UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

HÉLIO IVANILDO PEREIRA

UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO SOBRE LOGARITMOS ENTRE ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE/CAA: um estudo dos períodos finais

Caruaru
2024

HÉLIO IVANILDO PEREIRA

UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO SOBRE LOGARITMOS ENTRE ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE/CAA: um estudo dos períodos finais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientador (a): Dr. Marcos Luiz Henrique

Caruaru

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Pereira, Hélio Ivanildo.
Uma análise do conhecimento sobre logaritmos entre alunos de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste/CAA: um estudo nos períodos finais / Hélio Ivanildo Pereira. - Caruaru, 2024.
101 p. : il., tab.

Orientador(a): Marcos Luiz Henrique
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2024.
Inclui referências, apêndices.

1. Logaritmos. 2. Formação de professores. 3. Avaliação do conhecimento. 4. Ensino de Matemática. I. Henrique, Marcos Luiz. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

HÉLIO IVANILDO PEREIRA

UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO SOBRE LOGARITMOS ENTRE ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE/CAA: um estudo dos períodos finais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 16/10/2024

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcos Luiz Henrique (Orientador)

Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Me. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinadora Externa)

Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho à minha família, que é minha base, especialmente aos meus queridos pais, Ivanildo Laureano e Lindalva Margarida, e à minha amada filha, Rhayanne Victoriah. Também dedico a mim mesmo, pela persistência, dedicação e pela incansável busca de resolver e superar minhas dúvidas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar forças e sabedoria para concluir esta etapa importante da minha vida. Aos meus pais, Ivanildo Laureano e Lindalva Margarida, por todo o amor, apoio e incentivo ao longo de toda a minha jornada acadêmica.

Sou extremamente grato ao meu orientador, Dr. Marcos Luiz Henrique, pelas orientações, paciência e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho.

“[...] não é possível entender devidamente a história de uma matéria sem conhecer a própria matéria.” (Eves, 2004, p. 340).

RESUMO

Os logaritmos desempenham um papel fundamental na Matemática, com aplicações em diversas áreas do conhecimento, como em Física e Engenharia. No contexto do ensino, o entendimento profundo desse conceito é essencial para a formação de professores de Matemática. A escolha do tema deste trabalho se justifica pela necessidade de avaliar o conhecimento sobre logaritmos entre os licenciados em Matemática, visto que a compreensão inadequada desse tópico pode impactar a qualidade do ensino nas escolas. Este trabalho tem como objetivo geral analisar o nível de conhecimento sobre logaritmos entre estudantes dos períodos finais do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). A pesquisa foi conduzida com 15 licenciandos, por meio da aplicação de dois questionários. O primeiro questionário, de natureza diagnóstica, investigou o histórico de estudo dos logaritmos e a autopercepção dos estudantes sobre sua capacidade de ensinar o tema. O segundo questionário foi prático, composto por cinco questões que avaliaram a aplicação do conceito de logaritmos. Os resultados indicaram que, embora os estudantes tenham tido contato com o tema durante sua formação, muitos ainda enfrentam dificuldades em resolver questões básicas sobre logaritmos. Isso revela uma lacuna no processo de ensino-aprendizagem, destacando a importância de fortalecer a formação dos futuros professores nesse tema relevante da Matemática. Para melhorar a qualidade do ensino de Matemática nas escolas, este estudo sugere uma abordagem mais prática e eficaz no ensino dos logaritmos durante a licenciatura, além de uma maior ênfase na inter-relação entre teoria e prática.

Palavras-chave: Logaritmos; Formação de professores; Avaliação do conhecimento; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Logarithms play a fundamental role in Mathematics, with applications in several areas of knowledge, such as Physics and Engineering. In the context of teaching, a deep understanding of this concept is essential for the training of Mathematics teachers. The choice of the topic of this work is justified by the need to assess the knowledge about logarithms among Mathematics graduates, since an inadequate understanding of this topic can impact the quality of teaching in schools. The general objective of this work is to analyze the level of knowledge about logarithms among students in the final periods of the Mathematics Degree course at the Agreste Academic Center (CAA) of the Federal University of Pernambuco (UFPE). The research was conducted with 15 undergraduate students, through the application of two questionnaires. The first questionnaire, of a diagnostic nature, investigated the history of study of logarithms and the students' self-perception of their ability to teach the subject. The second questionnaire was practical, consisting of five questions that assessed the application of the concept of logarithms. The results indicated that, although students have had contact with the topic during their training, many still face difficulties in solving basic questions about logarithms. This reveals a gap in the teaching-learning process, highlighting the importance of strengthening the training of future teachers in this relevant topic of Mathematics. To improve the quality of Mathematics teaching in schools, this study suggests a more practical and effective approach in teaching logarithms during undergraduate courses, in addition to a greater emphasis on the interrelationship between theory and practice.

