UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLE DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WESLLEY HILTON DE ABREU MACÊDO

CONCEPÇÕES SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO APRESENTADOS POR ESTUDANTES DO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

Caruaru
2025

WESLLEY HILTON DE ABREU MACÊDO

CONCEPÇÕES SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO APRESENTADOS POR ESTUDANTES DO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação

(Matemática).

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane de Arimatéa Rocha

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Macêdo, Weslley Hilton de Abreu.
Concepções sobre o pensamento algébrico apresentados por estudantes do 1° ano do ensino médio / Weslley Hilton de Abreu Macêdo. - Caruaru, 2025.
77 p. : il.

Orientador(a): Cristiane de Arimatéa Rocha
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.

1. Linguagem algébrica. 2. Base Nacional Comum Curricular. 3. Transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio. 4. Pensamento algébrico. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

WESLLEY HILTON DE ABREU MACÊDO

PRINCIPAIS CONCEPÇÕES SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO DESENVOLVIDO POR ESTUDANTES DO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura do Campus Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 09/04/2025

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Ms. Edson Carlos Sobral de Sousa (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho àquela que me carregou em seu ventre, minha mãe, Maria do Socorro, cujo amor incondicional e inabalável educou-me e fez com que eu me tornasse o que sou hoje. À minha tia, Jucielma Alves (in memoriam), cuja alegria contagiante sempre me incentivou a seguir meus sonhos. Ao meu pai, José Helenildo, por todo o incentivo dado. E ao meu pai de consideração, Iván Olímpio (in memoriam), que, através dos seus conselhos e atitudes, me ensinou a ser responsável com a minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela força necessária ao longo de todo o meu percurso acadêmico. Agradeço aos meus familiares, em especial, minha mãe e a minha tia, por todo apoio, por me educarem e sempre me incentivarem nesta jornada de estudos. Agradeço a minha orientadora, professora Cristiane de Arimatéa Rocha, pelas orientações realizadas durante o desenvolvimento e construção deste trabalho. Agradeço também a professora Andreza Rodrigues da Silva, e a professora e coordenadora do curso de Licenciatura em matemática Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos, por todas as contribuições dadas, respectivamente, ao longo das disciplinas de Metodologia da Pesquisa Educacional e Trabalho de Conclusão de Curso I.

Agradeço aos amigos que formei durante o curso, por todos os momentos compartilhados, pela motivação e pelo apoio, em especial, Maria Claudia, Luiz Henrique, Luan kauê, Thiago Virgulino e Paulo Henrique. Também sou grato aos meus “amigos de van”, por tornar as viagens para a faculdade mais alegres e menos cansativas, por todas as conversas que tivemos, risadas, momentos de desabafo e por todas as motivações, sou grato, especialmente a estas pessoas que tornaram daquelas as melhores viagens, Thainá Almeida, Diana Balbino, Bruno César, Luís Henrique, Assuero Edivaldo e Pedro Lucas.

Sou grato a minha amiga Maria Eduarda, por toda ajuda, expressada por meio de dicas e opiniões a respeito da minha pesquisa. Agradeço a todos os professores e professoras, que contribuíram para a minha formação, e por serem exemplos de profissionais competentes e dedicados para uma educação de qualidade. Enfim, sou grato a todos e todas que de alguma maneira contribuíram para a realização desta etapa.

“Consagre ao senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos” (Provérbios 16:3).

RESUMO

A Base Nacional Comum Curricular traz um enfoque em competências e habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a trajetória escolar. Para tal, sua estrutura se organiza elencando conhecimentos de forma progressiva a cada ano que se avança, necessitando desta forma, uma desenvoltura por parte dos estudantes em compreendê-los e aprimorar cada vez mais seus saberes. Diante disso, o presente trabalho tem como principal objetivo analisar as concepções algébricas desenvolvidas pelos estudantes do 1º ano do Ensino Médio, conforme as competências e habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental nos anos finais. Para isso, o estudo foi realizado na Escola de Referência em Ensino Médio Corsina Braga, localizada no município de Cachoeirinha - Pernambuco, utilizando um questionário com questões que abordavam conceitos algébricos como igualdade, equações do 1º grau, sistemas de equações, sequência numérica, funções do 1º grau e manipulação algébrica. Ao todo, participaram 28 estudantes, cujas respostas foram analisadas para identificar as principais dificuldades, acertos e erros na compreensão e aplicação desses conceitos. A fundamentação teórica está organizada em dois capítulos: Um breve passeio pela história da álgebra e o pensamento algébrico; e A álgebra segundo a Base Nacional Comum Curricular. A pesquisa revelou que os estudantes têm uma noção básica sobre a igualdade entre termos e equações do 1º grau, contudo, ainda enfrentam desafios significativos ao lidar com problemas que exigem uma compreensão mais aprofundada da álgebra, como por exemplo, a função do 1º grau. Logo, sugere-se que há uma necessidade de reforçar o ensino de álgebra no Ensino Fundamental, enfatizando o desenvolvimento do pensamento algébrico e a transição gradual do pensamento aritmético para o algébrico.

Palavras-chave: Linguagem algébrica; Base Nacional Comum Curricular; Transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio; Pensamento algébrico.

ABSTRACT

The National Common Curricular Base focuses on skills and abilities that must be developed throughout the school trajectory. To this end, its structure is organized by listing knowledge progressively with each passing year, thus requiring resourcefulness on the part of students to understand them and increasingly improve their knowledge. Given this, the main objective of this work is to analyze the algebraic concepts developed by students in the 1st year of high school, according to the skills and abilities proposed by the National Common Curricular Base for Elementary Education in the final years. For this, the study was carried out at the Corsina Braga High School Reference School, located in the municipality of Cachoeirinha - Pernambuco, using a questionnaire with questions that addressed algebraic concepts such as equality, 1st degree equations, systems of equations, sequences, 1st degree functions and algebraic manipulation. In total, 28 students participated, whose responses were analyzed to identify the main difficulties, successes and errors in understanding and applying these concepts. The theoretical basis is organized into two chapters: A brief overview of the history of algebra and algebraic thinking; and Algebra according to the National Common Curricular Base. The research revealed that students have a basic understanding of the equality between terms and first-degree equations, but they still face significant challenges when dealing with problems that require a deeper understanding of algebra, such as the first-degree function. Therefore, it is suggested that there is a need to reinforce the teaching of algebra in Elementary School, emphasizing the development of algebraic thinking and the gradual transition from arithmetic to algebraic thinking.

Keywords: Algebraic language; Common National Curriculum Base; Transition from Elementary School to High School; Algebraic thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A.C.	Antes da era comum
AEE	Atendimento Educacional Especializado
BNCC	Base Nacional Comum curricular
D.C.	Depois da era comum
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EREM	Escola de Referência em Ensino Médio
NEM	Novo Ensino Médio
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
UNICEF	United Nations Children's Fund (Fundo das Nações Unidas para a Infância)
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

À medida que os estudantes avançam nos anos escolares, os conteúdos estudados se tornam progressivamente mais desafiadores, demandando uma compreensão mais aprofundada das disciplinas. A transição do ensino fundamental para o ensino médio assume, portanto, um papel crucial na jornada educacional dos estudantes, pois marca uma fase de significativas mudanças tanto no aperfeiçoamento dos conteúdos quanto no desenvolvimento pessoal.

Nesse contexto, a compreensão e aplicação de conceitos algébricos fundamentais desempenham um papel vital na formação matemática dos estudantes, uma vez que, ao dominar esses conceitos desde o início de sua jornada educacional no ensino médio, os estudantes desenvolvem habilidades fundamentais de raciocínio lógico, resolução de problemas e abstração matemática. Essenciais não apenas para o sucesso acadêmico futuro, mas também para sua capacidade de pensar criticamente e enfrentar desafios complexos em diversas áreas da vida.

No entanto, a complexidade crescente dos assuntos, combinada com o ritmo acelerado de ensino, pode resultar em desafios consideráveis que impactam diretamente o desempenho e a confiança dos alunos em relação à matemática. Tais desafios podem surgir de várias formas, desde a dificuldade em acompanhar o ritmo das aulas até a compreensão dos conceitos abstratos e a aplicação prática das técnicas aprendidas. Como consequência, muitos estudantes podem se sentir desorientados e inseguros, o que não apenas impacta seu desempenho escolar, mas também mina sua motivação e entusiasmo pelo aprendizado.

Diante desta pragmática, devemos levar em consideração que, a matemática tem sido encarada por muito tempo e até nos dias atuais, como uma disciplina escolar, no qual, segundo Prado (2000) tem acentuado dificuldades nos estudantes. Para tanto, o autor ressalva sobre a importância de estar presente e concentrado durante as aulas, tendo cuidado ao lidar com problemas que envolvam cálculos diretamente relacionados com a sua precisão, assim como, ter uma prática constante com revisões para solidificar o conhecimento e desenvolver habilidades essenciais.

Consolidando assim, o conhecimento adquirido em sala de aula, bem como a motivação e o acompanhamento dos pais em relação aos estudos, afim de proporcionar um conjunto de elementos abrangente que seja capaz de contribuir significativamente para o sucesso no seu aprendizado em matemática.

Contudo, os estudantes estão sendo inseridos no contexto escolar na maioria das vezes para se apropriar de seus conceitos abstratos, para decorar fórmulas e resolver problemas/exercícios de maneira mecanizada. Buscando-se deste modo, decorar meios já prontos para resolvê-los, ao invés de proporcionar segundo Souza (2009) uma abordagem de ensino contextualizada que incentive a participação ativa dos alunos, objetivando produzir uma aprendizagem significativa e capaz de revelar e interligar a matemática que se estuda em sala de aula com a matemática do dia a dia.

Deste modo, tais preposições, muitas vezes são evidenciadas na prática docente de muitos professores que adotam o sistema de ensino focado no tradicional, o que pode acarretar em diversos estudantes o bloqueio e até o seu desinteresse para se aprender matemática. Para mais, de acordo com Mizukami (1986, p.70), tal ensino atribui ao indivíduo um papel passivo e irrelevante para a elaboração e a aquisição de conhecimentos, de tal forma que preza-se em "memorizar definições, enunciados de leis, sínteses e recursos que lhe são oferecidos no processo de educação formal a partir de um esquema atomístico".

Nessa situação, a execução das operações torna-se o foco principal, trabalhado muitas vezes em detrimento da compreensão, reflexão e análise dos resultados obtidos, assim como, a justificativa das soluções e a demonstração do raciocínio por trás destas respostas. Isso pode levar a uma aprendizagem superficial diante dos conceitos estudados, resultando em dificuldades quando os estudantes são confrontados com problemas mais complexos que exigem uma abordagem mais analítica e crítica.

Sendo assim, a aprendizagem da álgebra considerada de cunho mais formal, geralmente presenciada durante o Ensino Fundamental a partir do 6º ano, tem se constituído uma grande adversidade para estes estudantes. Para tanto, tem se tornado palco de estudo para alguns pesquisadores (Paredes e Pecora, 2004; Lopes, 2021) interessados em entender as perspectivas e preocupações diante da transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, bem como, compreender como funciona o processo de aprendizagem da álgebra que se faz ao desenvolver o pensamento algébrico e as origens das dificuldades nesta etapa de ensino.

Ademais, tais autores abordam essas concepções frisando a necessidade de um desenvolvimento progressivo e de caráter dependente em relação ao que se aborda durante a trajetória escolar. Desta maneira, percebe-se que os estudantes ao chegarem no Ensino Médio, se deparam com grandes dificuldades no uso das habilidades e conhecimentos algébricos advindos dos anos escolares anteriores. Tais adversidades, são provindas justamente da ausência de um desenvolvimento gradual, que seja elencado e correlacionado com os assuntos que são vislumbrados à medida que se avança os anos escolares.

Além de tudo, durante a regência de aula possibilitada pela disciplina obrigatória de estágio supervisionado I, o pesquisador percebeu a grande dificuldade dos estudantes em álgebra, para tanto, ao longo da aula, foi apresentado uma maneira de responder diferente da que foi abordada pelo professor da turma, recebendo uma estranheza por parte dos estudantes. Tal evento, caracterizou-se como uma metodologia mecânica por parte do professor, onde estes indivíduos estavam acostumados em responder os exercícios só de uma maneira, repetindo-se um passo a passo. Deste modo, despertou a curiosidade no graduando em saber como estes estudantes iriam desenvolver suas habilidades matemáticas no próximo ano escolar.

Diante disso, a pesquisa foi realizada na Escola de Referência em Ensino Médio (EREM) Corsina Braga, localizada no município de Cachoeirinha–Pernambuco, escolhida devido a todo o contexto e a importância que ela apresenta para a comunidade, uma vez que, sendo uma das primeiras escolas, ela foi a grande pioneira em trazer o ensino médio para a cidade. Contribuindo de maneira esporadicamente para o desenvolvimento de toda a população cachoeirense, já que, antes era necessário se deslocar para as cidades mais próximas com o intuito de cumprir este nível de estudo, o que ficava dificultoso para a maioria da população.

Outrossim, o motivo da escolha de ser o 1º ano configura-se justamente por marcar a transição do ensino fundamental para o ensino médio, se iniciando assim, uma nova etapa de aprendizagem para os estudantes, bem como uma nova fase em sua vida. Para tal, os estudantes começam a se confrontar com algumas das decisões que são de suma importância para o planejamento da sua vida adulta, surgem as primeiras indagações do que se pretende fazer ao concluir o período escolar, pensando já em alguma área que tem interesse, se pretende seguir o caminho acadêmico, ou seja, o que eles almejam ser e se tornar daqui para frente.

Deste modo, nota-se que a cobrança tende a ser maior se comparada aos anos anteriores e cada vez mais os assuntos conduzem-se ao aprofundamento de seus conceitos de maneira mais rebuscada, necessitando inclusive, já ter certos saberes advindos de anos anteriores para que haja o entendimento desses e consequentemente o progresso dos estudantes perante os conhecimentos que são apresentados no ambiente escolar. Com base nisso, os conteúdos matemáticos também seguem essa linha de desenvoltura, necessitando assim, que estes estudantes tenham alguns conhecimentos da matemática bem definidos e desenvolvidos, a fim de dar sequência ao estudo nessa área.

Diante do exposto, a fim de debater algumas questões que norteiam o tema, o percurso foi conduzido e orientado pelos fatos abordados anteriormente, resultando na formulação do seguinte problema de pesquisa: *Quais as concepções algébricas apresentadas por estudantes do 1º ano do ensino médio quanto à sua trajetória no ensino fundamental?*

Desta maneira, para realizar esta pesquisa e responder à questão, propomos como objetivo geral: *analisar as concepções algébricas apresentadas por estudantes do 1º ano do ensino médio quanto à sua trajetória no ensino fundamental.*

Desta forma, para contemplar este objetivo geral, foram desenvolvidos três objetivos específicos: Identificar as concepções algébricas que os estudantes do 1º ano do ensino médio desenvolveram conforme o estipulado pela BNCC na etapa escolar do ensino fundamental anos finais; Apontar as dificuldades dos estudantes do 1º ano do ensino médio quanto às concepções algébricas; Analisar os acertos e os erros apresentados na compreensão e interpretação de problemas algébricos.

Com base nisso, este trabalho busca identificar quais competências, habilidades e conhecimentos algébricos foram desenvolvidos pelos estudantes, ou seja, o que efetivamente sabem utilizar e entendem quando ingressam no Ensino Médio, como também as principais dificuldades perante o entendimento/aplicação deste assunto e as causas que originam tais dificuldades. Deste modo, a natureza da pesquisa será qualitativa, dado que, traz uma abordagem descritiva, com foco no processo e no seu significado perante o estudo que está sendo abordado, afinal, iremos refletir acerca das opiniões e dos pensamentos de alguns estudantes.

Por fim, o nosso trabalho se organiza do seguinte modo: no próximo capítulo, exploraremos o aporte teórico, repartindo-se em “Um breve passeio pela história da álgebra”, no qual, abordaremos um pouco sobre a álgebra, como ela surgiu, sua definição, como era em algumas civilizações da antiguidade, as suas principais mudanças e evoluções até os dias atuais; “o pensamento algébrico”, pelo qual, abordaremos sobre algumas concepções acerca do pensamento algébrico, suas definições e o que os alunos deveriam saber para desenvolver esse pensamento.

Além disto, em sequência, teremos “a álgebra segundo a BNCC”, expondo as competências e habilidades que são elencadas pela atual BNCC de 2018 nos respectivos anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano) e nos anos do ensino médio (1º ao 3º ano) e “A transição do ensino fundamental para o ensino médio”, abordando sobre os principais aspectos e desafios presenciados durante esta transição e a importância da preparação durante esta fase escolar.

Logo após a fundamentação teórica, abordaremos sobre a metodologia aplicada nesta pesquisa educacional, informando sobre os instrumentos utilizados e os métodos aplicados para a sua realização. Logo em seguida, apresentaremos os resultados, bem como, a sua análise acerca dos dados/informações que foram obtidos durante este estudo e por fim, as considerações finais, apresentando-se assim, as conclusões sobre toda esta trajetória de pesquisa e o que foi possível obter a partir dela.

2 UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

De acordo com Coelho e Aguiar (2018), a álgebra está profundamente ligada ao progresso da humanidade, visto que, ela surge a partir da necessidade de resolver problemas relacionados com a contagem, a medição (seja de áreas ou volumes), o comércio e com o planejamento/construção de edifícios. Desta forma, o principal objetivo de seu uso, na maioria das vezes, costuma lidar com situações que envolvam o uso e a solução de variáveis desconhecidas, bem como, atender as necessidades práticas do cotidiano que estejam envolvidas com a resolução de problemas e a organização de informações.

Para tanto, a história por trás do surgimento e desenvolvimento da álgebra remonta-se a milhares de anos, problemas que exigiam métodos algébricos eram abordados por civilizações antigas, uma delas é o Egito, na qual, utilizava símbolos para representar quantidades desconhecidas. Além do mais, segundo Coelho (2023), ela apresenta origens na Mesopotâmia, pelas quais, antigos matemáticos desenvolveram técnicas para realizar a solução de equações lineares e quadráticas.

Tais técnicas, eram baseadas na utilização de símbolos e representações geométricas, nas quais, desempenhavam um importante papel para solucionar problemas comuns daquela época, como é o caso da divisão de terras, assim, com a utilização dessas abordagens foi possível lidar com esses problemas de forma mais sistemática e eficiente. Deste modo, um exemplo notável deste trabalho inicial é o Papiro Matemático de Rhind, o qual, segundo Domingues (2023), há cerca de 1850 anos a.C., este documento reuniu diversos problemas matemáticos, incluindo equações lineares, cálculo de áreas, volumes, frações, regra de três simples, trigonometria básica e geometria, o que evidencia o alto nível de sofisticação alcançado pelas civilizações antigas no campo da álgebra.

2.1 A ÁLGEBRA NAS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS

A álgebra, como conhecemos nos dias atuais, conforme Roque (2012), desenvolveu-se a partir das contribuições de diversas grandes civilizações, sendo então, destinada com o propósito de resolver problemas práticos do cotidiano, para os quais somente a utilização da aritmética não era suficiente para oferecer soluções adequadas. Além do mais, a autora enfatiza que, ao longo dos séculos, a álgebra foi evoluindo e consolidando-se como uma ferramenta fundamental para além da resolução desses problemas, avançando deste modo, para uma área de conhecimento e estudo que fortalece/contribuí para o conhecimento teórico da matemática.

Segundo Ponte (2005), as origens da álgebra estão intimamente ligadas ao processo de formalização e sistematização de técnicas específicas voltadas para a resolução de problemas provenientes da antiguidade. Deste modo, por exemplo, as antigas civilizações do Egito, Babilônia, China e Índia, não apenas lidavam com esses problemas, mas também se dedicavam ao desenvolvimento e aprimoramento de métodos, técnicas e estratégias para resolvê-los. Para tal, essas abordagens envolviam diversos aspectos provenientes da matemática, incluindo o uso de padrões numéricos, operações aritméticas e a aplicação de fórmulas.

