\mathbb{H})$.

Lema 4.1.1. *Se $L \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ então $Im(L)$ é um subespaço fechado de $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Seja $P \subset \mathbb{H}$ um subespaço vetorial tal que $\mathbb{H} = Im(L) \oplus P$. Como existe isomorfismo de espaços vetoriais $P \cong \mathbb{H}/Im(L)$, segue que $Dim\ P < \infty$ e, portanto, P é um subespaço fechado de $\mathbb{H}$. Como $\ker(L)$ é fechado em $\mathbb{H}$, o quociente $\mathbb{H}/\ker(L)$ herda de $\mathbb{H}$ uma estrutura de espaço de Banach, e a aplicação linear induzida $\overline{L} : \mathbb{H}/Ker(L) \to \mathbb{H}$, $\overline{L}([u]) = L(u)$, é limitada. Definindo em $(\mathbb{H}/Ker(L)) \oplus P$ a norma $\|([u], v)\| = \|[u]\| + \|v\|$, segue que esse espaço é de Banach. Considere agora a aplicação linear

$$\overline{L} + i : (\mathbb{H}/Ker(L)) \oplus P \to \mathbb{H}, \quad (\overline{L} + i)([u], v) = \overline{L}([u]) + v.$$

Tal aplicação é limitada e é um isomorfismo. Logo, $\overline{L}+i$ é uma aplicação fechada. O resultado segue agora se observar que $Im(L)$ é a imagem, por $\overline{L}+i$, do subespaço fechado $(\mathbb{H}/Im(L)) \oplus \{0\}$. ■

Como $Im(L)$ é fechado, nós temos isomorfismo $Im(L)^{\perp} \cong coker(L) \cong \ker(L^*)$ onde L^* é a adjunta de L.

Iremos usar nesta seção o seguinte lema que é consequência imediata do Teorema da alternativa de Fredholm, que pode ser encontrado em(ARVESON, 2001)

Lema 4.1.2. *Se K é um operador compacto em $\mathbb{H}$, então $Id + K \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ e*

$$Dim\ \ker(Id + K) = Dim\ coker(Id + K).$$

Seja $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{H})$ o conjunto dos operadores compactos de $\mathbb{H}$. Esse conjunto é um ideal bilateral de $\mathcal{L}$, isto é, se $L \in \mathcal{L}$ e $K \in \mathcal{K}$, então $LK \in \mathcal{K}$ e $KL \in \mathcal{K}$. Portanto, no quociente $\mathcal{L}/\mathcal{K}$, a seguinte operação de multiplicação

$$[L] \cdot [S] \ = \ [LS],$$

está bem definida e define uma estrutura de álgebra em $\mathcal{L}/\mathcal{K}$. Esta é a *álgebra de Calkin* de $\mathbb{H}$. Como $\mathcal{K}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}$, a norma de $\mathcal{L}$ induz uma norma completa em $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ relativamente à qual a aplicação quociente $\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{K}$ é contínua.

Proposição 4.1.1. *(Teorema de Atkinson)*
Um operador $L \in \mathcal{L}$ é de Fredholm se, e somente se, a imagem de L pelo mapa quociente

$$\mathcal{L} \longrightarrow \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{K}}$$
$$L \mapsto [L]$$

for um elemento inversível da álgebra de Calkin.

Demonstração. Primeiramente seja $L \in \mathcal{L}$ tal que $[L]$ é um inversível em $\mathcal{L}/\mathcal{K}$. Existe $S \in \mathcal{L}$ tal que $[LS] = [Id]$ ou seja $LS = Id + K$ para certo $K \in \mathcal{K}$ então como $Id + K$ é operador de Fredholm LS também o é, analogamente SL é operador de Fredholm. usando então que:

$$\ker\ L \subset \ker\ SL$$
$$Im\ LS \subset ImL$$

obtemos que

$$Dim \ker L \leq Dim \ker SL < \infty,$$
$$Dim\ coker\ L \leq Dim\ coker\ LS < \infty.$$

E, portanto L é operador de Fredholm.

Reciprocamente, seja L um operador de Fredholm e seja L^* sua adjunta, vejamos que $[LL^*]$ e $[L^*L]$ são inversíveis, logo $[L]$ é inversível. Denote por P, Q as projeções ortogonais sobre $\ker L$ e $\ker L^*$ respectivamente. Como $\ker(L^*) \cong coker(L)$, P, Q têm posto finito e, portanto são compactos.

Queremos ver que $L^*L + P$ e $LL^* + Q$ são isomorfismos e isso basta para concluirmos o resultado, pois se $[L^*L + P]$ e $[LL^* + Q]$ são inversíveis, como $[P] = [Q] = 0$ por serem compactos, concluímos que $[L^*L]$ e $[LL^*]$ são inversíveis.

Vejamos que L^*L+P é um isomorfismo. Sabemos que $Im(L)$ é ortogonal a $\ker(L^*)$, portanto $\ker(L^*L) = \ker(L)$, logo $L^*L + P$ é injetivo.Agora como $Im(L^*)$ e $\ker(L) = Im(P)$ são ortogonais temos

$$Im(L^*L + P) = Im(L^*L) \oplus Im(P) = Im(L^*L) \oplus \ker(L).$$

Novamente, como $\ker(L^*)$ é ortogonal a $Im(L)$, temos que $L^* : Im(L) \to Im(L^*)$ é um isomorfismo e portanto $Im(L^*L) = Im(L^*)$.Desse modo concluímos que

$$Im(L^*L + P) = Im(L^*L) \oplus \ker(L) = Im(L^*) \oplus \ker(L) = \mathbb{H}.$$

Logo, $L^*L + P$ é um isomorfismo. Analogamente, temos que $LL^* + Q$ é também um isomorfismo.

■

O seguinte resultado é um corolário imediato.

Corolário 4.1.1. *Seja K um operador compacto em $\mathbb{H}$ e T um isomorfismo, então o operador $T + K$ é de Fredholm.*

4.2 O ÍNDICE DE FREDHOLM

Definição 4.2.1. Dado um operador $L \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$, definimos o índice desse operador como sendo o número inteiro

$$Index(L) = Dim\ \ker(L) - Dim\ coker(L).$$

Observação 4.2.1. Segue do Teorema da alternativa de Fredholm que o índice de operadores de Fredholm da forma $Id + K$, para $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ é nulo.

Perceba que, se $L, S \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ então

$$Dim \ker(LS) \leq Dim \ker(L) + Dim \ker(S) \leq \infty,$$
$$Dim\ coker(LS) \leq Dim\ coker(L) + Dim\ coker(S) \leq \infty$$

e, portanto, $LS \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$.

O seguinte resultado expressa que o índice é um homomorfismo do semigrupo $\mathcal{F}(\mathbb{H})$ no grupo aditivo dos inteiros.

Proposição 4.2.1. *Se* $L, S \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ *então:*

$$Index(LS) = Ind(L) + Ind(S)$$

Demonstração. O resultado seguirá dessas igualdades:

$$Dim \ker(L) + Dim \ker(S) = Dim \ker(LS) + Dim \ (\ker(L)/S(\mathbb{H}) \cap \ker(L))$$

$$Dim \ coker(L) + Dim \ coker(S) = Dim \ coker(LS) + Dim(S(\mathbb{H}) + \ker(L)/S(\mathbb{H}))$$

$$Dim \ (\ker(L)/(S(\mathbb{H}) \cap \ker(L))) = Dim((S(\mathbb{H}) + \ker(L))/S(\mathbb{H}))$$

Provemos cada uma:

i) $Dim \ker(L) + Dim \ker(S) = Dim \ker(LS) + Dim \ (\ker(L)/S(\mathbb{H}) \cap \ker(L))$.

Provemos primeiramente que

$$Dim \ (\ker(LS)/\ker(S)) = Dim \ S(\mathbb{H}) \cap \ker(L).$$

Considere o mapa

$$S : \ker(LS) \to S(\mathbb{H}) \cap \ker(L).$$

Esse mapa é sobrejetivo e tem núcleo $\ker(B)$, portanto podemos concluir a equação acima.

