



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Everlon Figueirôa dos Santos

**Modelo SIR Estruturado com Tempo de Infecção:
Teoria e Implementação Numérica**

Recife

2024

Everlon Figueirôa dos Santos

**Modelo SIR Estruturado com Tempo de Infecção:
Teoria e Implementação Numérica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho

Recife
2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Santos, Everlon Figueirôa dos.

Modelo SIR estruturado com tempo de infecção: teoria e implementação numérica / Everlon Figueirôa Dos Santos. - Recife, 2024.

75 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

Orientação: César Augusto Rodrigues Castilho.

Inclui referências e apêndice.

1. Modelo epidêmico SIR; 2. Tempo de infecção; 3. Modelo numérico; 4. Equações diferenciais parciais; 5. Equações diferenciais ordinárias. I. Castilho, César Augusto Rodrigues. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

EVERLON FIGUEIRÔA DOS SANTOS

MODELO SIR ESTRUTURADO COM TEMPO DE
INFECÇÃO: TEORIA E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-graduação em Matemática da Universi-
dade Federal de Pernambuco como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Aprovado em: 29/07/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. João Antônio Miranda Gondim (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alex Dias Ramos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho à minha família e amigos,
e a todos que fizeram parte dessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Aos meus avós paternos e maternos, agradeço profundamente por terem dado origem àqueles que são a minha base, à minha tia-avó Maria de Lourdes cuja sua bondade foi um exemplo a seguir.

À minha amada tia, a quem carinhosamente chamo de vó Zeza, Maria, e aos meus queridos pais, Naralucia e Everaldo, minha eterna gratidão por serem a base do meu crescimento. Seu amor inabalável e constante incentivo foram fundamentais para que eu pudesse alcançar meus objetivos. Este trabalho só foi possível graças ao apoio incondicional de vocês.

À minha irmã, Éven, expresso minha sincera gratidão por sua presença constante ao longo de cada etapa desta jornada. Compartilhar cada momento contigo foi verdadeiramente significativo, e seu apoio inabalável foi fundamental para o meu caminho.

À todos meus amigos e colegas do departamento de matemática da UFPE, especialmente André, Antônio, Guilherme, Helden, João Pedro, Jonatas, Leonardo, Márcia, Matheus, Mauricio e Miguel. Agradeço por compartilharem comigo alegrias e tristezas, e por serem uma fonte constante de apoio e motivação.

Aos meus familiares e amigos, cujos nomes não estão aqui mencionados, mas que foram igualmente importantes em cada etapa desta jornada, meu sincero agradecimento por todo o carinho e encorajamento.

Ao doutor Danillo Barros e ao professor Fernando Nóbrega que me apresentaram à área de epidemiologia matemática e foram a fonte de diversas oportunidades durante minha trajetória.

Ao meu orientador, César Castilho, expresso minha profunda gratidão pela orientação excepcional, pelos ensinamentos enriquecedores, por me introduzir ao tema deste trabalho e pela amizade sincera.

Aos ilustres professores da banca, cujos comentários e sugestões serão de inestimável valor para o meu crescimento acadêmico e profissional, agradeço sinceramente pela oportunidade de aprendizado que proporcionam.

A todos os outros professores, com os quais tive a honra de aprender durante este curso, expresso minha sincera gratidão pela sabedoria compartilhada e pelo impacto transformador de seus ensinamentos.

Aos técnicos e servidores do Departamento de Matemática e demais departamentos pelos quais passei, agradeço pelo apoio e dedicação ao longo dos semestres letivos.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, que me permitiu dedicar integralmente aos meus estudos.

RESUMO

Este trabalho visa introduzir o modelo epidêmico SIR incorporando o conceito de “tempo de infecção” dos indivíduos na classe de infectados. Para isso, inicialmente será exposto o modelo clássico utilizando equações diferenciais ordinárias (EDOs). Posteriormente, serão realizadas modificações necessárias no sistema para integrar o tempo de infecção, resultando em um sistema com EDOs juntamente de uma equação diferencial parcial (EDP). Discutiremos então a forma da solução desse novo sistema e estabeleceremos a existência e unicidade dessa solução. Além disso, será proposto um modelo numérico de primeira ordem para simular o sistema modificado, juntamente com uma análise do comportamento de erro numérico de tal algoritmo. Por fim, serão apresentadas simulações com a finalidade de oferecer uma compreensão prática do funcionamento do modelo proposto.

Palavras-Chave: Modelo epidêmico SIR, Tempo de infecção, Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Parciais, Modelo numérico.

ABSTRACT

This work aims to introduce the SIR epidemic model by incorporating the concept of “infection time” of individuals in the infected class. As to achieve this, we will first present the classical model using ordinary differential equations (ODEs). Subsequently, necessary modifications will be made to the system to incorporate the infection time, resulting in a system with ODEs along with a partial differential equation (PDE). Then, we will discuss the form of the solution to this new system and establish the existence and uniqueness of this solution. Additionally, a first-order numerical model will be proposed to simulate the modified system, along with an analysis of the numerical error’s behavior. Finally, simulations will be presented to provide a practical understanding of the proposed model’s functioning.

Keywords: SIR epidemic model, Infection time, Ordinary Differential Equations, Partial Differential Equations, Numerical model.

LISTA DE FIGURAS

1	Esquema do modelo SIR	13
2	Esquema do modelo SIR estruturado	19
3	Na soma de Riemann nos pontos finais à direita podemos ignorar o termo inicial da partição.	43
4	Exemplo de dados SIR alcançado a partir da simulação	66
5	Representação dos infectados em relação à variância com médias fixadas	67
6	Representação dos infectados em relação à média com variância fixadas	67
7	Representação de t^* em relação à variação das variâncias com diversas médias fixadas	68
8	Representação de t^* em relação à variação das médias com diversas variâncias fixadas	68
9	Representação de $I(t^*)$ em relação à variação das variâncias com diversas médias fixadas	69
10	Representação de $I(t^*)$ em relação à variação das médias com diversas variâncias fixadas	69
11	Representação de R_∞ em relação à variação das variâncias com diversas médias fixadas	70
12	Representação de R_∞ em relação à variação das médias com diversas variâncias fixadas	70

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	11
2	MODELO SIR	13
3	MODELO SIR ESTRUTURADO COM TEMPO DE INFECÇÃO	17
3.1	REDUÇÃO DO SISTEMA	22
3.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO	25
3.3	EXTINÇÃO DA EPIDEMIA	37
4	MÉTODO NUMÉRICO	40
4.1	MÉTODO DE EULER-RIEMANN	42
4.2	CONVERGÊNCIA DO MÉTODO	44
5	SIMULAÇÕES	61
5.1	RESULTADOS	64
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	73
A	APÊNDICE: CÓDIGOS	74

1 INTRODUÇÃO

O modelo SIR é fundamental na compreensão matemática de como as doenças se propagam em uma população. Normalmente, durante o tempo em que ocorre a epidemia, este modelo descreve a dinâmica de três classes principais, Suscetíveis (S), que são os indivíduos da população que podem ser infectados pela doença, os Infectados (I), aqueles que estão com a doença ativa em seu organismo e são os únicos que podem ou não infectar outros indivíduos, e os Removidos (R), aqueles que ficaram imune à doença ou vieram a óbito. No entanto, para capturar nuances adicionais do processo de recuperação e infecção, como o tempo médio em que um indivíduo se recupera, então, da mesma forma de como foi proposta por Kermack e McKendrick [KM27] em 1927 nos primeiros protótipos do modelo, é necessário incorporar um elemento temporal adicional, que seria o tempo de infecção dos indivíduos.

Inicialmente, será apresentado o modelo SIR em sua forma mais simples, que consiste em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que dependem do tempo da epidemia, mas sem considerar o tempo de infecção. Este sistema descreve como as taxas de mudança no número de indivíduos em cada grupo dependem das interações entre eles e de parâmetros específicos, como a taxa de transmissão da doença e a taxa de recuperação. A análise inicial focará na formulação dessas equações.

A etapa seguinte envolve a modificação do modelo, incluindo-se o tempo de infecção. Tal modificação utiliza uma estrutura mais complexa, a equação diferencial parcial (EDP), a qual terá a função de descrever a densidade de infectados em relação ao tempo da epidemia e de infecção. Esse desenvolvimento teórico torna mais realista a descrição da dinâmica das epidemias, onde os indivíduos podem ter diferentes durações de recuperação e de infectividade. Para evitar qualquer dúvida sobre o modelo em questão, denominaremos o modelo modificado como “modelo SIR estruturado”.

Após estabelecer o modelo estruturado, sob uma perspectiva matemática, faremos suposições iniciais sobre os termos do modelo e utilizaremos essas premissas para encontrar uma solução e identificar condições adicionais aplicáveis ao sistema. Em seguida, faremos usos de técnicas de análise, como: limites, sequências, séries, o lema de Gronwall e a fórmula de Leibniz, com a finalidade de demonstrar a existência e unicidade da solução.

É apresentado um método numérico de primeira ordem para simular o modelo estruturado, este método será feito a partir de técnicas como o uso da soma de Rieman para aproximar os valores de integrais e o método de Euler para aproximação de derivadas. Após apresentar o método, uma análise sobre o seu erro será essencial para validar a precisão das simulações e sua capacidade de reproduzir os resultados esperados do modelo teórico.

No final de nossa pesquisa, incluímos algumas simulações. Explicando a motivação por trás da escolha dos valores iniciais e propondo uma perspectiva sobre a distribuição de probabilidade associada à taxa em quais os indivíduos infectados se tornam removidos. Essas simulações servem para ilustrar como o modelo extendido com o tempo de infecção funciona na prática.

Nesta dissertação, a apresentação do modelo SIR e sua estruturação foram baseadas nas de [MI17]. Além disso, para o desenvolvimento do método numérico, foram utilizadas as contribuições em [MP99]. No contexto da introdução de ideias sobre o modelo epidêmico, destacam-se as abordagens de [Mar15], [Nis07] e [Het00], que são de grande importância para o entendimento abrangente deste estudo. Por fim, os conceitos sobre análise real e sobre EDOs e EDPs podem ser encontrados em [Lim20], [eAOL16] e [Eva10]. Esses trabalhos fornecem bases teóricas sólidas e perspectivas complementares que enriquecem a análise proposta.

2 MODELO SIR

Assumindo que a população esteja dividida nas três classes: suscetíveis (S), infectados (I) e removidos (R). Para observar as alterações da quantidade de indivíduos nesses grupos durante um instante de tempo (t) da epidemia, usaremos a notação:

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{Quantidade de indivíduos da } \mathbf{população} \text{ no tempo } t, \\ S(t) &= \text{Quantidade de indivíduos } \mathbf{suscetíveis} \text{ no tempo } t, \\ I(t) &= \text{Quantidade de indivíduos } \mathbf{infectados} \text{ no tempo } t, \\ R(t) &= \text{Quantidade de indivíduos } \mathbf{removidos} \text{ no tempo } t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

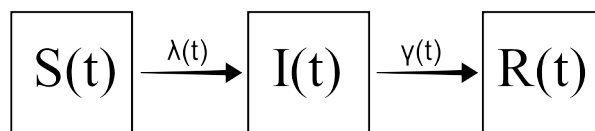
Mesmo a quantidade de indivíduos sendo um valor em $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, iremos considerar que as funções N, S, I e R são definidas tendo domínio e contradomínio em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Para algumas doenças pode ser necessário utilizar outras classes além dessas, como por exemplo em doenças onde os infectados não se tornam imediatamente infectados. Entretanto o modelo SIR, apesar de simples, se tornou em um paradigma para a modelagem de doenças infecciosas.

Para formalizar o modelo defina $\lambda(t)$ e $\gamma(t)$ como a *taxa per capita com que suscetíveis se tornam infectados* e a *taxa per capita com que infectados se tornam removidos* respectivamente. A função $\lambda(t)$ será chamado de *força de infecção* e descreve o mecanismo de contágio que depende da forma em que os indivíduos se misturam e do mecanismo de propagação da doença; por outro lado $\gamma(t)$ que será chamada de *taxa de remoção* é intrínseco à doença e descreve a taxa com que os indivíduos se curam ou morrem.

Na Figura 1 é apresentado um fluxograma, o qual descreve a interação das classes do modelo com seus parâmetros.

Figura 1: Esquema do modelo SIR



Fonte: Autor

A força de infecção será descrita como em [MI17]:

$$\lambda(t) = \frac{c\chi}{N(t)} I(t), \quad (2.2)$$

onde

c = quantidade média de contatos com indivíduos por unidade de tempo ,

χ = infecciosidade de contato com infectado ,

$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ = população total .

Por “infecciosidade de um contato” entendemos a probabilidade de transmissão por contato entre um suscetível e um infectado. A forma de $\lambda(t)$ vem de várias suposições, entre as quais, que a população se mistura de forma homogênea, que toda população é ativa (dizemos que a parte ativa da população é aquela que pode ser considerada nos dados), que a taxa de contato seja independente do tamanho da população ativa, e que todos contatos são igualmente infecciosos. Notamos ainda que o fator $I(t)/N(t)$ em (2.2) representa a proporção de um indivíduo qualquer ser um infectado.

Já a taxa de remoção $\gamma(t)$ é normalmente assumida ser uma constante,

$$\gamma(t) = \gamma = \frac{1}{\tau} \quad (2.3)$$

onde τ é o *período médio de infecção*, ou seja, o tempo médio que um indivíduo fica na classe dos infectados. A suposição (2.3) significa que a progressão da doença é a mesma para qualquer indivíduo e que γ é o valor da fração média de indivíduos recuperados por instante de tempo.

Em doenças como gripes ou sarampo por exemplo, o surto epidêmico ocorre num período curto quando comparado ao tempo necessário para que haja mudanças demográficas significativas (como nascimentos e mortes por outras causas). Assim, para essas doenças, podemos assumir que o valor da população total permanece constante durante o surto de forma que a quantidade de novos indivíduos que entram na população e a quantidade que sai, por causas não relacionadas à epidemia, são desprezíveis ou nulas durante esse período.

Uma versão simplificada e amplamente popularizada do modelo SIR como proposto

em [KM27] é descrita pelo seguinte sistemas de EDO's:

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda(t) S(t), & S(0) = S_0, \\ I'(t) = \lambda(t) S(t) - \gamma I(t), & I(0) = I_0, \\ R'(t) = \gamma I(t), & R(0) = R_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Onde S_0 , I_0 e R_0 são os valores iniciais de cada classe e $\lambda(t)$ e γ são aqueles propostos em (2.2) e (2.3). Nota-se que neste modelo a população total é uma constante pois assumimos que as mudanças demográficas são desprezíveis. Assim, somando as equações do modelo obtemos:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = N \quad \forall t \geq 0 \quad (2.5)$$

que continuará a ser um parâmetro do modelo incluso na força de infecção (2.2). O modelo acima foi amplamente estudado e o comportamento qualitativo de suas soluções depende de um parâmetro conhecido como *número reprodutivo básico* ($\mathcal{R}_0$), dado por

$$\mathcal{R}_0 = \frac{c\chi}{\gamma},$$

e que pode ser interpretado como a *quantidade média de casos secundários causados por um único infectado introduzido numa população completamente suscetível* ($S_0 \approx N$) *durante todo período da sua infecção*. Simplificadamente, existem duas possibilidades de comportamento para as soluções de (2.4). São elas:

- Se a quantidade de infectados irá aumentar no início:

$$\begin{aligned} I'(0) &> 0, & \forall t &\geq 0 \\ \Leftrightarrow c\chi &> \gamma, & \forall t &\geq 0. \end{aligned}$$

- Se irá diminuir:

$$\begin{aligned} I'(0) &\leq 0, & \forall t &\geq 0 \\ \Leftrightarrow c\chi &\leq \gamma, & \forall t &\geq 0. \end{aligned}$$

De forma a se ter um surto, o número de casos secundários a partir de um único infectado tem que ser maior que um, coincidindo com a idéia intuitiva de que, para um surto ocorrer, cada infectado precisa ser substituído no início da epidemia por mais de um novo infectado, nos fornecendo a seguinte condição (pois a derivada ser positiva implica no crescimento local da função):

$$\mathcal{R}_0 > 1.$$

3 MODELO SIR ESTRUTURADO COM TEMPO DE INFECÇÃO

O modelo inicial do SIR, como o proposto em [KM27], considera o tempo de infecção dos indivíduos que entraram na classe dos infectados. Esse tempo de infecção pode ser chamado de *idade de infecção* ou *classe-idade* e será denotado pela variável “ a ”. Em outros termos, é o tempo passado desde que o indivíduo se infectou. Dessa forma definiremos $I(a, t)$ como sendo a *quantidade de infectados no instante t que tem tempo de infecção entre 0 e a* . Tomando a_f como sendo o tempo máximo possível que um infectado leva para se tornar um removido, vamos considerar sempre que $a \in [0, a_f]$ e podemos observar que $I(a_f, t) = I(t)$ é o número total de infectados no instante t .