De acordo com Vailati e Pacheco (2008), o desenvolvimento da álgebra vem a ser um campo de estudo bem amplo, e para tal, divide-se em duas fases: A álgebra antiga, compreendida de 1.700 a.C. a 1.700 d.C., responsável pelo estudo das equações e as estratégias para solucioná-las, e a álgebra moderna, de 1.700 d.C. até os dias atuais, encarregada pelo estudo de estruturas matemáticas (abstratas) como, anéis, corpos e grupos. Com relação a álgebra antiga, os atores afirmam que a sua principal característica foi a constituição gradual da linguagem simbólica, junto com o estudo de técnicas que utilizavam operações algébricas para encontrar as soluções de equações.

Ademais, os autores destacam que, durante essa fase, a linguagem algébrica desencadeou-se por três estágios de desenvolvimento: O retórico, o sincopado e o simbólico, tendo civilizações como a Babilônia, o Egito e a Grécia adotando, inicialmente, o estilo retórico, designado como uma descrição verbal dos procedimentos que eram aplicados a uma sequência de casos bem específicos. Além disso, o estágio retórico é caracterizado pela expressão verbal, sem o uso de notações simbólicas, ou seja, nesta fase era comum expressar quase que exclusivamente em palavras uma dada equação ou problema matemático.

Para tanto, em vez de escrever uma equação do tipo “3x + 1 = 10”, um matemático retórico provavelmente diria: “Se o triplo de um número, mais um, é igual a dez, qual é o número?” Contudo, tal fase dependia muito da lógica verbal e da capacidade para argumentar os processos de resolução, o que acarretava em uma forma de comunicação limitada em termos de eficiência e clareza, em particular, quando expressada em problemas cada vez mais de cunho sofisticado e que demandavam uma complexidade maior para chegar na solução.

De acordo com Oliveira, Lima e Silva (2020), por volta do século V a.C., na Grécia, a escola pitagórica, liderada por Pitágoras de Samos e posteriormente por Euclides de Alexandria, promoveu um significativo avanço no campo da álgebra. Tal desenvolvimento, permitiu a transição de uma concepção predominantemente baseada em cálculos numéricos para uma nova abordagem que incorporava figuras geométricas, principalmente, quadrados e retângulos, na resolução de problemas algébricos mais complexos de maneira visual e intuitiva, como a soma de quadrados e áreas de figuras geométricas com dimensões desconhecidas. Deste modo, esse novo processo ficou conhecido como “álgebra geométrica”.

Entretanto, apesar do surgimento dessa grande inovação no campo da matemática pelos gregos, Vailati e Pacheco (2008), relatam que a matemática grega durante a ocupação romana sofreu um enorme hiato, e para tal, somente no século III d.C. teve forças para um novo impulso com o matemático Diofanto de Alexandria. Deste modo, foi introduzido na álgebra o estilo sincopado, no qual, utilizava-se como principal ferramenta as abreviações de palavras para a escrita de equações, de tal maneira que, era possível abreviar expressões usando símbolos para incógnitas e para algumas operações.

Desta forma, cada vez mais emergiam contribuições para a evolução dos conhecimentos algébricos, para tanto, segundo Darela, Cardoso e Rosa (2011, p. 205): “Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra, sendo que Brahmagupta e Bhaskara foram os mais proeminentes algebristas desta civilização”. Sendo assim, Brahmagupta, ficou conhecido por introduzir métodos para lidar com números negativos e o conceito de zero como um número, além de fórmulas para resolver equações quadráticas, enquanto que, Bhaskara, aprofundou-se na álgebra e no cálculo, sendo famoso por suas soluções para equações (primeiro e segundo graus) e suas contribuições para a trigonometria.

Para mais, as autoras citadas também destacam sobre os avanços provenientes do Oriente Médio, em especial, as contribuições advindas do matemático Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi. Suas realizações mais notáveis incluem a popularização do sistema numérico indo-arábico, detalhando em uma de suas obras o sistema de numeração decimal, trazendo à tona os dez símbolos criados pelos hindus e posteriormente, a notação destes símbolos com o surgimento do termo “algarismo”. Ainda de acordo com Darela, Cardoso e Rosa (2011), apesar de não utilizar símbolos, sistematizou métodos para resolver equações lineares e quadráticas, trazendo elementos como as raízes (x), quadrados (x^2) e os números dos coeficientes das variáveis e dos termos independentes na solução destes problemas.

Contudo, embora existisse o uso de algumas abreviações e símbolos para representar as equações e as operações utilizadas para solucioná-las, ainda não havia um sistema de notação totalmente padronizado, em algumas partes dos problemas era feito o uso de frases verbais. Assim, o estágio sincopado pode ser considerado como uma fase intermediária da álgebra que conhecemos nos dias atuais, pela qual, mostra como a matemática estava se tornando cada vez mais abstrata, e para tal finalidade, exigia novas formas de expressão, assim como, novos processos de resolução mais compactos e sofisticados.

2.2 ÁLGEBRA NO SÉCULO XVI – ATUALIDADE

A álgebra percorreu um longo caminho de desenvolvimento, e para tal, conforme Mol (2013), apesar de possuir raízes nas civilizações antigas, como a dos babilônios e gregos, foi somente no período renascentista europeu que a álgebra simbólica começou a tomar forma. Assim, durante o final do século XV e início do século XVI, matemáticos começaram a introduzir e aprimorar símbolos para representar operações e relações presente na matemática, o que acabou transformando profundamente a forma de compreendê-la, uma vez que, possibilitou não apenas a simplificação da resolução de equações, mas também permitiu um estudo mais aprofundado de suas propriedades.

Desta maneira, ao longo deste período, houve uma transição histórica da antiguidade para a modernidade, pela qual, a simbologia se tornava cada vez mais presente, iniciando-se portanto, um processo de autonomia diante do campo da geometria. Tal independência, segundo Darela, Cardoso e Rosa (2011) ocorreu de forma gradual com inúmeras contribuições de diversos matemáticos, dentre as principiais, se destaca: François Viète, com o aperfeiçoamento das notações algébricas, propondo o uso de vogais para representar as incógnitas e consoantes para os números conhecidos, de tal forma que, a partir dele, as equações passaram a ser elencadas como o “idioma” da álgebra.

Outrossim, as autoras frisam também Robert Record com a criação do símbolo da igualdade ($=$); Thomas Harriot, responsável por aperfeiçoar a teoria das equações, demonstrando que poderia obter números negativos e imaginários como soluções de equações, além de introduzir os sinais $>$ (maior que), $<$ (menor que) e o desenvolvimento de uma representação mais simbólica das potências de incógnitas; Pierre de Fermat, desenvolvedor de um método capaz de permitir calcular tangentes de curvas (derivada), além de propor que toda equação do primeiro grau representa uma reta, também formulou uma maneira para determinar pontos de uma função, nos quais, irão representar o máximo e o mínimo.

Além do mais, de acordo com Mol (2013), pode-se destacar John Wallis, pioneiro em abreviar o conceito de "infinito" com o símbolo ∞, assim como, o desenvolvimento de uma álgebra infinita, utilizando técnicas (soma de infinitos termos) para resolver problemas geométricos e o estudo acerca das equações quadráticas e cúbicas, admitindo raízes negativas e complexas; Isaac Newton, por representar as funções em termos de séries infinitas e consolidar as operações diferenciar e integrar em um algoritmo geral, aplicando-se a funções (algébricas ou transcendentes); Leibniz, criador dos termos abscissa, ordenada, coordenada, eixo de coordenadas e função, além de inventar os determinantes para a resolução de sistema de equação lineares.

Darela, Cardoso e Rosa (2011) também abordam sobre Leonhard Euler, por contribuir com notações fundamentais ainda em uso, como por exemplo, a letra "e" para representar a base dos logaritmos naturais, "i" para $\sqrt{(-1)}$, $f(x)$ para a função de x, Σ para indicar a adição, lx para logaritmo de x e o uso definitivo do símbolo π para representar a razão entre a Circunferência e o diâmetro; Carl Friedrich Gauss, por demonstrar que toda equação de grau n terá n raízes, além de legitimar o uso dos números complexos, admitindo que toda equação algébrica de grau n pode ter raiz na forma a + bi (a e b números reais).

Por fim, de acordo com Mol (2013), ainda pode-se destacar René Descartes, pelo aprimoramento do simbolismo da álgebra e o rompimento da tradição geométrica grega, uma vez que, o mesmo, propôs uma nova concepção para a geometria, libertando-a do uso de diagramas por meio de procedimentos algébricos, internalizando assim, as operações algébricas através da interpretação geométrica. Além do mais, o autor enfatiza David Hilbert, por apresentar uma construção e uma relação entre os elementos básicos da geometria (Ponto, reta e plano), descrita através de 21 axiomas, os quais possibilitaram uma visão mais formal da geometria, além de contribuir para o formalismo contemporâneo (álgebra moderna), devido ao seu contraste diante de uma concepção abstrata.

Com base nas referidas contribuições, pode-se destacar que a álgebra se desenvolveu como um campo de estudo cada vez mais abstrato, formalizando conceitos como anéis, corpos e grupos. Além disto, culminou em sua separação definitiva das aplicações geométricas e numéricas, distribuindo-se como um campo independente da matemática, dedicado ao estudo generalizado e simbólico de estruturas, relações e operações.

2.3 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico, também intitulado de raciocínio algébrico, é caracterizado pela habilidade de reconhecer padrões e elementos constantes em meio às variações. De mais a mais, ele também engloba a expressão da estrutura de situações-problema e o processo de generalização. Assim o pensamento algébrico diz respeito à simbolização, ao estudo de estruturas e a sua modelação (Barbosa; Borralho, 2013).

Desta forma, segundo estes autores, tal pensamento baseia-se que, o estudante deve entender como as estruturas que estão presentes e as que formam a matemática se comportam, entendendo que existem padrões que podem ser analisados para uma posterior generalização de conceitos. Evidenciando assim, o uso de símbolos para representar estes padrões, bem como, a exploração de definições mais abstratas que modelam estes parâmetros padronizados, de tal forma, que consigam entendê-los e compreendê-los como uma organizada e interligada estrutura que faz parte da matemática.

Ademais, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 28), para que o estudante aprenda a álgebra, ele deve primeiramente ser capaz de pensar algebricamente, o que acaba incluindo no processo, conhecimentos acerca das propriedades das operações, visto que, “a identificação destas propriedades e a sua generalização desde os primeiros anos de escolaridade constituem uma base importante para o pensar algebricamente”.

Para mais, esses autores estabelecem que o pensamento algébrico abrange três dimensões, as quais estão intimamente ligadas não apenas aos aspectos simbólicos, mas também à estrutura do pensamento necessário que se faz ao discorrer sobre álgebra. Tais dimensões são delineadas do seguinte modo: Representar, caracterizado pela habilidade do estudante em utilizar diversas formas para a representação; raciocinar, elencado como o ato dedutivo ou indutivo ao relacionar ou generalizar propriedades e regras matemáticas; e, por último, resolver problemas, categorizado como o manuseio da modelagem de situações destinado para resolver problemas.

No quadro 1 a seguir estão expressas essas dimensões estabelecidas pelos autores:

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	● Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ● Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ● Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.

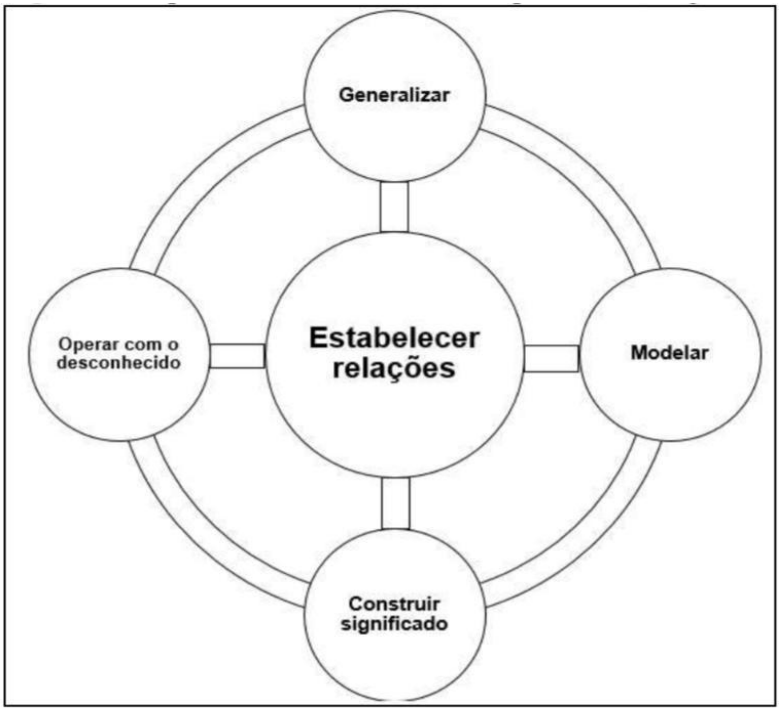
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades) • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Quadro adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009, p. 11).

Além do mais, com base em Almeida e Santos (2017), em sua pesquisa estes autores buscaram como objetivo principal apresentar uma caracterização do que seria o pensamento algébrico e o seu desenvolvimento perante o contexto do estudante. Para tanto, acreditam que o pensar algebricamente pode ser revelado através de cinco características, atreladas diretamente ao saber que se estabelece ao efetivar relações, ao generalizar; modelar; operar com o desconhecido; e construir significado.

Entretanto, enfatizam que a característica central que permeia o pensamento algébrico é a capacidade de estabelecer relações, dado que, defendem que tal habilidade se faz inicialmente necessária para que possa adentrar na desenvoltura deste pensamento. Porém não desmerecem as demais, visto que, também são importantes para a construção deste saber algébrico e logo em seguida, vão surgindo com o propósito de desenvolver cada vez mais este saber. Diante disso, na figura a seguir mostra como funciona o esquema referente às características do pensamento algébrico estabelecido pelos autores:

Figura 1- Esquema das características do pensamento algébrico



Fonte: Figura de Almeida e Santos (2017, p. 53).

Sendo assim, os estudantes devem ter a capacidade de: Estabelecer relações, modelar, generalizar, operar com o desconhecido como se fosse algo conhecido, assim como, a habilidade de construir significado para objetos e a linguagem algébrica. Para tal intuito se realizar, deve-se tomar como ponto de partida o ato de conseguir estabelecer relações, para posteriormente desenvolver as demais características sem uma necessária ordem pré-estabelecida, mas que será necessária para o advento das demais na concepção do estudante.

Diante disso, o pensamento algébrico é uma competência cognitiva de extrema importância, uma vez que, ele abrange a capacidade de analisar e resolver problemas por meio da utilização de símbolos e expressões matemáticas. Tal habilidade permite o uso da manipulação de variáveis e equações de maneira abrangente, facilitando na resolução de problemas mais complexos que necessitem o manuseio de forma sistemática e abstrata em relação com a representação de estruturas e padrões matemáticos de caráter mais aprofundado.

3 A ÁLGEBRA SEGUNDO A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um valioso documento, que tem como função determinar quais as competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de estudos durante as etapas e modalidades da educação básica. Para mais, de acordo com Kuhn e Lima (2021), com o advento da BNCC de 2018, no contexto da matemática, o campo de ensino da álgebra sofreu alterações significativas, passando a fazer parte de um dos eixos temáticos trabalhados na matemática ao decorrer da educação básica, sendo portanto, necessário a sua abordagem desde os anos iniciais do ensino fundamental.

Desta forma, pretende-se desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes desde o início dos anos escolares, de tal modo que, ao alcançar os anos finais, estejam mais familiarizados com os conceitos que irão ser trabalhados, e consequentemente, seja possível promover novos caminhos em direção a uma melhor e eficiente aprendizagem. Tal propósito visa criar uma base sólida de conhecimentos desde cedo, promovendo um ambiente de aprendizado que estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a criatividade dos estudantes.

3.1 A ÁLGEBRA DURANTE OS ÚLTIMOS ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Base Nacional Comum Curricular destaca a importância do pensamento algébrico como uma das habilidades fundamentais para compreender e utilizar modelos/estruturas que permeiam o campo da matemática, visto que, seu propósito destina-se em fazer com que os estudantes consigam chegar na "compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo o uso de letras e outros símbolos" (Brasil, 2018, p. 270). Para tanto, isso inclui o entendimento dos conceitos de variáveis, coeficientes, termos e operações algébricas, devendo serem capazes de identificar padrões, formular conjecturas e justificar suas conclusões usando argumentos matemáticos.

Ademais, como já ressaltado a BNCC destaca a possibilidade de abordar certos aspectos da álgebra desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, como é caso de conceitos que envolvem regularidades, generalizações de padrões e propriedades da igualdade, sem a necessidade de utilizar letras para representar essas ideias. Sendo assim, de acordo com o quadro 2 apresentado a seguir, tais conceitos iniciais serão reforçados no sexto ano do Ensino

Fundamental, sendo tratados de maneira mais formal se comparados aos anos anteriores (BRASIL, 2018).

Quadro 2 – Álgebra para o 6º ano do Ensino Fundamental

Objetos de conhecimento	Habilidades
Propriedades da igualdade	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: Quadro adaptado da BNCC (Brasil, 2018, p.302-303).

Dessa forma, a BNCC estabelece que, no sexto ano, os estudantes devem comtemplar as propriedades referente a igualdade e os problemas de partição, assim como os conteúdos que formalizam o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que, essas primeiras noções podem ser introduzidas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Já no sétimo ano, espera-se que esse pensamento se expanda, incluindo o uso de letras em expressões algébricas, compreendendo a ideia de variável.

Para tal fim, a BNCC enfatiza a importância da linguagem algébrica, que possibilita a tradução de situações em equações, tabelas e gráficos (Brasil, 2018). Outrossim, no quadro 3 a seguir, estão delineados os objetos de conhecimento, assim como as habilidades a serem abordadas no sétimo ano do Ensino Fundamental. Tais objetos têm como ponto de partida a linguagem algébrica, abrangendo desde a equivalência de expressões algébricas até problemas que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais, culminando nas equações polinomiais de 1º grau.

Quadro 3 – Álgebra para o 7º ano do Ensino Fundamental

Objetos de conhecimento	Habilidades
Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	((EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
Equações polinomiais do 1º grau.	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade

Fonte: Quadro adaptado da BNCC (Brasil, 2018, p.306-307).

Deste modo, para este ano escolar espera-se que os estudantes sejam capazes de identificar regularidades e padrões em sequências, tanto numéricas quanto não numéricas. Além disso, deseja-se que possam estabelecer leis matemáticas que expressam a relação entre diferentes grandezas, como também possam ser capazes de criar, interpretar e transitar por meio de diversas representações gráficas e simbólicas, tudo com o propósito de resolver problemas (Brasil, 2018).

Em sequência, o quadro 4 expõe os objetos e habilidades a serem desenvolvidos no oitavo ano do Ensino Fundamental, revelando uma sequência lógica na proposta de conteúdos elencada pelo documento BNCC. Para tal, os estudantes agora devem desenvolver a capacidade de compreender e resolver equações e sistemas lineares, além de explorar conceitos de função e proporcionalidade, envolvendo assim, representações em gráficos e o aperfeiçoamento na habilidade de interpretação e linguagem matemática. Para tanto, isso evidencia a relevância atribuída ao progresso do pensamento algébrico, bem como a linguagem algébrica permanecendo como o foco de ensino neste contexto.

Quadro 4 – Álgebra para o 8º ano do Ensino Fundamental

Objetos de conhecimento	Habilidades
Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2= b$.
Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: Quadro adaptado da BNCC (Brasil, 2018, p.312-313).

Portanto, neste ano escolar destaca-se “a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação” (Brasil, 2018, p.298). Para tal intuito, recomenda-se o uso de diferentes recursos didáticos e materiais, além de planilhas eletrônicas e softwares. Além disso, o uso da História da Matemática é visto como uma forte indicação para trazer no contexto da sala de aula, pois pode despertar interesse e contextualizar significativamente o aprendizado (Brasil, 2018).