Somemos $Dim \ \ker(S) + Dim \ (\ker(L)/S(\mathbb{H}) \cap \ker(\mathbb{L}))$ a ambos os lados da equação. Como $Dim \ker(LS)/\ker(S) + Dim \ker(S) = Dim \ker(LS)$ temos que o lado esquerdo da equação fica

$$Dim \ker(LS) + Dim \ (\ker(L)/S(\mathbb{H}) \cap \ker(\mathbb{L})).$$

Analogamente, o lado direito fica

$$Dim \ker(L) + Dim \ker(S).$$

ii) $Dim \ coker(L) + Dim \ coker(S) = Dim \ coker(LS) + Dim(S(\mathbb{H}) + \ker(L)/S(\mathbb{H}))$.

Primeiro, observe que se $M \subset \mathbb{H}$ é um subespaço de codimensão finita podemos definir um mapa

$$\begin{aligned} A : \mathbb{H}/M &\to L(\mathbb{H})/L(M) \\ [v] &\mapsto [L(v)]. \end{aligned}$$

Esse mapa, é fácil ver, é sobrejetivo com núcleo $M + \ker(L)/M$. Portanto, tomando $M = S(\mathbb{H})$, temos a equação

$$Dim\ (\mathbb{H}/S(\mathbb{H})) = Dim\ (L(\mathbb{H})/LS(\mathbb{H})) + Dim\ ((S(\mathbb{H}) + \ker(L))/S(\mathbb{H}).$$

Adicionando $Dim\ \mathbb{H}/L(\mathbb{H})$ a ambos os lados, o lado esquerdo fica

$$Dim\ coker(L) + Dim\ coker(S).$$

Observando que $Dim\ (L(\mathbb{H}))/LS(\mathbb{H}) + Dim\ \mathbb{H}/L(\mathbb{H}) = Dim\ \mathbb{H}/\mathbb{L}\$(\mathbb{H})$, o lado direito fica

$$Dim\ coker(LS) + Dim(S(\mathbb{H}) + \ker(L)/S(\mathbb{H})).$$

iii) $Dim\ (\ker(L)/(S(\mathbb{H}) \cap \ker(L))) = Dim((S(\mathbb{H}) + \ker(L))/S(\mathbb{H}))$.

Esse resultado é imediato do fato que o seguinte mapa é um isomorfismo:

$$\begin{aligned} &\ker(L)/(S(\mathbb{H}) \cap \ker(L)) \to (S(\mathbb{H}) + \ker(L))/S(\mathbb{H}) \\ &[v] \mapsto [v] \end{aligned}$$

■

Proposição 4.2.2. *(Estabilidade do índice)*
Se $L \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ e $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ então

$$Index(L) = Index(L + K).$$

Demonstração. Como L é de Fredholm, existe operador $S \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ tal que $LS = Id + C$ para certo $C \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ e, portanto, $Index(LS) = Index(Id + C) = 0$, onde a última igualdade segue do Lema 4.1.2.

Temos também a igualdade $(A + K)S = Id + C + KS$. Como $C + KS$ é compacto, o índice de $Id + C + KS$ e $(A + K)S$ é também nulo. Usando então a aditividade do índice temos

$$Index(A + K) + Index(S) = Index((A + K)S(= 0 = index(LS) = Index(L) + Index(S).$$

Cancelando $Index(S)$ obtemos o resultado desejado. ■

Proposição 4.2.3. *(Continuidade do Índice)*

Seja $L \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ e $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ que converge para L na norma de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. Existe n_0 tal que, se $n > n_0$, então L_n é operador de Fredholm e $Index(L_n) = Index(L)$.

Demonstração. O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{H})$ é um aberto de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ pois é a pré-imagem, pela aplicação contínua $\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{K}$, do conjunto dos inversíveis da álgebra de Calkin (e esse último é um aberto de $\mathcal{L}/\mathcal{K}$). Portanto, existe n_1 tal que $n > n_1$ implica que L_n é de Fredholm.

Seja S operador de Fredholm tal que $LS = Id+K$ para certo K compacto. Defina $T_n = L_n-L$ como $||T_n|| \to 0$ podemos tomar $n_0 > n_1$ tal que, se $n > n_0$, temos $||T_nS|| < 1$ e, portanto, $Id + T_nS$ é um inversível.

Então, tomando $n > n_0$, usando o lema anterior e o fato de que operadores inversíveis têm índice nulo, temos que

$$\begin{aligned}&Index(L_n) + Index(S) = Index(L_nS) =\\&Index((L + T_n)S) = Index(Id + T_nS + K) = Index(Id + T_nS) = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado ,

$$Index(L) + Index(S) = Index(LS) = Index(Id + K) = 0.$$

Igualando essas equações, obtemos que $Index(L_n) = Index(L)$. ■

Corolário 4.2.1. *Se $[0,1] \ni t \mapsto L_t$ é um caminho contínuo em $\mathcal{F}(\mathbb{H})$, então*

$$Index(L_0) = Index(L_1).$$

Demonstração. Da proposição anterior, segue que o mapa

$$\begin{aligned}&I \to \mathbb{Z}\\&t \mapsto Index(L_t)\end{aligned}$$

é contínuo e, portanto, constante. ■

4.3 OPERADORES DE WIENER-HOPF

Considere o espaço de Hilbert $\mathbb{H} = L^2(S^1, \mathbb{C})$. Denotando por z a variável em S^1, sabemos que $\{z^k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{H}$. Para cada inteiro n, denote por $\mathbb{H}_n$ o fecho de $Span\{z^k \ : \ k \geq n\}$. Em particular, $\mathbb{H}_0$ é o espaço das funções com série de Fourier da forma

$$u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i z^i.$$

Denote por $P : L^2(S^1, \mathbb{C}) \to \mathbb{H}_0$ a projeção ortogonal sobre $\mathbb{H}_0$. Dadas uma função contínua $f : S^1 \to \mathbb{C}$ e $u \in L^2(S^1, \mathbb{C})$, então $uf \in L^2(S^1, \mathbb{C})$ pois

$$\|uf\|_{L^2} \leq \|f\|_{C^0} \|u\|_{L^2} < \infty.$$

Portanto, fixada $f \in C^0(S^1, \mathbb{C})$, definimos o *operador de Wiener-Hopf com símbolo* f como sendo o seguinte mapa

$$T_f : \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{H}_0$$
$$T_f(u) = P(uf).$$

Temos então

$$\|T_f(u)\|_{L^2} = \|P(uf)\|_{L^2} \leq \|uf\|_{L^2} \leq \|f\|_{C^0} \|u\|_{L^2},$$

para toda $u \in L^2(S^1, \mathbb{C})$. Isso mostra que T_f é um operador limitado com $\|T_f\| \leq \|f\|_{C^0}$ e que o mapa (claramente linear)

$$C^0(S^1, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H}_0)$$
$$f \longmapsto T_f.$$

é um operador limitado de norma menor ou igual a 1 (considerando $C^0(S^1, \mathbb{C})$ munido da norma C^0).

Veja que se a função f tem expansão de Fourier

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i z^i,$$

então $T_f(u)$ é o elemento de $\mathbb{H}_0$ cujos coeficientes de Fourier são dados, em termos dos coeficientes de Fourier $(u_k)_k$ de u, por

$$(T_f(u))_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n-k} u_k.$$

Teorema 4.3.1. *Se $f : S^1 \to \mathbb{C}$ não se anula em nenhum ponto, então T_f é um operador de Fredholm, cujo índice de Fredholm é igual, a menos o número de rotação $w(f;0)$ da curva f em torno da origem*

$$index\ T_f \ = \ -w(f;0).$$

Demonstração. Denote por $\mathcal{B}$ a álgebra das funções contínuas em S^1 a valores complexos, isto é, $\mathcal{B} = C^0(S^1, \mathbb{C})$. Definimos o mapa

$$T : \mathcal{B} \longrightarrow \frac{\mathcal{L}(\mathbb{H}_0)}{\mathcal{K}(\mathbb{H}_0)}$$
$$T(f) = [T_f].$$

Pela Proposição 4.1.1, é suficiente ver que o mapa T leva inversíveis em inversíveis. Como $T(Id) = [T_{Id}] = [Id]$, então basta vermos que T é um homomorfismo de álgebras.