Keywords: Logarithms; Teacher training; Knowledge assessment; Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UFPE/CAA	Universidade Federal de Pernambuco/Centro Acadêmico do Agreste

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos logaritmos possui um papel importante no ensino da Matemática, dada sua relevância tanto para áreas científicas quanto para a formação de futuros professores. Apesar de sua importância, o ensino desse conceito tem se revelado desafiador, especialmente no contexto da educação básica e superior. Muitos estudantes demonstram dificuldades em compreender e utilizar corretamente os logaritmos, o que levanta questões sobre a eficácia das metodologias de ensino utilizadas. Assim, compreender essas dificuldades é essencial para aprimorar a formação de professores de Matemática, preparando-os para ensinar com clareza e eficiência este importante conteúdo. Neste trabalho, investigaremos as lacunas no conhecimento sobre logaritmos entre licenciandos do curso de Matemática da UFPE, especificamente entre alunos dos períodos finais, a fim de propor soluções para um ensino mais eficaz.

Diante desse contexto, este estudo busca responder à seguinte questão: Quais são as principais dificuldades enfrentadas pelos licenciandos do curso de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste (CAA) na compreensão e ensino dos logaritmos? Esta pesquisa pretende identificar os desafios conceituais e práticos relacionados ao ensino de logaritmos e como essas dificuldades podem impactar a autopercepção dos futuros professores quanto à sua capacidade de ensinar esse conteúdo de maneira eficaz.

Ao iniciar meus estudos no ensino médio, especificamente no segundo ano, tive meu primeiro contato com o tema dos logaritmos. Na ocasião, o professor mencionou que se tratava de um assunto previsto para o primeiro ano, e que abordaria de maneira breve como um complemento. A apresentação do conteúdo foi predominantemente aritmética e, de certa forma, exaustiva. Senti que faltava um contexto histórico mais abrangente e uma introdução adequada ao tema.

Anos mais tarde, já tendo concluído o ensino médio, me deparei com o livro "Matemática: Ciência e Aplicações" do Iezzi *et al.* (2004). Esse livro apresentou uma introdução à história dos logaritmos e incluía um apêndice no final do capítulo explicando como utilizar a tábua de logaritmos de base 10, além de detalhar a característica e a mantissa de um logaritmo decimal. Foi nesse momento que meu interesse pela história dos logaritmos se consolidou, influenciando diretamente a escolha do tema para meu trabalho de conclusão de curso, ainda antes de iniciar a licenciatura em Matemática. A decisão de acrescentar uma abordagem histórica no TCC surgiu do desejo de compreender de forma mais aprofundada o contexto e a relevância dos logaritmos no período em que foram desenvolvidos, além de explorar suas aplicações ao longo do tempo. Essa busca por respostas conferiu um significado especial ao trabalho, além de proporcionar maior clareza sobre o tema, espero que esta pesquisa também seja útil para outros que compartilhem dessas mesmas dúvidas. O estudo da história dos logaritmos não apenas amplia o entendimento dessa ferramenta essencial, mas também contribui para humanizar e contextualizar a matemática, desafiando percepções negativas sobre a disciplina. A história da matemática é essencial para dar contexto e tornar a disciplina mais acessível, ajudando a corrigir a percepção negativa que muitos estudantes possuem, conforme argumenta Maor (2006) em seu livro "*e*: A História de um Número".

> Como uma pessoa que aprendeu matemática em todos os níveis universitários, estou ciente da atitude negativa de muitos estudantes em relação a esta disciplina. Existem vários motivos para isso, sendo um deles o modo esotérico e seco com que o tema é ensinado. Temos a propensão de sobrecarregar nossos estudantes com fórmulas, definições, teoremas e demonstrações, mas raramente mencionamos a evolução histórica desses fatos, deixando a impressão de que eles foram entregues à humanidade como os Dez Mandamentos, por alguma autoridade divina. A história da matemática é uma boa maneira de corrigir essa impressão. (Maor, 2006, p. 14).