Por conseguinte, os conteúdos a serem abordados no 9° ano incluem funções, razão entre grandezas de espécies diferentes (diretamente e inversamente proporcionais), fatoração de expressões algébricas e resolução de problemas envolvendo equações polinomiais do 2º grau. Sendo assim, o quadro 5 abaixo detalha as habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo desse ano escolar.

Quadro 5 – Álgebra para o 9º ano do Ensino Fundamental

Objetos de conhecimento	Habilidades
Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Razão entre grandezas de espécies diferentes Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis.	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: Quadro adaptado da BNCC (Brasil, 2018, p.316-317).

Por fim, no último ano do Ensino Fundamental, o ensino de álgebra deve revisitar, aprofundar e expandir o que foi estudado nos anos anteriores. Nesta fase, almeja-se que os estudantes possam compreender os diversos significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecendo generalizações de propriedades, investigando a regularidade de sequências numéricas, indicando valores desconhecidos em sentenças algébricas e estabelecendo a variação entre duas grandezas. Para tal finalidade, é essencial que os estudantes estabeleçam conexões entre variável e função, assim como entre incógnita e equação (Brasil, 2018).

Desta maneira, pelo que se apresenta na BNCC sobre esta etapa final do Ensino Fundamental, pode-se concluir que é destacada a importância de introduzir gradualmente aos estudantes a compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática, visto que, contribui para o desenvolvimento do senso crítico em relação a essa argumentação. Entretanto, a BNCC ressalta a necessidade de equilibrar esse contexto significativo de aprendizagem com momentos de desenvolvimento para a capacidade de abstrair, apreender relações e significados com o intuito de aplicá-los em outros contextos.

3.2 A ÁLGEBRA AO LONGO DO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular estrutura o Ensino Médio conforme as propostas estipuladas nas etapas de ensino anteriores (Anos iniciais e finais do ensino fundamental), de tal maneira que segue-se uma sequência de aprimoramento dos saberes provenientes destas etapas. Tal abordagem visa garantir a continuidade do aprendizado, favorecendo o desenvolvimento por meio de competências específicas e habilidades associadas a essas competências. Outrossim, busca promover a reflexão crítica, a autonomia e a capacidade de resolução de problemas, preparando-os para os desafios do futuro, tanto na educação continuada quanto no mercado de trabalho.

Assim, ela organiza a matemática por meio de 5 competências distribuídas e relacionadas a um conjunto de habilidades, que visam desenvolver o raciocínio lógico por meio de análises críticas para a tomada de decisões; a capacidade de resolver problemas nas mais variadas situações; a aplicação de conceitos matemáticos em diversos contextos; a argumentação consistente através de modelos matemáticos para chegar a uma solução desejada e a investigação de padrões e propriedades (Brasil, 2018).

Desta maneira, a BNCC propõe uma organização curricular das aprendizagens necessárias para o Ensino Médio, dividindo-se em unidades semelhantes às do Ensino Fundamental (Números e Álgebra, Geometria e Medidas, Probabilidade e Estatística). Entretanto, tais temáticas não são tratadas de forma isolada uma da outra assim como era nas etapas de ensino anteriores a essa, pelo contrário, elas se inter-relacionam e se aprofundam entre si, de tal maneira que, ocorre a aplicação de conceitos em situações reais envolvendo a interdisciplinaridade entre essas temáticas.

Desta forma, a unidade “Números e Álgebra” também segue essa linha de raciocínio, com habilidades atreladas a diversos objetos de conhecimento, destacados em aplicações práticas variadas e que perpassam por todas as competências listadas. Assim, no Ensino Médio, a álgebra é proposta não apenas para oferecer um aprendizado que possibilite a compreensão de ferramentas com o intuito de resolver equações e manipular expressões, mas também serve como linguajar universal que permite modelar e compreender fenômenos diversos do cotidiano, como por exemplo, na capacidade de analisar dados e interpretar informações.

Com base nisso, dentre todas as habilidades relacionadas a essa temática ao longo do Ensino Médio, pode-se notar que, ao contrário do Ensino Fundamental, a BNCC não atribui especificamente cada habilidade e competência a um determinado ano desta etapa de Ensino. Logo, ela propõe uma flexibilização da organização curricular nesta etapa, por meio dos itinerários formativos previstos na legislação brasileira (Linguagens e suas tecnologias;

Matemática e suas tecnologias; Ciências da Natureza e suas tecnologias; Ciências Humanas e sociais aplicadas; Formação técnica e profissional).

Diante dessa divisão, recomenda-se a organização conforme a relevância presente no contexto local e nas possibilidades para a construção de ensino, de tal maneira que seja possível desenvolver ações pedagógicas capazes de garantir as aprendizagens necessárias impostas pela BNCC. Deste modo, conforme mencionado anteriormente, há inúmeras habilidades que compõe a temática “Números e Álgebra”, das quais, muitas vezes se inter-relacionam com outras temáticas, dentre as principais, se destacam as habilidades que envolvem a interpretação de Gráficos de Funções (EM13MAT101), a análise de Funções Lineares com uma ou duas variáveis (EM13MAT301) e a análise de gráficos de Funções com ênfase nos Polinômios de 1º e 2º grau (EM13MAT401, EM13MAT402).

Tais habilidades envolvem a leitura e interpretação de gráficos relacionados a funções de 1° e 2° grau, enfatizando a visualização gráfica para identificar padrões e tendências. Ademais, o conjunto de habilidades associadas diretamente a compreensão de funções e as suas variações também são presenciadas, neste caso, por exemplo, a construção de modelos com funções polinomiais (EM13MAT302), a variação entre Grandezas, sejam elas proporcionais ou não (EM13MAT302), e as funções exponenciais e logarítmicas (EM13MAT304, EM13MAT305) compõe as aplicações e o entendimento sobre funções, compreendendo que a variação entre grandezas pode ajudar a entender como mudanças em uma variável afetam outra.

Além do mais, pode-se elencar a álgebra dentro do contexto financeiro, uma vez que, os cálculos de porcentagens, taxas, índices (EM13MAT104), de juros simples e compostos (EM13MAT203), assim como, os sistemas de amortização e o fluxo de caixa (EM13MAT203), visto que, podem ser atribuídos a uma gestão de finanças, tanto pessoal quanto empresarial, a fim de compreender como funciona os juros, índices e fluxo de caixa, e assim, tomar uma melhor decisão financeira.

Em sequência, também pode-se organizar as habilidades conforme a resolução de problemas e algoritmos, por exemplo, a investigação, representação de algoritmos (EM13MAT315) e a Modelagem de problemas usando fluxogramas (EM13MAT405), habilidades essenciais para organizar o raciocínio e facilitar a compreensão de processos complexos; a trigonometria e funções periódicas, dividida em trigonometria no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico (EM13MAT306) e funções seno e cosseno (EM13MAT306), nas quais, possibilitam o entendimento de fenômenos que ocorrem em ciclos/períodos e nas funções trigonométricas.

Outrossim, outras organizações envolvem o sistema de medidas e suas conversões, como por exemplo, a habilidade de leitura e conversão de unidades (EM13MAT101) associada a precisão em medidas e cálculos; a análise de dados, com a habilidade de interpretação de taxas e índices socioeconômicos (EM13MAT104) vinculada a análise crítica de dados relacionados ao desenvolvimento humano e à economia, de tal maneira que, investiga processos de cálculo e sua implicação na realidade; identificação de padrões com as habilidades sobre investigação de relações entre dados em tabelas (EM13MAT501, EM13MAT502), identificando assim, padrões em dados para desenvolver o pensamento matemático e da lógica.

Diante disso, para facilitar esse processo de abstração, é sugerido o uso de diversas habilidades relacionadas à resolução de problemas, incluindo a elaboração de problemas pelos próprios estudantes. Sendo assim, de maneira geral, a BNCC busca superar a fragmentação disciplinar do conhecimento, incentivando sua aplicação na vida real e atribuindo sentido ao seu aprendizado. Além disso, ela destaca o protagonismo dos estudantes perante sua aprendizagem, como também, enfatiza a importância da interdisciplinaridade, da contextualização do saber, do ensino para a formação integral do cidadão e da autonomia do aluno em relação ao seu processo de aprendizagem.

Em resumo, as habilidades e as competências que são estabelecidas pela BNCC durante todos esses anos escolares, buscam desenvolver nos estudantes a capacidade de utilizar a linguagem e os conceitos que permeiam o campo que constitui a álgebra, promovendo assim o pensamento algébrico de forma gradual a medida que os estudantes vão avançando as séries escolares. Para tal finalidade, pretende-se que tais estudantes sejam capazes de resolver diversos problemas, fazer generalizações e modelar situações relacionadas com o mundo real, dado que, contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstração e da compreensão das estruturas que fazem parte e compõe o campo da matemática.

3.3 A TRANSIÇÃO DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO MÉDIO

A transição do ensino fundamental para o ensino médio é um momento marcante e profundo na vida dos estudantes. Para tanto, essa mudança vem a ser uma fase de transição que não apenas marca o avanço acadêmico, mas também traz à tona questões mais amplas relacionadas tanto com o desenvolvimento pessoal e profissional, quanto com o desenvolvimento social.

Desta maneira, de acordo com Paredes e Pecora (2004), em sua pesquisa dedicada a explorar as representações sociais referente às perspectivas de futuro de pré-adolescentes e adolescentes de rede pública de ensino em Cuiabá, existem diversas preocupações relacionadas com os estudantes, as mais comuns incluem: o estudo, a felicidade, a saúde, a profissão, o emprego e formar uma família.

As autoras destacam o estudo como uma importante formação para a trajetória destes estudantes, em outras palavras, "Para ser alguém no futuro e possuir status social, o jovem se vê forçado a estudar. O estudo parece ser a saída e a possibilidade de conquistar um futuro melhor" (Paredes; Pecora, p.63, 2004). Tal fato reflete, muitas vezes, na pressão por um desempenho acadêmico que seja favorável para o sucesso escolar e de certo modo, uma ascensão social, capaz de garantir um bem-estar.

Dentro disso, a busca pela felicidade e saúde é evidenciada como a necessidade de se ter uma boa qualidade de vida, que seja equilibrada entre os estudos, a vida social e financeira. Contudo, é abordado pelas autoras que ser feliz é algo abstrato e de certo modo relativo, ou seja, o que traz satisfação para uma determinada pessoa pode ser totalmente diferente para outra, variando assim, conforme os valores pessoais, experiências e expectativas se relacionam em cada indivíduo.

Para mais, as preocupações com a profissão e emprego constituem-se como uma categoria bastante significativa: o trabalho. Nesta fase muitos jovens começam a pensar sobre suas aptidões profissionais, refletindo sobre qual escolha e profissão melhor se adequa com suas habilidades/qualidades e desejos, a fim de conquistar um emprego estável capaz de garantir uma independência financeira, assim como, a realização pessoal, seja ela de sonhos, metas ou de objetivos de caráter profissional ou pessoal.

Com base nisso, dentre todos os elementos citados acima, é enfatizado a sua relação com o aspecto da família, seja ele ancorado na família atual, por intermédio de estudantes mais jovens, visto que, segundo Piaget (1998, *apud* Paredes; Pecora, 2004), esses estudantes ainda estão na fase de desenvolvimento das operações concretas, e portanto, carecem de experiências provindas das suas vivências. Ou então, interligado com a construção de uma nova família, uma vez que, é possível que, os estudantes mais velhos tenham um estágio de desenvolvimento mais formal, podendo comtemplar e concretizar projetos para as suas vidas.

Ademais, segundo Lopes (2021), em sua pesquisa com um grupo de professores que ministravam aulas de Matemática tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio de escolas públicas da cidade de Goiás no ano de 2021, constatou-se algumas dificuldades dos estudantes perante a aprendizagem da álgebra. Para tal, diante dos relatos dos professores entrevistados, afirmou que diversos estudantes ao concluírem o Ensino Fundamental não conseguem desenvolver adequadamente as habilidades esperadas para essa etapa de Ensino, levando assim, essas dificuldades para a etapa seguinte.

Diante disso, a autora ressalta que as principais causas que conduzem os estudantes a não progredirem com as habilidades provenientes ainda nos anos finais do ensino fundamental, perpassam desde a dificuldade de aprender nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a falta de interesse por parte dos estudantes e até de suas famílias e o método empregado nas escolas para preparar os alunos para as avaliações externas. Tais motivos, encadeiam, em grande parte, um domínio básico dos conceitos algébricos, de tal forma que, ainda persistem no Ensino Médio, o que por sua vez, compromete o desenvolvimento pleno das habilidades/competências aplicadas nesse nível.

Além do mais, o foco excessivo nas avaliações externas, como por exemplo, o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o uso de atividades repetitivas, como listas de exercícios e simulados, muitas vezes atribuídos a falta de material, são apontados como fatores que contribuem para a mecanização do ensino, tornando-o pouco significativo e atraente. Sendo assim, também é ressaltado sobre as metodologias e as formas que os professores, a rede de ensino e os livros didáticos lidam ao propor com o ensino e a aprendizagem da álgebra, enfatizando que devem comtemplar o “abstrato” para resolver problemas reais.

Por outro lado, a pesquisa de Lopes (2021), elenca na visão dos professores que compuseram a pesquisa, quais são as habilidades e os conhecimentos que os estudantes sabem e compreendem ao concluir o fundamental, dentre eles, a resolução de problemas que envolvem a variação proporcional, expressões algébricas e equações do 1º e 2º grau se destacam como conhecimentos que a grande maioria dispõe. Entretanto, muitos ainda não compreendem de forma adequada a identificação de expressões algébricas por meio de sequências de números e figuras, assim como, os problemas relacionados com a resolução de sistemas de equações do 1º grau.

Com base nos autores citados acima, pode-se concluir que, essa mudança de etapa no ensino, implica não apenas um avanço escolar, mas também uma fase importantíssima para o desenvolvimento pessoal e social dos estudantes. Deste modo, tal fase é marcada pela intensificação das preocupações diante do futuro destes indivíduos, perfazendo-se condições que envolvem desde a busca para “ser feliz” até a “estabilidade financeira”, o que por sua vez, geram pressões para a obtenção de um desempenho escolar aceitável e capaz de garantir caminhos para a realização pessoal.

Entretanto, ao longo desta transição, muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com uma variedade de lacunas diante das habilidades fundamentais para compreender a álgebra. Tais lacunas, muitas vezes são provindas das etapas anteriores, associadas a fatores como o próprio desinteresse destes alunos, a falta de apoio por parte dos familiares e a ênfase exagerada em avaliações externas, que medem o seu “desempenho” por meio de aprovações e notas.

Assim, apesar da BNCC enfatizar a Educação Matemática para além de uma simples memorização e reprodução de assuntos estudados, buscando promover uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, a realidade em sala de aula ainda se distancia dessa proposta. Para mais, a pressão por bons resultados em exames externos, aliada a métodos repetitivos de ensino, continua a dificultar o desenvolvimento de competências mais aprofundadas, como a resolução de problemas, utilizando-se o pensamento crítico, especialmente no que diz respeito à álgebra.

4 METODOLOGIA

Nesta seção, apresentaremos os aspectos metodológicos desta pesquisa, abordando questões como: os objetivos do estudo, os participantes, o local de sua realização, os métodos aplicados, e os seus resultados esperados após a sua execução. Para mais, discutiremos os procedimentos e instrumentos de coleta de dados utilizados para alcançar o objetivo central desse estudo: analisar as concepções algébricas apresentadas por estudantes do 1º ano do ensino médio quanto à sua trajetória no ensino fundamental.

De acordo com Silva e Menezes (2005), sob uma perspectiva de abordagem do problema, este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa. Para tal, esse tipo de pesquisa estabelece uma relação mais dinâmica entre o mundo real e os sujeitos pesquisados, trazendo uma abordagem descritiva, com foco no processo e no seu significado dos dados encontrados perante o estudo que está sendo contemplado.

A nossa pesquisa adota essa perspectiva, uma vez que, busca abranger a análise e reflexão acerca dos pensamentos de alguns estudantes do 1° ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio Corsina Braga, localiza no município de Cachoeirinha-PE. Para tanto, o estudo concentra-se nas concepções que esses estudantes apresentam sobre a álgebra, investigando como se desenvolveram, compreenderam e aprenderam os conceitos algébricos apresentados nos anos finais do Ensino Fundamental.

Desta forma, a coleta de dados foi realizada por meio de um questionário, contendo perguntas que envolvem a interpretação e a resolução de questões relacionadas a conceitos algébricos, considerando a desenvoltura de acordo com as habilidades e competências propostas pela BNCC ao decorrer dos anos finais do ensino fundamental. Teremos como ênfase as estratégias e resoluções empregadas pelos estudantes, assim como, os erros cometidos durante essa atividade.

Segundo Gil (2008, p. 121), o questionário é um instrumento que contribui para “descrever as características da população pesquisada ou testar as hipóteses que foram construídas durante o planejamento da pesquisa”. Por meio dele, é possível obter informações sobre os conhecimentos, opiniões e comportamentos dos participantes, além de verificar se as hipóteses previamente formuladas se confirmam em relação ao grupo pesquisado.

Com base nesses dados, buscamos identificar os principais conhecimentos que estes estudantes desenvolveram e elaboraram acerca dos conceitos algébricos provenientes desta etapa escolar citada anteriormente. Para tal finalidade, analisaremos as estratégias, interpretações e formas de pensamento evidenciadas pelos participantes, bem como as dificuldades enfrentadas durante a resolução das questões. Além disto, abordaremos quais conceitos foram apresentados com uma maior defasagem e quais se consagraram com uma maior facilidade para serem compreendidos e aplicados pelos estudantes.

4.1 LÓCUS DA PESQUISA

Criada através da Lei Municipal nº 15/1963, em 10 de março de 1963, a Escola de Referência em Ensino Médio Corsina Braga (EREM Corsina Braga), anteriormente conhecida como Ginásio Municipal de Cachoeirinha, está situada na Avenida Prefeito José Pedro Raimundo, S/N, no Centro do município de Cachoeirinha - Pernambuco. Atualmente, a instituição conta com 23 professores, incluindo 5 docentes especializados no ensino de Matemática, e um total de cerca de 403 estudantes, distribuídos nos turnos Integral e Noturno.

Inicialmente, a escola ofertava apenas o Ensino Fundamental à população da região. Entretanto, em 27 de abril de 1983, com a publicação da Portaria nº 7918 no Diário Oficial do Estado, a instituição foi estadualizada, passando a ser intitulada Escola Corsina Braga. Tal mudança contribuiu de maneira significativamente para o desenvolvimento educacional de toda a população local, ampliando o acesso à educação, em especial, o acesso ao Ensino de Segundo Grau[1] dentro dessa comunidade.

Antes desse processo, os estudantes que desejavam cursar o antigo Ensino Médio enfrentavam desafios consideráveis, uma vez que, precisavam se deslocar para as cidades vizinhas, para que assim, pudessem dar continuidade aos seus estudos. Tal realidade, implicava em dificuldades para muitas famílias, pois, além de demandar recurso financeiro devido ao seu deslocamento, os estudantes ficavam a mercê de riscos relacionados à sua segurança e alimentação adequada durante o período em que permaneciam fora de casa.

Com a implementação de um programa estadual em 2008, que visava o funcionamento das escolas em tempo integral, a escola passa a funcionar em sistema semi-integral no ano de 2011. Ademais, por meio do Decreto nº. 36.119, na data de 21 de janeiro de 2011, a instituição passa a ser nomeada como Escola de Referência em Ensino Médio, e desde então, disponibiliza essa etapa de ensino no sistema semi-integral durante o dia e Educação de Jovens e Adultos (EJA) no período noturno.

[1] Nessa época, no Brasil era comum chamar o Ensino Médio por "Ensino de Segundo Grau".