Seja $f, g \in \mathcal{B}$ com expansões em séries finitas

$$f(z) = \sum_{-n}^{n} f_i z^i, \qquad\qquad g(z) = \sum_{-m}^{m} g_i z^i.$$

Tome $l \geq m + n$ então

$$T_f(T_g(z^l)) = T_f(gz^l) = fgz^l = T_{fg}(z^l)$$

Então, T_{fg} e $T_f T_g$ coincidem em H_{m+n} logo $T_{fg} - T_f T_g$ tem posto finito. Em particular, é compacto, então

$$[T_{fg}] = [T_f][T_g].$$

Isso implica que T é um homomorfismo na subálgebra de $\mathcal{B}$ formada pelas funções com expansão em série finita, como essa subálgebra é densa em $\mathcal{B}$ e T é contínuo concluímos que T é um homomorfismo.
Por fim, se $w(f, 0) = n$, sabemos que f é homotópica (via funções $S^1 \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$) à função $z^n : S^1 \to \mathbb{C}^*$, e, portanto T_f é homotópico, via operadores de Fredholm, a T_{z^n}. Pelo corolário 4.2.1, $Index(T_f) = Index(T_{z^n})$.
Relativamente à base ortonormal de $\mathbb{H}_0$, $\{1, z, z^2, ...\}$, o operador T_{z^n} é justamente o operador de *shift*, isto é, o operador

$$T_{z^n}(z^l) = \begin{cases} z^{n+l} \ se \ n + l \geq 0 \\ 0 \ se \ n + l < 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $Ind\ T_{z^n} = -n$ e, portanto, $Ind\ T_f = -w(f, 0)$.

■

Em seguida, queremos generalizar a construção dos operadores de Wiener-Hopf para dimensões maiores. Seja $f : S^1 \to M_n(\mathbb{C})$ um mapa, onde $M_n(\mathbb{C})$ é o espaço das matrizes complexas $n \times n$. Denote por A_{ij} a matriz cuja entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna é 1 e todas as outras entradas são 0. Escreva, então,

$$f = \sum_{ij} f_{ij} A_{ij}.$$

Definimos o operador de Wiener-Hopf com símbolo f do seguinte modo

$$T_f : \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n$$
$$T_f(u \otimes v) = \sum_{i,j} P(f_{ij} u) \otimes A_{ij}(v).$$

Observação 4.3.1. Seja $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ o espaço das funções quadrado integráveis em S^1 a valores em $\mathbb{C}^n$. Se usarmos o isomorfismo canônico

$$L^2(S^1, \mathbb{C}^n) \longrightarrow L^2(S^1, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^n$$
$$f \longmapsto \sum_i f_i \otimes e_i,$$

onde $f = (f_1, ..., f_n)$, e e_1, ..., e_n são os vetores da base canônica de $\mathbb{C}^n$, podemos considerar $\mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n$ como subespaço de $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ e nesse caso é fácil ver que $T_f(u)$ é, simplesmente, a projeção de fu em $\mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n$. Desse modo, é imediato ver que $f \mapsto T_f$ é um mapa linear e contínuo.

Teorema 4.3.2. *Dado um mapa $f : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$, temos que T_f é um operador de Fredholm com índice igual a*

$$index\ T_f \;=\; -w(det \circ f; 0),$$

onde $det : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ é a função determinante.

Demonstração. .

I) T_f é um operador de Fredholm

Procedendo do mesmo modo que no teorema anterior para o caso $n = 1$ vamos tomar $\mathcal{B}$ a álgebra das funções contínuas em S^1 a valores em $GL_n(\mathbb{C})$ e considerar o mapa

$$T : \mathcal{B} \longrightarrow \frac{\mathcal{L}(\mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n)}{\mathcal{K}(\mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n)}$$
$$T(f) = [T_f].$$

Tome $f, g \in \mathcal{B}$, com expansões em séries finitas, isto é, se

$$f = \sum_{ij} f_{ij} A_{ij}, \qquad\qquad g = \sum_{ij} g_{ij} A_{ij},$$

então existem m, n tais que, para todo i, j temos

$$f_{ij} = \sum_{k=-n}^{n} (f_{ij})_k z^k, \qquad\qquad g_{ij} = \sum_{k=-m}^{m} (g_{ij})_k z^k.$$

Analogamente à proposição anterior, basta vermos que $[T_f][T_g] = [T_{fg}]$. Para isso, tome $l \geq m + n$ e use que

$$fg = \sum_{i,j,t,s} f_{ij} g_{ts} A_{ij} A_{ts}.$$

Temos então que

$$T_f\Big(T_g(z^l \otimes v)\Big) = T_f\Big(\sum_{ts} P(g_{ts} z^l) \otimes A_{ts}(v)\Big) = T_f\Big(\sum_{ts} g_{ts} z^l \otimes A_{ts}(v)\Big) =$$
$$\sum_{ijts} P(f_{ij} g_{ts} z^l) \otimes A_{ij} A_{ts}(v) = T_{fg}(z^l \otimes v).$$

Logo, T_{fg} e $T_f T_g$ coincidem em $\mathbb{H}_{m+n} \otimes \mathbb{C}^n$. Portanto, $T_{fg} - T_f T_g$ é compacto, pois tem posto finito, e concluímos que $[T_{fg}] = [T_f][T_g]$.

II) $Index\ T_f = -w(det \circ f; 0)$

Primeiro, mostremos que podemos supor que f é a valores no grupo unitário $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$: seja $R_t : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$, $t \in [0, 1]$, um retrato por deformação do $GL_n(\mathbb{C})$ sobre $U(n)$ (a existência de R_t é obtida facilmente do processo de Gram-Schmidt). Definindo $f_t = R_t \circ f$, então f_t é uma homotopia entre $f_0 = f$ e uma função $f_1 : S^1 \to U(n)$. Como T_{f_t} é uma homotopia entre T_f e T_{f_1} via operadores de Fredholm, então $Index\ T_f = Index\ T_{f_1}$. Por outro lado, como $det \circ f_t$ é uma homotopia entre $det \circ f$ e $det \circ f_1$, e o número de rotação é invariante por homotopias, então $w(f; 0) = w(f_1; 0)$.

Suponha então $f : S^1 \to U(n)$. Considere o difeomorfismo

$$\psi : U(n) \longrightarrow SU(n) \times S^1$$
$$\psi(A) \;=\; (A', det(A)),$$

onde A' é a matriz obtida multiplicando-se a primeira linha de A por $1/det(A)$. Então $\psi \circ f$ é da forma $(\psi \circ f)(z) = (g(z), det(f(z)))$ para certo mapa $g : S^1 \to SU(n)$. Como $SU(n)$ é simplesmente conexo se $n > 0$, existe homotopia g_t entre g e a aplicação constante igual a $I \in SU(n)$. Também, sendo $k = w(det \circ f; 0)$, existe homotopia h_t entre $det \circ f$ e a função

$z^k : S^1 \to S^1$. Logo, $\psi^{-1} \circ (g_t, h_t)$ é uma homotopia entre f e o mapa

$$f' : S^1 \longrightarrow U(n), \quad f'(z) = \begin{pmatrix} z^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Por invariância homotópica, o problema fica reduzido a mostrar que $Index\ T_{f'} = -k$. Mostrar isso é totalmente análogo ao que foi feito no caso em que $n = 1$.

■

5 O *INDEX BUNDLE* E A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PERIODICIDADE DE BOTT

Seja X um espaço topológico compacto. Dada uma família contínua $x \mapsto L_x$ de operadores de Fredholm em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, parametrizada por X, uma construção natural associa a ela uma classe de K-teoria em $K(X)$, chamada de *index bundle* de L; para $X = \{pt\}$, o index bundle de L é o índice de Fredholm do operador L:

$$Index(L) \;=\; Dim\ \ker(L) - Dim\ coker(L) \;\;\in\;\; K(\{pt\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Essa construção depende apenas da classe de homotopia de L, de modo que ela define uma aplicação

$$Index : [X, \mathcal{F}(\mathbb{H})] \to K(X), \tag{5.1}$$

onde $[X, \mathcal{F}(\mathbb{H})]$ denota o conjunto das classes de homotopia de mapas $X \to \mathcal{F}(\mathbb{H})$. Faremos a construção do index bundle na Seção 5.2; essa construção segue uma observação feita por Atiyah em (ATIYAH, 1968). Ainda nessa seção, provamos um teorema obtido independentemente por Atiyah e Jänich que estabelece que a aplicação (5.1) é um isomorfismo de grupos (veja que, *a priori*, $[X, \mathcal{F}(\mathbb{H})]$ é um semigrupo com a operação de composição de $\mathcal{F}(\mathbb{H})$). Na verdade, consideramos famílias de operadores de Fredholm nas quais o espaço de Hilbert também varia com o ponto x (pois isso será conveniente mais adiante). Para tal, se faz necessária a introdução de fibrados de Hilbert na Seção 5.1. Essa generalização não adiciona dificuldades técnicas graças ao Teorema de Kuiper (que enunciamos em 5.1).

