UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Túlio José de Souza Santos

Uma generalização da fórmula de Schneider para hipersuperfícies em espaços arbitrários e o teorema de Liebmann

Recife

2023

Túlio José de Souza Santos

Uma generalização da fórmula de Schneider para hipersuperfícies em espaços arbitrários e o teorema de Liebmann

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos

Recife

2023

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Santos, Túlio José de Souza.
Uma generalização da fórmula de Schneider para hipersuperfícies em espaços arbitrários e o teorema de Liebmann / Túlio José de Souza Santos. - Recife, 2023.
72 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2023.
Orientação: Fábio Reis dos Santos.
Inclui referências.

1. Hipersuperfícies; 2. Curvatura Gaussiana; 3. Teorema de Liebmann. I. Santos, Fábio Reis dos. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

TÚLIO JOSÉ DE SOUZA SANTOS

Uma generalização da fórmula de Schneider para hipersuperfícies em espaços arbitrários e o Teorema de Liebmann

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 15/12/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Prof^{a}. Dr^{a}. Sylvia Ferreira da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dedico a todos da minha família.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus por ter chegado até aqui. Posteriormente, agradeço ao meu pai Luciano, minha madrasta Nitinha, minha mãe Margarida, meu irmão mais velho Thales Henrique, meu irmão mais novo Thiago Luiz e a toda minha família pelo carinho, apoio, incentivo, cuidado que me deram ao longo dessa jornada.

Agradeço ao meu orientador professor Fábio Reis dos Santos por acreditar no meu potencial, pela paciência, por todo esforço, dedicação e pelo cuidado na minha pessoa. Também agradeço as contribuições feitas no meu trabalho pelos professores Henrique Fernandes de Lima, Marco Antonio Lázaro Velásquez e Sylvia Ferreira da Silva.

Agradeço a minha esposa Ana Karolina pelo carinho, apoio, compreensão e pelo nosso relacionamento. Agradeço a Alex, Matheus Henrique, Érick, Lucas, Rafael Souto, Rafael Cavalcanti, Hugo, Thays, Júnior e Neurandir por todo incetivo, união, dias de estudos e diversão durante todo programa de mestrado.

Agradeço a Júlio César da Silva Vieira por todos os conselhos, apoio, incentivo. Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação. Em particular, gostaria de agradecer ao professor e grande amigo Renato, obrigado por todo apoio durante toda essa jornada. Gostaria de agradecer a todos os amigos que fizeram parte diretamente ou indiretamente de todo o processo. Por fim, agradeço aos órgãos de fomento que tornaram essa conquista possível: a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

Uma fórmula do tipo Schneider para hipersuperfícies orientadas imersas em um espaço ambientes arbitrário foi desenvolvida. Para isto, a abordagem se baseia em uma boa aplicação da teoria de tensores em variedades Riemannianas a qual foi desenvolvida por Aledo, Alías e Romero para estudo de hipersuperfícies orientadas imersas em formas espaciais Riemannianas. Como aplicação foi obtida uma nova demonstração para o teorema clássico de Liebmann que assegura que as superfícies fechadas com curvatura Gaussiana constante imersas no Espaço Euclidiano, no espaço hiperbólico, ou em um hemisfério aberto são as esferas totalmente umbílicas.

Palavras-chaves: Hipersuperfícies, curvatura Gaussiana, teorema de Liebmann.

ABSTRACT

A Schneider-type formula for oriented hypersurfaces immersed in arbitrary ambient space has been developed. For this, the approach is based on a good application of tensor theory in Riemannian manifolds, which was developed by Aledo, Alías, and Romero to study oriented hypersurfaces immersed in Riemannian space forms. As an application, a new proof was obtained for Liebmann's classical theorem, which ensures that closed surfaces with constant Gaussian curvature immersed in the Euclidean space, in the hyperbolic space, or in an open hemisphere are the umbilical spheres.

Keywords: Hypersurfaces, Gaussian curvature, Liebmann's theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao final dos anos 60, durante o estudo de hipersuperfícies imersas no espaço Euclidiano n-dimensional, (SCHNEIDER, 1967) obteve uma fórmula que expressava a curvatura escalar de uma tal hipersuperfície em termos da segunda forma fundamental utilizando a técnica de ginástica de índices. Utilizando técnicas provinientes do estudo de tensores, algumas décadas depois, (ALEDO; ALÍAS; ROMERO, 2005) estendeu a fórmula obtida por Schneider para hipersuperfícies orientadas imersas em uma forma espacial Riemanniana. Pouco depois, (HAESEN, 2007), aplicando as ideias desenvolvidas por (ALEDO; ALÍAS; ROMERO, 2005), obteve um extensão da fórmula para superfícies imersas em um espaço produto warped.

No sentido de obter aplicações das fórmulas supracitadas, convém recordar que (HADAMARD, 1897) mostrou que qualquer superfície regular compacta, conexa com curvatura Gaussiana positiva no espaço Euclidiano tridimensional $\mathbb{E}^3$ é topologicamente uma esfera. Este resultado motivou a busca de condições as quais podia-se concluir que tal superfície era de fato uma esfera redonda (isto é, uma esfera com a métrica Euclidiana). Nesse sentido, (LIEBMANN, 1899) provou o seguinte resultado:

"*As únicas superfícies compactas e conexas com curvatura Gaussiana constante imersas em $\mathbb{E}^3$ são as esferas redondas.*"

Uma prova interessante deste resultado é baseada na aplicação adequada da Fórmula de Minkowski (ALÍAS, 2006). Pouco depois, (HILBERT, 1909) deu uma prova mais simples desse resultado. Além disso, ele mostrou que não existem superfícies completas com curvatura gaussiana negativa imersas no espaço Euclidiano 3-dimensional. Posteriormente, houve diferentes generalizações do teorema de Liebmann de vários pontos de vista para superfícies, e mais geralmente hipersuperfícies, no espaço euclidiano (KOUTROUFIOTIS, 1974), (ROS, 1988), (ROS, 1987), (SCHNEIDER, 1972) e (SIMON, 1976), no espaço hiperbólico ou em um hemisfério aberto (MONTIEL; ROS, 1991).

Motivados pela digressão acima, o objetivo principal deste trabalho de dissertação é fornecer uma generalização da técnica desenvolvida por (ALEDO; ALÍAS; ROMERO, 2005) para o estudo de hipersuperfícies imersas em espaços ambientes arbitrários. Como aplicação, para o caso de superfícies compactas com curvatura Gaussiana constante mostramos que:

"As únicas superfícies as quais estão imersas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, ou no hemisfério aberto $\mathbb{S}^3_+$ com curvatura Gaussiana constante são as esferas totalmente umbílicas."

De agora em diante daremos a descrição dos outros capítulos que compõem este trabalho. No Capítulo 2 trataremos de conceitos básicos que serão uteis para obtenção do resultado principal desta dissertação, como por exemplo as equações fundamentais para o caso das hipersuperfícies.

Já no Capítulo 3, inciamos mostrando resultados auxiliares que serão fundamentais para a demonstração do teorema principal e como subproduto destes resultados obtemos uma generalização da fórmula de Schneider. Isto é, mostramos (veja Teorema 3.1.1) a

Teorema 1.0.1. *Seja M^n uma hipersuperfície convexa imersa em $\overline{M}^{n+1}$. Então a curvatura escalar S_{II} da métrica Riemanniana definida pela segunda forma fundamental II é dada por*

$$S_{II} = n(n-1)H + \|T\|^2_{II} - \frac{1}{4G^2}\|\nabla^{II}G\|^2_{II} + F(\overline{R}), \tag{1.1}$$

onde $F(\overline{R})$ é uma função real dependendo do tensor curvatura $\overline{R}$ tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$ definida em (3.43)*, H e G denotam as curvaturas média e de Gauss-Kronecker de M^n, respectivamente, $\|T\|^2_{II}$ é o quadrado do comprimento do tensor diferença $T = \nabla^{II} - \nabla$ com respeito a métrica II, e $\nabla^{II}G$ denota o gradiente de G com respeito a métrica II.*

No caso em que a variedade ambiente é a forma espacial Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante $c \in \{-1, 0, 1\}$, a função $F(\overline{R})$ se escreve como

$$F(\overline{R}) = \frac{c(n-1)\sigma_{n-1}}{G},$$

onde σ_{n-1} é a $(n-1)$-ésima função simétrica elementar das curvaturas principais de M^n. Com isso, reobtemos a fórmula do Schneider devido a Aledo, Alías e Romero (veja Corolário 3.1.5):

Corolário 1.0.1. *Com a notação do Teorema 1.0.1, se M^n é uma hipersuperfície orientada de $\overline{M}^{n+1}(c)$, então*

$$S_{II} = (n-1)\left(nH + \frac{c\sigma_{n-1}}{G}\right) + \|T\|^2_{II} - \frac{1}{4G^2}\|\nabla^{II}G\|^2_{II}. \tag{1.2}$$

Como aplicação mostramos a versão geral do teorema de Liebmann.

Teorema 1.0.2. *As únicas superfícies compactas as quais estão imersas no espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^3$, *no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^3$, *ou no hemisfério aberto* $\mathbb{S}^3_+$ *com curvatura Gaussiana constante são as esferas totalmente umbílicas.*

Esta dissertação teve como base principal o artigo "*A new proof of Liebmann classical theorem for surfaces in space forms*"devido à J.A. Aledo, L.J. Alías e A. Romero, publicado em 2005 no Rocky Mountain Journal Mathematics.

2 PRELIMINARES

2.1 ELEMENTOS DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Nesta seção introduziremos a noção de variedade diferenciável. Para um estudo minucioso sobre esse tema pode-se consultar (CARMO, 2008), (TU, 2011) e (O'NEILL, 1983).

Definição 2.1.1. *Dizemos que um conjunto M^n não vazio é uma variedade diferenciável n-dimensional, se existir uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ definidos em abertos U_α de $\mathbb{R}^n$, tais que*

1) *M^n é Hausdorff e possui base enumerável, isto significa que para quaisquer dois pontos de M^n tem vizinhanças disjuntas e que M^n pode ser coberta por uma quantidade enumerável de abertos $x_\alpha(U_\alpha)$, respectivamente.*

2) $M = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha(U_\alpha)$

3) *Para quaisquer α, β tais que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ e $x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$ são abertos do $\mathbb{R}^n$ e as aplicações*

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}) \longrightarrow x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \quad \text{e} \quad x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \longrightarrow x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

são diferenciáveis.

Denotaremos por M^n uma variedade diferenciável de dimensão n. Dizemos que o par (U_α, x_α), com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, é chamado de parametrização de M^n em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada em p. A coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é chamada de atlas de M^n. Um atlas $\mathcal{A}$ de M^n da origem a um único atlas maximal $\tilde{\mathcal{A}}$, dado por

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{x : U \longrightarrow M^n; x^{-1} \circ x_\alpha \ \text{ e } \ x_\alpha^{-1} \circ x \text{ são diferenciáveis para todo } \alpha \in \Lambda\}.$$

Assim, esse atlas maximal é dito estrutura diferenciável para M^n.

Exemplo 2.1.1. *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável com uma única parametrização $(\mathbb{R}^n, Id)$, onde Id é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.1.2. *A esfera unitária $\mathbb{S}^n$ é uma variedade diferenciável cujas parametrizações são $(\mathbb{S}^n\backslash\{N\}, x_N)$ e $(\mathbb{S}^n\backslash\{S\}, x_S)$, onde x_N e x_S representam as projeções estereográficas relativas ao polos norte e sul, respectivamente.*

Definição 2.1.2. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M^n \longrightarrow N^m$ é diferenciável em $p \in M^n$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow N^m$ em $F(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ em p tal que $F(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ F \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A composição $y^{-1} \circ F \circ x$ é chamada representação local de F em relação as parametrizações (V, y) e (U, x). Dizemos que F é diferenciável em um aberto de M^n se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Proposição 2.1.1. *A definição 2.1.2 independe da escolha da parametrização.*

Definição 2.1.3. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma curva diferenciável em M^n é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M^n$ de um intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ em M^n. Se $\alpha(0) = p \in M^n$, o vetor tangente à curva α em $t = 0$ é o funcional $\alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0}$$

onde $\mathcal{C}^\infty(M^n)$ é o conjunto das funções diferenciáveis em M^n.

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M^n$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M^n em p será indicado por T_pM^n. Se escolhermos uma parametrização $x : U \longrightarrow M^n$ com $x(0) = p$, então para $q = (x_1, \cdots, x_n) \in U$ podemos exprimir a função f e a curva α nessa parametrização por

$$f \circ x(q) = f(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{e} \quad x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)),$$

respectivamente. Daí

$$\begin{aligned}\alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \cdots, x_n(t))\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) f.\end{aligned}$$

Sendo assim, denotando $\partial_i = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, a escolha da parametrização x determina uma base associada $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ em T_pM chamada base coordenada.

Proposição 2.1.2. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis e seja $F : M^n \longrightarrow N^m$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M^n$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M^n$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A aplicação $dF_p : T_pM^n \longrightarrow T_{F(p)}N^m$ dada por $dF_p(v) = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)\Big|_{t=0}$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α, tal aplicação é chamada de diferencial de F em p.*

Definição 2.1.4. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M^n \longrightarrow N^m$ é um difeomorfismo se ela é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável. F é um difeomorfismo local em $p \in M^n$ se existem vizinhanças U de p e V de $F(p)$ tais que $F : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Como aplicação direta do Teorema da Função Inversa no $\mathbb{R}^n$, temos

Teorema 2.1.1. *(da Aplicação Inversa). Seja $F : M^n \longrightarrow N^m$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis e seja $p \in M^n$ tal que $dF_p : T_pM^n \longrightarrow T_{F(p)}N^m$ é um isomorfismo. Então F é um difeomorfismo local em p.*

As definições que seguem serão relevantes para o estudo de hipersuperfícies, o qual veremos mais adiante.

Definição 2.1.5. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis com $m > n$. Dizemos que a aplicação diferenciável $F : M^n \longrightarrow N^m$ é uma imersão se $dF_p : T_pM^n \longrightarrow T_{F(p)}N^m$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se além disto, F é um homeomorfismo sobre sua imagem, com $F(M^n)$ tendo a topologia induzida por N^m, então dizemos que F é um mergulho. Se $M^n \subset N^m$ a aplicação inclusão $i : M^n \hookrightarrow N^m$ é um mergulho.*

Observe que, se F é uma imersão (mergulho), $F(M)$ é chamada de subvariedade imersa (mergulhada), além disso a diferença $m - n$ é chamada de codimensão da imersão F.

Exemplo 2.1.3. *Uma parametrização $x : U \longrightarrow M^2$ de uma superfície regular $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma imersão, por definição.*

Como aplicação do Teorema da Aplicação Inversa 2.1.1, obtém-se os seguintes resultados

Proposição 2.1.3. *Seja $F : M^n \longrightarrow N^m$ uma aplicação diferenciável entre variedades com $n \geq m$ e q valor regular de F. Então o conjunto $F^{-1}(q) \subset M^n$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão $n - m$.*

Proposição 2.1.4. *Seja $F : M^n \longrightarrow N^m$, com $m \geq n$, uma imersão entre variedades. Então para cada ponto $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M^n$ de p tal que a restrição $F\big|_V : V \longrightarrow N^m$ é um mergulho.*

Recorde que a cada ponto $p \in M^n$, associamos um espaço tangente T_pM, denotaremos por TM a união disjunta de tais espaços. Mais precisamente, definimos:

$$TM = \bigcup_{p\in M} (\{p\} \times T_pM).$$

O conjunto TM é chamado o fibrado tangente de M^n. A demonstração do teorema que segue pode ser encontrada no capítulo 0 de (CARMO, 2008).

Teorema 2.1.2. *Seja M^n uma variedade diferenciável. O fibrado tangente TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.*

Uma das motivações para termos introduzido o fibrado tangente é a noção de campo vetorial definido em uma variedade diferenciável M^n.

Definição 2.1.6. *Um campo vetorial numa variedade diferenciável M^n é uma aplicação $X : M^n \longrightarrow TM$ que associa a cada ponto $p \in M^n$ um vetor $X(p) \in T_pM$. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M^n \longrightarrow TM$ é diferenciável.*

Em coordenadas, considere uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\partial_i,$$

onde cada $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função em U e $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ é a base associada a x. Deste modo, X é diferenciável se, e somente se, a_i for diferenciável para todo $i = 1, \ldots, n$.

Neste momento convém introduzir a noção de orientação.

Definição 2.1.7. *Dizemos que uma variedade diferenciável M^n é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

(i) para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (i) é uma orientação para M^n. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição (i).

