



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Thalita Alves da Silva

**Conceitos de Estabilidade com Horizonte Variável no Modelo de Grafos para  
Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas**

Recife

2024

Thalita Alves da Silva

**Conceitos de Estabilidade com Horizonte Variável no Modelo de Grafos para  
Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas**

Trabalho apresentado ao Programa de PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA do CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA da UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em ESTATÍSTICA.

**Área de Concentração:** Probabilidade

**Orientador (a):** Dr. Leandro Chaves Rêgo

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Silva, Thalita Alves da.

Conceitos de Estabilidade com Horizonte Variável no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas / Thalita Alves da Silva. - Recife, 2024.  
91f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-graduação em Estatística, 2024.

Orientação: Leandro Chaves Rêgo.

1. GMCR; 2. Estabilidade; 3. Horizonte variável; 4. Preferências probabilísticas. I. Rêgo, Leandro Chaves. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**THALITA ALVES DA SILVA**

**CONCEITOS DE ESTABILIDADE COM HORIZONTE VARIÁVEL NO MODELO DE  
GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS COM PREFERÊNCIAS  
PROBABILÍSTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Estatística.

**Aprovada** em: 30 de julho de 2024.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo  
Presidente, UFC

Prof. Dr. Giannini Italo Alves Vieira  
Examinador Interno, UFC

Prof. Dr. Carlos Diego Rodrigues  
Examinador Externo, UFC

Dedico esta dissertação a minha mãe Joseilda Alves Costa (in memoriam) e ao meu irmão Almicio Soares Silva (in memoriam).

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por Sua divina misericórdia e por todas as maravilhas que nos tem proporcionado, por ter me sustentado com sua graça, nunca me deixar desistir e por ter concedido ânimo durante minha caminhada acadêmica.

À minha família, ao meu pai Lucivanio Felix da Silva e à minha segunda mãe Almidian Soares Silva, por todo o apoio que sempre me deram e por serem grandes incentivadores nos estudos durante a minha vida.

Aos meus irmãos e à minha sobrinha Alane Sophi, por seu sorriso e amor iluminarem meus dias.

Ao Professor Leandro Chaves Rêgo, meu orientador, pela sua sabedoria, paciência e pelo modo respeitoso e dedicado de orientar.

Aos Professores Carlos Diego Rodrigues e Giannini Itolino Alves Vieira que aceitaram participar da banca examinadora, assim como por toda a contribuição trazidas por eles para nossa pesquisa.

Agradeço, em especial, ao meu irmão e amigo Alecio Soares pelo incentivo e companheirismo, sempre me ajudando e dando força, por nunca me deixar desistir e pelo apoio em todos os momentos da minha formação acadêmica e da vida.

Aos meus amigos Jéssika Mayara, Joilson Zacarias, pelo carinho, força e apoio.

A Patrick Oliveira, que esteve ao meu lado, incentivando-me.

A Luciano Soares, pelo apoio e pelas palavras de encorajamento. Sou grata por sua companhia e pela força que me deu no dia a dia.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Estatística, em especial, Clarice de Oliveira, Matheus Osterno, Raquel Araújo, Ludmila Cavalcante e Franciele Santos.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Estatística, por contribuírem bastante em minha formação, compartilhando seus vastos conhecimentos. Em especial, às professoras Audrey Cysneiros e Aline Tsuyuguchi, bem como a todos os funcionários da secretaria do programa.

À Universidade Federal de Pernambuco. Ao Programa de Pós-Graduação em Estatística e à CAPES pela concessão da bolsa.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, participaram desta etapa tão importante da minha vida.

Por você faria isso mil vezes.

“(Trecho de O caçador de pipas)” de Khaled Hosseini.

## RESUMO

Esta dissertação investiga avanços no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR), destacando a implementação de preferências probabilísticas em estabilidades com horizonte variável. O estudo visa aprimorar a análise de conflitos no GMCR, introduzindo novos conceitos que consideram a incerteza e a probabilidade dos diferentes desfechos nas decisões dos agentes. A motivação deste estudo reside na lacuna existente na literatura sobre como as preferências probabilísticas podem afetar os conceitos de estabilidade com horizonte variável no GMCR. Incorporar essas preferências possibilita uma abordagem mais flexível e realista, crucial para a modelagem precisa de situações conflituosas e para a tomada de decisões eficaz em cenários complexos. Dentre objetivos principais desta dissertação, esteve a preocupação de definir a estabilidade Movimento Limitado com preferências probabilísticas para conflitos bilaterais,  $(\alpha, \beta) - L_h$ , e propor a definição da estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  para conflitos bilaterais, também considerando preferências probabilísticas. Além disso, buscamos estabelecer relações entre os novos conceitos de estabilidade e os já existentes na literatura sobre o GMCR. A dissertação consiste em seis capítulos. Após capítulo introdutório, no qual fizemos uma revisão de literatura, nós revisamos o modelo GMCR e o GMCR com preferências probabilísticas, apresentamos a estabilidade Movimento Limitado  $(\alpha, \beta) - L_h$  para conflitos bilaterais no GMCR com preferências probabilísticas e a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , para conflitos bilaterais, também, no GMCR com preferências probabilísticas. Fizemos a aplicação dos conceitos que propusemos em um conflito real apresentado na literatura sobre o GMCR. Nossa pesquisa foi conduzida de forma teórica. E com a análise do conflito que fizemos, pudemos ilustrar a utilidade desses novos conceitos, mostrando como a estabilidade do conflito pode variar com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e o horizonte considerado. Portanto, nossos resultados fornecem *insights* valiosos para a formulação de estratégias de resolução de conflitos, permitindo adaptações conforme as condições específicas do contexto.

**Palavras-chaves:** GMCR; Estabilidade; Horizonte variável; Preferências probabilísticas.

## ABSTRACT

This Master Thesis investigates advancements in the Graph Model for Conflict Resolution (GMCR), highlighting the implementation of probabilistic preferences in variable horizon stabilities. The study aims to enhance conflict analysis in the GMCR by introducing new concepts that consider the uncertainty and probability of different outcomes in agents' decisions. The motivation for this study lies in the existing gap in the literature regarding how probabilistic preferences can affect the concepts of variable horizon stability in the GMCR. Incorporating these preferences allows for a more flexible and realistic approach, which is crucial for accurately modeling conflicting situations and making effective decisions in complex scenarios. Among the main objectives of this dissertation was the concern to define Limited Move stability with probabilistic preferences,  $(\alpha, \beta) - L_h$ , and to propose the definition of  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  stability, also considering probabilistic preferences, both of them for bilateral conflicts. Additionally, we aimed to establish relationships between the new stability concepts and those already existing in the GMCR literature. This work consists of six chapters. After an introductory chapter, in which we conducted a literature review, we revisited the GMCR model and the GMCR with probabilistic preferences, presented the  $(\alpha, \beta) - L_h$  Limited Move stability in the GMCR with probabilistic preferences, and introduced the notion of  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  stability, also in the GMCR with probabilistic preferences. We applied the proposed concepts to a real conflict presented in the GMCR literature. Our research was conducted theoretically. By analyzing the conflict, we illustrated the usefulness of these new concepts, showing how conflict stability can vary with the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  and the considered horizon. Therefore, our results provide valuable insights for formulating conflict resolution strategies, allowing for adaptations according to the specific conditions of the context.

**Keywords:** GMCR; Stability; Variable Horizon; Probabilistics Preferences.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo que representa conflito descrito no Exemplo 2.2.1. . . . .	30
Figura 2 – Análise de estabilidade $(0.7, 0.9) - L_3$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.3. . . . .	41
Figura 3 – Análise de estabilidade $(0.7, 0.7) - GMR$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.4. . . . .	42
Figura 4 – Análise de estabilidade $(0.7, 0.7) - L_2$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.4. . . . .	42
Figura 5 – Análise de estabilidade $(0.7, 0.7) - SMR$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.5. . . . .	43
Figura 6 – Análise de estabilidade $(0.7, 0.7) - L_3$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.5. . . . .	43
Figura 7 – Análise de estabilidade $(0,5, 0,8) - Maximin_3$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 4.3.4. . . . .	50
Figura 8 – Análise de estabilidade $(0,5, 0,8) - Maximin_4$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 4.3.4. . . . .	50
Figura 9 – Análise de estabilidade $(0.7, 0.9) - Maximin_3$ para o DM $i$ , a partir de $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.3. . . . .	53
Figura 10 – Modelo de grafo para o Conflito de Valores. . . . .	57
Figura 11 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_1$ para o DM $E$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	68
Figura 12 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_2$ para o DM $E$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	68
Figura 13 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_1$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	69
Figura 14 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_2$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	69
Figura 15 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_3$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	70
Figura 16 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_4$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	71

Figura 17 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_1$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	71
Figura 18 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_2$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	72
Figura 19 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_3$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	72
Figura 20 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_4$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	73
Figura 21 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_3$ para o DM $D$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	74
Figura 22 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_4$ para o DM $D$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	74
Figura 23 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_1$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	75
Figura 24 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_2$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	75
Figura 25 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_3$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	75
Figura 26 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_4$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	75
Figura 27 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_1$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	76
Figura 28 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_2$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	76
Figura 29 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_3$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	77
Figura 30 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - L_4$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	77
Figura 31 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $E$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	77
Figura 32 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	78

Figura 33 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	78
Figura 34 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	79
Figura 35 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $E$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	80
Figura 36 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	80
Figura 37 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	81
Figura 38 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	81
Figura 39 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $E$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	82
Figura 40 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $E$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	82
Figura 41 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $E$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	83
Figura 42 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $E$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	83
Figura 43 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $E$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	84
Figura 44 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $D$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	84
Figura 45 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $D$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	85
Figura 46 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $D$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	85
Figura 47 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $D$ , a partir de $(P, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	86
Figura 48 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $D$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	86

Figura 49 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $D$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	87
Figura 50 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $D$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	87
Figura 51 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $D$ , a partir de $(P, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	88
Figura 52 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	88
Figura 53 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	89
Figura 54 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	89
Figura 55 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $D$ , a partir de $(R, S)$ , no Conflito de Valores. . . . .	90
Figura 56 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	90
Figura 57 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	91
Figura 58 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	91
Figura 59 – Análise de estabilidade $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ para o DM $D$ , a partir de $(R, U)$ , no Conflito de Valores. . . . .	91

## LISTA DE SÍMBOLOS

$N$	Conjunto dos decisores.
$S$	Conjunto dos estados viáveis do conflito.
$\succ$	Relação de preferência estrita.
$\succeq$	Relação de preferência fraca.
$\sim$	Relação de indiferença.
$D_i$	Grafo direcionado do decisor $i$ .
$A_i$	Conjunto de arcos para o DM $i$ .
$R_i(s)$	Conjunto dos estados alcançáveis pelo DM $i$ em um único movimento.
$R_i^+(s)$	Conjunto dos movimentos de melhoria unilateral para o DM $i$ .
$h$	Comprimento o horizonte do conflito.
Nash	Estabilidade de Nash.
GMR	Estabilidade Metarracional Geral.
SMR	Estabilidade Metarracional Simétrica.
SEQ	Estabilidade Sequencial.
SSEQ	Estabilidade Sequencial Simétrica.
$G_h(i, s)$	Estado antecipado com um horizonte $h$ quando o DM $i$ se move a partir do estado $s$ de acordo com a noção da estabilidade $L_h$ .
$M_h(i, s)$	Estado para o qual o DM $i$ se move do estado $s$ considerando um horizonte de $h$ , de acordo com a noção de estabilidade $L_h$ .
$L_h$	Estabilidade Movimento Limitado.
$G_h^i(j, s)$	Estado antecipado pelo DM $i$ com um horizonte $h$ e o DM $j$ se move a partir do estado $s$ de acordo com a noção da estabilidade $\text{Maximin}_h$ .

$M_h^i(j, s)$	Estado para o qual o DM $i$ acredita que o DM $j$ se move do estado $s$ considerando um horizonte de $h$ , quando o DM $i$ acredita que o conflito seguirá de acordo com o paradigma $\text{Maximin}_h$ .
$\text{Maximin}_h$	Estabilidade $\text{Maximin}_h$ .
$P_i(a, b)$	a probabilidade do DM $i$ preferir o estado $a$ ao estado $b$ , quando solicitado a escolher entre eles.
$R_i^{+\gamma}(s)$	Conjunto dos $\gamma$ -melhoramentos para o DM $i$ a partir do estado $s$ .
$\varphi_i^{+\gamma}(s)$	O conjunto de todos os estados que o DM $i$ prefere a $s$ com probabilidade maior que $\gamma$ .
$\alpha$ - Nash	Estabilidade de Nash com preferências probabilísticas.
$(\alpha, \beta)$ - GMR	Estabilidade Metarracional Geral com preferências probabilísticas.
$(\alpha, \beta)$ - SMR	Estabilidade Metarracional Simétrica com preferências probabilísticas.
$(\alpha, \beta, \gamma)$ - SEQ	Estabilidade Sequencial com preferências probabilísticas.
$(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1)$	O estado antecipado quando o estado para o qual se analisa a estabilidade é $s$ e DM $i$ se move do estado $s_1$ considerando um horizonte $h$ , caso o conflito siga a noção da estabilidade $(\alpha, \beta) - L_h$ .
$\bar{M}_h(i, s, s_1)$	O estado a partir do qual o estado final antecipado com horizonte $h-1$ é o que tem a maior probabilidade de ser preferido a $s$ pelo DM $i$ , dentre aqueles que são acessíveis para o DM $i$ a partir de $s_1$ e são $(1 - \alpha)$ melhoramentos para o DM $i$ em relação ao estado inicial $s$ .
$(\alpha, \beta) - L_h$	Estabilidade Movimento Limitado com preferências probabilísticas.
$(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$	O estado antecipado quando o estado para o qual se analisa a estabilidade é $s$ e DM $i$ se move do estado $s_1$ considerando um horizonte $h$ , caso o conflito siga a noção da estabilidade $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ .
$\bar{M}_h^i(i, s, s_1)$	O estado a partir do qual o estado final antecipado com horizonte $h-1$ é o que tem a maior probabilidade de ser preferido a $s$ pelo DM $i$ , dentre aqueles que são acessíveis para o DM $i$ a partir de $s_1$ e são $(1 - \alpha)$ melhoramentos para o DM $i$ em relação ao estado inicial $s$ .

$(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$  Estabilidade  $\text{Maximin}_h$  com preferências probabilísticas.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	24
1.2	OBJETIVOS	25
1.3	MÉTODOS E PROCEDIMENTOS	26
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	26
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>28</b>
2.1	ALGUMAS IDEIAS INICIAIS	28
2.2	O MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS (GMCR)	29
<b>2.2.1</b>	<b>Alguns conceitos de solução no GMCR com preferências determinísticas para conflitos bilaterais</b>	<b>31</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Alguns conceitos de solução no GMCR com preferências probabilísticas para conflitos bilaterais</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>ESTABILIDADE DO MOVIMENTO LIMITADO COM PREFERÊNCIAS PROBABILÍSTICAS PARA CONFLITOS BILATERAIS</b>	<b>38</b>
3.1	INTRODUÇÃO	38
3.2	A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - L_h$	39
3.3	RELAÇÕES COM OUTROS CONCEITOS DE ESTABILIDADE	40
3.4	CONCLUSÃO	44
<b>4</b>	<b>ESTABILIDADE <math>\text{MAXIMIN}_h</math> COM PREFERÊNCIAS PROBABILÍSTICAS</b>	<b>45</b>
4.1	INTRODUÇÃO	45
4.2	A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$	45
4.3	RELAÇÃO ENTRE A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ PARA DIFERENTES HORIZONTES $h$ .	47
4.4	RELAÇÕES COM OUTROS CONCEITOS DE ESTABILIDADE	51
4.5	CONCLUSÃO	56
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO</b>	<b>57</b>
5.1	O CONFLITO DE VALORES	57
5.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE A PARTIR DOS CONCEITOS $(\alpha, \beta) - L_h$ E $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$	59

5.3	CONCLUSÃO . . . . .	61
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>63</b>
6.1	DIRECIONAMENTOS PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	63
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE A – CÁLCULOS DAS ESTABILIDADES . . . . .</b>	<b>68</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Um conflito é uma realidade intrínseca à experiência humana, refletindo a diversidade de opiniões, interesses e perspectivas que caracterizam as interações sociais. Em sua essência, o conflito representa um desacordo, uma discordância de interesses, valores ou objetivos entre duas ou mais partes. Seja no âmbito pessoal, profissional ou internacional, os conflitos surgem naturalmente e, quando gerenciados de maneira adequada, podem resultar em crescimento, aprendizado e transformação positiva, já quando não solucionados, conflitos podem resultar em consequências altamente negativas, como a destruição de cidades devido à guerra e a exploração de nações mais pobres por países industrializados mais ricos, como apontam (HIPEL; FANG; KILGOUR, 2019).

Conflitos bilaterais são aqueles que envolvem dois participantes, instituições ou entidades (os decisores ou tomadores de decisão) em desacordo (SABINO, 2020). Tais conflitos podem manifestar-se em diversos contextos, desde disputas interpessoais até desentendimentos entre Estados soberanos. Essa forma de conflito tende a ser mais direta e focalizada, permitindo que as partes envolvidas concentrem seus esforços na resolução da questão específica que as separa. Negociações, mediação e comunicação aberta são ferramentas comuns na gestão de conflitos bilaterais, buscando alcançar soluções que atendam aos interesses de ambas as partes.

Os conflitos multilaterais, por sua vez, envolvem três ou mais participantes com interesses conflitantes. Essa dinâmica complexa adiciona camadas de desafios à resolução, uma vez que múltiplos pontos de vista e agendas entram em jogo. Conflitos dessa natureza podem emergir em situações globais, como disputas territoriais entre várias nações, questões ambientais que afetam diversas comunidades ou conflitos étnicos que envolvem diversos grupos. Gerenciar conflitos multilaterais requer uma abordagem mais abrangente, muitas vezes envolvendo mediação internacional, diplomacia complexa e a consideração de uma variedade de perspectivas para alcançar uma resolução que balanceie os interesses de todas as partes envolvidas.

Estudar métodos de resolução de conflitos é fundamental para promover sociedades mais harmoniosas, sustentáveis e justas. Nesse sentido, existem muitos estudos sobre técnicas de resolução de conflitos, dentre eles (FRASER; HIPEL, 1979) e (FRASER; HIPEL, 1984a) desenvolveram a Análise de Conflitos como uma evolução e ampliação da Análise de Metajogos (HOWARD, 1971). Estes autores buscaram desenvolver ferramentas úteis para compreender as dinâmicas de conflitos e aplicar métodos eficazes de resolução de conflitos. Estas ferramen-

---

tas contribuem, não apenas, para a construção de relacionamentos saudáveis, mas também desempenham um papel crucial na prevenção de conflitos mais amplos e na promoção da paz.

Em nível individual, o conhecimento de métodos de resolução de conflitos capacita as pessoas a lidarem com desentendimentos de maneira construtiva. A comunicação eficaz, a empatia e a negociação são habilidades essenciais que podem ser desenvolvidas por meio desse estudo, permitindo que os indivíduos resolvam disputas de forma a preservar relacionamentos e promover entendimento mútuo.

Em ambientes profissionais, o entendimento dos métodos de resolução de conflitos é valioso para criar ambientes de trabalho saudáveis e produtivos. Conflitos no local de trabalho podem afetar a moral, a produtividade e a satisfação dos funcionários. Ao investir em estratégias de resolução de conflitos, as organizações podem fortalecer sua cultura interna, promovendo um clima organizacional mais positivo e aumentando a eficiência operacional.

Além disso, em uma escala mais ampla, estudar métodos de resolução de conflitos é crucial para abordar desafios sociais e políticos complexos. Conflitos entre nações, grupos étnicos ou culturas muitas vezes têm consequências devastadoras. A diplomacia, a mediação e outras abordagens são ferramentas poderosas para prevenir ou resolver disputas internacionais, promovendo a estabilidade global e a cooperação.

Como um jogador de xadrez, os agentes envolvidos em um conflito, naturalmente, pensam em termos de jogadas e contrajogadas (HIPEL; FANG; KILGOUR, 2019). Deste modo, pode-se simular as possíveis interações entre os sujeitos envolvidos em uma situação de conflito.

Ao compreender os métodos de resolução de conflitos, podemos criar sociedades mais resilientes, capazes de lidar com diferenças de maneira construtiva e colaborativa. É um investimento no fortalecimento dos laços sociais e na construção de um mundo mais pacífico, onde o diálogo e a compreensão substituem a hostilidade e a confrontação. Portanto, o estudo desses métodos não é apenas uma busca por soluções eficazes, mas um compromisso com a construção de um futuro mais justo e pacífico para todos.

No cenário contemporâneo, a resolução de conflitos é uma necessidade premente em diversas esferas da sociedade, desde questões interpessoais até disputas geopolíticas complexas. Nesse contexto, o Modelo de Grafo para Resolução de Conflitos (GMCR) emerge como uma ferramenta muito poderosa para representar e analisar interações entre agentes ou entidades em conflito (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987). Ao longo dos anos, o GMCR tem se mostrado eficaz na identificação de soluções viáveis para uma variedade de problemas, oferecendo *insights* valiosos para a gestão e a mitigação de conflitos (HIPEL; FANG; KILGOUR, 2019).

Nesse contexto muitas maneiras para solucionar conflitos foram desenvolvidas, dentre elas estão a mediação, a conciliação e a arbitragem (OLIVEIRA, 2020). Em geral, a busca por uma solução antecipada costuma ser mais eficaz e mais rápida do que a via conflituosa. Naturalmente, a Teoria dos Jogos se apresenta, com objetivo de estudar os conflitos, de modo que se considerem as ideias de competição e cooperação, na busca pela maximização de ganhos individuais e/ou coletivos (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944).

A Teoria dos Jogos é uma área interdisciplinar que se dedica ao estudo das estratégias em situações onde as tomadas de decisões de um indivíduo afetam diretamente as decisões e os resultados de outros participantes. Em seu famoso livro “Game Theory: Analysis of Conflict”, (MYERSON, 1991) a define como o estudo matemático das interações estratégicas entre agentes racionais. O autor oferece um arcabouço matemático e conceitual para analisar interações estratégicas, onde os envolvidos buscam maximizar seus ganhos, levando em conta as ações dos demais. Essa teoria é aplicada em diversos domínios, como economia, política, biologia e ciências sociais, fornecendo uma maneira sistemática de modelar e compreender conflitos, cooperações e estratégias. A Teoria dos Jogos utiliza matrizes de *payoff* e conceitos-chave de equilíbrios e estabilidades, como o equilíbrio de Nash (NASH, 1950) para descrever as escolhas racionais dos jogadores em cenários estratégicos.

Como afirma (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944) a maior parte dos modelos para analisar conflitos são baseados em conceitos da Teoria dos Jogos. Mas, há alguns problemas que são encontrados quando se tenta aplicar modelos baseados em Teoria dos Jogos na análise de conflitos, tais como a necessidade de saber quem se move a cada momento, e a necessidade que as preferências sejam representadas por funções utilidade, dentre outros. Para superar estes problemas, (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987) propõe o GMCR. O GMCR é, na verdade, um aprimoramento da análise de conflitos de (FRASER; HIPEL, 1984b). Neste modelo, os indivíduos envolvidos no conflito, os tomadores de decisão (DMs), têm diferentes preferências sobre possíveis estados, os quais são os cenários que podem acontecer durante o decorrer do conflito. Estudos sobre o GMCR têm ganhado bastante atenção nos últimos anos, pois tal modelo, tem se apresentado como uma ferramenta matemática flexível que requer um mínimo de dados de entrada para construir análises e apresentar orientações de como os sujeitos podem se comportar no desenvolvimento dos conflitos (RÊGO; VIEIRA, 2020b).

O GMCR é um modelo que associa elementos da Teoria dos Jogos a elementos da Teoria dos Grafos. Sua constituição é composta por uma coleção de grafos direcionados todos com o mesmo conjunto de vértices que é igual ao conjunto de estados do conflito. Intuitivamente,

estes grafos representam como os DMs podem alterar os estados do conflito. Além disso, são necessárias relações de preferências, uma para cada DM, sobre o conjunto de estados.