Na Seção 4.3, consideramos uma importante classe de operadores de Fredholm, dada pelos operadores de Wiener-Hopf $T_f : \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n$ com símbolo f a valores em $GL_n(\mathbb{C})$. Dados um fibrado vetorial $E \in Vect(X)$ e um mapa $f : S^1 \to GL(E)$, uma família $T_f = \{T_{f_x}\}_{x \in X}$ de tais operadores de Wiener-Hopf é obtida definido-se, para cada $x \in X$,

$$T_{f_x} : \mathbb{H}_0 \otimes E_x \longrightarrow \mathbb{H}_0 \otimes E_x$$
$$f_x(z) = f(z)|_{E_x} \in GL(E_x).$$

O *index bundle* dessa família, $Index(T_f)$, define uma classe de K-teoria em $K(X)$. Por outro lado, como vimos na Seção 2.4.3, a cada par (E,f) corresponde um fibrado vetorial (E, f) sobre $X \times S^2$, e reciprocamente. Dessa forma, obtemos uma correspondência

$$Vect(X \times S^2) \longrightarrow K(X)$$
$$(E, f) \longmapsto Index(T_f).$$

Na Seção 5.3, mostramos que essa correspondência induz um homomomorfismo $\alpha : K^{-2}(X) \to K(X)$ que é a inversa do homomorfismo de Bott $\beta : K(X) \to K^{-2}(X)$, provando que β é um isomorfismo.

5.1 O TEOREMA DE KUIPER E FIBRADOS DE HILBERT

Fixado um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, o grupo linear de $\mathbb{H}$, que denotaremos por $GL(\mathbb{H})$, é o grupo formado pelos elementos inversíveis de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. O seguinte resultado fundamental é devido a *Nicolas Kuiper*:

Teorema 5.1.1. *[Teorema de Kuiper] Dado um espaço compacto X, toda função contínua $f : X \to GL(\mathbb{H})$ é homotópica à função constante igual à identidade.*

Demonstração. Ver (BLEECKER; BOOSS; MADER, 2012) ou (KUIPER,). ∎

Usaremos o teorema de Kuiper para mostrar que todo fibrado de Hilbert é trivial. Comecemos com a seguinte definição:

Definição 5.1.1. Um fibrado de Hilbert sobre um espaço topológico X é um espaço topológico H munido de um mapa contínuo $\pi : H \to X$ que satisfaz:

i) $\pi^{-1}(\{x\})$ tem estrutura de espaço de Hilbert para todo ponto $x \in X$,

ii) Para todo $x \in X$, existe um aberto U_x de X, contendo x, e um homeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ é um espaço de Hibert, que envia cada fibra $H_y = \pi^{-1}(\{y\})$ linearmente sobre $\{y\} \times \mathbb{H} \cong \mathbb{H}$.

Corolário 5.1.1. *Seja X um espaço compacto. Então todo fibrado de Hilbert sobre X é trivial.*

Demonstração. Seja H um fibrado de Hilbert sobre X. Então, existe cobertura aberta de X, $\{U_1, ..., U_n\}$ tal que $H|_{U_i}$ é trivial. Mostremos por indução em n que H é trivial.
Se $n = 1$ é evidente que H é trivial pois $U_1 = X$. Assumindo válido para $n - 1$, denote $U = U_1 \cup ... \cup U_{n-1}$ temos que $H|_U$ é trivial, logo a cobertura aberta $\{U, U_n\}$ serve como uma cobertura trivializadora com uma certa função de transição $\tau \in GL(\mathbb{H})$ para certo espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ mas pelo teorema de Kuiper essa função é homotópica a identidade então H é isomorfo a um fibrado com cobertura aberta U, U_n com função de transição igual a idntidade,

que é um fibrado trivial sobre X.

■

5.2 CONSTRUÇÃO DO INDEX BUNDLE E O TEOREMA DE ATIYAH-JÄNICH

Uma família contínua de operadores de Fredholm em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, parametrizada por um espaço topológico compacto X, é um mapa $L : X \to \mathcal{F}(\mathbb{H})$. Permitindo que o espaço de Hilbert também varie com o parâmetro $x \in X$, definimos:

Definição 5.2.1. Um operador de Fredholm num fibrado de Hilbert $H \to X$ é um homomorfismo $L : H \to H$ tal que, para cada $x \in X$, L_x é um operador de Fredholm em H_x. Denotamos o conjunto desses operadores por $\mathcal{F}(H)$.

Sabemos, pelo Corolário 5.1.1, que todo fibrado de Hilbert $H \to X$ admite uma trivialização Global $\phi : H \to X \times \mathbb{H}$. Através de ϕ, todo operador de Fredholm $L : H \to H$ se identifica a uma família contínua $L : X \to \mathcal{F}(\mathbb{H})$, e vice-versa. Por esse ponto de vista, a definição acima se torna desnecessária. Por outro lado, para a demonstração do Teorema de Periodicidade de Bott mais adiante, será conveniente fazermos a construção do index bundle no contexto em que os espaços de Hilbert variam com x.

Até o final dessa seção, $H \to X$ denotará um fibrado de Hilbert fixado.

Lema 5.2.1. *Dado um operador de Fredholm $L \in \mathcal{F}(H)$, existe um fibrado vetorial de posto finito $P \to X$ e um homomorfismo $\phi : P \to H$ tais que $L + \phi : H \oplus P \to H$ é sobrejetivo.*

Demonstração. Dado $x_0 \in X$, como a codimensão de L_{x_0} é finita, existe mapa linear $\phi_0 : \mathbb{C}^n \to H_{x_0}$ tal que

$$L_{x_0} + \phi_0 : H_{x_0} \oplus \mathbb{C}^{n_0} \to H_{x_0}$$

é sobrejetivo. Como existe vizinhança U_0 onde a codimensão de mapa L_x só pode ser menor ou igual a de L_{x_0}, então, se $P_0 = U_0 \times \mathbb{C}^{n_0}$, temos um mapa

$$L_x + \phi_0 : H_x \oplus (P_0)_x \to H_x$$

sobrejetivo, $\forall x \in U_0$. Podemos então formar uma cobertura aberta $\{U_0, ..., U_n\}$ e fibrados triviais (P_i) sobre U_i munidos de homomorfismos $\phi_i : P_i \to H|_{U_i}$ tais que

$$L_x + (\phi_i)_x : H_x \oplus (P_i)_x \to H_x$$

é sobrejetivo, $\forall x \in U_i$.

Tome uma partição da unidade (α_i), subordinada a cobertura (U_i) e defina

$$P = \bigoplus_{i=0}^{n} P_i$$

$$\phi = \alpha_0\phi_0 + \cdots + \alpha_n\phi_n$$

Então

$$L + \phi : H \oplus P \to H$$

é sobrejetivo. ■

Lema 5.2.2. *Seja $S : H \to H'$ um homomorfismo sobrejetivo entre dois fibrados de Hilbert sobre X. Definindo-se $\ker(S) \subset H$ por*

$$\ker(S) = \bigcup_{x \in X} \ker(S_x),$$

então $\ker(S)$ é um subfibrado de H.