Exemplo 2.1.4. *a) Toda variedade cujo atlas possui uma única parametrização é orientável, pois o atlas consistindo desta única parametrização possui como determinante Jacobiano da mudança de coordenadas positivo.*

b) Se M^n pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de modo que $V_1 \cap V_2$ é conexa, então M^n é orientável. Pois, como o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é não nulo, ele não muda de sinal em $V_1 \cap V_2$; se é negativo em um ponto, basta trocar a ordem das variáveis em uma das parametrizações, para mudar o sinal do determinante e assim obter um atlas.

c) As parametrizações do exemplo (2.1.2) *se intersectam ao longo de um conjunto conexo, logo $\mathbb{S}^n$ é orientável.*

Uma variedade que não satisfaz a condição (i) é dita não orientável. Encerraremos esta seção definindo o colchete de Lie de dois campos, bem como algumas de suas propriedades. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M^n.

Definição 2.1.8. *Sejam X e Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos o colchete de Lie dos campos X e Y, denotado por $[X, Y]$ por*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

Proposição 2.1.5. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e sejam*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j$$

as expressões de X e Y associadas a um sistema de coordenadas locais $x : U \longrightarrow M^n$. Então existe um único campo de vetores $[X, Y]$, dado pela definição 2.1.8, cuja expressão em coordenadas locais é

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i \partial_i (b_j) - b_i \partial_i (a_j)) \partial_j.$$

Proposição 2.1.6. *Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas*

1) Anticomutatividade: $[X, Y] = -[Y, X]$;

2) $\mathbb{R}$*-linearidade:* $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$*;*

3) $[fX,gY]=fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X$*;*

4) Identidade de Jacobi: $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$.

2.2 MÉTRICAS SEMI-RIEMANNIANAS

Definição 2.2.1. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-Riemanniana em M^n é uma aplicação que leva suavemente cada ponto $p\in M^n$ um produto escalar $g_p=\langle\ ,\ \rangle_p$ em T_pM e o índice ν de g_p é o mesmo para todo $p\in T_pM$. Ou seja, g_p é uma aplicação suave que satisfaz*

(i) $g_p(u,v)=g_p(v,u)$*, para todos* $u,v\in T_pM$*;*

(ii) $g_p(u,v)=0$*, para todo* $v\in T_pM$*, implica* $u=0$*;*

(iii) $\text{ind}\,T_pM=\ \text{ind}\,T_qM$*, para todos* $p,q\in M$ *com* $p\neq q$.

Dizemos que uma variedade é semi-Riemanniana, quando é diferenciável e está munida com uma métrica semi-Riemanniana.

Exemplo 2.2.1. *a) Uma variedade Riemanniana é uma variedade semi-Riemanniana de índice $\nu=0$;*

b) Uma variedade semi-Riemanniana de índice $\nu=1$ é dita variedade Lorentziana (ou variedade de Lorentz);

c) Para $0\leq\nu\leq n$, via identificação do $\mathbb{R}^n_\nu$ com $T_p(\mathbb{R}^n_\nu)$, escrevemos $u,v\in\mathbb{R}^n_\nu$ como

$$u=\sum_{i=1}^{n}u^i\partial_i \quad e \quad v=\sum_{i=1}^{n}v^i\partial_i.$$

A métrica dada por

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n-\nu}u^iv^i-\sum_{i=n-\nu+1}^{n}u^iv^i \tag{2.1}$$

é uma métrica semi-Riemanniana que resulta no espaço semi-euclidiano $\mathbb{R}^n_\nu$. Quando $\nu=0$, temos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. No caso em que $\nu=1$ e $n\geq 2$, $\mathbb{R}^n_\nu=\mathbb{L}^n$ é chamado de espaço Lorentz-Minkowski n-dimensional.

Definição 2.2.2. *Seja M^n variedade semi-Riemanniana. Um vetor tangente v em M^n é dito*

(1) tipo-espaço, se $\langle v, v\rangle > 0$ ou se $v = 0$;

(2) nulo, se $\langle v, v\rangle = 0$ e $v \neq 0$;

(3) tipo-tempo, se $\langle v, v\rangle < 0$.

O conjunto

$$\mathcal{C}_p = \{v \in T_pM^n; \langle v, v\rangle = 0, v \neq 0\}$$

de todos os vetores nulos de T_pM^n é chamado cone nulo em $p \in M^n$. No caso de uma variedade de Lorentz, os vetores nulos são chamados de vetores tipo-luz e o cone nulo de cone de luz.

Com respeito aos vetores tipo-tempo, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa)**.** *Se $u, v \in V$ vetores tipo-tempo, então*

1. *$|\langle u, v\rangle| \geq |u||v|$ e a igualdade ocorre se, e somente se, u e v são colineares.*

2. *Existe um número real não negativo $\eta(u, v)$, chamado ângulo hiperbólico entre u e v tal que*
$$\langle u, v\rangle = -|u||v| \cosh \eta(u, v).$$

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $w \in span\{u\}^{\perp}$ tal que $v = au + w$. Então

$$\langle v, v\rangle = \langle au + w, au + w\rangle = a^2\langle u, u\rangle + 2a\langle u, w\rangle + \langle w, w\rangle = a^2\langle u, u\rangle + \langle w, w\rangle.$$

Por outro lado, como v é tipo-tempo, segue que $span\{u\}^{\perp}$ é tipo-espaço e dai, w é tipo-espaço. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle^2 &= a^2\langle u, u\rangle^2 \\
&= \langle u, u\rangle \left(\langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle\right) \\
&= \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, u\rangle\langle w, w\rangle \\
&\geq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \\
&= |u||v|,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade acima foi obtida do fato de que $\langle u, u\rangle < 0$ e $\langle w, w\rangle \geq 0$.

No que a igualdade ocorre se, e somente se, $w = 0$, isto é, se, e somente se, $u = av$. $\square$

Lema 2.2.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana com métrica Riemanniana $\langle \, , \rangle$, $p \in M^n$ e $A : T_pM \to T_pM$ é um operador linear, autoadjunto e inversível. Então a aplicação $h : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$h(u, v) = \langle A(u), v\rangle, \quad u, v \in T_pM, \tag{2.2}$$

define uma métrica semi-Riemanniana em cada espaço tangente T_pM.

Demonstração. Basta mostrar que a aplicação h, como definida em (2.2), satisfaz as três condições da Definição 2.1.2. Como A é operador autoadjunto, sabemos que $\langle A(u), v\rangle = \langle u, A(v)\rangle$, para todos $u, v \in T_pM$. Sendo assim,

$$h(u, v) = \langle A(u), v\rangle = \langle u, A(v)\rangle = \langle A(v), u\rangle = h(v, u)$$

mostrando que h satisfaz (i) na Definição 2.1.2. Além disso, por A ser inversível, temos que A é uma bijeção, isto é, Ker $A = \{0\}$ ou equivalentemente $A(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Sabendo disso, se $h(u, v) = 0$ para todo $v \in T_pM$, temos

$$\langle A(u), v\rangle = 0,$$

ou seja, $A(u) = 0$, o que implica que $u = 0$. Por fim, como $\langle \, , \rangle$ define uma métrica Riemanniana em M^n e A é simétrico e inversível para todo $p \in M^n$, a condição (iii) da Definição 2.1.2 é satisfeita. Portanto, mostramos o que desejávamos. $\square$

A noção familiar de comprimento de arco de um segmento de curva no espaço Euclidiano generaliza de forma natural.

Definição 2.2.3. *Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow M^n$ curva suave por partes definida em uma variedade semi-Riemanniana M^n. O comprimento de arco da curva α é dado por*

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds.$$

No espaço Euclidiano, a distância $d(p, q) = |p - q|$ entre dois pontos p e q também pode ser definida como o comprimento do segmento de curva mais curta unindo-os, ou seja, o segmento de reta de p a q. Mas, em $\mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$, por exemplo, a distância entre os pontos $p = (-1, 0)$ e $q = (1, 0)$ não é dado pelo segmento de reta mais curto, uma vez que o ponto $(0, 0)$ não faz parte do conjunto em questão. Entretanto, a seguinte modificação funciona de maneira geral.

Definição 2.2.4. *Para todos os pontos p e q de uma variedade Riemanniana conexa M^n, a distância Riemanniana $d(p,q)$ de p a q é o maior limite inferior de $\{L(\alpha) : \alpha \in \omega(p,q)\}$, onde $\omega(p,q)$ é o conjunto de todas os segmentos de curvas suaves por partes em M^n de p a q.*

Proposição 2.2.2. *Para uma variedade Riemanniana conexa M^n a função distância Riemanniana $d : M^n \times M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica em M^n, isto é, para todo $p, q, r \in M^n$:*

1) $d(p,q) \geq 0$ e $d(p,q) = 0$ se e somente se $p = q$ (positivo definida);

2) $d(p,q) = d(q,p)$ (simetria);

3) $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$ (desigualdade triangular).

Proposição 2.2.3. *Fixado $x \in M^n$, a função $d_x : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $d_x(p) = d(p,x)$ é contínua.*

Exemplo 2.2.2. *Seja $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço de Minkowski de dimensão $n+1$ dotado de coordenadas canônicas $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ e a métrica Lorentziana dada por (2.1). O espaço hiperbólico é a hiperquádrica de $\mathbb{L}^{n+1}$ formado pelos vetores tipo-tempo unitários,*

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, x\rangle = -1 \ \text{e} \ x_{n+1} > 0\}.$$

Sejam x, y vetores em $\mathbb{H}^n$ e seja $\eta(x,y)$ o ângulo hiperbólico entre os vetores tipo-tempo x e y. A distância hiperbólica entre x e y é dada por

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\mapsto d_{\mathbb{H}}(x,y) = \eta(x,y). \end{aligned}$$

Como $\langle x, y\rangle = -|x||y| \cosh \eta(x,y)$, temos

$$d_{\mathbb{H}}(x,y) = \cosh^{-1}(-\langle x, y\rangle). \tag{2.3}$$

Antes de mostrar que $d_{\mathbb{H}}$ é uma métrica em $\mathbb{H}^n$, faremos uma rápida digressão sobre produto vetorial em $\mathbb{L}^3$. Para maiores detalhes indicamos (RATCLIFFE, 2010).

Sejam $x, y \in \mathbb{L}^3$ e seja

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O produto vetorial Lorentziano de x e y é definido por

$$x \wedge_1 y = J(x \wedge y).$$

Veja que $x \wedge_1 y$ é ortogonal a x e y com respeito a métrica Lorentziana, pois

$$\langle x, x \wedge_1 y\rangle = \langle x, J(x \wedge y)\rangle = \langle x, x \wedge y\rangle = 0$$
$$\langle y, x \wedge_1 y\rangle = \langle y, J(x \wedge y)\rangle = \langle y, x \wedge y\rangle = 0.$$

Usando a seguinte relação

$$x \wedge_1 y = J(y) \wedge J(x),$$

o próximo resultado elenca propriedades similares ao produto vetorial Euclidiano

Lema 2.2.2. *Se x, y, z, w são vetores em $\mathbb{L}^3$, então*

1. $x \wedge_1 y = -y \wedge_1 x$;
2. $\langle (x \wedge_1 y), z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;
3. $x \wedge_1 (y \wedge_1 z) = \langle x, y\rangle z - \langle z, x\rangle y$;
4. $\langle x \wedge_1 y, z \wedge_1 w\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, w\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle y, w\rangle & \langle y, z\rangle \end{vmatrix}$.

Além disso, também temos as propriedades

Lema 2.2.3. *Sejam x, y vetores em $\mathbb{L}^3$. Então*

1. *Se x, y são vetores tipo-tempo linearmente independentes, então $x \wedge_1 y$ é tipo-espaço e vale $|x \wedge_1 y| = |x||y| \sinh \eta(x, y)$.*
2. *Se x, y são vetores tipo espaço, então $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$ se, e somente se, $x \wedge_1 y$ é tipo-tempo.*

Exemplo 2.2.3. *A distância hiperbólica $d_{\mathbb{H}}$ define uma métrica em $\mathbb{H}^n$.*

Com efeito, para mostrar que a função definida acima define uma distância em $\mathbb{H}^n$, basta verificar as três condições da Proposição 2.2.2. Sendo assim,

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh^{-1}(-\langle x, y\rangle) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$$

o que mostra a condição 1*. A condição* 2 *é satisfeita, pois* $\langle\, ,\rangle$ *define uma métrica. Por fim, para mostrar a desigualdade triangular. Da teoria de ação de grupos, temos que as transformações positivas de Lorentz de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *atuam em* $\mathbb{H}^n$ *e obviamente preservar distâncias hiperbólicas. Assim, podemos transformar* x, y, z *por uma transformação positiva de Lorentz. Agora, os três vetores* x, y, z *geram um subespaço de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *de dimensão no máximo três. Pelo (RATCLIFFE, 2010, Teorema 3.1.6.), podemos assumir que* x, y, z *estão em um subespaço de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *gerado pelos vetores* e_1, e_2, e_3*. Desse modo, podemos considerar que* $n = 2$*. Logo, pelo Lema 2.2.3*

$$|x \wedge_1 y| = \sinh \eta(x, y) \quad e \quad |y \wedge_1 z| = \sinh \eta(y, z).$$

Uma vez que y *é ortogonal à* $x \wedge_1 y$ *e* $y \wedge_1 z$*, os vetores* y *e* $(x \wedge_1 y) \wedge_1 (y \wedge_1 z)$ *são linearmente independentes. Portanto,* $(x \wedge_1 y) \wedge_1 (y \wedge_1 z)$ *ou é zero ou é tipo-tempo. Logo pelo Lema 2.2.3*

$$|\langle (x \wedge_1 y), (y \wedge_1 z)\rangle| \leq |x \wedge_1 y||y \wedge_1 z|.$$

Juntando tudo isso, junto com o Lema 2.2.2, temos

$$\begin{aligned}(\eta(x, y) + \eta(y, z)) &= \cosh \eta(x, y) \cosh \eta(y, z) + \sinh \eta(x, y) \sinh \eta(y, z) \\ &= \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle + |x \wedge_1 y||y \wedge_1 z| \\ &\geq \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle + \langle x \wedge_1 y, y \wedge_1 z\rangle \\ &= \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle + (\langle x, z\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle) \\ &= -\langle x, z\rangle = \cosh \eta(x, z).\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\eta(x, z) \leq \eta(x, y) + \eta(y, z).$$

Retornando à (2.3)*, obtemos o desejado.*

Exemplo 2.2.4. *Sejam* x, y *vetores em* $\mathbb{S}^n$ *e seja* $\theta(x, y)$ *o ângulo Euclidiano entre os vetores* x, y*. A distância esférica entre* x, y *é definida como sendo a função real*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \theta(x, y), \end{aligned}$$

onde $\theta(x, y) = cos^{-1}(\langle x, y\rangle)$*. Note que*

$$0 \leq d_{\mathbb{S}}(x, y) \leq \pi,$$

e $d_{\mathbb{S}}(x,y)=\pi$ *se, e somente se,* $y=-x$, *isto é, se são antípodas. Veremos agora que* $d_{\mathbb{S}}$ *define uma métrica em* $\mathbb{S}^n$.

De fato, não é difícil de ver que $d_{\mathbb{S}}$ *é não negativa e que é simétrica. Analogamente ao caso* $\mathbb{H}^n$, *para a desigualdade triangular, assuma que* x,y,z *estão em um subespaço de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *gerado pelos vetores* e_1,e_2,e_3. *Desse modo, podemos assumir que* $n=2$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\cos(\theta(x,y)+\theta(y,z)) &= \cos\theta(x,y)\cos\theta(y,z)-\sin\theta(x,y)\sin\theta(y,z)\\
&= \langle x,y\rangle\langle y,z\rangle-|x\wedge y||y\wedge z|\\
&\leq \langle x,y\rangle\langle y,z\rangle-\langle x\wedge y,y\wedge z\rangle\\
&= \langle x,y\rangle\langle y,z\rangle-(\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle-\langle x,y\rangle\langle y,y\rangle)\\
&= \langle x,z\rangle=\cos\theta(x,z).
\end{aligned}$$

Tomando a função inversa do cosseno, concluímos que

$$d_{\mathbb{S}}(x,z)\leq d_{\mathbb{S}}(x,y)+d_{\mathbb{S}}(y,z).$$

Para concluir esta seção, vamos mostrar como uma métrica Riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M^n. Para isso, considere $p\in M^n$ e $x:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow M^n$ uma parametrização, com $p\in x(U)$, compatível com a orientação de M^n. Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal positiva de T_pM e escrevamos $\{\partial x/\partial x_1,\ldots,\partial x/\partial x_n\}$ a base associada a T_pM^n como

$$\partial x/\partial x_i=X_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_k.$$

Então,

$$g_{ij}=\langle X_i,X_j\rangle=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ik}a_{jl}\langle e_k,e_l\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk},$$

onde utilizamos o fato de $\langle e_k,e_l\rangle=0$ se $l\neq k$ e $\langle e_k,e_l\rangle=1$ se $l=k$. Desde que $vol(e_1,\ldots,e_n)=1$, teremos

$$\mathrm{vol}(X_1,\ldots,X_n)=\mathrm{vol}(e_1,\ldots,e_n)\cdot\det(a_{ij})=\det(a_{ij})=\sqrt{\det(g_{ij})}. \tag{2.4}$$

Se $y:V\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow M^n$ é uma outra parametrização, com $p\in y(V)$, compatível com a orientação de M^n, sendo $\{\partial y/\partial y_1,\ldots,\partial y/\partial y_n\}$ a base associada, com $Y_i=\partial y/\partial y_i$ e $h_{ij}=\langle Y_i,Y_j\rangle$, teremos a partir de (2.4),

$$\sqrt{\det(g_{ij})}=\mathrm{vol}(X_1,\ldots,X_n)=J\ \mathrm{vol}(Y_1,\ldots,Y_n)=J\sqrt{\det(h_{ij})}, \tag{2.5}$$

onde J é o determinante positivo da matriz mudança de coordenadas de U para V. Seja agora $D \subset M^n$ um conjunto aberto, conexo com fecho compacto. Suponha que D está contido em uma vizinhança coordenada $x(U)$ de uma parametrização $x : U \longrightarrow M^n$ compatível com a orientação de M^n e que a fronteira de $x^1(D) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Então, definimos o volume de D por

$$\mathrm{vol}(D) = \int_{x^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \ldots dx_n. \tag{2.6}$$

Afirmamos que a expressão acima está bem definida. De fato, por (2.5) para outra parametrização y temos

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(D) &= \int_{x^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_{y^{-1}(D)} \sqrt{\det(h_{ij})}Jdx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_{y^{-1}(D)} \sqrt{\det(h_{ij})}dy_1 \ldots dy_n.\end{aligned}$$

Para definir volume de uma região D que não está contida em alguma vizinhança coordenada, então tomamos uma partição da unidade $\{\varphi_i\}$ subordinada a uma cobertura finita de D por vizinhanças coordenadas $x(U_i)$ e definimos

$$\mathrm{vol}(D) = \sum_i \int_{x_i^{-1}(U_i)} \varphi_i \sqrt{\det(g_{ij})}dx_{i1} \ldots dx_{in}$$

que não depende da escolha da partição $\{\varphi_i\}$.