Além disso, o conhecimento histórico é fundamental para o professor de Matemática, pois permite tornar as aulas mais interessantes e engajadoras para os alunos, dando um significado maior e tornando a disciplina mais atrativa, como afirma Cajori (2007):

> Uma outra razão para o estudo da história da Matemática é o valor do conhecimento histórico para o professor de Matemática. O interesse dos alunos em seus estudos pode ser significativamente aumentado se a solução dos problemas e a fria lógica das demonstrações forem temperadas com anedotas e notas históricas. (Cajori, 2007, p.18).

Compreender as dificuldades enfrentadas pelos licenciandos no ensino dos logaritmos é essencial para aprimorar a formação docente e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos. Tais dificuldades não se restringem apenas à compreensão conceitual, mas também se estendem à capacidade de transmitir o conteúdo de forma eficaz.

No entanto, estudos indicam que muitos estudantes enfrentam dificuldades não apenas em compreender plenamente o conteúdo, mas também em transmiti-lo de maneira clara, o que pode impactar diretamente a forma como o tema é abordado em sala de aula. Para enriquecer essa discussão, é fundamental considerar abordagens didáticas que possam trazer soluções para esses obstáculos.

Forest (2014), por exemplo, discute que o ensino tradicional de logaritmos, focado em definições formais e exercícios repetitivos, não engaja suficientemente os alunos e não contribui para o desenvolvimento de um entendimento profundo do tema. Em contrapartida, o autor propõe o uso da Resolução de Problemas como uma abordagem mais dinâmica e eficaz.

Ademais, Andrade (2023) destaca a importância de explorar o uso de logaritmos em áreas emergentes e contextos práticos, como ciência de dados e fenômenos naturais, conectando teoria e prática. Ele ressalta a diferença entre escalas logarítmicas e lineares, enfatizando como os logaritmos podem simplificar grandes volumes de dados, também relata a importância da Escala Richter. Andrade sugere que a introdução desses conceitos em áreas modernas, como inteligência artificial e biologia molecular, poderia aumentar o interesse dos estudantes e proporcionar uma compreensão mais concreta da relevância dos logaritmos. Além disso, o autor sugere que futuros estudos explorem a aplicação de escalas logarítmicas em campos emergentes, ampliando ainda mais o potencial dessa ferramenta para a compreensão e visualização de dados complexos

Estruturamos nossa pesquisa em oito capítulos. O primeiro capítulo, de introdução, fornece uma breve contextualização do tema e do problema de pesquisa, além de oferecer uma visão geral do trabalho. O Capítulo 2 aborda os objetivos gerais e específicos da pesquisa, destacando as metas centrais que orientaram o desenvolvimento do estudo.

O Capítulo 3, intitulado "Logaritmos: Uma Jornada Histórica", aborda a evolução científica dos séculos XVI e XVII, destacando a necessidade crescente de métodos mais eficientes de cálculo para áreas como astronomia e navegação. Neste contexto, o capítulo explora as contribuições de John Napier para a Matemática, incluindo a construção da primeira tabela de logaritmos. Também discute os métodos matemáticos anteriores, como a prostaférese, que inspiraram Napier. Ademais, são apresentadas as contribuições de Henry Briggs, que colaborou significativamente para o desenvolvimento dos logaritmos decimais, facilitando seu uso em cálculos práticos.

O Capítulo 4, "O Ensino de Logaritmos e Suas Diretrizes Curriculares", analisa como o ensino dos logaritmos é tratado nas diretrizes educacionais atuais, especialmente nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Currículo de Pernambuco (2021) para o Ensino Médio, ele também aborda as propriedades dos logaritmos a partir do livro "Matemática: Ciência e Aplicações" do Iezzi *et al*. (2004) e explora suas aplicações práticas, como em terremotos e na matemática financeira.

No Capítulo 5, "Abordagens Teóricas em Matemática: Representações Semióticas e Resolução de Problemas", são discutidas a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), com base na obra *Semiósis e Pensamento Humano* de Raymond Duval (2009), e a Didática da Resolução de Problemas, a partir de Dante (2000). A integração dessas abordagens foi fundamental para a análise dos dados e interpretação dos resultados da pesquisa.