Na literatura sobre o GMCR há muitos conceitos de estabilidade, os quais são também denominados conceitos de soluções. Cada conceito de estabilidade, descreve quando um DM tem ou não incentivo de sair de um determinado estado. A existência de diferentes conceitos de estabilidade permite aos pesquisadores explorar o fenômeno da estabilidade de maneiras diversas e mais abrangentes, o que pode levar a uma compreensão mais profunda dos processos de resolução de conflitos. Os diversos conceitos de estabilidade oferecem opções para quem analisa o conflito de adaptar os modelos a situações específicas e a diferentes contextos de conflito, tornando-os mais úteis e aplicáveis na prática. Quando um estado é estável para todos os DMs no conflito de acordo com um conceito de estabilidade, diz-se que este estado é um equilíbrio para este conceito de estabilidade e, portanto, uma possível solução para o conflito.

Dentre os vários conceitos de solução estão a estabilidade de Nash (NASH, 1950), a estabilidade Metarracional Geral (HOWARD, 1971), a estabilidade Metarracional Simétrica (HOWARD, 1971), a estabilidade Sequencial (FRASER; HIPEL, 1979) e a estabilidade Sequencial Simétrica (RÊGO; VIEIRA, 2017), os quais consideram um horizonte predeterminado e fixo.

Existem ainda, na literatura sobre o GMCR, alguns outros conceitos cujo horizonte é variável, dentre os quais a estabilidade Movimento Limitado (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987), a estabilidade Maximin<sub>n</sub> (RÊGO; VIEIRA, 2020b), a estabilidade Maximin Credível (RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022), a estabilidade do Otimismo Pessimismo (SABINO, 2020), a estabilidade do Arrependimento Minimax (SABINO; RÊGO, 2024) e a estabilidade Metarracional Generalizada (ZENG et al., 2006).

Porém, é importante considerar que em situações de conflito, as preferências dos indivíduos podem variar amplamente e podem não ser adequadamente capturadas por uma única abordagem. Destacando, assim, a importância de usarmos outras estruturas de preferências para modelar conflitos. Como as preferências probabilísticas superiores e inferiores no GMCR (RÊGO; SANTOS, 2018), preferências *fuzzy* (AL-MUTAIRI; HIPEL; KAMEL, 2008), (BASHAR; KILGOUR; HIPEL, 2010) e (BASHAR; KILGOUR; HIPEL, 2012), preferências incertas (LI et al., 2002) e (LI et al., 2004) e preferências *gray* (KUANG et al., 2015).

Dentre os avanços no GMCR, levando em consideração as preferências probabilísticas, destacamos que (RÊGO; SANTOS, 2015) realizaram uma ampliação do GMCR, permitindo que os DMs expressem suas preferências por meio de preferências probabilísticas. Neste artigo eles propuseram quatro novas definições de estabilidade: estabilidade  $\alpha$ - Nash,  $(\alpha, \beta)$ - metar-

racionalidade  $(\alpha, \beta)$ — metarracionalidade simétrica,  $(\alpha, \beta, \gamma)$ — estabilidade sequencial. Tais conceitos foram propostos abrangendo, tanto conflitos bilaterais, quanto conflitos multilaterais, além de ter explorado as relações entre essas definições de estabilidade e terem analisado como os valores dos parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  influenciam os estados estáveis do sistema.

(RÊGO; SANTOS, 2018) propuseram um modelo no qual os DMs podem expressar suas preferências entre os possíveis cenários de conflito usando probabilidades superiores e inferiores. Neste novo modelo, os autores apresentaram oito definições de estabilidade que são generalizações dos conceitos de estabilidade apresentados em (RÊGO; SANTOS, 2015) os quais são definidos como: estabilidade  $\alpha$ — Nash cautelosa, estabilidade  $\alpha$ — Nash arriscada, metarracionalidade cautelosa, metarracionalidade arriscada, metarracionalidade simétrica cautelosa, metarracionalidade simétrica arriscada, estabilidade sequencial cautelosa e estabilidade sequencial arriscada. Tais definições foram estabelecidos para conflitos bilaterais e estendidos para conflitos multilaterais.

Os principais métodos de obtenção das preferências no âmbito do GMCR, para adquirir convenientemente a preferência dos DMs sobre os estados do conflito, são o *direct ranking*, *option weighting* e *option prioritizing* (FANG et al., 2003a) e (FANG et al., 2003b). Dentre eles a técnica mais usada e eficaz para classificação de preferências é o *option prioritizing*, no qual a preferência dos DMs sobre os estados do conflito pode ser refletida por um conjunto de declarações, relacionadas a critérios específicos ou valores de importância atribuídos a cada opção, os quais consistem em algumas opções numeradas conectadas.

Em (RÊGO; VIEIRA, 2019) são apresentadas duas novas técnicas de priorização de opções para obter preferências probabilísticas no GMCR de forma mais eficiente. Em sua proposta a priorização de opções de preferência probabilística precisa baseia-se em uma sequência ordenada de declarações de preferência que determina a relação de preferência probabilística precisa. Em uma destas técnicas, há uma distribuição de probabilidade que é associada a uma classe de sequências ordenadas de declarações de preferência do DM, com a probabilidade do estado  $s_1$  ser preferido ao estado  $s_2$  pelo DM sendo a soma das probabilidades das sequências ordenadas de declarações de preferência onde  $s_1$  é preferido a  $s_2$  de acordo com a preferência probabilística precisa com base na sequência ordenada correspondente de declarações de preferência. Já a outra técnica, permite a incerteza tanto no conjunto de declarações de preferência consideradas por um DM como em qual declaração de preferência dentro do conjunto é a mais importante para ele.

Conforme observado por (VIEIRA, 2017) e (RÊGO; CORDEIRO, 2024), determinar quais con-

ceitos de estabilidade são satisfeitas por um estado específico para um DM pode ser extremamente desafiador, especialmente quando há um grande número de estados ou DM envolvidos, o que pode levar a inúmeras dificuldades. Pois, muitos conceitos de solução usuais no GMCR são complicados ou exigem muitos cálculos para serem utilizados em conflitos envolvendo muitos DMs e estados. (XU; HIPEL; KILGOUR, 2007) e (XU; HIPEL; KILGOUR, 2009), propuseram representações matriciais para facilitar a obtenção de estados estáveis de acordo com as definições usuais de estabilidade do GMCR. Em seguida, (VIEIRA, 2017) propôs um resultado que estabelece a representação matricial da estabilidade SSEQ, porém apenas no contexto do GMCR com preferências probabilísticas. Este resultado, mais recentemente, foi adaptado para os conceitos de estabilidades dissensual e consensual por (XU et al., 2019).

Para introduzir os métodos matriciais no GMCR com preferências probabilísticas, (RÊGO; VIEIRA, 2021) apresentaram uma investigação detalhada sobre métodos matriciais. Esses métodos matriciais foram concebidos para simplificar a determinação dos estados estáveis, baseando-se em cinco definições de estabilidade propostas para este modelo: estabilidade de Nash, metarracionalidade, metarracionalidade simétrica, estabilidade sequencial e estabilidade sequencial simétrica.

Através desses métodos, é possível realizar uma análise detalhada para determinar em quais valores dos parâmetros os estados satisfazem cada uma dessas noções de estabilidade. Isso permite não apenas identificar os estados estáveis, mas também avaliar a robustez do equilíbrio dos estados em diferentes cenários.

E é neste contexto em que o GMCR se destaca como uma abordagem flexível e eficaz para analisar conflitos. Neste estudo, o foco foi aprimorar a análise de conflitos dentro do GMCR, com um enfoque específico nos conceitos de estabilidades com horizonte variável. Buscamos contribuir para a literatura sobre a área, apresentando avanços que representam conceitos que seguem raciocínio semelhante aos conceitos das estabilidades  $L_h$  (KILGOUR, 1985) e  $Maximin_h$  (RÊGO; VIEIRA, 2020b), levando em consideração o GMCR com preferências probabilísticas.

Uma vez que estes novos conceitos permitirão a modelagem mais precisa de situações práticas, nas quais se aplicam o conceito de estabilidade proposto, proporcionando *insights* valiosos para situações do mundo real em que a resolução de conflitos é essencial. Assim, esta pesquisa corrobora com o desenvolvimento e aprimoramento do GMCR como uma ferramenta poderosa na análise e resolução de conflitos, atendendo a uma demanda crescente por abordagens eficazes e flexíveis de tomada de decisões em cenários de conflito.

A implementação de preferências probabilísticas no GMCR representa um avanço signifi-

cativo, reconhecendo a natureza incerta sobre as preferências dos DMs em muitos conflitos. Incorporar essas preferências permite uma abordagem mais realista e flexível, levando em consideração que nem sempre os DMs possuem uma preferência determinística entre determinados estados do conflito. Isso proporciona uma visão mais abrangente e precisa das dinâmicas de conflito, possibilitando a identificação de soluções mais resilientes e adaptáveis às mudanças do ambiente.

Além disso, é crucial reconhecer a importância da existência de modelos que possibilitem melhorar o processo de tomada de decisões em situações conflituosas. A complexidade dos conflitos contemporâneos exige abordagens que vão além da simples identificação de soluções ótimas, considerando múltiplos critérios e preferências dos envolvidos. Modelos que permitem uma análise holística e inclusiva dos diversos fatores em jogo são essenciais para facilitar a negociação e promover a cooperação entre as partes interessadas.

Portanto, em nosso estudo, propomos a explorar o papel do GMCR na resolução de conflitos, destacando a importância da implementação de preferências probabilísticas nos conceitos das estabilidades que possuem horizonte variável e a necessidade de modelos que aprimorem o processo de tomada de decisões. Assim, esperamos contribuir para o desenvolvimento de abordagens mais eficazes e sustentáveis para lidar com os desafios complexos enfrentados pela sociedade contemporânea.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A aplicação do GMCR revela-se uma abordagem promissora para analisar e compreender as interações entre os agentes envolvidos em um conflito. No entanto, para tornar esses modelos ainda mais eficazes e realistas, é crucial considerar a introdução de preferências probabilísticas, especialmente ao se explorar conceitos, já estabelecidos como as estabilidades com horizonte variável.

Dentre os conceitos-chave, para conflitos bilaterais, nesse domínio, destacam-se a estabilidade do Movimento Limitado, Metarracionalidade Generalizada e estabilidade  $\text{Maximin}_h$ . Estes conceitos delineiam estratégias de tomada de decisão que levam em conta diferentes comprimentos para os horizontes e consideram as preferências individuais dos tomadores de decisão. Por exemplo, a estabilidade Movimento Limitado enfatiza a escolha de ações que resultem no maior ganho esperado para cada agente, considerando horizontes variáveis e a suposição de que todos os tomadores de decisão agem de acordo com seus próprios interesses.

Enquanto isso, a estabilidade  $\text{Maximin}_h$  adota uma abordagem conservadora, em que o tomador de decisão focal presume que seus oponentes tomarão ações que resultem no pior cenário possível para ele, levando em consideração horizontes menores.

Esses conceitos tradicionais de estabilidade fornecem uma base sólida para a compreensão dos conflitos, porém, a extensão desses conceitos para cenários mais complexos e dinâmicos, especialmente incorporando preferências probabilísticas, representa uma lacuna significativa na literatura atual. Portanto, há uma necessidade premente de explorar como a implementação de preferências probabilísticas pode afetar a estabilidade com horizonte variável no GMCR.

Dessa forma, este estudo se propõe a preencher essa lacuna, investigando como a introdução de preferências probabilísticas afeta os conceitos de estabilidade com horizonte variável, em específico a estabilidade Movimento Limitado e a estabilidade  $\text{Maximin}_h$ , contribuindo assim para avanços significativos na teoria e prática da resolução de conflitos.

## 1.2 OBJETIVOS

Esta dissertação tem como objetivo geral apresentar alguns avanços na literatura sobre o GMCR, aplicando o modelo proposto por (RÊGO; SANTOS, 2015), que implementa as preferências probabilísticas ao GMCR para definirmos conceitos de estabilidade com horizonte variável. Especificamente, essas contribuições se enquadram nos itens a seguir:

- (1) Apresentar a definição da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , a qual considera preferências probabilísticas;
- (2) Propor a definição da estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ , a qual, também, considera preferências probabilísticas;
- (3) Estabelecer as relações entre os conceitos propostos nesta dissertação e alguns conceitos de estabilidades já estabelecidos na literatura sobre o GMCR;
- (4) Aplicar os conceitos propostos em um estudo de caso para ilustrar a utilidade dos mesmos.

### 1.3 MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

Na elaboração desta dissertação fizemos uma revisão minuciosa sobre o modelo GMCR e o GMCR com preferências probabilísticas. Nossa pesquisa foi conduzida de forma predominantemente teórica, analisando e desenvolvendo conceitos dentro do contexto do modelo GMCR com preferências probabilísticas.

Buscando atingir nossos objetivos apresentamos a estabilidade Movimento Limitado  $(\alpha, \beta) - L_h$ . Além disso, buscamos explorar alguns resultados que estabelecem a relação desse novo conceito de estabilidade com os conceitos já estabelecidos no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com preferências probabilísticas.

Em seguida, ao apresentarmos a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , estabelecemos que a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  é equivalente a estabilidade  $\alpha - Nash$ , que a  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  é equivalente a estabilidade  $(\alpha, \beta) - GMR$  e a estabilidade  $(\alpha, \beta) - SMR$  implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ , porém a volta não é verdadeira. Por fim, mostramos que a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , mas que a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  não implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , o que ilustramos por meio de um exemplo.

Estabelecidas as noções das estabilidades  $(\alpha, \beta) - L_h$  e  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  apresentamos um conflito presente na literatura sobre o GMCR e analisamos a partir das noções dos conceitos propostos.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação consiste em seis capítulos. Após o presente capítulo, introdutório, no Capítulo 2, revisamos o modelo GMCR e o GMCR com preferências probabilísticas, proposto por (RÊGO; SANTOS, 2015).

No Capítulo 3, apresentamos a estabilidade Movimento Limitado  $(\alpha, \beta) - L_h$  no GMCR com preferências probabilísticas. Além disso, obtivemos alguns resultados estabelecendo a relação deste novo conceito de estabilidade com os conceitos já estabelecidos no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com preferências probabilísticas.

No Capítulo 4, apresentamos a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , também, no GMCR com preferências probabilísticas. E estabelecemos, a partir de alguns resultados, as relações deste novo conceito de estabilidade com outros conceitos do Modelo de Grafos para

Resolução de Conflitos com preferências probabilísticas, além da relação entre as estabilidades  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  e  $(\alpha, \beta) - L_h$ .

No Capítulo 5, apresentamos uma aplicação dos conceitos propostos em um conflito real apresentado na literatura sobre o GMCR inicialmente por (HIPEL, 2001) e modificado por (RÊGO; SANTOS, 2015) para ilustrarmos a utilidade destes conceitos no modelo GMCR com preferências probabilísticas precisas.

Já no Capítulo 6, apresentamos nossas principais conclusões e algumas orientações para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos uma fundamentação teórica sobre o GMCR, o qual é uma ferramenta para a modelagem e a resolução de conflitos. Exploraremos os principais conceitos do modelo, algumas de suas propriedades, os conceitos de solução e como eles podem ser aplicados.

### 2.1 ALGUMAS IDEIAS INICIAIS

Em um mundo caracterizado pela diversidade de opiniões e interesses, a resolução de conflitos emerge como um desafio constante. Nesse cenário, a aplicação do GMCR revela-se uma ferramenta poderosa e inovadora, capaz de mapear intrincadas dinâmicas e proporcionar uma abordagem estruturada na busca por soluções em situações conflituosas.

Em essência, um grafo é uma representação visual de relações entre elementos, onde os nós representam entidades e as arestas refletem conexões entre elas. Ao aplicar o GMCR para análise e resolução de conflitos, cada nó pode ser interpretado como um dos estados do conflito nos quais o participante ou grupo de participantes tomam suas decisões sobre mover o conflito para outro nó/estado ou permanecer neste nó/estado. As arestas, por sua vez, representam as acessibilidades que os decisores têm disponíveis a partir de cada um dos estados do conflito.

Uma das potencialidades do GMCR reside na capacidade de visualizar e analisar as complexas relações que compõem um conflito. Ao mapear as conexões, torna-se possível identificar padrões, pontos de tensão e potenciais áreas de compromisso. Essa visualização clara e abrangente ajuda a evitar abordagens simplistas, permitindo uma compreensão mais profunda das nuances envolvidas. Adicionalmente, a flexibilidade do GMCR se destaca na adaptação a diferentes tipos de conflitos, sejam eles bilaterais ou multilaterais. Essa versatilidade é crucial, especialmente em situações que envolvem múltiplos participantes, interesses divergentes e complexidades inerentes.

O GMCR também permite a análise de cenários futuros, avaliando o impacto potencial de diferentes ações e estratégias. Essa capacidade preditiva é valiosa, proporcionando às partes envolvidas *insights* sobre os resultados prováveis de suas escolhas, incentivando decisões informadas e colaborativas. Na seção a seguir apresentamos formalmente o GMCR destacando seus principais elementos.

## 2.2 O MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS (GMCR)

O GMCR foi proposto por (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987) e é um instrumento matemático, útil para modelagem, descrição e análise de conflitos estratégicos de acordo com as preferências dos decisores (DMs), pertencentes ao conjunto  $N$  dos sujeitos envolvidos no conflito. No GMCR, os potenciais estados que podem emergir em um conflito, com base nas decisões que os DMs envolvidos no conflito podem adotar é representado por  $S = \{s, s_1, s_2, \dots, s_k\}$ . Neste modelo, existe um conjunto de grafos direcionados,  $D_i = \{S, A_i\}$ ,  $A_i \subset S \times S$  e  $i \in N$ , em que cada grafo, desse conjunto determina para cada estado  $s \in S$  os estados para os quais o DM  $i$  pode mover o conflito, os quais são denominados estados acessíveis para o DM  $i$  em um único passo a partir de  $s$ .

Quando um DM escolhe mover o conflito de um estado para outro ele pode estar se baseando em suas preferências relacionadas aos estados do conflito, pode estar buscando prejudicar seu oponente em um movimento de retaliação ou procurando o melhor estado para seu oponente, no caso de DMs com comportamento altruísta (RÊGO; VIEIRA, 2020a). Essas preferências dos DMs, com relação aos estados do conflito são estabelecidas por uma relação binária assimétrica sobre os estados do conflito, denominada como  $\succ_i$ , onde  $s_1 \succ_i s_2$  indica que o decisor  $i$  prefere estritamente o estado  $s_1$  ao estado  $s_2$ . A partir dessa relação, é possível derivar a relação de preferência fraca,  $\succeq_i$ , na qual  $s_1 \succeq_i s_2$  é utilizada para expressar que  $s_2 \not\succeq_i s_1$ , e a relação de indiferença,  $\sim_i$ , na qual  $s_1 \sim_i s_2$  indica que  $s_1 \not\succeq_i s_2$  e  $s_2 \not\succeq_i s_1$ .

O conjunto  $R_i(s)$ , em que  $R_i(s) = \{s' \in S : (s, s') \in A_i\}, \forall i \in N$ , representa o conjunto de todos os estados alcançáveis em um único movimento realizado pelo DM  $i$  a partir do estado  $s$ . Além disso, é definido também o conjunto  $R_i^+(s) \subset R_i(s)$ , cujos estados, alcançáveis após um movimento do DM  $i$  a partir de  $s$ , são melhorias unilaterais para o DM  $i$ , ou seja,  $R_i^+(s) = \{s'' \in R_i(s) : s'' \succ_i s\}$ .

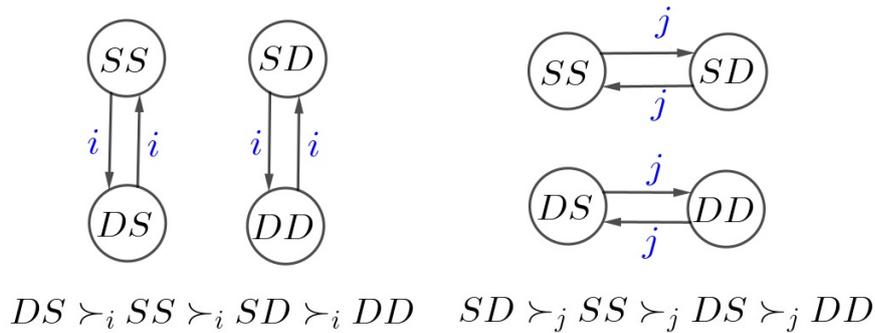
Para tornar a apresentação do modelo mais didática, vamos apresentar um exemplo de conflito e a modelagem de acordo com a teoria dos jogos no contexto do GMCR. Um exemplo clássico que ilustra bem esses conceitos é o Jogo da Galinha (LUCE, 1958). Vejamos como esse jogo pode ser modelado.

**Exemplo 2.2.1 Jogo da Galinha.** No jogo da galinha, dois DMs, denominados DM  $i$  e DM  $j$ , enfrentam um dilema onde cada um deve escolher entre duas estratégias: desviar (denotada por  $S$ ) ou continuar dirigindo em linha reta (denotada por  $D$ ). Se ambos escolhem desviar,

evitam a colisão, mas se nenhum desvia, ocorre uma colisão que é o pior resultado para ambos. Se apenas um desvia, aquele que continuou em linha reta é considerado mais corajoso ou mais “firme”, ganhando maior prestígio ou vantagem.

Neste conflito temos que o conjunto dos decisores envolvidos no conflito é  $N = \{i, j\}$ , o conjunto dos estados do conflito é  $S = \{DD, DS, SD, SS\}$ , os conjuntos das acessibilidades, respectivamente, dos decisores  $i$  e  $j$  são dados por  $R_i(DD) = \{SD\}$ ,  $R_i(SS) = \{DD\}$ ,  $R_i(DS) = \{SS\}$ ,  $R_i(SS) = \{DS\}$ ,  $R_j(DD) = \{DS\}$ ,  $R_j(DS) = \{DD\}$ ,  $R_j(SS) = \{SS\}$ , e  $R_j(SS) = \{SD\}$ . O grafo que representa o Jogo da Galinha é mostrado na Figura 1. As preferências dos DMs apresentadas na figura são ordenadas de acordo com seus próprios interesses.

Figura 1 – Grafo que representa conflito descrito no Exemplo 2.2.1.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Na próxima seção recordaremos os conceitos clássicos de estabilidade no GMCR: a estabilidade de Nash (NASH, 1950), estabilidade Metarracional Geral (HOWARD, 1971), a estabilidade Metarracional Simétrica (HOWARD, 1971), a estabilidade Sequencial (FRASER; HIPEL, 1979) e a estabilidade Sequencial Simétrica (RÊGO; VIEIRA, 2017). Tais conceitos, ao serem aplicados na análise de uma situação de conflito, consideram o decisor focal como o decisor em cujo ponto de vista e estratégias estamos particularmente interessados em analisar. Esse conceito é fundamental para a análise de conflitos, pois permite focar nas preferências e nas possíveis ações de um único decisor, enquanto ainda considera as interações e as possíveis respostas dos outros decisores envolvidos no conflito.

### 2.2.1 Alguns conceitos de solução no GMCR com preferências determinísticas para conflitos bilaterais

A análise de estabilidade é a área da Teoria dos Jogos que analisa sistematicamente as possíveis interações entre os decisores durante um conflito (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993), como suas ações e as possíveis sanções para cada movimento de um determinado DM durante o desenrolar do conflito até sua resolução. Ela se apresenta como uma ferramenta bastante útil na análise de conflitos. Assim, a noção de estabilidade está associada à de solução para o conflito. Dentre os vários conceitos existentes, para conflitos bilaterais, alguns consideram as relações de preferências determinísticas, dos quais recordamos alguns principais a seguir.

**Definição 2.2.2** *Nash (NASH, 1950)* Um estado  $s \in S$  é Nash estável para o DM  $i \in N$  se, e somente se,  $R_i^+(s) = \emptyset$ .