O integrando $\sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \ldots dx_n$ em (2.6) é uma forma diferencial positiva de grau n, chamada *forma de volume de* M^n e denotada por dM.

2.3 A CONEXÃO DE LEVI-CIVITA

A conexão é uma importante ferramenta na geometria diferencial. Ela define uma maneira de calcular a derivada covariante de um campo vetorial em um espaço semi-Riemanniano.

Definição 2.3.1. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M^n *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j,$$

onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ formam uma base para T_pM. Daí,

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i}\left(\sum_j y_j X_j\right)\\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j.\end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, temos

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)\right) X_k. \tag{2.7}$$

Definição 2.3.2. *Dizemos que uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M^n *é compatível com a métrica sempre que*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

e simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Podemos agora enunciar e provar o teorema fundamental desta seção

Teorema 2.3.1. *(Levi-Civita). Dada uma variedade semi-Riemanniana* M^n*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M^n *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) ∇ *é simétrica;*

(ii) ∇ *é compatível com a métrica.*

Demonstração. Suponha a existência de uma tal ∇. Então vale as seguintes relações

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{2.8}$$

$$Y\langle Z, Y\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{2.9}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{2.10}$$

somando (2.8) com (2.9) e subtraindo de (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, Y\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ &+ \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle \\ &+ \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle, \end{aligned}$$

pela simetria de ∇, obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, Y\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, Y\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle \\ - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A fórmula em (2.11) mostra que ∇ está determinada de maneira única pela métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Para mostrar a existência, basta definir ∇ por (2.11), é fácil verificar que ∇ está bem definida, que é simetrica e compatível com a métrica. □

Observação 2.3.1. *A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita de* M^n*. A fórmula obtida em* (2.11) *é conhecida como fórmula de Koszul.*

Enunciaremos a seguinte proposição que será usada mais adiante neste trabalho

Proposição 2.3.1. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana de dimensão* n *e* $p \in M^n$*. Se existe uma vizinhança de* $U \subset M^n$ *de* p *e* n *campos de vetores* $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$*, ortonormais em cada ponto de* U*, então* $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$*. Uma tal família* E_i*, com* $i = 1, \ldots, n$*, de campos de vetores é chamada um referencial (local) geodésico em* p*.*

2.4 TENSORES E CURVATURAS

Apresentaremos nesta seção uma breve introdução ao estudo de tensores em uma variedade. Um tensor é uma generalização natural da ideia de campos de vetores.

Definição 2.4.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Um tensor T de ordem r é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

Isto significa dizer que, T é linear em cada entrada e dados $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M^n)$, $T(X_1, \ldots, X_r)$ é uma função diferenciável em M^n.

Observação 2.4.1. *Um tensor T é um objeto pontual, isto é, o valor de $T(X_1, \ldots, X_r)$ em um ponto $p \in M^n$ depende apenas dos valores em p das componentes de T e dos valores de $X_1, \ldots, X_r$ em p.*

Exemplo 2.4.1. *A métrica semi-Riemanniana g é um tensor métrico do tipo $(0, 2)$.*

Sejam M^n uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\langle\ ,\ \rangle$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n, definimos o traço de um tensor T por

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_{i=1}^{n} T(e_i, e_i), \tag{2.12}$$

o seu respectivo $(1, 1)$-tensor, dado por

$$T(X, Y) = \langle T(X), Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Com isso, reescrevemos

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_i), e_i\rangle.$$

Assim como os campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente, como segue.

Definição 2.4.2. *Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r + 1)$ dada por*

$$\begin{aligned}\nabla T(X_1, \ldots, X_r, Z) &= (\nabla_Z T)(X_1, \ldots, X_r)\\ &= Z(T(X_1, \ldots, X_r)) - T(\nabla_Z X_1, \ldots, X_r) - \cdots - T(X_1, \ldots, \nabla_Z X_r).\end{aligned}$$

Exemplo 2.4.2. *A diferencial covariante do tensor métrico g é o tensor identicamente nulo. De fato, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$,*

$$\begin{aligned}\nabla g(X,Y,Z) &= Z(g(X,Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)\\ &= Z\langle X,Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle\\ &= Z\langle X,Y\rangle - Z\langle X,Y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Agora, podemos definir o tensor curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 2.4.3. *O tensor curvatura R de uma variedade semi-Riemanniana M^n com conexão de Levi-Civita ∇ é a aplicação*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Note que o tensor curvatura é linear nas três entradas em relação à funções em $C^\infty(M)$.

Exemplo 2.4.3. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis em $M^n = \mathbb{R}^n$. Se indicarmos por $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obteremos que*

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n) \quad e \quad \nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n).$$

Logo,

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \qquad \nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, \ldots, [X,Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Fixados os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o operador curvatura $R(X, Y)$

$$\begin{aligned} R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Z &\mapsto R(X,Y)Z \end{aligned}$$

Além disso, também podemos observar R como um tensor do tipo $(0,4)$, isto é

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M)^4 &\longrightarrow C^\infty(M^n) \\ (X,Y,Z,W) &\mapsto R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle \end{aligned}$$

Com isso, podemos exibir as propriedades que o tensor curvatura R de uma variedade semi-Riemanniana M^n satisfaz.

Proposição 2.4.1. *Para quaisquer X, Y, Z e W em $\mathfrak{X}(M^n)$ temos*

(i) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle$ *(antissimetria);*

(ii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$ *(antissimetria);*

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi);*

(iv) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$ *(simetria de pares).*

Demonstração. Ver (CARMO, 2008), Capítulo 3. □

Intimamente relacionado ao operador curvatura está a curvatura seccional que passaremos a definir.

Lema 2.4.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $\sigma \subset T_pM^n$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM^n e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 2.4.4. *Dado um ponto $p \in M^n$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM^n$, o número real $K(x,y) = K(\sigma)$, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, chamada a curvatura seccional de σ em p.*

Lema 2.4.2. *Seja V em espaço vetorial de dimensão $n \geq 2$, munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Considere aplicações tri-lineares $R, R' : V \times V \times V \longrightarrow V$, satisfazendo as propriedades $(i) - (iv)$ da Proposição 2.4.1. Se σ é o plano gerado por dois vetores linearmente independentes $X, Y \in V$, escreva*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2} \quad e \quad K'(\sigma) = \frac{\langle R'(X,Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

Se $K(\sigma) = K'(\sigma)$, para todo subespaço 2-dimensional $\sigma \subset V$, então $R = R'$.

Demonstração. Basta provar que para quaisquer $X, Y, Z, T \in V$, tem-se $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R'(X,Y)Z, T\rangle$. Por hipótese $K(\sigma) = K'(\sigma)$, o que implica

$$\langle R(X,Y)X, Y\rangle = \langle R'(X,Y)X, Y\rangle.$$

Então,

$$\langle R(X+Z, Y)(X+Z), Y\rangle = \langle R'(X+Z, Y)(X+Z), Y\rangle$$

usando as propriedades da Proposição 2.4.1, obtemos

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)X, Y\rangle + 2\langle R(X,Y)Z, Y\rangle + \langle R(Z,Y)Z, Y\rangle& \\ =&\langle R'(X,Y)X, Y\rangle + 2\langle R'(X,Y)Z, Y\rangle + \langle R'(Z,Y)Z, Y\rangle,\end{aligned}$$

e, portanto

$$\langle R(X,Y)Z, Y\rangle = \langle R'(X,Y)Z, Y\rangle.$$

Usando o que provamos em $\langle R(X, Y+T)X, Y+T\rangle = \langle R'(X, Y+T)X, Y+T\rangle$, obtemos

$$\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(X,T)Z, Y\rangle = \langle R'(X,Y)Z, T\rangle + \langle R'(X,T)Z, Y\rangle,$$

que implica em

$$\langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle R'(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Y,Z)X, T\rangle - \langle R'(Y,Z)X, T\rangle. \tag{2.13}$$

A expressão (2.13) nos leva a concluir que a expressão $\langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle R'(X,Y)Z, T\rangle$ é invariante por permutações cíclicas dos primeiros três elementos. Portanto, pela primeira identidade de Bianchi,

$$3[\langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle R'(X,Y)Z, T\rangle] = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R'(X,Y)Z, T\rangle,$$

para todos $X, Y, Z, T \in V$. $\square$

Corolário 2.4.1. *Seja M^n uma variedade semi-Riemanniana com curvatura seccional constante c, então*

$$R(X,Y)Z = c(\langle Z,X\rangle Y - \langle Z,Y\rangle X),$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Denotaremos por $\overline{M}^n(c)$ a variedade $\overline{M}^n$ com curvatura seccional constante c.

Definição 2.4.5. *Sejam M^n uma variedade semi-Riemanniana, $p \in M^n$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de p e ϵ_i o sinal de e_i. A curvatura de Ricci é o tensor $Ric : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^n)$, definida em p por*

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(X,e_i)Y, e_i\rangle. \tag{2.14}$$

Usando a simetria de pares da proposição (2.4.1) garantimos que o tensor de Ricci é simétrico. Além disso, o valor de $\mathrm{Ric}(X,Y)$ em p independe do referencial escolhido. Tomando o traço na equação (2.14), obtemos a curvatura escalar de M^n

$$S = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \mathrm{Ric}(e_j,e_j).$$

Definição 2.4.6. *Uma variedade semi-Riemanniana M^n é dita ser localmente simétrica quando $\nabla R \equiv 0$, onde R é o tensor curvatura de M^n.*

É imediato da definição acima que se M^n possui curvatura seccional constante, então é localmente simétrica.

2.5 ALGUNS OPERADORES DIFERENCIÁVEIS

Apresentaremos alguns operadores em variedades semi-Riemanninas que serão úteis ao longo do trabalho. Fixemos uma variedade semi-Riemanniana M^n, $\{e_1,\dots,e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico em $p \in M^n$ e $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$.

Definição 2.5.1. *Considere $f \in \mathcal{C}^\infty(M^n)$. O gradiente de f é um campo em M^n, denotado por ∇f, tal que*

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. De acordo com a Definição 2.5.1, dizemos que $p \in M^n$ é um ponto crítico de f quando $\nabla f(p) = 0$. A seguir apresentaremos algumas propriedades que o gradiente de uma função suave satisfaz.

Proposição 2.5.1. *Sejam* $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M^n)$ *e* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *função suave. Então,*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$*;*

(ii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$*;*

(iii) $\nabla(\varphi(f)) = \varphi'(f)\nabla f$*.*

Definição 2.5.2. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. O Hessiano de* f*, denotado por Hess* f*, é o campo tensorial Hess* $f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dado por*

$$(\textit{Hess } f)(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 2.5.2. *Seja* $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$*.*

(i) Se $p \in M^n$ *é ponto de mínimo local de* f*, então* p *é ponto crítico de* f *e* $(\textit{Hess } f)_p$ *é positiva semi-definida;*

(ii) Se $p \in M^n$ *é ponto crítico de* f *e* $(\textit{Hess } f)_p$ *é positiva definida, então* p *é ponto de mínimo local estrito para* f*;*

(iii) Se $p \in M^n$ *é ponto de máximo local de* f*, então* p *é ponto crítico de* f *e* $(\textit{Hess } f)_p$ *é negativa semi-definida;*

(iv) Se $p \in M^n$ *é ponto crítico de* f *e* $(\textit{Hess } f)_p$ *é negativa definida, então* p *é ponto de máximo local estrito para* f*.*

2.6 IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Nesta seção trataremos de imersões isométricas, que nada mais é do que uma aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis, onde a métrica em uma variedade é preservada na outra. Isso significa que as propriedades geométricas, como curvatura e comprimento de curvas, são mantidas intactas. Além disso, mostraremos as Equações Fundamentais das Imersões.

Definição 2.6.1. *Sejam* M^n *e* $\overline{M}^m$ *variedades semi-Riemannianas com métricas* $\langle\, , \rangle_M$ *e* $\langle\, , \rangle_{\overline{M}}$ *respectivamente, e* $m \geq n$*. Dizemos que a aplicação suave* $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^m$ *é uma imersão se para cada* $p \in M^n$ *a aplicação*

$$d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\overline{M},$$

é injetiva e isométrica se para todos $v, w \in T_pM$*,*

$$\langle v, w\rangle_M = \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)\rangle_{\overline{M}}.$$

Dizemos que M^n é uma subvariedade de $\overline{M}^m$, quando a aplicação inclusão $i : M^n \hookrightarrow \overline{M}^m$ for um mergulho.

Daí, sendo φ uma imersão isométrica, ao redor de cada ponto $p \in M^n$ existe um aberto $U \subset M^n$ com $p \in U$ tal que φ restrita a U é um mergulho sobre $\varphi(U)$. Logo podemos identificar U como $\varphi(U)$, isto é, a aplicação φ se comporta localmente como a aplicação inclusão. Consequentemente, podemos considerar o espaço tangente de M^n em p como um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}^m$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

em que $(T_pM)^\perp$ representa o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, cada vetor $w \in T_p\overline{M}$ pode ser escrito de maneira única na forma

$$w = w^\top + w^\perp.$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.6.2. *Seja* $\overline{M}^m$ *uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita* $\overline{\nabla}$*. Se* $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^m$ *é uma imersão isométrica, então*

$$\overline{\nabla}_XY = (\overline{\nabla}_XY)^\top + (\overline{\nabla}_XY)^\perp,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Pela unicidade da conexão de Levi-Civita de M^n temos que $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita de M^n a qual denotaremos por ∇. Assim obtemos a fórmula de Gauss

$$\overline{\nabla}_XY = \nabla_XY + \alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.15}$$

a qual define uma aplicação bilinear e simétrica

$$\begin{aligned}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp\\ (X, Y) &\longmapsto \alpha(X, Y) := (\overline{\nabla}_XY)^\perp = \overline{\nabla}_XY - \nabla_XY\end{aligned}$$

que chamamos de *Segunda Forma Fundamental* da imersão φ, onde $\mathfrak{X}(M)^\perp$ denota o conjunto dos campos normais em M^n.

Consideremos os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos,

$$\begin{aligned} 0 = X\langle Y, \xi\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X \xi\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi\rangle + \langle Y, (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top} + (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle, \end{aligned}$$

pela equação (2.15) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle \\ &= \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle. \tag{2.16}$$

Em particular a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ é $\mathcal{C}^{\infty}(M)$-bilinear. Portanto, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é $\mathcal{C}^{\infty}(M)$-linear e autoadjunta por (2.16), ou seja,

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle = \langle A_\xi(Y), X\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A aplicação A_ξ é chamada de operador de forma ou Weingarten da imersão φ na direção de ξ.

Vamos denotar a componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$ por $\nabla^{\perp}_X \xi$, dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal da imersão φ. Com isso, obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi \tag{2.17}$$

Considere $\overline{R}$ e R tensores de curvatura de $\overline{M}^m$ e M^n respectivamente. A seguinte proposição relaciona estes tensores com a segunda forma fundamental.