Definindo $i(a, t)$ como sendo a a -densidade (derivada em relação à a) de indivíduos infectados no instante t ,

$$I(a, t) = \int_0^a i(y, t) dy, \quad (3.1)$$

daí,

$$I(t) = I(a_f, t) = \int_0^{a_f} i(a, t) da.$$

Logo, podemos reescrever a igualdade (2.5) da forma:

$$S(t) + \int_0^{a_f} i(a, t) da + R(t) = N, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Vamos redefinir os parâmetros que relacionam as classes, já que agora alguns virão a depender da classe-idade.

$\gamma(a)$ = taxa de remoção classe-idade específica

$\lambda(t)$ = taxa de infecção (força da infecção) per capta no tempo t

Assim, o termo

$$\gamma(a) i(a, t) da dt$$

denota o número de infectados com tempo de infecção entre $[a, a+da]$ que foram removidos

da classe dos infectados no período de tempo $[t, t + dt]$. O termo

$$\lambda(t) S(t),$$

como no modelo (2.4), será a *taxa de incidência*, isto é, a *quantidade média de suscetíveis que se tornam infectados por unidade de tempo*. A força de infecção $\lambda(t)$ agora deverá ser expressa em uma forma que descreva como o mecanismo de contágio depende de $i(a, t)$:

$$\lambda(t) = \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i(a, t) da,$$

onde

$$\lambda_0(a) = \frac{c(a) \chi(a)}{N}. \quad (3.3)$$

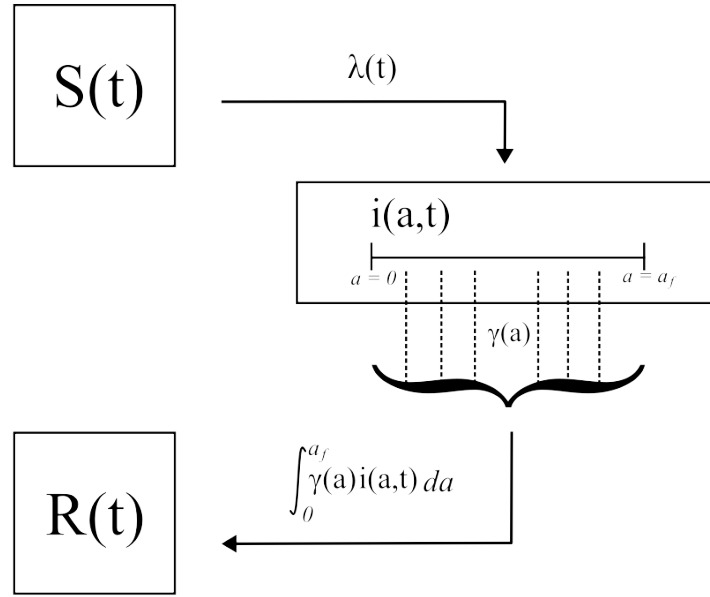
Agora, assume-se que tanto a taxa de contato como a taxa de infecciosidade dependem da progressão da doença,

$$\begin{aligned} c(a) &= \text{média de contatos de um indivíduo com idade de infecção } a, \\ \chi(a) &= \text{infecciosidade do contato com um indivíduo de idade de infecção } a. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em [Mar15] é dito que a motivação de Kermack e McKendrick da inclusão do tempo de infecção é de que não apenas a infectividade mude com a idade de infecção, mas que também a possibilidade de recuperação ou morte possa depender do tempo passado desde a infecção. E que no modelo não estruturado com as EDOs, é implicitamente assumido que o tempo de remoção é exponencialmente distribuído, e essa suposição pode ser enfraquecida com o tempo de infecção sendo incorporado no modelo.

Na Figura 2 é apresentado um fluxograma que representa a interação das classes desse modelo mais estruturado com seus parâmetros.

Figura 2: Esquema do modelo SIR estruturado



Fonte: Autor

Este modelo foi a forma originalmente adotada por Kermack e McKendrick [KM27] em sua formulação do modelo SIR.

Assim, para $S(t)$ e $I(t)$ temos que

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda(t) S(t), & S(0) = S_0, \\ R'(t) = \int_0^{a_f} \gamma(a) i(a, t) da, & R(0) = R_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

com S_0 e R_0 constantes para os valores iniciais.

A equação para $I(a, t)$ é obtida a partir das seguintes observações. Seja $h \geq 0$ e considere as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} I(a+h, t+h) &= \int_0^{a+h} i(y, t+h) dy \\ &= \int_0^a i(y, t) dy + \int_t^{t+h} \lambda(x) S(x) dx - \int_0^h \int_0^{a+s} \gamma(y) i(y, t+s) dy ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aqui, $I(a+h, t+h)$ representa a quantidade de indivíduos infectados no momento $t+h$ com idade de infecção entre 0 e $a+h$. Os termos da igualdade podem ser compreendidos da seguinte forma:

- A integral de $i(y, t)$ de 0 até a , que representa a quantidade de infectados no mo-

mento t com idade de infecção entre 0 e a .

- A integral de $\lambda(x) S(x)$ de t até $t + h$, que corresponde à quantidade de novos infectados entre t e $t + h$.
- A subtração da integral dupla $\int_0^h \int_0^{a+s} \gamma(y) i(y, t + s) dy ds$, que representa a quantidade de indivíduos com idade de infecção menor que $a + h$ que foram removidos entre os tempos t e $t + h$.

A expressão (3.6) descreve a dinâmica temporal da propagação da infecção, detalhando como a quantidade de infectados em um instante futuro, $t + h$, é afetada pela idade de infecção dos indivíduos ao longo do intervalo considerado.

Pela regra da cadeia, derivando $I(a + h, t + h)$ em relação a h , temos:

$$\frac{d}{dh} I(a + h, t + h) = \frac{\partial I}{\partial a}(a + h, t + h) \cdot \frac{d[a + h]}{dh} + \frac{\partial I}{\partial t}(a + h, t + h) \cdot \frac{d[t + h]}{dh},$$

onde $\frac{d[a+h]}{dh} = 1$ e $\frac{d[t+h]}{dh} = 1$. Daí,

$$\frac{d}{dh} I(a + h, t + h) = I_a(a + h, t + h) + I_t(a + h, t + h).$$

Onde I_a e I_t são notações para as derivadas parciais de I em relação à sua primeira e segunda variáveis.

Agora, derivando (3.6) em relação a h , obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_h \left(\int_0^a i(y, t) dy + \int_t^{t+h} \lambda(x) S(x) dx - \int_0^h \int_0^{a+s} \gamma(y) i(y, t + s) dy ds \right) \\ = \lambda(t + h) S(t + h) - \int_0^{a+h} \gamma(y) i(y, t + h) dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$I_a(a + h, t + h) + I_t(a + h, t + h) = \lambda(t + h) S(t + h) - \int_0^{a+h} \gamma(y) i(y, t + h) dy.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$,

$$I_a(a, t) + I_t(a, t) = \lambda(t) S(t) - \int_0^a \gamma(y) i(y, t) dy.$$

Por (3.1):

$$\begin{aligned} I_a(a, t) &= i(a, t), \\ I_t(a, t) &= \int_0^a i_t(y, t) dy, \end{aligned}$$

daí

$$i(a, t) + \int_0^a i_t(y, t) dy = \lambda(t) S(t) - \int_0^a \gamma(y) i(y, t) dy. \quad (3.7)$$

Assim, tomando $a = 0$, obtemos:

$$i(0, t) = \lambda(t) S(t),$$

e derivando (3.7) em relação a a , obtemos

$$i_a(a, t) + i_t(a, t) = -\gamma(a) i(a, t),$$

ou seja,

$$i_a(a, t) + i_t(a, t) + \gamma(a) i(a, t) = 0.$$

Definimos a densidade inicial $i_0(a) = i(a, 0)$ de forma que:

$$I(0) = \int_0^{a_f} i_0(a) da.$$

Usando os resultados obtidos até este ponto, somos capazes de descrever o *modelo SIR estruturado*:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad S'(t) = -\lambda(t) S(t), \\ 2. \quad i_t(a, t) + i_a(a, t) + \gamma(a) i(a, t) = 0, \\ 3. \quad i(0, t) = \lambda(t) S(t), \\ 4. \quad R'(t) = \int_0^{a_f} \gamma(a) i(a, t) da. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Com as condições iniciais

$$S(0) = S_0, \quad i(a, 0) = i_0(a), \quad R(0) = R_0.$$

A equação (3.8.2) descreve a evolução da doença e a condição de fronteira (3.8.3) modela

a entrada de novos infectados na classe-idade $a = 0$.

Observe que as equações (3.8.1), (3.8.2) e (3.8.3) são independentes de (3.8.4). Assim, para estudar o sistema, é suficiente considerar as três primeiras equações.

Considerando $[0, a_f] \subset \mathbb{R}$ como o domínio em relação a variável classe-idade “ a ” das equações, e $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ como o domínio sobre a variável tempo “ t ”, listaremos a seguir as hipóteses de regularidade sobre as funções $\lambda_0(a)$ e $\gamma(a)$ (ver [MI17] para mais detalhes):

$$0 \leq i_0(a), \quad 0 \leq \gamma(a), \quad \exists \lambda_0^+ \in \mathbb{R}^+ \text{ com } 0 \leq \lambda_0(a) \leq \lambda_0^+, \quad \text{q.t.p. em } [0, a_f]; \quad (3.9)$$

$$\gamma \in L_{\text{loc}}^1[0, a_f], \quad \int_0^{a_f} \gamma(a) da = +\infty; \quad (3.10)$$

$$\lambda_0 \in L^\infty(0, a_f), \quad \lambda_0(a) > 0 \quad \text{q.t.p. em } [a_1, a_2] \subset [0, a_f]; \quad (3.11)$$

$$i_0 \in L^1(0, a_f). \quad (3.12)$$

O termo “q.t.p.” significa *quase todo ponto*, indicando que uma propriedade é verdadeira para todos os pontos de um conjunto, exceto para um subconjunto de medida nula.

Seja

$$B(a) = e^{-\int_0^a \gamma(y) dy} \quad (3.13)$$

a probabilidade de um indivíduo não ter se recuperado até o instante “ a ” após a infecção, ou seja, a probabilidade de um indivíduo ainda estar infectado no instante “ a ” após a infecção. No capítulo 5, em (5.5) veremos melhor como essa equação é obtida. A condição (3.10) é necessária e suficiente para que

$$\lim_{a \rightarrow a_f^-} B(a) = 0,$$

isto significa que todo infectado eventualmente entra na classe de removido.

3.1 REDUÇÃO DO SISTEMA

Inicialmente, tentaremos obter uma solução sobre $i(a, t)$ do modelo estruturado (3.8). Definindo

$$g(a, t) = i(a, t) e^{\int_0^a \gamma(y) dy} = \frac{i(a, t)}{B(a)}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial a}(a, t) &= i_a(a, t) e^{\int_0^a \gamma(y) dy} + i(a, t) \gamma(a) e^{\int_0^a \gamma(y) dy}, \\ \frac{\partial g}{\partial t}(a, t) &= i_t(a, t) e^{\int_0^a \gamma(y) dy},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g(0, t) &= i(0, t) e^{\int_0^0 \gamma(y) dy} = i(0, t), \\ g(a, 0) &= i(a, 0) e^{\int_0^a \gamma(y) dy} = \frac{i(a, 0)}{B(a)},\end{aligned}$$

Assim, pelas equações (3.8.2) e (3.8.3) e o valor inicial $i(a, 0) = i_0(a)$, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_t(a, t) + g_a(a, t) = 0, & t \in [0, \infty), a \in [0, a_f]; \\ g(0, t) = i(0, t), & t \in [0, \infty); \\ g(a, 0) = \frac{i_0(a)}{B(a)}, & a \in [0, a_f]. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Esta equação é uma EDP (Equação Diferencial Parcial) linear e homogênea de primeira ordem com um problema de valores iniciais. Para esse tipo de equação, utilizando o método das características, a solução $g(a, t)$ pode ser expressa como $g(a, t) = \Phi(a - t)$, onde $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função adequada.

Seja $k \in \mathbb{R}$, para quaisquer $(a, t) \in [0, a_f] \times [0, \infty)$ com $k = a - t$ temos que $\Phi(k) = \Phi(a - t)$, vamos observar os seguintes casos:

- Caso 1: $k \geq 0$

Temos que $k \geq 0 \Leftrightarrow a - t \geq 0 \Leftrightarrow a \geq t$.

Como $t \geq 0$, $a = k + t \geq k$ daí, $0 \leq k \leq a \leq a_f$, ou seja, $k \in [0, a_f]$.

Tomando $a_0 = k$ e $t_0 = 0$, por $a_0 \geq t_0$ e $a_0 - t_0 = k$ então:

$$\begin{aligned}g(a, t) &= \Phi(a - t) = \Phi(k) = \Phi(a_0 - t_0) \\ &= g(a_0, t_0) = g(k, 0) = \frac{i_0(k)}{B(k)} = \frac{i_0(a - t)}{B(a - t)}.\end{aligned}$$

- Caso 2: $k < 0$

Temos que $k < 0 \Leftrightarrow a - t < 0 \Leftrightarrow a < t$.

Como $k < 0 \Leftrightarrow 0 < -k$ daí, $-k \in \mathbb{R}^+$.

Tomando $a_0 = 0$ e $t_0 = -k$, por $a_0 < t_0$ e $a_0 - t_0 = k$ então:

$$\begin{aligned} g(a, t) &= \Phi(a - t) = \Phi(k) = \Phi(a_0 - t_0) \\ &= g(a_0, t_0) = g(0, -k) = i(0, -k) = i(0, t - a). \end{aligned}$$

Assim, temos que a solução de (3.14) é da forma

$$g(a, t) = \begin{cases} \frac{i_0(a-t)}{B(a-t)} & \text{se } a \geq t, \\ i(0, t-a) & \text{se } a < t. \end{cases}$$

Logo, temos que a solução de $i(a, t)$ em (3.8) é da forma

$$i(a, t) = \begin{cases} i_0(a-t) \frac{B(a)}{B(a-t)} & \text{se } a \geq t, \\ i(0, t-a) B(a) & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (3.15)$$

Considerando a *incidência* (o número de novos infectados por unidade de tempo) como a conveniente variável escalar:

$$\sigma(t) = \lambda(t) S(t) = i(0, t).$$

Extendendo em $\mathbb{R}$ as funções λ_0 , B , i_0 para 0 quando fora do intervalo $[0, \theta_f]$, usando (3.15) podemos reescrever $\sigma(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \lambda(t) S(t) = \left[\int_0^{a_f} \lambda_0(a) i(a, t) da \right] S(t) \\ &= \left[\int_0^t \lambda_0(a) B(a) \sigma(t-a) da + \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t) da \right] S(t). \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{cases} F(t) = \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t) da = \int_0^\infty \lambda_0(z+t) \frac{B(z+t)}{B(z)} i_0(z) dz, \\ A(t) = \lambda_0(t) B(t), \end{cases} \quad (3.16)$$

temos

$$\sigma(t) = \left[F(t) + \int_0^t A(t-z) \sigma(z) dz \right] S(t). \quad (3.17)$$

Assim, podemos substituir (3.8) pelo seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} S'(t) = -\sigma(t), \\ \sigma(t) = \left[\int_0^t A(t-z) \sigma(z) dz + F(t) \right] S(t), \end{cases} \quad (3.18)$$

com a condição inicial

$$S(0) = S_0 > 0. \quad (3.19)$$

Pode-se observar que, em (3.17), $\sigma(t)$ é escrita de forma implícita, o que introduz uma complexidade adicional à busca por sua solução. Embora a obtenção de um resultado explícito seja inviável, é possível encontrar uma aproximação por meio de uma sequência que converge para uma solução potencial. Esta sequência será apresentada posteriormente na demonstração do Teorema 3.2, onde mostraremos que, além de convergir para a solução do problema, tal solução será única.

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Antes de ir para o teorema principal desta seção, precisaremos entender mais sobre as funções em (3.16), o que nos leva à seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Sejam as premissas (3.9)-(3.12) satisfeitas, então*

- *A função A em (3.16) está em $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ e*

$$0 \leq A(t) \leq \lambda_0^+ \quad q.t.p., \quad A(t) = 0 \quad se \quad t > a_f. \quad (3.20)$$

- *A função F em (3.16) é contínua em $\mathbb{R}^+$ e*

$$0 \leq F(t) \leq \lambda_0^+ \|i_0\|_1, \quad F(t) = 0 \quad se \quad t > a_f. \quad (3.21)$$

Demonstração:

Temos

$$B(t) = e^{-\int_0^t \gamma(a) da} = \frac{1}{e^{\int_0^t \gamma(a) da}}$$

Considerando que a função e^x é crescente e $e^0 = 1$, dado que $0 \leq \int_0^t \gamma(a) da \leq \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, concluímos que $0 \leq B(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Assim, por $0 \leq \lambda_0(t) \leq \lambda_0^+$ q.t.p. então $0 \leq \lambda_0(t) B(t) \leq \lambda_0^+ \cdot 1$ q.t.p., ou seja,

$$0 \leq A(t) \leq \lambda_0^+ \text{ q.t.p..}$$

Logo, $|A(t)|$ é limitada então $A(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Se $t > a_f$, como extendemos λ_0 , temos $\lambda_0(t) = 0$ daí, $A(t) = 0$ se $t > a_f$, assim, (3.20) está provado.