Atualmente, aos poucos está sendo implementado o programa do Novo Ensino Médio (NEM), funcionando em regime integral, com a inclusão de itinerários formativos e disciplinas eletivas. Para mais, além do corpo docente e da oferta de ensino, a EREM Corsina Braga dispõe de uma infraestrutura que visa apoiar o aprendizado e o desenvolvimento dos seus alunos, dispondo assim, de salas equipadas com ventiladores, ar-condicionado, TVs, quadro branco e iluminação adequada para realizar o ensino-aprendizagem.

Além disso, a escola possui uma sala de informática com 11 computadores, uma impressora e acesso à internet, destinada ao uso dos estudantes para realizarem pesquisas, trabalhos e atividades supervisionadas por professores. Outro espaço de destaque é a biblioteca, que oferece um ambiente tranquilo para leitura e estudo. Além do mais, esta instituição conta com duas quadras esportivas, sendo uma coberta e outra ao ar livre, utilizadas para a realização de atividades físicas, escolares e de lazer.

Por fim, outros espaços que se destacam neste ambiente, são o pátio, sendo utilizado para interação social entre estudantes, reuniões, eventos, espaço de lazer e até como refeitório por estar do lado da cantina; o auditório, sendo destinado para palestras, comemorações e eventos de grande escala; a sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), que visa garantir uma complementação a formação escolar de alunos com alguma deficiência ou transtorno de desenvolvimento; e um laboratório escolar, capaz de atender algumas atividades práticas voltadas às áreas relacionadas com a ciência (Biologia, Química e Física).[2]

4.2 ETAPAS DE INVESTIGAÇÃO

Como abordado anteriormente, a pesquisa será realizada através de um questionário dirigido à estudantes do 1º ano do Ensino Médio, no qual, envolverá questões associadas a competências da BNCC nos anos finais do Ensino Fundamental. Assim, dentro de todas as competências que a BNCC propõe, foi elencado as que mais se configuram como centrais para essa pragmática: Problemas de desigualdade, sequências, sistemas de equações polinomiais do 1º grau, interpretação da função do 1º grau em um gráfico, fatoração, manipulação de equações algébricas e resolução de equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

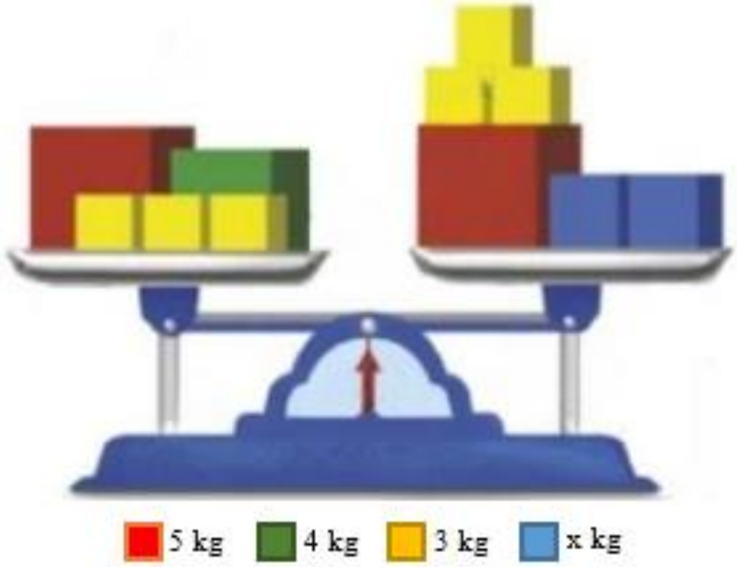
Com base nessas competências centrais, organizamos o presente questionário em 5 perguntas, das quais, através da pesquisa realizada buscamos contemplá-las de maneira que

[2]As informações fornecidas ao longo deste tópico foram obtidas por meio do Projeto Político-Pedagógico (PPP) desta escola, ao qual tivemos acesso pleno, com as devidas autorizações da instituição para a sua utilização.

atendesse o que espera-se dos estudantes matriculados no 1º ano do Ensino Médio em relação a álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. Diante disso, a 1º questão, propomos da seguinte forma:

1º) A balança a seguir está em equilíbrio, ou seja, as massas em cada prato da balança são iguais. A legenda, abaixo da balança, indica a massa de cada caixa, de acordo com a sua cor.

Figura 2 - Balança em equilíbrio



Fonte: Souza, 2018 - adaptado (Matemática: Realidade e tecnologia - FTD)

Conforme apresentado acima, descreva o processo para determinar a massa da caixa azul, e por consequência, a massa dos pratos.

Essa questão tem como foco a álgebra do 6º ano, envolvendo assim, problemas interligados com a desigualdade, pela qual, espera-se que os estudantes consigam entender o conceito de igualdade expresso através da balança, com os pratos devendo estar em equilíbrio, ou seja, possuir a mesma quantidade de massa. Deste modo, deve-se surgir a necessidade de encontrar a quantidade de massa em cada prato, e por consequência, a massa que falta descobrir (caixa azul) para que a balança continue em equilíbrio.

Enquanto isso, na segunda questão:

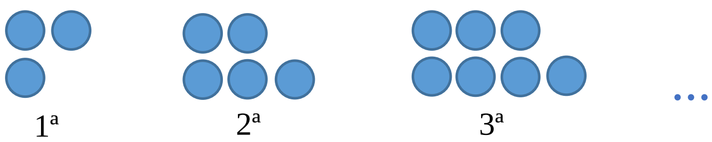
2º) Em um estacionamento há 25 veículos, distribuídos entre carros e motos. Sabe-se que, ao somar a quantidade de rodas de todos esses veículos obtém-se como resultado 74. Considerando que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas, apresente: uma estratégia de resolução para determinar a quantidade tanto de carros quanto de motos presente neste local, e quais conceitos de álgebra ou matemática utilizou para organizar as informações fornecidas a fim de resolver este problema.

Essa questão, tem ênfase em sistemas de equações polinomiais do 1º grau. Nela, espera-se que os estudantes consigam estruturar os termos desconhecidos (incógnitas) para representar a quantidade de Motos e Carros, além de imaginar e expressar equações de 1º grau com base nas informações fornecidas, organizando em um sistema a fim de obter suas respectivas quantidades. Para mais, pressupõe-se que possam entender e manipular o sistema com 2 incógnitas, utilizando, por exemplo, o método da soma para encontrar a quantidade de um veículo, para que assim, posteriormente, utilizando a substituição do valor que obteve em alguma equação, a quantidade do outro veículo.

Em sequência, a terceira questão:

3º) Observe a sequência das figuras de bolinhas abaixo:

Figura 3 – Sequência de bolinhas



Fonte: Souza, 2018 - adaptado (Matemática: Realidade e tecnologia - FTD)

a) Quantas bolinhas terá a 5ª figura dessa sequência? Descreva como fez para encontrar a resposta?

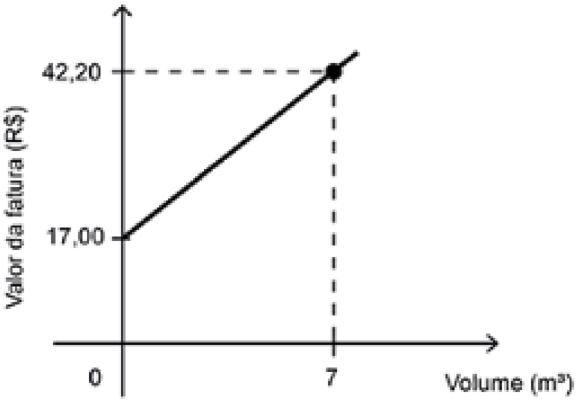
b) É possível estabelecer um padrão, ou então, uma expressão algébrica capaz de determinar qualquer que seja a posição da figura desta sequência? Em caso afirmativo, que padrão, ou sequência, são esses?

Nessa questão, enfatizada em sequências de figuras com padrões específicos, é proposto, inicialmente que, os estudantes consigam entender e representar o padrão que se segue nessa sequência, delimitando a quantidade de bolinhas que cada figura apresenta, sendo neste caso, a quantidade na 5ª figura. Outrossim, deve-se sugerir se há a possibilidade de estabelecer um padrão para determinar essas figuras, expondo assim, que padrão seria esse, ou então, qual a expressão algébrica pode estabelecer para obter as demias figuras dessa sequência.

Enquanto isso, na quarta questão:

4º)(ENEM digital 2020 - Adaptado) O gráfico abaixo relaciona o valor em reais da fatura mensal de água com o seu volume (de água) em metros cúbicos (m^3), gasto em uma determinada residência no mês de outubro.

Figura 4 – Gráfico da conta de água no mês de outubro



Fonte: (ENEM digital 2020)

Sabe-se que, essa fatura é composta por uma taxa fixa, independente do gasto, mais um valor relativo ao consumo de água por cada m³ gasto. Observou-se que, no mês de novembro, o consumo de água, em m³, dobrou em relação ao mês anterior. Com base nessas informações, descreva os passos necessários para obter o valor da fatura, dessa residência, referente ao consumo de água no mês de novembro.

Esta questão, enfatiza as competências sobre a interpretação da função do 1º grau no gráfico. É esperado que os estudantes consigam entender as informações no gráfico, associando e relacionando as variáveis apresentadas (volume de água em metros cúbicos e o preço em reais da conta de água), sendo então, o valor da conta relacionado com a quantidade de água que foi gasta mais uma taxa fixa. Desta forma, estipula-se que os estudantes possam associar o gráfico a uma função do primeiro grau, com coeficientes (angular e linear) passíveis de serem descobertos através dos valores das variáveis volume e preço, expressadas por meio de coordenadas cartesianas, ou seja, para cada metro cúbico (m³) gasto há um preço a ser pago.

Além disso outra alternativa possível dos estudantes se orientar para obter o resultado da questão, é por meio da variação de grandezas que, neste caso, em parte, são diretamente proporcionais, uma vez que, o valor dessa conta, varia conforme a quantidade de volume é gasta, aumentando a medida que ele aumenta e diminuindo a medida que ele diminui. Entretanto, espera-se que os estudantes além de compreender essa relação, entendam que o preço a ser pago depende de um valor para cada metro cubico mais uma taxa fixa. Assim conforme apresentado na questão, se o volume de água for o dobro, o valor a ser pago não dobrará, visto que, a taxa permanece a mesma, ela não varia e não depende da quantidade de água gasta.

Por fim, na quinta questâo:

5º) (ENEM 2010 - Adaptado) Uma determinada fábrica de lacticínios possui dois reservartórios de leite. Sabe-se que, em cada reservatório, há uma torneira acoplada a um tanque resfriado que os abastece, e que, o volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as torneiras permanecem abertas. Consideram que, os volumes dos reservatórios são dados pelas funções, $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3.000$ (Para o 1º reservatório) e $V_2(t) = 150t^3 + 44t + 3.000$ (Para o 2º reservatório), e que, depois de aberta cada torneira, o volume de leite dos reservatórios são iguais no instante $t = 0$, detalhe, os passos necessários para se obter o outro momento t em que o volume de leite nesses reservatórios são o mesmo.

Nessa questão, com foco em equação do 2º grau e manipulação algébrica, espera-se que os estudantes consigam associar as funções fornecidas ao seu respectivo reservatório, entendendo que cada uma representa a quantidade de leite, que varia, conforme passa o tempo (em horas) expresso por meio da letra t. Assim, pressupõe-se que os estudantes consigam entender que, em um determinado tempo, os reservatórios irão se igualar, uma vez que, a questão aborda que o volume de cada reservatório é igual no instante que abre as torneiras, ou seja, quando $t=0$. Porém existe outro momento que também haverá a mesma quantidade de leite nesses reservatórios, tempo esse que os estudantes devem descobrir.

Para obter esse tempo, espera-se que os estudantes associem as funções por meio de uma igualdade, analisando que, em um certo momento, obterá valores iguais. Desta forma, ao observar a igualdade estabelecida, os estudantes devem compreender que existe termos semelhantes que podem ser manipulados a fim de simplificar essa equação que surgiu. Assim, após as manipulações algébricas e fatoração, pressupõe-se a possibilidade de obter uma equação de segundo grau do tipo $ax^2 = b$, possível de obter o resultado que se espera, uma vez que, agora só é preciso realizar a solução dessa equação incompleta do 2º grau para chegar no outro tempo.

Com base nas informações acima, a pesquisa foi realizada no ano de 2024, tendo um total de 28 estudantes matriculados no primeiro ano do Ensino Médio como participantes desse estudo. Vale ressaltar que nem todos responderam a todas as questões do questionário, possivelmente devido ao conjunto de habilidades que exigiam ter para contemplar a sua resolução, entretanto, a grande maioria foi capaz de responder de alguma forma.

Tende em vista a integridade dos participantes, concordamos com Paiva (2005, p. 56) quando afirma: "O importante, ainda, do ponto de vista ético, é que o anonimato do participante seja garantido de forma a evitar que ele sofra qualquer conseqüência advinda dos resultados da pesquisa". A autora enfatiza que o sigilo das informações deve ser assegurado, a fim de garantir que ele não seja prejudicado pela divulgação dos resultados da pesquisa. Diante disso, optamos por representá-los através de uma numeração (E1, E2, E3, E4, E5, E6 ...). A seguir, o quadro 6 abordará os estudantes e as suas respectivas idades:

Quadro 6 – Idade dos estudantes que participaram da pesquisa

Estudantes	Idade
E2, E3, E4, E5, E6, E9, E11, E12, E13, E15, E16, E17, E20, E22, E25, E27 e E28	15
E1, E7, E8, E10, E14, E19, E21 e E24,	16
E23 e E26	17
E18	18

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

De acordo com o quadro acima, é importante destacar que os participantes da pesquisa têm idades entre 15 e 18 anos, sendo a grande maioria composta por estudantes de 15 e 16 anos[3]. Embora alguns estudantes desse grupo estejam fora da faixa etária do padrão esperado para o primeiro ano do Ensino Médio, boa parte encontra-se na idade adequada para esse ano escolar correspondente.

Conforme o UNICEF[4] (2018), o Censo Escolar de 2017 traz um questionamento sobre a situação da distorção idade-série, no qual, enfatiza que cerca de 1/5 dos estudantes matriculados nas etapas de Ensino Fundamental e Ensino Médio possuem dois ou mais anos de atraso escolar. Para tal, revela que o aspecto é mais acentuado no Ensino Médio, onde cerca de

[3] Essas idades apresentam uma quantidade de 17 e 8 estudantes, respectivamente, o que resulta em um total de 25 nessa faixa etária.
[4] Fundo das Nações Unidas para a Infância, responsável no Brasil por garantir os direitos de cada criança e adolescente, em especial os mais vulneráveis (UNICEF).

28% dos estudantes apresentam esse atraso, além de que, nas regiões Norte e Nordeste, se concentram os maiores índices dentro deste contexto.

Ademais, frisa que embora dentre os dados apresentados, os anos de transição escolar[5] sejam os três grandes momentos em que esses índices apresentam altas taxas, não significa que essa distorção esteja diminuindo à medida que se avança a escolarização. Para tanto, pressupõe-se que ocorra o abandono da escola ou transferência para a modalidade EJA por parte destes estudantes com atraso, uma vez que, ao passar ano após ano sendo reprovados, acaba surgindo um empecilho diante da aprendizagem necessária para atingir o ideal de um determinado ano escolar, o que por sua vez, resulta na desmotivação por não conseguir avançar os seus estudos.

Contudo, atualmente esse cenário vem melhorando, as taxas dessa distorção no Ensino Médio, por exemplo, caiu para 21,6% em 2023, o que representa um avanço formidável diante desta pragmática. Porém, ainda é um valor bastante considerável, muito há o que se fazer para que esses índices sejam legitimamente os mais baixos, e assim, seja possível a escola se tornar um ambiente que promova o acesso pleno à educação, capaz de contribuir verdadeiramente para o desenvolvimento dos estudantes que a frequentam (UNICEF, 2024).

Por fim, visando alcançar os objetivos propostos, a análise de dados se dará em três segmentos, que são: Identificar as concepções algébricas que os estudantes do 1º ano do ensino médio desenvolveram conforme o estipulado pela BNCC na etapa escolar do ensino fundamental anos finais; Apontar as dificuldades dos estudantes do 1º ano do ensino médio quanto às concepções algébricas e Analisar os acertos e os erros apresentados na compreensão e interpretação de problemas algébricos. Na sequência, será apresentado essa análise, com a discussão dos dados que foram obtidos após a aplicação do questionário dessa pesquisa.

[5] 3º ano e o 6º ano do Ensino Fundamental, e o 1º ano do Ensino Médio, caracterizados respectivamente pelo: “final do ciclo de alfabetização, mudança da sala de aula unidocente para a multidocente e a transferência da gestão municipal para a estadual” (UNICEF, p.5, 2018).

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentaremos os resultados da pesquisa e sua análise. Conforme exposto anteriormente, o questionário aplicado para esse estudo foi planejado com base nas competências e habilidades estipuladas pela BNCC para os anos finais do ensino fundamental. Dentre as diversas competências abordadas por esse currículo, selecionamos questões que enfatizam a capacidade de estudantes do 1º ano do Ensino Médio de dominar os conceitos algébricos provenientes dessa etapa anterior

Dessa forma, os estudantes serão estimulados a aplicar seus conhecimentos a fim de resolver tais questões, devendo utilizar conceitos para a identificação de padrões e generalização de fórmulas, de tal forma que, permitam calcular termos específicos de sequências, assim como, a representação da solução de sistemas de equações polinomiais do 1º grau de forma algébrica, fazendo o uso de incógnitas em um sistema de equações. Além disso, também será conduzido para a interpretação da função do 1º grau diante de um gráfico, bem como a manipulação de equações algébricas.

5.1 NOÇÃO DE IGUALDADE, EQUAÇÃO DO 1º GRAU E SISTEMA DE EQUAÇÕES

As duas primeiras perguntas[6] foram elaboradas com o intuito de produzir informações acerca da compreensão dos estudantes sobre a noção de igualdade e equações do 1º grau. Assim, o objetivo foi investigar até que ponto os estudantes pesquisados conseguem identificar e aplicar o conceito de igualdade dentro de um contexto algébrico, além da compreensão da ideia de que duas expressões são equivalentes somente se ambas possuírem o mesmo valor.

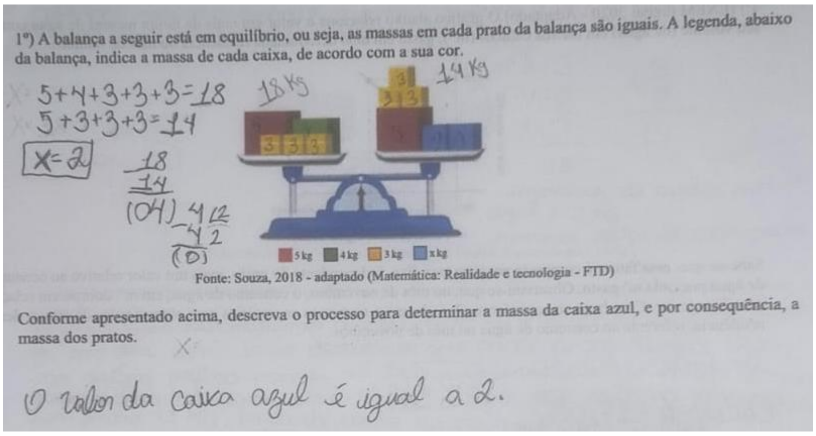
Além disto, por meio dessas questões, buscamos avaliar as habilidades envolvidas na resolução de equações do 1º grau, focando nas operações utilizadas para isolar a variável e encontrar a solução de problemas algébricos relativamente simples, como é o caso da 1º questão. A partir das resoluções dos estudantes, identificamos quatro abordagens distintas utilizadas para resolver essa questão: *operações com expressões numéricas; utilização de expressões algébricas; aplicação da regra de três e uma resposta final, sem detalhamento do processo ou dos cálculos realizados para a sua obtenção.*

[6] Essas questões podem ser caracterizadas entre os níveis de 6º, 7º ou 8º ano.