Proposição 2.6.1. *(Equações Fundamentais das Imersões Isométricas). Seja M^n uma subvariedade de $\overline{M}^m$ com tensores de curvatura R e $\overline{R}$ respectivamente. Então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, temos:*

(a) Equação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle \\ - \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle.$$

(b) Equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_X A_\xi)Y - (\nabla_Y A_\xi)X.$$

Demonstração. Vamos demonstrar o item (a), para isto observe que

$$\overline{R}(X,Y)Z = -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

pela fórmula de Gauss (2.15) escrevemos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) = \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)\\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) + \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)\end{aligned}$$

consequentemente, pela fórmula de Weingarten (2.17), obtemos

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z). \tag{2.18}$$

De maneira análoga

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \tag{2.19}$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z). \tag{2.20}$$

Desta forma, com as expressões obtidas em (2.18), (2.19) e (2.20), temos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = &-\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla_Y\nabla_X Z\\ &+ \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) + \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z)\end{aligned}$$

o que nos diz que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = &R(X,Y)Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z)\\ &+ \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) + \alpha([X,Y],Z),\end{aligned}$$

portanto para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$, escrevemos

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle$$

por (2.16), concluímos o que desejávamos, pois

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

Para mostrarmos o item (b), observe que pela definição (2.4.2) temos

$$(\nabla_X A_\xi)Y = (\nabla A_\xi)(Y,X) = \nabla_X A_\xi(Y) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\nabla^\perp_X \xi}(Y) \tag{2.21}$$

usando as fórmulas de Gauss (2.15) e Weingarten (2.17), obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi &= \nabla_X A_\xi Y + \alpha(X, A_\xi Y) + A_{\nabla^\perp_Y\xi}X - \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi,\\ \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi &= -\nabla_Y A_\xi X - \alpha(Y, A_\xi X) - A_{\nabla^\perp_X\xi}Y + \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi,\\ \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi &= -A_\xi(\nabla_X Y) + A_\xi(\nabla_Y X) + \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Portanto, somando as três expressões obtidas em (2.22) obtemos

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)\xi = R^\perp(X,Y)\xi &+ \nabla_X A_\xi Y + \alpha(X, A_\xi Y) + A_{\nabla^\perp_Y\xi}X - \nabla_Y A_\xi X\\ &- \alpha(Y, A_\xi X) - A_{\nabla^\perp_X\xi}Y - A_\xi(\nabla_X Y) + A_\xi(\nabla_Y X). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tomando a componente tangencial em (2.23) escrevemos

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^\top = \nabla_X A_\xi Y + A_{\nabla^\perp_Y\xi}X - \nabla_Y A_\xi X - A_{\nabla^\perp_X\xi}Y - A_\xi(\nabla_X Y) + A_\xi(\nabla_Y X)$$

usando (2.21), concluímos

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^\top = (\nabla_X A_\xi)Y - (\nabla_Y A_\xi)X.$$

Como queríamos. $\square$

Corolário 2.6.1. *Se $p \in M^n$ e $\sigma \subset T_pM$ é um subespaço bidimensional de T_pM gerado pelos vetores ortonormais $x, y \in T_pM$, então*

$$K(x,y) = \overline{K}(x,y) + \langle \alpha(x,x),\alpha(y,y)\rangle - \|\alpha(x,y)\|^2.$$

Quando o ambiente $\overline{M}^m$ possui curvatura seccional constante igual a c, segue do Corolário 2.4.1,

Corolário 2.6.2. *Seja M^n uma subvariedade de $\overline{M}^m(c)$. Então*

(a) Equação de Gauss

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle = c(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle) &+ \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle\\ &- \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle; \end{aligned}$$

(b) Equação de Codazzi

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)Y = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)X,$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Nesta seção, vamos reescrever as equações fundamentais das imersões para o caso de hipersuperfícies e mostrar que a esfera e o espaço hiperbólico são variedades Riemannianas com curvatura seccional constante.

Definição 2.6.3. *Uma hipersuperfície é uma imersão isométrica de codimensão* 1.

Considere M^n uma hipersuperfície orientada pelo campo normal e unitário $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ em $\overline{M}^{n+1}$. Então

$$\langle \alpha(X,Y), N\rangle = \langle A_N X, Y\rangle = \langle A(X), Y\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

onde denotaremos $A := A_N$. Sendo assim,

$$\alpha(X,Y) = \langle A(X), Y\rangle N$$

consequentemente, a fórmula de Gauss é expressa por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A(X), Y\rangle N. \tag{2.24}$$

Como N é normal e unitário, temos que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ vale que

$$0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = \langle (\overline{\nabla}_X N)^{\top}, N\rangle + \langle (\overline{\nabla}_X N)^{\perp}, N\rangle$$

e dai, $\langle \nabla^{\perp}_X N, N\rangle = 0$. Isso garante que $\nabla^{\perp}_X N \in T_pM$, mas $\nabla^{\perp}_X N$ é um campo normal, então segue que $\nabla^{\perp}_X N = 0$. Logo, a fórmula de Weingarten é expressa por

$$\overline{\nabla}_X N = -A(X). \tag{2.25}$$

Associado ao operador de forma de M^n existem n invariantes algébricos, os quais são as funções simétricas elementares σ_r das suas curvaturas principais $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, a saber:

$$\sigma_r(\kappa_1, \dots, \kappa_n) := \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r}, \quad 1 \le r \le n.$$

Por simplicidade denotaremos as funções simétricas elementares apenas por σ_r em vez de $\sigma_r(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$. Nesse sentido, a curvatura média de M^n é definida por

$$H = \frac{1}{n}\sigma_1 = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A).$$

Em particular, dizemos que uma hipersuperfície é totalmente umbílica se $A = HI$, onde I denota o tensor identidade em $\mathfrak{X}(M)$. Equivalentemente, M^n é umbilíca se $\kappa_1(p) = \cdots = \kappa_n(p)$ para todo $p \in M^n$.

Segue da Proposição 2.6.1,

Corolário 2.6.3. *Se M^n é uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}$, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ vale que:*

(a) Equação de Gauss

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &+ \langle A(X), Z\rangle\langle A(Y), W\rangle \\ &- \langle A(X), W\rangle\langle A(Y), Z\rangle\end{aligned} \tag{2.26}$$

(b) Equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \tag{2.27}$$

Corolário 2.6.4. *Se M^n é uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ vale que*

(a) Equação de Gauss

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle &- \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle) \\ &+ \langle A(X), Z\rangle\langle A(Y), W\rangle - \langle A(X), W\rangle\langle A(Y), Z\rangle\end{aligned} \tag{2.28}$$

(b) Equação de Codazzi

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X.$$

Tomando o traço na equação de Gauss, obtemos a seguinte consequência:

Corolário 2.6.5. *Se M^n é uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$, então para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se as seguintes relações para a curvatura de Ricci e escalar:*

$$Ric(X,Y) = c(n-1)\langle X, Y\rangle + nH\langle A(X), Y\rangle - \langle A(X), A(Y)\rangle,$$

e

$$S = n(n-1)c + n^2H^2 - |A|^2$$

onde $|A|$ denota a norma de Hilbert-Schmidt de A.

Agora, traremos exemplos de variedades Riemannianas com curvatura seccional constante. O primeiro deles é a esfera unitária.

Exemplo 2.6.1. *A esfera unitária n-dimensional*

$$\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle p, p\rangle = 1\}$$

tem curvatura seccional constante igual a 1, se $n \geq 2$.

De fato, denotemos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+1}$ e seja $V(p) = p$ o campo definido em $\mathbb{R}^{n+1}$ que associa cada ponto $p \in \mathbb{S}^n$ o vetor posição unitário p. Afirmamos que

$$\overline{\nabla}_X V(p) = X,$$

para todo $p \in \mathbb{S}^n$. Com efeito, seja $\{u^1, \ldots, u^{n+1}\}$ o sistema de coordenadas naturais de $\mathbb{R}^{n+1}$ base $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n+1}\}$ a base coordenada associada ao sistema para $\mathbb{R}^{n+1}$. Nesta base, escrevemos $p = \sum\limits_{i=1}^{n+1} u^i\partial_i$ e daí

$$\overline{\nabla}_X p = \overline{\nabla}_X \sum_{i=1}^{n+1} u^i\partial_i = \sum_{i=1}^{n+1} X(u^i)\partial_i + \sum_{i=1}^{n+1} u^i \overline{\nabla}_X \partial_i.$$

Observando que $X = \sum\limits_{j=1}^{n+1} x^j\partial_j$, segue de (2.7)

$$\overline{\nabla}_X p = \sum_{i=1}^{n+1} x^i\partial_i + \sum_{i,j,k=1}^{n+1} u^i x^j \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Uma vez que os símbolos de Christoffel em $\mathbb{R}^{n+1}$ são nulos, concluímos

$$\overline{\nabla}_X p = \sum_{j=1}^{n+1} x^j\partial_j = X, \tag{2.29}$$

como afirmado.

Sendo p é unitário, isto é, $\langle p, p\rangle = 1$, tomando a derivada em ambos, obtemos

$$X\langle p, p\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\langle \overline{\nabla}_X p, p\rangle = \langle X, p\rangle = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. Isto significa que o campo posição unitário é normal à $T_p\mathbb{S}^n$. Assim, definimos o campo normal em $\mathbb{S}^n$ por

$$N(p) = -p.$$

O operador de Weingarten é dado por

$$A(X)(p) = -\overline{\nabla}_X N(p) = \overline{\nabla}_X p = X(p), \tag{2.30}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$, mostrando que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, tomando o traço em (2.30), temos que $H = 1$.

Por fim, considere $X, Y \in T_p\mathbb{S}^n$ vetores ortonormais e o plano não-degenerado gerado por $\{X, Y\}$. Uma vez que a curvatura seccional do $\mathbb{R}^{n+1}$ é nula e $\langle N, N\rangle = 1$, segue da equação de Gauss (2.28),

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}\\
&= \frac{-\langle A(Y),X\rangle\langle A(X),Y\rangle + \langle A(X),X\rangle\langle A(Y),Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}\\
&= \frac{-\langle Y,X\rangle\langle X,Y\rangle + \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Mostrando o que desejávamos.

O segundo, o espaço hiperbólico.

Exemplo 2.6.2. *O espaço hiperbólico n-dimensional*

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x\rangle = -1; x_{n+1} \geq 1\}$$

é uma subvariedade Riemanniana de $\mathbb{L}^{n+1}$ de codimensão 1 e possui curvatura seccional constante igual a -1.

Inicialmente, mostraremos que $\mathbb{H}^n$ é a imagem inversa de valor regular de alguma função suave f. Para isto, considere a aplicação suave $f : \mathbb{L}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle p, p\rangle + 1$. Observe que $\mathbb{H}^n = f^{-1}(0)$, sendo assim, resta mostrar que 0 é valor regular de f.

Sejam $p \in \mathbb{L}^{n+1}$, $v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ e seja $\alpha : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ uma curva diferenciável satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Considere agora $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$.

Pela Definição 2.5.1,

$$\langle \overline{\nabla} f(p), v\rangle = df_p(v) = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle + 1)\Big|_{t=0} = \langle 2\alpha(0), \alpha'(0)\rangle = \langle 2p, v\rangle.$$

Como v foi escolhido de maneira arbitrária, segue que $\overline{\nabla} f(p) = 2p$, ou seja, $\overline{\nabla} f(p) = 0$ se, e somente se, $p = 0$. Mas, esta igualdade não ocorre sobre os pontos de $\mathbb{H}^n$. Portanto, mostramos que 0 é valor regular de f, concluindo, pela Proposição 2.1.3, que H^n é uma subvariedade de $\mathbb{L}^{n+1}$ de codimensão 1. Para mostrar que é subvariedade Riemanniana, devemos obter que $ind\, \mathbb{H}^n = 0$. Para isso, seja $p \in \mathbb{H}^n$ e observe que $T_p\mathbb{H}^n = ker\,(df_p)$. Assim, se $v \in ker\,(df_p)$, temos

$$0 = df_p(v) = \langle \overline{\nabla}(f(p)), v\rangle = \langle 2p, v\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle p, v\rangle = 0.$$

Logo,

$$T_p\mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle p, v\rangle = 0\}.$$

Analisemos o conjunto span $\{\overline{\nabla} f(p)\}$. Primeiramente note que span$\{\overline{\nabla} f(p)\} = (T_p\mathbb{H}^n)^{\perp}$. Além disso, se $v \in T_p\mathbb{H}^n \cap$ span $\{\overline{\nabla} f(p)\}$, então $v = a\overline{\nabla} f(p)$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e $\langle p, v\rangle = 0$. Assim,

$$0 = \langle p, v\rangle = \langle p, a\overline{\nabla} f(p)\rangle = 2a\langle p, p\rangle = -2a,$$

ou seja, $a = 0$, então $v = 0$ e

$$T_p\mathbb{H}^n \cap span\{\overline{\nabla} f(p)\} = 0,$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$. Assim, escrevemos

$$T_p(\mathbb{L}^{n+1}) = T_p\mathbb{H}^n \oplus span\{\overline{\nabla} f(p)\}. \tag{2.31}$$

Como span$\{\overline{\nabla} f(p)\}$ tem dimensão igual a 1 e, para $p \in \mathbb{H}^n$, temos $\langle p, p\rangle = -1 < 0$ obtemos

$$\langle \overline{\nabla} f(p), \overline{\nabla} f(p)\rangle = 4\langle p, p\rangle = -4 < 0,$$

ou seja, ind(span$\{\overline{\nabla} f(p)\}$) $= 1$. A partir da soma direta em (2.31) obtemos [1]

$$ind(\mathbb{L}^{n+1}) = ind(T_p\mathbb{H}^n) + ind(span\{\overline{\nabla} f(p)\}) = ind(T_p\mathbb{H}^n) + 1,$$

[1] Aqui estamos usando o seguinte resultado: Se W é um subespaço não degenerado de V, então $\mathrm{ind}(V) = \mathrm{ind}(W) + \mathrm{ind}(W^{\perp})$.

pelo Exemplo 2.2.1 temos que $ind(\mathbb{L}^{n+1}) = 1$*, concluindo portanto que* $ind(T_p\mathbb{H}^n) = 0$*. Desta forma,* $\mathbb{H}^n$ *é uma subvariedade Riemanniana.*

Para mostrarmos que a curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ *é constante, definimos o campo normal e unitário em* $\mathbb{H}^n$ *por*

$$N(p) = \frac{\overline{\nabla} f(p)}{|\overline{\nabla} f(p)|} = p$$

onde $\langle N, N\rangle = -1$*. O operador de Weingarten para cada* $p \in \mathbb{H}^n$ *e* $X \in T_p\mathbb{H}^n$ *será dado por*

$$A(X(p)) = -\overline{\nabla}_{X(p)} N(p) = -\overline{\nabla}_{X(p)} p = -X(p) \quad \Longrightarrow \quad A(X) = -X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$*. Daí, considere* $\{X, Y\}$ *uma base do plano tangente à* $\mathbb{H}^n$ *não degenerado. Como a curvatura seccional do* $\mathbb{L}^{n+1}$ *é nula, da equação de Gauss* (2.28)*, obtemos*

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= \frac{\langle A(Y), X\rangle\langle A(X), Y\rangle - \langle A(X), X\rangle\langle A(Y), Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= \frac{\langle -Y, X\rangle\langle -X, Y\rangle - \langle -X, X\rangle\langle -Y, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= \frac{\langle X,Y\rangle^2 - \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

A arbitrariedade na escolha do plano tangente resulta que $\mathbb{H}^n$ *possui curvatura seccional constante igual a* -1*.*

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo apresentaremos os resultados centrais desta dissertação. Inicialmente, mostraremos alguns lemas que serão fundamentais para a demonstração do Teorema de Liebmann e em seguida generalizaremos a fórmula de (SCHNEIDER, 1967).

3.1 RESULTADOS AUXILIARES

Iniciaremos mostrando uma propriedade fundamental para a derivada covariante do operador de forma em uma hipersuperfície.