Em que um estado  $s$  é Nash estável para o decisor  $i$  quando não existe nenhum movimento de melhoria unilateral para ele a partir do estado  $s$

**Definição 2.2.3** *GMR (HOWARD, 1971)* Um estado  $s \in S$  é metarracional geral estável para o DM  $i \in N$  se, e somente se,  $\forall s_1 \in R_i^+(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$ , tal que  $s \succeq_i s_2$ .

A intuição é que um estado  $s$  é GMR estável para o decisor  $i$ , quando para todo movimento de melhoria unilateral que ele possa realizar, a partir do estado  $s$ , existe algum movimento de resposta do DM oponente, o sancionando a partir do estado acessado pelo DM  $i$ .

**Definição 2.2.4** *SMR (HOWARD, 1971)* Um estado  $s \in S$  é simetricamente metarracional estável para o DM  $i \in N$  se, e somente se,  $\forall s_1 \in R_i^+(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$ , tal que  $s \succeq_i s_2$  e  $s \succeq_i s_3$ ,  $\forall s_3 \in R_i(s_2)$ .

A intuição é que, se existir algum movimento de sanção acessível ao decisor oponente a partir de qualquer estado alcançado por um movimento de melhoria unilateral do DM  $i$  a partir de  $s$ , então o estado  $s$  é SMR estável para o decisor  $i$  se ele não puder escapar dessa sanção para um estado melhor do que  $s$ .

**Definição 2.2.5** *SEQ (FRASER; HIPEL, 1979)* Um estado  $s \in S$  é sequencialmente estável para o DM  $i \in N$  se, e somente se,  $\forall s_1 \in R_i^+(s)$ , existe  $s_2 \in R_j^+(s_1)$ , tal que  $s \succeq_i s_2$ .

A intuição é semelhante a intuição da estabilidade GMR, porém, considerando apenas as sanções críveis, isto é, sanções que representem movimentos de melhorias unilaterais para o oponente do decisor focal.

**Definição 2.2.6** *SSEQ (RÊGO; VIEIRA, 2017)* Um estado  $s \in S$  é simetricamente sequencial estável para o DM  $i \in N$  se, e somente se,  $\forall s_1 \in R_i^+(s)$ , existe  $s_2 \in R_j^+(s_1)$ , tal que  $s \succeq_i s_2$  e  $s \succeq_i s_3$ ,  $\forall s_3 \in R_i(s_2)$ .

A intuição é semelhante à da estabilidade SMR, mas leva em conta apenas as sanções críveis do oponente.

Analisando a estabilidade de Nash do conflito descrito no Exemplo 2.2.1 a partir do estado  $DS$  para o DM  $i$ , temos que o estado  $DS$  é Nash estável para ele, pois  $R_i(DS) = \{SS\}$  e  $DS \succ_i SS$ , logo  $R_i^+(DS) = \emptyset$ .

Ao analisarmos a estabilidade GMR a partir do estado  $SS$  para o DM  $i$ , temos que o estado  $SS$  é GMR estável para o DM  $i$ , pois  $R_i(SS) = \{DS\}$  e  $DS \succ_i SS$ , assim há um movimento de melhoria unilateral para o DM  $i$  a partir do estado  $SS$ , mas  $R_j(DS) = \{DD\}$  e  $SS \succ_i DD$ , logo há um possível movimento de sanção que pode ser realizado pelo DM  $j$  com relação ao movimento de melhoria unilateral do DM  $i$ .

Ao analisarmos a estabilidade SMR a partir do estado  $SS$  para o DM  $i$ , temos que o estado  $SS$  é SMR estável para o DM  $i$ , pois  $R_i(SS) = \{DS\}$  e  $DS \succ_i SS$ , assim há um movimento de melhoria unilateral para o DM  $i$  a partir do estado  $SS$ , mas  $R_j(DS) = \{DD\}$  e  $SS \succ_i DD$ , o que caracteriza uma sanção ao movimento inicial do DM  $i$ , daí, como  $R_i(DD) = \{SD\}$  e  $SS \succ_i SD$ , temos que o DM  $i$  não consegue escapar da sanção imposta pelo seu oponente.

Ao analisarmos a estabilidade SEQ e a estabilidade SSEQ a partir do estado  $SS$  para o DM  $i$ , temos que o estado  $SS$  não é SEQ estável e, também, não é SSEQ estável para o DM  $i$ , pois o movimento de sanção que o DM  $j$  pode realizar a partir do estado  $DS$  não é um movimento crível.

Porém, além dos conceitos clássicos da literatura sobre o GMCR, nos quais cada um dos conceitos anteriores considera um horizonte de análise fixo, foram propostos alguns outros conceitos que permitem a escolha do horizonte de análise. Dentre eles, destacam-se, a estabilidade Movimento Limitado ( $L_h$ ) (KILGOUR, 1985) e a estabilidade  $\text{Maximin}_h$  (RÊGO; VIEIRA, 2020b). Para estes dois conceitos, deve-se assumir que as preferências dos DMs são completas, transitivas e assimétricas, ou seja, geram um ordenamento completo dos estados. Além disso, nestes conceitos de estabilidade, faz-se uso da função  $K_i(s) = ||\{s_1 \in S : s \succ_i s_1\}||$ , que

é a cardinalidade do conjunto dos estados piores que  $s$  para o DM  $i$ . Intuitivamente, quanto melhor o estado  $s$  for no ordenamento dos estados de acordo com o DM  $i$ , maior será o valor de  $K_i(s)$ .

Para recordarmos o conceito da estabilidade  $L_h$ , precisamos recordar, antes, o estado que o DM  $i$  antecipa a partir do estado  $s$  quando  $i$  se move em  $s$  e o horizonte é  $h$ ,  $G_h(i, s)$ , o qual é formalmente definido da seguinte maneira:

$$G_h(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \text{ ou, } K_i(s) \geq A_h(i, s) \\ G_{h-1}(j, M_h(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $M_h^i(i, s)$  é qualquer estado  $s_1^* \in R_i(s)$  que satisfaz  $K_i(G_{h-1}(j, s_1^*)) = \max\{K_i(G_{h-1}(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}$ ,  $j \neq i$ ,  $A_h(i, s) = K_i(G_{h-1}(j, M_h(i, s)))$ , e  $G_0(i, s) = G_0(j, s) = s$ . Dessa forma, a estabilidade  $(L_h)$  é definida como se segue:

**Definição 2.2.7** (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987) *Seja  $i \in N$ , o estado  $s \in S$  é  $L_h$  estável para o DM  $i$  se e somente se  $G_h(i, s) = s$ .*

A intuição é que quando é a vez do DM focal se movimentar, e o horizonte é  $h$ , ele antecipa o estado que dá o melhor resultado para ele entre os estados que ele antecipa quando é a vez de seu oponente se movimentar e o horizonte é  $h - 1$ . Por outro lado, quando for a vez do oponente do DM focal se movimentar e o horizonte é  $h$ , o DM focal antecipa o estado que dá o melhor resultado para o oponente entre os estados que ele antecipa quando é sua vez de se mover e o horizonte é  $h - 1$ .

Note que para saber o estado final antecipado na estabilidade  $L_h$ , as preferências devem ser conhecimento comum entre os DMs. Porém, em muitas situações de conflito, as preferências do oponente podem ser totalmente desconhecidas. Para lidar com esta situação (RÊGO; VIEIRA, 2020b) propuseram a estabilidade  $\text{Maximin}_h$ . Ao definir a estabilidade  $\text{Maximin}_h$ , (RÊGO; VIEIRA, 2020b) consideram um conflito com dois decisores, em que o DM focal analisa o conflito com o horizonte  $h$  acreditando que o outro DM sempre levará para o pior estado possível para o DM focal, com relação as suas preferências e ele sempre se move buscando o melhor cenário possível para si, quando ainda resta um horizonte menor que  $h$  para o conflito.

Porém, antes de recordarmos a noção da estabilidade  $\text{Maximin}_h$ , precisamos recordar a noção do estado antecipado pelo decisor focal. Assim, seja  $G_h^i(j, s) \in S$ , o estado que o DM  $i$  acredita que será o estado final do conflito considerando um horizonte  $h$ , com o DM

$j$  se movendo inicialmente, a partir do estado  $s$ . Assume-se que  $G_0^i(\cdot, s) = s$ . Daí  $G_h^i(\cdot, s)$  é definido indutivamente da seguinte maneira:

$$G_h^i(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \text{ ou, } K_i(s) \geq A_h^i(i, s) \\ G_{h-1}^i(j, M_h^i(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $M_h^i(i, s)$  é qualquer estado  $s_1^* \in R_i(s)$  que satisfaz  $K_i(G_{h-1}^i(j, s_1^*)) = \max\{K_i(G_{h-1}^i(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}$ ,  $j \neq i$  e  $A_h^i(i, s) = K_i(G_{h-1}^i(j, M_h^i(i, s)))$ .

Por outro lado, tem-se que  $G_h^i(j, s)$  é definido da seguinte maneira:

$$G_h^i(j, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_j(s) = \emptyset \text{ ou, } K_i(s) \leq A_h^i(j, s) \\ G_{h-1}^i(i, M_h^i(j, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $M_h^i(j, s)$  é qualquer estado  $s_1^* \in R_j(s)$  que satisfaz  $K_i(G_{h-1}^i(i, s_1^*)) = \min\{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1)) : s_1 \in R_j(s)\}$ ,  $j \neq i$  e  $A_h^i(j, s) = K_i(G_{h-1}^i(i, M_h^i(j, s)))$ .

Daí, o conceito de estabilidade  $\text{Maximin}_h$  é definido da seguinte maneira:

**Definição 2.2.8** (RÊGO; VIEIRA, 2020b) *Seja  $h$  um número inteiro positivo. O estado  $s \in S$  é  $\text{Maximin}$  estável, com horizonte  $h$  para o DM  $i \in N$ , denotado por  $\text{Maximin}_h$ , se, e somente se,  $G_h^i(i, s) = s$ .*

A intuição é que quando é a vez do DM focal se movimentar, e o horizonte é  $h$ , ele antecipa o estado que dá o melhor resultado para ele entre os estados que ele antecipa quando é a vez de seu oponente se movimentar e o horizonte é  $h - 1$ . Por outro lado, quando for a vez do oponente do DM focal se movimentar e o horizonte é  $h$ , o DM focal antecipa o estado que dá o pior resultado para ele entre os estados que ele antecipa quando é sua vez de se mover e o horizonte é  $h - 1$ .

Um outro conceito de estabilidade de horizonte variável, chamado de metarracionalidade generalizada foi proposto por (ZENG et al., 2006). Recentemente, no caso de conflitos bilaterais, este conceito foi demonstrado ser equivalente a estabilidade  $\text{Maximin}$  (SILVA, 2023). Por isso, não detalharemos o mesmo aqui.

Na próxima seção, recordaremos alguns conceitos de estabilidade no GMCR com preferências probabilísticas, os quais foram propostos por (RÊGO; SANTOS, 2015).

## 2.2.2 Alguns conceitos de solução no GMCR com preferências probabilísticas para conflitos bilaterais

Antes de explorarmos os conceitos de estabilidade com preferências probabilísticas, é pertinente mencionar que (RÊGO; SANTOS, 2015) apresentaram alguns conceitos fundamentais que são essenciais para a compreensão dessas abordagens. Esses conceitos fornecem uma base sólida para a análise mais aprofundada das interações em cenários de conflitos com elementos de incerteza nas preferências dos decisores.

Como aponta (SANTOS, 2014), (LI et al., 2002) introduz a estrutura de preferências incertas para conflitos bilaterais, enquanto (LI et al., 2004) introduz a estrutura de preferências incertas para conflitos multilaterais no GMCR. A autora aponta que uma alternativa para modelar preferências incertas é o uso de preferências probabilísticas. Dado que a aplicação em problemas reais de decisão envolve uma ampla gama de comportamentos dos sujeitos, é natural que existam diversas possibilidades na maneira como eles tomam suas decisões. Portanto, uma alternativa é modelar o comportamento como um fenômeno probabilístico.

Para entender o modelo probabilístico de preferências, proposto por (LUCE, 1958), (SANTOS, 2014) estabelece que, a expressão  $P_i(s_1, s_2)$  representa a probabilidade do DM  $i$  preferir o estado  $a$  ao estado  $b$ , quando solicitado a escolher entre eles. Simplificando, é a probabilidade da preferência que o DM  $i$  tem por  $s_1$  em relação a  $s_2$  durante o processo de escolha.

Tal probabilidade  $P_i$ , cujo domínio é  $S \times S$ , deve satisfazer as seguintes condições:

- (a)  $P_i(s_1, s_2) \geq 0$  para cada  $s_1, s_2 \in S$ ,
- (b)  $P_i(s_1, s_1) = 0$  para cada  $s_1 \in S$ .
- (c)  $P_i(s_1, s_2) + P_i(s_2, s_1) \leq 1$  para cada  $s_1, s_2 \in S$ .

O valor de  $1 - (P_i(s_1, s_2) + P_i(s_2, s_1))$  representa a probabilidade do DM  $i$  ser indiferente entre os estados  $s_1$  e  $s_2$ . Ao contrário da maioria dos trabalhos no GMCR, no GMCR com preferências probabilísticas, assume-se que  $s \in R_i(s)$ , para todo  $i \in N$  e  $s \in S$ , enfatizando que permanecer no estado corrente é sempre uma opção acessível.

Agora, recordamos as definições de estabilidade, com preferências probabilísticas, para cenários nos quais o conflito envolve apenas dois DMs. Sejam os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  pertencentes ao intervalo  $[0, 1]$ . Defina o conjunto,  $R_i^{+\gamma}(s) = \{s_1 \in R_i(s) : P_i(s_1, s) > \gamma\}$ , dos  $\gamma$ -melhoramentos para o DM  $i$  a partir de um dado estado  $s$ , i.e., o conjunto dos estados

acessíveis ao DM  $i$  a partir de  $s$  que o DM  $i$  prefere com probabilidade maior que  $\gamma$  ao estado  $s$ . Finalmente, considere o conjunto de todos os estados que o DM  $i$  prefere a  $s$  com probabilidade maior que  $\gamma$ ,  $\varphi_i^{+\gamma}(s) = \{t \in S : P_i(s_1, s) > \gamma\}$ . Nesse sentido, é imediato que  $R_i^{+\gamma}(s) = \varphi_i^{+\gamma}(s) \cap R_i(s)$ .

Os conceitos clássicos de estabilidade foram estendidos por (RÊGO; SANTOS, 2015) e por (RÊGO; VIEIRA, 2017) para o GMCR com preferências probabilísticas, a seguir os recordamos.

**Definição 2.2.9** (RÊGO; SANTOS, 2015) *Um estado  $s \in S$  é  $\alpha$ -Nash estável para o DM  $i$  se  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ .*

Diferente do GMCR original, em que um estado ser Nash estável significa que o DM focal não pode se mover para um estado que é melhor do que o estado inicial, no modelo com preferências probabilísticas, (RÊGO; SANTOS, 2015) buscaram uma definição de estabilidade capturando a intuição que um estado  $s$  é  $\alpha$ -Nash estável para o DM  $i$  se, dentre os estados alcançáveis para  $i$  quando ele está em  $s$ , não há nenhum estado que  $i$  prefira a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \alpha$ .

**Definição 2.2.10** (RÊGO; SANTOS, 2015) *Um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta)$ -Metarracional estável ( $(\alpha, \beta)$ -GMR estável) para o DM  $i$  se, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ .*

Assim, um estado  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -Metarracional estável para o DM  $i$  se, para cada estado  $s_1$  que  $i$  pode atingir de  $s$  e que  $i$  prefere a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \alpha$ , então haverá uma resposta para um estado  $s_2$  que o DM  $j$  pode fazer e é tal que  $i$  não prefere  $s_2$  a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \beta$ .

**Definição 2.2.11** (RÊGO; SANTOS, 2015) *Um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta)$ -Metarracional Simétrico estável ( $(\alpha, \beta)$ -SMR estável) para o DM  $i$  se, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$  tal que  $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ .*

Assim, um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta)$ -Metarracional Simétrico para o DM  $i$  se, para qualquer estado  $s_1$  acessível para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , o qual o DM  $i$  prefira com probabilidade maior ou igual a  $1 - \alpha$ , há um movimento de resposta por parte do DM  $j$ , que se move para um estado  $s_2$  tal que o DM  $i$  não prefere  $s_2$  a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \beta$ , e mais ainda, não existe uma contrarresposta de  $i$  levando-o a um estado  $s_3$  tal que  $i$  prefira  $s_3$  a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \alpha$ .

**Definição 2.2.12** (RÊGO; SANTOS, 2015) Um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente Estável ( $(\alpha, \beta, \gamma)$ -SEQ estável) para o DM  $i$  se, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ .

Assim, um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente Estável para o DM  $i$  se, para qualquer estado  $s_1$ , acessível para o DM  $i$  a partir do estado  $s$  e que ele prefere com probabilidade maior que  $1 - \alpha$ , então existe uma resposta do DM  $j$ , para um estado  $s_2$  tal que  $j$  prefere  $s_2$  a  $s_1$  com probabilidade maior que  $\gamma$ , e  $i$  não prefere  $s_2$  a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \beta$ .

**Definição 2.2.13** (RÊGO; VIEIRA, 2017) Um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -Sequencial Simétrico estável ( $(\alpha, \beta, \gamma)$ -SSEQ estável) para o DM  $i$  se, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$  tal que  $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ .

Assim, um estado  $s \in S$  é  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -Sequencial Simétrico para o DM  $i$  se, para qualquer estado  $s_1$  acessível para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , o qual o DM  $i$  prefira com probabilidade maior ou igual a  $1 - \alpha$ , há um movimento de resposta por parte do DM  $j$ , que se move para um estado  $s_2$  tal que  $j$  prefere  $s_2$  a  $s_1$  com probabilidade maior que  $\gamma$ , e o DM  $i$  não prefere  $s_2$  a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \beta$ , e mais ainda, não existe uma contrarresposta de  $i$  levando-o a um estado  $s_3$  tal que  $i$  prefira  $s_3$  a  $s$  com probabilidade maior que  $1 - \alpha$ .

No próximo capítulo, apresentamos a estabilidade Movimento Limitado com preferências probabilísticas  $(\alpha, \beta) - L_h$  e apresentamos alguns resultados que estabelecem as relações de tal conceito com conceitos estabelecidos na literatura sobre o GMCR.

### 3 ESTABILIDADE DO MOVIMENTO LIMITADO COM PREFERÊNCIAS PROBABILÍSTICAS PARA CONFLITOS BILATERAIS

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Conforme apontado por (SILVA, 2023), ao realizarmos a análise de estabilidade do GMCR, temos como destaque a noção de estabilidade movimento limitado  $L_h$  (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987), o qual se apresenta como um importante conceito com horizonte variável, tendo ele servido de inspiração tanto para (RÊGO; VIEIRA, 2020b) que propuseram a estabilidade  $Maximin_h$ , quanto para (ZENG et al., 2006) que propôs a estabilidade Metarracional Generalizada ( $MR_h$ )

Porém, como enfatizado no referencial teórico desta dissertação, na estabilidade  $L_h$  o DM focal, que conhece as preferências de seus oponentes, escolhe o estado que maximiza seu ganho acreditando que os oponentes, de maneira racional, também buscam maximizar seus próprios ganhos.

Os conceitos de estabilidade do GMCR clássico, com preferências determinísticas, abrangem tanto aqueles que consideram o horizonte fixo, quanto outros com horizontes variáveis. No entanto, quando levamos em conta o GMCR com preferências probabilísticas estão definidos apenas os conceitos cujo horizonte é fixo.

Aqui, buscamos ampliar as noções de estabilidade no GMCR com preferências probabilísticas já estabelecidas, apresentando conceitos de estabilidades com horizontes variáveis. Neste capítulo em especial, estamos propondo um novo conceito de estabilidade, a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ . Ademais, estabelecemos suas relações com as estabilidades  $\alpha$ - Nash,  $(\alpha, \beta)$ -GMR e  $(\alpha, \beta)$ -SMR.

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira: Primeiramente, na Seção 3.2, apresentamos a definição da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  para conflitos bilaterais. No entanto, antes de discorrermos sobre a definição da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , foi necessário definir o estado antecipado  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1)$ , que representa o estado antecipado quando o estado para o qual se analisa a estabilidade é  $s$  e DM  $i$  se move do estado  $s_1$  considerando um horizonte  $h$ , caso o conflito siga a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ . Na Seção 3.3, estabelecemos as relações entre os conceitos mencionados. Uma aplicação desta noção de estabilidade será apresentada no Capítulo 5.

### 3.2 A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - L_h$

Para definirmos a Estabilidade Movimento Limitado com preferências probabilísticas,  $(\alpha, \beta) - L_h$ , precisamos, inicialmente, definir o estado  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1)$ , que é o estado antecipado pelo DM  $i$  com um horizonte  $h$ , utilizando como referência o estado inicial  $s$ , quando ele se move a partir do estado  $s_1$  de acordo com a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ .

Intuitivamente, quando o estado inicial é  $s$ , assumiremos que um DM  $i$  se moverá com o objetivo de atingir um estado que tenha a maior probabilidade de ser preferível a  $s$  para o DM  $i$ . Contudo, como ocorre com a estabilidade  $\alpha$ -Nash, assumiremos que o DM  $i$  só tem incentivo a mudar de estado se for para um outro que seja um  $(1 - \alpha)$  melhoramento para ele em relação ao estado inicial  $s$ . Além disso, assim como ocorre nas estabilidades  $(\alpha, \beta)$ -GMR e  $(\alpha, \beta)$ -SMR, o DM  $i$  também só tem incentivo a sair do estado atual se o estado antecipado final ao se mover for um  $(1 - \alpha)$  (resp.,  $(1 - \beta)$ ) melhoramento em relação a  $s$  para o DM  $i$  e o horizonte de análise for ímpar (resp., par) indicado que o DM  $i$  (resp.,  $j \neq i$ ) é o último a se mover. Formalmente, temos que  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1)$  é dado por:

$$(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1) = \begin{cases} s_1, & \text{se } R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) - \{s_1\} = \emptyset; \\ s_1, & \text{se } h \text{ é ímpar e } P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \leq 1 - \alpha; \\ s_1, & \text{se } h \text{ é par e } P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \leq 1 - \beta; \\ s_1, & \text{se } P_i(s_1, s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \\ (\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $\overline{M}_h(i, s, s_1) \in \operatorname{argmax}\{P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, s_2), s) : s_2 \in (R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) - \{s_1\}\}$ . Ou seja,  $\overline{M}_h(i, s, s_1)$  é o estado a partir do qual o estado final antecipado com horizonte  $h - 1$ ,  $(\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1))$ , é o que tem a maior probabilidade de ser preferido a  $s$  pelo DM  $i$ , dentre aqueles que são acessíveis para o DM  $i$  a partir de  $s_1$  e são  $(1 - \alpha)$  melhoramentos para o DM  $i$  em relação ao estado inicial  $s$ .

Intuitivamente, um estado  $s$  será  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $i$  se a partir do estado  $s$ , considerando um horizonte  $h$ , o DM  $i$  antecipar que o melhor a fazer é ficar em  $s$ . Formalmente:

**Definição 3.2.1** *Um estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $i$  se, e somente se,  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s) = s$ .*

### 3.3 RELAÇÕES COM OUTROS CONCEITOS DE ESTABILIDADE

Nesta seção, vamos analisar relações entre o conceito  $L_h$  e dois conceitos de estabilidade para o GMCR com preferências probabilísticas. Primeiro, provaremos que no caso particular de conflitos bilaterais, a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$  é equivalente a estabilidade  $\alpha$ -Nash. O Teorema 3.3.1 estabelece tal resultado.