Dentre esses procedimentos, cerca de 54% dos pesquisados optaram em realizá-la por intermédio de expressões numéricas, partindo do princípio de que a balança deve estar em equilíbrio, ou seja, os pratos de ambos os lados precisam apresentar o mesmo valor. Assim, tal estratégia consiste em somar os valores conhecidos de todas as caixas em cada lado da balança, comparar os seus resultados, identificar o valor necessário para equilibrá-los e, a partir disso, determinar o valor unitário das caixas azuis tendo como base a sua quantidade.

Diante dessa abordagem, destacamos a resolução do E14 como modelo norteador para entender esta aplicação diante da questão. Tal escolha se justifica pelo fato de que, embora todas as resoluções que seguiram esse procedimento sejam semelhantes, essa se destaca por apresentar uma maior clareza e organização em comparação com as demais.

Figura 5 – Resolução do E14 por meio de expressões numéricas



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao observá-la, notamos o potencial dos estudantes que a adotaram como método resolutivo. Embora não utilizem expressões algébricas para compor essa resolução, demonstram uma compreensão da questão de maneira mais intuitiva, na qual, conseguem entender a ideia do que seria uma igualdade matemática, e por consequência, a necessidade de equilibrar a balança para que se faça valer essa igualdade. Ademais, a organização das informações conhecidas e a aplicação de operações para obter o valor desconhecido, demonstram uma noção inicial da álgebra, ainda fortemente atrelada à aritmética.

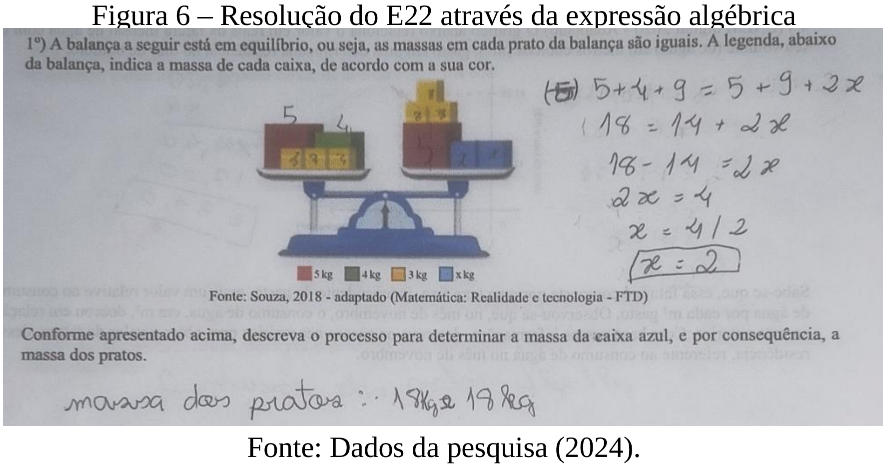
Tal raciocínio, por mais que se baseie em um processo mais concreto, revela-se como um ponto de partida para desenvolver a lógica da álgebra, precisando, eventualmente, ser refinado para incorporar uma formalização abstrata. Entretanto, essa abordagem por si só não anula a resposta correta obtida por esses estudantes, pelo contrário, oferece uma visão mais acessível do conceito de resolução de equações, podendo assim, gradualmente possibilitar a compreensão de como funciona a lógica por trás da aplicação de símbolos e sua manipulação em expressões.

Além do mais, a questão em si é proposta para o nível entre o 6º e 7º ano, o que por sua vez, abre margem para essa estratégia. Afinal, para esses anos escolares, conforme estipulada pela BNCC, inicialmente, o esperado é que os estudantes tenham esse entendimento sobre as propriedades da igualdade, reconhecendo que sua relação não se altera ao acrescentar, restar, multiplicar ou dividir ambos os lados por um mesmo número. Tal habilidade é essencial não apenas para encontrar os valores desconhecidos na solução de problemas, mas também para servir como base no desenvolvimento de uma formalidade da simbologia presente na álgebra.

Enquanto isso, a abordagem utilizada através de expressão algébrica, teve aproximadamente 21% dos estudantes que a recorreram como meio para soluçar este problema. Tal método, também partiu do princípio da necessidade da balança estar em equilíbrio, tendo assim, os mesmos valores em seus respectivos lados. Contudo, ao contrário da estratégia anteriormente citada, há a aplicação da simbologia da álgebra, fazendo o uso de letras, neste caso o x, para expressar o valor, até então, desconhecido.

A seguir, destacamos a resolução do E22 como modelo principal para compreender a abordagem citada acima. Tal resolução foi escolhida devido à sua estrutura ser mais clara se comparada com as demais.

Figura 6 – Resolução do E22 através da expressão algébrica



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

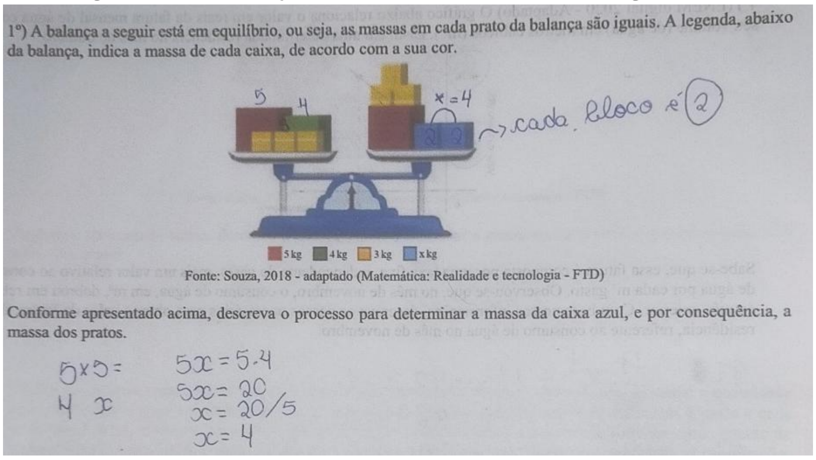
Ao analisá-la, percebemos um aprofundamento maior desses estudantes diante da formalidade exigida pela álgebra. Para tal, conseguem expressar as informações fornecidas e organizá-las em uma equação do primeiro grau, além de serem capazes de realizar as operações e manipulações necessárias a fim de solucioná-la. Além disso, enfatizamos a compreensão perante o uso de letras, tendo a noção de que podem representá-las como o valor que busca-se determinar e como devem manuseá-las de maneira adequada a fim de concretizar esse objetivo.

A estratégia aplicada, em consonância com Ponte, Branco e Matos (2009), demonstra a capacidade desses estudantes em aplicar as propriedades das operações e a sua generalização. Para tanto, podemos notar diante dos procedimentos realizados a fim de obter a solução, o que os autores chamam de "pensar algebricamente". Tal pensamento, segundo esses autores, consiste em um mecanismo essencial para o desenvolvimento da compressão da álgebra, uma vez que permite estruturar a resolução através de padrões e relações entre os elementos dispostos nos problemas, o que por sua vez, pode promover um raciocínio que favorece o aperfeiçoamento da análise e abstração de conhecimentos provenientes da matemática.

Outrossim, enfatizamos a resolução por meio da regra de três, com aproximadamente 11% dos estudantes a utilizando como método para resolver essa questão. Pode-se notar que essa estratégia baseia-se na observação das massas de cada caixa, comparando o que seria semelhante e o que estaria em falta. Assim, ao realizar as devidas comparações, percebe-se que a caixa verde deverá ter a mesma massa que as duas caixas azuis, afinal, para que ainda permaneça o equilíbrio, é preciso que ambas as massas sejam iguais.

A seguir, salientamos a resposta do E6 como um modelo para o entendimento dessa estratégia. Tal resolução foi escolhida devido à sua nitidez apresentada ao longo da sua solução.

Figura 7 – Resolução do E6 fazendo o uso da regra de três



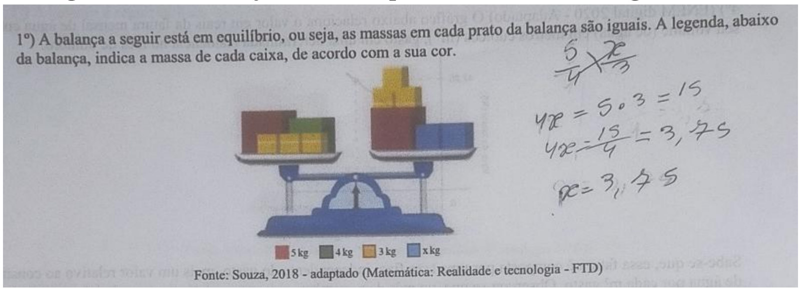
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisá-la, percebe-se que boa parte dos estudantes que a escolheram como meio para chegar na solução, foram capazes de entender as informações fornecidas e organizá-las em uma estrutura, resultando-se em uma expressão algébrica. Para tal, a partir dessa expressão esse método torna-se bastante semelhante se comparado com a estratégia anteriormente citada, uma vez que tais estudantes fazem uso adequado de propriedades provenientes das operações e manipulações caracterizadas em uma equação do primeiro grau.

Embora os procedimentos se iniciem com uma abordagem diferente, ao decorrer de seu desenvolvimento ambos encaminham-se em direção ao mesmo viés, encontrar a solução a partir de uma equação do primeiro grau. Dessa forma, a estratégia aplicada também está em acordo com o pensamento algébrico definido por Ponte, Branco e Matos (2009), manifestando assim, a capacidade desses estudantes em expressar relações da matemática por meio de símbolos e padrões.

Considerando ainda essa maneira de resolver, há uma solução que se destoa um pouco do processo até então explanado. Tal solução apesar de se orientar por regra de três e desenvolver-se por equação do primeiro grau, tendo algumas manipulações e a representação de símbolos, apresenta alguns equívocos, possivelmente atrelados a interpretação da questão, ou seja, o que está sendo fornecido e como deve ser manuseado adequadamente. A seguir, expomos essa solução apresentada pelo E20:

Figura 8 – Resolução do E20 por intermédio da regra de três



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao observá-la, nota-se que por algum motivo na organização das informações e na estrutura da resolução, o estudante E20 utilizou todas as massas das caixas sem ao menos entender de onde elas pertenciam e o que elas representavam neste contexto. Contudo, apesar dessa falha inicial, demonstrou ter um domínio em resolver equação do primeiro grau, conseguindo expressar e manuseá-la adequadamente. Assim, pode-se supor que apenas houve um pequeno equívoco, se tivesse partido do princípio da igualdade e da busca pelo equilíbrio, provavelmente chegaria no mesmo resultado que as demais abordagens.

Outra maneira que os estudantes escolheram resolver essa questão, foi a de escrever somente a resposta final, tendo aproximadamente 14% das soluções. Essa última abordagem demonstra que os estudantes possivelmente chegaram ao resultado por meio de um cálculo mental ou atalho intuitivo, sem necessariamente registrar o procedimento feito. Embora a resposta obtida esteja correta, é importante salientar que, explicitar os passos seguidos permitem não apenas visualizar quais conceitos foram utilizados, mas também identificar os possíveis equívocos e ajustes a serem tomados, para que assim seja possível melhorar a compreensão e o desenvolvimento diante da estrutura lógica que a matemática se faz como campo de estudo.

Por outro lado, na 2º questão é proposto a análise da estruturação de um sistema linear composto por duas equações e duas variáveis, desafiando os alunos a manusearem as operações de adição, subtração ou substituição a fim de encontrar a solução que, simultaneamente, contemple ambas as equações que foram organizadas. Diante das soluções fornecidas pelos estudantes, identificamos duas estratégias distintas utilizadas para expor a solução desta questão: *Operações com expressões numéricas e a aplicação de expressões algébricas*[7].

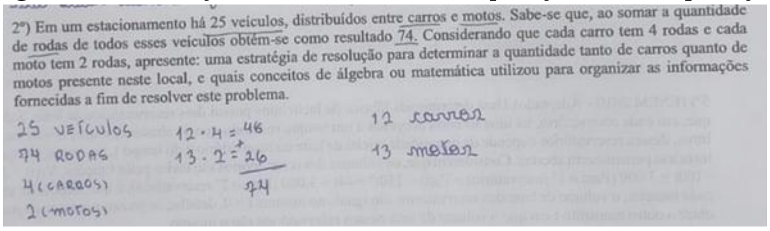
Dentre esses procedimentos, 50% dos estudantes optaram em resolvê-la por meio de alguma operação simples da matemática, seja realizando somas, divisões ou multiplicações até encontrar algum resultado que satisfaça as condições expostas nessa questão. Tal método, baseia-se através de tentativas e suposições, nas quais, são aplicadas algumas ou várias vezes a respectiva operação, até obter o resultado ideal, de tal forma que possa ser atribuído como solução para este problema em questão.

Vale ressaltar que, embora os cálculos com essas operações tendam a se basear em uma mesma estratégia, pode-se ressaltar algumas resoluções que se diferenciam não apenas pela utilização de diferentes operações, mas também pela forma como esses estudantes organizam o seu raciocínio, interpretam os dados fornecidos e o que seria necessário realizar para solucioná-la. Assim, podemos subdividir essa abordagem entre os que escolheram operar somente com somas, multiplicações e com divisões.

Os estudantes que utilizaram multiplicações para encontrar a solução desejada, representam a grande maioria dessa estratégia citada acima, correspondendo a cerca de 79% das resoluções baseadas nesse método e aproximadamente 39% do total dos que resolveram esta questão. Nessa situação, os estudantes escolheram valores para representar a quantidade dos carros e motos necessários para compor a solução final, de tal forma que seja possível somá-los e obter a quantidade adequada de veículos, assim como, a quantidade total de rodas. A seguir apresentamos uma das soluções baseadas nessas condições feita por E16:

[7] Equação do 1º grau e sistema de equações do 1º grau.

Figura 9 – Resolução do E16 mediante a operação de multiplicação


2º) Em um estacionamento há 25 veículos, distribuídos entre carros e motos. Sabe-se que, ao somar a quantidade de rodas de todos esses veículos obtém-se como resultado 74. Considerando que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas, apresente: uma estratégia de resolução para determinar a quantidade tanto de carros quanto de motos presente neste local, e quais conceitos de álgebra ou matemática utilizou para organizar as informações fornecidas a fim de resolver este problema.

25 veículos
74 rodas
4 (carros)
2 (motos)

12 · 4 = 48
13 · 2 = 26
74

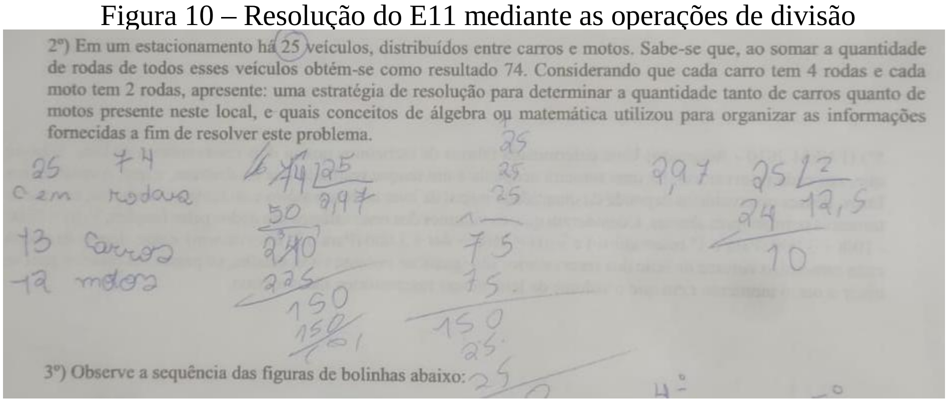
12 carros
13 motos

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao observar essa solução, percebe-se que o estudante baseou-se na ideia de tentativa e erro, testando possivelmente diferentes combinações das quantidades de carros e de motos até encontrar os valores corretos. Inicialmente, ele propôs em anotar os dados fornecidos no problema, considerando que há a quantidade de 25 veículos, 74 rodas e para cada carro e moto há a quantidade respectiva de 4 e 2 rodas. Posteriormente, escolheu um número para representar os carros e o outro para as motos, com ele multiplicou pelo número respectivo de rodas, e assim obteve seus resultados.

Apesar da estratégia utilizada ser válida e de fato conseguir chegar ao resultado correto, deve-se ressaltar que, a mesma não representa ser a mais eficiente, uma vez que, depende da "sorte" e de tentativas dos valores até que se encontre um que funcione dentro das condições impostas pela questão. Para tanto, pode-se imaginar que esses valores obtidos podem ter surgido após algumas tentativas falhas não representadas durante a sua solução, ou então, de uma que se sobressaiu como ideal, não garantindo assim, uma solução direta em casos com valores maiores. Em relação as operações realizadas por divisões expomos a solução feita pelo E11:

Figura 10 – Resolução do E11 mediante as operações de divisão


2º) Em um estacionamento há 25 veículos, distribuídos entre carros e motos. Sabe-se que, ao somar a quantidade de rodas de todos esses veículos obtém-se como resultado 74. Considerando que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas, apresente: uma estratégia de resolução para determinar a quantidade tanto de carros quanto de motos presente neste local, e quais conceitos de álgebra ou matemática utilizou para organizar as informações fornecidas a fim de resolver este problema.

25 74
carros rodas
13 carros
12 motos

3º) Observe a sequência das figuras de bolinhas abaixo:

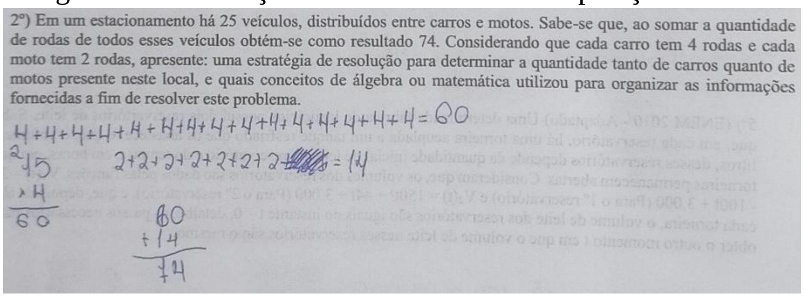
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisar as suas anotações e cálculos, percebe-se que E11 registrou e possivelmente entendeu as informações principais do problema. Entretanto, tentou dividir o número total de rodas (74) pela quantidade total de veículos (25) buscando uma provável relação entre esses valores. Além disso, tentou também dividir a quantidade de veículos pela quantidade de rodas de uma moto (2), chegando ao valor de 12,5, o que por sua vez, não poderia caracterizar como a quantidade de motos justamente por não representar um número inteiro.

Porém, ao final, chegou à conclusão que deve-se haver 13 carros e 12 motos no estacionamento, o que sugere uma possível dedução a partir do número 12,5, que foi convertido para algo mais lógico, ou seja, para 12. Assim, imagina-se que o estudante tenha a solucionada através dessa dedução, obtendo primeiro 12 como a quantidade de motos e, posteriormente, obteve a quantidade de carros intuitivamente para complementar a resposta. Tal processo, apesar da ausência da formalidade por meio de um sistema algébrico, indica uma tentativa de aproximação numérica e raciocínio lógico na busca por uma solução consistente e condizente com o seu contexto.

Por fim, dentro dessa abordagem há os que resolveram somente por operações de somas, como é o caso do E6 destacado na figura abaixo:

Figura 11 – Resolução do E6 fazendo uso de operações de soma



2º) Em um estacionamento há 25 veículos, distribuídos entre carros e motos. Sabe-se que, ao somar a quantidade de rodas de todos esses veículos obtém-se como resultado 74. Considerando que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas, apresente: uma estratégia de resolução para determinar a quantidade tanto de carros quanto de motos presente neste local, e quais conceitos de álgebra ou matemática utilizou para organizar as informações fornecidas a fim de resolver este problema.

4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4=60

15 × 4 = 60

2+2+2+2+2+2+2 = 14

60 + 14 = 74

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisar a resolução apresentada na figura 11, constatamos novamente a premissa da abordagem focada na aritmética. Para tal, o estudante E6 utilizou operações de somas, iniciando-se assim, uma soma com repetitivos 4, o que sugere uma tentativa de encontrar a quantidade de carros por meio da estimativa do total de rodas que esse veículo possa ter naquele local. Dessa forma, ao atingir o valor de 60, infere-se que há provavelmente 15 carros, o que possibilita realizar algumas somas com o número 2 até chegar ao valor de 14, o que indica a presença de 7 motos.