Lema 3.1.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana e M^n uma hipersuperfície orientada imersa com operador de forma $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e conexão de Levi-Civita ∇. Então*

$$\langle \nabla A(X,Z), Y\rangle = \langle \nabla A(Y,Z), X\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Aplicando a Definição 2.4.2 ao operador A, temos que

$$\langle \nabla A(X,Z), Y\rangle = \langle \nabla_Z A(X) - A(\nabla_Z X), Y\rangle = \langle \nabla_Z A(X), Y\rangle - \langle A(\nabla_Z X), Y\rangle,$$

e

$$\langle X, \nabla A(Y,Z)\rangle = \langle X, \nabla_Z A(Y)\rangle - \langle X, A(\nabla_Z Y)\rangle.$$

Subtraindo as identidades acima, chegamos à

$$\begin{aligned}\langle \nabla A(X,Z), Y\rangle - \langle X, \nabla A(Y,Z)\rangle = \langle \nabla_Z A(X), Y\rangle - \langle A(\nabla_Z X), Y\rangle\\ - \langle X, \nabla_Z A(Y)\rangle + \langle X, A(\nabla_Z Y)\rangle.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Sendo A autoadjunto podemos escrever

$$\langle A(\nabla_Z X), Y\rangle = \langle \nabla_Z X, A(Y)\rangle \quad \text{e} \quad \langle X, A(\nabla_Z Y)\rangle = \langle A(X), \nabla_Z Y\rangle$$

Portanto, inserindo em (3.1), segue da compatibilidade da conexão com a métrica,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla A(X,Z), Y\rangle - \langle X, \nabla A(Y,Z)\rangle &= \langle \nabla_Z A(X), Y\rangle + \langle A(X), \nabla_Z Y\rangle \\
&\quad - \langle \nabla_Z X, A(Y)\rangle - \langle X, \nabla_Z A(Y)\rangle \\
&= Z\langle A(X), Y\rangle - Z\langle X, A(Y)\rangle \\
&= Z\langle X, A(Y)\rangle - Z\langle X, A(Y)\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos mostrado que

$$\langle \nabla A(X,Z), Y\rangle = \langle X, \nabla A(Y,Z)\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. □

No que segue, vamos assumir que a segunda forma fundamental II da hipersuperfície M^n

$$\mathrm{II}(X,Y) = \langle A(X), Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.2}$$

seja não-degenerada. Note que a condição II ser não-degenerada é equivalente ao fato que $G := \det(A) \neq 0$. De fato, suponha que $G = 0$, então $k_i = 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daí para algum $e_i \neq 0$ temos que $A(e_i) = k_i e_i = 0$. Portanto, $\mathrm{II}(e_i, e_j) = \langle A(e_i), e_j\rangle = 0$. Reciprocamente, se II é degenerada, então existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ com $X \neq 0$ tal que $\mathrm{II}(X,Y) = 0$, para todo $Y \neq 0$, mas por definição $\mathrm{II}(X,Y) = 0$ equivale a $\langle A(X), Y\rangle = 0$, fazendo $X = e_i$ e $Y = e_j$ obtemos

$$\langle A(e_i), e_j\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad k_i\langle e_i, e_j\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad k_i = 0.$$

Concluindo que $G = 0$, como queríamos.

Assim o Lema 2.2.1 garante que (3.2) define uma métrica semi-Riemanniana em M^n. Em particular, a condição $\det(A) \neq 0$ significa que as curvaturas principais de M^n são não nulas.

Agora daremos algumas propriedades envolvendo as métricas $\langle\,,\rangle$ e II. A primeira delas é sobre o colchete de Lie, que por ser uma entidade de natureza topológica devemos ter:

$$[X,Y] = [X,Y]^{\mathrm{II}}, \tag{3.3}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Sendo

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad \text{e} \quad [X,Y]^{\mathrm{II}} = \nabla^{\mathrm{II}}_X Y - \nabla^{\mathrm{II}}_Y X$$

definimos a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) &\longmapsto T(X,Y) = \nabla^{\mathrm{II}}_X Y - \nabla_X Y. \end{aligned} \tag{3.4}$$

chamada diferença de conexões de Levi-Civita. O próximo resultado garante que a aplicação T é um tensor.

Proposição 3.1.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana munida com as conexões de Levi-Civita ∇ e ∇^{II} associadas as métricas $\langle\,,\rangle$ e II, respectivamente. Então T é um tensor simétrico do tipo $(1,1)$ em M^n.*

Demonstração. De acordo com a Definição 2.4.1, devemos verificar que T é bilinear e simétrico. De fato, para a bilinearidade, sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Então

$$\begin{aligned} T(fX+gZ,Y) &= \nabla^{\mathrm{II}}_{fX+gZ} Y - \nabla_{fX+gZ} Y \\ &= \nabla^{\mathrm{II}}_{fX} Y + \nabla^{\mathrm{II}}_{gZ} Y - \nabla_{fX} Y - \nabla_{gZ} Y \\ &= f\nabla^{\mathrm{II}}_X Y + g\nabla^{\mathrm{II}}_Z Y - f\nabla_X Y - g\nabla_Z Y \\ &= fT(X,Y) + gT(Z,Y). \end{aligned}$$

Em relação a segunda entrada,

$$\begin{aligned} T(X,fZ+gY) &= \nabla^{\mathrm{II}}_X (fZ+gY) - \nabla_X (fZ+gY) \\ &= \nabla^{\mathrm{II}}_X (fZ) + \nabla^{\mathrm{II}}_X (gY) - \nabla_X (fZ) - \nabla_X (gY) \\ &= X(f)Z + f\nabla^{\mathrm{II}}_X Z + X(g)Y + \nabla^{\mathrm{II}}_X Y - X(f)Z \\ &- f\nabla_X Z - X(g)Y - g\nabla_X Y \\ &= fT(X,Z) + gT(X,Y). \end{aligned}$$

Portanto, T é bilinear.

Agora para a simetria, vejamos que, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} T(X,Y) - T(Y,X) &= \nabla^{\mathrm{II}}_X Y - \nabla_X Y - \nabla^{\mathrm{II}}_Y X + \nabla_Y X \\ &= [X,Y]^{II} - [X,Y] = 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue diretamente pela equação (3.3). Logo T é simétrico. □

Agora o nosso objetivo é buscar propriedades do tensor T do ponto de vista das imersões isométricas. Para isto, sejam M^n uma hipersuperfície orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ e operador de forma A. O próximo resultado assegura-nos que T pode ser escrito em termos do operador de forma.

Proposição 3.1.2. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$. Se $G \neq 0$, então*

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}A^{-1}(\nabla A(Y,X)) + \frac{1}{2}A^{-1}\left((\overline{R}(N,X)Y)^{\top}\right),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Inicialmente, aplicando a fórmula de Koszul (2.11) à métrica II e conexão ∇^{II}, escrevemos

$$\begin{aligned}
2\mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_X Y, Z) &= X\left(\mathrm{II}(Y,Z)\right) + Y\left(\mathrm{II}(Z,X)\right) - Z\left(\mathrm{II}(X,Y)\right)\\
&\quad - \mathrm{II}(X,[Y,Z]) + \mathrm{II}(Y,[Z,X]) + \mathrm{II}(Z,[X,Y])\\
&= X\langle A(Y),Z\rangle + Y\langle A(Z),X\rangle - Z\langle A(X),Y\rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z - \nabla_Z Y\rangle\\
&\quad + \langle A(Y), \nabla_Z X - \nabla_X Z\rangle + \langle A(Z), \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle\\
&= \langle \nabla_X A(Y), Z\rangle + \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y A(Z), X\rangle + \langle A(Z), \nabla_Y X\rangle\\
&\quad - \langle \nabla_Z A(X), Y\rangle - \langle A(X), \nabla_Z Y\rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z - \nabla_Z Y\rangle\\
&\quad + \langle A(Y), \nabla_Z X - \nabla_X Z\rangle + \langle A(Z), \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle,
\end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Sendo A autoadjunto, obtemos

$$\begin{aligned}
2\mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_X Y, Z) &= \langle \nabla_X A(Y), Z\rangle + \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle + \langle \nabla_Y A(Z), X\rangle - \langle A(\nabla_Y Z), X\rangle\\
&\quad - \langle \nabla_Z A(X), Y\rangle + \langle A(\nabla_Z X), Y\rangle.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $\langle A(\nabla_X Y), Z\rangle$ e usando a Definição 2.4.2, chegamos à

$$\begin{aligned}
2\mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_X Y, Z) &= \langle \nabla A(Y,X), Z\rangle + 2\langle A(\nabla_X Y), Z\rangle\\
&\quad + \langle \nabla A(Z,Y), X\rangle - \langle \nabla A(X,Z), Y\rangle\\
&= \langle \nabla A(Y,X), Z\rangle + 2\langle A(\nabla_X Y), Z\rangle\\
&\quad + \langle \nabla A(Z,Y), X\rangle - \langle \nabla A(X,Z), Y\rangle,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde, na última igualdade, usamos o Lema 3.1.1 a fim de garantir que

$$\langle \nabla A(X,Z), Y\rangle = \langle \nabla A(Y,Z), X\rangle.$$

Agora da equação de Codazzi (2.27), escrevemos

$$\langle \nabla A(Z,Y), X\rangle - \langle \nabla A(Y,Z), X\rangle = \langle \overline{R}(Y,Z)N, X\rangle. \tag{3.6}$$

Inserindo (3.6) em (3.5), segue das simetrias do tensor de curvatura $\overline{R}$ que

$$2\mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_X Y, Z) = \langle \nabla A(Y, X), Z\rangle + 2\langle A(\nabla_X Y), Z\rangle + \langle \overline{R}(N, X)Y, Z\rangle,$$

Logo, da definição do tensor T e da métrica II, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira

$$\mathrm{II}(T(X, Y), Z) = \frac{1}{2}\langle \nabla A(Y, X), Z\rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{R}(N, X)Y, Z\rangle, \tag{3.7}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Por fim, usando mais uma vez a relação (3.2), segue de (3.7)

$$\langle A(T(X, Y)), Z\rangle = \frac{1}{2}\langle \nabla A(Y, X), Z\rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{R}(N, X)Y, Z\rangle,$$

e sendo a métrica $\langle\, ,\rangle$ não degenerada,

$$A(T(X, Y)) = \frac{1}{2}\nabla A(Y, X) + \frac{1}{2}(\overline{R}(N, X)Y)^{\top},$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como $G \neq 0$, então vale

$$T(X, Y) = A^{-1}\left(\frac{1}{2}\nabla A(Y, X) + \frac{1}{2}(\overline{R}(N, X)Y)^{\top}\right),$$

pela linearidade de A^{-1}, concluímos

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}A^{-1}(\nabla A(Y, X)) + \frac{1}{2}A^{-1}((\overline{R}(N, X)Y)^{\top}),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

No caso em que o ambiente possui curvatura seccional constante, sabemos do Corolário 2.4.1 que

$$\overline{R}(N, X)Y = c\left(\langle N, Y\rangle X - \langle N, X\rangle Y\right) = 0, \tag{3.8}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dessa forma, temos provado:

Corolário 3.1.1. *Se M^n uma hipersuperfície orientada de $\overline{M}^{n+1}(c)$, então*

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}A^{-1}(\nabla A(X, Y)),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A Proposição 3.1.1 nos garante que o tensor T é simétrico. O próximo resultado garante certas simétricas de T em relação a métrica II. Mais precisamente,

Proposição 3.1.3. *Sejam M^n uma hipersuperfície orientada de um variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$. As seguintes simetrias são válidas para o tensor T:*

(i) $II(T(X,Y),Z) = II(T(Y,X),Z)$;

(ii) $II(T(X,Y),Z) = II(T(X,Z),Y) + \langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle$;

(iii) $II(T(X,Y),Z) = II(T(Z,Y),X) + \langle \overline{R}(N,Y)X,Z\rangle$,

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. A demonstração do item (i) segue direto da simetria do tensor T. Para provar (ii), relembremos a seguinte relação entre T e ∇A dada na prova do Lema 3.1.2:

$$2\mathrm{II}(T(X,Y),Z) = \langle \nabla A(Y,X),Z\rangle + \langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle,$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Usando o Lema 3.1.1,

$$2\mathrm{II}(T(X,Y),Z) = \langle \nabla A(Z,X),Y\rangle + \langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle,$$

e juntamente com a equação de Codazzi (2.27), escrevemos

$$2\mathrm{II}(T(X,Y),Z) = \langle \nabla A(X,Z),Y\rangle + \langle \overline{R}(X,Z)N,Y\rangle + \langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle. \tag{3.9}$$

Aplicando as simetrias do tensor curvatura $\overline{R}$, obtemos da primeira identidade de Bianchi

$$-\overline{R}(X,Z)Y - \overline{R}(Y,Z)X = 2\overline{R}(Z,Y)X + \overline{R}(Y,X)Z.$$

Substituindo em (3.9),

$$2\mathrm{II}(T(X,Y),Z) = \langle \nabla A(X,Z),Y\rangle + \langle \overline{R}(N,Z)X,Y\rangle + 2\langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle$$

Portando, da identidade (3.7) obtemos

$$\mathrm{II}(T(X,Y),Z) = \mathrm{II}(T(X,Z),Y) + \langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle,$$

o que mostra o item desejado.

Por fim, para mostrar (iii) escrevemos

$$2\mathrm{II}(T(Y,Z),X) = \langle \nabla A(Z,Y),X\rangle + \langle \overline{R}(N,Y)Z,X\rangle,$$

pelo Lema 3.1.1, obtemos

$$2\mathrm{II}(T(Y,Z),X) = \langle \nabla A(X,Y),Z\rangle + \langle \overline{R}(N,Y)Z,X\rangle.$$

Daí, pela equação de Codazzi (2.27),

$$2\mathrm{II}(T(Y,Z),X) = \langle \nabla A(Y,X), Z\rangle - \langle \overline{R}(X,Y)N, Z\rangle + \langle \overline{R}(N,Y)Z, X\rangle.$$

Inserindo (3.7) na expressão acima, segue da primeira identidade de Bianchi

$$\begin{aligned} 2\mathrm{II}(T(Y,Z),X) &= 2\mathrm{II}(T(X,Y),Z) - \langle \overline{R}(N,X)Y, Z\rangle - \langle \overline{R}(X,Y)N, Z\rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(N,Y)Z, X\rangle \\ &= 2\mathrm{II}(T(X,Y),Z) - 2\langle \overline{R}(N,Y)X, Z\rangle, \end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ como queríamos. □

Quando o ambiente possui curvatura seccional constante, temos que $\mathrm{II}(T(X,Y),Z)$ é simétrico nas três variáveis, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. O nosso próximo resultado garante uma certa simetria agora com respeito a derivada covariante de T.

Proposição 3.1.4. *Sejam M^n uma hipersuperfície orientada de um variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$. Fixado $U \in \mathfrak{X}(M)$, a seguinte relação é válida para a derivada covariante de T relativa a U com respeito a ∇^{II}:*

$$\begin{aligned} II\Big((\nabla^{II}_U T)(X,Y),Z\Big) &= II\Big((\nabla^{II}_U T)(X,Z),Y\Big) - \langle \overline{R}(A(U),X)Y, Z\rangle \\ &\quad + \langle A(Y),U\rangle\langle \overline{R}(N,X)N, Z\rangle + \langle A(Z),U\rangle\langle \overline{R}(N,X)Y, N\rangle \\ &\quad - \langle \overline{R}(N,T(U,X))Y, Z\rangle - \langle \overline{R}(N,X)T(U,Y), Z\rangle \\ &\quad - \langle \overline{R}(N,X)Y, T(U,Z)\rangle + \overline{\nabla}\,\overline{R}(N,X,Y,Z,U), \end{aligned} \tag{3.10}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Fixado $U \in \mathfrak{X}(M)$, aplicamos a Definição 2.4.2 ao tensor T a fim de obter,

$$\begin{aligned} \mathrm{II}((\nabla^{\mathrm{II}}_U T)(X,Y),Z) &= \mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_U T(X,Y),Z) - \mathrm{II}(T(\nabla^{\mathrm{II}}_U X,Y),Z) \\ &\quad - \mathrm{II}(T(X,\nabla^{\mathrm{II}}_U Y),Z) \\ &= U(\mathrm{II}(T(X,Y),Z)) - \mathrm{II}(T(X,Y),\nabla^{\mathrm{II}}_U Z) \\ &\quad - \mathrm{II}(T(\nabla^{\mathrm{II}}_U X,Y),Z) - \mathrm{II}(T(X,\nabla^{\mathrm{II}}_U Y),Z) \\ &= B - C - D - E. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pelo Proposição 3.1.3, fórmula de Gauss (2.24) e a compatibilidade das conexões com as respectivas métricas, B pode ser escrito como segue

$$\begin{aligned}
B &= U(\mathrm{II}(T(X,Z),Y)) + U\langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle \\
&= \mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_U T(X,Z),Y) + \mathrm{II}(T(X,Z),\nabla^{\mathrm{II}}_U Y) \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_U \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle + \langle \overline{R}(N,X)Y,\overline{\nabla}_U Z\rangle \\
&= \mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_U T(X,Z),Y) + \mathrm{II}(T(X,Z),\nabla^{\mathrm{II}}_U Y) + \langle \overline{\nabla}_U \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle \\
&\quad + \langle \overline{R}(N,X)Y,\nabla_U Z\rangle + \langle A(U),Z\rangle\langle \overline{R}(N,X)Y,N\rangle.
\end{aligned}$$