**Teorema 3.3.1** *Seja  $s \in S, i, j \in N, i \neq j$ . O estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - L_1$  estável para o DM  $i$  se, e somente, se  $s$  é  $\alpha$ -Nash estável para o DM  $i$ .*

**Prova:** Primeiro, note que se  $R_i(s) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ , a prova está concluída, pois  $s$  será  $(\alpha, \beta) - L_1$  e  $\alpha$ -Nash estável para o DM  $i$ . Por outro lado, se  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$ , então  $s$  não será  $\alpha$ -Nash para o DM  $i$ . Seja  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ . Então:

$$\begin{aligned} P_i((\alpha, \beta) - G_0(j, s, \overline{M}_1(i, s, s)), s) &\geq P_i((\alpha, \beta) - G_0(j, s, s_1), s) \\ &= P_i(s_1, s) > 1 - \alpha, \end{aligned}$$

em que a primeira desigualdade segue da definição de  $\overline{M}_1(i, s, s)$  e a igualdade segue do fato de que  $(\alpha, \beta) - G_0(j, s, s_1) = s_1$ . Logo,  $(\alpha, \beta) - G_1(i, s, s) \neq s$ . Portanto, o estado  $s$  não é  $(\alpha, \beta) - L_1$  estável para o DM  $i$ . ■

O Teorema 3.3.2 estabelecem que a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$  implica a estabilidade  $(\alpha, \beta)$ -GMR.

**Teorema 3.3.2** *Seja  $s \in S, i, j \in N, i \neq j$ . Se o estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $i$ , então  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -GMR estável para o DM  $i$ .*

**Prova:** Primeiro, note que se  $R_i(s) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ , a prova está concluída, pois  $s$  será  $(\alpha, \beta) - L_2$  e  $(\alpha, \beta)$ -GMR estável para o DM  $i$ . Agora suponha que  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$ .

Se  $s$  é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $i$ . Como  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$  e  $h = 2$  é par, então  $P_i((\alpha, \beta) - G_1(j, s, \overline{M}_2(i, s, s)), s) \leq 1 - \beta$ . Logo, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ ,  $P_i((\alpha, \beta) - G_1(j, s, s_1), s) \leq 1 - \beta$ . Assim, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ ,  $P_i(s_1, s) \leq 1 - \beta$  ou  $P_i((\alpha, \beta) - G_0(i, s, \overline{M}_1(j, s, s_1)), s) = P_i(\overline{M}_1(j, s, s_1), s) \leq 1 - \beta$ . Portanto, como  $s_1 \in R_j(s_1)$  e  $\overline{M}_1(j, s, s_1) \in R_j(s_1)$ , para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$  tal que  $P_i(s_2, s) \leq 1 - \beta$ . Logo,  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -GMR para o DM  $i$ . ■

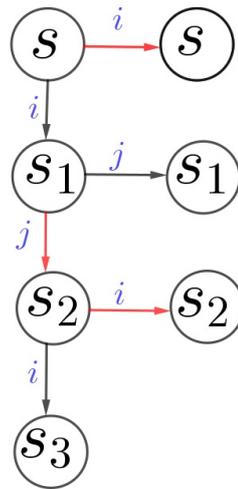
O Exemplo 3.3.3 ilustra o fato da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$  não implicar a estabilidade  $(\alpha, \beta)$ -SMR.

**Exemplo 3.3.3** Considere um conflito hipotético envolvendo dois decisores,  $i$  e  $j$  e quatro estados  $S = \{s, s_1, s_2, s_3\}$ , tal que  $R_i(s) = \{s, s_1\}$ ,  $R_j(s_1) = \{s_1, s_2\}$  e  $R_i(s_2) = \{s_2, s_3\}$ . Considere, ainda, que  $P_i(s_1, s) = 0.9$ ,  $P(s_2, s) = 0.2$ ,  $P_i(s_3, s) = 0.3$ ,  $P_j(s_1, s) = 0.7$ ,  $P_j(s_2, s) = 0.9$  e  $P_j(s_3, s) = 0.8$ . Além disso, considere  $\alpha = 0.7$  e  $\beta = 0.9$ .

Mostraremos que  $s$  é  $(0.7, 0.9) - L_3$ , para o DM  $i$ , mas não é  $(0.7, 0.9)$ -SMR para o DM  $i$ . Primeiro, note que  $R_i^{+0.3}(s) = \{s_1\}$  e para todo  $s^* \in R_j(s_1)$ ,  $P_i(s^*, s) > 1 - \beta = 0.1$ . Logo,  $s$  não é  $(0.7, 0.9)$ -GMR para o DM  $i$  e, conseqüentemente, não é  $(0.7, 0.9)$ -SMR para o DM  $i$ .

Por outro lado,  $s$  é  $(0.7, 0.9) - L_3$  para o DM  $i$ . Como ilustra a Figura 2, temos que  $(0.7, 0.9) - G_1(i, s, s_2) = s_2$ , pois  $P_i(s_3, s) = 0.3 = 1 - \alpha$ . Logo,  $(0.7, 0.9) - G_2(j, s, s_1) = s_2$ , pois  $P_j(s_2, s) > P_j(s_1, s) > \max(1 - \alpha, 1 - \beta) = 0.3$ . Finalmente, como  $P_i(s_2, s) = 0.2 < 1 - \alpha = 0.3$ , segue que  $(0.7, 0.9) - G_3(i, s, s) = s$ . Logo,  $s$  é  $(0.7, 0.9) - L_3$  para o DM  $i$ .

Figura 2 – Análise de estabilidade  $(0.7, 0.9) - L_3$  para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.3.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

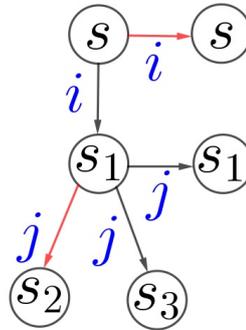
O Exemplo 3.3.4, abaixo, ilustra o fato de a estabilidade  $(\alpha, \beta) - GMR$  não implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$ .

**Exemplo 3.3.4** Considere um conflito hipotético envolvendo dois decisores,  $i$  e  $j$  e quatro estados,  $s, s_1, s_2$  e  $s_3$ . Considere, ainda, que  $P_i(s_1, s) = 0.8$ ,  $P_i(s_2, s) = 0$ ,  $P_i(s_3, s) = 0.8$ ,  $P_j(s_1, s) = 0$ ,  $P_j(s_2, s) = 0.2$  e  $P_j(s_3, s) = 0.7$ .

Note que, considerando  $\alpha = 0.7$  e  $\beta = 0.7$ , ao analisarmos o conflito a partir da noção de estabilidade  $(0.7, 0.7) - GMR$ , Figura 3, temos que o estado  $s$  é  $(0.7, 0.7) - GMR$  estável

para o DM  $i$ , pois para a única  $(1 - \alpha)$  melhoria unilateral para o DM  $i$ , que é o estado  $s_1$ , o estado  $s_2 \in R_j(s_1)$  é tal que  $P_i(s_2, s) = 0 < 1 - \beta$ .

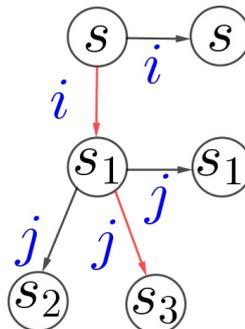
Figura 3 – Análise de estabilidade  $(0.7, 0.7) - GMR$  para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.4.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Já, ao analisarmos a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$ , Figura 4, considerando também,  $\alpha = 0.7$  e  $\beta = 0.7$ , temos que  $(0.7, 0.7) - G_1(j, s, s_1) = s_3$ , uma vez que  $P_j(s_3, s) = 0.7 > 1 - \beta = 1 - \alpha > P_j(s_2, s) = 0.2 > P_j(s_1, s) = 0$ . Assim, temos que  $(0.7, 0.7) - G_2(i, s, s) = s_3$ , já que  $P_i(s_3, s) = 0.8 > 1 - \alpha$ . Ou seja, como  $(0.7, 0.7) - G_2(i, s, s) \neq s$ , temos que o estado  $s$  não é  $(0.7, 0.7) - L_2$  estável, para o DM  $i$ .

Figura 4 – Análise de estabilidade  $(0.7, 0.7) - L_2$  para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.4.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

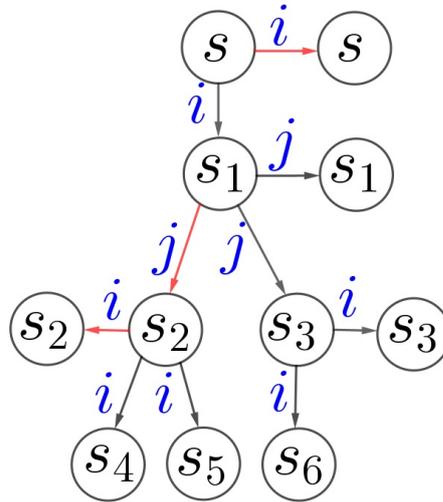
Já o Exemplo 3.3.5, abaixo, ilustra o fato de a estabilidade  $(\alpha, \beta) - SMR$  não implicar a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$ .

**Exemplo 3.3.5** Considere um conflito hipotético envolvendo dois decisores,  $i$  e  $j$  e sete estados,  $s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  e  $s_6$ . Considere, ainda, que  $P_i(s_1, s) = 0.8$ ,  $P_i(s_2, s) = 0$ ,  $P_i(s_3, s) = 1$ ,  $P_i(s_4, s) = 0$ ,  $P_i(s_5, s) = 0$ ,  $P_i(s_6, s) = 0$ ,  $P_j(s_1, s) = 0.6$ ,  $P_j(s_2, s) = 0.2$  e  $P_j(s_3, s) = 1$ .

Note que, considerando  $\alpha = 0.7$  e  $\beta = 0.7$ , ao analisarmos o conflito a partir da noção de estabilidade  $(0.7, 0.7) - SMR$ , Figura 5, temos que o estado  $s$  é  $(0.7, 0.7) - SMR$  estável para

o DM  $i$ , pois a partir da única  $(1-\alpha)$  melhoria unilateral para o DM  $i$  a partir de  $s$  que é o estado  $s_1$ , temos que o estado  $s_2 \in R_j(s_1)$ , é tal que,  $P_i(s_2, s) < 1 - \beta$  e  $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ .

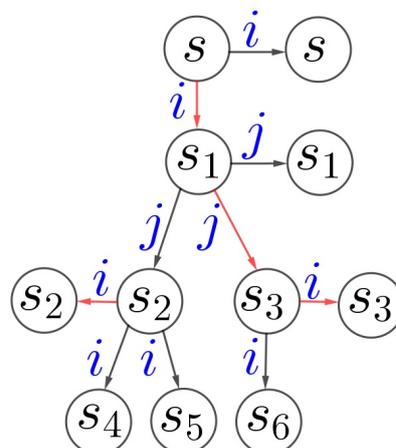
Figura 5 – Análise de estabilidade(0.7,0.7) – SMR para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.5.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção da estabilidade  $(0.7, 0.7) - L_3$ , Figura 6, temos que  $(0.7, 0.7) - G_1(i, s, s_3) = s_3$ , uma vez que  $P_i(s_3, s) = 1 > P_j(s_6, s) = 0$ . Além disso, temos que  $(0.7, 0.7) - G_2(i, s, s_2) = s_2$ , pois  $P_i(s_2, s) = P_i(s_4, s) = P_i(s_5, s) = 0$ . Assim, temos que  $(0.7, 0.7) - G_2(j, s, s_1) = s_3$ , já que  $P_j(s_3, s) = 1 > P_j(s_1, s) = 0.6 > P_j(s_2, s) = 0.2$ . Daí, temos que  $(0.7, 0.7) - G_3(i, s, s) = s_3$ , pois  $P_i(s_3, s) = 1 > P_i(s_1, s) = 0.8 > 1 - \alpha = 0.3$ . Portanto, como  $(0.7, 0.7) - G_3(i, s, s) \neq s$ , temos que o estado  $s$  não é  $(0.7, 0.7) - L_3$  estável, para o DM  $i$ .

Figura 6 – Análise de estabilidade  $(0.7, 0.7) - L_3$  para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.5.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

### 3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo, definimos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  para conflitos bilaterais, a qual considera que cada decisor envolvido no conflito decide se mover buscando atingir um estado que maximize a probabilidade dele preferir o estado atingido ao estado inicial acreditando que seu oponente, também, busca atingir um estado que maximize a probabilidade dele preferir tal estado ao estado inicial.

Além disso, apresentamos alguns resultados referentes as relações de tal estabilidade com outros conceitos já estabelecidos na literatura sobre o GMCR com preferências probabilísticas, como os conceitos das estabilidades  $\alpha$ -NASH (RÊGO; SANTOS, 2015),  $(\alpha, \beta)$ -GMR (RÊGO; SANTOS, 2015) e  $(\alpha, \beta)$ -SMR (RÊGO; SANTOS, 2015). Destacamos que nosso estudo revela a relevância da noção da estabilidade Movimento Limitado  $L_h$  como um dos conceitos fundamentais existentes no GMCR, servindo de inspiração para propostas como as estabilidades  $Maximin_h$  e a estabilidade Metarracional Generalizada ( $MR_h$ ) e para esta nossa proposta, a qual está inserida no GMCR com preferências probabilísticas.

No entanto, enquanto os conceitos clássicos de estabilidade para preferências binárias abordam tanto horizontes fixos quanto variáveis, a consideração de preferências probabilísticas tem sido limitada a horizontes fixos. Portanto, este estudo buscou preencher essa lacuna ao propor o conceito de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , ampliando as noções de estabilidade no GMCR com preferências probabilísticas já estabelecidas.

A definição deste novo conceito e suas relações com estabilidades  $\alpha$ -Nash,  $(\alpha, \beta)$ -GMR e  $(\alpha, \beta)$ -SMR foram discutidas, fornecendo uma base sólida para futuras investigações nesse campo. Ao considerar horizontes variáveis e preferências probabilísticas, este estudo contribui para uma compreensão mais abrangente da estabilidade em situações de conflito, oferecendo conhecimentos valiosos para a tomada de decisão em ambientes complexos e dinâmicos.

No capítulo a seguir apresentamos a estabilidade  $Maximin_h$  com preferências probabilísticas  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  e apresentamos alguns resultados que estabelecem as relações de tal conceito com conceitos estabelecidos na literatura sobre o GMCR e com o conceito da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ .

## 4 ESTABILIDADE $\text{MAXIMIN}_h$ COM PREFERÊNCIAS PROBABILÍSTICAS

### 4.1 INTRODUÇÃO

A falta de conhecimento sobre as preferências dos agentes envolvidos no conflito pode se tornar um obstáculo para a análise do conflito a partir destes conceitos de estabilidade. No trabalho (RÊGO; VIEIRA, 2020b), os autores propuseram para o GMCR original uma noção de estabilidade com horizonte variável, chamada de estabilidade  $\text{Maximin}_h$ , que não requer nenhum conhecimento sobre as preferências dos oponentes. No GMCR original, já foi demonstrado que as estabilidades Nash, GMR e SMR são casos particulares da estabilidade  $\text{Maximin}_h$  para  $h = 1$ ,  $h = 2$  e  $h = 3$ , respectivamente (RÊGO; VIEIRA, 2020b).

Com o objetivo de estender as noções de estabilidade no GMCR com preferências probabilísticas, no que se refere a conceitos de estabilidades com horizontes variáveis, neste capítulo, estamos propondo um novo conceito de estabilidade, a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ . Além disso, estabelecemos suas relações com as estabilidades  $\alpha$ - Nash,  $(\alpha, \beta)$ - GMR e  $(\alpha, \beta)$ - SMR, bem como, a relação entre a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$  e a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  apresentada no Capítulo 3.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.2, apresentamos a definição da estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$  para conflitos bilaterais. Mas, antes de apresentamos a definição para a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ , precisamos definir os estados antecipados  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  e  $(\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1)$ , que representam os estados antecipados pelo DM  $i$  quando o estado para o qual se analisa a estabilidade é  $s$  e DM  $i$  ou DM  $j$ , respectivamente, se move a partir do estado  $s_1$ , considerando um horizonte  $h$ , caso o conflito siga a noção de estabilidade  $(\alpha, \beta)$ - $\text{Maximin}_h$ . Na Seção 4.4, estabelecemos as relações entre os conceitos já citadas.

### 4.2 A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$

Inicialmente, vamos considerar os parâmetros  $\alpha, \beta$  pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ . Daí, definimos os estados  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  e  $(\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1)$  que são, respectivamente, o estado antecipado pelo DM  $i$  com um horizonte  $h$ , utilizando como referência o estado inicial  $s$ , quando o DM  $i$  ou DM  $j$ , respectivamente, se move a partir do estado  $s_1$  de acordo com a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ .

Intuitivamente, quando o estado inicial é  $s$ , assumiremos que qualquer DM se moverá com o objetivo de atingir um estado que tenha a maior probabilidade de ser preferível a  $s$  para si mesmo. Porém, como estamos assumindo que um DM pode, não necessariamente, conhecer as preferências do seu oponente, qualquer DM focal faz seus movimentos acreditando que seu oponente busca atingir um estado que tenha a menor probabilidade de ser preferível a  $s$  para o DM focal.

Contudo, como ocorre com a estabilidade  $\alpha$ -Nash, assumiremos que o DM  $i$  só tem incentivo a mudar de estado se for para um outro que seja um  $(1 - \alpha)$  melhoramento para ele em relação ao estado inicial  $s$ . Além disso, assim como ocorre nas estabilidades  $(\alpha, \beta)$ -GMR e  $(\alpha, \beta)$ -SMR, o DM  $i$  também só tem incentivo a sair do estado atual se o estado antecipado final ao se mover for um  $(1 - \alpha)$  (resp.,  $(1 - \beta)$ ) melhoramento em relação a  $s$  para o DM  $i$  e o horizonte de análise for ímpar (resp., par) indicado que o DM  $i$  (resp.,  $j \neq i$ ) é o último a se mover. Formalmente, temos que  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  é dado por:

$$(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1) = \begin{cases} s_1, & \text{se } R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) - \{s_1\} = \emptyset; \\ s_1, & \text{se } h \text{ é ímpar e } P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) \leq 1 - \alpha; \\ s_1, & \text{se } h \text{ é par e } P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) \leq 1 - \beta; \\ s_1, & \text{se } P_i(s_1, s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) \\ (\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $\overline{M}_h^i(i, s, s_1) \in \operatorname{argmax}\{P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, s_2), s) : s_2 \in (R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) - \{s_1\}\}$ . Ou seja,  $\overline{M}_h^i(i, s, s_1)$  é o estado a partir do qual o estado final antecipado com horizonte  $h - 1$ ,  $(\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1))$ , é o que tem a maior probabilidade de ser preferido a  $s$  pelo DM  $i$ , dentre aqueles que são acessíveis para o DM  $i$  a partir de  $s_1$  e são  $(1 - \alpha)$  melhoramentos para o DM  $i$  em relação ao estado inicial  $s$ .

Por outro lado, quando o oponente do DM  $i$  se move, temos que o DM  $i$ , por não conhecer as preferências do oponente acredita que o mesmo irá se mover ou permanecer no estado atual de modo a minimizar a probabilidade do estado final antecipado ser preferível a  $s$  pelo DM  $i$ . Formalmente, temos que  $(\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1)$  é definido da seguinte maneira:

$$(\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1) = \begin{cases} s_1, & \text{se } P_i(s_1, s) \leq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(i, s, \overline{M}_h^i(j, s, s_1)), s) \\ (\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(i, s, \overline{M}_h^i(j, s, s_1)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $\overline{M}_h^i(j, s, s_1) \in \operatorname{argmim}\{P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(i, s, s_2), s) : s_2 \in R_j(s_1) - \{s_1\}\}$ . Ou seja,  $s_2$  é o estado para o qual o DM  $j$  pode se mover a partir de  $s_1$  que vai minimizar a probabilidade do DM  $i$  preferir  $(\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(i, s, s_2)$  a  $s$ .

Assim, definidos os estados antecipados  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  e  $(\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1)$ , definiremos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$  da seguinte maneira:

**Definição 4.2.1** Um estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$  se, e somente se,  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s) = s$ .

Intuitivamente, um estado  $s$  será  $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$  se a partir do estado  $s$ , considerando um horizonte  $h$  e os valores de limiares  $\alpha$  e  $\beta$ , o DM  $i$  antecipar que o melhor a fazer é ficar em  $s$ .

#### 4.3 RELAÇÃO ENTRE A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$ PARA DIFERENTES HORIZONTES $h$ .

Nesta seção, analisaremos algumas propriedades da estabilidade  $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$  que dependem do horizonte de análise do conflito. O primeiro resultado, abordado no Teorema 4.3.1, é que para horizontes ímpares, a estabilidade independe do valor de  $\beta$ .

**Teorema 4.3.1** Se  $h$  for ímpar e  $s$  for  $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$ , será também  $(\alpha, \beta')$  -  $\operatorname{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$ , para todo  $\beta'$ .

**Prova:** Temos que  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  e  $(\alpha, \beta) - G_{h+1}^i(j, s, s_1)$  não dependem de  $\beta$  se  $h$  for ímpar. Para  $h = 1$ ,  $(\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, s_1)$  só depende de  $\alpha$  e  $(\alpha, \beta) - G_2^i(j, s, s_1)$  só depende de  $(\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, s_1)$ , portanto, não depende de  $\beta$ . Se assumirmos a hipótese indutiva de que o resultado vale para  $h - 2$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_{h-2}^i(i, s, s_1)$  e  $(\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, s_1)$  não dependem de  $\beta$ , se  $h$  for ímpar. Como se  $h$  for ímpar,  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  só depende de  $\alpha$  e de  $(\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, s_1)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1)$  não depende de  $\beta$ . Logo, se  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s) = s$ , temos que  $(\alpha, \beta') - G_h^i(i, s, s) = s$ , para todo  $\beta'$ . ■

**Lema 4.3.2** Seja  $h$  um inteiro positivo.

- i) Se  $h$  é ímpar, então  $P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s) \leq P_i((\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s_1), s)$ .
- ii) Se  $h$  é par, então  $P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s_1), s)$ .

**Prova:** Vamos primeiro provar por indução a parte i do lema. Considere inicialmente que  $h = 1$ . Vamos considerar dois casos: (a)  $G_3^i(i, s, s_1) = s_1$  e (b)  $G_3^i(i, s, s_1) \neq s_1$ . Vamos subdividir o (a) em dois: (a1)  $G_1^i(i, s, s_1) = s_1$  e (a2)  $G_1^i(i, s, s_1) \neq s_1$ . No caso a1,  $P_i(G_3^i(i, s, s_1), s) = P_i(G_1^i(i, s, s_1), s) = P_i(s_1, s)$ . No caso a2, temos que  $G_1^i(i, s, s_1) = G_0^i(j, s, \overline{M}_1^i(i, s, s_1)) = \overline{M}_1^i(i, s, s_1)$ . Como  $G_1^i(i, s, s_1) \neq s_1$ , temos que

$$\begin{aligned} P_i(G_1^i(i, s, s_1), s) &= P_i(G_0^i(j, s, \overline{M}_1^i(i, s, s_1))), s) \\ &> P_i(s_1, s) = P_i(G_3^i(i, s, s_1), s). \end{aligned}$$

No caso b), temos que  $G_3^i(i, s, s_1) = G_2^i(j, s, \overline{M}_3^i(i, s, s_1))$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} P_i(G_3^i(i, s, s_1), s) &= P_i(G_2^i(j, s, \overline{M}_3^i(i, s, s_1)), s) \\ &\leq P_i(\overline{M}_3^i(i, s, s_1), s) \\ &\leq P_i(\overline{M}_1^i(i, s, s_1), s) = P_i(G_1^i(i, s, s_1), s), \end{aligned}$$

em que a primeira desigualdade decorre da definição de  $G_2^i(j, s, \overline{M}_3^i(i, s, s_1))$  e a segunda decorre da definição de  $\overline{M}_1^i(i, s, s_1)$ .

