



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - EaD

**DECOMPOSIÇÃO DE POLIEDROS E A ISOMETRIA DE REFLEXÃO:
*ORIENTAÇÃO ESPACIAL E USO DE BASES DISCORDANTES***

IZAEL JOÃO DO NASCIMENTO

RECIFE

2024

IZAEL JOÃO DO NASCIMENTO

**DECOMPOSIÇÃO DE POLIEDROS E A ISOMETRIA DE REFLEXÃO:
*ORIENTAÇÃO ESPACIAL E USO DE BASES DISCORDANTES***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática – EaD da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, como pré-requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Fernando José Oliveira de Souza

RECIFE

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Nascimento, Izael João do.

Decomposição de poliedros e a isometria de reflexão: orientação espacial e uso de bases discordantes / Izael João do Nascimento. - Recife, 2024.

53p. : il.

Orientador(a): Fernando José Oliveira de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - Licenciatura, 2024.

Inclui referências, apêndices.

1. Volume da pirâmide. 2. Materiais manipulativos. 3. Isometrias. I. Souza, Fernando José Oliveira de. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

IZAEL JOÃO DO NASCIMENTO

DECOMPOSIÇÃO DE POLIEDROS E A ISOMETRIA DE REFLEXÃO: ORIENTAÇÃO ESPACIAL E USO DE BASES DISCORDANTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e Naturais, como pré-requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Fernando José Oliveira de Souza. Área de concentração: Geometria.

Aprovado em: 30 de setembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Fernando José Oliveira de Souza
Universidade Federal de Pernambuco

Examinador Interno (Orientador)

Prof. Dr. Airton Temístocles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Pernambuco

Examinador

Prof^a. Dr^a Verônica Gitirana Gomes Ferreira
Universidade Federal de Pernambuco

Examinador

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte da vida.

À minha família.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fernando Souza, pela paciência e sabedoria.

Aos meus supervisores de estágio, Israel Teixeira, Maycon Lima, Milton Muniz e Nadjaecio Coêlho, que proporcionaram ambientes em que pude aprender bastante com eles e com os estudantes.

Aos colaboradores da Escola Municipal Professora Maria das Neves Silva, da Escola de Referência em Ensino Médio Devaldo Borges e da Secretaria de Educação de Gravatá.

Ao coordenador do curso, William, à secretária do EaD, Ângela, aos professores e tutores.

Aos amigos e colegas que contribuíram nessa trajetória.

Obrigado!

RESUMO

A atividade didática sobre decomposição de poliedros aconteceu em uma escola pública estadual do Agreste de Pernambuco. Para isso, possibilitou-se um momento de manipulação de sólidos geométricos, em especial tetraedros, para configurá-los em cubos, paralelepípedos e pirâmides, a fim de observar suas relações volumétricas. Buscou-se verificar as competências discentes na conclusão de cada etapa, que, ao final, pretendia validar a constante um terço na fórmula do cálculo do volume da pirâmide. Os alunos engajaram-se na proposta, agiram com cooperação, trocaram ideias e alcançaram o êxito com a observação das possibilidades de configuração de vários sólidos a partir das mesmas peças que montaram, compreendendo melhor a fórmula da pirâmide. A necessidade de peças com orientação espacial diferentes para a montagem dos sólidos levou a momentos de interação entre os grupos, e isso se deveu ao papel da isometria espacial de reflexão em torno de um plano na confecção dos moldes dos tetraedros. Possivelmente, a prática de observar e conjecturar levou os estudantes a terem uma maior segurança na aplicação das expressões matemáticas envolvidas com a grandeza volume, assimilando-as de maneira significativa em vez de, meramente, decorá-las.

Palavras-chave: volume da pirâmide; materiais manipulativos; isometrias

MSC2020: 97G30; 97G40; 97G50; 97U60; 97E50.

ABSTRACT

A didactic activity on the decomposition (triangulation) of polyhedra took place in a state public school in the Agreste Zone of Pernambuco. It provided an occasion for manipulation of geometric solids, especially tetrahedra, assembling cubes, parallelepipeds, and pyramids with them in order to observe their volumetric relationships. We sought to diagnose students' skills at the conclusion of each stage and, at the very end of the activity, validate the constant one third in the formula for calculating the volume of the pyramid. The students engaged in the proposed tasks, collaborated, exchanged ideas, and succeeded in observing various solid configurations built from the same set of pieces, acquiring a better understanding of the formula for the volume of a pyramid. The need for pieces with different spatial orientations while assembling the solids led to interactions between the student groups, for the spatial isometry of reflection about a plane matters for manufacturing the tetrahedron molds. The practice of observing and conjecturing possibly led students to gain more confidence using the mathematical expressions involved with the quantity volume and, ultimately, assimilating them via a significant learning process rather than remembering them by rote memorization.

Keywords: volume of the pyramid; manipulative materials; isometries.

MSC2020: 97G30; 97G40; 97G50; 97U60; 97E50.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Proporcionalidade entre secções das pirâmides	20
Figura 2. Decomposição do cubo em prismas triangulares	21
Figura 3. Utilizando a base inferior para obtenção de um tetraedro	22
Figura 4. Utilizando a base superior para formar o tetraedro	23
Figura 5. Obtenção do terceiro tetraedro em um prisma triangular	23
Figura 6. Decomposição do prisma em três tetraedros	24
Figura 7. Reflexão de um tetraedro.....	27
Figura 8. Reflexões entre os tetraedros	29
Figura 9. Tetraedros concordantes e discordantes moldando o prisma	30
Figura 10. Decomposição do prisma de base triangular em tetraedro.....	32
Figura 11. Três pirâmides de base quadrada têm o mesmo volume que um cubo.....	33
Figura 12. Planificação de um tetraedro trirretangular.....	34
Figura 13. Planificações dos tetraedros tri-retangulares utilizados para o cubo	35
Figura 14. Moldes e tetraedros simétricos	36
Figura 15. Cubo montado a partir de tetraedros.....	36
Figura 16. Pirâmide construída com tetraedros.....	37
Figura 17. Alunos iniciando a montagem dos tetraedros.....	41
Figura 18. Várias peças já montadas nos grupos	41
Figura 19. Alunos tentam montar o cubo com peças da mesma cor	42
Figura 20. Permuta de peças entre os grupos	43
Figura 21. Cubo montado por alunos.....	43
Figura 22. Pirâmides montadas pelos alunos.....	44
Figura 23. Paralelepípedo montado com quatro cubos	44
Figura 24. Início da reconfiguração do paralelepípedo em três pirâmides.....	45
Figura 25. Três pirâmides construídas com os tetraedros do paralelepípedo.....	45
Figura 26. Peças com problemas de montagem	46

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TSD	Teoria das situações didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Justificativa	13
1.2 Motivação	13
1.3 Objetivos.....	14
1.3.1 Objetivo Geral	14
1.3.2 Objetivos específicos	14
1.4 Problema de pesquisa.....	15
1.5 Hipótese	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1 Volume de um sólido	16
2.2 Proporcionalidade no cálculo do volume do paralelepípedo	16
2.3 Princípio de Cavalieri.....	18
2.4 Prisma e seu volume	18
2.5 Pirâmide, tetraedro e seus volumes	19
2.6 Prisma de base triangular e sua decomposição em tetraedros	21
2.7 Volume da pirâmide e do tetraedro	22
2.8 Isometria e reflexão em relação a um plano.....	26
2.9 Didática	30
3 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	32
3.1 Representações sobre o porquê do fator um terço	32
3.2 Planificação e montagem de sólidos	34
4 METODOLOGIA	38
4.1 Tipo de estudo.....	38
4.2 Projeto de campo, métodos e materiais	38
4.3 Execução da atividade	39

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	40
5.1 Alunos montando o cubo e a pirâmide	42
5.2 Paralelepípedo e volume da pirâmide	44
5.3 Dificuldades durante a execução.....	46
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50
APÊNDICE A – MOLDE DOS TETRAEDROS	52

1 INTRODUÇÃO

A obra *Os Elementos* (c. 300 a.C.) de Euclides é fundamental tanto pela sua abordagem axiomática e dedutiva como pela sistematização da Geometria de sua época. O desenvolvimento dessa área ao longo dos séculos trouxe novas ideias, as quais, somadas aos recursos tecnológicos e às abordagens didático-pedagógicas, favorecem um entendimento bem melhor sobre o espaço euclidiano tridimensional. Para tanto, é necessário que haja esforços para garantir a devida qualidade no desenvolvimento de habilidades e competências do cidadão em formação sobre os aspectos de percepção visual e modelagem do ambiente ao redor.

Para Martins (2003), problemas geométricos exigem do educando metodologias de abordagem específicas. Isso indica a necessidade de qualidade no ensino e aprendizagem, pois, como ressalta Lorenzato (1995, pág. 5), “ser um bom conhecedor de Aritmética ou de Álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria”. O uso de axiomas e conceitos geométricos podem minimizar os cálculos e, algumas vezes, são o único ponto de partida na resolução de questões.

No entanto, o abandono do ensino geométrico nas escolas, por gestão inadequada do tempo, recursos e formação inadequada dos educadores (MARTINS, 2003; AMOULOUD *et. al.*, 2004), atrapalha o desenvolvimento do educando. A BNCC indica que se deve haver articulação entre os diversos campos da matemática para que os alunos consigam apreender situações do mundo real, representar e associar tais representações através de induções e conjecturas, verificando sua validade em seguida. De igual modo, argumentar e verificar as propriedades observadas junto ao saber institucionalizado, construindo seu conhecimento.

Há alguns conteúdos de destaque na BNCC para o campo da Geometria. Um deles é relacionado à montagem e planificação de poliedros, observando grandezas envolvidas, como número de faces, arestas, lados e diagonais. Outro é a transformação geométrica, em especial a simetria, para construir figuras e compreender produções antrópicas.

A reconfiguração plana de figuras e a aproximação por cortes para o cálculo de áreas, e o equivalente cálculo do volume de sólidos através do corte destes em partes mais fáceis de mensurar, recordam também o caminho contrário, ou seja, o da construção de figuras e poliedros através de figuras mais simples.

A memorização de fórmulas para o cálculo de volumes de alguns sólidos especiais se torna difícil para o aluno quando ele não compreende o porquê de alguns parâmetros presentes na fórmula, como, por exemplo, o motivo para haver o denominador três no cálculo do volume da pirâmide. Neste caso, tal parâmetro pode ser entendido pelo estudante através da decomposição de uma pirâmide em sólidos menores, valendo-se da manipulação.

De acordo com a **teoria de registros de representação semiótica** (DUVAL, 2012, tradução de MORETTI), a utilização de diversos registros associados a um mesmo objeto contribuem para uma melhor compreensão. Assim, recorrer à Álgebra para explicar uma representação algébrica de volume nem sempre é significativo ao estudante, pois não há variação da representação do problema. Sabendo que há outras possibilidades de fazê-lo compreender, ao fazer uso da competência da apreensão visual, a qual é intrínseca ao estudo da Geometria, e até mesmo trabalhar a ideia de visualização em um sentido amplo, pode-se vislumbrar mais chances de êxito para o desenvolvimento do educando.

1.1 Justificativa

Recordando princípios da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996) – como a relação entre a educação, o trabalho e a cidadania; o respeito à liberdade, à diversidade étnico-racial e sociocultural humana; a gestão democrática do ensino público e o compromisso com sua qualidade –, o presente texto visa compreender o processo de conjectura de alunos do Ensino Médio quanto à formulação de formas de calcular o volume de poliedros, e proporcionar vivências que permitam o entendimento do saber institucionalizado, das representações e manipulações entre representações – não unicamente algébricas –, para apreensão da relação entre vários sólidos com diferentes configurações no cotidiano.