No final, ao somar os resultados obtidos (60 + 14), verificou-se que o resultado é 74, confirmando a coerência da resposta com a informação da quantidade total de rodas fornecida pela questão. Entretanto, vale ressaltar que, aparentemente o estudante ignorou uma informação relevante neste contexto, a quantidade de veículos. É informado que há 25 no local, contudo, ao somar as quantidades encontradas obtemos um valor[8] que não condiz com o que foi exposto.

Tal estratégia, demonstra uma relativa compreensão entre o problema e os dados fornecidos, os estudantes que a utilizaram tem a noção de que precisam encontrar os valores dos carros e das motos a partir do que foi elencado. Porém, a falta de um modelo algébrico nesta solução, permitiu que houvesse uma inconsistência na resposta final, visto que, por basear exclusivamente em somas sucessivas sem considerar todas as condições impostas por esse problema, evidenciou-se uma limitação em sua organização.

Portanto, a partir do que foi exposto, pode-se inferir que a abordagem focada em operações com expressões numéricas demonstrou, no geral, uma compreensão parcial do problema, muitos estudantes que a utilizaram se sobressaíram, conseguindo alcançar a resposta correta. Entretanto, em alguns casos, o manuseio deste método apresentou-se limitações quanto à sua sistematização, praticidade e eficiência, uma vez que depende de tentativas ao acaso e não garante por si só um procedimento organizado, estruturado e possível em outros contextos.

Vale ressaltar que, essa questão normalmente é dirigida a alunos entre o 7º e 8º ano, no qual, segundo a BNCC é esperado que os estudantes tenham tido um progresso tanto de seu pensamento algébrico quanto de sua linguagem algébrica, afinal, nesses anos escolares há um foco de ensino diante de tais assuntos. No entanto, ao recapitular os procedimentos realizados nessa abordagem, enfatizamos possíveis dificuldades em estruturar formalmente um problema, o que por sua vez, resulta na recorrência dessas estratégias[9].

Outra abordagem utilizada para responder essa questão foi a aplicação de expressões algébricas, correspondendo a cerca de 19% do total que a responderam. Tal método, pode ser subdividido em duas estratégias que, apesar das semelhanças, apresentam diferenças na forma como os estudantes a estruturam. Para tal, uma se organiza elencando equações do primeiro grau com as informações provenientes do problema, enquanto isso, a outra baseia-se através de um sistema linear com equações do primeiro grau.

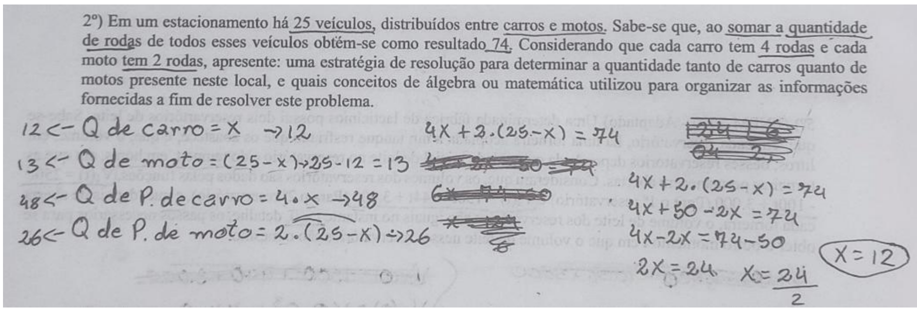
Dentre as soluções referente a primeira estratégia, destacamos a que foi apresentada pelo E19 na figura a seguir:

---

[8] O estudante chegou à conclusão de que há 15 carros e 7 motos. Ao somá-los obtém-se o resultado de 22 veículos, entretanto, a questão aborda que há 25 e não 22.

[9] Estratégias mais intuitivas, sem o uso de símbolos e sem a representação das grandezas por variáveis em equações.

Figura 12 – Resolução do E19 recorrendo a equações do 1º grau


2º) Em um estacionamento há 25 veículos, distribuídos entre carros e motos. Sabe-se que, ao somar a quantidade de rodas de todos esses veículos obtém-se como resultado 74. Considerando que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas, apresente: uma estratégia de resolução para determinar a quantidade tanto de carros quanto de motos presente neste local, e quais conceitos de álgebra ou matemática utilizou para organizar as informações fornecidas a fim de resolver este problema.

12 <- Q de carro = x -> 12
13 <- Q de moto = (25 - x) -> 25 - 12 = 13
48 <- Q de P. de carro = 4 . x -> 48
26 <- Q de P. de moto = 2 . (25 - x) -> 26

4x + 2.(25 - x) = 74
4x + 2.(25 - x) = 74
4x + 50 - 2x = 74
4x - 2x = 74 - 50
2x = 24 x = 24/2
X = 12

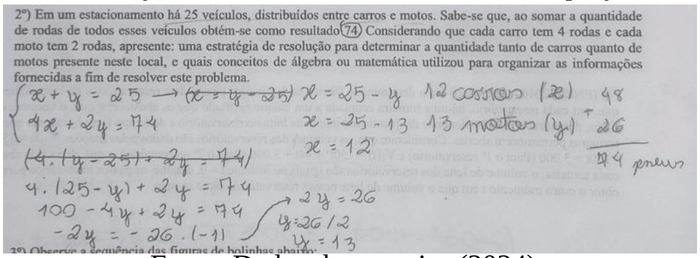
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao observá-la, percebemos uma estrutura resolutiva bastante organizada e condizente com os dados fornecidos na questão. Para tanto, o estudante define a quantidade de carros por meio da letra x, e a quantidade de motos por $25 - x$, o que estabelece uma relação de dependência entre esses dois valores. Além do mais, contempla a quantidade de pneus de carros por $4.x$ e a quantidade de pneus de motos por $2.(25 - x)$, relacionando assim que, a soma entre eles deverá obter como resultado 74[10].

Tendo em mente essas informações, o estudante desenvolve expressão algébrica[11] formada pela soma, realizando a aplicação de algumas propriedades algébricas, como a distributiva, o agrupamento de termos semelhantes e o isolamento do elemento x, a fim de determinar o valor de carros que há nesse estacionamento. Em sequência, substitui o resultado obtido na expressão $25 - x$, encontrando assim, o valor de motos presente no local. Tal procedimento nos fornece um entendimento um tanto quanto apurado sobre a álgebra, uma vez que esses estudantes usufruem adequadamente da simbologia e manipulação algébricas.

A seguir, enfatizamos a resolução do E22 como referência para a segunda estratégia, já que a mesma se apresenta de forma organizada e com as informações fornecidas pela questão:

Figura 13 – Resolução do E22 mediante o sistema de equações do 1º grau


2º) Em um estacionamento há 25 veículos, distribuídos entre carros e motos. Sabe-se que, ao somar a quantidade de rodas de todos esses veículos obtém-se como resultado 74. Considerando que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas, apresente: uma estratégia de resolução para determinar a quantidade tanto de carros quanto de motos presente neste local, e quais conceitos de álgebra ou matemática utilizou para organizar as informações fornecidas a fim de resolver este problema.

$\begin{cases} x + y = 25 \\ 4x + 2y = 74 \end{cases}$ -> ~~x = y - 25~~ x = 25 - y
x = 25 - 13
x = 12
12 carros (x) 48
13 motos (y) 26
74 pneus
~~4.(y - 25) + 2y = 74~~
4.(25 - y) + 2y = 74
100 - 4y + 2y = 74
-2y = -26 . (-1)
2y = 26
y = 26/2
y = 13

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

---

[11] A expressão formada foi a: 4.x+ 2.(25 - x) = 74

Ao analisá-la, observa-se que o estudante conseguiu definir corretamente as variáveis[12], expondo que a letra x representaria a quantidade de carros e a letra y a quantidade de motos. A partir disso, estruturou um sistema de equações, modelando uma equação para expressar o total de veículos e outra para o total de rodas. Em sequência, optou por aplicar o método de substituição para solucionar esse sistema, isolando a variável x na primeira equação e substituindo o valor encontrado na segunda equação.

Após a aplicação, o estudante realizou a manipulação algébrica nessa nova equação, utilizando algumas propriedades da matemática, como por exemplo, a distributiva e a reorganização dos seus termos, até obter o valor da variável y. Com esse resultado, substituiu o seu valor na primeira equação, encontrado dessa forma a resposta para a variável x. Além disso, ao final, testou se esses valores encontrados também satisfaziam as condições da equação que expressava a quantidade total de rodas, concluindo que realmente são verídicas nesse contexto.

Diante do que foi exposto para essa abordagem, é possível estabelecer que os estudantes que a utilizaram, seja conforme a primeira estratégia ou conforme a segunda, demonstram um nível de compreensão da álgebra. Percebe-se sua capacidade em interpretar adequadamente a situação proposta, assim como o desenvolvimento das expressões algébricas e aplicação correta de algumas propriedades para resolver o problema em questão. Além do mais, pode-se enfatizar que, essa resolução está em consonância com a BNCC, visto que, ela aborda sobre a solução por meio de habilidades que envolvem o uso de equações e sistemas lineares.

Em suma, a análise das resoluções dos estudantes perante estas duas questões evidencia diferentes níveis de compreensão da noção de igualdade e da resolução de equações do 1º grau. Assim, as estratégias que foram baseadas em operações numéricas demonstraram um entendimento mais intuitivo, o que possibilita eventualmente ser um ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entretanto, embora essa abordagem seja funcional em alguns casos, como na primeira questão, revelou limitações em sua sistematização e eficiência se compararmos com os resultados obtidos na segunda questão.

Por outro lado, a utilização de expressões algébricas refletiu um nível mais avançado de abstração, permitindo uma solução mais estruturada e generalizável. Tal aspecto, demonstra-se como essencial para a consolidação de um aprendizado mais aprofundado, uma vez que possibilita a sua articulação com o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento algébrico.

---

[12] Na matemática, uma variável é caracterizada como um símbolo (geralmente uma letra) que representa valores sujeitos à variação (Khan Academy, 2025).

Portanto, nessas condições, podemos ressaltar que apesar de alguns estudantes demonstrarem habilidades em expressar o problema através da simbologia e de manipulações, ainda há muitos que se baseiam principalmente em estratégias aritméticas, evidenciando uma transição ainda em processo entre o pensamento numérico e o pensamento algébrico.

5.2 SEQUÊNCIA NUMÉRICA E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

A terceira questão foi elaborada com o propósito de coletar informações sobre a compreensão das sequências. Assim, o objetivo dela foi avaliar a capacidade dos estudantes em generalizar padrões, bem como, estabelecer uma relação de formação para os termos da sequência exposta neste problema. Deste modo, procuramos identificar as possíveis dificuldades diante da percepção de padrões e da formulação de ideias que garantam determinar o valor de qualquer que seja a posição da figura desta sequência.

Diante desse contexto, serão destacadas as estratégias adotadas pelos estudantes para solucionar o problema proposto nessa questão. Enfatizaremos assim, os métodos escolhidos para determinar a quantidade de bolinhas na 5ª figura, com base na sequência apresentada, assim como as ideias formuladas para generalizar a quantidade de bolinhas em qualquer que seja a sua posição da sequência. Nesse sentido, a partir das resoluções elaboradas pelos estudantes a fim de determinar a 5ª figura, foram identificadas algumas abordagens distintas para solucionar esse questionamento.

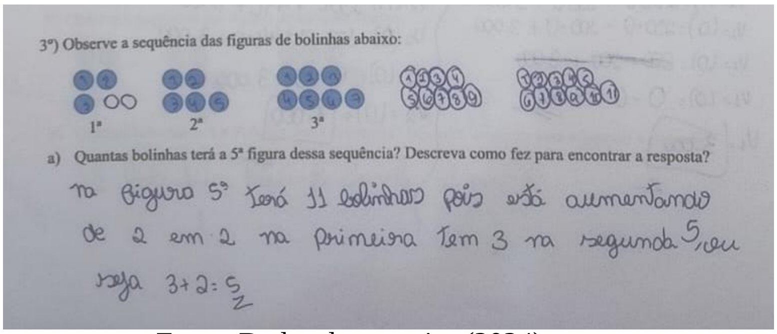
Entre elas, destacam-*se a representação da solução através da continuação da sequência, seja por meio de figuras ou pela quantidade das bolinhas; a identificação de um padrão de progressão que acrescenta de 2 em 2: e a observação de que as bolinhas posicionadas na parte superior da figura seguem um padrão numérico correspondente à sua posição, enquanto as bolinhas da parte inferior apresentam uma unidade a mais em relação à posição da figura na sequência.*

Dentre esses procedimentos, a primeira abordagem destaca-se por ter sido adotada por aproximadamente 46% dos pesquisados. Nessa estratégia, os estudantes optaram por resolver a questão continuando o que havia sido exposto, com a maioria preferindo representar as figuras seguintes ou simplesmente a figura desejada. Enquanto isso, alguns preferiram continuar através da numeração respectiva de bolinhas para cada figura até obter o valor que buscava-se encontrar.

Outra abordagem bastante utilizada para determinar a resposta foi a que considerava que havia um padrão na sequência, no qual possibilitava um aumento de 2 em 2, ou simplesmente a cada figura tinha-se 2 bolinhas a mais em relação à anterior. Tal estratégia demonstrou-se eficaz e, em alguns casos, mesclou-se com o método anteriormente explanado, ou seja, para alcançar a solução, os estudantes partiram do pressuposto que a sequência aumenta em 2 bolinhas para cada figura que se seguia, representando-se por figuras ou por números esse procedimento.

A seguir, destacamos a resolução do E5 como exemplo da combinação entre esses métodos:

Figura 14 – Resolução do E5 combinando a representação de sua sequência e de seu padrão

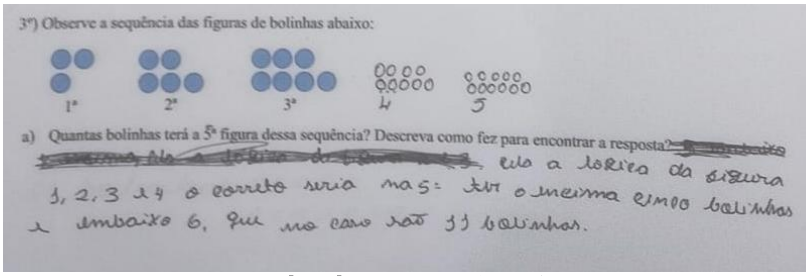


Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao observá-la, percebe-se como o estudante idealizou esse procedimento a fim de encontrar a solução. Inicialmente numerou cada uma das bolinhas dessa sequência, notando que, cada figura diferenciava-se por 2 unidades de bolinhas em relação a sua anterior, o que lhe permitiu continuar representado as figuras posteriores até conseguir calcular o total de bolinhas que a 5ª figura teria. Tal abordagem demonstra a capacidade em identificar um padrão numérico, considerando que há uma variação constante e que pode-se descobrir as figuras seguintes com base nessa regularidade.

Por outro lado, aproximadamente 7% dos estudantes optaram por atentar em alguma condição que as figuras poderiam representar em relação à sua posição na sequência. Tal princípio pode ser observado na resolução abaixo, a qual, descreve que ao contemplar as figuras anteriores à 5ª, nota-se uma peculiaridade diante de sua posição e a quantidade de bolinhas, de tal forma que há uma quantidade específica “encima e embaixo” dependente de sua localização, e ao juntá-las formaria a figura desejada. A seguir, temos um exemplo dessa estratégia:

Figura 15 – Resolução do E17 através da posição e da quantidade de bolinhas



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Para mais, nota-se que esse procedimento reflete uma análise mais aprofundada da sequência, onde a relação entre as bolinhas e sua disposição nas figuras torna-se um fator determinante para a construção da sequência. Para tanto, os estudantes que a utilizaram não se limitam a contar ou identificar somente um padrão numérico, mas também levam em consideração o modo como as bolinhas estão distribuídas nas figuras em função de sua distribuição na sequência, criando uma estratégia que engloba tanto a quantidade quanto a organização das bolinhas.

Ainda sob essa perspectiva, no que se refere as estratégias focadas em estruturar um método capaz de determinar a relação entre a quantidade de bolinhas e a sua localização na sequência, destaca-se o seguinte: A analogia entre a sequência apresentada pelas figuras e a sequência de números ímpares a partir do número 3; e a estruturação por meio de uma progressão aritmética ou progressão geométrica. Vale ressaltar que, assim como os métodos anteriormente citados, há a repetição de algumas ideias em outras, ou seja, muitos desses estudantes abordaram em sua solução estratégias semelhantes ou combinaram mais de uma.

A primeira estratégia, indica uma percepção por parte dos estudantes em compreender que a quantidade das bolinhas em cada figura segue um crescimento regular, semelhante à sequência de números ímpares: 3,5,7,9,11, ... Tal relação, embora não formule uma expressão algébrica, sugere um reconhecimento da estrutura que se faz essa sequência, podendo assim, desenvolver-se para uma fórmula baseada na expressão geral dos números ímpares[13] caso eventualmente aprimore seus conhecimentos sobre a simbologia da álgebra.

Dentre as justificativas apresentadas pelos participantes para essa estratégia, destacamos:

E6- *"(...) é uma sequência de números ímpares";*

[13] Fórmula capaz de expressar os números ímpares: 2x + 1.

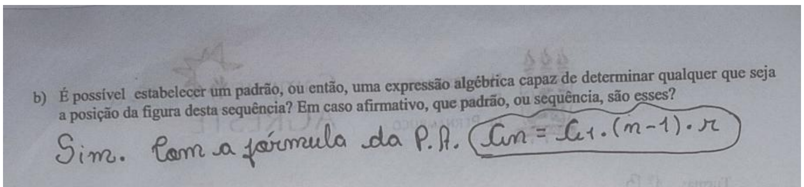
E12- *"(...) é que a quantidade de bolinhas sempre será número ímpar, ou seja, polando os números pares";*
E13- *"(...) a quantidade bolinhas vai aumentando de 2 em 2, e sempre vai ser ímpar";*
E14- *"(...) o padrão que segue na sequência é que a quantidade de bolinhas sempre será número ímpar, ou seja, pulando os números pares".*

Destarte, percebe-se que, ao refletirem sobre como poderiam expressar o padrão da sequência apresentada no problema, os estudantes demonstram reconhecer que a quantidade de bolinhas em cada figura segue um princípio de que sempre será um número ímpar, ou seja, a sequência inicia-se no número 3 e aumenta de maneira contínua, ignorando assim, os números pares. Desta forma, na estratégia também é indicado um crescimento constante de 2 em 2 bolinhas para cada figura seguinte, o que, por sua vez, permite que alguns estudantes ressaltem não só a sequência de números ímpares, mas também o padrão de aumento apresentado por cada figura.

A segunda estratégia, por sua vez, envolve a ideia de que essa sequência pode ser determinada por uma progressão, em alguns casos, com a sua razão sendo 2. Apesar desse ponto de vista estar correto, e alguns estudantes ressaltarem que poderia ser descrita por meio de uma progressão aritmética, muitos não conseguiram expressar a fórmula por trás dessa progressão, além de haver casos em que uma certa parcela dos participantes sugeriram que seria uma progressão geométrica, o que não faria sentido devido ao seu aumento da sequência não ser exponencial, e sim, uma constância.

Ao procurar entender esse erro de interpretação, pode-se supor que houve uma possível confusão entre as definições de progressão aritmética e geométrica. Para tal, imagina-se que os estudantes que a destacaram como uma progressão geométrica podem ter entendido que a mesma baseia-se em uma constate soma entre os seus termos ao invés de envolver um fator de multiplicação. A seguir, destaca-se a tentativa do E19 em expressar uma fórmula capaz de determinar a quantidade de bolinhas com base na sua posição e nessa abordagem:

Figura 16 – Resolução do E19 por meio de uma fórmula


b) É possível estabelecer um padrão, ou então, uma expressão algébrica capaz de determinar qualquer que seja a posição da figura desta sequência? Em caso afirmativo, que padrão, ou sequência, são esses?