No Capítulo 6, "Metodologia", descreve-se a abordagem adotada na pesquisa, com a aplicação de dois questionários: o Questionário 01, denominado “Diagnóstico”, e o Questionário 02, focado em logaritmos. O primeiro teve análise qualiquantitativa, enquanto o segundo foi analisado de forma quantitativa. Esses instrumentos foram essenciais para a coleta e discussão dos dados.

No capítulo 7, A análise e discussão dos resultados, foram realizadas por meio de gráficos e tabelas, com as respostas sendo examinadas à luz das teorias de Duval e Dante. Houve uma discussão aprofundada dos dados obtidos nos questionários aplicados.

No Capítulo 8, apresentamos as considerações finais, sintetizando as principais conclusões da pesquisa, suas implicações para o ensino de logaritmos e oferecendo sugestões para futuras investigações.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Realizar uma análise do conhecimento de logaritmos dos alunos de licenciatura em matemática do Centro Acadêmico do Agreste/CAA, nos períodos finais.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar as principais dificuldades dos alunos em relação aos conceitos de logaritmos.
- Analisar o uso de linguagem matemática formal pelos alunos ao explicar conceitos logarítmicos.
- Avaliar a compreensão dos alunos sobre a aplicação prática dos logaritmos em situações matemáticas e cotidianas.
- Analisar a percepção dos alunos sobre sua própria capacidade de ensinar logaritmos.

3 LOGARITMOS: UMA JORNADA HISTÓRICA

O século XVI e o início do século XVII testemunharam uma enorme expansão do conhecimento científico em diversas áreas, como geografia, física e astronomia. Durante esse período, Nicolau Copérnico (1473-1543) propôs o sistema heliocêntrico, revolucionando a compreensão do universo. Em 1521, a circum-navegação do globo por Fernão de Magalhães demonstrou que nenhuma parte do mundo permaneceria inexplorada. Em 1569, Gerhard Mercator publicou seu aclamado mapa do mundo, facilitando a navegação e o comércio. Na Alemanha, Johannes Kepler formulou suas três leis do movimento planetário, aprofundando a compreensão dos movimentos celestes.

Esses avanços exigiam uma quantidade crescente de dados numéricos, e os cientistas da época passavam boa parte de seu tempo realizando cálculos tediosos. Havia, portanto, uma necessidade urgente de uma ferramenta que aliviasse esse fardo. Foi nesse contexto que surgiram os logaritmos, uma invenção que simplificou enormemente os complexos cálculos necessários para as pesquisas científicas da época, facilitando a vida dos estudiosos (Maor, 2006).

No século XVl, lidar com potenciações, extrações de raízes e divisões era uma tarefa recorrente e desafiadora, como observa Lima (1980),

> No fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Um auxílio precioso já fora obtido com a recente invenção das frações decimais. Mesmo assim, achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental (Lima,1980, p.1).

Existem dois precursores fundamentais na história dos logaritmos: o escocês John Napier (1550-1617), Barão de Merchiston, que desenvolveu a primeira tabela de logaritmos em 1614, por meio de seu trabalho em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos), e o suíço Joost Bürgi (1552-1632), fabricante de relógios, que publicou sua tabela de logaritmos em Praga, em 1620, no livro *Arithmetische und Geometrische Progresss Tabulen* (Tabelas de Progressões Aritméticas e Geométricas).

Embora tenham trabalhado de forma independente e quase simultânea, suas abordagens foram distintas: Napier baseou-se em noções geométricas, enquanto

Bürgi utilizou conceitos algébricos. Apesar das semelhanças em seus trabalhos, uma diferença notável é que Napier utilizou a "proporção comum", referindo-se a $(1 - 10^{-7})$ ou 0,9999999, com seu valor ligeiramente menor do que 1, enquanto Bürgi empregou $(1 + 10^{-4})$ ou $1{,}0001$, que é um número um pouco maior do que 1. Assim, os logaritmos de Napier decrescem conforme as potências aumentam, enquanto os de Bürgi crescem (Boyer, 1996; Cajori, 2007; Maor, 2006).