Para (3.21), da mesma forma que provamos $0 \leq B(t) \leq 1$ temos que $\frac{B(z+t)}{B(z)} = e^{-\int_z^{z+t} \gamma(y) dy} \leq 1$.

Logo, por $0 \leq \lambda_0(t) \leq \lambda_0^+$ e $i_0(t) \geq 0$ temos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq F(t) &= \int_0^\infty \lambda_0(z+t) \frac{B(z+t)}{B(z)} i_0(z) dz \\ &\leq \left| \int_0^\infty \lambda_0(z+t) \frac{B(z+t)}{B(z)} i_0(z) dz \right| \\ &\leq \int_0^\infty |\lambda_0(z+t)| \left| \frac{B(z+t)}{B(z)} \right| |i_0(z)| dz \\ &\leq \lambda_0^+ \int_0^\infty |i_0(z)| dz \\ &\leq \lambda_0^+ \int_0^\infty |i_0(z)| dz + \lambda_0^+ \int_{-\infty}^0 |i_0(z)| dz \\ &\leq \lambda_0^+ \int_{-\infty}^\infty |i_0(z)| dz \\ &\leq \lambda_0^+ \|i_0\|_1. \end{aligned}$$

Ou seja, $0 \leq F(t) \leq \lambda_0^+ \|i_0\|_1$.

Por definição temos $\lambda_0(t) = 0$ se $t > a_f$, então se $t > a_f$ como $F(t)$ é uma integral que leva o termo z de 0 a ∞ temos que o termo $z+t$ será maior que a_f nessa integral, logo teremos $\lambda_0(z+t) = 0$ daí, $F(t) = 0$.

Agora, para checar a continuidade de F , seja $t_0 \geq 0$ vamos escrever F da forma:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t) da - \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t_0) da \\ &\quad + \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t_0) da \\ &= \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} [i_0(a-t) - i_0(a-t_0)] da \\ &\quad + \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t_0) da. \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} [i_0(a-t) - i_0(a-t_0)] da, \\ H(t) &= \int_t^\infty \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} i_0(a-t_0) da. \end{aligned}$$

Vamos observar $G(t)$,

$$\begin{aligned} |G(t)| &\leq \int_t^\infty \left| \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a-t)} [i_0(a-t) - i_0(a-t_0)] \right| da \\ &\leq \lambda_0^+ \int_t^\infty |i_0(a-t) - i_0(a-t_0)| da \\ &\leq \lambda_0^+ \int_t^\infty |i_0(a-t) - i_0(a-t_0)| da + \underbrace{\lambda_0^+ \int_{-\infty}^t |i_0(a-t) - i_0(a-t_0)| da}_{\geq 0} \\ &\leq \lambda_0^+ \int_{-\infty}^\infty |i_0(a-t) - i_0(a-t_0)| da. \end{aligned}$$

Onde, por $i_0(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ temos

$$|i_0(a-t) - i_0(a-t_0)| = i_0(a-t) - i_0(a-t_0) \quad (3.22)$$

ou

$$|i_0(a-t) - i_0(a-t_0)| = i_0(a-t_0) - i_0(a-t). \quad (3.23)$$

Antes de fazer a extensão, tínhamos $i_0 \in L^1(0, a_f)$ então agora temos $i_0 \in L^1(\mathbb{R})$, daí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{-\infty}^\infty i_0(a-t) da = \|i_0\|_1$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_0(a - t_0) da = \|i_0\|_1.$$

Então independentemente se for da forma (3.22) ou (3.23), temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{-\infty}^{\infty} |i_0(a - t) - i_0(a - t_0)| da = 0.$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |G(t)| \leq \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} |i_0(a - t) - i_0(a - t_0)| da = 0.$$

Daí $G(t) \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow t_0$.

Assim, podemos notar que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (G(t) + H(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} H(t).$$

Como $B(a)$ é contínua mesmo após ser estendida (pois $B(0) = B(a_f) = 0$), temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{B(a)}{B(a - t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} e^{-\int_{a-t}^a \gamma(a) da} = e^{-\int_{a-t_0}^a \gamma(a) da} = \frac{B(a)}{B(a - t_0)}.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} H(t) = \int_{t_0}^{\infty} \lambda_0(a) \frac{B(a)}{B(a - t_0)} i_0(a - t_0) da = F(t_0).$$

Em outras palavras, temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0),$$

o que implica que F é uma função contínua para todo $t \in \mathbb{R}^+$. ■

Agora, a fim de observar a existência e unicidade da solução global de (3.18) vamos olhar para a solução da seguinte forma:

Definição 3.2.1. *Uma solução para o sistema (3.18) é um par $(\sigma, S) \in C(\mathbb{R}^+) \times C^1(\mathbb{R})$ tal que (3.18) seja satisfeita.*

Lema 3.1. *[Cor08] Generalização da desigualdade de Gronwall-Bellman para integrais. Suponha que $\alpha(t)$, $q(t)$ e $u(t)$ sejam funções contínuas em $[t_0, T)$, $0 < T \leq \infty$, com*

$q(t) \geq 0$. Se $u(t)$ satisfaz

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t q(s) u(s) ds,$$

então

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s) q(s) e^{\left(\int_s^t q(u) du\right)} ds.$$

Além disso, se $\alpha(t)$ é não decrescente, então

$$u(t) \leq \alpha(t) e^{\left(\int_{t_0}^t q(s) ds\right)}.$$

Teorema 3.2. *Sejam as premissas (3.9)-(3.12) válidas. Então o problema (3.16)-(3.19) tem uma única solução.*

Demonstração:

Escrevendo (3.18) da forma

$$S'(t) = - \left[\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right] S(t),$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{S'(t)}{S(t)} &= - \left(\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right) \\ \Rightarrow (\ln S(t))' &= - \left(\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right) \\ \Rightarrow \int_0^t (\ln S(s))' ds &= - \int_0^t \left(\int_0^s A(s-z) \sigma(z) dz + F(s) \right) ds \\ \Rightarrow \ln S(t) - \ln S(0) &= - \left(\int_0^t \int_0^s A(s-z) \sigma(z) dz ds + \int_0^t F(s) ds \right) \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) &= - \left(\int_0^t \int_0^s A(s-z) \sigma(z) dz ds + \int_0^t F(s) ds \right) \\ \Rightarrow S(t) &= S_0 e^{-\left(\int_0^t \int_0^s A(s-z) \sigma(z) dz ds + \int_0^t F(s) ds \right)}. \end{aligned}$$

Portanto, definindo

$$A_1(t) = \int_0^t A(s) ds, \quad F_1(t) = \int_0^t F(s) ds,$$

podemos observar que, pela fórmula de Leibniz em integrais,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma(s) ds \right) &= A_1(0) \sigma(t) + \int_0^t A_1'(t-s) \sigma(s) ds \\ &= \int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema fundamental do cálculo na igualdade acima, temos que a solução da EDO pode ser escrita como

$$S(t) = S_0 e^{-\left[\int_0^t A_1(t-s) \sigma(s) ds + F_1(t) \right]}, \quad (3.24)$$

portanto (3.18) é equivalente à equação integral

$$\sigma(t) = S_0 \left[\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right] e^{-\left[\int_0^t A_1(t-s) \sigma(s) ds + F_1(t) \right]}.$$

Como F é não-negativo e contínuo então F_1 também é não-negativo e contínuo e por A ser não-negativo q.t.p., teremos que A_1 é não-negativo q.t.p. daí podemos concluir que σ é não-negativo.

Além disso, temos a seguinte desigualdade com σ ,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= S_0 \left[\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right] e^{-\left[\int_0^t A_1(t-s) \sigma(s) ds + F_1(t) \right]} \\ &\leq S_0 \left[\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right] \\ &\leq S_0 \int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + S_0 F(t) \\ &\leq S_0 \|F\|_\infty + S_0 \|A\|_\infty \int_0^t \sigma(s) ds, \end{aligned}$$

daí, por σ ser não negativo e pelo Lema 3.1, temos

$$0 \leq \sigma(t) \leq S_0 \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.25)$$

De forma análoga,

$$0 \leq \int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \leq \|F\|_\infty e^{\|A\|_\infty t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.26)$$

Outra forma de representar $S(t)$ é aplicando o teorema fundamental do cálculo na primeira equação em (3.18), daí,

$$\begin{aligned} \int_0^t S'(s) ds &= \int_0^t (-\sigma(s)) ds \\ \Rightarrow S(t) - S_0 &= - \int_0^t \sigma(s) ds \\ \Rightarrow S(t) &= S_0 - \int_0^t \sigma(s) ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Portanto,

$$\sigma(t) = \left(\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right) \left(S_0 - \int_0^t \sigma(s) ds \right). \quad (3.28)$$

Assim, como $\sigma(t) \geq 0$, temos

$$S_0 \geq \int_0^t \sigma(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Agora, vamos mostrar que existe um único σ que resolve (3.28) provando a convergência das iterações de Picard. Tomando

$$\sigma^{k+1}(t) = \left(\int_0^t A(t-s) \sigma^k(s) ds + F(t) \right) S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma^k(s) ds + F_1(t) \right)}$$

inicializado por $\sigma^0 \equiv 0$ em $\mathbb{R}^+$.

A existência e unicidade do σ seguirá da convergência dessa sequência.

A menos de uma mudança de variável nas integrais, temos

$$\sigma^{k+1}(t) = \left(\int_0^t A(s) \sigma^k(t-s) ds + F(t) \right) S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(s) \sigma^k(t-s) ds + F_1(t) \right)}.$$

Assim, por F ser contínua e não-negativa, A ser limitada e não-negativa e as funções integrais também serem contínuas além de que F_1 e A_1 são não-negativas, então σ^{k+1} vai ser contínua e não-negativa se σ^k também seja. Como $\sigma^0 \equiv 0$ é contínua e não-negativa, então de forma indutiva pode ser visto que σ^{k+1} será contínua e não-negativa.

Definindo

$$\lambda^{k+1}(t) = \int_0^t A(t-s) \sigma^k(s) ds + F(t), \quad S^{k+1}(t) = S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(s) \sigma^k(t-s) ds + F_1(t) \right)}.$$

Como $\sigma^k \geq 0$ para quaisquer k temos que

$$e^{-\left(\int_0^t A_1(s) \sigma^k(t-s) ds + F_1(t)\right)} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim

$$S^k(t) \leq S_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, podemos observar que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda^{k+1} &= \int_0^t A(t-s) \sigma^k(s) ds + F(t) \\ &\leq \|A\|_\infty \int_0^t \sigma^k(s) ds + \|F\|_\infty \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma^{k+1} &\leq \left(\int_0^t A(t-s) \sigma^k(s) ds + F(t) \right) S_0 \\ &\leq S_0 \|A\|_\infty \int_0^t \sigma^k(s) ds + S_0 \|F\|_\infty \end{aligned}$$

recursivamente, podemos obter

$$\begin{aligned} \sigma^{k+1}(t) &\leq S_0 \|A\|_\infty \int_0^t \left(S_0 \|A\|_\infty \int_0^s \sigma^{k-1}(s_1) ds_1 + S_0 \|F\|_\infty \right) ds + S_0 \|F\|_\infty \\ &\leq (S_0 \|A\|_\infty)^2 \int_0^t \left(\int_0^s \sigma^{k-1}(s_1) ds_1 \right) ds + S_0 \|F\|_\infty (1 + S_0 \|A\|_\infty t) \\ &\leq \dots \\ &\leq (S_0 \|A\|_\infty)^{k+1} \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \dots \int_0^{s_{k-1}} \sigma^0(s_k) ds_k \dots ds_2 ds_1 ds \\ &\quad + S_0 \|F\|_\infty \left(\sum_{n=0}^k \frac{(S_0 \|A\|_\infty t)^n}{n!} \right) \\ &\leq S_0 \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty t}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sigma^k(t) \leq S_0 \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty t} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

de forma análoga, temos

$$\lambda^{k+1} \leq \|F\|_{\infty} e^{S_0 \|A\|_{\infty} t} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Podemos também observar que

$$\begin{aligned} \sigma^{k+1}(t) &= \left(\int_0^t A(t-s) \sigma^k(s) ds + F(t) \right) S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma^k(s) ds + F_1(t) \right)} \\ &= \frac{d}{dt} \left(-S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma^k(s) ds + F_1(t) \right)} \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma^{k+1}(s) ds &= -S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma^k(s) ds + F_1(t) \right)} + S_0 e^{-\left(\int_0^0 A_1(-s) \sigma^k(s) ds + F_1(0) \right)} \\ &= -S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma^k(s) ds + F_1(t) \right)} + S_0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$S_0 e^{-\left(\int_0^t A_1(t-s) \sigma^k(s) ds + F_1(t) \right)} = S_0 - \int_0^t \sigma^{k+1}(s) ds.$$

Assim,

$$\sigma^{k+1}(t) = \left(\int_0^t A(t-s) \sigma^k(s) ds + F(t) \right) \left(S_0 - \int_0^t \sigma^{k+1}(s) ds \right)$$

e

$$S^{k+1}(t) = S_0 - \int_0^t \sigma^{k+1}(s) ds.$$

Para $t = 0$ podemos observar que

$$\sigma^{k+1}(0) = F(0) S_0 = \sigma(0) \quad \forall k \geq 0$$

Para um σ solução qualquer de (3.18).

Considerando $t \in (0, T]$ para algum $T > 0$ qualquer, temos $\sigma^k \in C([0, T])$. Vamos

buscar uma desigualdade com $|\sigma^{k+1} - \sigma^k|$, onde

$$\begin{aligned}\sigma^{k+1} - \sigma^k &= \lambda^{k+1} S^{k+1} - \lambda^k S^k \\ &= \lambda^{k+1} S^{k+1} - \lambda^k S^{k+1} + \lambda^k S^{k+1} - \lambda^k S^k \\ &= (\lambda^{k+1} - \lambda^k) S^{k+1} + \lambda^k (S^{k+1} - S^k),\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}|\sigma^{k+1} - \sigma^k| &\leq |\lambda^{k+1} - \lambda^k| |S^{k+1}| + |\lambda^k| |S^{k+1} - S^k| \\ &\leq |\lambda^{k+1} - \lambda^k| S_0 + |S^{k+1} - S^k| \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty T} \\ &\leq \left| \int_0^t A(t-s) (\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)) ds \right| S_0 \\ &\quad + \left| \int_0^t (\sigma^k(s) - \sigma^{k+1}(s)) ds \right| \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty T} \\ &\leq S_0 \|A\|_\infty \int_0^t |\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)| ds \\ &\quad + \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty T} \int_0^t |\sigma^{k+1}(s) - \sigma^k(s)| ds.\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \max\{S_0 \|A\|_\infty, \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty T}\}$,

$$|\sigma^{k+1} - \sigma^k| \leq C_1 \int_0^t |\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)| ds + C_1 \int_0^t |\sigma^{k+1}(s) - \sigma^k(s)| ds.$$

Assim, como a função

$$\alpha(t) = C_1 \int_0^t |\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)| ds$$

é não-decrescente (pois a derivada é não negativa), pelo Lema 3.1,

$$|\sigma^{k+1} - \sigma^k| \leq \left(C_1 \int_0^t |\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)| ds \right) e^{C_1 \int_0^t 1 ds}.$$

Ou seja,

$$|\sigma^{k+1} - \sigma^k| \leq \left(C_1 \int_0^t |\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)| ds \right) e^{C_1 T}.$$

Tomando $C = C_1 e^{C_1 T}$,

$$|\sigma^{k+1} - \sigma^k| \leq C \int_0^t |\sigma^k(s) - \sigma^{k-1}(s)| ds.$$

Rekursivamente, como $\sigma^1(t) = F(t) S_0 e^{-F_1(t)} \leq S_0 \|F\|_\infty$, então

$$\begin{aligned} |\sigma^{k+1}(t) - \sigma^k(t)| &\leq C \int_0^t \left(C \int_0^{s_1} |\sigma^{k-1}(s_2) - \sigma^{k-2}(s_2)| ds_2 \right) ds_1 \\ &\leq C^k \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_{k-1}} |\sigma^1(s_k) - \sigma^0(s_k)| ds_k \cdots ds_3 ds_2 ds_1 \\ &\leq C^k \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_{k-1}} S_0 \|F\|_\infty ds_k \cdots ds_3 ds_2 ds_1 \\ &\leq C^k \frac{t^k}{k!} S_0 \|F\|_\infty \\ &\leq C^k \frac{T^k}{k!} S_0 \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Onde, pelo critério de D'Alembert (teste da razão),

$$\sum_{k=0}^{\infty} C^k \frac{T^k}{k!} S_0 \|F\|_\infty$$

converge absolutamente.