Usando mais uma vez a Proposição 3.1.3, as letras C, D e E são escritas como segue:

$$\begin{aligned}
C &= \mathrm{II}(T(X,\nabla^{\mathrm{II}}_U Z),Y) + \langle \overline{R}(N,X)Y,\nabla^{\mathrm{II}}_U Z\rangle; \\
D &= \mathrm{II}(T(\nabla^{\mathrm{II}}_U X,Z),Y) + \langle \overline{R}(N,\nabla^{\mathrm{II}}_U X)Y,Z\rangle; \\
E &= \mathrm{II}(T(X,Z),\nabla^{\mathrm{II}}_U Y) + \langle \overline{R}(N,X)\nabla^{\mathrm{II}}_U Y,Z\rangle,
\end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Por outro lado, vendo o tensor $\overline{R}$ como um tensor do tipo $(0,4)$, podemos aplicar a fórmula da diferencial covariante, Definição 2.4.2, e escrever

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}\,\overline{R}(N,X,Y,Z,U) = U\left(\overline{R}(N,X,Y,Z)\right) &- \overline{R}(\overline{\nabla}_U N,X,Y,Z) - \overline{R}(N,\overline{\nabla}_U X,Y,Z) \\
&- \overline{R}(N,X,\overline{\nabla}_U Y,Z) - \overline{R}(N,X,Y,\overline{\nabla}_U Z).
\end{aligned}$$

Voltando ao tensor do tipo $(1,3)$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}\,\overline{R}(N,X,Y,Z,U) = U\langle \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle &- \langle \overline{R}(\overline{\nabla}_U N,X)Y,Z\rangle - \langle \overline{R}(N,\overline{\nabla}_U X)Y,Z\rangle \\
&- \langle \overline{R}(N,X)\overline{\nabla}_U Y,Z\rangle - \langle \overline{R}(N,X)Y,\overline{\nabla}_U Z\rangle,
\end{aligned}$$

e usando as fórmulas de Gauss (2.24) e Weingarten (2.25),

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_U \overline{R}(N,X)Y,Z\rangle = \overline{\nabla}\,\overline{R}(N,X,Y,Z,U) &- \langle \overline{R}(A(U),X)Y,Z\rangle \\
&+ \langle \overline{R}(N,\nabla_U X)Y,Z\rangle + \langle A(U),X\rangle\langle \overline{R}(N,N)Y,Z\rangle \\
&+ \langle \overline{R}(N,X)\nabla_U Y,Z\rangle + \langle A(U),Y\rangle\langle \overline{R}(N,X)N,Z\rangle,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Portanto, inserindo B, C, D, E e (3.12) em (3.11),

$$\begin{aligned}\mathrm{II}((\nabla^{\mathrm{II}}_U T)(X,Y),Z) = \mathrm{II}(\nabla^{\mathrm{II}}_U T(X,Z),Y) &+ \overline{\nabla}\,\overline{R}(N,X,Y,Z,U) + \langle \overline{R}(N,\nabla_U X)Y,Z\rangle \\ &- \langle \overline{R}(A(U),X)Y,Z\rangle + \langle \overline{R}(N,X)\nabla_U Y,Z\rangle \\ &+ \langle A(U),Y\rangle\langle \overline{R}(N,X)N,Z\rangle + \langle \overline{R}(N,X)Y,\nabla_U Z\rangle \\ &+ \langle A(U),Z\rangle\langle \overline{R}(N,X)Y,N\rangle - \mathrm{II}(T(X,\nabla^{\mathrm{II}}_U Z),Y) \\ &- \langle \overline{R}(N,X)Y,\nabla^{\mathrm{II}}_U Z\rangle - \mathrm{II}(T(\nabla^{\mathrm{II}}_U X,Z),Y) \\ &- \langle \overline{R}(N,X)\nabla^{\mathrm{II}}_U Y,Z\rangle - \langle \overline{R}(N,\nabla^{\mathrm{II}}_U X)Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

Segue da definição de T e da multilinearidade de $\overline{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{II}((\nabla^{\mathrm{II}}_U T)(X,Y),Z) = \mathrm{II}((\nabla^{\mathrm{II}}_U T)(X,Z),Y) &+ \overline{\nabla}\,\overline{R}(N,X,Y,Z,U) \\ &+ \langle A(U),Y\rangle\langle \overline{R}(N,X)N,Z\rangle + \langle A(U),Z\rangle\langle \overline{R}(N,X)Y,N\rangle \\ &- \langle \overline{R}(A(U),X)Y,Z\rangle - \langle \overline{R}(N,X)Y,T(U,Z)\rangle \\ &- \langle \overline{R}(N,X)T(U,Y),Z\rangle - \langle \overline{R}(N,T(U,X))Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

Como queríamos. □

No caso em que a curvatura seccional do espaço ambiente é constante, temos:

Corolário 3.1.2. *Se M^n é uma hipersuperfície orientada de uma forma espacial Riemanniana $\overline{M}^{n+1}(c)$, então fixado $U \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla^{II}_U T$ é simétrico nas três variáveis com relação a métrica II, isto é,*

$$II\Big((\nabla^{II}_U T)(X,Y),Z\Big) = II\Big((\nabla^{II}_U T)(X,Z),Y\Big), \tag{3.13}$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Uma vez que o espaço ambiente possui curvatura seccional constante, segue que $\overline{\nabla}\,\overline{R} = 0$. Por outro lado, do Corolário 2.4.1,

$$\overline{R}(N,X)Y = \overline{R}(N,X)T(U,Y) = \overline{R}(N,T(U,X))Y = 0. \tag{3.14}$$

Além disso,

$$\langle A(U),Y\rangle\langle \overline{R}(N,X)N,Z\rangle = c\langle A(U),Y\rangle\langle X,Z\rangle,$$

$$\langle A(U),Z\rangle\langle \overline{R}(N,X)Y,N\rangle = -c\langle A(U),Z\rangle\langle X,Y\rangle,$$

e

$$\langle \overline{R}(A(U), X)Y, Z\rangle = c\langle A(U), Y\rangle\langle X, Z\rangle - c\langle A(U), Z\rangle\langle X, Y\rangle.$$

Logo, das expressões acima,

$$\langle A(U), Y\rangle\langle \overline{R}(N, X)N, Z\rangle + \langle A(U), Z\rangle\langle \overline{R}(N, X)Y, N\rangle - \langle \overline{R}(A(U), X)Y, Z\rangle = 0. \quad (3.15)$$

Portanto, inserindo (3.14) e (3.15) em (3.10), obtemos (3.13). □

Nos resultados anteriores exploramos relações entre o tensor T com a conexão e a métrica II. Neste momento a ideia é obter uma relação entre os tensores de curvatura da variedade Riemanniana M^n associados a métrica $\langle\, ,\rangle$ e II, respectivamente. Antes de apresentar o próximo resultado que relaciona os dois tensores de curvatura, de acordo com a Definição 2.4.3, escrevemos a curvatura R^{II} com respeito a métrica II pondo

$$R^{\mathrm{II}}(X, Y)Z = -\nabla^{\mathrm{II}}_X \nabla^{\mathrm{II}}_Y Z + \nabla^{\mathrm{II}}_Y \nabla^{\mathrm{II}}_X Z + \nabla^{\mathrm{II}}_{[X,Y]} Z, \quad (3.16)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Observemos que no último termo usamos que $[X, Y] = [X, Y]^{\mathrm{II}}$. Assim,

Proposição 3.1.5. *Seja M^n uma variedade Riemanniana munida com as métricas Riemannianas $\langle\, ,\rangle$ e II. Então os tensores de curvatura R e R^{II} são relacionados por:*

$$R^{II}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + Q_1(X, Y)Z + Q_2(X, Y)Z. \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_1(X, Y)Z &= \nabla^{II} T(X, Z, Y) - \nabla^{II} T(Y, Z, X); \\ Q_2(X, Y)Z &= T(X, T(Y, Z)) - T(Y, T(X, Z)), \end{aligned} \quad (3.18)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Usando a definição (3.4) em cada parcela de (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathrm{II}}_Y \nabla^{\mathrm{II}}_X Z &= \nabla^{\mathrm{II}}_Y (T(X, Z) + \nabla_X Z) \\ &= \nabla^{\mathrm{II}}_Y T(X, Z) + \nabla^{\mathrm{II}}_Y \nabla_X Z \\ &= \nabla^{\mathrm{II}}_Y T(X, Z) + T(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y \nabla_X Z \\ &= \nabla^{\mathrm{II}}_Y T(X, Z) + T(Y, \nabla^{\mathrm{II}}_X Z - T(X, Z)) + \nabla_Y \nabla_X Z \\ &= \nabla^{\mathrm{II}}_Y T(X, Z) + T(Y, \nabla^{\mathrm{II}}_X Z) - T(Y, T(X, Z)) + \nabla_Y \nabla_X Z. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analogamente,

$$-\nabla^{\mathrm{II}}_X\nabla^{\mathrm{II}}_Y Z = -\nabla^{\mathrm{II}}_X T(Y,Z) - T(X,\nabla^{\mathrm{II}}_Y Z) + T(X,T(Y,Z)) - \nabla_X\nabla_Y Z \tag{3.20}$$

e

$$\nabla^{\mathrm{II}}_{[X,Y]}Z = T(\nabla^{\mathrm{II}}_X Y, Z) - T(\nabla^{\mathrm{II}}_Y X, Z) + \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{3.21}$$

Somando os resultados obtidos em (3.19), (3.20) e (3.21),

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{II}}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ \nabla^{\mathrm{II}}_Y T(X,Z) + T(Y,\nabla^{\mathrm{II}}_X Z) - T(Y,T(X,Z)) \\ &- \nabla^{\mathrm{II}}_X T(Y,Z) - T(X,\nabla^{\mathrm{II}}_Y Z) + T(X,T(Y,Z)) \\ &+ T(\nabla^{\mathrm{II}}_X Y, Z) - T(\nabla^{\mathrm{II}}_Y X, Z). \end{aligned}$$

Portanto,

$$R^{\mathrm{II}}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + Q_1(X,Y)Z + Q_2(X,Y)Z,$$

onde Q_1 e Q_2 foram definidos em (3.18). □

O próximo resultado mostra como construir um referencial ortonormal com respeito a métrica II a partir de um referencial ortonormal na métrica $\langle\,,\rangle$. Em outras palavras,

Proposição 3.1.6. *Sejam M^n uma hipersuperfície orientada de $\overline{M}^{n+1}$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ um referencial ortonormal local em M^n tal que $A(e_i)=\kappa_i e_i$, para cada $i=1,\ldots,n$. Se det$(A)\neq 0$, então*

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{|k_1|}}e_1,\ldots,E_n = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}}e_n, \tag{3.22}$$

é um referencial ortonormal local em M^n com respeito a métrica II com assinatura [1]

$$\varepsilon_i = II(E_i,E_i) = sinal(\kappa_i),$$

para $i=1,\ldots,n$.

Demonstração. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \mathrm{II}(E_i,E_i) &= \left\langle A\left(\frac{e_i}{\sqrt{|k_i|}}\right), \frac{e_i}{\sqrt{|k_i|}}\right\rangle \\ &= \frac{1}{|k_i|}\langle A(e_i), e_i\rangle = \frac{k_i}{|k_i|} = \mathrm{sinal}\,(\kappa_i). \end{aligned}$$

[1] Se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base ortonormal de V, a matriz $(a_{ij})=(g_{ij})$ é diagonal e então $g_{ij}=\delta_{ij}\varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j=\langle e_j,e_j\rangle=\pm1$. Ordenando de maneira que os sinais positivos venham primeiro, apenas trocando a ordem dos vetores da base, obtemos a assinatura $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$.

Além disso, $\mathrm{II}(E_i, E_j) = 0$, para $i \neq j$. Por fim, observemos que o conjunto $E_1, \ldots, E_n$ forma uma base para para M^n, pois

$$\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_n E_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\sqrt{|k_1|}} e_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\sqrt{|k_n|}} e_n = 0,$$

usando o fato de $\det(A) \neq 0$, obtemos que a equação acima só é satisfeita se, e somente se, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Portanto, $E_1, \ldots, E_n$ é um referencial ortonormal com respeito a métrica II. □

No resultado a seguir expressamos uma relação importante envolvendo o operador de forma e da curvatura média.

Proposição 3.1.7. *Sejam M^n uma hipersuperfície orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ com curvatura média H. Então*

(a) $tr_{II}(Ric) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j II\Big(\overline{R}(E_j, E_i)E_j, E_i\Big) + n(n-1)H;$

(b)
$$\begin{aligned} tr_{II}(\widehat{Q_1}) + tr_{II}(\widehat{Q_2}) = &\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j II\Big(\overline{R}(E_j, E_i)E_j, E_i\Big) - (n-1)\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j II\Big(\overline{R}(N, E_j)N, E_j\Big) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \overline{\nabla}\, \overline{R}(N, E_j, E_j, E_i, E_i) \\ &+ II(T, T) - II(tr_{II}(T), tr_{II}(T)). \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} tr_{II}(\widehat{Q_1}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j II(Q_1(E_i, E_j)E_i, E_j), \\ tr_{II}(\widehat{Q_2}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j II(Q_2(E_i, E_j)E_i, E_j). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Demonstração. Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M^n tal que $A(e_i) = \kappa_i e_i$, com $1 \leq i \leq n$. Pela Proposição 3.1.6, podemos considerar o II-referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$, para cada $1 \leq i \leq n$. Para mostrar o item (a), relembremos a expressão para curvatura de Ricci proveniente da equação de Gauss (2.26),

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{R}(X, e_j)Y, e_j \rangle + nH\langle A(X), Y \rangle - \langle A(X), A(Y) \rangle. \tag{3.24}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Agora de (3.22) e (3.24), obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{\mathrm{II}}(\mathrm{Ric}) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathrm{Ric}(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i} \mathrm{Ric}(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i} \langle \overline{R}(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle + nH \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i} \langle A(e_i), e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i} \langle A(e_i), A(e_i) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathrm{II}\left(\overline{R}(E_j, E_i)E_j, E_i\right) + n(n-1)H,
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

onde foi usado que,

$$
\kappa_i = \varepsilon_i \sqrt{|\kappa_i|}\sqrt{|\kappa_i|}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.26}
$$

Por outro lado, da definição (3.23) de $\widehat{Q_1}$, escrevemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q_1}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathrm{II}(Q_1(E_i, E_j)E_i, E_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \left(\mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_j} T)(E_i, E_i), E_j\right) - \mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_i} T)(E_j, E_i), E_j\right) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \left(\mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_i} T)(E_j, E_j), E_i\right) - \mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_i} T)(E_j, E_i), E_j\right) \right).
\end{aligned}
$$

Aplicando a Proposição 3.1.4 a expressão acima,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q_1}) = &- \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \overline{R}(A(E_i), E_j)E_j, E_i \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j C_N(E_i, E_j) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle A(E_j), E_i \rangle \langle \overline{R}(N, E_j)N, E_i \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle A(E_i), E_i \rangle \langle \overline{R}(N, E_j)E_j, N \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \overline{\nabla}\, \overline{R}(N, E_j, E_j, E_i, E_i),
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
C_N(E_i, E_j) = &\langle \overline{R}(N, T(E_i, E_j))E_j, E_i \rangle + \langle \overline{R}(N, E_j)T(E_i, E_j), E_i \rangle \\
&+ \langle \overline{R}(N, E_j)E_j, T(E_i, E_i) \rangle.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Tomando a soma em (3.28) em i, j e reindexando i por j no primeiro somatório, segue da primeira identidade de Bianchi,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j C_N(E_i, E_j) = &\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \overline{R}(N, E_i)T(E_i, E_j), E_j \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \overline{R}(N, E_j)E_j, T(E_i, E_i) \rangle.
\end{aligned}
$$

Logo a Proposição 3.1.3 nos assegura que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j C_N(E_i,E_j) &= \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(\mathrm{II}(T(E_i,T(E_i,E_j)),E_j)-\mathrm{II}(T(E_i,E_j),T(E_i,E_j))\right)\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(\mathrm{II}(T(E_i,E_i),T(E_j,E_j))-\mathrm{II}(T(E_j,T(E_i,E_i)),E_j)\right)\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\mathrm{II}(Q_2(E_i,E_j))E_i,E_j)+\mathrm{II}(T,T)-\mathrm{II}(\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T),\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T))\\
&=\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q}_2)-\mathrm{II}(T,T)+\mathrm{II}(\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T),\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T)).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

A partir de (3.27), os outros termos são escritos como segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\overline{R}(A(E_i),E_j)E_j,E_i\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\overline{R}(E_i,E_j)E_j,A(E_i)\rangle\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{|\kappa_i|}\frac{\varepsilon_j}{|\kappa_j|}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_j,A(e_i)\rangle\\
&=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\kappa_j}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_i,e_j\rangle\\
&=-\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\mathrm{II}\left(\overline{R}(E_j,E_i)E_j,E_i\right).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Além disso, de (3.2), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle A(E_i),E_i\rangle\langle\overline{R}(N,E_j)E_j,N\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\mathrm{II}(E_i,E_i)\langle\overline{R}(N,E_j)E_j,N\rangle\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i^2\frac{\varepsilon_j}{|\kappa_j|}\langle\overline{R}(N,e_j)e_j,N\rangle\\
&=-n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\kappa_j}\langle\overline{R}(N,e_j)N,e_j\rangle
\end{aligned} \tag{3.31}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle A(E_i),E_j\rangle\langle\overline{R}(N,E_j)N,E_i\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\mathrm{II}(E_i,E_j)\langle\overline{R}(N,E_j)N,E_i\rangle\\
&=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\left\langle\overline{R}(N,E_j)N,\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_i\mathrm{II}(E_j,E_i)E_i\right\rangle\\
&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{|\kappa_j|}\langle\overline{R}(N,e_j)N,e_j\rangle\\
&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\kappa_j}\langle\overline{R}(N,e_j)N,e_j\rangle\\
&=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\mathrm{II}\left(\overline{R}(N,E_j)N,E_j\right).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, inserindo (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) em (3.27) obtemos o item (*b*). □

Uma consequência interessante das Proposições 3.1.7 e 3.1.6 é a seguinte relação entre as curvaturas de Ricci de M^n.