Conforme apresentado no livro *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614* de Hobson (2019), há evidências de que Napier já havia concebido a ideia dos logaritmos em 1594, vinte anos antes da publicação do Canon. Em uma carta de Kepler, menciona-se que, um escocês, provavelmente Thomas Craig, um amigo da família Napier, teria informado o astrônomo Tycho Brahe em 1594 sobre a iminente descoberta de uma significativa simplificação nos processos aritméticos.

Neste trabalho, focaremos exclusivamente na contribuição de John Napier devido à sua maior relevância histórica e por ter publicado a primeira obra sobre logaritmos em 1614. Embora Joost Bürgi tenha concebido essa invenção 6 anos antes de Napier em 1588, conforme destaca Maor (2006):

> Existem evidências de que Bürgi chegou a esta invenção tão cedo quanto em 1588, seis anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma idéia, mas, por algum motivo, ele só a publicou em 1620, quando sua tabela foi impressa, anonimamente, em Praga. Em questões acadêmicas, uma regra de ouro é “publique ou morra”. Ao atrasar a publicação, Bürgi perdeu seu direito à prioridade em uma descoberta histórica. Hoje, seu nome está quase esquecido, exceto entre os historiadores da ciência. (Maor, 2006, p.28-29).

3.1 JOHN NAPIER (1550-1617)

Figura 01 - John Napier

Fonte: Cajori (2007).

Nesta seção, para compreender melhor a origem dos logaritmos, é essencial conhecer o contexto histórico, a vida pessoal e as contribuições de John Napier. Amplamente reconhecido como o responsável pela criação dos logaritmos, sua trajetória revela detalhes importantes que ajudam a entender o impacto de seus estudos. Segundo Maor (2006), é notável que raramente na história da ciência uma ideia matemática tenha sido tão bem recebida pela comunidade científica quanto a dos logaritmos. Além disso, seria difícil imaginar alguém com menos probabilidade de realizar tal descoberta.

Nascido quando seu pai tinha apenas dezesseis anos, John Napier (1550-1617) passou a maior parte de sua vida na imponente propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, próximo a Edimburgo, na Escócia. Napier dedicou grande parte de sua energia às controvérsias políticas e religiosas de sua época. Ele era um fervoroso anticatólico e um defensor das causas de John Knox e Jaime I (EVES, 2004).

Aos treze anos, Napier foi enviado para a Universidade de St. Andrews para estudar religião. Após um breve período no exterior, retornou à Escócia em 1571 e casou-se com Elizabeth Stirling, com quem teve dois filhos. Após a morte de Elizabeth em 1579, casou-se com Agnes Chisholm, com quem teve dez filhos. Conforme descrito por Maor (2006):

> Filho de Sir Archibald Napier e de sua primeira esposa, Janet Bothwell, John nasceu em 1550 (a data exata é desconhecida) na propriedade de sua família, o castelo Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia. Os detalhes de sua infância são imprecisos. Com treze anos de idade ele foi mandado para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião. Após uma curta permanência no exterior, voltou para sua terra natal em 1571 e casou-se com Elizabeth Stirling, com quem teve dois filhos. Depois da morte de sua esposa, em 1579, ele se casou com Agnes Chisholm, e eles tiveram dez filhos. O segundo filho deste casamento, Robert, mais tarde cuidaria da obra literária de seu pai. Após a morte de Sir Archibald, em 1608, John retornou a Merchiston, onde, como o oitavo senhor do castelo, passou o resto de sua vida. (Maor, 2006, p.15-16).

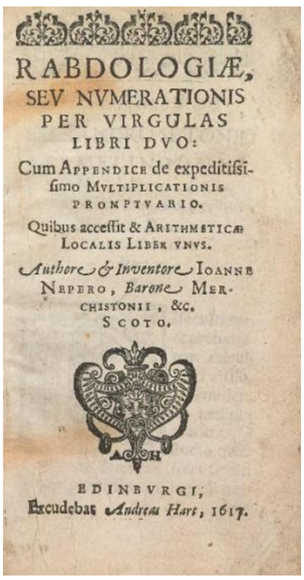
Uma curiosidade é que, em 1593, Napier publicou um texto atacando a Igreja Católica, afirmando que o papa era o Anticristo e que o dia do Juízo Final ocorreria entre 1688 e 1700. Segundo Eves (2004):

> Em 1593 publicou um libelo amargo e amplamente lido contra a Igreja de Roma intitulado *A Plaine Discouery of the Whole Revelation of Saint John*, no qual se propunha a provar que o papa era o Anticristo e que o Criador tencionava pôr fim ao mundo nos anos entre 1688 e 1700. (Eves, 2004, p.341-342, grifo do autor).