Vamos assumir pelo passo indutivo que  $P_i(G_{h-2}^i(i, s, s_1), s) \geq P_i(G_h^i(i, s, s_1), s)$ . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} P_i(G_{h-2}^i(i, s, s_1), s) &\geq P_i(G_h^i(i, s, s_1), s) \\ \Rightarrow P_i(G_{h-2}^i(i, s, \overline{M}_{h-1}^i(j, s, s_1)), s) &\geq P_i(G_h^i(i, s, \overline{M}_{h+1}^i(j, s, s_1)), s) \\ \Rightarrow P_i(G_{h-1}^i(j, s, s_1), s) &\geq P_i(G_{h+1}^i(j, s, s_1), s) \\ \Rightarrow P_i(G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) &\geq P_i(G_{h+1}^i(j, s, \overline{M}_{h+2}^i(i, s, s_1)), s) \\ \Rightarrow P_i(G_h^i(i, s, s_1), s) &\geq P_i(G_{h+2}^i(i, s, s_1), s), \end{aligned}$$

em que a primeira implicação é decorrência das definições de  $\overline{M}_{h-1}^i(j, s, s_1)$  e  $\overline{M}_{h+1}^i(j, s, s_1)$ , a segunda das definições  $G_{h-1}^i(j, s, s_1)$  e  $G_{h+1}^i(j, s, s_1)$ , a terceira das definições de  $\overline{M}_h^i(i, s, s_1)$  e  $\overline{M}_{h+2}^i(i, s, s_1)$  e a última das definições de  $G_h^i(i, s, s_1)$  e  $G_{h+2}^i(i, s, s_1)$ .

Vamos agora provar também por indução a parte ii do lema. Considere inicialmente que  $h = 0$ . Vamos considerar dois casos: (a)  $G_2^i(i, s, s_1) = s_1$  e (b)  $G_2^i(i, s, s_1) \neq s_1$ . No caso a,  $P_i(G_2^i(i, s, s_1), s) = P_i(G_0^i(i, s, s_1), s) = P_i(s_1, s)$ .

No caso b), temos que  $G_2^i(i, s, s_1) = G_1^i(j, s, \overline{M}_2^i(i, s, s_1))$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} P_i(G_2^i(i, s, s_1), s) &= P_i(G_1^i(j, s, \overline{M}_2^i(i, s, s_1)), s) \\ &\geq P_i(s_1, s) = P_i(G_0^i(i, s, s_1), s), \end{aligned}$$

em que a desigualdade decorre da definição de  $G_2^i(i, s, s_1)$ .

Vamos assumir pelo passo indutivo que  $P_i(G_{h-2}^i(i, s, s_1), s) \leq P_i(G_h^i(i, s, s_1), s)$ . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} P_i(G_{h-2}^i(i, s, s_1), s) &\leq P_i(G_h^i(i, s, s_1), s) \\ \Rightarrow P_i(G_{h-2}^i(i, s, \overline{M}_{h-1}^i(j, s, s_1)), s) &\leq P_i(G_h^i(i, s, \overline{M}_{h+1}^i(j, s, s_1)), s) \\ \Rightarrow P_i(G_{h-1}^i(j, s, s_1), s) &\leq P_i(G_{h+1}^i(j, s, s_1), s) \\ \Rightarrow P_i(G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) &\leq P_i(G_{h+1}^i(j, s, \overline{M}_{h+2}^i(i, s, s_1)), s) \\ \Rightarrow P_i(G_h^i(i, s, s_1), s) &\leq P_i(G_{h+2}^i(i, s, s_1), s), \end{aligned}$$

em que a primeira implicação é decorrência das definições de  $\overline{M}_{h-1}^i(j, s, s_1)$  e  $\overline{M}_{h+1}^i(j, s, s_1)$ , a segunda das definições  $G_{h-1}^i(j, s, s_1)$  e  $G_{h+1}^i(j, s, s_1)$ , a terceira das definições de  $\overline{M}_h^i(i, s, s_1)$  e  $\overline{M}_{h+2}^i(i, s, s_1)$  e a última das definições de  $G_h^i(i, s, s_1)$  e  $G_{h+2}^i(i, s, s_1)$ . ■

O Teorema 4.3.3 estabelece que para horizontes ímpares quanto menor o horizonte mais difícil é de o estado ser estável, enquanto para horizontes pares, quanto maior o horizonte mais difícil é de o estado ser estável.

**Teorema 4.3.3** *Seja  $h$  um inteiro positivo.*

- i) Se  $h$  for ímpar e  $s$  for  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$ , então  $s$  será também  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_{h+2}$  estável para o DM  $i$ .*
- ii) Se  $h$  for par e  $s$  for  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_{h+2}$  estável para o DM  $i$ , então  $s$  será também  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$ .*

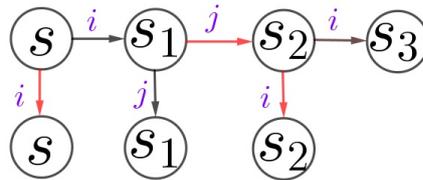
**Prova:** Vamos considerar primeiro o caso  $h$  ímpar. Assuma que  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -Maximin $_h$  para o DM  $i$ . Como  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s) = s$ , pela parte i do Lema 4.3.2, temos que  $P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s), s)$ , segue que  $0 = P_i(s, s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s), s)$ . Logo,  $P_i((\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s), s) \leq 1 - \alpha$ , o que implica que  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -Maximin $_{h+2}$  para o DM  $i$ .

Vamos considerar agora o caso  $h$  par. Assuma que  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ - $\text{Maximin}_{h+2}$  para o DM  $i$ . Como  $(\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s) = s$ , pela parte ii do Lema 4.3.2, temos que  $P_i((\alpha, \beta) - G_{h+2}^i(i, s, s), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s), s)$ , segue que  $0 = P_i(s, s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s), s)$ . Logo,  $P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s), s) \leq 1 - \alpha$ , o que implica que  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ - $\text{Maximin}_h$  para o DM  $i$ . ■

Para ilustrar que a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_3$  não implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_4$ . Apresentaremos como contra-exemplo o seguinte conflito hipotético.

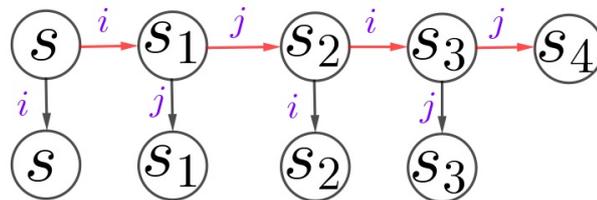
**Exemplo 4.3.4** Considere um conflito hipotético envolvendo dois decisores,  $i$  e  $j$  e cinco estados  $S = \{s, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ , tais que  $R_i(s) = \{s, s_1\}$ ,  $R_j(s_1) = \{s_1, s_2\}$ ,  $R_i(s_2) = \{s_2, s_3\}$  e  $R_j(s_3) = \{s_3, s_4\}$ . Além disso, suponha que  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,8$ ,  $P_i(s_1, s) = 0,6$ ,  $P_i(s_2, s) = 0,3$ ,  $P_i(s_3, s) = 0,4$  e  $P_i(s_4, s) = 0,35$ .

Figura 7 – Análise de estabilidade  $(0,5,0,8) - \text{Maximin}_3$  para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 4.3.4.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 8 – Análise de estabilidade  $(0,5,0,8) - \text{Maximin}_4$  para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 4.3.4.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Note que neste contra-exemplo, temos que  $s$  é  $(0,5,0,8) - \text{Maximin}_3$  estável para o DM  $i$ , pois caso o conflito atinja o estado  $s_2$  o DM  $i$  decidirá ficar no estado  $s_2$ , já que  $P_i(s_2, s) = 0,3 < P_i(s_3, s) = 0,4$ , mas  $P_i(s_3, s) < 1 - \alpha = 0,5$ , logo  $(0,5,0,8) - G_1^i(i, s, s_2) = s_2$ . Assim, se o conflito atingir o estado  $s_1$ , então o DM  $j$  decidirá levar o conflito para o estado  $s_2$ , pois  $P_i(s_1, s) = 0,6 > P_i(s_2, s) = 0,3$ , portanto  $(0,5,0,8) - G_2^i(j, s, s_1) = s_2$ . Dessa maneira, no estado  $s$  o DM  $i$  decide ficar e encerrar o conflito, pois como  $P_i(s_2, s) = 0,3 > P_i(s, s) = 0$

e  $P_i(s_2, s) < 1 - \alpha = 0,5$  temos que  $(0,5, 0,8) - G_3^i(i, s, s) = s$ , e assim o estado  $s$  é  $(0,5, 0,8) - Maximin_3$  estável para o DM  $i$ .

Mas, o estado  $s$  não é  $(0,5, 0,8) - Maximin_4$  estável para o DM  $i$ , pois como  $P_i(s_4, s) = 0,35 < P_i(s_3, s) = 0,4$ , caso o conflito chegue ao estado  $s_3$  o DM  $j$  leva o conflito para o estado  $s_4$ , portanto  $(0,5, 0,8) - G_1^i(j, s, s_3) = s_4$ . Logo, se o conflito atingir o estado  $s_2$  o DM  $i$  decidirá mover o conflito para o estado  $s_3$ , pois  $P_i(s_4, s) = 0,35 > P_i(s_2, s) = 0,3$  e  $P_i(s_4, s) = 0,35 > 1 - \beta = 0,2$ , assim  $(0,5, 0,8) - G_2^i(i, s, s_2) = s_4$ . Daí, caso o conflito atinja o estado  $s_1$  o DM  $j$  decidirá mover o o conflito para o estado  $s_2$ , já que  $P_i(s_4, s) = 0,35 < P_i(s_1, s) = 0,6$ , e assim,  $(0,5, 0,8) - G_3^i(j, s, s_1) = s_4$ . Portanto, no estado  $s$  o DM  $i$  decide levar o conflito para o estado  $s_1$ , pois  $P_i(s_4, s) = 0,35 > P_i(s, s) = 0$  e  $P_i(s_4, s) = 0,35 > 1 - \beta = 0,2$ , e assim  $(0,5, 0,8) - G_4^i(i, s, s) = s_4$ . Logo, o estado  $s$  não é  $(0,5, 0,8) - Maximin_4$  estável para o DM  $i$ .

#### 4.4 RELAÇÕES COM OUTROS CONCEITOS DE ESTABILIDADE

Nesta seção, vamos analisar relações entre o conceito  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  e três conceitos de estabilidade para o GMCR com preferências probabilísticas, bem como com a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , apresentada no Capítulo 3. Mostraremos a seguir, que no caso particular em que há apenas dois DMs envolvidos no conflito, a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  coincide com a estabilidade  $\alpha$ -Nash, a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  coincide com a estabilidade  $(\alpha, \beta) - GMR$ , a estabilidade  $(\alpha, \beta) - SMR$  implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  e a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  implica a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ . Os teoremas 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 e 4.4.6 estabelecem tais resultados.

**Teorema 4.4.1** *Seja  $s \in S, i, j \in N, i \neq j$ . O estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $i$  se, e somente, se  $s$  é  $\alpha$ -Nash estável para o DM  $i$ .*

**Prova:** Primeiro, note que se  $R_i(s) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ , a prova está concluída, pois  $s$  será  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  e  $\alpha$ -Nash estável para o DM  $i$ . Por outro lado, se  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$ , então  $s$  não será  $\alpha$ -Nash para o DM  $i$ . Além disso, existe  $s_1 \in R_i(s)$  tal que  $P_i(s_1, s) > 1 - \alpha$ . Como  $(\alpha, \beta) - G_0^i(j, s, \overline{M}_1^i(i, s, s)) = \overline{M}_1^i(i, s, s)$  e  $h = 1$  é ímpar, temos que  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(j, s, \overline{M}_1^i(i, s, s)), s) > 1 - \alpha$ . Logo,  $(\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, s) \neq s$ . Portanto, o estado  $s$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $i$ . ■

**Teorema 4.4.2** *Sejam  $s \in S, i, j \in N, i \neq j$ . O estado  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -Metarracional estável, para o DM  $i$  se, e somente se,  $s$  é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  estável para o DM  $i$ .*

**Prova:** Primeiro, note que se  $R_i(s) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ , a prova está concluída, pois  $s$  será  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  e  $(\alpha, \beta)$ -GMR estável para o DM  $i$ . Agora suponha que  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$ .

Se  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -GMR estável para o DM  $i$ . Então, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , temos que existe  $s_2 \in R_j(s_1)$  tal que  $P_i(s_2, s) \leq 1 - \beta$ . Logo, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$  tal que  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, s_2), s) \leq 1 - \beta$ . Portanto,  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, \overline{M}_1^i(j, s, s_1)), s) \leq 1 - \beta$ . Como  $(\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, s_1) = (\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, \overline{M}_1^i(j, s, s_1))$ , para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , temos que  $P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, s_1), s) \leq 1 - \beta$ , para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ . Então, segue que  $P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, \overline{M}_2^i(i, s, s)), s) \leq 1 - \beta$ . Como  $h = 2$  é par, segue que  $(\alpha, \beta) - G_2^i(i, s, s) = s$ , ou seja,  $s$  é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  estável para o DM  $i$ .

Se  $s$  é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  estável para o DM  $i$ . Como  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$  e  $h = 2$  é par, então  $P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, \overline{M}_2^i(i, s, s)), s) \leq 1 - \beta$ . Logo, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ ,  $P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, s_1), s) \leq 1 - \beta$ . Então, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ ,  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, \overline{M}_1^i(j, s, s_1)), s) \leq 1 - \beta$ . Portanto, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$  tal que  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, s_2), s) = P_i(s_2, s) \leq 1 - \beta$ . Logo,  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -GMR para o DM  $i$ . ■

**Teorema 4.4.3** *Sejam  $s \in S, i, j \in N, i \neq j$ . Se o estado  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -Simetricamente Metarracional estável, para o DM  $i$ , então  $s$  é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_3$  estável para o DM  $i$ .*

**Prova:** Primeiro, note que se  $R_i(s) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ , a prova está concluída, pois  $s$  será  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_3$  e  $(\alpha, \beta)$ -SMR estável para o DM  $i$ . Agora suponha que  $R_i^{+(1-\alpha)}(s) \neq \emptyset$ .

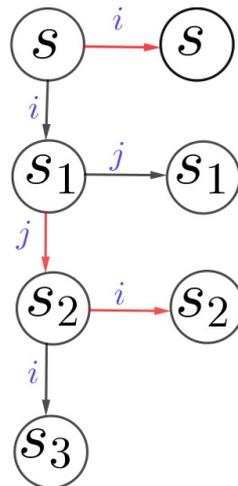
Se  $s$  é  $(\alpha, \beta)$ -SMR estável para o DM  $i$ . Então, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{(1-\beta)}(s))^c$  tal que  $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ . Isto é, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$  tal que  $P_i(s_2, s) \leq 1 - \beta$ , e além disso, para todo  $s_3 \in R_i(s_2)$  temos que  $P_i(s_3, s) \leq 1 - \alpha$ . Logo, para todo  $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ , existe  $s_2 \in R_j(s_1)$  tal que  $P_i(s_2, s) \leq 1 - \beta$  e para todo  $s_3 \in R_i(s_2)$  temos  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(j, s, s_3), s) = P_i(s_3, s) \leq 1 - \alpha$ . Mas assim,  $P_i((\alpha, \beta) - G_0^i(j, s, \overline{M}_1^i(i, s, s_2)), s) \leq 1 - \alpha$ . Logo,  $(\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, s_2) = s_2$ . Portanto, como  $s_2 \in R_i(s_2)$ , temos que  $P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, s_2), s) = P_i(s_2, s) \leq 1 - \alpha$ . Daí, segue que  $P_i((\alpha, \beta) - G_2^i(j, s, s_1), s) \leq P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, \overline{M}_2^i(j, s, s_1)), s) \leq 1 - \alpha$ , para todo

$s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ . Logo,  $P_i((\alpha, \beta) - G_2^i(j, s, \overline{M}_3^i(j, s, s))) \leq 1 - \alpha$ . Como  $h = 3$  é ímpar, segue que  $(\alpha, \beta) - G_3^i(i, s, s) = s$ , ou seja  $s$  é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_3$  estável para o DM  $i$ . ■

O Exemplo 4.4.4 mostra que a volta do Teorema 4.4.3 não é válida, ou seja, que um estado pode ser  $(\alpha, \beta)$ -Maximin<sub>3</sub> estável para um DM sem ser  $(\alpha, \beta)$ -SMR estável para o mesmo.

**Exemplo 4.4.4** Considere o conflito apresentado no Exemplo 3.3.3. A Figura 9 ilustra a análise da estabilidade  $(0.7, 0.9)$ -Maximin<sub>3</sub> do estado  $s$  para o DM  $i$ . Primeiro, note que  $(0.7, 0.9) - G_1^i(i, s, s_2) = s_2$ , uma vez que  $P_i(s_3, s) = 0.3 = 1 - \alpha$ . Logo,  $(0.7, 0.9) - G_2^i(j, s, s_1) = s_2$ , pois  $P_i(s_2, s) < P_i(s_1, s)$ . E finalmente, como  $P_i(s_2, s) = 0.2 < 1 - \alpha$ , segue que  $(0.7, 0.9) - G_3^i(i, s, s) = s$  e, conseqüentemente,  $s$  é  $(0.7, 0.9)$ -Maximin<sub>3</sub> estável para o DM  $i$ . Mas, como visto no Capítulo 3, o estado  $s$  não é  $(0.7, 0.9)$ -SMR para o DM  $i$ .

Figura 9 – Análise de estabilidade  $(0.7, 0.9)$ -Maximin<sub>3</sub> para o DM  $i$ , a partir de  $s$ , no conflito descrito no Exemplo 3.3.3.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

O Teorema 4.4.6 estabelece a relação entre as estabilidades  $(\alpha, \beta) - L_h$  e  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$ , para prová-lo, apresentamos o Lema 4.4.5.

**Lema 4.4.5** Seja  $s \in S$  e  $h$  qualquer número inteiro não negativo.

$$P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$$

e

$$P_i((\alpha, \beta) - G_h(j, s, s_1), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1), s).$$

**Prova:** Note que  $(\alpha, \beta) - G_1(i, s, s_1) = (\alpha, \beta) - G_1^i(i, s, s_1)$ , pois as definições são idênticas uma vez que  $(\alpha, \beta) - G_0(i, s, s_2) = (\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, s_2) = s_2$  para todo  $s_2 \in S$ .

Além disso,  $(\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, s_1)$  é o estado antecipado pelo DM  $i$ , com horizonte 1, que minimiza a probabilidade de o DM  $i$  preferir  $(\alpha, \beta) - G_0^i(i, s, s_2) = s_2$  a  $s$ , para todo  $s_2 \in \{s_1\} \cup R_j(s_1)$ . Por outro lado, temos que  $(\alpha, \beta) - G_1(j, s, s_1) \in \{s_1\} \cup R_j(s_1)$ . Logo:

$$P_i((\alpha, \beta) - G_1^i(j, s, s_1), s) \leq P_i((\alpha, \beta) - G_1(j, s, s_1), s).$$

Agora suponha, como hipótese de indução, que

$$P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(i, s, s_1), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(i, s, s_1), s)$$

e

$$P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, s_1), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, s_1), s).$$

Primeiro, considere o caso em que  $R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) - \{s_1\} = \emptyset$ , então  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1) = (\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1) = s_1$ , o que implica que  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) = P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$ .

Agora, observe que

$$\begin{aligned} P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) &\geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) \\ &\geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s), \end{aligned}$$

em que a segunda desigualdade decorre da hipótese indutiva e a primeira vem do fato de que  $\overline{M}_h(i, s, s_1) \in \operatorname{argmax}\{P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, s_2), s) : s_2 \in (R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) - \{s_1\}\}$  e  $\overline{M}_h^i(i, s, s_1) \in (R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) - \{s_1\}$ .

Então, considerando que  $h$  é ímpar, podem acontecer os seguintes casos:

- (i)  $1 - \alpha \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s)$ ;
- (ii)  $P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) > 1 - \alpha \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s)$   
ou
- (iii)  $P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) > 1 - \alpha$ .

No caso (i), temos que  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1) = (\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1) = s_1$ , o que implica que  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) = P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$ .

No caso (ii), temos que  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1) = s_1$  e  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) \geq P_i(s_1, s) = P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$ .

No caso (iii), temos que considerar três subcasos:

$$(a) P_i(s_1, s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s);$$

$$(b) P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) > P_i(s_1, s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s)$$

ou

$$(c) P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) > P_i(s_1, s).$$

No caso (iiia), temos que  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1) = (\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1) = s_1$ , o que implica que  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) = P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$ .

No caso (iiib), temos que  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1) = s_1$  e  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) = P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) > P_i(s_1, s) = P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$ .

No caso (iiic):

$$\begin{aligned} P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) &= P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h(i, s, s_1)), s) \\ &\geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) \\ &\geq P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}^i(j, s, \overline{M}_h^i(i, s, s_1)), s) \\ &= P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s), \end{aligned}$$

em que a segunda desigualdade decorre da hipótese indutiva e a primeira vem do fato de que  $\overline{M}_h(i, s, s_1) \in \operatorname{argmax}\{P_i((\alpha, \beta) - G_{h-1}(j, s, s_2), s) : s_2 \in (R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) - \{s_1\}\}$  e  $\overline{M}_h^i(i, s, s_1) \in (R_i(s_1) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) - \{s_1\}$ .

Ademais, a análise quando o  $h$  é par é idêntica, apenas alterando as classificações dos casos (i), (ii) e (iii) em função do valor de  $1 - \beta$  ao invés do valor  $1 - \alpha$ .

Por fim, a outra desigualdade decorre das seguintes que são decorrentes das definições de  $(\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1)$  e  $(\alpha, \beta) - G_h(j, s, s_1)$ :

$$P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(j, s, s_1), s) \leq P_i(s_1, s) \leq P_i((\alpha, \beta) - G_h(j, s, s_1), s). \blacksquare$$

**Teorema 4.4.6** *Seja  $s \in S$ . Temos que se  $s$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $i$ , então  $s$  é  $(\alpha, \beta) - \operatorname{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$ .*

**Prova:** Pelo Lema 4.4.5, temos que  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s_1), s) \geq P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s)$ . Logo, como o estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $i$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_h(i, s, s) = s$ , daí  $P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s), s) = P_i(s, s) = 0$ , ou seja

$$P_i((\alpha, \beta) - G_h(i, s, s), s) = 0 \geq P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s), s)$$

Segue que  $P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s) = 0 \leq 1 - \alpha$ , se  $h$  é ímpar, e  $P_i((\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s_1), s) = 0 \leq 1 - \beta$ , se  $h$  é par, e portanto,  $(\alpha, \beta) - G_h^i(i, s, s) = s$ , isto é, o estado  $s$  é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_h$  estável para o DM  $i$ . ■

#### 4.5 CONCLUSÃO

Neste capítulo, buscamos evidenciar a complexidade dos conceitos de estabilidade no contexto do GMCR, apontando para a variedade de abordagens que vão desde horizontes fixos até variáveis. No entanto, a falta de conhecimento das preferências dos agentes envolvidos pode dificultar a análise desses conceitos. A fim de lidar com essa lacuna e estender as noções de estabilidade para o GMCR com preferências probabilísticas, este capítulo apresenta uma nova contribuição: o conceito de estabilidade  $(\alpha, \beta)$ - $\text{Maximin}_h$ .

Além de propor o novo conceito, apresentamos alguns resultados referentes as relações de tal estabilidade com os conceitos  $(\alpha, \beta)$ -Nash,  $(\alpha, \beta)$ -GMR,  $(\alpha, \beta)$ -SMR e  $(\alpha, \beta)$ - $L_h$ . Estas análises nos permitem ter uma melhor compreensão sobre os conceitos de estabilidade para o GMCR com preferências probabilísticas.

Salientamos a importância crucial atribuída ao conceito de estabilidade  $(\alpha, \beta)$ - $\text{Maximin}_h$ , o qual se apresenta como um conceito de estabilidade bem mais flexível do que a estabilidade  $(\alpha, \beta)$ - $L_h$ , visto que esta última depende do conhecimento sobre as preferências de todos decisores envolvidos no conflito. Ao estabelecer uma sólida fundamentação, este estudo abre caminho para investigações subsequentes neste domínio. Ao abordar horizontes variáveis e preferências probabilísticas, ele enriquece nossa compreensão da estabilidade em contextos de conflito, fornecendo *insights* cruciais para a tomada de decisões em ambientes complexos e em constante mudança.