Corolário 3.1.3. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada de M^{n+1}. Então as curvaturas de Ricci de M^n com respeito as métricas $\langle\,,\rangle$ e II satisfazem a relação:*

$$Ric^{II}(X,Y) = Ric(X,Y) + \widehat{Q_1}(X,Y) + \widehat{Q_2}(X,Y).$$

Demonstração. Primeiramente consideremos o referencial ortonormal (3.22). Da definição de curvatura de Ricci 2.4.5 e da relação (3.17), escrevemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{\mathrm{II}}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mathrm{II}(R^{\mathrm{II}}(X,E_i)Y,E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mathrm{II}(R(X,E_i)Y,E_i) + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mathrm{II}(Q_1(X,E_i)Y,E_i)\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mathrm{II}(Q_2(X,E_i)Y,E_i),\end{aligned} \tag{3.33}$$

para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Uma vez que $\det(A)\neq 0$, temos que $\kappa_i\neq 0$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Assim, $A^{-1}(e_i)=\kappa_i^{-1}e_i$ para cada $i=1,\ldots,n$ e consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{\mathrm{II}}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{|\kappa_i|}\mathrm{II}(R(X,e_i)Y,e_i) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{|\kappa_i|}\mathrm{II}(Q_1(X,e_i)Y,e_i)\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{|\kappa_i|}\mathrm{II}(Q_2(X,e_i)Y,e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(R(X,e_i)Y,\kappa_i^{-1}(e_i)) + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(Q_1(X,e_i)Y,\kappa_i^{-1}(e_i))\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(Q_2(X,e_i)Y,\kappa_i^{-1}(e_i))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(R(X,e_i)Y,A^{-1}(e_i)) + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(Q_1(X,e_i)Y,A^{-1}(e_i))\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(Q_2(X,e_i)Y,A^{-1}(e_i)).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Agora, usando (3.2),

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{\mathrm{II}}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)Y,e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle Q_1(X,e_i)Y,e_i\rangle\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\langle Q_2(X,e_i)Y,e_i\rangle,\end{aligned} \tag{3.35}$$

ou seja

$$\mathrm{Ric}^{\mathrm{II}}(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) + \widehat{Q_1}(X,Y) + \widehat{Q_2}(X,Y),$$

como desejado. $\square$

Observe que fazendo $X = Y = E_i$ no Corolário 3.1.3 e tomando a soma em $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathrm{Ric}^{\mathrm{II}}(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathrm{Ric}(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \widehat{Q_1}(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \widehat{Q_2}(E_i, E_i) \\ &= \mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\mathrm{Ric}) + \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathrm{II}(Q_1(E_i, E_j)E_i, E_j) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathrm{II}(Q_2(E_i, E_j)E_i, E_j).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Portanto, obtemos a seguinte relação para a curvatura escalar de M^n com respeito a métrica II, onde $\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}$ é definido, de maneira usual, como em (2.12).

$$S_{\mathrm{II}} := \mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\mathrm{Ric}^{\mathrm{II}}) = \mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\mathrm{Ric}) + \mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q_1}) + \mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q_2}), \tag{3.37}$$

No caso em que a curvatura do ambiente é constante, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.1.4. *Com as notações da Proposição 3.1.7, se M^n é uma hipersuperfície orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}(c)$, então*

(a) $tr_{II}(Ric) = c(n-1)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_j} + n(n-1)H;$

(b) $tr_{II}(\widehat{Q_1}) + tr_{II}(\widehat{Q_2}) = II(T,T) - II(tr_{II}(T), tr_{II}(T)).$

Demonstração. Para mostrar o item (a), como $\overline{M}^{n+1}(c)$ possui curvatura seccional constante com respeito a métrica $\langle\, , \rangle$, de (2.4.1),

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathrm{II}\left(\overline{R}(E_j, E_i)E_j, E_i\right) \\ &\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} c\varepsilon_i \varepsilon_j \left(\langle E_j, E_j\rangle \mathrm{II}(E_i, E_i) - \langle E_j, E_i\rangle \mathrm{II}(E_i, E_j)\right) \\ &\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} c\varepsilon_i \varepsilon_j \left(\varepsilon_i \langle E_j, E_j\rangle - \langle E_j, E_i\rangle\langle E_j, A(E_i)\rangle\right).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Da relação (3.26),

$$\langle E_j, E_j\rangle = \frac{\varepsilon_j}{\kappa_j}\langle e_j, e_j\rangle \quad \text{e} \quad \langle E_j, E_i\rangle\langle E_j, A(E_i)\rangle = \frac{\varepsilon_i\varepsilon_j}{\kappa_j}\langle e_i, e_j\rangle^2$$

Substituindo em (3.25)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\mathrm{Ric}) &= c(n-1)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_j}\langle e_j, e_j\rangle + nH\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i}\langle A(e_i), e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i}\langle A(e_i), A(e_i)\rangle \\ &= c(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\kappa_i} + n(n-1)H.\end{aligned}$$

Para mostrarmos o item (b), observe inicialmente que pelo Corolário 3.1.2 e reindexando i por j no primeiro termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q_1}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j \mathrm{II}(Q_1(E_i,E_j)E_i,E_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j \left(\mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_j}T)(E_i,E_i),E_j\right) - \mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_i}T)(E_j,E_i),E_j\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j \left(\mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_i}T)(E_j,E_j),E_i\right) - \mathrm{II}\left((\nabla^{\mathrm{II}}_{E_i}T)(E_j,E_j),E_i\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que a curvatura seccional é constante, da equação (3.28) temos

$$C_N(E_i,E_j) = 0,$$

logo pela equação (3.29) concluímos que

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(\widehat{Q}_2) = \mathrm{II}(T,T) - \mathrm{II}(\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T),\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T)),$$

mostrando o que desejávamos. □

Agora vamos obter uma expressão para $\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T)$. Pela Proposição 3.1.2, escrevemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i T(E_i,E_i) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}T(e_i,e_i) \\
&= \frac{1}{2}A^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\nabla A(e_i,e_i) + \overline{R}(N,e_i)e_i\right).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Por outro lado, sendo $\log|G| = \sum_{i=1}^{n}\log|\kappa_i|$ uma função suave em M^n, segue da compatibilidade da conexão ∇ com a métrica $\langle\,,\rangle$,

$$\begin{aligned}
X(\log|G|) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}X(\kappa_i) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}X\langle A(e_i),e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\langle\nabla_X A(e_i),e_i\rangle + \langle A(e_i),\nabla_X e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\langle\nabla A(e_i,X),e_i\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Usando a equação de Codazzi (2.27) e do Lema 3.1.1,

$$\begin{aligned}
X(\log|G|) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\langle\nabla A(X,e_i),e_i\rangle + \langle\overline{R}(X,e_i)N,e_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\langle\nabla A(e_i,e_i),X\rangle - \langle\overline{R}(N,e_i)e_i,X\rangle\right).
\end{aligned}$$

Perceba que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{G}\mathrm{II}(X,\nabla^{\mathrm{II}}G) &= \frac{1}{G}X(G) = X(\log|G|) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\langle\nabla A(e_i,e_i),X\rangle - \langle\overline{R}(N,e_i)e_i,X\rangle\right),
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Uma vez que

$$
\mathrm{II}(X,\nabla^{\mathrm{II}}G) = \langle X, A(\nabla^{\mathrm{II}}G)\rangle,
$$

podemos escrever a expressão (3.40) como segue

$$
\frac{1}{G}A(\nabla^{\mathrm{II}}G) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\nabla A(e_i,e_i) - \overline{R}(N,e_i)e_i\right)
$$

Reescrevendo (3.39), chegamos à:

$$
\begin{aligned}
A(\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T)) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\nabla A(e_i,e_i) + \overline{R}(N,e_i)e_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\left(\nabla A(e_i,e_i) - \overline{R}(N,e_i)e_i + 2\overline{R}(N,e_i)e_i\right) \\
&= \frac{1}{2G}A(\nabla^{\mathrm{II}}G) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}\overline{R}(N,e_i)e_i.
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Logo, de (3.41),

$$
\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T) = \frac{1}{2G}\nabla^{\mathrm{II}}G + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\kappa_i}A^{-1}\left(\overline{R}(N,e_i)e_i\right),
$$

e usando (3.26), escrevemos

$$
\frac{1}{\kappa_i}A^{-1}\left(\overline{R}(N,e_i)e_i\right) = \varepsilon_i A^{-1}\left(\overline{R}(N,E_i)E_i\right).
$$

Portanto

$$
\mathrm{tr}_{\mathrm{II}}(T) = \frac{1}{2G}\nabla^{\mathrm{II}}G + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i A^{-1}\left(\overline{R}(N,E_i)E_i\right).
$$

Neste momento, relembremos a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Uma hipersuperfície orientada M^n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ é dita ser convexa se a sua segunda forma fundamental é positiva (ou negativa) definida em todos os pontos. Equivalentemente, se suas curvaturas principais possuem o mesmo sinal em M^n.*

Portanto, aplicando a Proposição 3.1.7 a equação (3.37), temos a seguinte fórmula geral de Schenider para hipersuperfícies em ambientes arbitrários:

Teorema 3.1.1. *Seja M^n uma hipersuperfície convexa imersa em $\overline{M}^{n+1}$. Então a curvatura escalar S_{II} da métrica Riemanniana definida pela segunda forma fundamental II é dada por*

$$S_{II} = F(\overline{R}) + n(n-1)H + \|T\|_{II}^2 - \frac{1}{4G^2}\|\nabla^{II}G\|_{II}^2, \tag{3.42}$$

onde

$$\begin{aligned} F(\overline{R}) = {} & 2\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j II\Big(\overline{R}(E_j,E_i)E_j,E_i\Big) - (n-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j II\Big(\overline{R}(N,E_j)N,E_j\Big) \\ & + \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\overline{\nabla}\,\overline{R}(N,E_j,E_j,E_i,E_i) - \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i II\Big(\nabla^{II}G, A^{-1}\Big(\overline{R}(N,E_i)E_i\Big)\Big) \\ & - \left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i A^{-1}(\overline{R}(N,E_i)E_i)\right\|_{II}^2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Encerramos esta seção com o caso em que M^n esta imersa em $\overline{M}^{n+1}(c)$:

Corolário 3.1.5. *Com a notação do Teorema 3.1.1, se M^n é uma hipersuperfície orientada de $\overline{M}^{n+1}(c)$, então*

$$S_{II} = (n-1)\left(nH + \frac{c\sigma_{n-1}}{G}\right) + \|T\|_{II}^2 - \frac{1}{4G^2}\|\nabla^{II}G\|_{II}^2, \tag{3.44}$$

onde $\sigma_{n-1} = \sum_{i_1<\ldots<i_{n-1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{n-1}}$.

Demonstração. Uma vez que o espaço ambiente possui curvatura seccional constante, segue que $\overline{\nabla}\,\overline{R} = 0$. Pelo Corolário 2.4.1 e da equação (3.38), temos que

$$\begin{aligned} 2\sum_{i,j=1}^{n} & \varepsilon_i\varepsilon_j \mathrm{II}\left(\overline{R}(E_j,E_i)E_j,E_i\right) - (n-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\mathrm{II}\left(\overline{R}(N,E_j)N,E_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\kappa_j}\left(2c(n-1) - c(n-1)\right) \\ & = \frac{c(n-1)\sigma_{n-1}}{G}. \end{aligned}$$

Além disso, de (3.8), $\overline{R}(N,E_i)E_i = 0$, para todo $i = 1,\ldots,n$. Portanto, inserindo em (3.42) obtemos (3.44). □

3.2 O TEOREMA DE LIEBMANN

Neste seção temos como objetivo enunciar e demonstrar o teorema de Liebmann como aplicação da fórmula obtida no Teorema 3.1.1, para isso precisaremos de alguns resultados auxiliares. O primeiro deles garante a existência de um ponto elíptico.

Proposição 3.2.1. *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície compacta e orientada imersa em $\overline{M}^{n+1}(c)$. No caso em que $c = 1$, assuma que M^n esta imersa no hemisfério aberto $\mathbb{S}^{n+1}_+$. Então existe um ponto $p_0 \in M^n$ onde as curvaturas principais $\kappa_i(p_0) > -c$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Primeiramente denotemos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}^{n+1}$. Esta demonstração será divida em três casos:

__**Caso $c = 0$:**__ Consideremos a função suave

$$\begin{aligned} u : M^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto u(p) = |\psi(p)|^2. \end{aligned}$$

Por simplicidade ocultaremos o ponto $p \in M^n$ em $\psi(p)$. Perceba que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle X, \nabla u \rangle = X\langle \psi, \psi \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X \psi, \psi \rangle.$$

Consequentemente, de (2.29) obtemos

$$\langle X, \nabla u \rangle = 2\langle X, \psi \rangle \quad \Longrightarrow \quad \nabla u = 2\psi^\top, \tag{3.45}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, em que

$$\psi = \psi^\top + \langle \psi, N \rangle N, \tag{3.46}$$

onde $\psi^\top$ denota a componente tangente do vetor posição ψ em M^n.

Em seguida, usando (3.45) e (3.46), calculamos a Hessiana de u

$$\nabla^2 u(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla u, Y \rangle = 2\langle \nabla_X \psi^\top, Y \rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.47}$$

Mas, das fórmulas de Gauss (2.24) e Weingarten (2.25),

$$X = \overline{\nabla}_X \psi = \nabla_X \psi^\top - \langle \psi, N \rangle A(X), \tag{3.48}$$

logo, substituindo (3.48) em (3.47), obtemos

$$\nabla^2 u(X, Y) = 2\langle X, Y \rangle + 2\langle \psi, N \rangle \langle A(X), Y \rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.49}$$

De (3.46)

$$\langle \psi, \psi \rangle = |\psi^\top|^2 + \langle \psi, N \rangle^2,$$

consequentemente, segue de (3.45)

$$u = |\psi|^2 = \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \langle \psi, N \rangle^2. \tag{3.50}$$

Portanto, sendo M^n compacta, existe um ponto $p_0 \in M^n$ tal que a função u atinge o máximo. Logo, em $p_0 \in M^n$,

$$\nabla u(p_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u(p_0)(v,v) \leq 0, \tag{3.51}$$

para todo $v \in T_{p_0}M$. Substituindo em (3.50) temos $u(p_0) = \langle \psi, N\rangle^2(p_0)$. Escolhendo a orientação de M^n se necessário, podemos assumir que

$$\langle \psi, N\rangle(p_0) = -\sqrt{u(p_0)} < 0.$$

Considerando agora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_{p_0}M$ tal que diagonaliza A. Temos que, $A(e_i) = \kappa_i e_i$, onde κ_i denotam as curvaturas principais de M^n, para todo $i = 1, \ldots, n$. Então, em $p_0 \in M^n$, segue de (3.49) e (3.2),

$$0 \geq \nabla^2 u(p_0)(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i\rangle + \langle \psi, N\rangle(p_0)\langle A(e_i), e_i\rangle = 1 - k_i(p_0)\sqrt{u(p_0)},$$

e daí

$$k_i(p_0) \geq \frac{1}{\sqrt{u(p_0)}} > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Caso $c = -1$: Pelo exemplo 2.2.3 sabemos que dados dois pontos $x, y \in \mathbb{H}^{n+1}$, a distância hiperbólica entre eles é dada por

$$d(x,y) = \cosh^{-1}(-\langle x, y\rangle).$$

Fixemos um ponto $a \in \mathbb{H}^{n+1}$ e defina a função suave $u : M^n \to \mathbb{R}$ dada por $u = \langle a, \psi\rangle$. Uma vez que a e ψ são vetores tipo-tempo, segue da Proposição 2.2.1,

$$u = \langle a, \psi\rangle \leq -1 < 0.$$

Observemos que $u < -1$ em M^n. De fato, se $u(p) = -1$, para todo $p \in M^n$, teriamos que a função distância $d(a, \psi) = \cosh^{-1}(-u)$ seria tal que

$$d(a, \psi) = \cosh^{-1}(1) = 0.$$

Sendo d uma distância, segue que $\psi(p) = a$ para todo $p \in M^n$, o que contradiz o fato de ψ ser uma imersão. Logo devemos ter $u < -1$ em M^n. Dessa forma, a função $d(a, \psi)$ esta bem definida e pela Proposição 2.2.3 é contínua. Afirmamos existe um ponto $p_0 \in M^n$ tal que a função u atinge o mínimo. De fato, sendo M^n compacta, segue da continuidade de d, que existe um ponto $p_0 \in M^n$ tal que $d(a, \psi(p_0))$ atinge o máximo. Assim,

$$\nabla d(a, \psi)(p_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 d(a, \psi)(p_0)(v,v) \leq 0, \tag{3.52}$$

para todo $v \in T_{p_0}M$. Vejamos que os gradientes $d(a,\psi)$ e u estão relacionados como segue,

$$\nabla d(a,\psi) = -\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\nabla u, \tag{3.53}$$

em $p_0 \in M^n$, $\nabla u(p_0) = 0$. Isso mostra que p_0 é um ponto crítico para u.