1.2 Motivação

A motivação para a realização deste trabalho foi a de verificar a instituição do saber por parte dos alunos, o que vai além de memorizar informações e de apresentar o conhecimento através de resoluções de questões de geometria espacial. Isso segue

as habilidades EM13MAT309 e EM13MAT504, da BNCC:

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, 2018, p. 537).

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras (BNCC, 2018, p. 541).

E, como o foco é a manipulação de objetos para composições de variados sólidos, valendo-se das propriedades da isometria no espaço, a habilidade EM13MAT105 deve ser lembrada:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BNCC, 2018, p. 533).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Busca-se, neste trabalho, realizar observações sobre as conjecturas e experimentações na determinação das fórmulas do volume de poliedros por alunos do Ensino Médio, através da construção usando peças elementares, mais simples e, em particular, por meio de triangulações. Também, visa abordar isometrias na montagem desses corpos geométricos.

1.3.2 Objetivos específicos

- Discutir as isometrias envolvidas na construção de poliedros, como os hexaedros e pirâmides de base quadrada;
- Verificar a influência da orientação do espaço na montagem das peças;

- Observar estudos desenvolvidos sobre o problema da qualidade no ensino da Geometria e as soluções apontadas, buscando que seja significativo para os estudantes, almejando a qualidade do conhecimento.

1.4 Problema de pesquisa

Os alunos do Ensino Médio entendem a fórmula do volume de pirâmides através da decomposição de sólidos? São capazes de verificá-la a partir de algum sólido de referência?

1.5 Hipótese

O contato com diversas representações para o cálculo do volume de poliedros permite aos alunos compreenderem as propriedades e fórmulas, bem como seus arcabouços e os detalhes envolvidos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Volume de um sólido

Intuitivamente, o **volume** de um sólido geométrico é o espaço ocupado por ele. Segundo Dolce & Pompeo (2013), a **medida de volume** de um sólido é a associação desse sólido a um número real positivo. Isso é feito de tal forma que: sólidos congruentes possuem a mesma medida de volume; e, se um sólido é formado pela reunião de outros sólidos de forma que esses não possuem pontos interiores em comum, então, sua medida de volume é a soma das medidas de volume de cada um daqueles sólidos.

A medida de volume segue uma referência, a **unidade de volume**, a qual geralmente é um cubo, com arestas medindo 1 (uma) unidade de comprimento, o qual é chamado de **cubo unitário**. Se a unidade de comprimento for o metro, então o cubo unitário terá 1 metro cúbico de volume (1 m^3); se for o centímetro, terá 1 cm^3 ; e assim por diante. Em todo caso, a unidade de volume tem dimensões de cubo (no caso, potência de expoente três) da unidade de comprimento.

2.2 Proporcionalidade no cálculo do volume do paralelepípedo

Denotando por $P(a,b,c)$ o volume de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões das arestas são a , b e c , tem-se que, em particular, o volume do cubo unitário é $P(1,1,1)$, pois suas dimensões são unitárias.

Quando se deseja obter a medida do volume de um paralelepípedo retângulo $P(a,b,c)$ qualquer, faz-se a relação com o cubo unitário, através da razão a seguir, sendo ela numericamente igual ao volume do paralelepípedo:

$$V = \frac{P(a, b, c)}{P(1,1,1)} \quad (\text{Equação 1})$$

Logo, a razão entre as medidas $P(a,b,c)$ e $P(1,1,1)$ equivale à medida de volume procurada na unidade adotada, ou seja, em unidades nas quais a medida de volume do cubo unitário é numericamente igual a 1. Conforme Dolce & Pompeo (2013), dados dois paralelepípedos retângulos cujas bases são congruentes, a razão entre eles é igual à razão entre suas alturas.

Disso, observando-se proporções entre os seguintes paralelepípedos com bases congruentes $P(a,b,c)$; $P(a,b,1)$; $P(a,1,1)$ e $P(1,1,1)$, tem-se:

$$\frac{P(a,b,c)}{P(a,b,1)} = \frac{c}{1} \quad (\text{eq. 2.i}) \quad \text{bases congruentes, com lados } a \text{ e } b.$$

$$\frac{P(a,b,1)}{P(a,1,1)} = \frac{b}{1} \quad (\text{eq. 2.ii}) \quad \text{bases congruentes, com lados } a \text{ e } 1.$$

$$\frac{P(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \quad (\text{eq. 2.iii}) \quad \text{bases congruentes, com lados } 1 \text{ e } 1.$$

Multiplicando-se membro a membro as equações eq. 2.i, 2.ii e 2.iii:

$$\frac{P(a,b,c)}{P(a,b,1)} \cdot \frac{P(a,b,1)}{P(a,1,1)} \cdot \frac{P(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{a}{1}$$

$$= \frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{a}{1} = V$$

$$= \frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{1} = V = a \cdot b \cdot c$$

Em suma:

$$V = abc \quad (\text{Equação 2})$$

Assim, essa representação indica que o volume de um paralelepípedo retângulo é equivalente ao produto de suas dimensões, na unidade escolhida.

Como consequência, já que um cubo possui as dimensões congruentes, ele tem volume $V = a^3$, quando a medida de sua aresta for igual a a . Como esperado, o volume do cubo unitário, de aresta igual a 1, é $V = 1^3 = 1$, como apresentado anteriormente.

Pode-se fazer uma nova representação algébrica para a Equação 2 tomando as medidas das dimensões sobre um plano de observação. As dimensões que estão contidas nesse plano seriam constituintes do que se chama de **base** do paralelepípedo, enquanto a outra, que não está contida nele, é denominada **altura**.

Assim, pode-se reescrever o produto das duas dimensões contidas no plano – por exemplo, a e b – através da expressão $A_b = a \cdot b$. Nesse caso, A_b representa a medida da área da base do paralelepípedo.

Chamando a dimensão c de altura, passando a representá-la por h , pode-se reescrever a Equação 2, e apresentar o volume como:

$$V = A_b \cdot h \quad (\text{Equação 3})$$

Isto é, a Equação 3 indica que o volume de um paralelepípedo é o produto da área de sua base pelo comprimento de sua altura.

2.3 Princípio de Cavalieri

Na Grécia Antiga, o **método de exaustão** para o cálculo de medidas de área e volume foi introduzido por Antifonte de Ramnunte no séc. V a.C., e desenvolvido por Eudoxo de Cnido no séc. IV a.C. Grégoire de Saint-Vincent deu aquele nome ao método em 1647. O **princípio de Cavalieri**, originalmente chamado de **método dos indivisíveis**, foi estudado extensivamente por Bonaventura Cavalieri em obras de 1635 e 1647. Ele foi um estágio intermediário entre o método de exaustão e o **cálculo integral**. Os indivisíveis assemelha-se a uma versão geométrica dos infinitesimais do cálculo e da análise matemática.

Segundo Dulce & Pompeo (2013), o Princípio de Cavalieri aplica-se a uma situação em que se tomam dois sólidos apoiados num mesmo plano. Se todos os planos paralelos ao plano de apoio, ao seccionar cada um dos dois sólidos, evidenciarem áreas equivalentes, então esses dois sólidos possuem volumes iguais, ou seja, são **sólidos equivalentes**. Dante (2009) ressalta que esse princípio facilita o cálculo de volumes.

2.4 Prisma e seu volume

De acordo com Dante (2009), um **prisma** é um sólido formado através da delimitação do espaço entre regiões poligonais convexas, em que: duas dessas regiões são simétricas e estão contidas em dois planos paralelos, constituindo as duas **bases** do prisma, e; outras regiões em forma de paralelogramos que interceptam simultaneamente ambos os planos paralelos, coincidindo com os lados das poligonais das bases. Os lados adjacentes da base determinam paralelogramos adjacentes, os quais são as **faces laterais** do prisma. Os lados desses paralelogramos, que não coincidem com as bases, constituem as **arestas laterais**.

Devido ao paralelismo das arestas laterais, qualquer terceiro plano que for paralelo aos planos que contém as bases, e que intercepte o prisma, determinará uma região poligonal convexa simétrica à base, e, por consequência, de mesma medida de área. Esse fato possibilita a utilização do princípio de Cavalieri para se determinar o volume de um prisma.

Assim, por Cavalieri, para se determinar o volume de um prisma, pode-se compará-lo a um paralelepípedo com mesma medida de área da base. De fato, seções iguais desses dois sólidos terão áreas equivalentes e, portanto, eles serão chamados de sólidos equivalentes e, assim, terão a mesma medida de volume. Daí, conclui-se que a medida de volume de um prisma é dada pela mesma expressão de cálculo da medida de volume de um paralelepípedo (a Equação 3):

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h \quad (\text{Equação 4})$$

Nesse ponto, destaca-se a relevância dada à área da base no cálculo do volume desses sólidos.

2.5 Pirâmide, tetraedro e seus volumes

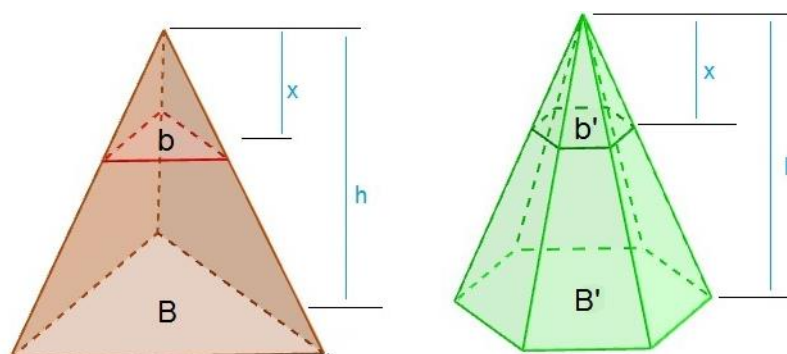
Tomando-se uma região poligonal convexa contida em um plano, a qual será denominada **base da pirâmide**; um ponto V , chamado **vértice**, exterior ao plano que contém aquela região, e; regiões triangulares determinadas pelo ponto V e dois vértices consecutivos da base, que serão chamadas de **faces laterais**, entende-se uma **pirâmide** como sendo o poliedro determinado pela base da pirâmide, as faces laterais e a união dos segmentos com extremidades no vértice e em pontos da região poligonal da base (DANTE, 2009; DULCE; POMPEO, 2013). A distância h do ponto V ao plano que contém a base é a **altura** da pirâmide.

O tetraedro é uma pirâmide cuja base é triangular, assim, todas suas faces são triangulares. Quanto a classificações, um tetraedro é dito regular se, e somente se, tem todas as arestas congruentes (em linguagem mais rigorosa e precisa, duas a duas congruentes); e retangular, se e somente se, o vértice V forma, com um dos vértices do polígono da base, um segmento de reta perpendicular à base.

As semelhanças e proporcionalidades das figuras geométricas encontradas nas pirâmides permitem relações para o cálculo de seus volumes.

Tomem-se duas pirâmides com bases B e B' , respectivamente, e mesma altura h , apoiadas em um mesmo plano α . Seja β um plano paralelo ao plano que contém as bases, situado a uma altura x a partir do vértice. A intersecção desse plano β com as pirâmides determina polígonos b e b' , respectivamente, homotéticos aos polígonos das bases correspondentes. Denotando-se também por B , B' , b e b' as respectivas medidas de área desses polígonos, o seguinte resultado será justificado agora: se $B = B'$, então, $b = b'$.