Para se afastar das controvérsias políticas e religiosas, Napier dedicava-se ao estudo da matemática e das ciências. Suas pesquisas resultaram em quatro importantes contribuições que entraram para a história da matemática. Essas invenções são: (1) a criação dos logaritmos; (2) um dispositivo mnemônico engenhoso conhecido como "regra das partes circulares", utilizado para reproduzir fórmulas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro, conhecidas como analogias de Napier, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; e (4) um instrumento chamado "barras de Napier" ou "ossos de Napier", usado para realizar multiplicações, divisões e extração de raízes quadradas de forma prática (Eves, 2004).

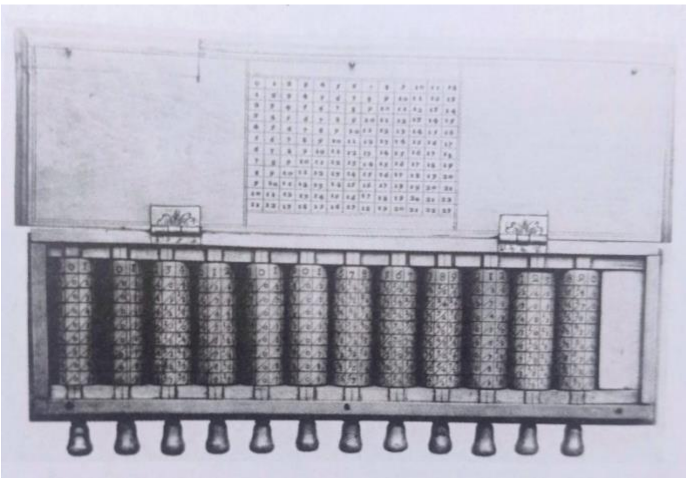
Napier, no século XVI, com a finalidade de criar métodos que facilitassem os cálculos da sua época, publicou em 1617, no ano de sua morte, seu livro Rabdologiae, onde descreve sua invenção conhecida como "barras de Napier" ou "ossos de Napier". Esses bastões possuíam itens de tabuadas de multiplicação esculpidos de maneira prática, permitindo realizar multiplicações de forma eficaz, segundo (Boyer,1996; Eves, 2004; Mendes 2008).

Figura 02 - Capa de Edição do Livro Rabdologiae



Fonte: Napier (1617).

Figura 03 - Barras de Napier



Fonte: Rooney (2012).

3.2 A JORNADA PARA OS LOGARITMOS: MÉTODOS PRECEDENTES

Para um aprofundamento e compreensão da análise conceitual dos logaritmos, bem como para entender o contexto histórico e epistemológico dessa descoberta, é essencial conhecer as ideias que inspiraram Napier na construção dos logaritmos. Napier foi motivado por algumas ferramentas utilizadas por astrônomos no século XVI. Uma dessas ferramentas era a "prostaférese" (palavra grega que significa adição e subtração), que permitia substituir o produto de senos e cossenos por uma soma ou subtração de senos e cossenos, sendo uma consequência imediata de identidades trigonométricas. Napier tomou conhecimento do uso da prostaférese através do Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia. Essa informação o encorajou a redobrar seus esforços na criação de um método que facilitasse os cálculos da época, levando-o posteriormente a publicar, em 1614, o seu livro Mirifici Logaritmorum Canonis Descriptio (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Segundo Boyer (1996):

> [...] o Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia, falou-lhe no uso da prostaférese na Dinamarca. Presumivelmente Craig tinha sido parte do grupo que com James VI em 1590 viajara para a Dinamarca para encontrar a noiva deste, Anne da Dinamarca. O grupo fora forçado por tempestades a desembarcar não longe do observatório de Tycho Brahe, onde, enquanto esperavam tempo mais favorável, tinham conversado com o astrônomo. Aparentemente foi mencionado o maravilhoso artifício da prostaférese muito usado em computações no observatório; e a informação sobre isto encorajou Napier a redobrar

> seus esforços e finalmente a publicar em 1614 o *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). (Boyer,1996, p. 213-214, grifo do autor).