Mostraremos agora que p_0 é um ponto de mínimo para u. Com efeito, tomando a segunda derivada em (3.53), temos que a Hessiana da função u satisfaz:

$$\nabla^2 d(a,\psi)(X,Y) = -\frac{u}{(u^2-1)^{3/2}}\langle \nabla u, X\rangle\langle \nabla u, Y\rangle - \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\nabla^2 u(X,Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Aplicando a igualdade acima em p_0, segue de (3.52) que

$$0 \geq \nabla^2 d(a,\psi)(p_0)(X,Y) = -\frac{1}{\sqrt{u^2(p_0)-1}}\nabla^2 u(p_0)(X,Y),$$

e portanto $\nabla^2 u(p_0) \geq 0$, mostrando que p_0 é um ponto de mínimo para u.

Por outro lado, como $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ podemos escrever a seguinte decomposição:

$$a = a^\top + \langle a, N\rangle N - u\psi,$$

onde $a^\top$ denota a componente tangencial de a em M^n. Consequentemente, temos a seguinte relação pitagórica:

$$-1 = \langle a, a\rangle = |a^\top|^2 + \langle a, N\rangle^2 - u^2.$$

Agora usando as fórmulas de Gauss (2.24) e Weingarten (2.25),

$$\nabla u = a^\top \quad \text{e} \quad \nabla_X a^\top = uX + \langle a, N\rangle A(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim

$$\langle a, N\rangle^2 = |\nabla u|^2 + 1 - u^2, \tag{3.54}$$

e

$$\nabla^2 u(X,Y) = u\langle X, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle A(X), Y\rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Avaliando em $p_0 \in M^n$, segue que de $\nabla u(p_0) = 0$ e (3.54) que

$$\langle a, N\rangle^2(p_0) = u(p_0)^2 - 1 > 0.$$

Mudando a orientação de M^n, se necessário, podemos assumir que

$$\langle a, N\rangle(p_0) = \sqrt{u(p_0)^2 - 1} > 0.$$

Assim como no caso $c = 0$, consideremos uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_{p_0}M$ tal que $A(e_i) = \kappa_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Então, de (3.2) segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq \nabla^2 u(p_0)(e_i, e_i) &= u(p_0)\langle e_i, e_i\rangle + \langle a, N\rangle(p_0)\langle A(e_i), e_i\rangle \\ &= u(p_0) + \kappa_i(p_0)\langle a, N\rangle(p_0), \end{aligned}$$

que implica em

$$\kappa_i(p_0) \geq -\frac{u(p_0)}{\langle a, N\rangle(p_0)} = \frac{\sqrt{1 + \langle a, N\rangle^2(p_0)}}{\langle a, N\rangle(p_0)} > 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

<u>Caso $c = 1$:</u> Seja agora $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}_+$ uma hipersuperfície compacta imersa no hemisfério aberto $\mathbb{S}^{n+1}_+$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ centrada no ponto $a \in \mathbb{S}^{n+1}_+$. Assim como no caso $c = -1$, o Exemplo 2.2.4 garante que a distância esférica ao centro é dada por

$$d(a, \psi) = \cos^{-1}(u), \quad u = \langle a, \psi\rangle.$$

Como a função distância é contínua em todo seu domínio e está definida em um compacto então admite ponto de máximo, seja $p_0 \in M^n$ tal ponto. Afirmamos que em p_0 a função u atinge seu mínimo, $0 < u(p_0) < 1$. De fato, observe que

$$\nabla d(a, \psi) = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\nabla u,$$

e quando avaliamos em p_0, concluímos $\nabla u(p_0) = 0$, isto nos diz que p_0 também é ponto crítico de u. Agora, perceba que

$$\nabla^2 d(a, \psi)(X, Y) = -\frac{u}{(1 - u^2)^{3/2}}\langle \nabla u, X\rangle\langle \nabla u, Y\rangle - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\nabla^2 u(X, Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Quando avaliado em p_0, obtemos $\nabla^2 u(p_0) \geq 0$. Logo, u atinge o mínimo em p_0. Para calcular o gradiente e a Hessiana de u, prosseguimos de maneira análoga ao caso anterior, sendo assim

$$\nabla u = a^\top \quad \text{e} \quad \nabla^2 u(X, Y) = \langle a, N\rangle\langle A(X), Y\rangle - u\langle X, Y\rangle \tag{3.55}$$

onde $a = a^\top + \langle a, N\rangle N + u\psi$, em particular

$$1 = |\nabla u|^2 + \langle a, N\rangle^2 + u^2.$$

Portanto, em p_0 segue que $\nabla u(p_0) = 0$, desta forma

$$\langle a, N\rangle^2(p_0) = 1 - u^2(p_0) > 0,$$

mudando a orientação de M^n se necessário, segue que

$$\langle a, N\rangle(p_0) = \sqrt{1-u^2(p_0)} > 0.$$

Além disso, $\nabla^2 u(v,v) \geq 0$ para todo $v \in T_{p_0}M$. Considerando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $T_{p_0}M$ tal que $A(e_i) = \kappa_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$, concluímos de (3.55)

$$k_i(p_0) \geq \frac{u(p_0)}{\langle a, N\rangle(p_0)} = \frac{\sqrt{1-\langle a, N\rangle^2(p_0)}}{\langle a, N\rangle(p_0)} > -1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

□

O próximo exemplo mostra que a hipótese da hipersuperfície M^n estar imersa em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$ é de fato necessária.

Exemplo 3.2.1. *Seja r um número real satisfazendo $0 < r < 1$. A hipersuperfície $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ de $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ é tal que as suas curvaturas principais satisfazem:*

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad e \quad \kappa_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Demonstração. Seja k um inteiro satisfazendo $0 \leq k < n$. Vamos definir a função suave

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^{n+1}(1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+2})$. Para $r > 0$, consideremos $M^n = f^{-1}(r^2)$. Se $x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in M^n$, então

$$M^n = \left\{ x \in \mathbb{S}^{n+1}(1); \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 = r^2 \text{ e } \sum_{i=k+2}^{n+2} x_i^2 = 1 - r^2 \right\} = \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}).$$

Agora, para todo campo tangente $X = (X_1, \ldots, X_{n+2}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$, temos

$$\langle \overline{\nabla} f(x), X\rangle = \langle 2u(x), X\rangle,$$

onde $u(x) = (x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ e $u = u^\top + \langle u, x\rangle x = u^\top + r^2 x$. Portanto, $\overline{\nabla} f(x) = 2(u(x) - r^2 x)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla} f(x), \overline{\nabla} f(x)\rangle &= 4\langle u(x) - r^2 x, u(x) - r^2 x\rangle \\ &= 4(\langle u(x), u(x)\rangle - r^2\langle u(x), x\rangle - r^2\langle x, u(x)\rangle + r^4\langle x, x\rangle) \\ &= 4r^2(1-r^2), \end{aligned}$$

então

$$|\overline{\nabla} f(x)| = 2r\sqrt{1-r^2}.$$

Daí, definimos o campo normal dado por

$$N(x) = -\frac{\overline{\nabla} f(x)}{|\overline{\nabla} f(x)|} = \frac{-u(x) + r^2 x}{r\sqrt{1-r^2}},$$

segue que,

$$\overline{\nabla}_X N = \overline{\nabla}_X \frac{-u(x) + r^2 x}{r\sqrt{1-r^2}} = -\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\overline{\nabla}_X u(x) + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\overline{\nabla}_X x.$$

Pela fórmula de Weingarten (2.25), temos

$$-\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\overline{\nabla}_X u(x) + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\overline{\nabla}_X x = -A(X) \tag{3.56}$$

Como $A(e_i) = k_i e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, fazendo $X = e_i$ em (3.56), obtemos

$$\kappa_1 = \ldots = \kappa_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{e} \quad \kappa_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

□

Em seguida, enunciaremos o clássico Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas com fronteira vazia:

Lema 3.2.1 (Gauss-Bonnet)**.** *Seja M uma superfície compacta orientada, então*

$$\int_M K d\sigma = 2\pi\chi(M).$$

Por fim, o último resultado que precisaremos é um caso particular do (ABE; KOIKE; YAMAGUCHI, 1987, Teorema 5.1) que classifica hipersuperfícies totalmente umbílicas em formas espaciais Riemannianas.

Lema 3.2.2. *Seja M^n uma hipersperfície compacta, orientada e totalmente umbílica de uma forma espacial $\overline{M}^{n+1}(c)$. Então M^n é isométrica à uma esfera.*

Finalmente, mostremos o resultado principal desta dissertação:

Teorema 3.2.1. *As únicas superfícies compactas as quais estão imersas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, ou no hemisfério aberto $\mathbb{S}^3_+$ com curvatura Gaussiana constante são as esferas totalmente umbílicas.*

Demonstração. Inicialmente, tomemos $n = 2$ no Corolário 2.6.5. Como $S = 2K$, segue que

$$2K = 2c + 4H^2 - |A|^2. \tag{3.57}$$

Por outro lado, do Teorema de Cayley-Hamilton [2]

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + GI = 0, \tag{3.58}$$

onde I denota o tensor identidade e $G = \det(A)$. Consequentemente, tomando o traço em (3.58)

$$|A|^2 - 4H^2 + 2G = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2G = 4H^2 - |A|^2.$$

Inserindo a igualdade acima em (3.57),

$$K = G + c. \tag{3.59}$$

Uma vez que $G = \kappa_1\kappa_2 > c^2$, independente qual seja o valor de c sempre teremos que $G > 0$. Diante disso, podemos usar o Corolário 3.1.5. Sendo K constante, de (3.59) devemos ter que, ou $K > 0$ ou $K - c > 0$. Logo, fazendo então $n = 2$ no Corolário 3.1.5,

$$S_{\mathrm{II}} = \left(2H + \frac{c\sigma_1}{G}\right) + \|T\|^2_{\mathrm{II}} - \frac{1}{4G^2}\|\nabla^{\mathrm{II}}G\|^2_{\mathrm{II}}. \tag{3.60}$$

Denotemos por K_{II} a curvatura Gaussiana de M^2 com respeito a métrica II. Sendo $\sigma_1 = 2H$ e $S_{\mathrm{II}} = 2K_{\mathrm{II}}$, (3.60) pode ser reescrita como segue

$$2K_{\mathrm{II}} = \frac{2(G+c)}{G}H + \|T\|^2_{\mathrm{II}} - \frac{1}{4G^2}\|\nabla^{\mathrm{II}}G\|^2_{\mathrm{II}}.$$

Agora, usando (3.59),

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{K}{K-c}H + \frac{1}{2}\|T\|^2_{\mathrm{II}} - \frac{1}{8(K-c)^2}\|\nabla^{\mathrm{II}}K\|^2_{\mathrm{II}}. \tag{3.61}$$

Sendo K é constante, pela identidade (3.61) segue que

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{HK}{K-c} + \frac{1}{2}\|T\|^2_{\mathrm{II}} \geq \frac{HK}{K-c}, \tag{3.62}$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $T \equiv 0$.

Da identidade (3.58), vejamos que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$A^2(X) - 2HA(X) + GX = 0,$$

[2] Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $A : V \longrightarrow V$ linear e $p(x)$ o polinômio característico de A. Então, $p(A) = 0$.

e assim,

$$2H\langle A(X), X\rangle = |A(X)|^2 + G|X|^2 > 0,$$

uma vez que $G > 0$. Logo,

$$H\langle A(X), X\rangle > 0, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Isso implica que $H > 0$ (ou < 0) e $\langle A(X), X\rangle > 0$ (ou < 0) para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, este último garante que M^2 é convexa. Escolhemos então a orientação tal que $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ e aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para as curvaturas principais, obtemos

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \geq \sqrt{k_1 k_2} \quad \Longrightarrow \quad H \geq \sqrt{K - c}. \tag{3.63}$$

Relacionando (3.62) e (3.63), concluímos

$$K_{\mathrm{II}} \geq \frac{\sqrt{K-c}K}{K-c} = \frac{K}{\sqrt{K-c}} \quad \text{em} \quad M^2. \tag{3.64}$$

Sejam $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal para T_pM tal que $A(e_i) = k_i e_i$, com $i = 1, 2$. Escrevemos:

$$\mathrm{II}_{ij} = \mathrm{II}(e_i, e_j) = \langle A(e_i), e_j\rangle = \kappa_i g_{ij}.$$

Em forma matricial,

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, $\det(\mathrm{II}) = \det(A)\det(G)$, onde

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Denotando por dA e dA_{II} os elementos de área de M^2 com respeito a $\langle\, , \rangle$ e II, respectivamente, temos que

$$dA_{\mathrm{II}} = \sqrt{\det(A)}dA = \sqrt{K-c}\, dA, \tag{3.65}$$

Como M^2 é compacta com $\partial M = \emptyset$, segue do Teorema de Gauss-Bonnet 3.2.1 que

$$\int_M K dA = \int_M K_{\mathrm{II}} dA_{\mathrm{II}}.$$

Aplicando a desigualdade obtida em (3.64) acima,

$$\int_M K dA \geq \int_M \frac{K}{\sqrt{K-c}} dA_{\mathrm{II}}$$

e por (3.65),

$$\int_M K dA \geq \int_M \frac{K}{\sqrt{K-c}} dA_{\mathrm{II}} = \int_M K dA,$$

isto significa que as desigualdades em (3.64) e, consequentemente em (3.63), são igualdades. Assim,

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 2\sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \quad \Longleftrightarrow \quad (\sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2})^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa_1 = \kappa_2,$$

ou seja, M^2 é uma superfície totalmente umbílica de $\overline{M}^3(c)$ nos casos $c = -1, 0$, e no caso $c = 1$, de $\mathbb{S}^3_+$. Portanto, segue do Lema 3.2.2 que M^2 é uma esfera totalmente umbílica de $M^3(c)$. $\square$

REFERÊNCIAS

ABE, N.; KOIKE, N.; YAMAGUCHI, S. Congruence theorems for proper semi-riemannian hypersurfaces in a real space form. *Yokohama Mathematical Journal*, v. 35, p. 125–136, 1987.

ALEDO, J. A.; ALÍAS, L. J.; ROMERO, A. A new proof of liebmann classical rigidity theorem for surfaces in space forms. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, JSTOR, p. 1811–1824, 2005.

ALÍAS, L. J. Análisis geométrico y geometría global de superficies: Una introducción elemental. *XIV Escola de Geometria Diferencial*, 2006.

CARMO, M. P. do. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

HADAMARD, J. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, v. 3, p. 331–387, 1897.

HAESEN, S. Some characterizations of totally umbilical surfaces in three-dimensional warped product spaces. *Monatshefte für Mathematik*, Springer, v. 152, p. 303–314, 2007.

HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. [S.l.]: BG Teubner, 1909. v. 7.

KOUTROUFIOTIS, D. Two characteristic properties of the sphere. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 44, n. 1, p. 176–178, 1974.

LIEBMANN, H. Eine neue eigenschaft der kugel. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, v. 1899, p. 44–55, 1899.

MONTIEL, S.; ROS, A. *Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. Differential Geometry (B. Lawson ed.), Pitamn Mono. 52*. [S.l.]: Longman, New York, 1991.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. [S.l.]: Academic press, 1983.

RATCLIFFE, J. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2010.

ROS, A. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. *Revista Matemática Iberoamericana*, v. 3, n. 3, p. 447–453, 1987.

ROS, A. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 27, n. 2, p. 215–220, 1988.

SCHNEIDER, R. Zur affinen differentialgeometrie im großen. i. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 101, n. 5, p. 375–406, 1967.

SCHNEIDER, R. Closed convex hypersurfaces with second fundamental form of constant curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 35, n. 1, p. 230–233, 1972.

SIMON, U. Characterizations of the sphere by the curvature of the second fundamental form. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 55, n. 2, p. 382–384, 1976.

TU, L. W. *An introduction to manifolds*. [S.l.]: Springer., 2011.