Figura 1. Proporcionalidade entre secções das pirâmides



Fonte: Autor (2024)

Denote-se por k a razão entre as dimensões lineares das figuras semelhantes. A razão entre suas medidas de áreas é a segunda potência de k :

$$k = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad k^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2 \quad (\text{Equação 5})$$

Sendo as figuras b e B semelhantes, e b' e B' também semelhantes, então:

$$\frac{\text{área de } B}{\text{área de } b} = \left(\frac{h}{x}\right)^2 = \frac{\text{área de } B'}{\text{área de } b'} \quad \rightarrow \quad \frac{\text{área de } B}{\text{área de } b} = \frac{\text{área de } B'}{\text{área de } b'}$$

O que implica em:

$$\frac{\text{área de } b'}{\text{área de } b} = \frac{\text{área de } B'}{\text{área de } B}$$

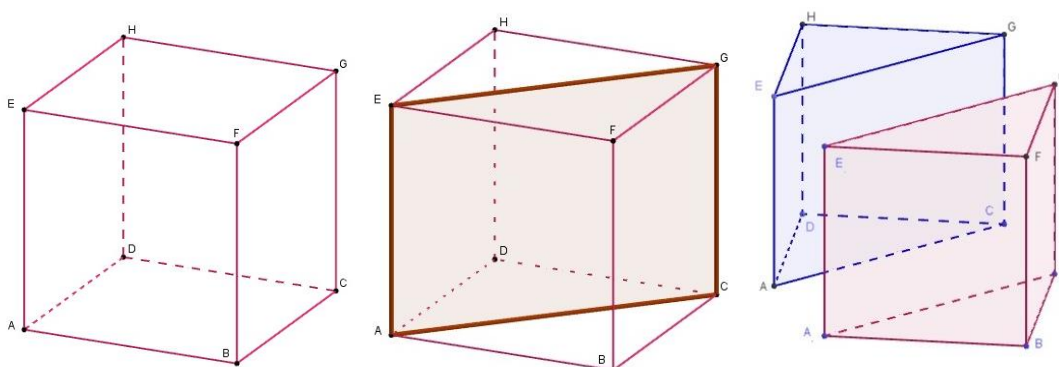
Como adotou-se que as medidas das áreas B e B' são congruentes, conclui-se que as medidas das áreas b e b' são iguais para qualquer plano paralelo ao plano α , que contém as bases. Portanto, através do princípio de Cavalieri, **pirâmides com medidas da área da base iguais e alturas congruentes possuem volumes iguais** (DANTE, 2009; DULCE; POMPEO, 2013).

2.6 Prisma de base triangular e sua decomposição em tetraedros

Seguindo Machado (2012), observa-se que uma região poligonal plana pode ser formada pela união de regiões triangulares que, de duas em duas, só podem se interceptar em um vértice ou um lado (aresta) como aos dois. Uma **triangulação** dessa região é a decomposição dela em triângulos, e possui um análogo para regiões poliedrais, como se discutirá mais adiante.

Ao se realizar a triangulação da base de um prisma, cada triângulo pode tornar-se a base para um prisma de base triangular. Em outras palavras, todo prisma pode ser decomposto em prismas com bases triangulares. Por exemplo, um cubo ABCDEFGH pode ser seccionado de forma a formar dois prismas triangulares: ABCEFG e ADCEHG, como exibido na Figura 2.

Figura 2. Decomposição do cubo em prismas triangulares



Fonte: Autor (2024)

Uma observação a ser feita é quanto a ordem adotada neste texto para a escrita dos pontos que constituem os prismas triangulares: ABCEFG e ADCEHG. Associando um a um, na ordem em que aparecem, nota-se a divergência entre B e D, na segunda posição, e F e H, na quinta posição. Os pontos B e D são opostos em relação ao plano de secção do cubo. De igual modo, F e H também são opostos entre si. Essa abordagem também será utilizada na Seção 2.8, sobre isometria e reflexão em relação a um plano.

Análoga à triangulação de uma região poligonal plana, tem-se a **triangulação** por tetraedros de um sólido poliedral no espaço tridimensional, na qual ele é decomposto como a união de tetraedros que, de dois em dois, só podem se interceptar em apenas um vértice ou lado (aresta) ou face comum aos dois.

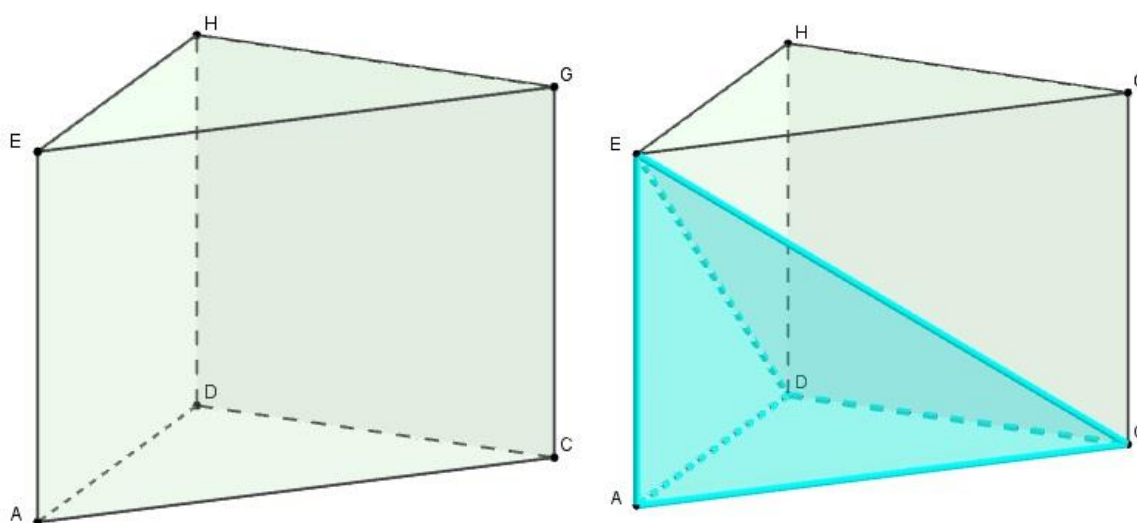
2.7 Volume da pirâmide e do tetraedro

Discutir-se-á uma triangulação de um prisma triangular em três tetraedros. Essa triangulação do prisma triangular será realizada para se encontrar uma relação entre as medidas de volume do prisma e dos tetraedros que o compõem.

Para que se acompanhe a construção com a figura de um prisma já discutido acima, denote-se, sem perda de generalidade, o prisma por $ADCEHG$, cujas bases são os triângulos denotados por ADC e EHG .

Tome-se uma das bases do prisma como base do primeiro dos três tetraedros, o qual será denotado por pirâmide P_1 . Também, toma-se um ponto no polígono da outra base do prisma para ser o vértice de P_1 . Assim, escolhendo ADC como a base, e E como o vértice, P_1 é o tetraedro $ADCE$. Isso está exemplificado na Figura 3.

Figura 3. Utilizando a base inferior para obtenção de um tetraedro

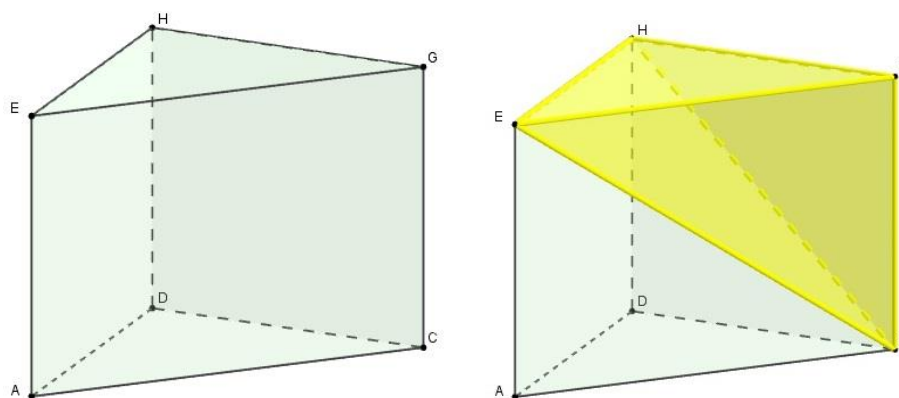


Fonte: Autor (2024)

Analogamente, usando-se a outra base do prisma, no caso EHG , como base para um segundo tetraedro, que será denotado por pirâmide P_2 ; e um dos dois vértices – C ou D – do prisma, diga-se, C , tem-se que P_2 é o tetraedro $EHGC$.

Pode-se demonstrar que P_1 e P_2 – os tetraedros $ADCE$ e $EHGC$ – interceptam-se, justamente, na aresta EC . Isso está ilustrado na Figura 4.

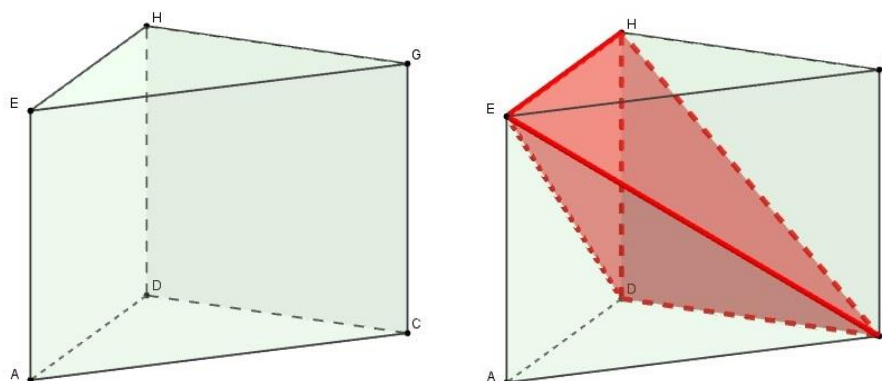
Figura 4. Utilizando a base superior para formar o tetraedro



Fonte: Autor (2024)

Por sua vez, o terceiro tetraedro – denotado por pirâmide P_3 – será formado de modo que seu interior seja o espaço restante no prisma. Explicitamente, tomem-se: o triângulo EDC como base de P_3 ; e, como vértice, o ponto H. Logo, P_3 é o tetraedro EDCH. Isso está exemplificado na Figura 5.

Figura 5. Obtenção do terceiro tetraedro em um prisma triangular



Fonte: Autor (2024)

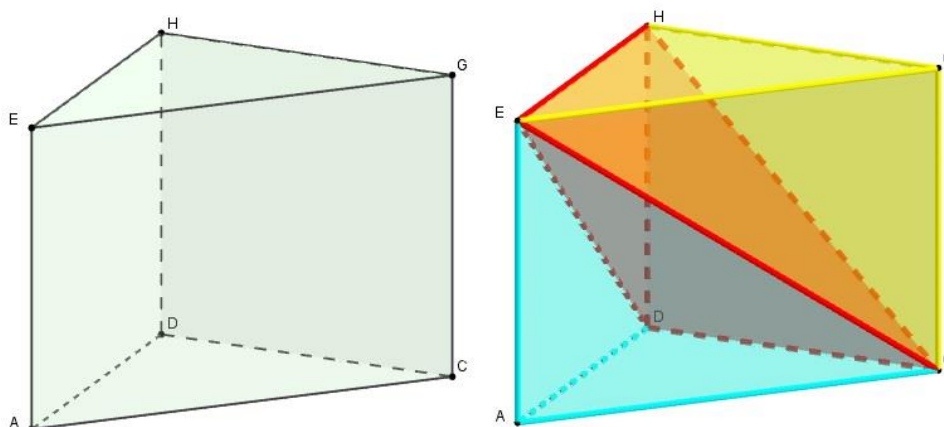
Pode-se demonstrar que:

- P_1 e P_3 (os tetraedros ADCE e EDCH) interceptam-se na face EDC; e
- P_2 e P_3 (os tetraedros EHGC e EDCH) interceptam-se na face EHC.

Ressalta-se que todo o espaço dentro do prisma foi decomposto para os três tetraedros, como mostrado na Figura 6.

Além disso, de dois em dois, eles estão justapostos, de modo que não têm pontos interiores em comum, considerando-se a discussão acima sobre como se interceptam. Logo, a soma de suas medidas de volume é igual à medida de volume do prisma.