Logo, pelo teste da comparação,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\sigma^{k+1}(t) - \sigma^k(t)|$$

converge absolutamente.

Assim, a sequência

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^n (\sigma^k(t) - \sigma^{k-1}(t))$$

converge.

Tomando $a_k = C^k \frac{T^k}{k!} \|F\|_\infty$ temos que $a_k \rightarrow 0$ ao $k \rightarrow \infty$ (pois o termo geral de toda série convergente tende a 0), logo temos $|\sigma^{k+1}(t) - \sigma^k(t)| \rightarrow 0$ ao $k \rightarrow \infty$ assim podemos observar que para todo t , temos que para k muito grande $\sigma^{k+p}(t)$ e $\sigma^{k+q}(t)$ ficam muito próximos para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$. Logo ao tomar o limite $n \rightarrow \infty$ temos que $\sigma^n(t)$ converge uniformemente em $[0, T]$ para uma função $\sigma(t)$ que é não negativa e contínua, além disso, σ também irá satisfazer (3.18) no intervalo $[0, T]$.

Agora vamos checar a unicidade de σ como a única função contínua definida em $[0, T]$ satisfazendo (3.18).

Seja $\tilde{\sigma}$ uma função contínua qualquer satisfazendo (3.18) em $[0, T]$. Então ambos σ e $\tilde{\sigma}$ obedecem (3.25) e (3.28), assim, tomando

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t), & S(t) &= S_0 - \int_0^t \sigma(s) ds, \\ \tilde{\lambda}(t) &= \int_0^t A(t-s) \tilde{\sigma}(s) ds + F(t), & \tilde{S}(t) &= S_0 - \int_0^t \tilde{\sigma}(s) ds,\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}|\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| &\leq |\lambda(t) S(t) - \tilde{\lambda}(t) \tilde{S}(t)| \\ &\leq |\lambda(t) S(t) - \lambda(t) \tilde{S}(t) + \lambda(t) \tilde{S}(t) - \tilde{\lambda}(t) \tilde{S}(t)| \\ &\leq |(S(t) - \tilde{S}(t)) \lambda(t) + (\lambda(t) - \tilde{\lambda}(t)) \tilde{S}(t)| \\ &\leq |S(t) - \tilde{S}(t)| |\lambda(t)| + |\lambda(t) - \tilde{\lambda}(t)| |\tilde{S}(t)| \\ &\leq |\lambda(t)| \int_0^t |\tilde{\sigma}(s) - \sigma(s)| ds + |\tilde{S}(t)| \int_0^t |A(t-s)| |\sigma(s) - \tilde{\sigma}(s)| ds \\ &\leq \left(\|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty t} + \|A\|_\infty S_0 \right) \int_0^t |\sigma(s) - \tilde{\sigma}(s)| ds.\end{aligned}$$

Tomando $C_0 = \|F\|_\infty e^{S_0 \|A\|_\infty T} + \|A\|_\infty S_0$.

Para todo $t \in [0, T]$ temos

$$|\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| \leq C_0 \int_0^t |\sigma(s) - \tilde{\sigma}(s)| ds,$$

ou seja,

$$|\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| \leq 0 + C_0 \int_0^t |\sigma(s) - \tilde{\sigma}(s)| ds.$$

Pelo lema 3.1,

$$|\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| \leq 0 e^{C_0 \int_0^t 1 ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| &\leq 0 \\ \Rightarrow |\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| &= 0 \\ \Rightarrow \sigma(t) &= \tilde{\sigma}(t). \end{aligned}$$

Logo, por T ser arbitrário, podemos sempre encontrar uma única solução de (3.18) num seguimento de $\mathbb{R}^+$. ■

3.3 EXTINÇÃO DA EPIDEMIA

O modelo estruturado de Kermack e McKendrick, embora mais complexo do que o modelo baseado em EDOs, fornece um comportamento qualitativamente semelhante do surto epidêmico. O que nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja (σ, S) a solução para (3.18) fornecida pelo Teorema 3.2. Então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty.$$

Onde S_∞ satisfaz

$$S_\infty = S_0 e^{[(S_\infty - S_0) \int_0^\infty A(s) ds + \int_0^\infty F(s) ds]}.$$

Demonstração:

Da mesma forma que observamos em (3.27),

$$S(t) = S_0 - \int_0^t \sigma(s) ds > 0,$$

daí,

$$\int_0^\infty \sigma(s) ds \leq S_0, \tag{3.29}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty = S_0 - \int_0^\infty \sigma(s) ds \geq 0.$$

Além disso, pelas extensões que tomamos das funções λ_0 e i_0 ,

$$\begin{aligned} F(t) &= 0 \quad \text{para } t > a_f \\ A(t) &= 0 \quad \text{para } t > a_f. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Vamos observar o seguinte limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds.$$

Para $t \gg a_f$ suficientemente grande, podemos separar a integral da seguinte forma:

$$\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds = \int_0^{t-a_f} A(t-s) \sigma(s) ds + \int_{t-a_f}^t A(t-s) \sigma(s) ds,$$

na integral à esquerda da soma, temos que $t-s \in [a_f, t]$ então por (3.30) ela é 0, já na integral à direita, como pela Proposição 3.2.1 temos que A é limitada e não negativa, como σ também é não negativa, então

$$0 \leq \int_{t-a_f}^t A(t-s) \sigma(s) ds \leq \|A\|_\infty \int_{t-a_f}^t \sigma(s) ds.$$

Por (3.29) temos $\sigma \in L^1(0, +\infty)$, daí, para t muito grande a influência sobre $\sigma(s)$ se torna menos significante, logo, ao tomarmos t indo ao infinito, teremos que a integral mais à direita na desigualdade irá para 0, assim, pelo Teorema do Confronto, temos que a integral no meio da desigualdade zera. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds = 0.$$

Portanto, tomando o limite na equação (3.28) e usando de (3.30),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t A(t-s) \sigma(s) ds + F(t) \right) \left(S_0 - \int_0^t \sigma(s) ds \right) = 0.$$

Supondo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty,$$

onde S_∞ é uma constante.

Para encontrar o valor final de $S(t)$, podemos usar da igualdade (3.24), assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} S_0 e^{\left(\int_0^t A_1(t-s) S'(s) ds + F_1(t) \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\left(\int_0^t A(s) S(t-s) ds - S_0 A_1(t) + F_1(t) \right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_0 e^{((S_\infty - S_0) \int_0^\infty A(s) ds + \int_0^\infty F(s) ds)} = S_\infty. \quad (3.31)$$

■

Esse teorema apresenta dois resultados bastante relevantes: primeiro, a classe dos suscetíveis não é completamente esgotada pela epidemia, pois, conforme a igualdade (3.31), temos $S_\infty > 0$; segundo, a infecção eventualmente se extingue, uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{a_f} i(a, t) da = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \sigma(t-a) B(a) da = 0.$$

Por consequência, também temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (N - S(t) - I(t)) = N - S_\infty = R_\infty.$$

Podemos considerar R_∞ como o total de indivíduos que foram infectados ao longo de toda a epidemia. Isto se deve ao fato de que, ao saírem da classe de infectados, assumimos que esses indivíduos são imediatamente transferidos para a classe de removidos. Além disso, é importante notar que, neste modelo, não estamos considerando outras possíveis maneiras pelas quais um indivíduo poderia ser incluído nesta classe.

Outro aspecto crucial na dinâmica é a necessidade de uma limitação para que a infecção se mantenha. O *número reprodutivo básico* ($\mathcal{R}_0$) pode ser visto como o número esperado de novos casos secundários causados por um único indivíduo infectado durante todo o seu período de infecciosidade em uma população totalmente suscetível [DHM90].

Assim como em [MI17], neste caso do modelo SIR estruturado, define-se:

$$\mathcal{R}_0 = \int_0^{a_f} c(a) \chi(a) e^{-\int_0^a \gamma(s) ds} da = \int_0^{a_f} N \lambda_0(a) B(a) da = N \int_0^{a_f} A(a) da.$$

A variação dos parâmetros em relação à classe-idade é levada em consideração. O valor de $\mathcal{R}_0$ irá ter um papel central na condição de limitação sobre o surto da doença.

4 MÉTODO NUMÉRICO

A metodologia utilizada neste capítulo é um caso particular do apresentado em [MP99] e é aplicada a um problema similar no capítulo 3 de [MI17]. No entanto, com o objetivo de tornar este trabalho mais abrangente e completo, apresentaremos detalhadamente a metodologia e verificaremos sua convergência.

Na busca de uma modelagem numérica para o sistema de EDP's em (3.8) podemos considerar apenas as três primeiras equações e seus valores iniciais, assim temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1. & S'(t) = -\lambda(t) S(t), & S(0) = S_0 > 0, \\ 2. & i_t(a, t) + i_a(a, t) + \gamma(a)i(a, t) = 0, & i(a, 0) = i_0(a) \geq 0 \quad \forall a, \\ 3. & i(0, t) = \lambda(t) S(t), \\ 4. & \lambda(t) = \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i(a, t) da. \end{cases} \quad (4.1)$$

Denotamos $\partial_{(1,1)}$ o operador derivada direcional na direção do vetor $(1, 1)$, escrevemos

$$\partial_{(1,1)} i(a, t) = \frac{\partial i}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial i}{\partial a}(a, t). \quad (4.2)$$

O operador diferencial $\partial_{(1,1)}$ é de primeira ordem com coeficientes constantes, assim, iremos discretizar tempo e idade com o mesmo parâmetro.

Seja $T > 0$ o tempo final até o qual planejamos acompanhar a evolução da epidemia no contexto da aproximação que será realizada, e seja $K \in \mathbb{Z}^+$ o número total de passos discretos que utilizaremos para alcançar o instante T . Seja $h = T/K$ o parâmetro de passos (idade-tempo), e seja $M = \lceil \frac{a_f}{h} \rceil$, onde representamos $[x]$ como a parte inteira do número real x . Para quaisquer inteiros j, n não negativos, denotamos $a_j = j \cdot h$, $t^n = n \cdot h$. Para quaisquer função f dependente de a , denotamos $f(a_j) = f_j$, quaisquer função g dependente de t , denotamos $g(t^n) = g^n$ e quaisquer função ψ dependente de a e t denotamos $\psi(a_j, t^n) = \psi_j^n$. Após estabelecido estes parâmetros, iremos discretizar as

derivadas do sistema usando o método implícito de Euler,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} S(t^n) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{S(t^n + h) - S(t^n)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{S(t^n - h) - S(t^n)}{-h} \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{S(t^{n-1}) - S(t^n)}{-h} \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{S(t^n) - S(t^{n-1})}{h} \\
&\approx \frac{S^n - S^{n-1}}{h} \\
\Rightarrow -\lambda^n S^n &\approx \frac{S^n - S^{n-1}}{h}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_{(1,1)} i(a_j, t^n) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{i((a_j, t^n) + (h, h)) - i(a_j, t^n)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{i((a_j, t^n) + (-h, -h)) - i(a_j, t^n)}{-h} \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{i(a_{j-1}, t^{n-1}) - i(a_j, t^n)}{-h} \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{i(a_j, t^n) - i(a_{j-1}, t^{n-1})}{h} \\
&\approx \frac{i_j^n - i_{j-1}^{n-1}}{h} \\
\Rightarrow -\gamma_j i_j^n &\approx \frac{i_j^n - i_{j-1}^{n-1}}{h}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Também faremos uso da fórmula da quadratura para aproximação de integrais,

$$\lambda(t^n) \approx h \sum_{j=0}^M w_j (\lambda_0)_j i_j^n. \tag{4.5}$$

Onde w_j são pesos que define a formula e sua ordem de aproximação.

Por fim, iremos assumir que as condições básicas (3.9)-(3.12) são satisfeitas e para a convergência do método, iremos supor que algumas condições de regularidade sobre $i(a, t)$.

No entanto, haverá uma complicação que aparece com a taxa de remoção γ que em (3.10) assumimos ir ao infinito na sua integral em $(0, a_f)$, pois ao tentar modelar numericamente sua integral durante todo o período de 0 à a_f , o crescimento ilimitado trará erros computacionais. Mas, observando λ_0 pelo ponto de vista biológico, temos que a partir de um

certo tempo a doença passa de seu período infeccioso, então podemos assumir que:

$$\text{Existe } a^* < a_f \text{ tal que } \lambda_0(a) = 0 \text{ para todo } a > a^*. \quad (4.6)$$

Essa suposição significa que apenas as classe-idades dentro do intervalo $[0, a^*] \subset [0, a_f)$ são responsáveis pelo processo de trazer novos infectados, então podemos ignorar classe-idades acima desse período, assim contornando as dificuldades relacionadas a γ , já que apenas iremos interagir com o domínio em $(0, a^*)$ onde a função é limitada.

4.1 MÉTODO DE EULER-RIEMANN

Passaremos a utilizar as notações U_j^n , V^n e Λ^n para representar as aproximações das funções i_j^n , S^n e λ^n , respectivamente. Portanto, as funções i_j^n , S^n e λ^n referem-se a seus valores exatos, enquanto U_j^n , V^n e Λ^n serão os valores obtidos usando o método numérico.

Consideraremos o método *Implícito de Euler-Riemann* (IER) que será aplicado a partir da aproximação das equações (4.1.1) e (4.1.2) pelo método de Euler, conforme definido em (4.3) e (4.4), além de utilizar a soma de Riemann à direita para a fórmula da quadratura em (4.5), isto é, considerar $w_0 = 0$ e $w_j = 1$ para $j \geq 1$, assim, podemos obter uma aproximação para (4.1.4).

Assumindo que (4.6) é satisfeito, denotando $M^* = \lceil \frac{a^*}{h} \rceil$, podemos encontrar o seguinte sistema para $1 \leq j \leq M^*$ e $1 \leq n \leq K$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \frac{V^n - V^{n-1}}{h} = -\Lambda^n V^n, \quad V^0 = S_0, \\ 2. \quad \frac{U_j^n - U_{j-1}^{n-1}}{h} = -\gamma_j U_j^n, \quad U_j^0 = i_0(a_j), \\ 3. \quad U_0^n = \Lambda^n V^n, \\ 4. \quad \Lambda^n = h \sum_{j=1}^{M^*} (\lambda_0)_j U_j^{n-1}, \quad \Lambda^0 = \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i_0(a) da. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Pela suposição (4.6) podemos tomar o j apenas entre 0 e M^* e podemos desprezar U_j^n quando $j > M^*$, pois, de fato os termos de da soma em (4.7.4) zeram para $j \geq M^*$.

Podemos resolver (4.7.1) e (4.7.2) para V^n e U_j^n de forma explícita:

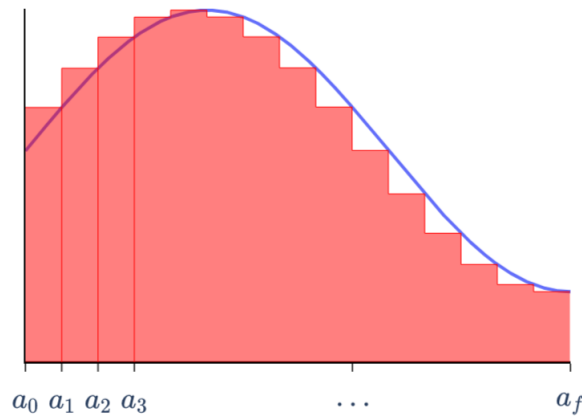
$$V^n = \frac{V^{n-1}}{(1 + h\Lambda^n)} \quad 1 \leq j \leq M^*, \quad 1 \leq n \leq K \quad (4.8)$$

e

$$U_j^n = \frac{U_{j-1}^{n-1}}{(1 + h\gamma_j)} \quad 1 \leq j \leq M^*, \quad 1 \leq n \leq K. \quad (4.9)$$

A substituição de U_j^n da definição em (4.5) por U_j^{n-1} na soma em (4.7.4), é motivada pelo fato de que, para valores suficientemente grandes de K , U_j^{n-1} e U_j^n tornam-se valores próximos, além disso, Λ^n não depende de $U_0^n = \Lambda^n V^n$ graças à escolha da soma de Riemann nos pontos finais (ver Figura 3), logo, essa troca não altera significativamente o comportamento da aproximação.

Figura 3: Na soma de Riemann nos pontos finais à direita podemos ignorar o termo inicial da partição.



Fonte: Autor

Também poderíamos simplesmente usar da forma:

$$\Lambda^n = h \sum_{j=1}^{M^*} (\lambda_0)_j U_j^n,$$

mas, nesta forma teríamos uma certa dificuldade adicional nas demonstrações presentes neste capítulo.