Sim. Com a fórmula da P.A. $a_n = a_1 . (n-1) . r$

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisá-la, nota-se que, embora cite que a fórmula apresentada pertence a uma PA[14], não condiz com a fórmula geratriz para o termo geral[15], uma vez que o a_1 está multiplicando com o termo (n-1).r, o que lhe resulta em valores diferentes dos esperados para a sequência. Como consequência, essa formulação acaba contradizendo a definição de uma PA, a qual consiste em uma adição sucessiva de um valor constante a um termo inicial. Além disso, essa estrutura lembra, até certo ponto, a fórmula para o termo geral de uma PG[16], o que enfatiza, novamente, a confusão entre as progressões, só que agora, em suas fórmulas.

Em suma, ao longo da resolução desta questão, os estudantes demonstraram ter algum conhecimento sobre sequências. Boa parte deles são capazes de entender a regularidade que essa sequência apresenta, seja por meio da representação de seu padrão; por comparações de outras sequências, como é o caso dos números ímpares; ou através de deduções para determinar a sua continuação, apresentando assim, uma vinculação com as progressões ou com a disposição das bolinhas com base na sua localização.

Entretanto, ao tentar expressar estratégias capazes de chegar na quantidade de bolinhas para uma figura que esteja em uma posição qualquer, nota-se a dificuldade em desenvolver alguma que seja eficiente e precisa, visto que houve a confusão entre as definições, assim como as fórmulas das progressões. Apesar desses empecilhos, ainda há uma certa consonância com a BNCC, uma vez que a maioria é capaz de identificar padrões, porém, a interpretação e a compactação para uma linguagem algébrica ainda apresentam lacunas em sua compressão e desenvolvimento.

5.3 FUNÇÃO DO 1º GRAU E MANIPULAÇÃO ALGÉBRICA

Antes de tudo, vale ressaltar que as duas últimas perguntas[17] foram formuladas com a intenção de averiguar a compreensão dos estudantes sobre a função do 1º grau e a manipulação algébrica. Desta forma, o intuito foi investigar até que ponto os estudantes pesquisados conseguem identificar e aplicar o conceito da função do 1º grau, assim como a capacidade de realizar manipulações algébricas a partir de um dado problema até a obtenção de sua solução.

---

[14] Abreviação para Progressão Aritmética
[15] Fórmula para o termo geral de uma PA: $a_n = a_1 + (n - 1).r$, onde, n representa a posição do termo na sequência, a_1 o 1º termo da sequência, r é a razão, ou seja, a diferença entre dois termos consecutivos, representando assim, a variação entre os termos, e o n - 1, correspondendo a posição anterior do valor que se quer obter.
[16] Abreviação para Progressão Geométrica
[17] Essas questões podem ser caracterizadas entre os níveis de 8º ou 9º ano.

Além disto, através dessas questões, procuramos aferir sobre as habilidades pertinentes à interpretação de gráficos, interligando assim, com a função do 1º grau. Para tal, espera-se que os estudantes identifiquem a taxa fixa e o termo que estar variando na conta de água e, a partir disso, sejam capazes de determinar o valor referente a fatura do mês seguinte tendo em mente que o consumo duplicou. Esses conhecimentos podem ser averiguados na 4ª questão, a qual exige o entendimento sobre a estrutura que se faz uma função afim e os conceitos de proporção e crescimento linear.

A partir das resoluções dos estudantes, constatamos diferentes abordagens que foram manuseadas a fim de resolver essa questão. Entre elas, destacamos *as operações com expressões numéricas, seja por meio de somas, subtrações ou divisões; a aplicação da regra de três com os valores que foram fornecidos no gráfico; e a utilização de uma noção em proporção junto com o conceito primordial para uma função do 1º grau, onde reconheceram que há uma taxa fixa e uma variação proporcional ao mês anterior*.

Dentre esses procedimentos, nota-se que boa parte deles se baseiam em operações aritméticas simples. Para tanto, um grande exemplo disso, é a primeira abordagem, cujo foco consiste em realizar operações com os valores da conta de energia que foram apresentados no gráfico, seja realizando algumas somas, subtrações ou até mesmo a divisão do valor do mês por dois. Assim, ao observar esse método, identificamos que aproximadamente 14% dos estudantes optaram por realizar soma com os valores, 29% utilizaram a operação de subtração com os valores e cerca de 11% escolheram operar com a divisão, o que resulta em um total de 54% dos estudantes para esse método.

Em relação as operações de somas, por algum motivo a maioria optou em somar a taxa fixa[18] com o valor da fatura de água do mês de outubro (R$ 42,20), valores esses que estavam expressos no gráfico do consumo de água desse respectivo mês. Ao realizar essa operação obteve que o mês seguinte seria de R$ 59,20, o que sugere uma tentativa em encontrar o seu resultado através do acréscimo da taxa fixa, podendo estar relacionado com o fato que o consumo duplicou. Entretanto, não há uma relação de proporção direta entre a taxa fixa e o consumo de água, uma vez que essa taxa representa uma constância que independe do que foi gasto.

[18] A taxa fixa é o valor da conta que não varia conforme o gasto, ou seja, ele é independente e permanece o mesmo para qualquer que seja o consumo. No gráfico está apresentado com o valor de R$ 17,00.

Por outro lado, os que realizaram a operação de subtração, partiram do mesmo pressuposto que a anterior, contudo em vez de acrescentar a taxa ao valor do mês, realizaram a sua diminuição. Deste modo, alguns obtiveram como resultado:

E5- *"(...) Aumentou 25,20 Reais".*
E8- *"(...) Realizando a subtração dos 2 meses, a diferença foi de 25,20 (m³)";*
E13- *"(...) Com a subtração o resultado deu 25,20";*
E21- *"(...) Fazendo a subtração obtivemos a diferença de 25,20 de um mês para o outro";*

Ao analisar essas respostas, observa-se que possivelmente houve a interpretação sobre a taxa fixa como o elemento que estar variando, o que indicaria, assim como no caso anterior, a tentativa de estabelecer uma relação entre os valores que foram apresentados no gráfico. Ademais, alguns entenderam que esses dados representariam os dois meses, e que deveriam realizar a diferença entre eles para obter o resultado que se buscava. Contudo, ao atentar-se na resposta do E5, percebe-se um detalhe interessante, ao contrário dos demais, ele destacou que amentou R$ 25,20.

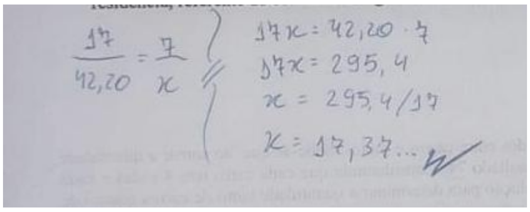
É fato que, esperava-se que os estudantes compreendessem que o valor do consumo de água representaria uma soma entre a quantidade fixa e a quantidade variável, independente e dependente, respectivamente, do consumo em metros cúbicos. Deste modo, ao efetuar essa subtração, os estudantes deveriam entender que seu resultado era justamente o valor que estar variando conforme o gasto de água, o que por sua vez, deveria possibilitar a ideia de que o mesmo é a quantidade que irá duplicar, ou seja, os estudantes chegaram bem perto da solução final, só precisavam entender que houve esse aumento para o mês seguinte, e para descobri-lo, era preciso somente somar o resultado obtido com o mês anterior.

Em contrapartida, alguns estudantes optaram por dividir o valor do mês de outubro por dois[19], obtendo como resultado R$ 21,10, o que representaria o valor da fatura do mês de novembro. No entanto, percebe-se que houve um equívoco diante da interpretação do problema, considerando assim, uma provável compreensão de que o mês de novembro em relação ao mês de outubro houve um consumo pela metade, ou seja, desconsideraram os valores que são fixos e levaram em conta que o valor no mês de outubro expressa-se como o dobro da quantidade referente ao mês de novembro.

[19] Aproximadamente 11% dos estudantes optaram por tal método.

Diante do que foi observado nesse procedimento, pode-se supor uma interpretação limitada por parte desses estudantes, a qual evidencia principalmente a desconsideração da taxa fixa como uma quantidade constante, além da dificuldade para entender as grandezas expostas no gráfico e sua relação com os dados apresentados na questão. Além dessa abordagem, também é importante ressaltar a resolução que se fez pelo método da regra de três[20], a qual, foi manuseada utilizando os dados que estavam expressos no gráfico. Para tanto, a seguir enfatizamos um exemplo modelo para essa estratégia:

Figura 17 – Resolução do E2 fazendo uso da regra de três



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisá-la, nota-se que tentaram organizar os dados em duas grandezas[21], relacionando R$ 17,00 com 7 m³ e R$ 42,20 com x. Deste modo, é possível supor que idealizaram o mês de outubro valendo R$ 17,00 e com gasto de 7 m³, enquanto o mês de novembro representaria R$ 42,20 e com gasto ainda desconhecido. Tendo em mente isso, organizaram essas informações em uma equação do 1º grau, realizando as operações e manipulações dos termos até obter o resultado aproximado de 17,37.

Apesar dos estudantes realizarem correntemente a solução para a equação que foi estruturada, o pressuposto inicial que deu origem a essa organização, desconsidera algumas relações que foram estabelecidas na apresentação do contexto deste problema. Para tanto, era esperado uma interpretação do gráfico sendo a representação da variação do consumo de água que foi gasto no mês de outubro, podendo assim, utilizá-lo como referência para obter o mês seguinte, visto que a proporção iria se manter, tendo o consumo aumentado em duas vezes.

Por fim, destacamos a estratégia focada em proporção e na ideia primordial para uma função do 1º grau[22]. De certo modo, os estudantes que a utilizaram tiveram algumas noções bem parecidas, ambos partiram da premissa de que a taxa é fixa, ou seja, ela não pode mudar, o que irá sofrer a mudança é o valor do mês sem essa taxa. Desta forma, pode-se, por exemplo,

[20] Cerca de 14% dos estudantes escolheram esse procedimento.
[21] As duas grandezas seriam: o valor a ser pago em reais e a quantidade consumida em metros cúbicos.
[22] Cerca de 18% dos estudantes escolheram essa estratégia.

iniciar retirando a taxa, duplicar o resultado obtido e acrescentar a taxa; ou retirar a taxa e, com o resultado, acrescentar ao valor do mês de outubro; ou então, duplicar o valor do mês anterior e, no final retirar a taxa.

Todos esses exemplos foram evidenciados pelos estudantes que escolheram essa estratégia, visando a obtenção da solução. Apesar de não expressarem os dados em uma equação ou expressão algébrica, percebe-se que eles compreenderam as informações que foram fornecidas, bem como, realizaram uma interpretação correta da relação entre as grandezas do problema. De resto, seus raciocínios levaram à resposta correta, demonstrando que entenderam a dinâmica envolvida nessa questão: o valor a ser pago depende de uma taxa fixa (constante) e de uma quantidade variável (proporcional ao consumo).

Em contrapartida, a 5ª questão abrange um problema baseado em funções polinomiais, exigindo assim, a manipulação de expressões algébricas para encontrar o instante em que os volumes dos reservatórios se igualem novamente. Deste modo, a solução em questão, requer um viés para: $V_1(t) = V_2(t)$ [23], onde a igualdade dessas funções deve originar a solução para esse impasse. Entretanto, é cabível destacar que, inicialmente as funções serão do 3º grau e, ao serem igualadas, é esperado que os estudantes as manipulem e obtenham uma equação do 2º grau do tipo: $ax^2 + c = 0$, resolvendo-a em sequência.

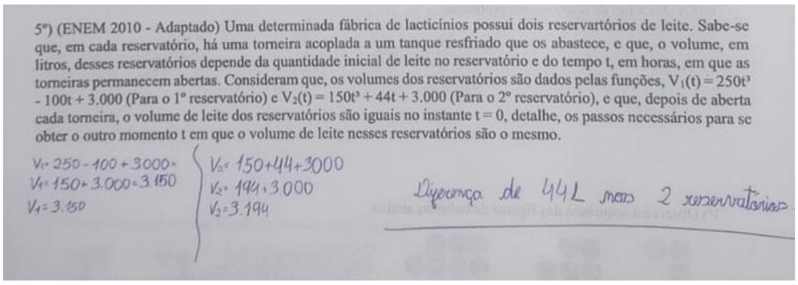
Com base nesse contexto, enfatizaremos as abordagens que os estudantes escolheram a fim de solucionar o problema exposto nessa questão. Destacaremos assim, as estratégias para determinar o tempo em que esses reservatórios irão se igualar, tendo em mente que inicialmente começaram no mesmo nível. Diante disso, a partir das soluções desenvolvidas pelos estudantes, identificamos alguns métodos distintos, como por exemplo: A substituição da variável t por 0; a desconsideração da variável t, seja em parte ou por completo; e a aplicação da manipulação algébrica.

Em relação ao primeiro método aplicado[24], observa-se que para encontrar a solução, ou seja, o tempo que resultaria em um valor igual nas equações dos reservatórios, os estudantes consideraram a variável t sendo 0. Assim, ao realizarem as operações, obtiveram como resultado 3.000 em ambas equações, porém, tal fato já deveria ser levado em consideração, uma vez que a própria questão informa que: “depois de aberta cada torneira, o volume de leite dos reservatórios são iguais no instante t = 0”.

[23] $V_1(t)$ representa a função do volume em litros, com base no tempo, para o 1º reservatório, enquanto $V_2(t)$ expressa-se como a função para o 2º reservatório.
[24] Cerca de 29% dos estudantes escolheram manusear a solução a partir deste método.

Destarte, essa situação sugere uma falha na interpretção do problema, visto que, possivelemte, houve o entendimento de que deveriam apenas considerar esse tempo, ao invés de buscar outro em que os volumes voltariam a se igualar. Deste modo, ao utilizá-lo nas equações, apenas comprova-se a informação que já havia sido fornecida, sem de fato avançar em sua resolução. Em contraste, a segunda abordagem realizada[25], destaca-se por manifestar uma ideia de aplicação em que a variável estaria sendo "ignorada". A seguir destacamos um exemplo modelo desse cenário:

Figura 18 – Resolução do E8 conforme a desconsideração da variável t


5º) (ENEM 2010 - Adaptado) Uma determinada fábrica de lacticínios possui dois reservartórios de leite. Sabe-se que, em cada reservatório, há uma torneira acoplada a um tanque resfriado que os abastece, e que, o volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as torneiras permanecem abertas. Consideram que, os volumes dos reservatórios são dados pelas funções, $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3.000$ (Para o 1º reservatório) e $V_2(t) = 150t^3 + 44t + 3.000$ (Para o 2º reservatório), e que, depois de aberta cada torneira, o volume de leite dos reservatórios são iguais no instante t = 0, detalhe, os passos necessários para se obter o outro momento t em que o volume de leite nesses reservatórios são o mesmo.

$V_1 = 250 - 100 + 3000 =$
$V_1 = 150 + 3.000 = 3.150$
$V_1 = 3.150$

$V_2 = 150 + 44 + 3000$
$V_2 = 194 + 3.000$
$V_2 = 3.194$

Diferença de 44L nos 2 reservatórios

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

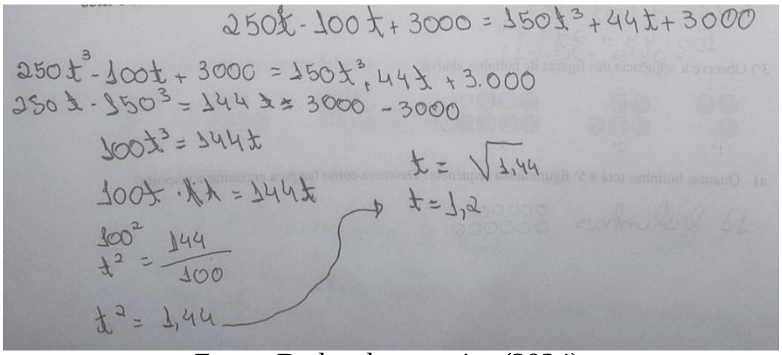
Ao observá-la, supomos que houve uma tentativa de estabelecer alguma relação entre os reservatórios, no entanto, perecebe-se que, ao escrever as respectivas equações, a variável t foi desprezada, podendo imaginar que, possivelmente, partiram do pressuposto que poderiam considerar t = 1, o que explicaria o sumiço deste elemento nos cálculos. Assim, ao assumir um valor fixo para a variável, os estudantes modificaram o que havia sido proposto, pois, em vez de manter a relação estruturada entre o tempo e o volume dos reservatórios, reduziram a uma soma dos coeficentes das equações, cujo resultado final obteve uma diferença de 44 litros entre os compartimentos, o que não condiz com o que foi solicitado.

Por outro lado, também é válido destacar outra resolução dentro desse contexto, como é o caso da utilização dos expoentes da variável nos coeficientes das equações, obtendo desta forma, valores exorbitantes e com uma diferença bastante significativa entre as quantidades de leite nos reservatórios. Nela, apesar de inicialmente expor as equações corretamente, tendo a variável, ao decorrer do seu desenvolvimento, de repente exclui-se esse elemento e considera-se os expoentes para os seus coeficientes, obtendo-se no final 15.627.000 para o 1º reservatório e 3.378.044 para o 2º, o que por sua vez evidencia uma distorção diante da solução para o problema, já que deveriam ser iguais.

[25] Aproximadamente 19% dos estudantes optaram por esse procedimento.

Por fim, destacamos as soluções obtidas através da manipulação algébrica ao estabelecer uma igualdade[26]. Nela, os estudantes partiram do pressuposto de que, para os reservatórios atingissem novamente uma quantidade igual de leite em ambos, era preciso que os resultados de suas respectivas funções, em determinado tempo, também assumissem valores iguais. Desta forma, foi proposto uma igualdade entre as funções, resultando em uma equação capaz, por meio de sua solução, encontrar o tempo necessário para que essa condição fosse satisfeita. A seguir, destacamos um exemplo modelo dessa abordagem:

Figura 19 – Resolução do E23 por meio da manipulação algébrica



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisar a abordagem representada na figura acima, percebe-se que, foi feito um processo que envolve tanto a reorganização quanto a simplificação dos termos, com o objetivo de obter a solução. Como já ressaltado, primeiramente, foi estabelecido uma igualdade e, a partir disso, a resolução foi encaminhando-se para uma retomada na organização dos elementos que a compõe, realizando operações com os termos semelhantes. Posteriormente, utilizou-se a fatoração, simplificando a equação para o 2º grau, sendo resolvida logo em seguida.

Tal procedimento, alinha-se com algumas das habilidades propostas pela BNCC para o Ensino Fundamental II, uma vez que, os estudantes que seguiram por esse método demonstraram serem capazes de manipular expressões algébricas, fatorar equações, assim como resolver uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + c = 0$. Além disso, nota-se a competência em compreender e utilizar a linguagem algébrica, na qual, fizeram uso da notação para expor as funções em uma equação, de tal modo que fosse possível determinar o tempo necessário para obter a resposta correta.

O quadro a seguir (quadro 7), demonstra a quantidade de erros, acertos e resposta em branco para cada questão disposta no questionário desse estudo. Vale destacar que, foram

---

[26] Aproximadamente 29% dos estudantes escolheram esse método para se obter a solução do problema.

considerados como acertos as soluções que contemplaram as respostas corretas para cada questão, já os erros foram caraterizados a partir de resoluções equivocadas e incompletas, enquanto que a resposta em branco considerou-se as que houveram nenhuma resposta. Para tal, através desses dados, é possível traçar um panorama geral do desempenho dos estudantes diante do que foi proposto.