Destacamos a importância de nossa própria contribuição, inserida no contexto do GMCR com preferências probabilísticas, expandindo significativamente o escopo teórico e prático dessa área de estudo. Nosso intuito é aprofundar a compreensão dos diversos aspectos da estabilidade dentro desse contexto específico.

No Capítulo 5, apresentamos uma aplicação dos conceitos propostos nesta dissertação a um conflito para ilustrar a utilidade dos mesmos.

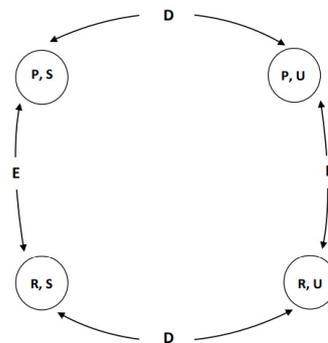
## 5 APLICAÇÃO

Neste capítulo fazemos a aplicação dos conceitos aqui propostos ao analisarmos, a partir delas uma versão modificada do conflito hipotético, proposto originalmente por (HIPEL, 2001), a qual é apresentada em (SANTOS, 2014), e que ilustra a utilidade do modelo GMCR com preferências probabilísticas precisas.

### 5.1 O CONFLITO DE VALORES

Neste conflito há dois decisores (Ambientalistas, denotados por  $E$  e Desenvolvedores, denotados por  $D$ ). Os ambientalistas têm as opções de serem proativos  $P$  em promover responsabilidade ambiental ou serem reativos  $R$ , quando escolherem não promover responsabilidade ambiental. Já os desenvolvedores podem escolher entre serem sustentáveis  $S$  ou não, o que é representado por  $U$ . Em (SANTOS, 2014) ainda é destacado que, como há apenas duas opções para cada DM, existem  $2^2 = 4$  possíveis combinações:  $(P, S)$ ,  $(P, U)$ ,  $(R, U)$  e  $(R, S)$ , e cada uma dessas combinações representam quais são os possíveis estados deste conflito. Além disso, os conjuntos de acessibilidades, dos DMs  $E$  e  $D$ , são dados respectivamente, por  $R_E((P, S)) = \{(P, S), (R, S)\}$ ,  $R_E((R, S)) = \{(R, S), (P, S)\}$ ,  $R_E((P, U)) = \{(P, U), (R, U)\}$ ,  $R_E((R, U)) = \{(R, U), (P, U)\}$  e  $R_D((P, S)) = \{(P, S), (P, U)\}$ ,  $R_D((R, S)) = \{(R, S), (R, U)\}$ ,  $R_D((P, U)) = \{(P, U), (P, S)\}$ ,  $R_D((R, U)) = \{(R, U), (R, S)\}$ . Este conflito é conhecido na literatura como Conflito de Valores.

Figura 10 – Modelo de grafo para o Conflito de Valores.



Fonte: (SANTOS, 2014).

No Conflito de Valores original, assume-se que preferências são determinísticas e que as preferências de  $E$  são tais que  $(P, S) \succ_E (R, S) \succ_E (P, U) \succ_E (R, U)$  e considera que

existem dois tipos de DM  $D$ : um que dá baixa prioridade ao ambientalismo,  $D_U$  e outro  $D_S$  que é mais responsável que o primeiro. As preferências de  $D_U$  são  $(R, U) \succ_{D_U} (P, U) \succ_{D_U} (R, S) \succ_{D_U} (P, S)$ , já as de  $D_S$  são dadas por  $(R, S) \succ_{D_S} (P, S) \succ_{D_S} (R, U) \succ_{D_S} (P, U)$ . Porém, (SANTOS, 2014) modifica o Conflito de Valores original considerando que se um DM  $i$  prefere deterministicamente um estado  $s_p$  a outro  $s_q$ , então teremos  $P_i(s_p, s_q) = 1$ , caso contrário, nós temos que  $P_i(s_p, s_q) = 0$ . Daí, (SANTOS, 2014) apresenta a Tabela 1, na qual estão expostas as preferências probabilísticas com as quais o decisor  $E$  prefere um estado a outro, com cada célula expressando a probabilidade que DM  $E$  prefere o estado da linha ao estado da coluna.

Tabela 1 – Preferências Probabilísticas Precisas para DM  $E$  no Conflito de Valores

E	$(P, S)$	$(R, S)$	$(P, U)$	$(R, U)$
$(P, S)$	0.0	1.0	1.0	1.0
$(R, S)$	0.0	0.0	1.0	1.0
$(P, U)$	0.0	0.0	0.0	1.0
$(R, U)$	0.0	0.0	0.0	0.0

Fonte: (SANTOS, 2014)

Por outro lado (SANTOS, 2014), considera que o DM  $D$  pode pertencer a diferentes tipos, cada um com suas próprias preferências. Eles supõem, também, que há uma distribuição de probabilidade associada aos tipos que representam o DM  $D$  no conflito. Nesse contexto, podemos dizer que o DM  $D$  possui uma preferência probabilística pelo estado  $s_p$  em relação ao estado  $s_q$ , determinada pela soma das probabilidades dos tipos de  $D$  que preferem  $s_p$  a  $s_q$ . Para ilustrar, eles consideram uma distribuição de probabilidade em que  $P(D = D_S) = 0.3$  e  $P(D = D_U) = 0.7$ . As preferências probabilísticas do DM  $D$  podem ser expressas na Tabela 2, na qual cada célula representa a probabilidade com que  $D$  prefere o estado da linha ao estado da coluna. Por exemplo,  $P_D((R, S), (P, S)) = 0.3 + 0.7 = 1$ , indicando que ambos os tipos possíveis de  $D$  preferem  $(R, S)$  a  $(P, S)$ . Já  $P_D((P, U), (P, S)) = 0.7$ , refletindo a probabilidade de o tipo de  $D$  que prefere  $(P, U)$  a  $(P, S)$  ser 0.7, ou seja, a probabilidade de o tipo ser  $D_U$  é 0.7.

Tabela 2 – Preferências Probabilísticas Precisas para DM  $D$  no Conflito de Valores

D	$(P, S)$	$(R, S)$	$(P, U)$	$(R, U)$
$(P, S)$	0.0	0.0	0.3	0.3
$(R, S)$	1.0	0.0	0.3	0.3
$(P, U)$	0.7	0.7	0.0	0.0
$(R, U)$	0.7	0.7	1.0	0.0

Fonte: (SANTOS, 2014)

## 5.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE A PARTIR DOS CONCEITOS $(\alpha, \beta) - L_h$ E $(\alpha, \beta) - Maximin_h$

Primeiro, observe que se  $\alpha = 0$ , então  $\varphi_i^{+(1-\alpha)} = \emptyset$ . Logo, qualquer estado satisfaz  $(0, \beta) - L_h$  estabilidade para qualquer DM e qualquer  $h \geq 1$ . Similarmente, se  $h$  for par e  $\beta = 0$ , também temos que qualquer estado satisfaz  $(\alpha, 0) - L_h$  estabilidade para qualquer DM e qualquer  $h$  par, pois qualquer preferência probabilística é menor ou igual que  $1 - \beta = 1$ .

Assim como no caso da  $(\alpha, \beta) - L_h$  estabilidade, temos que se  $\alpha = 0$ , então todo estado é  $(0, \beta) - Maximin_h$  estável para todo DM e todo horizonte  $h$ . Além disso, se o horizonte for par, todo estado é  $(\alpha, 0) - Maximin_h$  estável para todo DM.

As Tabelas 3 e 4 apresentam uma síntese dos resultados obtidos na análise do Conflito de Valores, a partir das noções das estabilidades  $(\alpha, \beta) - L_h$  e  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  para os DMs  $E$  e  $D$ , considerando os horizontes 1, 2, 3 e 4. Essa análise é conduzida em diferentes estados do conflito, representados pelas combinações de estratégias dos DMs, e em distintos horizontes. Os resultados são categorizados de acordo com a estabilidade para cada DM envolvido, indicando as condições necessárias para alcançar um equilíbrio. Detalhes sobre os cálculos dessas estabilidades podem ser encontrados no Apêndice A.

Tabela 3 – Estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  para diferentes valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ 

<b>Estado</b>	<b>Horizonte</b>	<b>Estabilidade Para o DM <math>E</math></b>	<b>Estabilidade Para o DM <math>D</math></b>	<b>Equilíbrio</b>
$(P, S)$	$h = 1$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
$(P, S)$	$h = 2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$
$(P, S)$	$h = 3$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
$(P, S)$	$h = 4$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$
$(P, U)$	$h = 1$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$
$(P, U)$	$h = 2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$
$(P, U)$	$h = 3$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$
$(P, U)$	$h = 4$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$
$(R, S)$	$h = 1$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, S)$	$h = 2$	$\alpha > 0.3$ ou $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou ( $\alpha > 0.3$ e $\beta \leq 0.3$ )
$(R, S)$	$h = 3$	( $\alpha > 0.3$ e $\beta > 0.3$ ) ou $\alpha = 0$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, S)$	$h = 4$	$\alpha > 0.3$ ou $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou ( $\alpha > 0.3$ e $\beta \leq 0.3$ )
$(R, U)$	$h = 1$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, U)$	$h = 2$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$
$(R, U)$	$h = 3$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, U)$	$h = 4$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Tabela 4 – Estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$  para diferentes valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ 

Estado	Horizonte	Estabilidade Para o DM $E$	Estabilidade Para o DM $D$	Equilíbrio
$(P, S)$	$h = 1$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
$(P, S)$	$h = 2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$
$(P, S)$	$h = 3$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
$(P, S)$	$h = 4$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$
$(P, U)$	$h = 1$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$
$(P, U)$	$h = 2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$
$(P, U)$	$h = 3$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$
$(P, U)$	$h = 4$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$
$(R, S)$	$h = 1$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, S)$	$h = 2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$
$(R, S)$	$h = 3$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
$(R, S)$	$h = 4$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$ ou $\beta \leq 0.3$
$(R, U)$	$h = 1$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, U)$	$h = 2$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$
$(R, U)$	$h = 3$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
$(R, U)$	$h = 4$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$	$\alpha \leq 0.7$ ou $\beta \leq 0.7$	$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Considerando todos os horizontes analisados, o estado  $(P, U)$  é aquele que satisfaz a noção de ser um  $(\alpha, \beta) - L_h$  equilíbrio para um maior conjunto de valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Este fato revela, portanto, que o equilíbrio deste estado é mais robusto a variações nestes parâmetros. A mesma conclusão pode ser obtida em relação a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ . Por fim, pode-se observar nos resultados que nos únicos resultados que não coincidem nas duas tabelas, que são para a análise do estado  $(R, S)$  com horizontes 2, 3 e 4, o conjunto de valores dos parâmetros que satisfaz a estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$  é um subconjunto dos que satisfazem a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , conforme já havia sido demonstrado no Teorema 4.4.6.

### 5.3 CONCLUSÃO

No contexto do Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos, a compreensão das dinâmicas subjacentes aos diferentes estados de conflito é fundamental para o desenvolvimento de estratégias eficazes de mitigação e negociação. Neste capítulo apresentamos um estudo detalhado de um conflito específico, destacando as interações entre os DMs e os parâmetros

do modelo que influenciam sua estabilidade. A análise desse conflito sob o prisma dos novos conceitos de estabilidade que propusemos nessa Dissertação revela nuances importantes sobre as condições necessárias para alcançar equilíbrio, buscando destacar aspectos valiosos para a compreensão e gestão eficaz de conflitos.

Ao examinar os resultados desta aplicação, fica exposto que a estabilidade do conflito varia significativamente de acordo com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e o horizonte considerado. Por exemplo, em estados do conflito como  $(R, U)$ , a estabilidade para o DM  $E$  é alcançada com diferentes valores de  $\alpha$  em cada horizonte, salientando a sensibilidade do modelo à variação desses parâmetros. Além disso, em estados como  $(R, S)$ , a estabilidade para o DM  $D$  é possível apenas dentro de um intervalo restrito de valores de  $\alpha$ , sugerindo uma relação complexa entre os parâmetros do modelo e a capacidade de alcançar equilíbrio.

Essa análise revela a importância de uma compreensão detalhada dos parâmetros do modelo e de como eles influenciam a estabilidade do conflito. Esses resultados fornecem *insights* valiosos para a formulação de estratégias de resolução de conflitos, permitindo aos DMs adaptar suas abordagens de acordo com as condições específicas do contexto no qual está inserido o conflito. No entanto, ressaltamos a necessidade de pesquisas adicionais para explorar mais profundamente as interações entre os parâmetros escolhidos neste modelo e suas implicações na dinâmica do conflito, visando aprimorar a eficácia das estratégias de resolução propostas, pois este não foi o propósito deste estudo.

## 6 CONCLUSÕES

Nesta dissertação abordamos avanços significativos na análise de conflitos, mais especificamente, no âmbito do Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR), com um foco especial na implementação de preferências probabilísticas em estabilidades com horizonte variável. A pesquisa apresentou novas definições de estabilidade a estabilidade Movimento Limitado com preferências probabilísticas  $(\alpha, \beta) - L_h$  e a estabilidade  $Maximin_h$  com preferências probabilísticas,  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , proporcionando um arcabouço teórico robusto que expande as capacidades do GMCR. Estes avanços não apenas contribuem para a literatura existente, mas também oferecem ferramentas práticas para a modelagem precisa de situações conflituosas, permitindo uma análise mais realista e abrangente dos cenários de conflito.

Os resultados demonstraram que a estabilidade do conflito é altamente sensível aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , e ao horizonte considerado, o que ressalta a complexidade e a natureza estocástica dos conflitos. Essa sensibilidade aponta para a necessidade de uma compreensão detalhada dos parâmetros do modelo, permitindo que os decisores adaptem suas estratégias de acordo com as condições específicas de cada conflito. Além disso, a implementação de preferências probabilísticas no GMCR representa um avanço significativo ao reconhecer a incerteza inerente às decisões em conflitos, oferecendo uma abordagem mais flexível e realista.

Por fim, esta dissertação enfatiza a importância de buscarmos novos conceitos de solução e suas relações com outros conceitos já estabelecidos na literatura sobre o GMCR. Embora os objetivos propostos tenham sido atingidos, compreendemos que futuras pesquisas são necessárias para aprofundar a compreensão dessas interações e aprimorar ainda mais as estratégias de resolução de conflitos. Assim, espera-se que este trabalho contribua para o desenvolvimento de abordagens mais eficazes e sustentáveis, enfrentando os desafios complexos da sociedade contemporânea.

### 6.1 DIRECIONAMENTOS PARA TRABALHOS FUTUROS

Em pesquisas futuras pretendemos:

- (1) Estender os conceitos estabilidade propostos neste trabalho para conflitos multilaterais.
- (2) Aplicar os conceitos de estabilidade propostos em situações de conflitos reais ou já estabelecidos na literatura sobre o GMCR.

- (3) Aplicar outras estruturas de preferências já exploradas no GMCR a conceitos de estabilidade com horizonte variável, tais como: incertas, com intensidade de preferências, fuzzy, gray, probabilidades superiores e inferiores.
- (4) Propor representações matriciais para estes dois novos conceitos.

## REFERÊNCIAS

- AL-MUTAIRI, M.; HIPEL, K.; KAMEL, M. Fuzzy preferences in conflicts. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, v. 17, n. 3, p. 257–276, 2008.
- BASHAR, M. A.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Title of the article. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010.
- BASHAR, M. A.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Fuzzy preferences in the graph model for conflict resolution. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012.
- FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. *Interactive Decision Making: The Graph Model for Conflict Resolution*. [S.l.]: Wiley, 1993. v. 3.
- FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; PENG, X. Um sistema de apoio à decisão para tomada de decisão interativa - parte i: formulação de modelo. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews*, v. 33, n. 1, p. 42–55, 2003.
- FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; PENG, X. Um sistema de apoio à decisão para tomada de decisão interativa - parte ii: análise e interpretação de resultados. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews*, v. 33, n. 1, p. 56–66, 2003.
- FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. Solving complex conflicts. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern*, v. 9, n. 12, p. 805–816, 1979.
- FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. *Conflict Analysis: Models and Resolutions*. New York: North-Holland, 1984.
- FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. *Título do Livro: Modelos e Resolução de Conflitos*. [S.l.]: Elsevier Science Ltd, 1984.
- HIPEL, K. Conflict resolution. In: TOLBA, M. (Ed.). *OUR FRAGILE WORLD (OFW) Challenges and Opportunities for Sustainable Development*. Oxford, UK: Eolss Publishers, 2001. v. 1, p. 935–952.
- HIPEL, K. W.; FANG, L.; KILGOUR, D. M. The graph model for conflict resolution: Reflections on three decades of development. *Group Decision and Negotiation*, 2019.
- HOWARD, N. *Paradoxes of Rationality: Theory of Metagames and Political Behavior*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1971.
- KILGOUR, D.; HIPEL, K. W.; FANG, L. The graph model for conflicts. *Automatica*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 41–55, 1987.
- KILGOUR, D. M. Anticipation and stability in two-person noncooperative games. *Dynamic models of international conflict*, Lynne Rienner Press Boulder, CO, p. 26–51, 1985.
- KUANG, H.; BASHAR, M. A.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Grey-based preference in a graph model for conflict resolution with multiple decision makers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 45, p. 1254–1267, 2015.

- LI, K.; HIPEL, K.; KILGOUR, D.; FANG, L. Stability definitions for 2-player conflict models with uncertain preferences. In: *IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.* [S.l.: s.n.], 2002. v. 7, p. 13–18.
- LI, K.; HIPEL, K.; KILGOUR, D.; FANG, L. Preference uncertainty in the graph model for conflict resolution. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, v. 34, n. 4, p. 507–520, 2004.
- LUCE, R. A probabilistic theory of utility. *Econometrica*, v. 26, n. 2, p. 193–224, 1958.
- MYERSON, R. B. *Game Theory Analysis of Conflict*. [S.l.]: Harvard University Press, 1991.
- NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences-USA*, v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950.
- NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 1944.
- OLIVEIRA, R. M. de. *A mediação como alternativa de resolução de conflito entre adolescentes em medida socioeducativa de privação de liberdade*. 123 p. Dissertação (Mestrado em Intervenção Social, Inovação e Empreendedorismo) — Universidade de Coimbra, Coimbra, 2020.
- RÊGO, L.; CORDEIRO, Y. Matrix representations of berge stabilities in the graph model for conflict resolution. *Annals of Operations Research*, v. 332, p. 125–148, 2024.
- RÊGO, L.; SANTOS, A. dos. Probabilistic preferences in the graph model for conflict resolution. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 45, n. 4, p. 595–608, 2015.
- RÊGO, L.; SANTOS, A. dos. Upper and lower probabilistic preferences in the graph model for conflict resolution. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 98, p. 96–111, 2018. ISSN 0888-613X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888613X17307107>>.
- RÊGO, L.; VIEIRA, G. Matrix representation of solution concepts in the graph model for conflict resolution with probabilistic preferences and multiple decision makers. *Group Decision and Negotiation*, v. 30, p. 697–717, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10726-021-09729-y>>.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Symmetric sequential stability in the graph model for conflict resolution with multiple decision makers. *Group Decision and Negotiation*, v. 26, n. 4, p. 775–792, 2017.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Probabilistic option prioritizing in the graph model for conflict resolution. *Group Decision and Negotiation*, v. 28, p. 1149–1165, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10726-019-09635-4>>.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Berge solution concepts in the graph model for conflict resolution. *Group Decision and Negotiation*, Springer, v. 29, n. 1, p. 103–125, 2020.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A.  $\text{Maximin}_h$  stability in the graph model for conflict resolution for bilateral conflicts. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 50, n. 10, p. 3760–3769, 2020.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A.; KILGOUR, D. M. The graph model for conflict resolution and credible maximin stability. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, p. 1–10, 2022.

SABINO, E. R. *Estabilidade do otimismo pessimismo: um novo conceito de solução para o modelo de grafo para resolução de conflito*. 87 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SABINO, E. R.; RÊGO, L. C. Minimax regret stability in the graph model for conflict resolution. *European Journal of Operational Research*, v. 314, n. 3, p. 1087–1097, 2024. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221723008226>>.

SANTOS, A. M. dos. *Aplicações de Modelos de Grafos na Análise de Conflitos e de Redes Sociais*. 162 p. Dissertação (Doutorado em Estatística) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

SILVA, A. S. *Um estudo sobre alguns conceitos de estabilidade com horizonte variável no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos*. 118 p. Tese (Doutorado em Estatística) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

VIEIRA, G. I. A. *Advances in the Graph Model for Conflict Resolution*. 164 p. Dissertação (Doutorado em Estatística) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Matrix representation of conflicts with two decision-makers. In: IEEE. *Systems, Man and Cybernetics, 2007. ISIC. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2007. p. 1764–1769.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Matrix representation of solution concepts in multiple decision maker graph models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, v. 39, n. 1, p. 96–108, 2009.

XU, H.; ZHAO, J.; KE, G. Y.; ALI, S. Matrix representation of consensus and dissent stabilities in the graph model for conflict resolution. *Discrete Applied Mathematics*, Netherlands, v. 259, p. 205–217, Apr 2019.

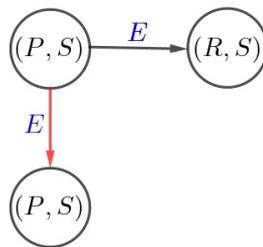
ZENG, D. Z.; FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Generalized metarationalities in the graph model for conflict resolution. *Discret Applied Matematics*, Elsevier, v. 154, n. 16, p. 2430–2443, 2006.

## APÊNDICE A – CÁLCULOS DAS ESTABILIDADES

### A.1 ANALISANDO A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - L_h$ PARA O DM $E$

Note que pelo fato de  $R_E((P, S)) \cap \varphi_E^{+(1-\alpha)}((P, S)) - \{(P, S)\} = \emptyset$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_h(E, (P, S), (P, S)) = (P, S)$  e, conseqüentemente,  $(P, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$ , para todo  $h \geq 1$  e todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . A Figura 11 ilustra a evolução do conflito para  $h = 1$ .

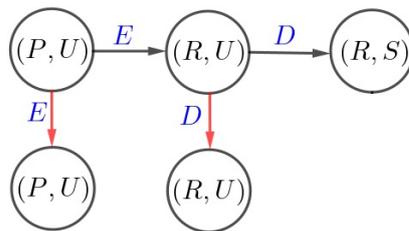
Figura 11 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Fixando o estado  $(P, U)$  como estado inicial, e analisando de acordo com a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , temos que, pelo fato de  $R_E((P, U)) \cap \varphi_E^{+(1-\alpha)}((P, U)) - \{(P, U)\} = \emptyset$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_h(E, (P, U), (P, U)) = (P, U)$  e, conseqüentemente,  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  para o DM  $E$ , para todo  $h \geq 1$  e todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . A Figura 12 ilustra a evolução do conflito para  $h = 2$ .

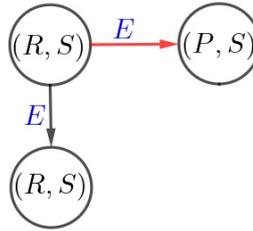
Figura 12 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Fixando o estado  $(R, S)$  como estado inicial, e analisando de acordo com a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$ , Figura 13, temos que  $(R, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_1$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0$ . Pois, como  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > P_E((R, S), (R, S)) = 0$  e  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1(E, (R, S), (R, S)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_1$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0$ .

Figura 13 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

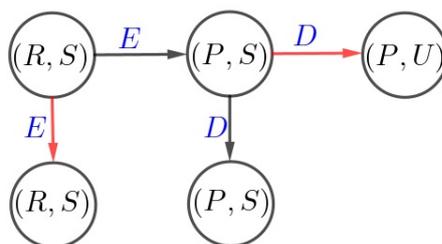


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$ , Figura 14, temos que  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0.3$  ou  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ , pois

1.  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > P_D((P, S), (R, S)) = 0$ , daí  $(\alpha, \beta) - G_1(D, (R, S), (P, S)) = (P, U)$  se  $\alpha > 0.3$ . Caso contrário,  $(\alpha, \beta) - G_1(D, (R, S), (P, S)) = (P, S)$ ;
2. Se  $\alpha > 0.3$ , como  $P_E((P, U), (R, S)) = P_E((R, S), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2(E, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ . Logo,  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $E$ .
3. Se  $0 < \alpha \leq 0.3$  e  $\beta > 0$ , como  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > 1 - \alpha$  e  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2(E, (R, S), (R, S)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $E$ .