Demonstração. Como a questão é local, podemos já supor que $H = H' = X \times \mathbb{H}$ e, portanto, $S_x \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ para todo $x \in X$. Fixe $x_0 \in X$. Como $\ker(S_{x_0})$ é fechado, a projeção ortogonal $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sobre $\ker(S_{x_0})$ está definida. Para cada $x \in X$, considere a aplicação

$$\psi_x : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \oplus \ker(S_{x_0}), \quad \psi_x(u) = (S_x(u), \pi(u)).$$

Como $\ker(S_{x_0})$ é um espaço de Hilbert, a soma direta $\mathbb{H} \oplus \ker(S_{x_0})$ tem uma estrutura natural de espaço de Hilbert relativamente à qual cada ψ_x é limitada. Além do mais, a aplicação $x \mapsto \psi_x \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H} \oplus \ker(S_{x_0}))$ é contínua, pois o mesmo é verdade de $x \mapsto S_x$. Para $x = x_0$, é claro que ψ_{x_0} é injetiva. Também, como S_{x_0} é sobrejetiva, é fácil ver que ψ_{x_0} é sobrejetiva. Logo, ψ_{x_0} é inversível. Como inversibilidade é uma condição aberta, segue que existe vizinhança U_{x_0} de x_0 tal que, para todo $x \in U_{x_0}$, existe a inversa ψ_x^{-1}. Veja agora que, para cada $x \in U_{x_0}$, temos $\ker(S_x) = \psi_x^{-1}(\{0\} \oplus \ker(S_{x_0}))$. Por causa disso, defina

$$\phi : U_{x_0} \times \ker(S_{x_0}) \longrightarrow \ker(S)|_{U_{x_0}}, \quad \phi(x, v) = \psi_x^{-1}(0, v).$$

A inversa de ϕ é uma trivialização de $\ker(S)$ sobre U_{x_0}.

■

Definição 5.2.2. Dado operador $L \in \mathcal{F}(H)$, defina o *index bundle* $Index(L) \in K(X)$ da seguinte forma: seja (P, ϕ) como no Lema 5.2.1. Pelo Lema 5.2.2, $\ker(L + \phi) = \cup_x \ker(L_x + \phi_x)$ é um fibrado vetorial sobre X. Como $L + \phi$ é de Fredholm (pois L é de Fredholm e ϕ tem posto finito), esse fibrado tem posto finito. Definimos então

$$Index(L) := [\ker(L + \phi)] - [P]$$

Lema 5.2.3. *A definição de $Index(L)$ não depende da particular escolha do par (P, ϕ).*

Demonstração. Dada outra escolha (Q, ψ), sejam $\widetilde{P} = P \oplus Q$, $\widetilde{\phi} = \phi \oplus \psi$. Então $(\widetilde{P}, \widetilde{\phi})$ também satisfaz a propriedade no Lema 5.2.1. Mostremos que as escolhas (P, ϕ) e $(\widetilde{P}, \widetilde{\phi})$ produzem o mesmo *index bundle* (e, de maneira análoga, o mesmo será verdade de (Q, ψ) e $(\widetilde{P}, \widetilde{\phi})$). Usando que

$$\ker(L + \phi) = \ker(L + \widetilde{\phi}) \cap (H \oplus P)$$

obtemos o seguinte diagrama de inclusões

$$\ker(L + \widetilde{\phi})[r]H \oplus \widetilde{P} \ker(L + \phi)[u][r]H \oplus P[u]$$

Esse diagrama induz uma aplicação

$$i : \frac{\ker(L + \widetilde{\phi})}{\ker(L + \phi)} \to \frac{H \oplus \widetilde{P}}{H \oplus P} = \frac{\widetilde{P}}{P}.$$

Vamos mostrar que i é um isomorfismo:

i) Injetividade:

Se $i([v]) = [0]$, então $v \in \ker(L + \widetilde{\phi}) \cap (H \oplus P)$ e, portanto, $v \in \ker(L + \phi)$, logo $[v] = 0$

ii) Sobrejetividade:

Seja $[v, a] \in H \oplus \widetilde{P}$, como $L \oplus \phi$ é sobrejetiva temos que existe $(w, b) \in H \oplus P$ tal que $L(w) + \phi(b) = -\widetilde{\phi}(a)$, então $(w, a + b) \in \ker(L + \widetilde{\phi})$ e $i(w, a + b) = [w, a + b] = [v, a]$.

Daí concluímos que o índice é um mapa bem definido, pois

$$[\ker(L + \phi)] - [P] = [\ker(L + \widetilde{\phi})] - [\widetilde{P}].$$

■

Exemplo 5.2.1. Uma importante classe de operadores de Fredholm são os operadores de *shift*, dado um fibrado de hilbert H, como esse fibrado é trivial, existem seções $\{e_1, ..., e_n, ...\}$ tais que $\{e_1(x), ..., e_n(x)...\}$ formam uma base de E_x, $\forall x \in X$. Definimos para cada $k \in \mathbb{Z}$ mapas

$$\tau_k : H \longrightarrow H$$

$$\begin{cases} \tau_k(e_i(x)) = e_{i+k}(x) \quad Se \quad i+k \geq 1 \\ \tau_k(e_i(x)) = 0 \quad Se \quad i+k < 1 \end{cases}$$

É facil ver que $\tau_k \in \mathcal{F}(H)$. Vejamos como calcular o *index bundle* de τ_k.
Se $k < 0$ τ_x é sobrejetivo e $\ker \tau_k = Span[e_1, ..., e_{-k}] \cong \underline{\mathbb{C}}^{-k}$, então

$$Index(\tau_k) = [\ker \tau_k] = -k \in K(X).$$

Se $k > 0$,seja $P = Span[e_1, ..., e_k] \cong \underline{\mathbb{C}}^n$ e $i : Span[e_1, ..., e_k] \to H$ a inclusão. (P, i) é uma escolha para τ_k como no Lema 5.2.1 e o mapa

$$\tau_k + i : H \oplus P \to H$$

é um isomorfismo, portanto

$$Index(\tau_k) = [\ker(\tau_k + i)] - [P] = -[P] = -[\underline{\mathbb{C}}^k] = -k \in K(X).$$

Por fim se, $k = 0$, o mapa τ_0 é a identidade e

$$Index(\tau_0) = 0 \in K(X).$$

Vejamos agora algumas propriedades do índice.

Proposição 5.2.1. *Seja $f : X \to Y$ contínua, H fibrado de Hilbert sobre Y e $L \in \mathcal{F}(H)$ então $f^*L \in \mathcal{F}(f^*H)$ e:*

$$f^*Index(L) = Index(f^*L)$$

Demonstração. É evidente que $f^*L \in \mathcal{F}(f^*H)$.
Se (P, ϕ) são escolhas para L, então $(f^*P, f^*\phi)$ são escolhas para f^*L; Usando que

$$\ker(f^*L + f^*\phi) = f^* \ker(L + \phi)$$

obtemos

$$Index(f^*L) = [\ker(f^*L + f^*\phi)] - [f^*P] = f^*\Big([\ker(L+\phi)] - [P]\Big) = f^*\ Index(L)$$

■

No restante desta seção, H será um fibrado de Hilbert sobre X.

Proposição 5.2.2. *Seja $L_t \in \mathcal{F}(H)$ uma homotopia. Então*

$$Index(L_0) = Index(L_1).$$

Demonstração. Tome o fibrado $H \times I$ sobre $X \times I$ e defina $L \in \mathcal{F}(H \times I)$ pondo $L|_{(x,t)} = L_t|_x$. Defina mapas

$$i_t : X \longrightarrow X \times I$$
$$i_t(x) = (x, t).$$

Fica claro que i_0 é homotópico a i_1, então dado $a \in K(X \times I)$, vale que $i_0^* a = i_1^* a$, além disso é facil ver que $i_t^* L = L_t$. Usando a proposição anterior, temos que

$$Index(L_0) = Index(i_0^* L) = i_0^*\ Index(L) = i_1^*\ Index(L) = Index(i_1^* L) = Index(L_1).$$

■

Proposição 5.2.3. *Se $L, S \in \mathcal{F}(H)$, então*

$$Index(LS) = Index(L) + Index(S).$$

Demonstração. Seja (P, ϕ) uma escolha para S e (Q, ψ) uma escolha para L, defina $\eta : P \oplus Q \to H$ por $\eta = L \circ \phi + \psi$. Vejamos que $(P \oplus Q, \eta)$ é uma escolha para LS.
Dado $v \in H$, existe $(u, q) \in H \oplus Q$ tal que $v = L(u) + \psi(q)$, por outro lado, existe $(w, p) \in H \oplus P$ tal que $S(w) + \phi(p) = u$. Portanto

$$v = L(u) + \psi(q) = L\Big(S(w) + \phi(p)\Big) + \psi(q) = LS(w) + \eta(p+q)$$

Para finalizar, basta vermos que existe um homomorfismo T que torna a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \ker(S+\phi) \hookrightarrow \ker(LS+\eta) \xrightarrow{T} \ker(L+\psi) \longrightarrow 0$$

Comecemos definindo o seguinte homomorfismo sobrejetivo

$$R := (S+\phi)\oplus Id : (H\oplus P)\oplus Q \to H\oplus Q$$

É fácil ver que $\ker(R) = \ker(S+\phi)\oplus\{0\}$ e segue de

$$(u,p,q)\in\ker(LS+\eta) \iff \Big((S+\phi)(u,p),q\Big)\in\ker(L+\psi)$$

que $R^{-1}(\ker(L+\psi)) = \ker(LS+\eta)$.
Tomando $T = R|_{\ker(LS+\eta)}$, temos o resultado desejado.