Por fim, para $1 \leq n \leq K$ e $1 \leq j \leq M^*$ podemos reescrever (4.7) da forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. & V^n = \frac{V^{n-1}}{(1 + h\Lambda^n)}, \quad V^0 = S_0, \\ 2. & U_j^n = \frac{U_j^{n-1}}{(1 + h\gamma_j)}, \quad U_j^0 = i_0(a_j), \\ 3. & U_0^n = \Lambda^n \frac{V^{n-1}}{(1 + h\Lambda^n)}, \\ 4. & \Lambda^n = h \sum_{j=1}^{M^*} (\lambda_0)_j U_j^{n-1}, \quad \Lambda^0 = \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i_0(a) da. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

4.2 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

Agora vamos mostrar que, sobre algumas condições de regularidade na solução de (3.8), as aproximações em (4.10) de fato convergem uniformemente com $h \rightarrow 0$.

Inicialmente, vamos observar o seguinte resultado auxiliar,

Proposição 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e tomando $h \geq 0$, então*

$$f(h) - f(0) = h f'(0) + \int_0^h (h - x) f''(x) dx.$$

Demonstração:

Tomando a integral

$$\int_0^h f'(x) dx = f(h) - f(0).$$

A resolvendo por partes, tomando $u = f'(x)$, $dv = dx$, e $du = f''(x)dx$ e $v = x$, temos

$$\begin{aligned} f(h) - f(0) &= \int_0^h f'(x) dx = [x f'(x)]_0^h - \int_0^h x f''(x) dx \\ &= h f'(h) + h f'(0) - h f'(0) - \int_0^h x f''(x) dx \\ &= h f'(0) + h \int_0^h f''(x) dx - \int_0^h x f''(x) dx \\ &= h f'(0) + \int_0^h (h f''(x) dx - x f''(x)) dx \\ &= h f'(0) + \int_0^h (h - x) f''(x) dx. \end{aligned}$$

■

Seja f uma função sob as hipóteses da Proposição 4.2.1. Logo, em $-h$ podemos obter

$$f(-h) - f(0) = -h f'(0) + \int_0^{-h} (-h - x) f''(x) dx.$$

Fazendo uma mudança de variável $y = -x$ na integral, obtemos

$$\begin{aligned} f(-h) - f(0) &= -h f'(0) + \int_0^h (-h + y) f''(-y) (-1) dy \\ \implies f(0) - f(-h) &= h f'(0) + \int_0^h (y - h) f''(-y) dy, \end{aligned}$$

assim, alcançamos a igualdade:

$$f'(0) = \frac{f(0) - f(-h)}{h} + \frac{1}{h} \int_0^h (h - y) f''(-y) dy.$$

Então, para $f(x) = i(a + x, t + x)$,

$$f'(0) = \frac{\partial i}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial i}{\partial a}(a, t) = \partial_{(1,1)} i(a, t),$$

assim, podemos escrever

$$\partial_{(1,1)} i(a, t) = \frac{i(a, t) - i(a - h, t - h)}{h} + \frac{1}{h} \int_0^h (h - y) \partial_{(1,1)}^2 i(a - y, t - y) dy.$$

Logo, por (4.1.2), como $\partial_{(1,1)} i = i_a + i_t = -\gamma i$, temos

$$\begin{aligned} -\gamma(a) i(a, t) &= \frac{i(a, t) - i(a - h, t - h)}{h} + \frac{1}{h} \int_0^h (h - y) \partial_{(1,1)}^2 i(a - y, t - y) dy \\ \implies \frac{i(a, t) - i(a - h, t - h)}{h} + \gamma(a) i(a, t) &= -\frac{1}{h} \int_0^h (h - y) \partial_{(1,1)}^2 i(a - y, t - y) dy. \end{aligned}$$

Assim, para $1 \leq j \leq M^*$ e $1 \leq n \leq K$,

$$\frac{i(a_j, t^n) - i(a_{j-1}, t^{n-1})}{h} + i(a_j, t^n) \gamma(a_j) = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) \partial_{(1,1)}^2 i(a_j - y, t^n - y) dy,$$

ou seja,

$$\frac{i_j^n - i_{j-1}^{n-1}}{h} + i_j^n \gamma_j = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) \partial_{(1,1)}^2 i(a_j - y, t^n - y) dy. \quad (4.11)$$

De forma análoga, podemos encontrar a seguinte equação para $S(t)$:

$$\frac{S^n - S^{n-1}}{h} + S^n \lambda^n = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) S''(t^n - y) dy. \quad (4.12)$$

Definimos os erros de i , S e λ por ε , ξ e ζ respectivamente. Estes são da forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= i_j^n - U_j^n, \\ \xi^n &= S^n - V^n, \\ \zeta^n &= \lambda^n - \Lambda^n. \end{aligned}$$

Definimos algumas normas associadas a estes erros,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_1 &= h \sum_{j=0}^{M^*} |\varepsilon_j^n|, & \|\varepsilon\|_{\infty,1} &= \max_{0 \leq n \leq K} \|\varepsilon^n\|_1, & \|\varepsilon\|_{\infty,\infty} &= \max_{\substack{0 \leq n \leq K \\ 0 \leq j \leq M^*}} |\varepsilon_j^n|, \\ \|\xi\|_\infty &= \max_{0 \leq n \leq K} |\xi^n|, & \|\zeta\|_\infty &= \max_{1 \leq n \leq K} |\zeta^n|. \end{aligned}$$

Verificamos a convergência no seguinte sentido: se ao tomarmos um valor de h muito próximo de 0 queremos que o erro também vire um valor muito próximo de 0, para isso, vamos primeiro provar os Lemas 4.1-4.4.

Lema 4.1. *Temos a seguinte desigualdade sobre o valor de $\lambda(t)$,*

$$0 \leq \lambda(t) \leq \lambda_0^+ N \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

Por (3.2),

$$0 \leq \int_0^{a_f} i(a, t) da \leq N \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, $\forall t \geq 0$,

$$\lambda(t) = \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i(a, t) da \leq \int_0^{a_f} \lambda_0^+ i(a, t) da \leq \lambda_0^+ \int_0^{a_f} i(a, t) da \leq \lambda_0^+ N.$$

Ou seja,

$$0 \leq \lambda(t) \leq \lambda_0^+ N \quad \forall t \geq 0.$$

■

Lema 4.2. *Se a solução de i em (3.15) é tal que $i_t \in L^\infty((0, a^*) \times (0, T))$ para algum $T \in \mathbb{R}^+$ então a derivada segunda de S existe e temos $S'' \in L^\infty(0, T)$.*

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned} S''(t) &= (-\lambda(t) S(t))' \\ &= -\lambda(t) S'(t) - \lambda'(t) S(t) \\ &= \lambda(t)^2 S(t) - S(t) \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i_t(a, t) da. \end{aligned}$$

Pelo Lema (4.1), e pela desigualdade triangular, segue:

$$\begin{aligned} |S''(t)| &\leq |\lambda(t)|^2 |S(t)| + |S(t)| \int_0^{a_f} |\lambda_0(a)| \|i_t\|_\infty da \\ &\leq \left((\lambda_0^+ N)^2 + \lambda_0^+ \int_0^{a_f} \|i_t\|_\infty da \right) |S_0| \\ &\leq \left((\lambda_0^+ N)^2 + \lambda_0^+ a_f \|i_t\|_\infty \right) |S_0| \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Daí, $\|S''\|_\infty < \infty$.

■

Lema 4.3. *Sejam,*

$$Y^n = h \sum_{j=1}^{M^*} U_j^n 0 \quad 0 \leq n \leq K \quad 0 \leq j \leq M^*.$$

Então

$$V^n + Y^n \leq S_0 + \tilde{I}_0 \quad 0 \leq n \leq K \quad 0 \leq j \leq M^*,$$

onde $\tilde{I}_0 \geq I(0)$ é uma constante.

Demonstração:

Como as funções i_0 , γ e λ_0 são não negativas, então as aproximações em (4.10) são não negativas, daí,

$$\begin{aligned} 1 \leq 1 + h \gamma_j &\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{(1 + h \gamma_j)} \quad 1 \leq j \leq M^* \quad \text{e} \\ 1 \leq 1 + h \Lambda^n &\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{(1 + h \Lambda^n)} \quad 1 \leq n \leq K, \end{aligned}$$

assim,

$$V^n \leq V^{n-1} \quad \text{para } 1 \leq j \leq M^* \quad \text{e} \quad U_j^n \leq U_{j-1}^{n-1} \quad \text{para } 1 \leq n \leq K.$$

Portanto, podemos observar que

$$V^n + Y^n \leq V^{n-1} + Y^n \quad 1 \leq n \leq K.$$

Para $1 \leq n \leq K$, temos

$$V^{n-1} + Y^n = V^{n-1} + h U_1^n + h \sum_{j=2}^{M^*} U_j^n.$$

Como $0 \leq h U_{M^*}^{n-1}$, por (4.10) e as desigualdades vistas, assim, para $2 \leq n \leq K$ temos

$$\begin{aligned} V^{n-1} + Y^n &\leq V^{n-1} + h U_1^n + h \sum_{j=2}^{M^*} U_j^n + h U_{M^*}^{n-1} \\ &\leq V^{n-1} + h U_0^{n-1} + h \sum_{j=2}^{M^*} U_{j-1}^{n-1} + h U_{M^*}^{n-1} \\ &\leq \frac{V^{n-2}}{1 + h \Lambda^{n-1}} + h \Lambda^{n-1} \frac{V^{n-2}}{1 + h \Lambda^{n-1}} + h \sum_{j=1}^{M^*-1} U_j^{n-1} + h U_{M^*}^{n-1} \\ &\leq \frac{V^{n-2} (1 + h \Lambda^{n-1})}{1 + h \Lambda^{n-1}} + h \sum_{j=1}^{M^*} U_j^{n-1} \\ &\leq V^{n-2} + Y^{n-1}. \end{aligned}$$

Nessa desigualdade,

$$\text{se } n = 2, \quad \text{então} \quad V^1 + Y^2 \leq V^0 + Y^1.$$

$$\text{se } n = 3, \quad \text{então} \quad V^2 + Y^3 \leq V^1 + Y^2 \leq V^0 + Y^1.$$

Para $h M^* \leq a^*$, temos

$$\begin{aligned} Y^1 &= h \sum_{j=1}^{M^*} U_j^1 \leq h \sum_{j=1}^{M^*} U_{j-1}^0 \leq h \sum_{j=0}^{M^*-1} U_j^0 \\ &\leq h \sum_{j=0}^{M^*-1} (i_0)_j. \end{aligned}$$

Como $i_0 \in L^1(0, a_f)$ e $h \sum_{j=0}^{M^*-1} (i_0)_j$ é a soma de Riemann à esquerda de i_0 , então ela é uma boa aproximação de

$$I(0) = \int_0^{a_f} i(a) da.$$

Logo, iremos tomar que $\tilde{I}_0$ é uma constante tal que

$$h \sum_{j=0}^{M^*-1} (i_0)_j \approx I(0) \leq \tilde{I}_0.$$

Portanto, como $V^0 = S_0$, recursivamente, para $2 \leq n \leq K$ podemos alcançar

$$V^{n-1} + Y^n \leq S_0 + \tilde{I}_0,$$

daí, para $1 \leq n \leq K$,

$$V^n + Y^n \leq S_0 + \tilde{I}_0.$$

Onde,

$$Y^0 = h \sum_{j=1}^{M^*} U_j^0 \leq \tilde{I}_0.$$

Então,

$$V^n + Y^n \leq S_0 + \tilde{I}_0 \quad 0 \leq n \leq K.$$

Nota-se que V^n é não negativo. Daí,

$$h \sum_{j=1}^{M^*} U_j^n \leq S_0 + \tilde{I}_0 \quad 0 \leq n \leq K.$$

■

Lema 4.4. Para $1 \leq n \leq K$, temos

$$\Lambda^n \leq \lambda_0^+ (S_0 + \tilde{I}_0).$$

Demonstração:

Podemos observar que

$$\Lambda^n = h \sum_{j=1}^{M^*} (\lambda_0)_j U_j^{n-1} \leq \lambda_0^+ h \sum_{j=1}^{M^*} U_j^{n-1},$$

assim, pelo Lema 4.3,

$$\Lambda^n \leq \lambda_0^+ (S_0 + \tilde{I}_0) \quad 1 \leq n \leq K.$$

■

Teorema 4.5. Assumindo que a condição (4.6) é satisfeita e que a solução de i em (3.15) é suficientemente regular tal que as derivadas i_t , i_a , $\partial_{(1,1)}^2 i$ e $\partial_a(i(a, t) \lambda_0(a))$ estão em $L^\infty((0, a^*) \times (0, T))$. Então o erro na aproximação IER satisfaz:

$$\|\varepsilon\|_{\infty,1} \leq C h, \quad \|\varepsilon\|_{\infty,\infty} \leq C h, \quad \|\xi\|_\infty \leq C h, \quad \|\zeta\|_\infty \leq C h. \quad (4.13)$$

Onde C é independente de h , mas depende de T , a^* , $\|i_t\|_\infty$, $\|i_a\|_\infty$, $\|\partial_{(1,1)}^2 i\|_\infty$, e $\|\lambda'_0\|_\infty$.

Demonstração:

Temos,

$$\begin{aligned}
\zeta^n &= \lambda^n - \Lambda^n \\
&= \int_0^{a_f} \lambda_0(a) i(a, t^n) da - h \sum_{j=1}^M (\lambda_0)_j U_j^{n-1} \\
&= \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^n) da - h \sum_{j=1}^{M^*} (\lambda_0)_j U_j^{n-1} \\
&= \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^n) da - \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^{n-1}) da + \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^{n-1}) da \\
&\quad - h \sum_{j=0}^{M^*} (\lambda_0)_j i_j^{n-1} + h \sum_{j=0}^{M^*} (\lambda_0)_j i_j^{n-1} - h \sum_{j=1}^{M^*} (\lambda_0)_j U_j^{n-1} \\
&= \int_0^{a^*} \lambda_0(a) h \frac{i(a, t^n) - i(a, t^{n-1})}{h} da + \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^{n-1}) da \\
&\quad - h \sum_{j=0}^{M^*} (\lambda_0)_j i_j^{n-1} + h \sum_{j=0}^{M^*} (\lambda_0)_j (i_j^{n-1} - U_j^{n-1}).
\end{aligned}$$

Assim, usando o Teorema do Valor Médio dentro da primeira integral da igualdade, podemos obter a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned}
|\zeta^n| &\leq \int_0^{a^*} \lambda_0^+ h \left| \frac{i(a, t^n) - i(a, t^{n-1})}{h} \right| da + \left| \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^{n-1}) da - h \sum_{j=0}^{M^*} (\lambda_0)_j i_j^{n-1} \right| \\
&\quad + h \sum_{j=0}^{M^*} \lambda_0^+ |\varepsilon_j^{n-1}| \\
&\leq h \lambda_0^+ \|i_t\|_\infty a^* + \left| \int_0^{a^*} \lambda_0(a) i(a, t^{n-1}) da - h \sum_{j=0}^{M^*} (\lambda_0)_j i_j^{n-1} \right| + \lambda_0^+ h \sum_{j=0}^{M^*} |\varepsilon_j^{n-1}|.
\end{aligned}$$

Pela de estimativa de erro padrão para a regra de pontos finais (à direita) em quadraturas de integrais, temos a seguinte desigualdade,

$$\left| \int_0^{a^*} f(x) dx - h \sum_{j=1}^{M^*} f(a_j) \right| \leq C_0 h \|f'\|_\infty.$$

Onde $C_0 > 0$ é uma constante que não depende de h ou f .