Figura 14 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

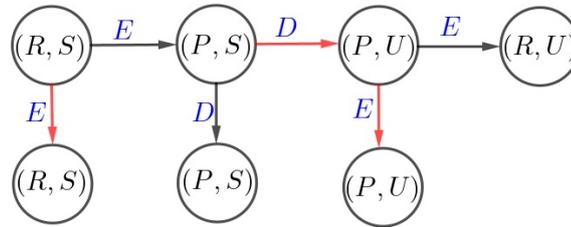
Analisando a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$ , Figura 15, temos que  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_3$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha = 0$  ou  $(\alpha > 0.3$  e  $\beta > 0.3)$ , pois

1. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = P_E((R, U), (R, S)) = 0$ , então  $(\alpha, \beta) - G_1(E, (R, S), (P, U)) = (P, U)$ ;
2. Se  $\alpha > 0.3$  e  $\beta > 0.3$ , como  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > P_D((P, S), (R, S)) = 0$ ,  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > 1 - \alpha$  e  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > 1 - \beta$ , temos que

$(\alpha, \beta) - G_2(D, (R, S), (P, S)) = (P, U)$ . Caso contrário,  $(\alpha, \beta) - G_2(D, (R, S), (P, S)) = (P, S)$ ;

3. Se  $\alpha > 0.3$  e  $\beta > 0.3$ , como  $P_E((P, U), (R, S)) = P_E((R, S), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3(E, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ . Logo,  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_3$  estável para o DM  $E$ .
4. Se  $0 < \alpha \leq 0.3$  ou  $(\beta \leq 0.3$  e  $\alpha > 0)$ ,  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3(E, (R, S), (R, S)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_3$  estável para o DM  $E$ , se  $0 < \alpha \leq 0.3$  ou  $\beta \leq 0.3$ .

Figura 15 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

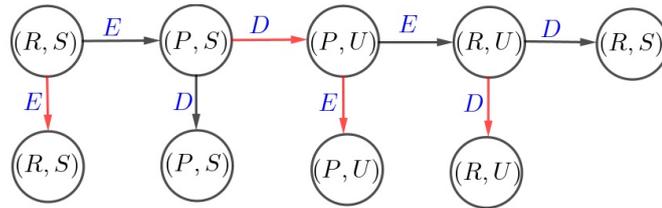


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$ , Figura 16, temos que  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0.3$  ou  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ , pois

1. Como  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 > P_D((R, S), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1(D, (R, S), (R, U)) = (R, U)$ ;
2. Como  $P_E((R, U), (R, S)) = P_E((P, U), (R, S)) = 0$ , então  $(\alpha, \beta) - G_2(E, (R, S), (P, U)) = (P, U)$ ;
3. Se  $\alpha > 0.3$ , como  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > P_D((P, S), (R, S)) = 0$  e  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3(D, (R, S), (P, S)) = (P, U)$ . Caso contrário,  $(\alpha, \beta) - G_3(D, (R, S), (P, S)) = (P, S)$ ;
4. Se  $\alpha > 0.3$ , como  $P_E((P, U), (R, S)) = P_E((R, S), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_4(E, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ . Logo,  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $E$ .
5. Se  $0 < \alpha \leq 0.3$  e  $\beta > 0$ , como  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > 1 - \alpha$  e  $P_E((P, S), (R, S)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_4(E, (R, S), (R, S)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $E$ .

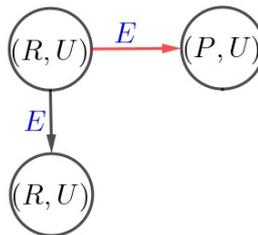
Figura 16 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Fixando o estado  $(R, U)$  como estado inicial, e analisando de acordo com a noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$ , Figura 17, temos que  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_1$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0$ . Pois, como  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$  e  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_1$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0$ .

Figura 17 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



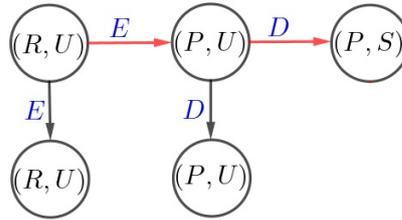
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$ , Figura 18, temos que  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , pois

1. Se  $\alpha > 0.7$ , como  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > P_D((P, U), (R, U)) = 0$  e  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1(D, (R, U), (P, U)) = (P, S)$ . Caso contrário,  $(\alpha, \beta) - G_1(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ ;
2. Se  $\alpha > 0.7$  e  $\beta > 0$ , como  $P_E((P, S), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$  e  $P_E((P, S), (R, U)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2(E, (R, U), (R, U)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $E$  se  $\alpha > 0.7$  e  $\beta > 0$ .
3. Se  $0 < \alpha \leq 0.7$  e  $\beta > 0$ , como  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$  e  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $E$  se  $0 < \alpha \leq 0.7$  e  $\beta > 0$ .

Analisando a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$ , Figura 19, temos que  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_3$  estável para o DM  $E$ . Pois,

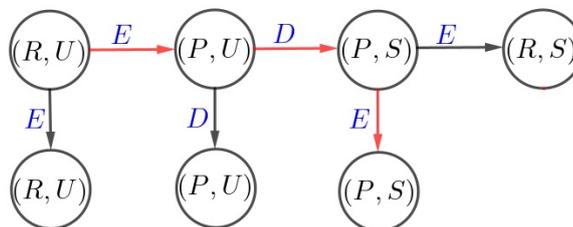
Figura 18 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

1. Como  $P_E((R, S), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U)) = 1$ , então  $(\alpha, \beta) - G_1(E, (R, S), (P, S)) = (P, S)$ ;
2. Se  $\alpha > 0.7$  e  $\beta > 0.7$ , como  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > P_D((P, U), (R, U)) = 0$ ,  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > 1 - \alpha$  e  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2(D, (R, U), (P, U)) = (P, S)$ . Caso contrário,  $(\alpha, \beta) - G_2(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ ;
3. Se  $\alpha > 0.7$  e  $\beta > 0.7$ , como  $P_E((P, S), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3(E, (R, U), (R, U)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_3$  estável para o DM  $E$ .
4. Se  $0 < \alpha \leq 0.7$  ou  $(\beta \leq 0.7$  e  $\alpha > 0)$ , como  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_3$  estável para o DM  $E$ .

Figura 19 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



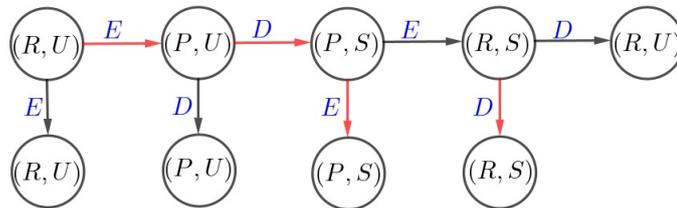
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$ , Figura 20, temos que  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $E$ , pois

1. Como  $P_D((R, S), (R, U)) = 0.3 > P_D((R, U), (R, U)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1(D, (R, U), (R, S)) = (R, S)$ .

2. Como  $P_E((R, S), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U)) = 1$ , então  $(\alpha, \beta) - G_2(E, (R, S), (P, S)) = (P, S)$ ;
3. Se  $\alpha > 0.7$ , como  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > P_D((P, U), (R, U)) = 0$  e  $P_D((P, S), (R, U)) = 0.3 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3(D, (R, U), (P, U)) = (P, S)$ . Caso contrário,  $(\alpha, \beta) - G_3(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ ;
4. Se  $\alpha > 0.7$  e  $\beta > 0$ , como  $P_E((P, S), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$  e  $P_E((P, S), (R, U)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_4(E, (R, U), (R, U)) = (P, S)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $E$ .
5. Se  $0 < \alpha \leq 0.7$  e  $\beta > 0$ , como  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > P_E((R, U), (R, U)) = 0$ ,  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \alpha$  e  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_4(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $E$ .

Figura 20 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.

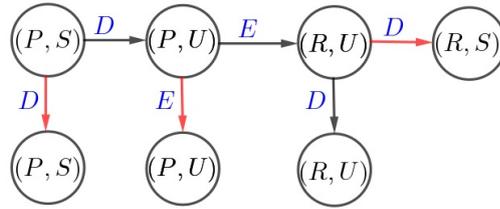


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

## A.2 ANALISANDO A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - L_h$ PARA O DM $D$

Analisando o Conflito de Valores, a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , para o DM  $D$ , ao fixarmos o estado  $(P, S)$  como estado inicial, considerando  $\alpha \leq 0.3$ , temos que o estado  $(P, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $D$ , para todo  $h \geq 1$ , pois  $R_D((P, S) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((P, S)) - \{(P, S)\}) = \emptyset$ . Além disso, note que para qualquer  $h \geq 2$ , o DM  $E$  vai escolher ficar no estado  $(P, U)$  na primeira vez em que se move, pois qualquer estado tem a mesma probabilidade de ser preferível a  $(P, S)$ , que é zero. Logo, se  $\alpha > 0.3$ , o DM  $D$  vai querer sair de  $(P, S)$  para  $(P, U)$ , exceto se o horizonte for par e  $\beta \leq 0.3$ , pois neste caso  $P_D((P, U), (P, S)) = 0.7 \leq 1 - \beta$ , que também consiste de uma situação de estabilidade. A Figura 21 ilustra a evolução do conflito para  $h = 3$ .

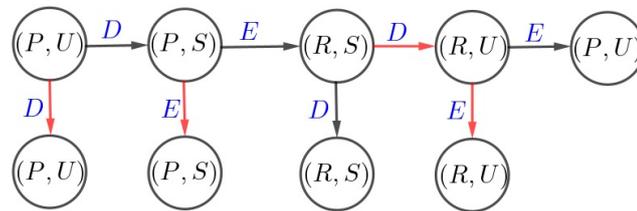
Figura 21 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando o Conflito de Valores, a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , para o DM  $D$ , ao fixarmos o estado  $(P, U)$  como estado inicial, considerando  $\alpha \leq 0.7$ , temos que o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $D$ , para todo  $h \geq 1$ . Pois,  $R_D((P, U) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((P, U)) - \{(P, U)\}) = \emptyset$ . Além disso, note que para qualquer  $h \geq 2$ , o DM  $E$  vai escolher ficar no estado  $(P, S)$  na primeira vez em que se move, pois  $P_E((P, S)(P, U)) = 1$ . Logo, se  $\alpha > 0.7$ , o DM  $D$  vai querer sair de  $(P, U)$  para  $(P, S)$ , exceto se o horizonte for par e  $\beta \leq 0.7$ , pois neste caso  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \beta$  que também consiste de uma situação de estabilidade. A Figura 22 ilustra a evolução do conflito para  $h = 4$ .

Figura 22 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

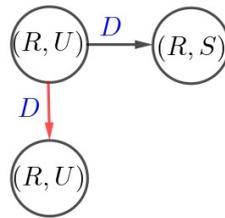
Analisando o Conflito de Valores, a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , para o DM  $D$ , ao fixarmos o estado  $(R, U)$  como estado inicial, considerando  $\alpha \leq 0.7$ , temos que o estado  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $D$ , para todo  $h \geq 1$ , pois  $R_D((R, U) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((R, U)) - \{(R, U)\}) = \emptyset$ . A Figura 23 ilustra a evolução do conflito para  $h = 1$ .

Se  $\alpha > 0.7$  e  $h = 2$ , então temos que o DM  $E$  vai ficar em  $(R, S)$ , pois  $P_E((R, S), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U)) = 1$ . Logo, o DM  $D$  vai preferir sair de  $(R, U)$  para  $(R, S)$ , desde que  $\beta > 0.7$ . Logo, se  $\beta \leq 0.7$ , o estado  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $D$  também. A Figura 24 ilustra essa situação.

Se  $\alpha > 0.7$  e  $h = 3$ , então temos que o DM  $D$  vai ficar em  $(P, S)$  no fim, pois  $P_D((P, S), (R, U)) > P_D((P, U), (R, U))$ . Logo, o DM  $E$  vai ficar em  $(R, S)$ , pois  $P_E((R, S), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U)) = 1$ . Portanto, o DM  $D$  vai preferir sair de  $(R, U)$  para  $(R, S)$  não havendo estabilidade nesse caso. A Figura 25 ilustra essa situação.

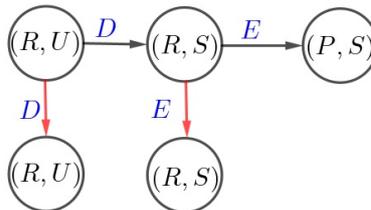
Se  $\alpha > 0.7$  e  $h = 4$ , então temos que o DM  $E$  vai ficar em  $(P, U)$ , pois  $P_E((P, U), (R, U)) > P_E((R, U), (R, U))$ . Logo, o DM  $D$  vai ficar em  $(P, S)$  ao realizar seu segundo movimento, pois  $P_D((P, S), (R, U)) > P_D((P, U), (R, U))$ . Logo, o DM  $E$  vai ficar em  $(R, S)$ , pois  $P_E((R, S), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U)) = 1$ . Portanto, o DM  $D$  vai preferir sair de  $(R, U)$  para  $(R, S)$ , desde que  $\beta > 0.7$ . Logo, se  $\beta \leq 0.7$ , o estado  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $D$  também. A Figura 26 ilustra essa situação.

Figura 23 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



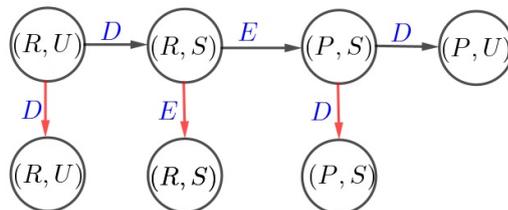
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 24 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



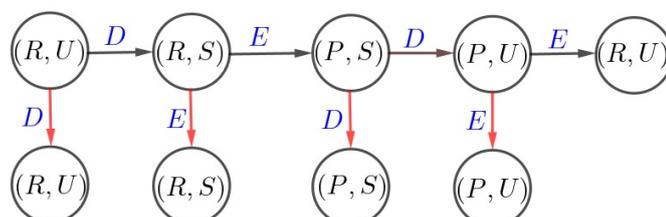
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 25 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 26 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

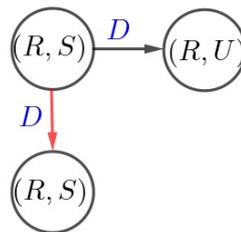
Analisando o Conflito de Valores, a partir da noção da estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_h$ , para o DM  $D$ , ao fixarmos o estado  $(R, S)$  como estado inicial, considerando  $\alpha \leq 0.3$ , temos que o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_h$  estável para o DM  $D$ , para todo  $h \geq 1$ , pois  $R_D((R, S) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((R, S)) - \{(R, S)\}) = \emptyset$ . A Figura 27 ilustra o caso em que  $h = 1$ .

Se  $\alpha > 0.3$  e  $h = 2$ , então temos que o DM  $E$  vai ficar em  $(R, U)$ , pois  $P_E((R, U), (R, S)) = P_E((P, U), (R, S)) = 0$ . Logo, o DM  $D$  vai preferir sair de  $(R, S)$  para  $(R, U)$ , desde que  $\beta > 0.3$ . Logo, se  $\beta \leq 0.3$ , o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - L_2$  estável para o DM  $D$  também. A Figura 28 ilustra essa situação.

Se  $\alpha > 0.3$  e  $h = 3$ , então temos que o DM  $D$  vai ficar em  $(P, U)$  no fim, pois  $P_D((P, U), (R, S)) > P_D((P, S), (R, S))$ . Logo, o DM  $E$  vai ficar no estado  $(R, U)$ , pois  $P_E((R, U), (R, S)) = P_E((P, U), (R, S)) = 0$ . Portanto, o DM  $D$  vai preferir sair de  $(R, S)$  para  $(R, U)$  não havendo estabilidade nesse caso. A Figura 29 ilustra essa situação.

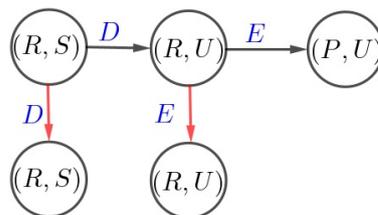
Se  $\alpha > 0.3$  e  $h = 4$ , então temos que o DM  $E$  vai ficar em  $(P, S)$ , pois  $P_E((P, S), (R, S)) > P_E((R, S), (R, S))$ . Logo, o DM  $D$  vai ficar em  $(P, U)$  ao realizar seu segundo movimento, pois  $P_D((P, U), (R, S)) > P_D((P, S), (R, S))$ . Logo, o DM  $E$  vai ficar em  $(R, U)$ , pois  $P_E((R, U), (R, S)) = P_E((P, U), (R, S)) = 0$ . Portanto, o DM  $D$  vai preferir sair de  $(R, S)$  para  $(R, U)$ , desde que  $\beta > 0.3$ . Logo, se  $\beta \leq 0.3$ , o estado  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - L_4$  estável para o DM  $D$  também. A Figura 30 ilustra essa situação.

Figura 27 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_1$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



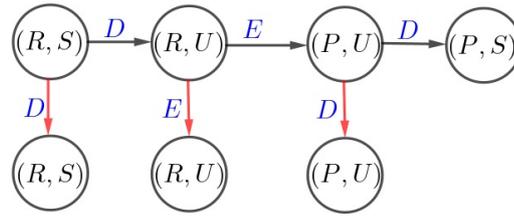
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 28 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_2$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



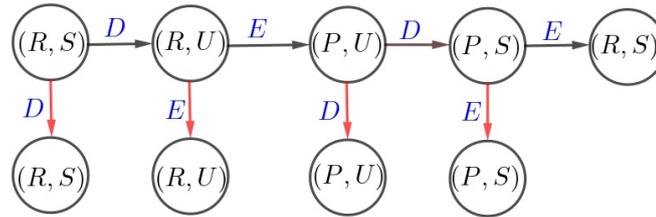
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 29 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 30 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - L_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

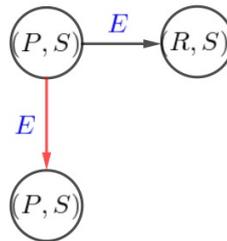


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

### A.3 ANALISANDO A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ PARA O DM $E$

Fixando o estado  $(P, S)$  como estado inicial, como  $R_E^{+(1-\alpha)}((P, S)) = \emptyset$ , segue que  $\forall h, (\alpha, \beta) - G_h^E(E, (P, S), (P, S)) = (P, S)$ . Logo,  $(P, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ , para todo  $h \geq 1$  e todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . A Figura 31 ilustra o caso  $h = 1$ .

Figura 31 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.



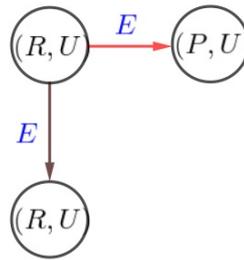
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Em seguida, fixando o estado  $(R, U)$  como estado inicial. Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $E$ , Figura 32, temos que para todo  $\alpha > 0$ , o estado  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $E$ , pois

$$P_E((\alpha, \beta) - G_0^E(D, (R, U), \overline{M}_1^E(E, (R, U), (R, U)), (R, U)) = P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \alpha,$$

e portanto,  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (R, U), (R, U)) = (P, U) \neq (R, U)$ . Ou seja, o estado  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $E$ , se  $\alpha > 0$ .

Figura 32 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.

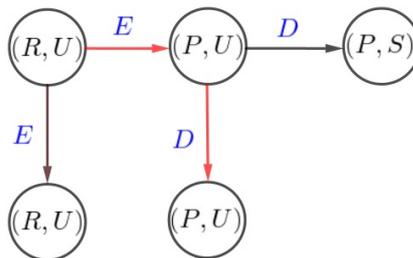


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  do estado  $(R, U)$ , para o DM  $E$ , Figura 33, temos que se  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  o estado  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  estável para o DM  $E$ , pois,

1. Como  $P_E((P, S), (R, U)) = P_E((P, U), (R, U)) = 1$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ ;
2. Como  $\overline{M}_2^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, U), \overline{M}_2^E(E, (R, U), (R, U))) = (P, U)$ ;
3. Como  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \alpha$  e  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  estável para o DM  $E$ .

Figura 33 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_2$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



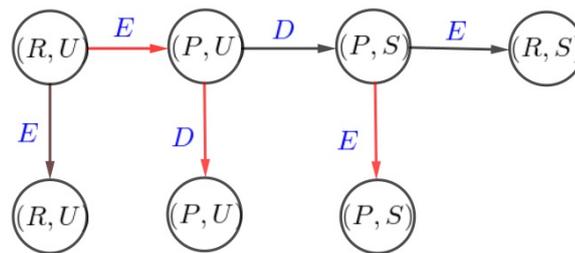
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_3$  do estado  $(R, U)$ , para o DM  $E$ , Figura 34, temos que se  $\alpha > 0$  o estado  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta)$  –  $Maximin_3$  estável para o DM  $E$ , pois,

1. Como  $P_E((P, S), (R, U)) = P_E((R, S), (R, U))$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (R, U), (P, S)) = (P, S)$ ;

2. Como  $\overline{M}_2^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, S)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (R, U), \overline{M}_2^E(D, (R, U), (P, U))) = (P, S)$ ;
3. Como  $P_E((P, U), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U))$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ ;
4. Como  $\overline{M}_3^E(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(D, (R, U), \overline{M}_3^E(E, (R, U), (R, U))) = (P, U)$ ;
5. Como  $P_E((P, U), (R, U)) = 1 > 1 - \alpha$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3^E(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_3$  estável para o DM  $E$ .

Figura 34 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_3$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



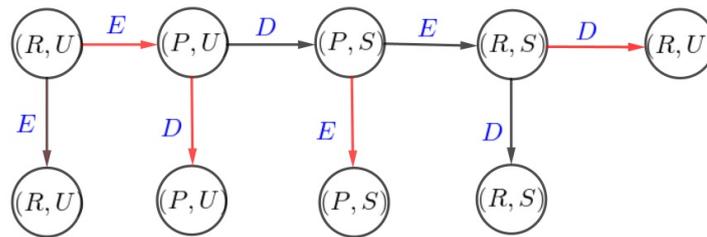
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_4$  do estado  $(R, U)$ , para o DM  $E$ , Figura 35, temos que se  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , então o estado  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_4$  estável para o DM  $E$ , pois,

1. Como  $P_E((R, S), (R, U)) > P_E((R, U), (R, U))$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (R, U), (R, S)) = (R, U)$ ;
2. Como  $\overline{M}_2^E(E, (R, U), (P, S)) = (R, S)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (R, U), \overline{M}_2^E(E, (R, U), (P, S))) = (R, U)$ ;
3. Como  $P_E((P, S), (R, U)) > P_E((R, U), (R, U))$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, U), (P, S)) = (P, S)$ ;
4. Como  $\overline{M}_3^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, S)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, U), \overline{M}_3^E(D, (R, U), (P, U))) = (P, S)$ ;
5. Como  $P_E((P, U), (R, U)) = P_E((P, S), (R, U))$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ .

6. Como  $\overline{M}_4^E(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3^E(D, (R, U), \overline{M}_4^E(E, (R, U), (R, U))) = (P, U)$ ;
7. Como  $P_E((P, U), (R, U)) > P_E((R, U), (R, U))$ ,  $P_E((P, U), (R, U)) > 1 - \alpha$  e  $P_E((P, U), (R, U)) > 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_4^E(E, (R, U), (R, U)) = (P, U)$ . Logo,  $(R, U)$  não é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_4$  estável para o DM  $E$ .

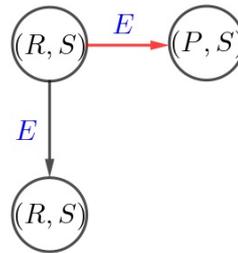
Figura 35 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_4$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao fixarmos o estado  $(R, S)$  como estado inicial e analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_1$  para o DM  $E$ , Figura 36, temos que para  $\alpha > 0$  o estado  $(R, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_1$  estável para o DM  $E$ , pois como  $P_E((P, S)(R, S)) = 1$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (R, S), (R, S)) = (P, S) \neq (R, S)$ .