Figura 6. Decomposição do prisma em três tetraedros



Fonte: Autor (2024)

Quanto ao volume de cada tetraedro observa-se que:

- As pirâmides P_1 (ADCE) e P_2 (EHGC) têm a mesma medida de área da base, pois são as medidas para as bases inferior e superior do prisma, que são simétricas. Além disso, elas têm a mesma altura, que é a do prisma, estando o vértice de P_1 sobre a base superior, e o de P_2 , sobre a inferior. Do final da Seção 2.5, tem-se que pirâmides de bases equivalentes e mesma altura têm a mesma medida de volume. Logo, P_1 e P_2 são sólidos equivalentes;
- A pirâmide P_3 (EDCH) possui a mesma medida de área da base que P_2 (EHGC), pois a face lateral retangular CDHG do prisma é dividida igualmente entre as duas pela diagonal CH, e elas têm a mesma altura, dada pelo vértice comum E com relação ao plano da face lateral CDHG. Assim, também da Seção 2.5, P_2 e P_3 possuem o mesmo volume; e
- Por transitividade, P_1 e P_3 também possuem mesmo volume. Poder-se-ia, alternativamente, repetir o raciocínio anterior para as pirâmides P_1 e P_3 , já que a diagonal DE divide a face lateral retangular ADHE do prisma igualmente entre as bases delas, e elas têm o vértice C em comum.

Logo, as três pirâmides possuem a **mesma medida de volume** V_p . Como a medida do volume total do prisma é igual à soma das medidas dos volumes dessas pirâmides, tem-se:

$$V_{\text{prisma}} = V_{P1} + V_{P2} + V_{P3}$$

$$V_{\text{prisma}} = V_p + V_p + V_p$$

$$V_{\text{prisma}} = 3 \cdot V_p \quad (\text{Equação 6})$$

Logo, o volume total do prisma é o triplo do volume de qualquer um dos tetraedros. Assim, verifica-se que o prisma triangular pode ser decomposto em três tetraedros equivalentes e utiliza-se esse fato para expressar o volume da pirâmide valendo-se da fórmula do volume do prisma. Como o volume de um prisma triangular é dado pela Equação 4, $V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$, tem-se que **a medida de volume do tetraedro é um terço da medida de volume do prisma:**

$$3 \cdot V_{\text{tetraedro}} = V_{\text{prisma}}$$

$$3 \cdot V_{\text{tetraedro}} = A_b \cdot h$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{A_b \cdot h}{3} \quad (\text{Equação 7})$$

Ademais, segundo Dante (2009) pode-se associar qualquer pirâmide de base poligonal de n lados a um tetraedro de modo que as medidas da área de base e altura sejam congruentes. Pois, utilizando o princípio de Cavalieri, deduz-se que **a medida de volume de uma pirâmide qualquer** também é um terço da medida do volume de um prisma de mesma altura e de base equivalente. Logo:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3} \quad (\text{Equação 8})$$

Como todo paralelepípedo é decomponível em dois prismas triangulares congruentes, os quais são decomponíveis em três tetraedros – como visto anteriormente – conclui-se que todo paralelepípedo é decomponível em seis tetraedros, o que constitui uma triangulação desse poliedro.

Assim, um cubo pode ser decomposto em seis tetraedros, e o volume de cada um deles é um sexto do volume total do cubo. Recorde-se, da álgebra vetorial, que o volume do tetraedro é, de fato, um sexto do módulo do produto misto entre os vetores determinados pelos lados incidentes a qualquer um de seus vértices (CAMARGO; BOULOS, 2005).

2.8 Isometria e reflexão em relação a um plano

A palavra **isometria** vem do grego e significa igual medida, ou medidas congruentes. Na Geometria, a isometria relaciona-se com uma transformação em que se preserva a distância entre os pontos e, conseqüentemente, as medidas das grandezas por eles determinadas.

No caso de uma isometria na reta, as medidas de comprimento são preservadas pela transformação. Já numa isometria no plano, tanto as de comprimento como as de área são preservadas. Por sua vez, uma isometria no espaço preserva as medidas de comprimento, de área e de volume.

Indicaremos por **E** o **espaço euclidiano tridimensional**, que é a notação no livro (CAMARGO; BOULOS, 2005), diferente da notação **E** no livro (LIMA, 2007). Uma definição de isometria no espaço:

“Uma função $T: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ chama-se uma isometria quando preserva a distância entre pontos de **E**, isto é, quando $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$, para quaisquer $X, Y \in \mathbf{E}$ ” (LIMA, 2007, p. 63).

Também, segundo Lima (2007), através da isometria $T: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, se uma reta s é perpendicular a um plano $\Pi \subset \mathbf{E}$, a imagem dessa reta s , $s' = T(s)$, é perpendicular à imagem do plano $\Pi = T(\Pi)$. O mesmo vale entre duas retas no espaço. Em outras palavras: **toda isometria no espaço preserva perpendicularidade (ou perpendicularismo) entre retas e entre reta e plano.**

As transformações isométricas no espaço podem ser de algum tipo simples (elementar) e célebre ou composições de alguns desses tipos, a saber: identidade; simetria em torno de um ponto; reflexão em torno de um plano; rotação em torno de uma reta; translação; isometria helicoidal; reflexão com deslizamento; e rotação refletida. A **reflexão em torno de um plano** é de particular interesse para o presente texto, e pode ser entendida do seguinte modo:

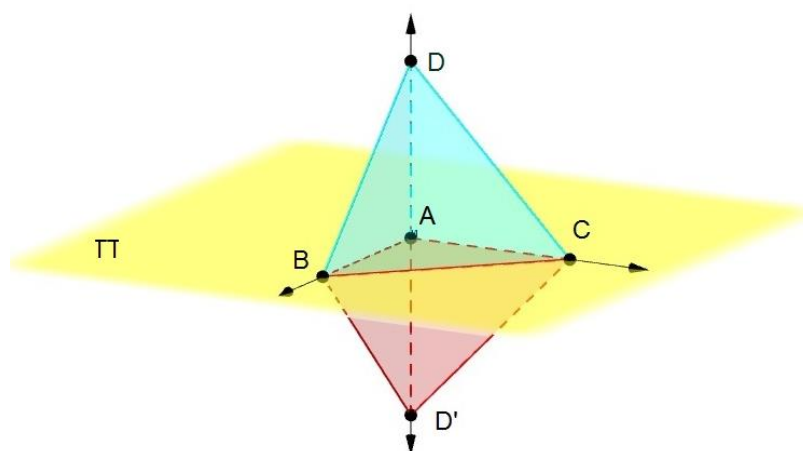
Seja $\Pi \subset E$ um plano. A reflexão em torno de Π é a função $R_{\Pi}: E \rightarrow E$ que associa a cada ponto $X \in E$ o ponto $X' = R_{\Pi}(X)$, tal que Π é o plano mediador do segmento XX' . Isso significa que XX' é perpendicular a Π e, além disso, se $\{A\} = XX' \cap \Pi$, então $\overline{XA} = \overline{AX'}$. Então, para todo ponto $B \in \Pi$ tem-se também $\overline{XB} = \overline{BX'}$ (LIMA, 2007, p. 68).

Disso, conclui-se que um ponto D e sua imagem (seu reflexo) D' , em relação a um plano, determinam uma reta perpendicular a este plano, sendo que a distância do ponto D ao plano é igual à distância de sua imagem D' ao mesmo plano. Tal reta perpendicular intercepta o plano em um ponto A , que Dulce & Pompeo (2013) denominam o pé da reta perpendicular em relação ao plano.

Outra questão importante em isometrias espaciais refere-se à sua classificação em **própria ou imprópria**, o que corresponde à possibilidade ou à impossibilidade, respectivamente, de se obter a isometria como a etapa final de um movimento. Por **movimento no espaço**, entende-se uma coleção de isometrias no espaço H_t parametrizada por $t \in [0, 1]$ (tempo, instante) tal que H_0 é a transformação identidade e, para cada ponto $P \in \mathbf{E}$, a função $t \mapsto H_t(P)$, de $[0, 1]$ em \mathbf{E} , é contínua.

Tomando-se como exemplo a reflexão em torno de um plano, Lima (2007) mostra que essa isometria é imprópria. Para evidenciar isso, pode-se tomar o tetraedro $ABCD$ e seu reflexo $ABCD'$ sobre o plano Π , como exposto na Figura 7.

Figura 7. Reflexão de um tetraedro



Fonte: Autor (2024)

Da álgebra vetorial tem-se que o determinante entre os vetores que transladam o ponto A nos demais vértices do tetraedro $ABCD$ pode ser associado a uma medida de volume. Tomando-se o ponto A na origem, as coordenadas dos vetores são $AB = (1,0,0)$, $AC = (0,1,0)$ e $AD = (0,0,1)$, encontrando-se o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

O módulo desse valor, que é igual a 1, é o volume do paralelepípedo de lados ortogonais entre si AB, AC e AD, de modo que o volume do tetraedro é igual a 1/6. As isometrias no espaço aplicadas aos pontos A, B, C e D produzirão imagens, as quais serão vértices de tetraedros triretangulares cujo módulo do determinante das coordenadas dos vetores correspondentes também é igual a 1/6.

E, sendo o determinante uma função contínua, qualquer movimento teria que manter o determinante igual a em todos os instantes $t \in [0, 1]$. Em particular, não se poderia ter a troca de sinais do determinante ao longo de $[0, 1]$. Por outro lado, os vetores com origem em A na determinação do volume do tetraedro refletido ABCD' são $AB = (1,0,0)$, $AC = (0,1,0)$ e $AD' = (0,0,-1)$, e o determinante de suas coordenadas é dado por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Com essa discordância de sinais, tem-se que a reflexão é imprópria. Esse fato está relacionado à orientação espacial dos objetos.

Camargo e Boulos (2005) trazem a seguinte ideia de bases de coordenadas concordantes e discordantes, sendo \mathbf{V}^3 o espaço vetorial tridimensional dos vetores geométricos em \mathbf{E} (denotado por \mathbf{E}^3 naquele livro), e M_{EF} a matriz de mudança da base E para a base F:

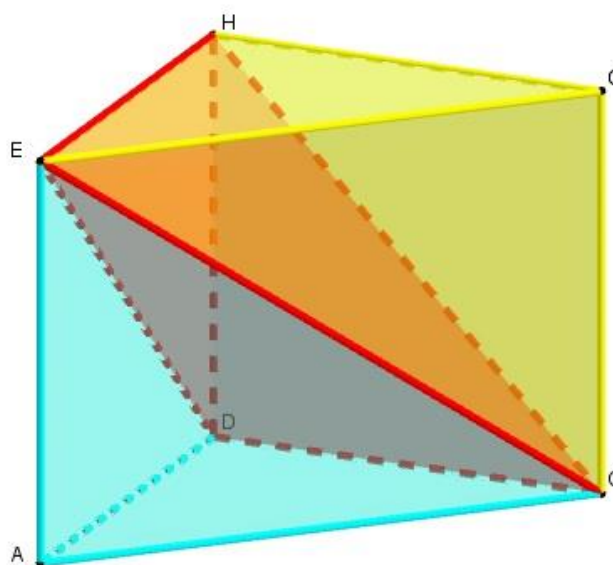
“Sejam E e F bases de \mathbf{V}^3 . E é concordante com F se a matriz M_{EF} tem determinante positivo, e discordante de F se esse determinante é negativo” (CAMARGO; BOULOS, 2005, p. 92).

As bases se particionam em dois conjuntos disjuntos, que denominamos de orientações para o espaço, podendo ser provada uma associação entre uma dessas classes e a regra da mão direita, e a outra classe à regra da mão esquerda. Dizemos que bases concordantes **têm a mesma orientação** (e induzem a mesma orientação em E), enquanto bases discordantes **têm orientações opostas**.

Para o caso dos tetraedros da Figura 7, a matriz de mudança de uma base para outra obtida pela reflexão da primeira base teria determinante negativo, indicando que elas são **bases discordantes**.