■

Denote por $[\mathcal{F}(H)]$ o conjunto das classes de homotopia dos operadores de Fredholm em H. Pelas proposições $5.2.2$ e 5.2.3, a aplicação

$$Index : [\mathcal{F}(H)] \longrightarrow K(X)$$
$$[L] \longmapsto Index(L)$$

está bem definida e é um homomorfismo de semigrupos.

Teorema 5.2.1. *(Teorema de Atiyah-Jänich) O homomorfismo acima é um isomorfismo.*

Demonstração. **i)** Sobrejetividade

Seja $E\in Vect(X)$, tome fibrado vetorial trivial $X\times V$ tal que $E\subset X\times V$ e seja $\pi : X\times V\to E$ o mapa de projeção, então defina mapa

$$L : H\otimes V \longrightarrow H\otimes V$$
$$L = \tau_{-1}\otimes\pi + Id\otimes(Id-\pi).$$

Como os subespaços $\pi_x(V_x) = E_x$ e $(Id-\pi_x)(V) = E_x^{\perp}$ são subespaços complementares temos que

$$L_x(H_x\otimes V_x) = \Big(\tau_{-1}\otimes\pi_x \oplus Id\otimes(Id-\pi_x)\Big)(H_x\otimes V_x) =$$
$$(\tau_{-1}\otimes\pi_x)(H_x\otimes V_x)\oplus(Id\otimes(Id-\pi_x))(H_x\otimes V_x) =$$
$$\tau_{-1}(H_x)\otimes\pi_x(V_x)\oplus H_x\otimes(Id-\pi_x)(V_x) =$$
$$H_x\otimes E_x\oplus H_x\otimes E_x^{\perp} = H_x\otimes V_x.$$

Portanto, L é sobrejetiva e $\ker\ L = Span\{e_1\} \otimes E \cong E$, em particular $L \in \mathcal{F}(H \otimes V)$. Usando isomorfismo $H \cong H \otimes V$, podemos considerar $L \in \mathcal{F}(H)$ e temos que $Index\ L = E$.

Tomando, por fim, o mapa $\tau_k \circ L$ temos

$$Index(\tau_k \circ L) = Index(\tau_k) + Index(L) = [E] - k.$$

Como todo elemento de $K(X)$ é da forma acima, temos a sobrejetividade do mapa.

ii) $\ker Index = \{[Id]\}$.

Seja $[L] \in \ker Index$ e seja $(\overline{P}, \overline{\phi})$ uma escolha para esse operador, então

$$[\ker(L + \overline{\phi})] = [\overline{P}].$$

assim existe Q fibrado trivial sobre X tal que

$$\ker(L + \overline{\phi}) \oplus Q \cong \overline{P} \oplus Q.$$

agora tomando $P = \overline{P} \oplus Q$ e $\phi : P \to H$ como sendo o mapa $\overline{\phi} \oplus 0$, (P, ϕ) é uma escolha para L e

$$\ker(L + \phi) = \ker(L + \overline{\phi}) \oplus Q$$

o que reduz nossa equação para

$$\ker(L + \phi) \cong P.$$

Identificando P com $\ker(L \oplus \phi)$, podemos definir mapa

$$\begin{aligned} T : H \oplus P &\longrightarrow H \oplus P \\ (v, p) &\longmapsto \Big((L + \phi)(v, p), (\pi\ |_{\ker(L+\phi)}\ (v, p)\Big), \end{aligned}$$

onde $\pi\ |_{\ker(L \oplus \phi)}$ é a projeção sobre o subespaço. É fácil ver que $T \in GL(H \oplus P)$, em blocos:

$$T = \begin{pmatrix} L & \phi \\ A & B \end{pmatrix} : H \oplus P \longrightarrow H \oplus P,$$

para certos operadores A, B

Como todo fibrado de Hilbert é trivial, pode-se ver T como um mapa $X \to GL(\overline{H})$ para um certo espaço de Hilbert $\overline{H}$ e, portanto, pelo teorema de kuiper, existe homotopia T_t tal que $T_0 = T$ e $T_1 = Id$. Em blocos, isso fica:

$$T_t = \begin{pmatrix} L_t & \phi_t \\ A_t & B_t. \end{pmatrix}$$

Portanto, L_t é uma homotopia entre L e o operador identidade em H, logo $[L] = [Id]$.

iii) $[\mathcal{F}(H)]$ é um grupo.

Para finalizar a demonstração falta vermos que $[\mathcal{F}(H)]$ é um grupo, para isso basta vermos a existência de iversos. Seja $[L] \in [\mathcal{F}(H)]$. Pela sobrejetividade do Index, temos que existe $S \in \mathcal{F}(H)$ tal que

$$Index(S) = -Index(L).$$

Portanto, $Index(SL) = Index(LS) = 0$. Logo,

$$[L][S] = [S][L] = [Id].$$

■

Para finalizar a seção vejamos um resultado simples que nos será útil.

Proposição 5.2.4. *Se* $L \in \mathcal{F}(H_1)$ *e* $S \in \mathcal{F}(H_2)$ *então* $L \oplus S \in \mathcal{F}(H_1 \oplus H_2)$ *e :*

$$Index(L \oplus S) = Index(L) + Index(S)$$

Demonstração. Se (P, ϕ) é escolha para L e (Q, ψ) é escolha para S ,então o mapa

$$(L \oplus S) + (\phi \oplus \psi) : H_1 \oplus H_2 \oplus P \oplus Q \longrightarrow H_1 \oplus H_2$$

é sobrejetivo e, além disso,

$$\ker\ ((L \oplus S) + (\phi \oplus \psi)) = \ker\ (L + \phi) \oplus \ker\ (S + \psi).$$

Segue que $L \oplus S$ é de Fredholm e $Index(L \oplus S) = Index(L) + Index(S)$.

■

5.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PERIODICIDADE DE BOTT

Nesta seção provaremos o Teorema da Periodicidade de Bott que estabelece que o mapa de Bott

$$\begin{array}{rccc} \beta: & K(X) & \longrightarrow & K^{-2}(X) \\ & a & \longmapsto & a(H-1) \end{array}$$

é um isomorfismo (veja Seção 3,5). Demonstraremos esse resultado construindo uma inversa para β. Seguindo (ATIYAH, 1968, §1), começaremos mostrando que o problema de se encontrar uma inversa para β se reduz ao problema de se encontrar um mapa $\alpha : K^{-2}(X) \to K(X)$ com certas propriedades. Em seguida, aplicaremos a construção do *index bundle* a uma família de operadores de Fredholm obtida dos operadores de Wiener-Hopf para obter um mapa α com essas propriedades.

5.3.1 Aspectos axiomáticos

Considere, para cada espaço X compacto, um mapa $\alpha_X : K^{-2}(X) \to K(X)$ que satisfaz:

1) α é funtorial, isto é , dado $f : X \to Y$ então $\alpha_X(f^*a) = f^*\alpha_Y(a)$, $\forall a \in K^{-2}(Y)$,

2) α_X é um homomorfismo de $K(X)$-módulos,

3) Quando $X = \{p\}$ é um ponto, $\alpha(H-1) = 1$.

Quando subentendido, omitiremos o índice X.

Vejamos que se α satisfaz essas propriedades ele é uma inversa de β.