Quadro 7 – Distribuição dos acertos, erros e respostas em branco dos estudantes nas questões

Questionário - Tema	**Acertos**	**Erros**	**Resposta em branco**
1ª – Noção de igualdade	27	1	0
2ª - Sistema de equações e equação do 1º grau	21	6	1
3ª - letra a) - Representação da sequência	27	1	0
3ª - letra b) - Padrão da sequência	24	3	1
4ª – Função do 1º grau	5	19	4
5ª – Manipulação algébrica	6	15	7
Total	110	45	13

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao analisar este quadro, pode-se notar um bom desempenho na resolução diante das três primeiras questões, em especial, a primeira e a letra a) da terceira questão. Em contrapartida, as duas últimas questões, a quarta e a quinta, houve um declínio considerável no número de acertos. Diante desses resultados, acredita-se que tal ocorrência se deu devido ao fato das questões serem mais extensas e com mais informações a serem utilizadas se comparada com as demais, exigindo assim, uma interpretação e resolução mais aprofundada sobre as mesmas.

Além de tudo, pode-se enfatizar que, dentre todos os assuntos abordados, especialmente, nessas últimas questões, o nível de conhecimento e desenvoltura para realizar sua resolução era maior se comparado com as outras. Exigia-se além da organização dos dados fornecidos, uma interpretação deles no gráfico, podendo associar eventualmente a uma função de primeiro grau, ou então, parcialmente a uma variação de grandezas diretamente proporcionais, como é o caso da quarta questão.

Ademais, solicitava-se também uma aplicação da manipulação algébrica mais apurada, devendo entender que para as funções obterem um valor comum entre si precisariam, inicialmente, se igualar por meio de uma igualdade (=). Posteriormente, devia-se utilizar a fatoração e simplificar a equação que havia sido formada, realizar as operações entre os termos semelhantes, e por fim isolar a variável, obtendo dessa forma, o valor a que se buscava conseguir, nesse caso, na quinta questão.

Outrossim, destacamos no quadro 8, o desempenho dos estudantes ao utilizarem diferentes abordagens durante a resolução das questões propostas nessa pesquisa. Para tanto, consideramos como acertos os procedimentos dentro dessas abordagens que contemplaram a resposta correta, enquanto os erros, foram os que, não atingiram a solução correta ou a que obteve por incompleto. Além do mais, enfatizamos o nível dessas estratégias mediante a relação de compreensão e aplicação dos conceitos da álgebra previstos nos anos finais do Ensino Fundamental, as classificando em três níveis: Básico, intermediário e avançado[27].

Quadro 8 - Desempenho e nível dos estudantes mediante a abordagem utilizada para resolver as questões

Abordagem utilizada para resolver as questões	Nível do conhecimento dos estudantes em relação a álgebra	Acertos	Erros
Expressões numéricas com a operação soma	Básico	12	4
Expressões numéricas com a operação subtração	Básico	0	8
Expressões numéricas com a operação multiplicação	Básico	11	0
Expressões numéricas com a operação divisão	Básico	1	3
Omitiu o procedimento diante da solução apresentada	Básico	20	4
Regra de três	Intermediário	2	5
Expressão algébrica/equação do 1º grau	Intermediário	8	0
Sistema de equações	Avançado	3	0
Padrão na sequência que aumenta em 2 a cada figura	Intermediário	31	0
Sequência de números ímpares	Intermediário	7	0
Ao subtrair os termos em sequência obtém o padrão	Intermediário	1	0
A sequência é uma progressão geométrica	Básico	0	2
A sequência é uma progressão aritmética	Intermediário	5	1
O padrão depende da posição da figura	Intermediário	2	0
Princípio de uma função do 1º grau	Intermediário	5	0
Nas funções substitui a variável t por 0	Intermediário	0	8
Ignorou a variável t das funções	Básico	0	4
Manipulação algébrica	Avançado	6	3
Não fez nada	Básico	0	12
Total	-	114	54

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao observar o quadro, notamos que a maioria das abordagens feitas pelos estudantes contemplam o nível básico dos conceitos estipulados pela BNCC para a álgebra no Ensino Fundamental. Dentre elas, tem-se o uso abrangente, ou quase exclusivo, de operações simples da matemática, como, por exemplo, a soma e a multiplicação, nas quais, mesmo tendo uma compreensão ainda muito simplória, os estudantes demonstraram um desempenho satisfatório,

[27] Essa categorização foi baseada no que é estipulado pela BNCC para os anos escolares, assumindo que os do 9º ano são os mais complexos.

tendo, respectivamente, 12 acertos e 4 erros e, 11 acertos e 0 erros. Entretanto, ao observar as operações de subtração e divisão, percebe-se uma lacuna significativa entre os acertos e a quantidade dos que a utilizaram a fim de obter a resposta[28].

Diante desse contexto, a predominância dessas abordagens, podem indicar que os estudantes estão mais confortáveis com as operações triviais da matemática, supondo-se assim, que ainda não consolidaram por completo as habilidades que são fundamentais para atingir níveis de aplicação da álgebra mais complexos. Um bom exemplo para essa circunstância, é a omissão dos procedimentos diante das soluções apresentadas, tendo 20 acertos e 4 erros, o que por sua vez, sugere que, embora os estudantes consigam chegar nas respostas consideradas corretas, muitas vezes o fazem sem seguir algum método que seja estruturado sobre uma noção algébrica ou sem a plena compreensão dos conceitos envolvidos.

Por outro lado, ao seguir para as abordagens consideradas de nível intermediário, apesar do grande destaque para as estratégias que determinavam como conseguir obter a sequência numérica, seja ela por meio de um padrão que aumenta 2 unidades a cada figura[29], ou através da representação por números ímpares[30], houveram algumas em que os resultados foram desfavoráveis. Dentre eles, enfatizamos a que foi feita por intermédio da regra de três[31] e, a que substitui a variável t por 0 nas funções[32], as quais, indicam que os estudantes que seguiram por essas linhas de raciocínios provavelmente tem uma falta de compreensão sobre as proporções e uma incapacidade de identificar quando e como utilizá-las, além de um entendimento inadequado diante do papel que as variáveis representam nas funções.

Por fim, as estratégias intituladas de nível avançado exprimem uma quantidade pequena de respostas, assim como de erros. Para tal, tem-se as abordagens vinculadas à sistema de equações[33] e à manipulação algébrica[34], as quais, provavelmente devido a sua complexidade houve essa baixa na quantidade responsável por expressar as resoluções dos estudantes. Tal situação, sugere, possivelmente que, a maioria deles, não sentem confortáveis ou não sabem resolver problemas por meio de soluções que utilizem múltiplas variáveis, além de que, embora alguns estudantes tenham apresentado suas capacidades em manipular expressões algébricas,

---

[28] 0 acertos e 8 erros e, 1 acerto e 3 erros, respectivamente, para essas operações.
[29] Essa abordagem teve um total de 31 acertos e 0 erros.
[30] Essa estratégia obteve 7 acertos e 0 erros.
[31] A abordagem teve 2 acertos e 5 erros.
[32] A estratégia obteve 0 acertos e 8 erros.
[33] Essa abordagem teve 3 acertos e 0 erros
[34] Essa estratégia teve 6 acertos e 3 erros

alguns ainda cometem erros ao realizar operações como a fatoração, simplificação ou resolução de equações com múltiplos termos.

Em síntese, apesar dos estudantes demonstrarem uma certa familiaridade com algumas das operações primordiais para a compreensão da matemática, ainda há uma discrepância em relação as habilidades que permitem evoluir para níveis mais incorporados com os conceitos da álgebra. Para mais, a predominância que se faz com as abordagens consideradas básicas e a dificuldade em aplicar estratégias que são intermediárias e avançadas, sugerem uma possibilidade de um reflexo de ensino/aprendizagem que prioriza a memorização de procedimentos, assim como cálculos e fórmulas, em detrimento da compreensão por trás dos seus fundamentos e aplicabilidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, verificou-se que a transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio representa uma fase bastante significativa diante da trajetória escolar. Nela, os estudantes estão passando por uma fase de avanço tanto em nível escolar quanto em nível de desenvolvimento pessoal e social. Os conteúdos atingem um aprofundamento maior, cada vez mais exigindo-se uma compreensão abrangente e interligada com conceitos anteriormente abordados. Diante disso, a BNCC surge, nesse contexto, como uma base para construir o planejamento de ensino em diferentes etapas escolares, trazendo os assuntos que se fazem necessários em cada ano escolar, além das habilidades e competências a serem desenvolvidas.

Além disto, a BNCC propõe uma estrutura organizada com viés para uma desenvoltura que seja progressiva e coerente com essa trajetória de aprendizagem. Entretanto, é importante frisar que a implementação desse currículo não é um processo isento de desafios, pelo contrário, a efetivação de suas diretrizes depende de inúmeros fatores que devem se alinhar em prol de sua efetivação. Dentre eles, tem-se, por exemplo, os investimentos na formação de professores, a infraestrutura e recursos pedagógicos que as escolas dispõem, além do esforço coletivo entre todos que fazem parte da comunidade escolar, sejam pais, professores, estudantes, gestão ou coordenação da escola, todos devem estar comprometidos a fim de garantir um ensino, assim como uma aprendizagem acessível e de qualidade para todos.

Diante deste cenário, a presente pesquisa buscou compreender as concepções de estudantes que estão no 1° ano do Ensino Médio acerca dos assuntos de álgebra que a BNCC aborda nos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, foram selecionadas algumas competências para serem investigadas, procurando destacar a desenvoltura dos estudantes diante de questões que abrangem essas habilidades. Deste modo, abordamos habilidades necessárias para entender a noção de igualdade entre termos, equação, sistemas de equações e funções do 1° grau, sequência numérica e a manipulação algébrica para resolver expressões.

Tendo em mente esse contexto, conseguimos evidenciar o que os estudantes entendem sobre esses conceitos, além das dificuldades, acertos e erros ao longo da resolução das questões que foram propostas. Com base no exposto, observou-se que a maioria dos estudantes optaram por realizar os cálculos exclusivamente por meio de operações aritméticas, seja realizando somas, subtrações, multiplicações ou divisões dos valores que foram apresentados em cada questão. Tal abordagem evidenciou-se por estar muito atrelado a aritmética, com cálculos simples e, em alguns casos, apresentando equívocos devido a sua limitação diante da simbologia e da generalização (Elementos característicos de uma linguagem algébrica).

Além do mais, também observou-se que alguns estudantes optaram por realizar as soluções das questões através da regra de três, tentando estabelecer alguma relação entre os valores que eram apresentados, interligando-se, em certa parte, com a linguagem presente na álgebra. Enquanto isso, os demais estudantes fizeram o uso da estrutura algébrica para organizar as informações em equações e realizar manipulações. Para tal, percebeu-se uma compreensão bem aprofundada sobre a álgebra nessa última abordagem, contemplando desde equações até a simplificação de expressões.

Para mais, dentre essas abordagens, nota-se diferentes níveis de compreensão, que abrangem categorias entre iniciante (Noção ainda bem básica ou quase nenhuma sobre a álgebra), intermediário (Conseguem estruturar e aplicar alguns conceitos, mas ainda são incompletos ou com algumas falhas) e Avançado (Tem a capacidade bem apurada sobre a álgebra). Para tanto, nas três primeiras questões, que exigiam-se conhecimentos sobre equações, sistemas de equações e sequências, embora a maioria não tenha estruturado as informações adequadamente em uma linguagem algébrica, boa parte dos estudantes se sobressaíram e conseguiram atingir a resposta correta.

Contudo, na quarta e na quinta questão, em relação aos resultados obtidos a partir de suas soluções, houve um percentual significativo, aproximadamente 80% dos participantes não conseguiram atingir uma resposta que satisfizesse os pressupostos dessas questões. Diante disso, pode-se supor que os estudantes ainda estão muito interligados com a aritmética, em muitos casos, tentam resolver as questões através de operações básicas da matemática, como por exemplo a soma e a subtração, são poucos que aplicam os conceitos por trás da lógica algébrica.

Portanto, o estudo realizado aponta uma carência na aprendizagem dos conteúdos sobre álgebra que são destacados pela BNCC nos anos finais do Ensino Fundamental. Tal constatação levanta algumas questões importantes: Quais seriam os fatores que causam essa falha na aprendizagem? Os professores que recebem esses estudantes estão dando o devido auxílio a fim de suprir esse déficit? Quais são os métodos ou metodologias que os professores utilizam? Será que eles recapitulam os assuntos, trazem alguma dinâmica ou jogos para recuperar o que foi perdido?

Diante desse contexto, o estudo em questão poderia ser ampliado, visando contemplar o desenvolvimento de novas pesquisas sobre a compreensão e dificuldades dos estudantes diante da disciplina de matemática. Destacando assim, quais as principais causas para essas dificuldades e eventuais erros, além das possíveis estratégias aplicadas pelos professores a fim de contornar essa situação, de tal forma que possa apurar melhorias e adaptações com viés para uma construção efetiva dos estudantes não somente no campo da álgebra, mas também para outras áreas em que a matemática engloba.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. **Revista paranaense de educação matemática – RPEM**, Campo Mourão, Pr, v.6, n.10, p.34-60, jan.-jun. 2017.

BARBOSA, Elsa; BORRALHO, António. **Pensamento Algébrico e exploração de Padrões**. ProfMat, Encontro Nacional de Professores de Matemática. Viana do Castelo: APM, 2009. Disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/paroes/artigos/2009_14.pdf. Acesso em: 17 dez. 2023.

BÍBLIA. Antigo Testamento. Provérbio In: BÍBLIA. **Bíblia Sagrada:** Antigo e Novo Testamento. Traduzida em português por João Ferreira de Almeida. Revista Atualizada no Brasil. 2 ed. Barueri- SP: Sociedade Bíblica do Brasil, 2011. Cap. 16, vers. 3, p.1251.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COELHO, Flávio Ulhoa**. História da Álgebra.** ACMITEA. 25 de set. de 2023. Disponível em: https://acm-itea.org/historia-da-algebra/. Acesso em: 28 ago. 2024.

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Marcia. **A história da álgebra e o pensamento algébrico:** correlações com o ensino. Estudos Avançados, 32(94), 171–187, São Paulo, set./dez. 2018.]

DARELA, Eliane; CARDOSO, Marleide Coan; ROSA, Rosana Camilo da. **História da matemática:** livro didático. Revisão e atualização de conteúdo: Marleide Coan Cardoso, Rosana Camilo da Rosa; design instrucional: Karla Leonora Dahse Nunes, Roseli Rocha Moterle. – 3. ed. – Palhoça: UnisulVirtual, 295 p., 2011.

DOMINGUES, Joelza Ester. A Matemática egípcia no papiro de Rhind. **Ensinar História,** 2023. Disponível em: https://ensinarhistoria.com.br/a-matematica-egipcia-no-papiro-de-rhind/. Acesso em: 29 ago. 2024.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78–91, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384. Acesso em: 06 out. 2024.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6° edição, São Paulo: Editora Atlas S.A., 2008.

INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2010**, 2º dia - Caderno 7 - Azul - 2º Aplicação. 2010 Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/2010_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD7.pdf. Acesso em: 10 nov. 2024.

INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2020 digital.** 2º dia - Caderno 7 - Azul - Aplicação digital. 2020 Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_digital_D2_CD7.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

KHAN ACADEMY. **Lição 1:** O que são variáveis?. Curso: Prepare-se para o 7º ano, unidade 9. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/pt-mat-prep-7-ano-todo-conteudo/xa-2286493647249f2:introducao-a-variaveis/xa2286493647249f2:o-que-sao-variaveis/v/what-is-a-variable#:~:text=As%20vari%C3%A1veis%20da%20matem%C3%A1tica%20s-%C3%A3o,problemas%20com%20valores%20que%20variam. Acesso em: 12 fev. 2025.

KUHN, Malcus Cassiano; LIMA, Eveline de. Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática: REnCiMa**, São Paulo, volume 12, n. 3, p. 1-23, abr./jun. 2021.

LOPES, Suzany Rocha Teles. **O Ensino da Álgebra na Educação Básica sob um olhar de professores da rede Estadual de Goiás.** Dissertação (Mestrado em Matemática), Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás, PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 141 p. 2021.

MOL, Rogério Santos. **Introdução a história da matemática**. Centro de Apoio à Educação a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais (CAED-UFMG), Belo Horizonte, 2013.

OLIVEIRA, Tamara Sued Pinheiro de; LIMA, Ana Cristina de Souza; SILVA, Elieudo Nogueira. **Estudo da álgebra:** o desenvolvimento histórico da formalização simbólica. *In:* Número Especial – IV Seminário Cearense de História da Matemática. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 7, n. 20, p. 347 – 356, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2851. Acesso em: 27 ago. 2024.

PAIVA, Vera Lúcia Menezes de Oliveira. Reflexões sobre ética e pesquisa. **Revista Brasileira de Linguística Aplicada**, v. 5, nº 1, pág. 43-61, 2005. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbla/a/Y5kbpyyLpSpMkKcwJRbDbZf/?format=pdf&lang=pt&utm_source. Acesso em: 15 jan. 2025.

PAREDES, Eugênia Coelho; PECORA, Ana Rafaela. Questionando o futuro: As representações sociais de jovens estudantes. **Rev. Psicologia: Teoria e Prática**, edição especial, p. 49-65, 2004.

PONTE, João Pedro da. **Álgebra no currículo escolar**. Educação e Matemática. Nº 85, 2005.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Universidade de Lisboa, Direcção - Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular: DGIDC. Lisboa, 2009.

PRADO, Ivanildo Gomes do. **Ensino de Matemática:** O Ponto de Vista de Educadores e de seus Alunos sobre Aspectos da pratica pedagógica. Tese de Doutorado – Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências exatas (UNESP). Rio Claro, 2000.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar: Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: https://dlivros.com/livro/historia-matematica-tatiana-roque. Acesso em: 03 mar. 2025.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação.** 4. revista atual.: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Florianópolis 2005.

SOUZA, Jaibis Freitas de. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Rio de Janeiro, 2009.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** Realidade & Tecnologia - 6º ano: Ensino Fundamental (Anos Finais). 1º edição, São Paulo: FTD, 2018. Disponível em: https://issuu.com/editoraftd/docs/matematica-realidade-e-tecnologia-mp-6_divulgacao. Acesso em: 27 out. 2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** Realidade & Tecnologia - 7º ano: Ensino Fundamental (Anos Finais). 1º edição, São Paulo: FTD, 2018. Disponível em: https://issuu.com/editoraftd/docs/matematica-realidade-e-tecnologia-mp-7_divulgacao. Acesso em: 27 out. 2024.

SOUZA, Marcela Luciana Vilela de; LOPES, Sérgio Augusto Amaral; NASCIMENTO, Kleber Gonçalves do. **Álgebra:** Proposta da unidade temática na BNCC e desafios por sua trajetória ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020. E-book. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2021/02/ALGEBRA-PROPOSTA-DA-UNIDADE-TEMATICA-NA-BNCC-E-DESAFIOS-NA-SUA-TRAJETORIA-AO-LONGO-DOS-NOVE-ANOS-DO-ENSINO-FUNDAMENTAL.pdf. Acesso em: 10 nov. 2024.

UNICEF. **Panorama da distorção idade-série no brasil.** Brasília: UNICEF, 2018. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/media/461/file/Panorama_da_distorcao_idade-serie_no_Brasil.pdf. Acesso em 14 jan. 2025.

UNICEF. **O que fazemos.** UNICEF, [s.d.]. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/o-que-fazemos. Acesso em 14 jan. 2025.

REIS, Elisa Meirelles. **Brasil reduz distorção idade série, mas 13% dos estudantes do ensino fundamental público estão com dois ou mais anos de atraso escolar, alerta UNICEF**. UNICEF, 2024. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/comunicados-de-imprensa/brasil-reduz-distorcao-idade-serie. Acesso em 14 jan. 2025.

VAILATI, Janete de Souza; PACHECO, Edilson Roberto. **Usando a história da matemática no ensino da álgebra.** Guarapuava: UNICENTRO, 2008. Disponível em: http://www.dia-adiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-4.pdf. Acesso em: 27 set. 2024.