Na Seção 2.6 mostrou-se que um cubo pode ser decomposto em dois prismas triangulares, e se ressaltou a oposição entre pontos que delimitam os prismas em relação ao plano que seccionou o cubo. Pela forma como isso foi feito, foram gerados dois prismas isométricos por reflexão. Já na Seção 2.7, a forma pela qual se decompôs o prisma em tetraedros, conforme se pode observar na Figura 8, também gerou reflexões em torno de planos secantes ao prisma.

Figura 8. Reflexões entre os tetraedros



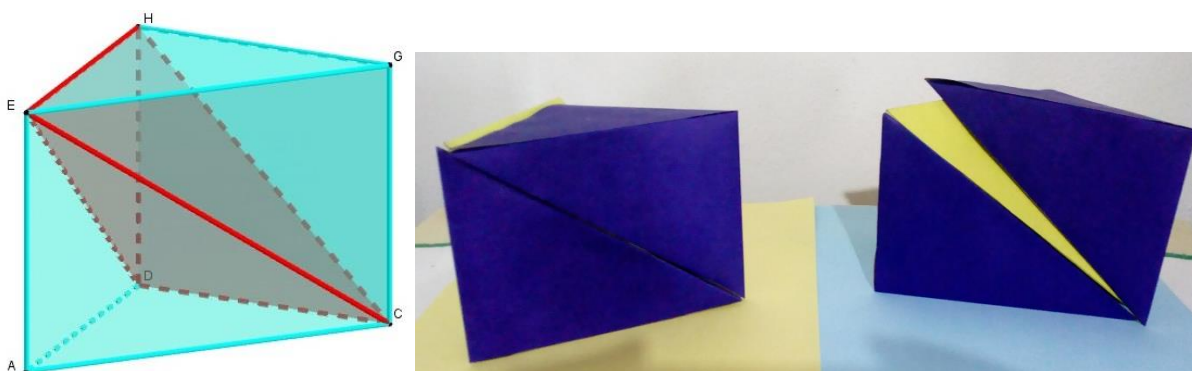
Fonte: Autor (2024)

Na Figura 8, os tetraedros EHGC e EHDC podem ser visualizados como um reflexo um do outro, considerando o plano secante CEH. Como discutido em 2.7, eles são **congruentes** e, pela isometria imprópria oriunda da reflexão, indica-se que são de **orientações distintas**. Já o plano secante CED pode ser adotado como o plano de reflexão entre os tetraedros EHDC e ACDE, também congruentes. Logo, eles também têm orientações distintas.

Segundo Lima (2007, p. 85), a composição de duas isometrias impróprias resulta em uma isometria própria. Desse modo, se EHGC é refletido para EHDC, pelo plano CEH, e EHDC é refletido para ACDE, pelo plano CED, então a isometria entre ACDE e EHGC é própria. Ou seja, um movimento no espaço pode levar ACDE a ter a mesma configuração de EHGC. Observa-se que a rotação de ACDE em torno do segmento CE coincide com EHGC, e rotações são isometrias próprias, segundo Lima (2007).

Assim, a decomposição do prisma, nos moldes da Figura 8, revela que há dois tetraedros que podem ser isométricos próprios e “**concordantes**” (associados a uma mesma orientação), e um tetraedro “**discordante**” (com a outra orientação) entre os outros dois, conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9. Tetraedros concordantes e discordantes moldando o prisma



Fonte: Autor (2024)

2.9 Didática

Observando a dificuldade dos alunos em apreender significados de conteúdos de geometria, Gabriel (2017) indica que a falta de materiais didáticos pedagógicos ou limitações dos educadores contribuem para esse cenário. Nos documentos brasileiros, como PCN e na BNCC, o estudo da Geometria parte da análise de sólidos, manuseios e construções pelos alunos, favorecendo que eles conjecturem e identifiquem propriedades. Assim, propor momentos em que se permita a ação dos alunos em verificar propriedades dos objetos estudados constitui chance para desenvolver o conhecimento e o saber.

Ademais, novas representações para um mesmo volume através da manipulação de peças oriundas da decomposição dos sólidos podem possibilitar a compreensão dos registros algébricos e físicos, pois, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2012), é por intermédio das representações semióticas que se pode expressar concepções mentais com finalidade de operá-las e comunicá-las, valendo-se de processos que contribuem para a mobilização de funções epistemológicas e cognitivas.

Para tanto, um sistema semiótico deve apresentar três atividades cognitivas para ser um registro de representação: uma representação identificável; o tratamento – o que corresponde à transformação da representação num mesmo tipo de registro –, e; a conversão – entendida como a transformação para outro tipo de registro (DUVAL, 2012, tradução de MORETTI).

Nesse texto, as fórmulas, as figuras esquemáticas, e os enunciados compõem uma representação identificável, já a reconfiguração física dos sólidos e a manipulação algébrica das fórmulas são atividades de tratamento, enquanto que a associação entre os sólidos as fórmulas de cálculo envolvem a conversão.

3 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

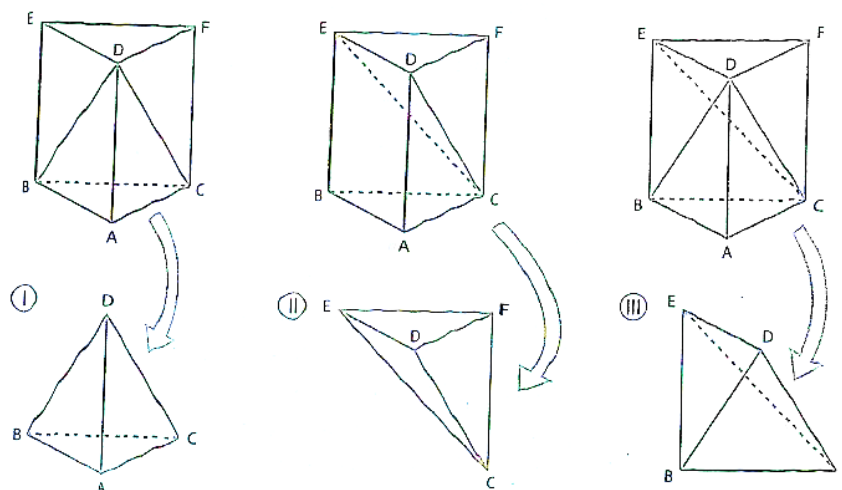
3.1 Representações sobre o porquê do fator um terço

Como visto anteriormente, o poliedro de quatro faces é denominado tetraedro, o qual é uma pirâmide, sob a especificação de pirâmide de base triangular. Também, para qualquer polígono da base, a fórmula para o cálculo do volume da pirâmide é dada por $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$, onde: A_b é a medida da área da base, e h é a medida da altura do sólido.

Memorizar tal fórmula não parece ser um problema. No entanto, entendê-la e, principalmente, compreender a presença do denominador três, é uma tarefa complicada para alunos da educação básica e talvez até para o professor, que pode não dispor de ferramental para explicar algebricamente o porquê. A exposição visual pode gerar confusão ao se tentar descrever uma propriedade tridimensional em desenhos bidimensionais e justificar com tópicos discutidos em aulas recentes, tais como o princípio de Cavalieri, que geralmente é trabalhado antes com os alunos.

Na Figura 10, expõe-se um exemplo de ilustração em livro didático do porquê divide-se por 3, através da decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. Essa figura apresenta como os três tetraedros se justapõem para compor o prisma, mas, exige um esforço mental para delimitar através dos vértices do prisma quais regiões do espaço determinam cada tetraedro.

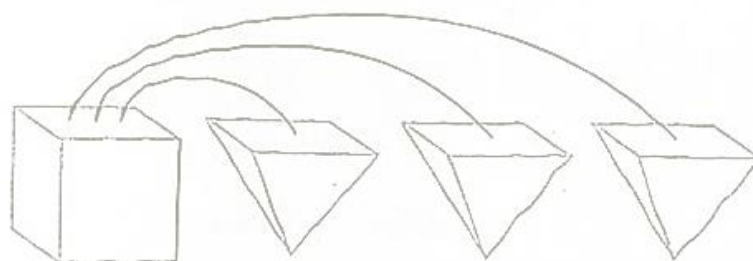
Figura 10. Decomposição do prisma de base triangular em tetraedro



Fonte: Dante (2009), pág.441-442. Adaptado.

Aplicando-se congruência de triângulos e o princípio de Cavalieri, encontra-se que os três tetraedros têm mesmo volume. Assim, se o volume do prisma de base triangular é dado por $V = A_b \cdot h$, produto das medidas da área da base e da altura, então, o volume da pirâmide de base triangular (tetraedro) seria um terço desse volume. A conclusão é estendida às pirâmides de base qualquer, indicando-se que seu volume seria $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$. Na Figura 11 apresenta-se essa conclusão no contexto do volume das pirâmides de base quadrada, em que seriam necessárias três delas para se preencher o mesmo volume que um cubo (hexaedro regular).

Figura 11. Três pirâmides de base quadrada têm o mesmo volume que um cubo



Fonte: Dante (2009), pág. 442.

Ainda assim, essas são informações que são apenas observadas e refletidas passivamente pelos alunos com a finalidade de apreensão de expressões para a medida do volume. Entretanto, os atos de memorizar e compreender ainda ocupam níveis baixos na taxonomia de Bloom. O ideal é a evolução buscando desenvolver as competências de aplicar, analisar, avaliar e criar, sendo essa última a de nível mais alto, pois já reflete a habilidade e o saber do indivíduo para ser capaz de alterar a realidade mediante seu conhecimento.

A prática de propor conjecturas a partir da investigação de situações reais contribui para a consolidação de conceitos, e promove sensibilidade à pesquisa matemática. Consequentemente, ela favorece a superação do aluno ante o obstáculo de apenas armazenar informações apresentadas, passando a ser ativo na busca pelo conhecimento. Conforme Kopke (2006), é urgente procurar uma didática que favoreça a comunicação de diferentes códigos e sua interpretação, como também a assimilação do ambiente natural e das formas criadas pelo homem ao seu redor – o que está no âmbito da Geometria – proporcionando a cidadania através de uma educação transformadora da vivência.

A avaliação mediadora, conforme Hoffmann (2014), propõe que haja uma produção de saber enriquecido, por meio da compreensão dos processos estudados, com a troca de ideias entre todos os participantes – professores e estudantes – num movimento que se opõe ao simples saber transmitido.

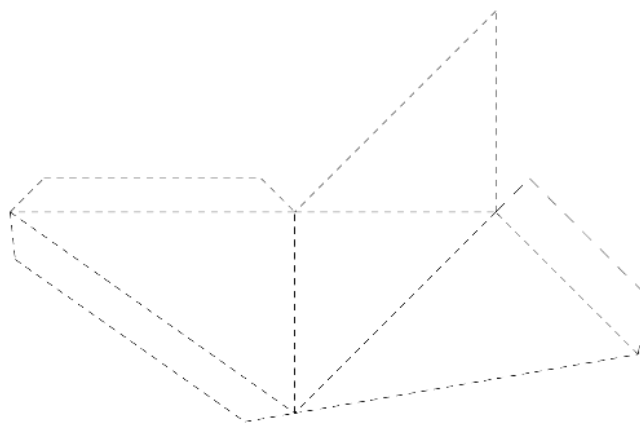
3.2 Planificação e montagem de sólidos

A BNCC apresenta a planificação de sólidos geométricos como atividade já para o terceiro ano do Ensino Fundamental, propondo observação de propriedades, manipulação e associação com objetos do dia a dia. Depois, há um período de apresentação da Geometria Plana, e a Geometria Espacial retorna no Ensino Médio para o tratamento algébrico de cálculo de áreas de superfície, volumes e capacidade.

Ainda assim, o pouco incentivo à decomposição do sólido e à reconstrução dele com outra configuração – em que se apresentaria mais de uma representação de mesmo volume –, leva a uma perda da oportunidade de investigação e conjectura, limitando os alunos a memorizar e exercitar as fórmulas.