Daí,

$$|\zeta^n| \leq h \lambda_0^+ \|i_t\|_\infty a^* + h C_0 \left\| \partial_a (i(a, t^{n-1}) \lambda_0(a)) \right\|_\infty + \lambda_0^+ \|\varepsilon^{n-1}\|_1.$$

Assim, tomando $C_1 = \max\{\lambda_0^+ \|i_t\|_\infty a^* + C_0 \|\partial_a(i(a, t^{n-1}) \lambda_0(a))\|_\infty, \lambda_0^+\}$ temos

$$|\zeta^n| \leq h C_1 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 C_1.$$

Ao subtrair a equação (4.10.1) de (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{h} + \lambda^n S^n - \Lambda^n V^n = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) S''(t^n - y) dy \\ \Rightarrow & \frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{h} + \lambda^n S^n - \lambda^n V^n + \lambda^n V^n - \Lambda^n V^n = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) S''(t^n - y) dy \\ \Rightarrow & \frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{h} + \lambda^n \xi^n + \zeta^n V^n = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) S''(t^n - y) dy \\ \Rightarrow & \xi^n = -\frac{h \zeta^n V^n}{(1 + h \lambda^n)} + \frac{\xi^{n-1}}{(1 + h \lambda^n)} + \frac{1}{(1 + h \lambda^n)} \int_0^h (h - x) S''(t^n + x) dx, \end{aligned}$$

como $1 + h \lambda^n \geq 1 \forall n$ e $V^n \leq S_0 \forall n$ então

$$\begin{aligned} |\xi^n| &= \left| \frac{\xi^{n-1} - h \zeta^n V^n}{(1 + h \lambda^n)} + \frac{1}{(1 + h \lambda^n)} \int_0^h (y - h) S''(t^n - y) dy \right| \\ \Rightarrow |\xi^n| &\leq |\xi^{n-1} - h \zeta^n V^n| + \int_0^h |y - h| \|S''\|_\infty dy \\ \Rightarrow |\xi^n| &\leq |\xi^{n-1}| + |h \zeta^n V^n| + \|S''\|_\infty \int_0^h |h - y| dy \\ \Rightarrow |\xi^n| &\leq |\xi^{n-1}| + h S_0 |\zeta^n| + h^2 \frac{\|S''\|_\infty}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $C_2 = \max\{\|S''\|_\infty / 2, S_0\}$,

$$|\xi^n| \leq |\xi^{n-1}| + h |\zeta^n| C_2 + h^2 C_2.$$

Vamos tentar fazer algo parecido para ε . Subtraindo (4.10.2) de (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_j^n - \varepsilon_{j-1}^{n-1}}{h} + \gamma_j \varepsilon_j^n = \frac{1}{h} \int_0^h (y - h) \partial_{(1,1)}^2 i(a_j - y, t^n - y) dy \\ \Rightarrow \varepsilon_j^n &= \frac{\varepsilon_{j-1}^{n-1}}{1 + h \gamma_j} + \frac{1}{1 + h \gamma_j} \int_0^h (y - h) \partial_{(1,1)}^2 i(a_j - y, t^n - y) dy, \end{aligned}$$

assim, temos a seguinte desigualdade

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-1}^{n-1}| + h^2 \frac{\|\partial_{(1,1)}^2 i\|_\infty}{2}.$$

Tomando $C_3 = \|\partial_{(1,1)}^2 i\|_\infty / 2$,

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-1}^{n-1}| + h^2 C_3.$$

Vamos observar ε_j^n quando $n = 0$,

$$\varepsilon_j^0 = i_0(a_j) - i_0(a_j) = 0 \quad 0 \leq j \leq M^*.$$

Agora, para $j = 0$, como $S'(t) \leq 0$ então S é decrescente e $S(t^n) \leq S(t^{n-1})$, daí

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^n &= \lambda^n S^n - \Lambda^n V^n \\ &= \lambda^n S^n - \Lambda^n \frac{V^{n-1}}{(1 + h \Lambda^n)} \\ &\leq \lambda^n S^{n-1} - \Lambda^n \frac{V^{n-1}}{(1 + h \Lambda^n)} \\ &\leq \lambda^n S^{n-1} - \lambda^n V^{n-1} + \lambda^n V^{n-1} - \Lambda^n \frac{V^{n-1}}{(1 + h \Lambda^n)} \\ &\leq \lambda^n (S^{n-1} - V^{n-1}) + V^{n-1} (\lambda^n - \Lambda^n \frac{1}{(1 + h \Lambda^n)}) \\ &\leq \lambda^n (S^{n-1} - V^{n-1}) + \frac{V^{n-1}}{(1 + h \Lambda^n)} (\lambda^n (1 + h \Lambda^n) - \Lambda^n) \\ &\leq \lambda^n (S^{n-1} - V^{n-1}) + V^{n-1} (\lambda^n (1 + h \Lambda^n) - \Lambda^n) \\ &\leq \lambda^n (S^{n-1} - V^{n-1}) + V^{n-1} (\lambda^n - \Lambda^n) + V^{n-1} \lambda^n h \Lambda^n \\ &\leq \lambda_0^+ N \xi^{n-1} + S_0 \zeta^n + h \lambda_0^+ N S_0 \Lambda^n. \end{aligned}$$

Onde, pelo corolário 4.4,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0^n| &\leq \lambda_0^+ N |\xi^{n-1}| + S_0 |\zeta^n| + h \lambda_0^+ N S_0 |\Lambda^n| \\ &\leq \lambda_0^+ N |\xi^{n-1}| + S_0 |\zeta^n| + h (\lambda_0^+)^2 N S_0 (S_0 + \tilde{I}_0). \end{aligned}$$

Ao considerarmos $C_4 = \max\{\lambda_0^+ N, S_0, N S_0 (S_0 + \tilde{I}_0)\}$, obtemos

$$|\varepsilon_0^n| \leq C_4 |\xi^{n-1}| + C_4 |\zeta^n| + h C_4.$$

Assim, tomando $C_5 = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ temos o seguinte sistema de desigual-

dades,

$$\left\{ \begin{array}{l} |\zeta^n| \leq h C_5 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 C_5, \\ |\xi^n| \leq |\xi^{n-1}| + h |\zeta^n| C_5 + h^2 C_5, \\ |\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-1}^{n-1}| + h^2 C_5, \\ |\varepsilon_0^n| \leq |\xi^n| C_5 + |\zeta^n| C_5 + h C_5. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Com isso, vamos observar $\|\varepsilon^n\|_1$, onde, por $M^* h \leq a^*$,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_1 &= h \sum_{j=0}^{M^*} |\varepsilon_j^n| = h |\varepsilon_0^n| + h \sum_{j=1}^{M^*} |\varepsilon_j^n| \\ &\leq h |\xi^{n-1}| C_5 + h |\zeta^n| C_5 + h^2 C_5 + h \sum_{j=1}^{M^*} (|\varepsilon_{j-1}^{n-1}| + h^2 C_5) + |\varepsilon_{M^*}^{n-1}| \\ &\leq h |\xi^{n-1}| C_5 + h^2 C_5 + h \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (C_5)^2 + h^2 C_5 + h \sum_{j=0}^{M^*} |\varepsilon_j^{n-1}| + h^3 M^* C_5 \\ &\leq h |\xi^{n-1}| C_5 + h^2 C_5 + h \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (C_5)^2 + h^2 C_5 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 + h^2 a^* C_5 \\ &\leq h |\xi^{n-1}| C_5 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (h (C_5)^2 + 1) + h^2 (2 C_5 + a^* C_5). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\xi^n| &\leq |\xi^{n-1}| + h |\zeta^n| C_5 + h^2 C_5 \\ &\leq |\xi^{n-1}| + h (h C_5 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 C_5) C_5 + h^2 C_5 \\ &\leq |\xi^{n-1}| + h \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (C_5)^2 + h^2 2 C_5. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C_6 = \max\{C_5, (C_5)^2, 2 C_5 + a^* C_5, 2 C_5\}$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\|\varepsilon^n\|_1 \leq \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (1 + h C_6) + |\xi^{n-1}| h C_6 + h^2 C_6$$

e

$$|\xi^n| \leq |\xi^{n-1}| + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 h C_6 + h^2 C_6.$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_1 + |\xi^n| &\leq \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (1 + h C_6) + |\xi^{n-1}| h C_6 + h^2 C_6 \\ &\quad + |\xi^{n-1}| + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 h C_6 + h^2 C_6 \\ &\leq \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (1 + h 2 C_6) + |\xi^{n-1}| (1 + h C_6) + h^2 2 C_6. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C_7 = \max\{C_6, 2 C_6\}$,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_1 + |\xi^n| &\leq \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (1 + h C_7) + |\xi^{n-1}| (1 + h C_7) + h^2 C_7 \\ &\leq (\|\varepsilon^{n-1}\|_1 + |\xi^{n-1}|) (1 + h C_7) + h^2 C_7. \end{aligned}$$

Definindo $\phi^n = \|\varepsilon^n\|_1 + |\xi^n|$, obtemos

$$\phi^0 = \|\varepsilon^0\|_1 + |\xi^0| = 0$$

e

$$\phi^n \leq \phi^{n-1} (1 + h C_7) + h^2 C_7 \quad 1 \leq n \leq K.$$

Vamos examinar os casos em que $n = 1$, $n = 2$, e $n = 3$

$$\begin{aligned} n = 1, \quad \phi^1 &\leq \phi^0 (1 + h C_7) + h^2 C_7 \\ &\leq h^2 C_7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2, \quad \phi^2 &\leq \phi^1 (1 + h C_7) + h^2 C_7 \\ &\leq h^2 C_7 (1 + h C_7) + h^2 C_7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3, \quad \phi^3 &\leq \phi^2 (1 + h C_7) + h^2 C_7 \\ &\leq h^2 C_7 \sum_{k=0}^2 (1 + h C_7)^k. \end{aligned}$$

Por indução, vamos provar que

$$\phi^n \leq h^2 C_7 \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h C_7)^k.$$

Iremos supor que seja verdade para $n = 1, \dots, l$ e vamos observar para $l + 1$

$$\begin{aligned}
 \phi^{l+1} &\leq \phi^l (1 + h C_7) + h^2 C_7 \\
 &\leq \left(h^2 C_7 \sum_{k=0}^{l-1} (1 + h C_7)^k \right) (1 + h C_7) + h^2 C_7 \\
 &\leq h^2 C_7 \left(\sum_{k=0}^{l-1} (1 + h C_7)^{k+1} \right) + h^2 C_7 \\
 &\leq h^2 C_7 \left(1 + \sum_{k=0}^{l-1} (1 + h C_7)^{k+1} \right) \\
 &\leq h^2 C_7 \sum_{k=0}^l (1 + h C_7)^k.
 \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração por indução.

Assim, por $1 \leq (1 + h C_7)^n$, em $1 \leq n \leq K$,

$$\begin{aligned}
 \phi^n &\leq h^2 C_7 \frac{(1 + h C_7)^n - 1}{(1 + h C_7) - 1} \\
 &\leq h^2 C_7 \frac{(1 + h C_7)^n}{h C_7} \\
 &\leq h (1 + h C_7)^n.
 \end{aligned}$$

Portanto, como $\phi^0 = 0$ e $1 \leq n \leq K$, podemos generalizar da forma:

$$\begin{aligned}
 \phi^n &\leq h (1 + h C_7)^K \\
 &\leq h \left(1 + \frac{T}{K} C_7 \right)^K \quad 0 \leq n \leq K.
 \end{aligned}$$

Vamos observar a função $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$g(z) = \left(1 + \frac{b}{z} \right)^z = e^{z \ln(1 + \frac{b}{z})}$$

onde $b \in \mathbb{R}^+$.

Como $z \ln(1 + b/z)$ é uma função crescente então g também será crescente, daí

$$g(z) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = e^b.$$

Então, voltando para ϕ^n , temos

$$\phi^n \leq h e^{T C_7} \quad 0 \leq n \leq K.$$

Daí,

$$\|\varepsilon^n\|_1 \leq h e^{T C_7} \quad 0 \leq n \leq K, \quad (4.15)$$

$$|\xi^n| \leq h e^{T C_7} \quad 0 \leq n \leq K. \quad (4.16)$$

Logo, observando ζ^n em (4.14),

$$\begin{aligned} |\zeta^n| &\leq h C_7 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 C_7 \\ &\leq h C_7 + h e^{T C_7} C_7 \quad 1 \leq n \leq K. \end{aligned}$$

Como $\zeta^0 = 0$, podemos generalizar da forma

$$|\zeta^n| \leq h C_7 (1 + e^{T C_7}) \quad 0 \leq n \leq K. \quad (4.17)$$

Agora, observando ε_0^n em (4.14),

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0^n| &\leq |\xi^n| C_7 + |\zeta^n| C_7 + h C_7 \\ &\leq |\xi^n| C_7 + (h C_7 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 C_7) C_7 + h C_7 \\ &\leq |\xi^n| C_7 + \|\varepsilon^{n-1}\|_1 (C_7)^2 + h (C_7)^2. \end{aligned}$$

Tomando $C_8 = \max\{C_7, C_7 + (C_7)^2, (C_7)^2\}$, pela desigualdade encontrada anteriormente, obtemos

$$|\varepsilon_0^n| \leq h e^{T C_8} C_8 + h C_8 \quad 0 \leq n \leq K.$$

Agora, vamos novamente observar ε_j^n . A partir de (4.14),

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-1}^{n-1}| + h^2 C_8.$$

Assim, vamos separar essa desigualdade em dois casos, observando quando $j \geq n$ e $n > j$

- Caso 1: $M^* \geq j \geq n \geq 1$.

Vamos observar alguns casos específicos para $j \geq n = 1, 2, 3$.

$$n = 1, \quad |\varepsilon_j^1| \leq |\varepsilon_{j-1}^0| + h^2 C_8.$$

$$\begin{aligned} n = 2, \quad |\varepsilon_j^2| &\leq |\varepsilon_{j-1}^1| + h^2 C_8 \\ &\leq |\varepsilon_{(j-1)-1}^0| + h^2 C_8 + h^2 C_8 \\ &\leq |\varepsilon_{j-2}^0| + h^2 2 C_8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3, \quad |\varepsilon_j^3| &\leq |\varepsilon_{j-1}^2| + h^2 C_8 \\ &\leq |\varepsilon_{j-2}^1| + h^2 2 C_8 + h^2 C_8 \\ &\leq |\varepsilon_{j-3}^0| + h^2 3 C_8. \end{aligned}$$

assim, podemos tentar checar a seguinte desigualdade

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-n}^0| + h^2 n C_8.$$

Por indução, vamos supor que seja verdade para $j \geq n = 1, \dots, l$. Checaremos para $l+1$,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_j^{l+1}| &\leq |\varepsilon_{j-1}^l| + h^2 C_8 \\ &\leq |\varepsilon_{(j-1)-l}^0| + h^2 l C_8 + h^2 C_8 \\ &\leq |\varepsilon_{j-(l+1)}^0| + h^2 (l+1) C_8. \end{aligned}$$

O que conclui nossa indução.

Assim, como $M^* \geq j \geq n$, obtemos

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-n}^0| + h^2 M^* C_8,$$

daí, por $M^* h \geq a^*$,

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_{j-n}^0| + h a^* C_8 \quad M^* \geq j \geq n \geq 1.$$

Portanto, por $\varepsilon_j^0 = i_j^0 - U_j^0 = (i_0)_j - (i_0)_j = 0$ para qualquer $j \geq 0$, então

$$|\varepsilon_j^n| \leq h a^* C_8 \quad K \geq j \geq n \geq 0.$$

- Caso 2: $K \geq n \geq j \geq 1$.

De forma análoga ao anterior, como $K h = T$, podemos alcançar

$$|\varepsilon_j^n| \leq |\varepsilon_0^{n-j}| + h T C_8 \quad K \geq n > j \geq 1.$$

portanto,

$$|\varepsilon_j^n| \leq h e^{T C_8} C_8 + h C_8 + h T C_8 \quad K \geq n > j \geq 1.$$

Assim, tomando $C_9 = \max\{C_8, a^* C_8, e^{T C_8} C_8 + C_8 + T C_8\}$

$$|\varepsilon_j^n| \leq h C_9 \quad K \geq n \geq 0 \quad M^* \geq j \geq 0. \quad (4.18)$$

Logo, pelas desigualdades (4.15), (4.16), (4.17) e (4.18), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\varepsilon^n\|_1 \leq h e^{T C_9} & 0 \leq n \leq K, \\ |\xi^n| \leq h e^{T C_9} & 0 \leq n \leq K, \\ |\zeta^n| \leq h C_9 (1 + e^{T C_9}) & 0 \leq n \leq K, \\ |\varepsilon_j^n| \leq h C_9 & 0 \leq n \leq K \quad 0 \leq j \leq M^*. \end{array} \right.$$

Tomando $C = \max\{C_9, e^{T C_9}, C_9 (1 + e^{T C_9})\}$, obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\varepsilon^n\|_1 \leq h C & 0 \leq n \leq K, \\ |\xi^n| \leq h C & 0 \leq n \leq K, \\ |\zeta^n| \leq h C & 0 \leq n \leq K, \\ |\varepsilon_j^n| \leq h C & 0 \leq n \leq K \quad 0 \leq j \leq M^*. \end{array} \right.$$

Logo, como as desigualdades se mantêm para todo n e j da forma $0 \leq n \leq K$ e $0 \leq j \leq M^*$

então

$$\|\varepsilon\|_{1,\infty} \leq hC, \quad \|\xi\|_\infty \leq hC, \quad \|\zeta\|_\infty \leq hC, \quad \|\varepsilon\|_{\infty,\infty} \leq hC.$$

■

5 SIMULAÇÕES

Aplicaremos os conceitos abordados no Capítulo 4 a um conjunto de dados selecionado especificamente para analisar o comportamento do modelo (4.10). Para garantir a validade da nossa análise, é fundamental escolhermos valores e funções que satisfaçam todas as premissas estabelecidas para os dados iniciais.

As “funções iniciais” $\gamma(a)$, $\lambda(a)$ e $i_0(a)$ tem uma maior complexidade para suas escolhas, então iremos começar fazendo algumas observações sobre elas.

Inicialmente, abordaremos a função $\gamma(a)$, definida como a “taxa de remoção classe-idade específica” que foi introduzida no Capítulo 3. Para isso, vamos primeiro observar o que é distribuição de probabilidade de um indivíduo infectado com tempo de infecção “a” se tornar removido.