Figura 36 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



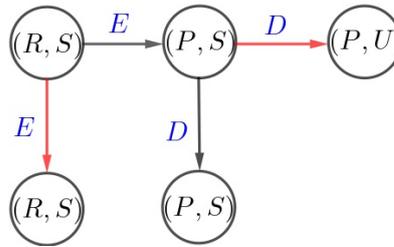
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_2$  do estado  $(R, S)$ , para o DM  $E$ , Figura 37, temos que, para todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - \text{Maximin}_2$  estável para o DM  $E$ , pois

1. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 < P_E((P, S), (R, S)) = 1$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (R, S), (P, S)) = (P, U)$ ;
2. Como  $\overline{M}_2^E(D, (R, U), (P, U)) = (P, U)$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, S), \overline{M}_2^E(E, (R, S), (R, S))) = (P, U)$ ;

3. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 \leq 1 - \alpha$  e  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 \leq 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ . Logo,  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $E$ .

Figura 37 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

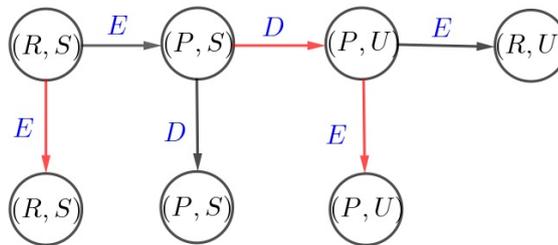


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  do estado  $(R, S)$ , para o DM  $E$ , Figura 38, temos que, para todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $E$ , pois,

1. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = P_E((R, U), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (R, S), (P, U)) = (P, U)$ ;
2. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 < P_E((P, S), (R, S)) = 1$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(D, (R, S), (P, S)) = (P, U)$ ;
3. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 \leq 1 - \alpha$ , temos  $(\alpha, \beta) - G_3^E(E, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ . Logo,  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $E$ .

Figura 38 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

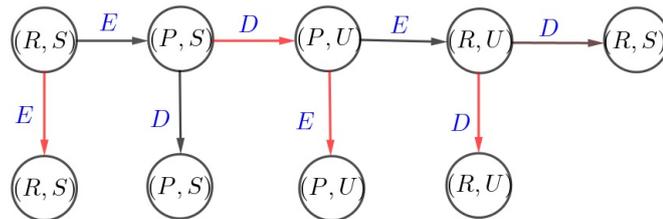


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  do estado  $(R, S)$ , para o DM  $E$ , Figura 39, temos que, para todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $E$ , pois

1. Como  $P_E((R, U), (R, S)) = P_E((R, S), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (R, S), (R, U)) = (R, U)$ ;
2. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = P_E((R, U), (R, S)) = 0$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (R, S), (P, U)) = (P, U)$ ;
3. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 < P_E((P, S), (R, S)) = 1$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3^E(D, (R, S), (P, S)) = (P, U)$ ;
4. Como  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 \leq 1 - \alpha$  e  $P_E((P, U), (R, S)) = 0 \leq 1 - \beta$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_4^E(E, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ . Logo,  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $E$ .

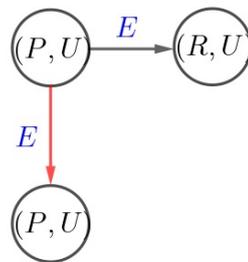
Figura 39 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $E$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Fixando o estado  $(P, U)$  como estado inicial, e analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $E$ , Figura 40, temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (P, U), (P, U)) = (P, U)$ , pois  $P_E((R, U), (P, U)) = 0 \leq 1 - \alpha, \forall \alpha \leq 1$ . Logo, para todo  $\alpha$  e  $\beta$ , o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $E$ .

Figura 40 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.

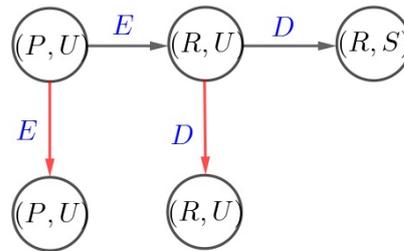


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ , a partir do estado  $(P, U)$ , para o DM  $E$ , Figura 41, temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (P, U), (R, U)) = (R, U)$ , já que  $P_E((R, U), (P, U)) = 0$  e

$0 < P_E((R, S), (P, U)) = 1$ . Daí,  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (P, U), (P, U)) = (P, U)$ , pois  $P_E((R, U), (P, U)) = 0 \leq 1 - \alpha, \forall \alpha \leq 1$  e, portanto, para todo  $\alpha$  e  $\beta$ , o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $E$ .

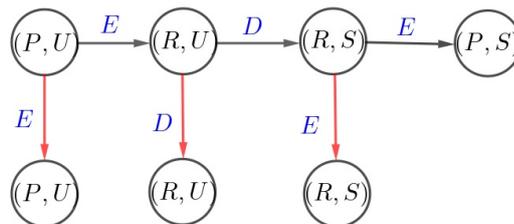
Figura 41 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ , a partir do estado  $(P, U)$ , para o DM  $E$ , Figura 42, temos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(E, (P, U), (R, S)) = (R, S)$ , uma vez que  $P_E((R, S), (P, U)) = P_E((P, S), (P, U)) = 1$ . Assim,  $(\alpha, \beta) - G_2^E(D, (P, U), (R, U)) = (R, U)$ , pois  $P_E((R, U), (P, U)) = 0 < P_E((R, S), (P, U)) = 1$ . Então, como  $P_E((R, U), (P, U)) = 0 \leq 1 - \alpha, \forall \alpha \leq 1$ , temos que  $(\alpha, \beta) - G_3^E(E, (P, U), (P, U)) = (P, U)$ , logo, para todo  $\alpha$  e  $\beta$ , o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $E$ .

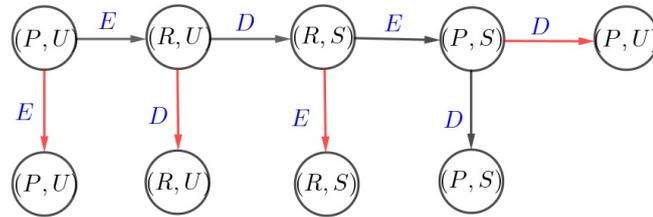
Figura 42 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ , a partir do estado  $(P, U)$ , para o DM  $E$ , Figura 43, observamos que  $(\alpha, \beta) - G_1^E(D, (P, U), (P, S)) = (P, U)$ , uma vez que  $P_E((P, S), (P, U)) = 1 > 0 = P_E((P, U), (P, U))$ . Daí,  $(\alpha, \beta) - G_2^E(E, (P, U), (R, S)) = (R, S)$ , pois  $P_E((R, S), (P, U)) = 1$ . E,  $(\alpha, \beta) - G_3^E(D, (P, U), (R, U)) = (R, U)$ , pois  $P_E((R, U), (P, U)) = 0 < P_E((R, S), (P, U)) = 1$ . Então temos que  $(\alpha, \beta) - G_4^E(E, (P, U), (P, U)) = (P, U)$ , já que  $P_E((R, U), (P, U)) = 0 \leq 1 - \alpha, \forall \alpha \leq 1$ . Portanto, para todo  $\alpha$  e  $\beta$ , o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $E$ .

Figura 43 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $E$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.

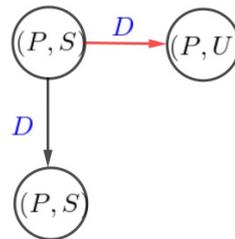


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

#### A.4 ANALISANDO A ESTABILIDADE $(\alpha, \beta) - Maximin_h$ PARA O DM $D$

Fixando o estado  $(P, S)$  como estado inicial e analisando a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ , Figura 44, para o DM  $D$ , temos que para  $\alpha > 0.3$ , o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $D$ . Uma vez que,  $R_D((P, S)) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((P, S)) - \{(P, S)\} = \{(P, U)\}$ , implicando em,  $G_1^D(D, (P, S), (P, S)) = (P, U)$  e como  $P_D((P, U), (P, S)) > 1 - \alpha$ , temos que o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $D$ , pois  $G_1^D(D, (P, S), (P, S)) \neq (P, S)$ . Por outro lado, se  $\alpha \leq 0.3$ , temos que  $R_D((P, S)) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((P, S)) - \{(P, S)\} = \emptyset$ , o que implica que o estado  $(P, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $D$ .

Figura 44 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.

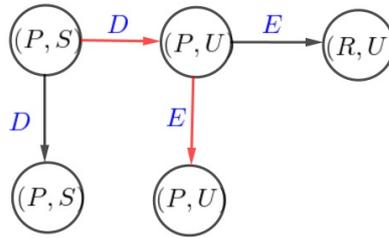


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos de acordo com a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ , Figura 45, o estado  $(P, S)$ , para o DM  $D$ , temos que o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $D$ , para  $\alpha > 0.3$  e  $\beta > 0.3$ , pois

1. Como,  $P_D((R, U), (P, S)) = P_D((P, U), (P, S)) = 0.7$ , temos que  $G_1^D(E, (P, S), (P, U)) = (P, U)$ .
2. Como  $G_1^D(E, (P, S), M_2^D(D, (P, S), (P, S))) = G_2^D(D, (P, S), (P, S)) = (P, U)$ ,  $P_D((P, U), (P, S)) > 1 - \alpha$  e  $P_D((P, U), (P, S)) > 1 - \beta$ , temos que  $G_2^D(D, (P, S), (P, S)) \neq (P, S)$ , portanto o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $D$ .

Figura 45 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.

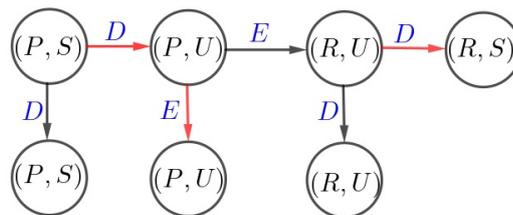


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Ao analisarmos a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ , Figura 46, do estado  $(P, S)$ , para o DM  $D$ , considerando  $\alpha > 0.3$  temos que o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $D$ , pois,

1. Como  $P_D((R, S), (P, S)) = 1 > P_D((R, U), (P, S)) = 0.7$ , então  $G_1^D(D, (P, S), (R, U)) = (R, S)$ , se  $\alpha > 0$ .
2. Como  $P_D((R, S), (P, S)) = 1 > P_D((P, U), (P, S)) = 0.7$ , logo  $G_2^D(E, (P, S), (P, U)) = (P, U)$ .
3. Como  $P_D((P, U), (P, S)) = 0.7 > 1 - \alpha$ , temos que  $G_3^D(D, (P, S), (P, S)) = (P, U)$ , e portanto, o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $D$ .

Figura 46 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.



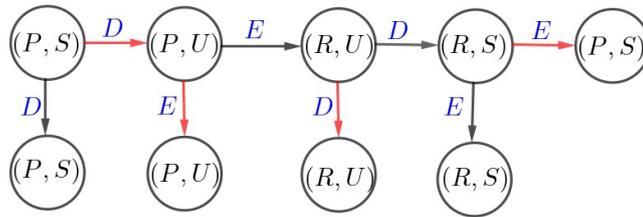
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$ , Figura 47, do estado  $(P, S)$ , para o DM  $D$ , temos para  $\alpha > 0.3$  e  $\beta > 0.3$  que o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $D$ , pois,

1. Como  $P_D((R, S), (P, S)) = 1 > P_D((P, S), (P, S)) = 0$ , temos  $(\alpha, \beta) - G_1^D(E, (P, S), (R, S)) = (P, S)$ .
2. Como  $P_D((R, U), (P, S)) = 0.7 > P_D((P, S), (P, S)) = 0$ , temos que  $G_2^D(D, (P, S), (R, U)) = (R, U)$ .

3. Como  $P_D((P, U), (P, S)) = P_D((R, U), (P, S)) = 0.7$ , temos que  $G_3^D(E, (P, S), (P, U)) = (P, U)$ .
4. Como  $P_D((P, U), (P, S)) = 0.7 > 1 - \alpha$  e  $P_D((P, U), (P, S)) = 0.7 > 1 - \beta$ , segue que  $G_4^D(D, (P, S), (P, S)) = (P, U)$ , ou seja,  $G_4^D(D, (P, S), (P, S)) \neq (P, S)$ , portanto o estado  $(P, S)$  não é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $D$ .

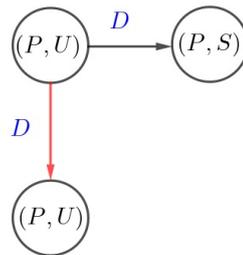
Figura 47 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Fixando o estado  $(P, U)$  como estado inicial e analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , Figura 48, para  $\alpha \leq 0.7$ , temos que  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \alpha$ , assim  $G_1^D(D, (P, U), (P, U)) = (P, U)$ , ou seja, o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $D$ .

Figura 48 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.

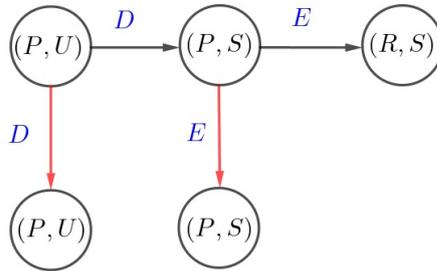


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $D$ , Figura 49, para  $\alpha \leq 0.7$  ou  $\beta \leq 0.7$ , temos que o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $D$ , pois

1. Como  $P_D((P, S), (P, U)) = P_D((R, S), (P, U)) = 0.3$ , assim  $G_1^D(E, (P, U), (P, S)) = (P, S)$ .
2. Como  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \alpha$  ou  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \beta$ , temos que  $G_2^D(D, (P, U), (P, U)) = (P, U)$ , isto é, o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $D$ .

Figura 49 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.

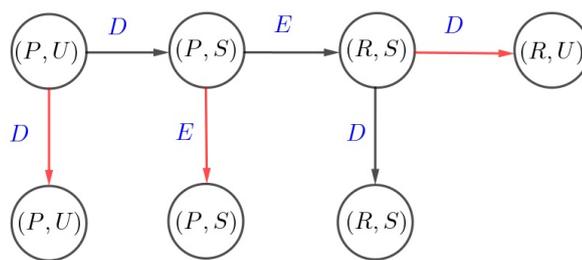


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $D$ , Figura 50, para  $\alpha \leq 0.7$ , temos que o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $D$ , pois

1. Como  $P_D((R, U), (P, U)) = 1 > P_D((R, S), (P, U)) = 0.3$ , temos  $G_1^D(D, (P, U), (R, S)) = (R, U)$ , se  $\alpha > 0$ .
2. Como  $P_D((R, U), (P, U)) = 1 > P_D((P, S), (P, U)) = 0.3$ , temos que  $G_2^D(E, (P, U), (P, S)) = (P, S)$ .
3. Logo, como  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \alpha$  segue que, o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $D$ .

Figura 50 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.



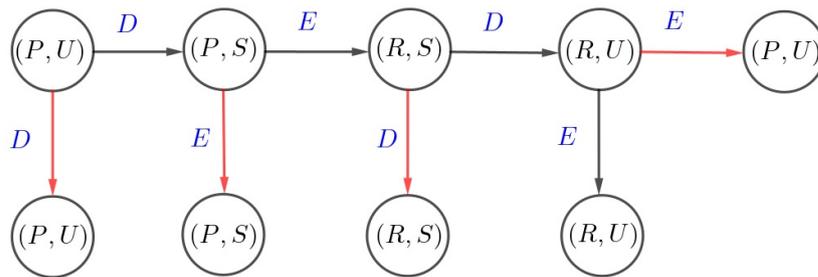
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $D$ , Figura 51, para  $\alpha \leq 0.7$  ou  $\beta \leq 0.7$ , temos que o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $D$ , pois

1.  $P_D((R, U), (P, U)) = 1 > P_D((P, U), (P, U)) = 0$ , isto é,  $G_1^D(E, (P, U), (R, U)) = (P, U)$ .
2. Como  $P_D((R, S), (P, U)) = 0.3 > P_D((P, U), (P, U)) = 0$  temos que  $G_2^D(D, (P, U), (R, S)) = (R, S)$ .

3. Como  $P_D((R, S), (P, U)) = 0.3 = P_D((P, S), (P, U))$ , segue que,  $G_3^D(E, (P, U), (P, S)) = (P, S)$ .
4. Por fim, como  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \alpha$  ou  $P_D((P, S), (P, U)) = 0.3 \leq 1 - \beta$ , o estado  $(P, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $D$ .

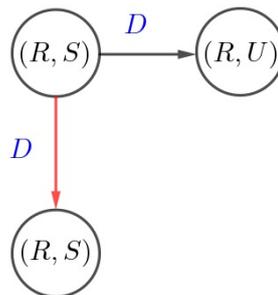
Figura 51 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(P, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Fixando o estado  $(R, S)$  como estado inicial e analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , Figura 52, para  $\alpha \leq 0.3$ , temos que  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 \leq 1 - \alpha$ , assim  $G_1^D(D, (R, U), (R, U)) = (R, U)$ , ou seja, o estado  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  estável para o DM  $D$ .

Figura 52 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

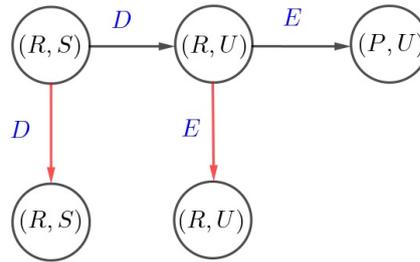


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $D$ , Figura 53, para  $\alpha \leq 0.3$  ou  $\beta \leq 0.3$ , temos que o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $D$ , pois

1.  $P_D((R, U), (R, S)) = P_D((P, U), (R, S)) = 0.7$ , assim  $G_1^D(E, (R, S), (R, U)) = (R, U)$ .
2. Como  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 \leq 1 - \alpha$  ou  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 \leq 1 - \beta$ , temos que  $G_2^D(D, (R, S), (R, S)) = (R, S)$ , isto é, o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  estável para o DM  $D$ .

Figura 53 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.

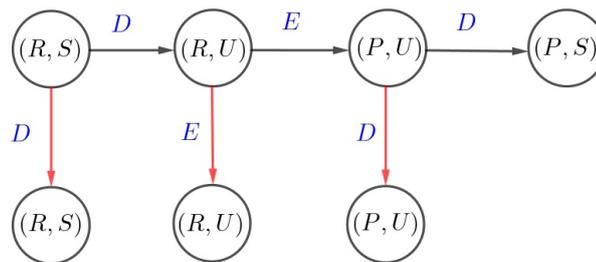


Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $D$ , Figura 54, para  $\alpha \leq 0.3$ , temos que o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $D$ , pois

1.  $P_D((P, S), (R, S)) = 0 < P_D((P, U), (R, S)) = 0.7$ , assim  $G_1^D(D, (R, S), (P, U)) = (P, U)$ .
2. Como  $P_D((P, U), (R, S)) = P_D((R, U), (R, S)) = 0.7$ , temos que  $G_2^D(E, (R, S), (R, U)) = (R, U)$ .
3. Como  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 \leq 1 - \alpha$  segue que, o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  estável para o DM  $D$ .

Figura 54 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



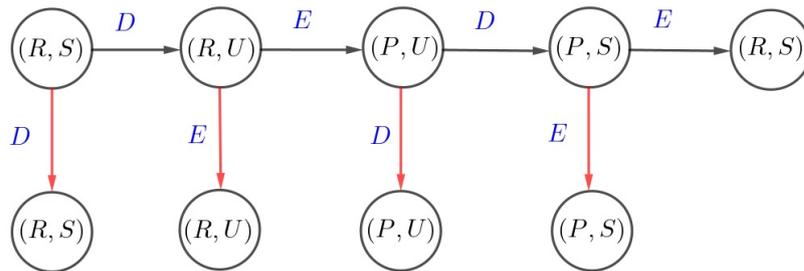
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Agora, analisando a partir da noção  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $D$ , Figura 55, para  $\alpha \leq 0.3$  ou  $\beta \leq 0.3$ , temos que o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $D$ , pois

1. Como  $P_D((P, S), (R, S)) = P_D((R, S), (R, S)) = 0$ , temos,  $G_1^D(E, (R, S), (P, S)) = (P, S)$ .
2. Como  $P_D((P, U), (R, S)) = 0.7 > P_D((P, S), (R, S)) = 0$  temos que  $G_2^D(D, (R, S), (P, U)) = (P, U)$ .

3. Como  $P_D((P, U), (R, S)) = P_D((R, U), (R, S)) = 0.7$ , segue que,  $G_3^D(E, (R, S), (R, U)) = (R, U)$ .
4. Por fim, como temos  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 \leq 1 - \alpha$  ou  $P_D((R, U), (R, S)) = 0.7 \leq 1 - \beta$ , o estado  $(R, S)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável para o DM  $D$ .

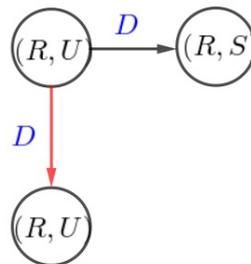
Figura 55 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, S)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Agora, fixando o estado  $(R, U)$  como estado inicial e analisando a estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , temos que para  $\alpha \leq 0.7$ , o estado  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$ , pois  $R_D((R, U)) \cap \varphi_D^{+(1-\alpha)}((R, U)) - \{(R, U)\} = \emptyset$ .

Figura 56 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_1$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



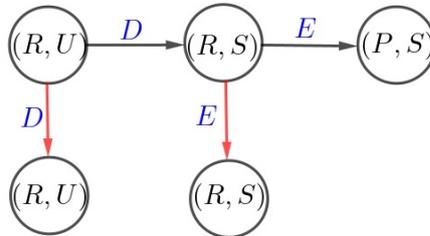
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Para  $h > 1$ , segue que  $(R, U)$  é  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$ , Figura 57,  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$ , Figura 58, e  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  estável, Figura 59, para o DM  $D$ . Pois,

1. Para  $h = 2$ . Se  $\alpha \leq 0.7$  e  $\beta$  assume qualquer valor, temos estabilidade. Além disso, se  $\alpha > 0.7$  e  $\beta \leq 0.7$  também temos estabilidade.
2. Para  $h = 3$ . Neste caso, como o horizonte é ímpar, temos estabilidade somente no caso em que  $\alpha \leq 0.7$  e  $\beta$  assume qualquer valor.

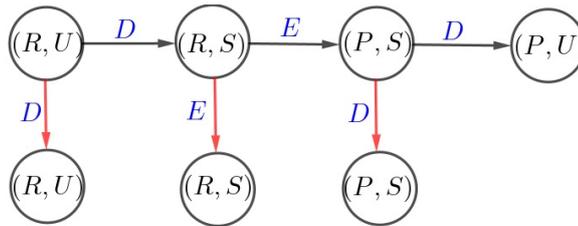
3. Para  $h = 4$ . Neste caso, como o horizonte é par, temos estabilidade no caso em que  $\alpha \leq 0.7$  e  $\beta$  assume qualquer valor ou no caso em que  $\alpha > 0.7$  e  $\beta \leq 0.7$ .

Figura 57 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_2$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



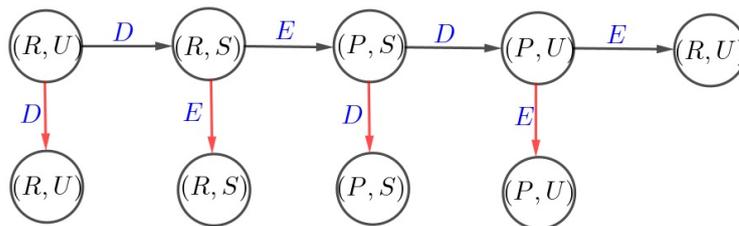
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 58 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_3$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 59 – Análise de estabilidade  $(\alpha, \beta) - Maximin_4$  para o DM  $D$ , a partir de  $(R, U)$ , no Conflito de Valores.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.