Comecemos notando que, se existe mapa α com as propriedades acima, então temos, para todo compacto X, um mapa

$$\alpha : \widetilde{K}^{-2}(X^+) \longrightarrow \widetilde{K}(X^+).$$

Queremos começar estendendo a definição de α de modo que $\alpha : \widetilde{K}^{-2}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(Y)$ esteja definido para todo compacto Y e não apenas para os espaços da forma $Y = X^+$ com X

compacto. Tome Y compacto, com ponto base y_0, usando que:

$$\widetilde{K}^{-2}(Y) = \widetilde{K}(S^2 \wedge Y) = \widetilde{K}\Big(\frac{S^2 \times Y}{\{1\} \times Y \cup S^2 \times \{y_0\}}\Big),$$
$$K^{-2}(Y) = \widetilde{K}(S^2 \wedge Y^+) = \widetilde{K}\Big(\frac{S^2 \times Y^+}{\{1\} \times Y^+ \cup S^2 \times \{+\}}\Big) = \widetilde{K}\Big(\frac{S^2 \times Y}{\{1\} \times Y}\Big).$$

Considere os mapas:

$$i : y_0 \hookrightarrow Y$$
$$q : \frac{S^2 \times Y}{\{1\} \times Y} \to \frac{S^2 \times Y}{\{1\} \times Y \cup S^2 \times \{y_0\}}$$

Temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{K}^{-2}(Y) & \xrightarrow{q^*} & K^{-2}(Y) & \xrightarrow{(\Sigma^2 i)^*} & \widetilde{K}^{-2}(y_0)) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{y_0}} \\
\widetilde{K}(Y) & \hookrightarrow & K(Y) & \xrightarrow{i^*} & K(y_0)
\end{array}$$

Onde a comutatividade segue da funtorialidade de α e as linhas são exatas. Então queremos definir o mapa $\widetilde{K}^{-2}(Y) \to \widetilde{K}(Y)$. Isso ocorre se e somente se:

$$Im(\alpha_Y \circ q^*) \subset \widetilde{K}(Y) \iff i^* \alpha_Y q^* = 0 \iff \alpha_{y_0}(\Sigma^2 i) q^* = 0 \iff \alpha_{y_0}(q \Sigma^2 i)^* = 0.$$

Mas isso segue, pois $(q\Sigma^2 i)^* = 0$.
Desse modo definimos mapas $\alpha_Y : \widetilde{K}^{-2}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(Y)$ que satisfazem (1) , (3) e que são homomorfismos de $\widetilde{K}(Y)$ modulo.

Lema 5.3.1. *O seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{K}^{-2}(X) \otimes \widetilde{K}(X) & \xrightarrow{\phi} & \widetilde{K}^{-2}(X \times Y) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha \otimes Id} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\
\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(X) & \xrightarrow{\phi} & \widetilde{K}(X \times Y)
\end{array}$$

onde ϕ é o produto externo.

Demonstração. Como todos os mapas envolvidos são homomorfismo de $\widetilde{K}(Y)$ módulo, basta vermos que, $\forall a \in \widetilde{K}^{-2}(X)$, vale:

$$\alpha\big(\phi(a \otimes 1)\big) = \phi\big(\alpha(a) \otimes 1\big).$$

Se $\pi : X \times Y \to X$ for a projeção, isso é equivalente a:

$$\alpha(\pi^* a) = \pi^*\big(\alpha(a)\big),$$

que segue da funtorialidade de α.

■ Queremos agora fazer mais uma extensão de α e definir mapas:

$$\alpha_p : K^{-p-2}(X) \longrightarrow K^{-p}(X).$$

Fazemos isso definindo α_p como sendo o mapa:

$$\alpha : \widetilde{K}^{-2}(S^p \wedge X^+) \longrightarrow \widetilde{K}(S^p \wedge X^+).$$

Lema 5.3.2. *Seja $a \in K^{-p-2}(X)$ e $b \in K^{-q-2}(X)$, então*

$$\alpha_{p+q}(ab) = \alpha_p(a)b.$$

Demonstração. Basta tomar $X = S^p \wedge X^+$ e $Y = S^q \wedge Y^+$ no lema anterior. ■ Estamos agora prontos para provar que α é inversa de β.

Teorema 5.3.1. *Se existe mapa α, satisfazendo (1), (2) e (3), então α é inversa do mapa de Bott.*

Demonstração. **i)** $\alpha \circ \beta = Id$.

Se $a \in K(X)$, usando (2) e (3) temos

$$\alpha\big(\beta(a)\big) = \alpha\big(a(H-1)\big) = \alpha(H-1)a = a.$$

ii) $\beta \circ \alpha = Id$.

Se $a \in K^{-2}(X)$, então, pelo lema anterior,

$$\beta\big(\alpha(a)\big) = \alpha(a)(H-1) = \alpha_2\big(a(H-1)\big) = \alpha(H-1)a = a.$$

■

5.3.2 Construção do mapa $\alpha : K^{-2}(X) \to K(X)$

Como vimos na seção anterior, um mapa $\alpha : K^{-2}(X) \to K(X)$ com certas propriedades formais será uma inversa do mapa de Bott. A seguir construiremos um tal mapa seguindo (ATIYAH,).

Dado E, fibrado vetorial sobre X, e $f : S^1 \to GL(E)$, considere o fibrado de Hilbert sobre X:

$$H = \bigcup_{x\in X} L^2(S^1, E_x) = \bigcup_{x\in X} L^2(S^1, \mathbb{C}) \otimes E_x$$

e seja $H_0 = \mathbb{H}_0 \otimes E$ subfibrado de H, lembrando que $\mathbb{H}_0$ é o subespaço de $L^2(S^1, \mathbb{C})$ que é o fecho de $Span[1, z, z^2, ...]$.
Denote por $f_x : S^1 \to GL(E_x)$ a função f restrita a E_x. Usando o operador de Wiener-Hopf fibra a fibra construímos o mapa

$$T_f : H_0 \otimes E \to H_0 \otimes E$$
$$(T_f)_x = T_{f_x}.$$

Chamamos T_f o operador de Wiener-Hopf de f. Temos os seguintes resultados sobre esse operador:

Proposição 5.3.1. *Seja $f, g : S^1 \to GL(E)$ e $h : S^1 \to GL(F)$, valem*

i) *Se $f \simeq g$, então $T_f \simeq T_g$.*

ii) *Os seguintes mapas são equivalentes:*

$$T_{f\oplus h} : \mathbb{H} \otimes (E \oplus F) \to \mathbb{H} \otimes (E \oplus F),$$
$$T_f \oplus T_h : (\mathbb{H} \otimes E) \oplus (\mathbb{H} \otimes F) \to (\mathbb{H} \otimes E) \oplus (\mathbb{H} \otimes F).$$

Demonstração. **i)** É imediato, pois, se f_t é uma homotopia, então T_{f_t} também é.

ii) Seja $u \in H_0$, $v_1 \in E$ e $v_2 \in F$, então

$$T_{f\oplus h}(u \otimes (v_1 + v_2)) = T_{f\oplus h}(u \otimes v_1) + T_{f\oplus h}(u \otimes v_2) =$$
$$T_f(u \otimes v_1) + T_h(u \otimes v_2) = (T_f \oplus T_h)(u \otimes (v_1 + v_2))$$

■

A última propriedade do operador de wiener-hopf que iremos usar é a funtorialidade.

Proposição 5.3.2. *Seja $g : X \to Y$, E fibrado vetorial sobre Y e $f : S^1 \to Aut(E)$, então*

$$g^*T_f = T_{g^*f}.$$

Demonstração. Vejamos que os mapas são iguais nas fibras

$$(g^*T_f)|_x = (T_f)|_{g(x)} = T_{f_{g(x)}} = T_{(g^*f)_x} = T_{g^*f}|_x.$$

■

Definimos agora um mapa $\gamma : Vect(X \times S^2) \to K(X)$ do seguinte modo: dado $W \in Vect(X \times S^2)$, sabemos que $W = (E, f)$, onde $E = W|_{X\times\{1\}}$ e $f : S^1 \to GL(E)$. Definimos γ do seguinte modo:

$$\gamma : Vect(X \times S^2) \to K(X)$$
$$W \mapsto Index(T_f)$$

Observe que este mapa está bem definido, pois se $W = (E, g)$, vimos que $f \simeq g$, logo $T_f \simeq T_g$ e, portanto, $Index(T_f) = Index(T_g)$.

Observe que já estabelecemos a aditividade e a funtorialidade dos mapas $W \mapsto (E, f)$, $f \mapsto T_f$ e $L \mapsto Index\ L$ e, portanto, temos o seguinte

Proposição 5.3.3. *Seja $f : X \to Y$ mapa contínuo e $V, W \in Vect(Y \times S^2)$, denote $\overline{f} : X \times S^2 \to Y \times S^2$ o mapa induzido por f então:*

i) $\gamma(V \oplus W) = \gamma(V) + \gamma(W)$,

ii) $f^*(\gamma(V)) = \gamma(\overline{f}^*V)$.