Vamos definir $P[X \leq a]$ como a *probabilidade de um indivíduo infectado se recuperar no instante de classe-idade “a”*. Como definimos que a_f é o tempo máximo que um indivíduo esteja infectado então precisamos que:

$$P[X \leq a_f] = 1. \quad (5.1)$$

Supondo que $g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ seja uma função densidade de probabilidade, para ser possível considerar ela como a função densidade da distribuição P precisamos normalizar a função de forma que ela obedeça (5.1). Assim, definindo a seguinte constante:

$$G = \int_0^{a_f} g(x) dx,$$

podemos definir a função:

$$f(a) = \begin{cases} \frac{g(a)}{G} & \text{se } 0 \leq a \leq a_f, \\ 0 & \text{se } a \geq a_f, \end{cases} \quad (5.2)$$

daí, definindo

$$F(a) = \int_0^a f(x) dx, \quad (5.3)$$

temos $F(a_f) = 1$. Além disso, como $f(a) \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}^+$, concluímos que $f(a)$ é a função

densidade de probabilidade associada à P .

A função de risco [KM03], também conhecida como função hazard ou taxa de falha instantânea ou taxa de remoção instantânea, descreve a taxa na qual um evento ocorre em um dado momento. Neste contexto, a função de risco da probabilidade de um indivíduo infectado com tempo de infecção a se recuperar será a taxa de um indivíduo infectado com tempo de infecção a se recuperar, ou seja, podemos supor que a função de risco da probabilidade é igual à função $\gamma(a)$ que procuramos. Daí, podemos definir:

$$\begin{aligned}
 \gamma(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P[a \leq X \leq a+h \mid a \leq X] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{P[a \leq X \leq a+h]}{P[a \leq X]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\int_a^{a+h} f(x) dx}{\int_a^{\infty} f(x) dx} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} (\int_0^{a+h} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx)}{\int_a^{a_f} f(x) dx} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\int_0^{a+h} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx)}{\int_0^{a_f} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\int_0^{a+h} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx)}{1 - \int_0^a f(x) dx},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma(a) = \frac{f(a)}{1 - F(a)}. \quad (5.4)$$

Podemos observar que essa função obedece a premissa (3.10) pois $\gamma(a) \geq 0$ para quaisquer a e quando $a \rightarrow a_f$ temos $\gamma(a) \rightarrow \infty$ então a integral de 0 a a_f de γ vai ao infinito.

Temos também que $1 - F(a)$ pode ser definida como a *função sobrevivência* da probabilidade, e no contexto atual pode ser vista como a probabilidade de um indivíduo ainda não ter se recuperado após a unidades de tempo da infecção, a igualdade de $B(a)$ apresentada em (3.13) com $1 - F(a)$ pode ser checado da seguinte forma:

Por (5.4) e (5.3) temos

$$\gamma(a) = -\left(\ln(1 - F(a))\right)',$$

assim,

$$\begin{aligned}
 B(a) &= e^{-\int_0^a \gamma(s) ds} = e^{\int_0^a (\ln(1 - F(s)))' ds} \\
 &= e^{\ln(1 - F(a)) - \ln(1)} \\
 &= e^{\ln(1 - F(a))} \\
 &= 1 - F(a).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Vamos discutir a função $\lambda_0(a)$ definida em (3.3) considerando (3.4). Iremos estabelecer a quantidade média de contatos, $c(a)$, como uma função não-negativa limitada, supondo que não há isolamento de um indivíduo infectado. Tomando $a^* < a_f$ como o tempo máximo que um indivíduo é infeccioso, para $a > a^*$ temos $\chi(a) = 0$. Podemos tomar χ como sendo uma função não-negativa limitada, que seja não-decrescente e depois se torne não-crescente, atingindo 0.

Assim, para fins de testar o modelo apresentado, focando na observação mais profunda da “taxa de remoção” $\gamma(a)$, podemos simplesmente tomar λ_0 como uma função constante e que é 0 para $a > a^*$.

Queremos que $i_0(a)$ seja uma função cuja a integral de 0 a a_f nos proporciona o valor inicial de infectados no modelo. Assim, supondo a quantidade de indivíduos infectados inicialmente como sendo uma constante I_0 ($I(0) = I_0$), tomando h como o tamanho do passo na partição, como estamos supondos que i_0 é $L^1(0, a_f)$ e pela forma que definimos $I(a, t)$ no modelo estruturado, no momento $t = 0$, para valores de a acima de uma vizinhança pequena de $a_0 = 0$, teremos que a quantidade de infectados com tempo de infecção menor que a no momento $t = 0$ se tornará constante, assim, podemos supor que $i_0(a)$ é mais denso em valores de a muito próximo de 0, logo iremos usar a função *Delta de Dirac* para representar $i_0(a)$ nas simulações, da forma:

$$i_0(a) = \begin{cases} I_0 \frac{1}{h} & \text{se } 0 \leq a < h, \\ 0 & \text{se } h \leq a \leq a_f. \end{cases} \tag{5.6}$$

Seja $g_e(a)$ a função densidade de uma variável aleatória que tem distribuição exponencial. Logo,

$$g_e(a) = \alpha e^{-\alpha a}, \quad \text{com } \alpha > 0$$

onde α é dito ser o parâmetro de taxa da distribuição. Definimos a normalização de $f_e(a)$ da mesma forma que fizemos em (5.2), nos possibilitando encontrar a função de risco

$\gamma_e(a)$, a qual é da forma:

$$\gamma_e(a) = \frac{\alpha}{1 - e^{\alpha(a-a_f)}}.$$

Pode-se notar, no caso em que não temos uma limitação para o tempo de infecção, ou seja, a_f vai para ∞ , teremos que $\gamma_e(a) = \alpha$, fazendo assim que γ_e seja uma constante como no modelo SIR não estruturado que foi visto no Capítulo 2. Em consequência destas observações, se removermos o limite a_f do tempo de infecção, considerar a função λ_0 como uma constante e usarmos da distribuição exponencial para modelar a probabilidade de um indivíduo infectado se tornar removido, então o sistema (3.8) do modelo estruturado é equivalente ao sistema (2.4) do modelo não estruturado:

$$\begin{cases} i) S'(t) = -S(t) \int_0^\infty \lambda_0 i(a, t) da, \\ ii) I'(t) = S(t) \int_0^\infty \lambda_0 i(a, t) da - \int_0^\infty \alpha i(a, t) da, \\ iii) R'(t) = \int_0^\infty \alpha i(a, t) da. \end{cases}$$

Onde, a segunda igualdade do sistema é válida, pois

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0,$$

e por definição, temos

$$I(t) = \int_0^\infty i(a, t) da.$$

Assim temos a igualdade com o sistema do modelo não estruturado.

5.1 RESULTADOS

Utilizando a linguagem de programação Python, é possível implementar simulações do modelo (4.10) empregando o algoritmo desenvolvido no Capítulo 4. Para isso, escolheremos valores iniciais que atendam às premissas estabelecidas em (3.9)-(3.12).

Para as simulações apresentadas, por motivos apenas de testar o modelo, utilizaremos os seguintes parâmetros: $N = 100000$ representando a população total de indivíduos, $T = 50$ como o tempo final da simulação, e $a^* = 20$ como o tempo máximo durante o qual os indivíduos infectados são infecciosos, conforme definido em (4.6). Suponhamos

ainda que $a_f = 30$, garantindo assim um tempo máximo de infecção que será diretamente relacionado à suposição de $\gamma(a)$, como discutido anteriormente. Consideraremos $K = 3000$ como o número de passos de iteração de 0 a T . Portanto, conforme visto no Capítulo 4, temos $h = T/K$ e $M = \lceil a^*/h \rceil$. Além disso, definimos $I_0 = 1$, $S_0 = N - I_0$ e $R_0 = 0$ como as quantidades iniciais de indivíduos infectados, suscetíveis e removidos, respectivamente.

Com os valores iniciais definidos, vamos agora nos concentrar nas funções para $i_0(a)$, $\lambda_0(a)$ e $\gamma(a)$.

Tomando i_0 como em (5.6) sendo $h = T/K$. Sob as considerações feitas até este ponto, iremos aplicar o código A.1 (ver apêndice A).

Neste estudo, optamos por adotar $\lambda_0 \equiv 0.7/N$ como uma constante. Essa escolha foi motivada pelo interesse em estudar mais diretamente a relação da taxa de remoção com o sistema, decidindo assim manter a taxa de infecção constante.

Uma variável aleatória contínua, X , com distribuição lognormal, tem sua função densidade:

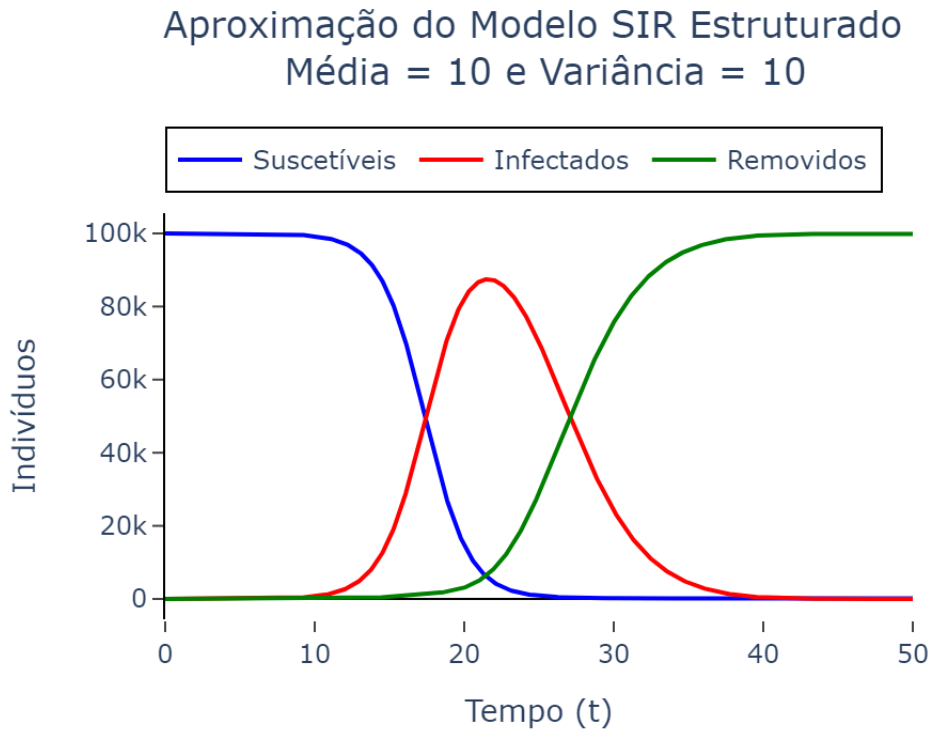
$$g(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.7)$$

onde μ e σ são parâmetros da distribuição que podemos tomar eles como dependentes dos valores da *média* e da *variância* da distribuição.

Supondo que a variável aleatória X indica se um dado indivíduo infectado da população torne-se removido num período de tempo após ser infectado. Logo, $P(X \in [a_1, a_2])$ indica a probabilidade de um indivíduo infectado se tornar removido com tempo de infecção entre a_1 e a_2 . Assim, Podemos definir $\gamma(a)$ de forma adequada usando (5.7), (5.2) e (5.4). Com essas definições, iremos aplicar o código A.2 (ver apêndice A).

Fazendo uso do sistema apresentado em (4.10), podemos aplicar o código A.3 (ver apêndice A) para realizar uma simulação do modelo, assim, para realizar testes, usando dos valores de média e variância iguais a 10 na fórmula da distribuição de probabilidade que está associada à função $\gamma(a)$, apresentamos o resultado na Figura 4.

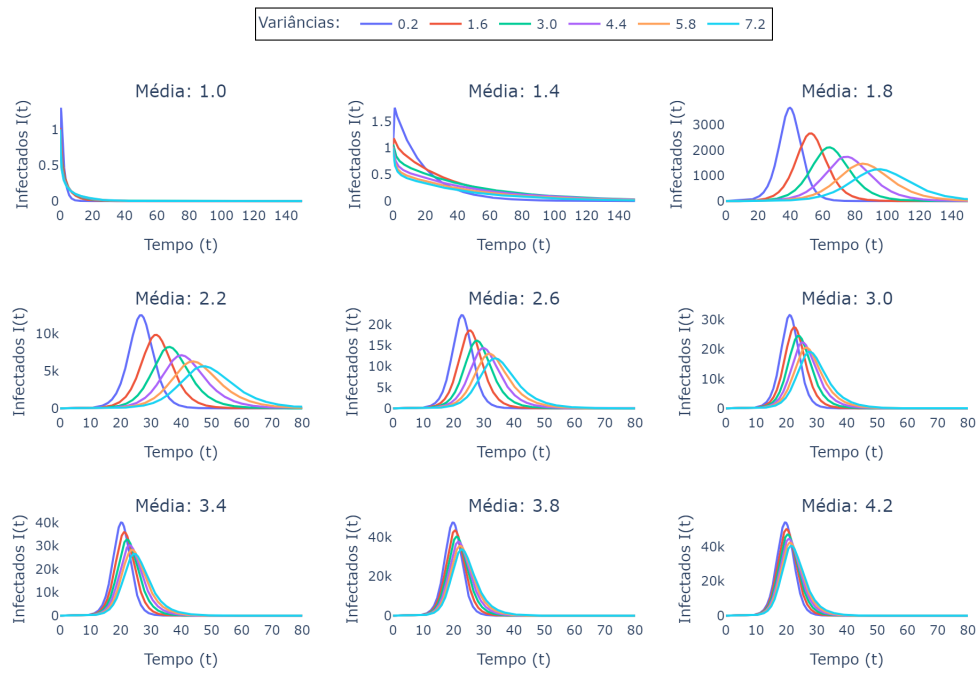
Figura 4: Exemplo de dados SIR alcançado a partir da simulação



Fonte: Autor

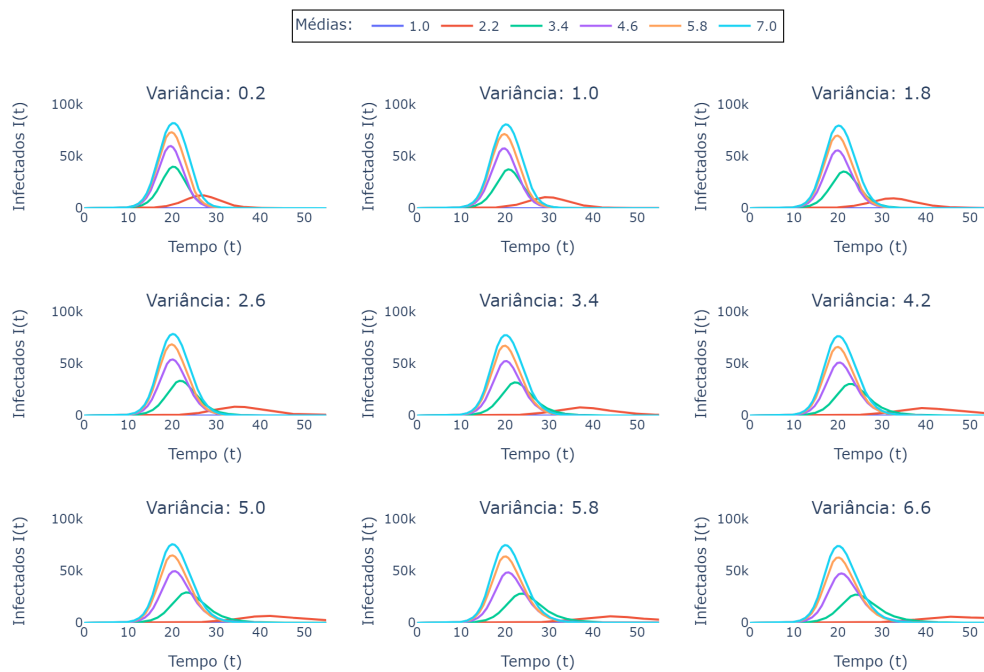
Repetindo a simulação, alterando o tempo máximo para $T = 150$ e variando os valores da média e da variância, desenvolvemos as Figuras 5 e 6. Nestas figuras, observamos diversos pontos cruciais. Inicialmente, notamos que a variância exerce pouca influência nos valores de infectados quando a média é grande, como observado nos gráficos em que a média é 3.8 e 4.2. Por outro lado, há uma clara relação direta entre os valores da média e a quantidade máxima de infectados: ao aumentar a média, observa-se um incremento correspondente nos picos de infectados. Identificamos um intervalo entre 1.4 e 1.8, onde deve existir um valor limitante para o sistema. Abaixo de 1.4, o sistema tende ao declínio, enquanto acima de 1.8, apresenta crescimento, indicando uma correlação direta entre a média da distribuição e o número reprodutivo básico. Além disso, observamos que aumentar os valores da média resulta em uma maior estabilidade em relação às variâncias, levando os valores de infectados a se aproximarem mais uns dos outros.