Contudo, deve-se ter atenção aos recursos utilizados, como os moldes para montagem, pois um dos problemas observados é que algumas decomposições em sólidos menores exigem observação com a orientação espacial no momento da remontagem. Um exemplo, é que a partir de um cubo, realiza-se o corte em seis tetraedros trirretangulares e a planificação de um desses tetraedros pode ser vista na Figura 12.

Figura 12. Planificação de um tetraedro trirretangular



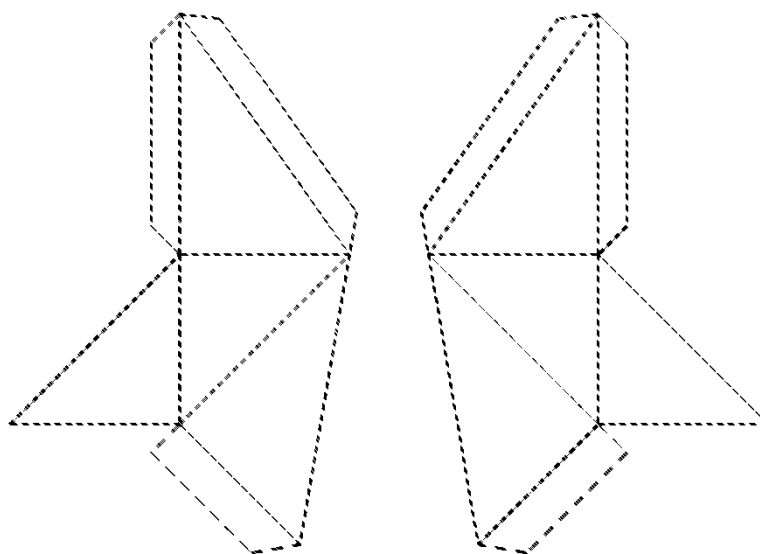
Fonte: Do autor (2024)

Mas, imprimindo seis exemplares deste mesmo modelo, montando cada um dos tetraedros pelo mesmo processo, e, por fim, tentando-se montar um cubo com essas seis peças, encontra-se a dificuldade de que elas não vão encaixar. Isso se deve ao fato de que esse molde foi criado seguindo o processo discutido na Seção 2.7, ou seja, o cubo é constituído de peças com duas orientações espaciais, conforme visto na Seção 0.

Logo, na montagem do cubo, há necessidade da existência da peça com orientação espacial oposta. No caso ideal, dos seis tetraedros, três devem ter uma orientação espacial, e as outras três, uma orientação discordante.

Portanto, na atividade de montagem de um cubo a partir de tetraedros, deve-se imprimir duas planificações refletidas simétricas, como pode ser visto na Figura 13, ou, então, imprimir um tipo só, como o da Figura 12, e dobrar o molde ao contrário. A reflexão no plano também é uma isometria imprópria, segundo Lima (2007).

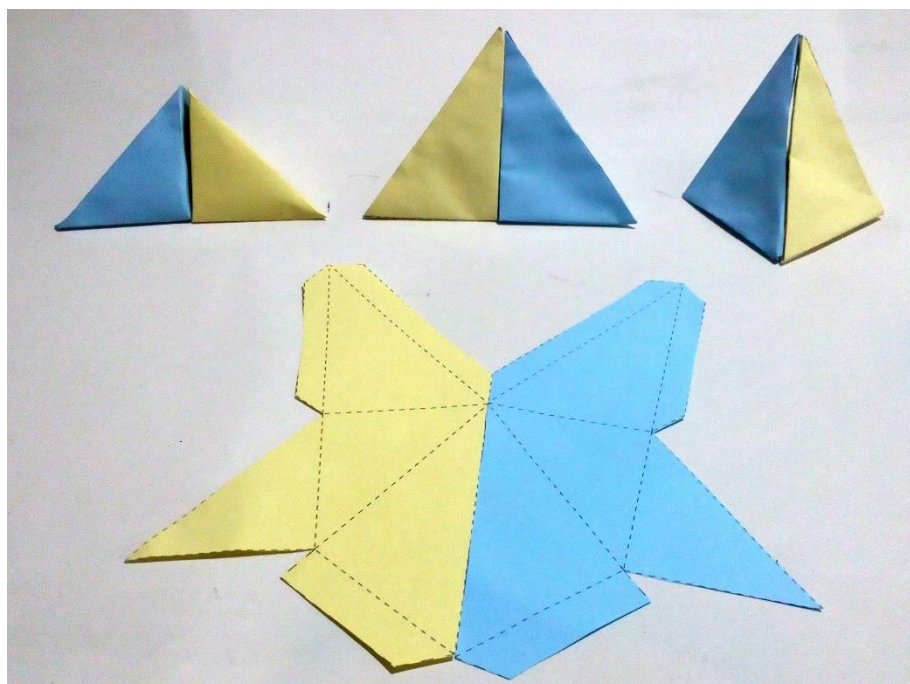
Figura 13. Planificações dos tetraedros tri-retangulares utilizados para o cubo



Fonte: Do autor (2024)

No Apêndice A, encontram-se duas planificações que são os moldes dos tetraedros, sendo interessante imprimi-los em papel de cores diferentes para que se identifique sua orientação. Na Figura 14 apresenta-se moldes e tetraedros já montados. Nela, expõe-se que tetraedros de cores diferentes foram construídos com orientações espaciais diferentes, ou seja, com planificações simétricas refletidas.

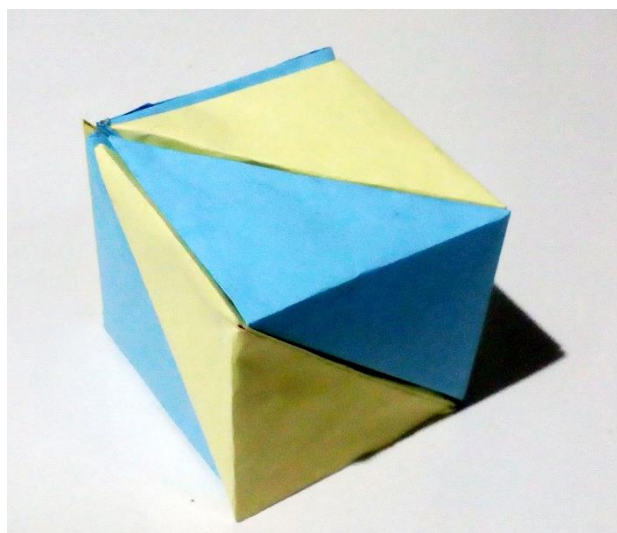
Figura 14. Moldes e tetraedros simétricos



Fonte: Do autor (2024)

Apenas com o uso das duas orientações opostas é que se consegue montar o cubo, como pode ser visualizado na Figura 15. Como esperado, foram utilizados seis tetraedros.

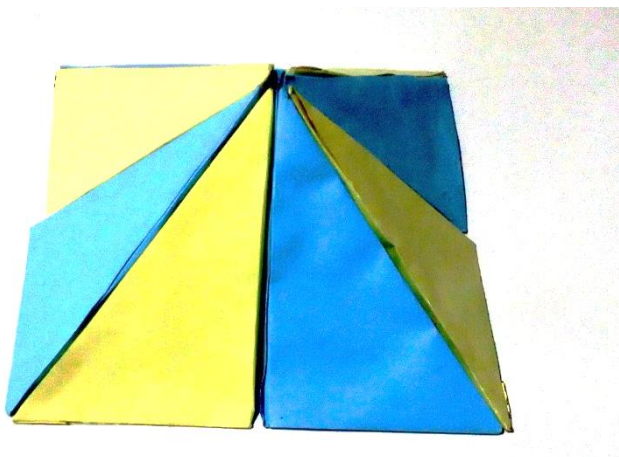
Figura 15. Cubo montado a partir de tetraedros



Fonte: Do autor (2024)

Também, uma pirâmide de base quadrada pode ser construída, na qual se verifica a necessidade das peças com orientações diferentes. Observando a Figura 16 pode-se visualizar a justaposição de peças de cores diferentes, as quais têm orientação espacial contrária entre si. Para essa composição foram necessários oito tetraedros.

Figura 16. Pirâmide construída com tetraedros



Fonte: Do autor (2024)

Através do manuseio dessas peças pode ser mais fácil entender e recordar a fórmula do volume das pirâmides.

4 METODOLOGIA

4.1 Tipo de estudo

A metodologia utilizada será a pesquisa qualitativa. Segundo Martins (2003), nesse tipo de metodologia o processo desenvolvido possui mais relevância que os resultados, devendo o pesquisador se preocupar com o relato da experiência dos participantes. Os dados quantitativos coletados devem ser interpretados, não apenas entendidos estatisticamente. Assim, foi colocado o seguinte problema de pesquisa: Os alunos do Ensino Médio conseguem entender melhor a fórmula do volume de pirâmides após a realização da atividade?

4.2 Projeto de campo, métodos e materiais

O estudo foi realizado em uma escola estadual de Ensino Médio. A população de estudo consistiu de algumas turmas do 2º ano do Ensino Médio, devido ao planejamento do conteúdo de Geometria Espacial para essa série. Os alunos já haviam estudado sobre o tema. Assim, esta atividade não foi proposta como a introdução ao conteúdo, mas sim como revisão e prática do conhecimento. A pesquisa foi aplicada durante momentos letivos da disciplina de Matemática, em sala de aula, com a presença do professor supervisor de estágio, que contribuiu para a fiscalização da ética, mitigou riscos e deu condições para o alcance dos benefícios do processo.

A atividade, descrita na seção a seguir, foi realizada em grupo, e objetivou a vivência da conjectura sobre relações entre sólidos e suas grandezas. Dessa forma, pretendeu-se contribuir para a cooperação na superação de obstáculos do processo durante sua realização, e para a construção, aplicação e troca de conhecimentos. Como resultado, teve-se a produção de sólidos geométricos, no caso, cubos, paralelepípedos e pirâmides, constituídos de peças elementares em comum: os tetraedros. Essas produções são apreciáveis ao pesquisador como forma de verificar a competência dos alunos em realizar a reconfiguração de sólidos.

Quanto aos materiais, houve a impressão de várias unidades dos dois tipos de moldes de tetraedros trirretângulos, um tipo em papel azul, e outro em papel amarelo. Quando montados, eles formavam cubos de 5 cm de aresta.

Esses moldes já foram levados recortados para a escola, e distribuídos para os grupos de forma que recebessem apenas moldes de uma cor. Forneceu-se cola branca aos alunos.

4.3 Execução da atividade

- Os alunos foram divididos em grupo, com cerca de seis pessoas, objetivando a montagem dos tetraedros. Se algum grupo teve número de componentes diferentes, não houve problemas, desde que os integrantes compensassem a divergência com uma maior ou menor produtividade de acordo com o número de pessoas.
- Foram entregues moldes de apenas uma cor a cada grupo, requisitando que fossem montados, pelo menos, vinte e quatro tetraedros.
- Por um breve momento, pediu-se que tentassem montar um cubo utilizando seis peças dentre as que produziram. Como as peças eram iguais, elas não se encaixavam perfeitamente de modo a formarem um cubo.
- Avisou-se, então, que eles não conseguiriam montar um com peças iguais, e que fosse realizada a permuta com grupos que montaram peças de cor diferente.
- A este ponto, esperava-se que os grupos montassem os cubos através da justaposição das peças com cores diferentes.
- Uma nova etapa foi a montagem de uma pirâmide de base retangular, com oito peças.
- Depois, pediu-se a montagem de um paralelepípedo retângulo com vinte e quatro peças de cores diferentes.
- Finalmente, pediu-se que decompusessem tal paralelepípedo, e reorganizassem as peças de em três pirâmides congruentes.