Exemplo 5.3.1. Considere os fibrados sobre $X \times S^2$ da forma $(\underline{\mathbb{C}}^n, z^k)$,com $z^k : S^1 \to GL(\underline{\mathbb{C}}^n)$, onde $z^k(a)$ é multiplicação fibra a fibra por a^k., calculemos $Index(T_{z^k})$.

i) $k > 0$.

Nesse caso o operador T_{z^k} fica, simplesmente,

$$T_{z^k} : H_0 \otimes \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow H_0 \otimes \underline{\mathbb{C}}^n$$
$$T_{z^k}(u \otimes v) = z^k u \otimes v.$$

Denote $V = Span[1, z, ..., z^{k-1}] \subset H_0$, então o mapa

$$T_{z^k} \oplus (Id \otimes Id) : (H_0 \otimes \underline{\mathbb{C}}^n) \oplus (V \otimes \underline{\mathbb{C}}^n) \longrightarrow H_0 \otimes \underline{\mathbb{C}}^n$$

é um isomorfismo, portanto

$$Index(T_{z^k}) = -[V \otimes \underline{\mathbb{C}}^n] \cong -[\underline{\mathbb{C}}^k \otimes \underline{\mathbb{C}}^n] \cong -[\underline{\mathbb{C}}^{nk}] = -kn.$$

ii) $k = 0$

Nesse caso $z^0 = Id$ e $T_{Id} = Id$, logo $Index(T_{z^0}) = 0$.

iii) $k < 0$

Dado $u \in H_0$, se $u = \sum_{i\geq 0} u_i z^i$, então

$$T_{z^k} : H_0 \otimes \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow H_0 \otimes \underline{\mathbb{C}}^n$$
$$T_{z^k}(u \otimes v) = (\sum_{i\geq -k} u_i z^{i+k}) \otimes v = (\sum_{i\geq 0} u_{i-k} z^i) \otimes v.$$

Dai T_{z^k} é sobrejetivo e $\ker T_{z^k} = V \otimes \underline{\mathbb{C}}^n$, onde $V = Span[1, z, ...z^{-k-1}]$. Portanto

$$Index(T_{z^k}) = [V \otimes \underline{\mathbb{C}}^n] = [\underline{\mathbb{C}}^{-kn}] = -kn.$$

Proposição 5.3.4. *Seja* $E \in Vect(X)$ *e* $W \in Vect(X \times S^2)$*, escrevemos* $WE \in Vect(X \times S^2)$ *para representar o fibrado* $W \otimes \pi_X^* E$*, onde* $\pi_X : X \times S^2 \to X$ *é a projeção.*

Temos que

$$\gamma(WE) = \gamma(W)[E].$$

Demonstração. Seja $W = (F, f)$, pela Proposição 2.4.4 sabemos que $\pi_X^* E = (E, Id)$, então $WE = (F \otimes E, f \otimes Id)$.

Calculemos $Index\ T_{f\otimes Id}$; Seja (P, ϕ) uma escolha para T_f, ou seja, o seguinte mapa é sobrejetivo:

$$T_f + \phi : (H_0 \otimes F) \oplus P \longrightarrow (H_0 \otimes F).$$

Então o seguinte mapa também é sobrejetivo:

$$T_{f\otimes Id} + \phi \otimes Id : (H_0 \otimes F \otimes E) \oplus (P \otimes E) \longrightarrow H_0 \otimes F \otimes E,$$

ou seja $(P \otimes E, \phi \otimes Id)$ é escolha para $T_{f\otimes Id}$ e, além disso,

$$\ker(T_{f\otimes Id} + \phi \otimes Id) = \ker(T_f + \phi) \otimes E.$$

Portanto

$$\gamma(WE) = Index(T_{f\otimes Id}) = \ker(T_f + \phi) \otimes E - P \otimes E = Index(T_f) \otimes E = \gamma(W)E.$$

■

Pela propriedade universal de $K(X)$, o mapa γ se estende a um homomorfismo

$$\widetilde{\gamma} : K(X \times S^2) \to K(X)$$
$$\widetilde{\gamma}([W] - [V]) = \gamma(W) - \gamma(V)$$

e definimos o mapa $\alpha : K^{-2}(X) \to K(X)$ do seguinte modo: lembre que

$$K^{-2}(X) = \widetilde{K}(S^2 \times X/\{1\} \times X),$$

defina o mapa quociente

$$Q : S^2 \times X \to S^2 \times X/\{1\} \times X.$$

Então definimos o mapa α como sendo a composição:

$$K^{-2}(X) \xrightarrow{Q^*} K(X \times S^2) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} K(X).$$

Podemos agora fazer a demonstração do teorema da periodicidade de Bott.

Demonstração. Pelo Teorema 5.3.1 sabemos que basta provar que o mapa α definido acima satisfaz as propriedades $(1), (2)$ e (3).

(1) Funtorialidade.

Sabemos que o mapa Q^* é funtorial e $\widetilde{\gamma}$ também, pois γ é funtorial, portanto α também satisfaz a funtorialidade.

(2) α é um $K(X)$-módulo homomorfismo.

A aditividade de α segue novamente da aditividade de $\widetilde{\gamma}$ e Q^*.

Segue da Proposição 5.3.4 que γ é homomorfismo de $K(X)$-módulo e, portanto, $\widetilde{\gamma}$ também o é. Como Q^* é homomorfismo de $K(X \times S^2)$-módulo, ele é, em particular, homomorfismo de $K(X)$-módulo e, portanto, α também o é.

(3) $\alpha([H] - 1) = 1$

Primeiro observe que como Q^* é um homomorfismo de $K(X \times S^2)$-módulo, então $Q^*([H]-1) = [H]-1$; lembrando que $[H] \in Vect(X \times S^2)$ é a classe do fibrado $\pi^*_{S^2}H$. Vimos na Seção 2.5 que $H = (\underline{\mathbb{C}}^1, z^{-1})$ e, pelo Exemplo 5.3.1, isso implica que $\gamma(H) = 1$. Por outro lado, $1 = (\underline{\mathbb{C}}^1, Id)$ e, novamente pelo Exemplo 5.3.1, $\gamma(1) = 0$. Concluímos que

$$\alpha([H] - 1) = \widetilde{\gamma}(Q^*([H] - 1)) = \widetilde{\gamma}([H] - 1) = \gamma(H) - \gamma(1) = 1.$$

∎

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa dissertação estudamos os princípios básicos da K-teoria, como a definição do funtor $K(X)$ e suas variações $K^{-n}(X)$, assim como as propriedades cohomologicas da teoria, O teorema da periodicidade de Bott

$$\beta : K(X) \to K^{-2}(X)$$

é o principal teorema da teoria, pois simplifica a cohomologia para uma sequência exata cíclica

$$\begin{array}{ccccc} K(X,A) & \longrightarrow & K(X) & \longrightarrow & K(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^{-1}(A) & \longleftarrow & K^{-1}(X) & \longleftarrow & K^{-1}(X,A). \end{array}$$

Por isso o foco da dissertação foi provar esse teorema, a escolha da demonstração foi usando o *index bundle* de um operador de Fredholm em fibrados de Hilbert, essa escolha foi feita a fim de criar um análogo do teorema do índice de Atiyah-Singer em um contexto mais simples.

REFERÊNCIAS

ARVESON, W. A short course on Spectral Theory. [S.l.]: Springer, 2001.

ATIYAH, M. K-theory. CRC Press, 2018. ISBN 9780429973178. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=f1NPDwAAQBAJ>.

ATIYAH, M. F. Algebraic topology and operators in hilbert space.

ATIYAH, M. F. Bott periodicity and the index of elliptic operators. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford University Press, v. 19, n. 1, p. 113–140, 1968.

BLEECKER, D.; BOOSS, B.; MADER, A. Topology and Analysis: The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics. Springer New York, 2012. (Universitext). ISBN 9781468406276. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nKbwBwAAQBAJ>.

KUIPER, N. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. [S.l.: s.n.].

MUNKRES, J. Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000. (Featured Titles for Topology). ISBN 9780131816299. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAAIAAJ>.