Figura 5: Representação dos infectados em relação à variância com médias fixadas



Fonte: Autor

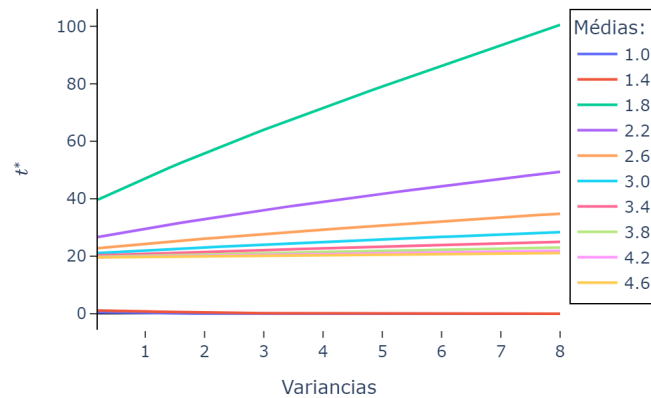
Figura 6: Representação dos infectados em relação à média com variância fixadas



Fonte: Autor

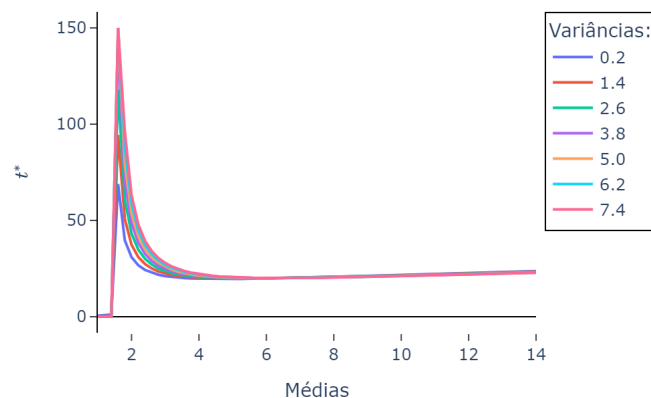
Definindo $t^* \in [0, T]$ como sendo o ponto em que há a maior quantidade de infectados no sistema, ou seja, $I(t^*) \geq I(t)$ para todo $t \in [0, T]$, as Figuras 7 e 8 sugerem que para variâncias menores, os valores de t^* são mais próximos entre si, enquanto que ao aumentar as médias, independentemente da variância, eles tendem a convergir para um valor próximo de $t = 20$. Além disso, nota-se que para valores da média próximos ao intervalo $[1.4, 1.8]$, há uma significativa variação nos traços, onde o valor de t^* transita rapidamente de 0 para T , enquanto para valores acima de 1.8, ele começa a se estabilizar e convergir.

Figura 7: Representação de t^* em relação à variação das variâncias com diversas médias fixadas



Fonte: Autor

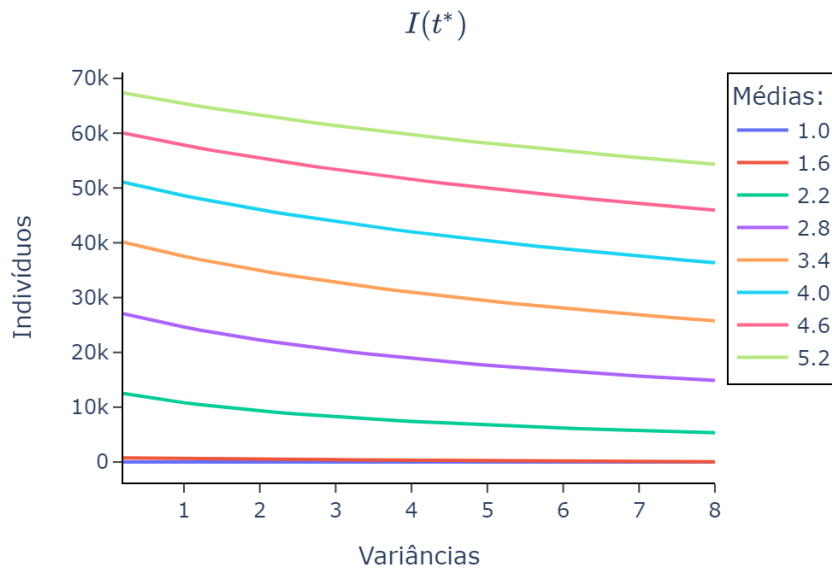
Figura 8: Representação de t^* em relação à variação das médias com diversas variâncias fixadas



Fonte: Autor

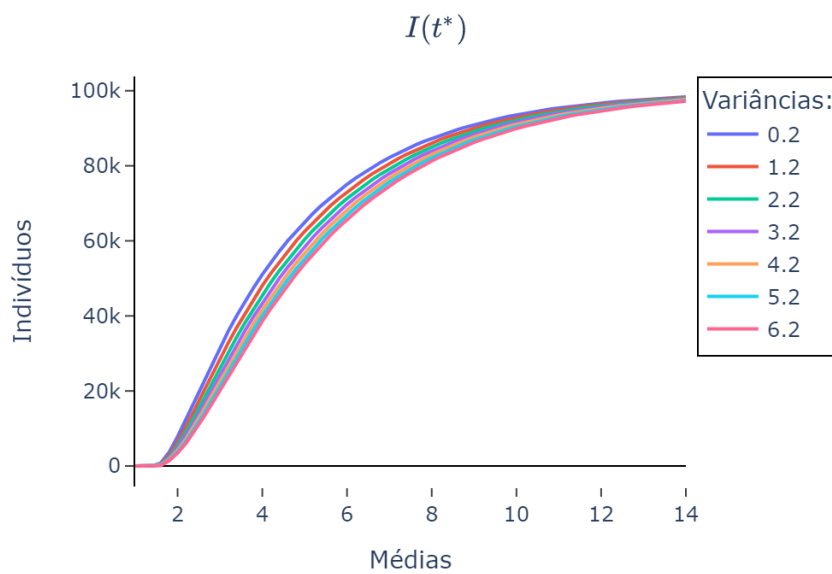
Nas Figuras 9 e 10 Podemos observar que ao aumentar a variância, ocorre uma redução na quantidade máxima de infectados, enquanto o aumento das médias reforça a clara relação entre a média e os infectados.

Figura 9: Representação de $I(t^*)$ em relação à variação das variâncias com diversas médias fixadas



Fonte: Autor

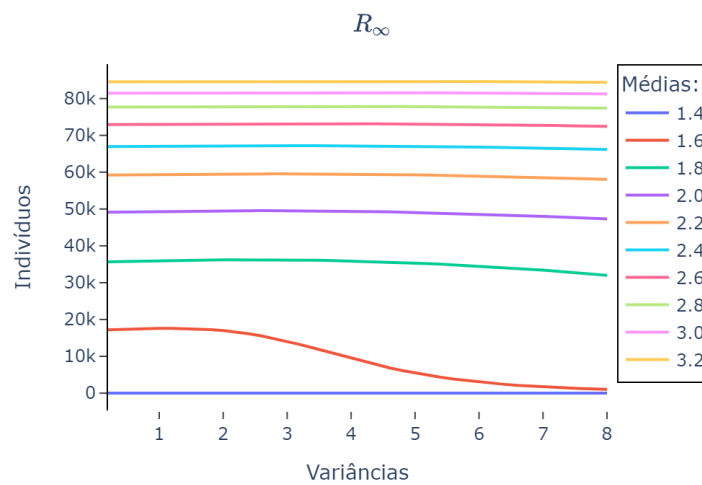
Figura 10: Representação de $I(t^*)$ em relação à variação das médias com diversas variâncias fixadas



Fonte: Autor

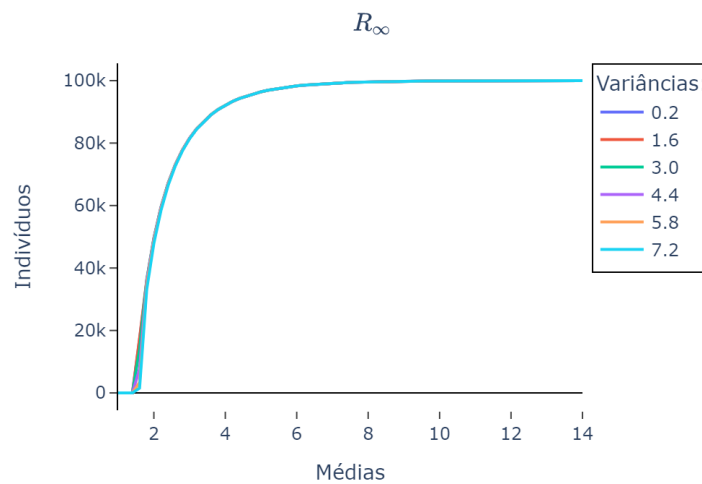
Por fim, tomando $R_\infty = R(T)$ como a *quantidade final de removidos durante a simulação*, ou melhor, a quantidade total de infectados durante todo o período da simulação, nas Figuras 11 e 12 observa-se que, para médias superiores a 1.8, a variância exerce pouca influência, no entanto, há uma ligeira diminuição no valor total ao aumentá-la. Além disso, ao aumentar a média, o crescimento é simultâneo, evidenciando a forte relação entre a média e os valores observados.

Figura 11: Representação de R_∞ em relação à variação das variâncias com diversas médias fixadas



Fonte: Autor

Figura 12: Representação de R_∞ em relação à variação das médias com diversas variâncias fixadas



Fonte: Autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho analisou um caso particular do modelo SIR (Suscetíveis, Infectados e Removidos) estruturado pela inclusão do “tempo de infecção” dos indivíduos na classe de infectados, enriquecendo o modelo ao adaptar as taxas de infecção e remoção como funções dependentes do tempo de infecção. Essa abordagem oferece uma representação mais realista da dinâmica presente nas epidemias. Além disso, utilizando a metodologia apresentada em [MP99], apresentamos um método numérico de primeira ordem baseado na soma de Riemann e no método de Euler para simular este modelo. Demonstrando o significativo impacto do tempo de infecção na dinâmica epidêmica e reforçando sua importância para o controle e modelagem de doenças. A escolha criteriosa dos valores iniciais e das funções envolvidas foi importante para desenvolver as simulações.

Os resultados das simulações destacam a influência da taxa de remoção no modelo. Variações na média e na variância da distribuição que descreve o processo de saída da classe de infectados podem provocar mudanças significativas nos padrões epidêmicos observados, evidenciando a sensibilidade desses parâmetros na modelagem e previsão de epidemias.

Para estudos futuros, há a necessidade de explorar diversos aspectos. Um estudo mais detalhado do número reprodutivo básico ($\mathcal{R}_0$) é fundamental para uma compreensão precisa dos padrões de transmissão. Além disso, investigar diferentes distribuições de probabilidade para o parâmetro $\gamma(a)$, que representa a taxa de recuperação, permitirá capturar melhor a variabilidade na duração da infecção entre os indivíduos. A exploração de modelos como o SEIR estruturado com o tempo de infecção pode enriquecer ainda mais a análise ao incorporar o estágio de exposição antes da infecção. Por fim, a inclusão de parâmetros demográficos no modelo ajudará a contextualizar efeitos como migração, nascimentos e mortalidade não relacionada à doença, proporcionando uma visão mais abrangente e aplicável às condições reais de diferentes populações. Essas áreas representam promissoras direções para futuras pesquisas, visando aprimorar a precisão e aplicabilidade dos modelos epidemiológicos.

REFERÊNCIAS

- [Cor08] Constantin Corduneanu. Principles of differential and integral equations (vol. 295). *American Mathematical Soc*, 215, 2008.
- [DHM90] Odo Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, and Johan Metz. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio r_0 in models for infectious-diseases in heterogeneous populations. *Journal of mathematical biology*, 28:365–82, 02 1990.
- [eAOL16] Claus Ivo Doering e Artur Oscar Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 6^a edição. IMPA, 2016.
- [Eva10] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [Het00] Herbert W. Hethcote. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4):599–653, 2000.
- [KM27] W. O. Kermack and A. G. McKendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115:700–721, 1927.
- [KM03] John P. Klein and Melvin L. Moeschberger. *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data*. Statistics for Biology and Health. Springer, New York, NY, 2 edition, 2003.
- [Lim20] Elon Lages Lima. *Análise Real, vol. 1 - Funções de Uma Variável*. 13^a edição. IMPA, 2020.
- [Mar15] Maia Martcheva. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2015.
- [MI17] Fabio Milner Mimmo Iannelli. *The Basic Approach to Age-Structured Population Dynamics*. Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences. Springer Dordrecht, 2017.

- [MP99] F. A. Milner and A. Pugliese. Periodic solutions: A robust numerical method for an s-i-r model of epidemics. *Journal Of Mathematical Biology*, 39(6):471–492, December 1999.
- [Nis07] Hiroshi Nishiura. Early efforts in modeling the incubation period of infectious diseases with an acute course of illness. *Emerging themes in epidemiology*, 4:2, 02 2007.

A APÊNDICE: CÓDIGOS

```

1 import numpy as np
2 import math
3 from scipy.integrate import quad
4
5 a_s = 20          # (float, >0) Tempo maximo de infeccao considerado.
6 a_f = a_s + 10    # Supondo tempo maximo a_f de infeccao seja: a_s + 5.
7 T = 50           # (float, >0) Tempo final da aproximacao.
8 N = 100000       # Populacao total.
9 K = 3000         # (integer) Numero de passos para alcancar o tempo T.
10
11 # Definindo valores iniciais que depende das constantes
12
13 h = T/K          # Parametro de discretizacao (passo tempo-idade).
14 M = int(a_s/h)    # Passos para aproximadamente alcancar a_s
15 t = np.array([ i*h for i in range(K+1)]) # Array com todos valores de
    tempo
16 a = np.array([ i*h for i in range(M+1)]) # Array com todos valores de
    classe-idade
17
18 I_0 = 1          # Valor inicial de I
19 S_0 = N - I_0    # Valor inicial de S
20 i_0 = np.array([I_0/h] + [0]*(M)) # i_0 sendo calculado com delta de
    Dirac
21
22 U = np.full((K+1,M+1),np.nan) # 0 U^n_j e a aproximacao do i^n_j
23 U[0] = i_0 # Adicionando o valor inicial
24 V = np.full(K+1,np.nan) # 0 V^n e a aproximacao do S^n
25 V[0] = S_0 # Adicionando o valor inicial

```

Code A.1: Definindo valores iniciais

```

1 # As funcoes lambda_0 e gamma, juntamente com a distribuicao escolhida e
    seus valores de sigma (desvio padrao) e mi (valor esperado)
2
3 def sigma_value(media, variancia):
4     return math.log(1 + variancia/(media**2)) ** (1/2)

```

```

5
6 def mi_value(media, variancia):
7     return math.log(media) - (sigma_value(media, variancia)**2)/2
8
9 def Lambda_0(a):
10     # Vou deixar como uma constante para teste
11     return 0.7/N
12
13 def f(a, sig, m):
14     if a == 0:
15         return 0
16     else:
17         return ( 1 / (a * sig * ( (2 * math.pi)**(1/2)) ) ) * ( math.e
18             **((math.log(a) - m)**2)/(-2 * (sig ** 2) ) ) )
19
20 def Gamma(a, sig, m):
21     f_norm = quad(f, 0, a_f, args = (sig, m) )[0]
22     return f(a, sig, m)/ (f_norm - quad(f, 0, a, args = (sig, m))[0] )
23
24 media = 10
25 variancia = 10
26
27 # Escolher esses se quiser que mi = 0 e sigma = 1:
28 # media = math.exp(1/2)
29 # variancia = (math.e -1) * math.e
30
31 sigma = sigma_value(media, variancia)
32 mi = mi_value(media, variancia)
33
34 gamma = np.array([Gamma(i,sigma_value(media, variancia), mi_value(media,
35     variancia)) for i in a]) # Deixando todos valores de gamma num
36     array
37 lambda_0 = np.array([Lambda_0(i) for i in a]) # Deixando todos valores
38     de lambda_0 num array
39
40 LAMBDA = np.full(K+1,np.nan) # Criando um array que ira guardar o
41     valor de cada aproximacao de Lambda^n
42 LAMBDA[0] = 0 # Adicionando o valor inicial, LAMBDA[0] nao e usado no

```

programa, mas estou o definindo como 0 para nao deixar vazio.

Code A.2: Definindo as funções que serão usadas no programa

```

1 for n in range(K):
2     for j in range(M):
3         U[n+1][j+1] = U[n][j] / (1 + h * gamma[j+1])
4
5     LAMBDA[n+1] = h * sum([lambda_0[i+1] * U[n][i+1] for i in range(M)])
6
7     V[n+1] = V[n] / (1 + h * LAMBDA[n+1])
8     U[n+1][0] = LAMBDA[n+1] * V[n+1]
9
10 I = np.array([I_0] + [sum(h*U[n][1:]) for n in range(1, K+1)]) #
    Aproximacao de I alcancada usando a soma de Riemann a direita em U
11 S = V # Aproximacao de S
12 R = N - I - S # Aproximacao de R
13
14 # # Plot simples para o resultado:
15 # import matplotlib.pyplot as plt
16 # plt.plot(t, I, color = 'r')
17 # plt.plot(t, S, color = 'b')
18 # plt.plot(t, R, color = 'g')
19 # plt.title("Modelo SIR")
20 # plt.show()

```

Code A.3: Iterações para encontrar as aproximações de I e S