A institucionalização ocorre através da percepção de que: o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do paralelepípedo; o volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura; e o volume da pirâmide é o produto da área da base pela altura dividido por três. Neste ponto, podia-se pedir que os alunos livremente tentassem montar outros sólidos através da reconfiguração das peças, e relacionassem os volumes observados.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A atividade ocorreu na Escola de Referência em Ensino Médio Devaldo Borges, na cidade de Gravatá-PE, durante o estágio curricular, em uma aula de Matemática do 2º ano D, num total de 25 alunos presentes, tendo os alunos já estudado o conteúdo com o professor supervisor.

Em uma apresentação rápida, foram comentados dois sólidos: um cubo de 10 cm de aresta, totalizando 1000 cm^3 ou 1 litro, e uma pirâmide de base triangular, no caso, um tetraedro triângular, com volume $1/6$ do cubo.

Perguntou-se se conheciam a fórmula do cálculo do volume da pirâmide e muitos expressaram positivamente. Questionados sobre qual seria tal fórmula, prontamente alguns responderam: “área da base vezes altura, dividido por... três”.

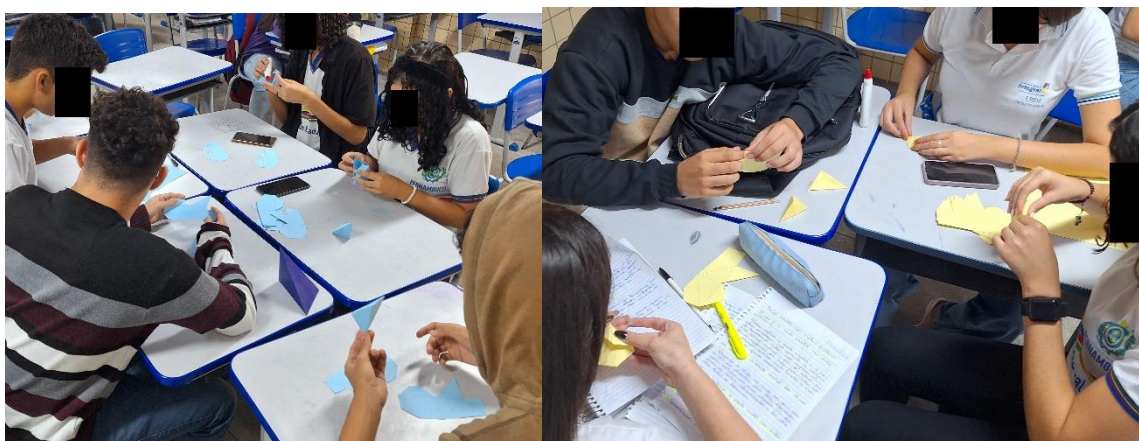
Embora corretos, as reticências retratam que houve insegurança quanto ao divisor três na resposta. Essa situação já era esperada pelo problema de pesquisa. Então propôs-se a atividade para que não se restasse dúvida quanto a esse divisor.

Seguindo a atividade proposta, os moldes foram entregues aos alunos organizados em grupos. Trinta unidades de moldes para cada grupo, variando apenas a cor dos moldes entregues para cada equipe. A quantidade de integrantes nos grupos variou de quatro a sete pessoas. Como a produtividade de montagem dos tetraedros foi eficiente, o andamento da atividade não foi comprometido.

Pedi-se que montassem vinte e quatro tetraedros. Nos grupos, eles organizaram-se em algo semelhante a uma linha de produção, em que alguns dobravam e outros colavam as peças, ajudando-se mutuamente nessas tarefas. Nas Figura 17 exibe-se dois grupos de cores diferentes no processo de montagem dos tetraedros. Já na Figura 18 exibe-se que os grupos conseguiram montar muitas peças.

A dificuldade predominante nesse instante foi sobre que lado do papel se dobraria e colaria. Foi alertado para que deixassem as linhas impressas para o lado de fora. Todos agindo assim manteriam a orientação espacial proposta para cada cor. Quando os grupos concluíram essa etapa, esperou-se um pouco para que as peças secassem e então passou-se para a etapa de montagem dos cubos.

Figura 17. Alunos iniciando a montagem dos tetraedros



Fonte: autor (2024)

Figura 18. Várias peças já montadas nos grupos



Fonte: autor (2024)

5.1 Alunos montando o cubo e a pirâmide

Pediu-se que os estudantes pegassem seis tetraedros, dentre os vinte e quatro que produziram, e tentassem montar um cubo por justaposição, ou seja, uma face de uma peça encostada em uma face de outra. Na Figura 19, ilustra-se uma tentativa de se montar o cubo com peças iguais, o que foi sem sucesso devido à isometria usada na configuração dos moldes.

Figura 19. Alunos tentam montar o cubo com peças da mesma cor



Fonte: autor (2024)

Esse período não se alongou a fim de não causar frustração. Assim, logo se declarou que, com peças da mesma cor não seria possível montar o cubo, pois elas precisam das complementares, que são justamente as peças de outra cor produzidas pelos colegas de outro grupo.

Então, houve o período de permuta de peças entre grupos, mobilizando alguns alunos pela sala em busca do câmbio, como exibido na Figura 20.

Figura 20. Permuta de peças entre os grupos



Fonte: Autor (2024)

Quando esses alunos voltaram para seus respectivos grupos, os primeiros resultados começaram a aparecer em pouco tempo: com peças de cores diferentes, logrou-se a construção de cubos, como pode ser visto na Figura 21.

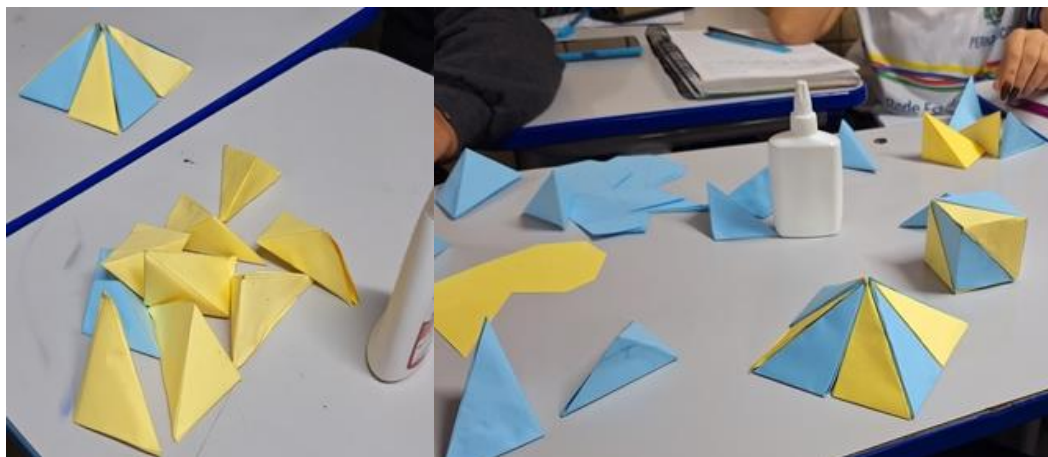
Figura 21. Cubo montado por alunos



Fonte: autor (2024)

Todos os grupos cumpriram adequadamente essa etapa. Então, pediu-se para que utilizassem oito peças de cores diferentes para montarem uma pirâmide de base quadrada. Conseguiram montá-la em questão de minutos, como retratado na Figura 22, sempre com a colaboração dos parceiros de grupo.

Figura 22. Pirâmides montadas pelos alunos

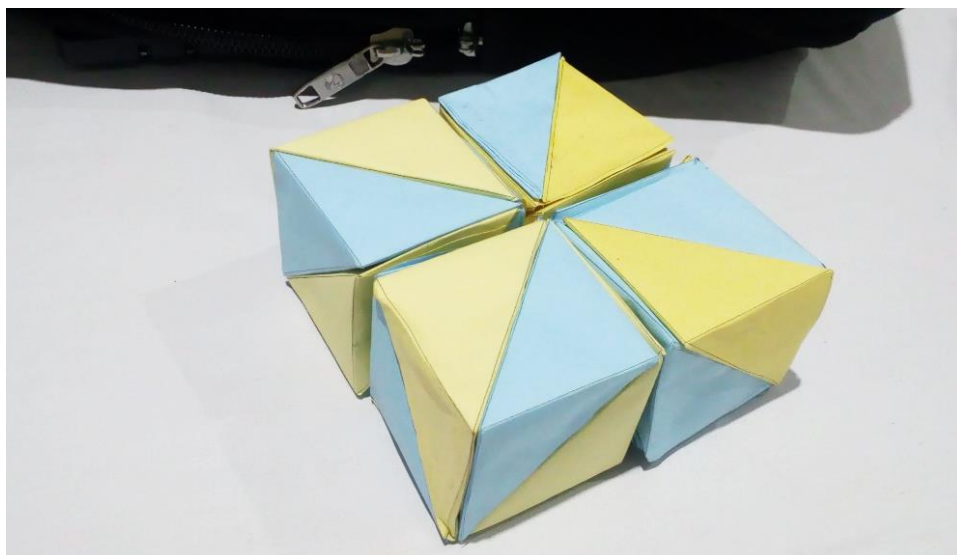


Fonte: autor (2024)

5.2 Paralelepípedo e volume da pirâmide

Uma vez que já os estudantes conheciam o cubo e a pirâmide montada através de tetraedros, passou-se para a última fase. Pediu-se que eles montassem um paralelepípedo com quatro cubos, ou seja, com os vinte e quatro tetraedros. Isso pode ser visto na Figura 23.

Figura 23. Paralelepípedo montado com quatro cubos



Fonte: autor (2024)

Por fim, pediu-se que decompusessem tal paralelepípedo para configurá-lo em pirâmides como as que fizeram anteriormente, vide a Figura 24. Daí, logrou-se a composição de três pirâmides, como na Figura 25.

Figura 24. Início da reconfiguração do paralelepípedo em três pirâmides



Fonte: autor (2024)

Figura 25. Três pirâmides construídas com os tetraedros do paralelepípedo



Fonte: autor (2024)

A institucionalização ocorreu com a percepção de que as três pirâmides eram congruentes, e que foram oriundas de um mesmo paralelepípedo. Assim, compreendeu-se que, devido ao paralelepípedo ter sido decomposto em três pirâmides congruentes devidamente justapostas, seu volume foi dividido ou distribuído igualmente para as três, donde a medida de volume de cada pirâmide é: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

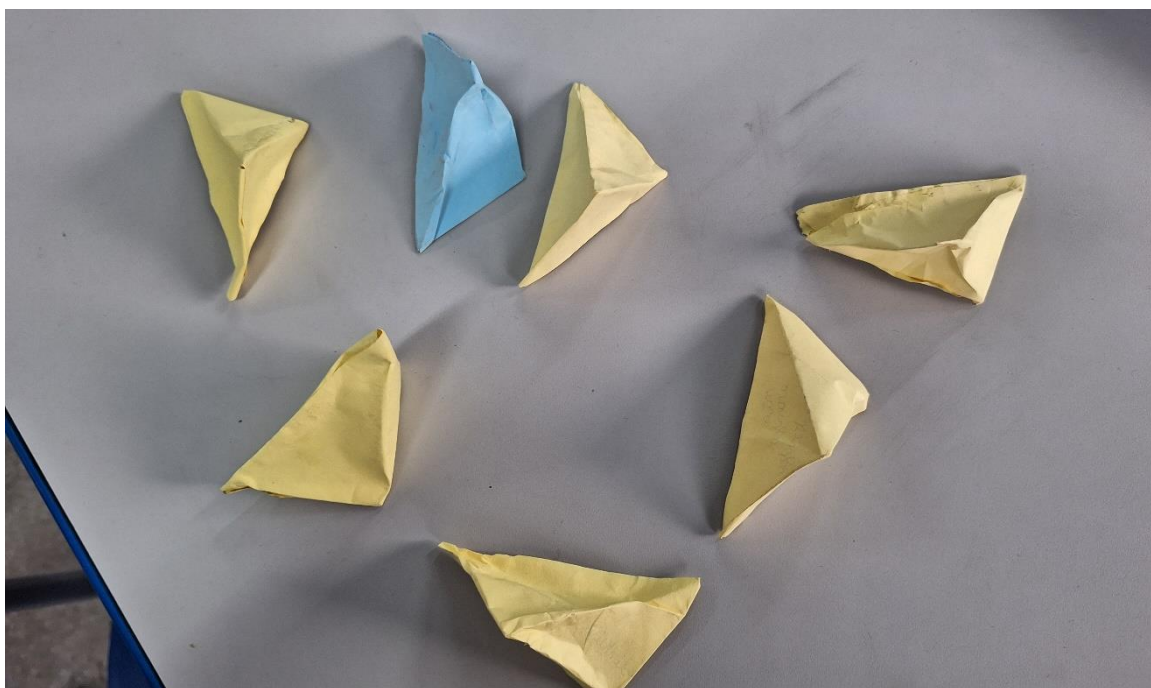
Através da atividade, concluiu-se que os alunos entenderam a fórmula do volume de pirâmides, valendo-se da decomposição de um paralelepípedo e de sua configuração em forma piramidal. Assim, eles puderam compreender o fator um terço na fórmula para o cálculo do volume da pirâmide, ajudando a aprender tal fórmula a partir do volume do paralelepípedo, e entender a ideia por trás de uma prova dela.

Mais que decorar a fórmula, os estudantes tiveram a oportunidade de visualizar o porquê de dividir por três. Eles se mantiveram animados e engajados durante a realização da atividade, e acharam interessante o resultado, demonstrando a compreensão da fórmula através da manipulação de peças para reconfiguração de sólidos. Foram muito simpáticos, e pediram mais atividades desse tipo nas aulas de Matemática ao professor supervisor.

5.3 Dificuldades durante a execução

Uma das dificuldades residiu na montagem dos tetraedros, pois estes precisam estar bem dobrados nas linhas tracejadas, e colados com pouca cola para não encharcar o papel, o que o faria perder rigidez. Na Figura 26 estão retratados alguns tetraedros que perderam a utilidade devido à dobradura ou à colagem.

Figura 26. Peças com problemas de montagem



Fonte: autor (2024)

Outro ponto de dificuldade foi que a etapa de montagem livre de sólidos com as peças não pôde ser concluída devido à atividade ter sido realizada nas duas últimas aulas da manhã, e ter ocorrido uma antecipação da oferta do almoço. Contudo, já que os pontos principais da pesquisa já haviam sido observados, não se atrapalhou a saída dos alunos para a refeição.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscando que os alunos tivessem segurança quanto às fórmulas dos cálculos do volume da pirâmide, em especial, à compreensão do papel da constante um terço, o presente estudo foi realizado em uma escola pública estadual do Agreste de Pernambuco, e possibilitou um momento de manipulação de tetraedros, para remontá-los em forma de cubos, paralelepípedos e pirâmides. O movimento cognitivo e epistemológico empregado permitiu a observação das relações volumétricas entre tais sólidos e as fórmulas algébricas que representam o volume.

Os alunos cumpriram todas as etapas da atividade e, ao final, puderam perceber que o volume de cada pirâmide é um terço do volume de um paralelepípedo com área de base congruente. Chegaram a essa conclusão com o rearranjo das vinte quatro peças que compunham o paralelepípedo em três pirâmides de oito peças cada.

Como os estudantes já haviam estudado o conteúdo teórico meses antes, a institucionalização que já havia ocorrido contribuiu ainda mais para que compreendessem a atividade realizada. Assim, através de manipulações com objetos eles puderam conferir na prática uma das demonstrações que os livros didáticos apresentam para a fórmula do volume da pirâmide ter a constante um terço e reforçassem o que aprenderam.

A isometria de reflexão em torno de um plano, incorporada na montagem os moldes, foi um elemento a mais a se considerar no processo. Logo no início da atividade, os alunos perceberam a necessidade de saber em qual orientação da folha deveriam dobrar o molde. Depois, verificaram que não poderiam montar sólidos com apenas um tipo de molde, já que precisavam de moldes com orientação contrária.

O principal resultado foi a validação da hipótese, onde o uso de várias formas de representação, vários tipos de registros de representação semiótica, desde modelos físicos e seus moldes, e figuras em perspectiva (representações plurifuncionais não discursivas) até expressões algébricas (representações monofuncionais discursivas), contribuíram para a construção do saber útil ao cidadão em âmbito pessoal e para a sua vida em sociedade. De fato, através do reconhecimento de formas no cotidiano e da sua competência em modelá-las e calculá-las, ele pode agir com mais consciência sobre o ambiente em que vive e trabalha.

Dessa forma o público participante pôde apreender o conteúdo através de vivências, o que vai além das manipulações algébricas ou de apenas decorar uma expressão matemática, sem sequer refletir sobre seu significado. Portanto, o presente texto se realiza como um reforço sobre a ideia da necessidade de planejamento de aulas de Geometria mais dinâmicas, visuais, e mesmo físicas, tal como esse campo da Matemática necessita, contribuindo para elevação da qualidade da aprendizagem.

Em trabalhos futuros, podemos vir a incorporar recursos computacionais, tais como aplicativos de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, particularmente, o aplicativo livre GeoGebra, que combina recursos dessas duas naturezas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lucia. SILVA, Maria José F. da; CAMPOS, Tânia Maria M. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. PUC - São Paulo, n. 27. set./out./nov./dez., 2004.

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 2ª ed. rev. e ampl.. Curitiba: Ed. UFPR, 2022. 344 p.

_____. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 109-141, 2016. Disponível em: <periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109>. Acesso em: 15 de março de 2024.

BRASIL. Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília - DF, dez. 1996.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC, 2018.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica: Um tratamento vetorial**. 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

DAMM, R. F. (2002). Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A; (Org.) **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. 3. ed. rev. Perdizes: EDUC, 2008, p. 167-188.

D'AMORE, B. (1999). **Elementos de Didática da Matemática**. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 449 p.

D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica: sua presença e importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. Tradução de M. C. Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações**. 3ª ed. Vol. único. São Paulo: Editora Ática, 2009.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Geometria espacial: Posição e métrica**. 7ª ed. vol. 10. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. São Paulo: Editora Atual, 2013.

FARMER, D. **Grupos e Simetria**: Um guia para a descoberta Matemática. Gradiva, 1999.

GABRIEL, Luciano Soares. Contributos de uma situação didática para o ensino de quadriláteros: *Compreensões a partir da Teoria das Situações Didáticas*. Anais do **XXI EBRAPEM**. Pelotas - RS, nov. 2017. Disponível em: <<https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd14_luciano_gabriel.pdf>>. Acesso: 13 mai. 2024.

HOFFMANN, Jussara. Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade. 33. ed. Porto Alegre: Mediação, 2014.

KOPKE, R.C.M. **Imagens e reflexões: A Linguagem da geometria nas escolas**. CALIGRAMA (SÃO PAULO. ONLINE), v.2, n.1, 18 pp., 2006. Disponível em: <<DOI: <https://doi.org/10.11606/issn.1808-0820.cali.2006.64658>>>. Acesso em: 27 jan. 2024.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. 2ª ed. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** SBEM, 1º Sem. 1995, p.3-13.

MACHADO, S. D. A; (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papyrus, 2003.

MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Fundamentos de Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

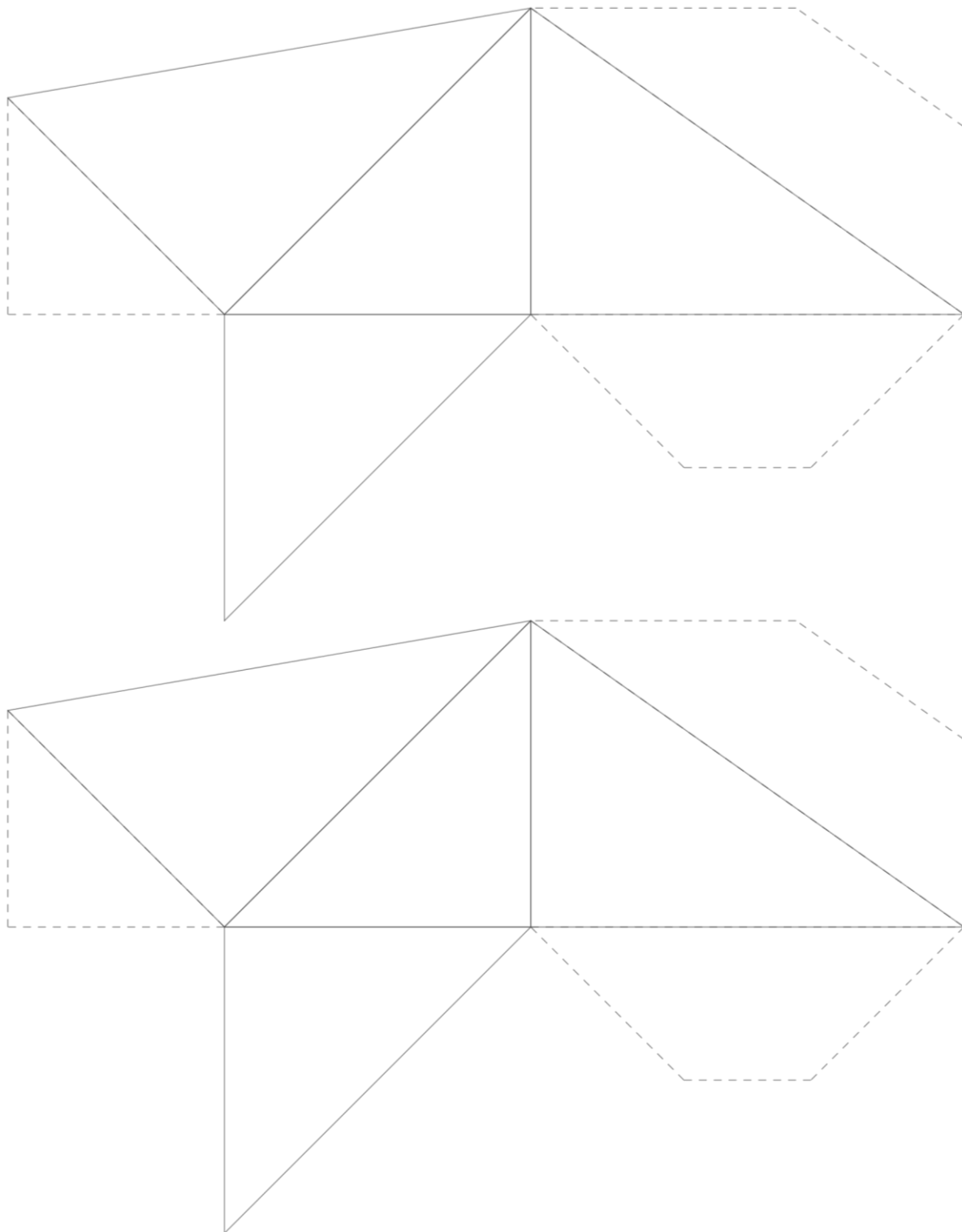
MARTINS, Renata Aparecida. **Ensino-aprendizagem de Geometria: Uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais**. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro – SP, UNESP, 2003. Dissertação de Mestrado. 246 pp.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Coleção Tendências em Educação Matemática. 136p.

SILVA, Sílvio Marcelino da. **Construções geométricas planas e espaciais no ensino da geometria**. Bauru – SP, UNESP/PROFMAT, 2018. Dissertação de Mestrado. 66 pp.

APÊNDICE A – MOLDE DOS TETRAEDROS

Molde A



Molde B