Abaixo estão as quatro identidades do método da prostaférese, conhecidas como fórmulas de Werner. Johannes Werner (1468-1528), um matemático alemão, utilizou essas fórmulas para simplificar cálculos astronômicos no século XVI, conforme mencionado por Eves (2004). Vamos considerar a construção de uma dessas identidades:

I. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

II. $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

Subtraindo a primeira identidade da segunda, obtemos:

$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

As identidades são:

- $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$
- $2 \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)$
- $2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

Um exemplo ilustrativo do método de prostaférese, conforme descrito no livro de Eves (2004), pode ser observado ao calcular o produto entre $437{,}64$ e $27{,}327$. Para simplificar, podemos ajustar a posição das vírgulas nesses números, transformando-os em valores entre 0 e 1, e, no final, restaurar a escala original multiplicando o resultado por 10.000. Nesse processo, a fórmula de Werner é especialmente útil, pois permite reduzir o problema a uma simples adição, como veremos a seguir.

$$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\, cos(A) = 0{,}43764$$

$$cos(B) = 0{,}27327$$

$$A = 77{,}36026° \text{ e } B = 74{,}14105°$$

$$(0{,}43764)(0{,}27327) = cos\,(A - B) + cos\,(A + B)$$
$$Cos\,(77{,}36026° - 74{,}14105°) + cos\,(77{,}36026° + 74{,}14105°)$$
$$Cos\,(3{,}21921°) + cos\,(151{,}50131°)$$
$$= 0{,}998421992 + (-0{,}878828022)$$
$$= 0{,}11959397$$

Multiplicando esses valores com a ajuda de uma calculadora moderna, obtemos o resultado exato de 0,119593883. Esse resultado é notavelmente preciso, especialmente considerando o contexto histórico em que matemáticos e astrônomos do final do século XVII não tinham acesso à tecnologia computacional que temos hoje. Para eles, a aplicação do método de prostaférese não exigia um grande esforço, mas sim a habilidade de somar e fazer uso de uma tabela de valores de cossenos que já estava disponível na época, pois, de acordo com Boyer (1996, p. 211, grifo do autor), "Viéte no Canon mathematicus (1579) preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos". Esse exemplo demonstra a eficácia do método e a engenhosidade dos matemáticos daquela época. É claro que somar ou subtrair é muito mais fácil do que multiplicar ou dividir. Essas fórmulas fornecem um sistema que transformam operações aritméticas complexas em operações mais simples. Possivelmente, foi essa uma das abordagens que inspiraram Napier na criação dos logaritmos.

O método da prostaférese também foi mencionado por Elon Lages Lima (1980),

> Dados dois números X e Y para multiplicar, mudando seus sinais e a posição das vírgulas, podemos supor que X e Y estão compreendidos entre 0 e 1. Por meio de uma tábua de funções trigonométricas (que existe desde o tempo de Ptolomeu), achamos números x, y tais que $cos\ x = X$ e $cos\ y = Y$. Calculamos a soma $x + y$ e a diferença $x - y$. Novamente a tábua nos fornece $cos\ (x + y)$ e $cos\ (x - y)$. O produto $X.Y$ procurado será simplesmente a metade da soma $cos(x + y) + cos(x - y)$, (Lima, 1980, p.4)

Uma segunda ideia, mais direta, segundo Maor (2006), envolvia os termos de uma progressão geométrica, uma série de números com uma proporção fixa entre os termos consecutivos. Muito antes da época de Napier, já havia sido observado que existe uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes, ou índices, da razão comum. O matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), em seu livro Arithmetica integra (1544), explicou essa relação da seguinte maneira: se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $(1,\ q,\ q^2,\ \ldots\ )$ o resultado será equivalente à soma dos expoentes correspondentes. Por exemplo: $q^2q^3 = (q.q).(q.q.q) = q.q.q.q.q = q^5$, isso é equivalente a somar os expoentes 2 e 3.

De forma semelhante, dividir um termo de uma progressão geométrica por outro equivale a subtrair seus expoentes:

$$\frac{q^5}{q^3} = \frac{(q.q.q.q.q)}{(q.q.q)} = q.q = q^2 = q^{5-3}$$

Portanto, temos as regras simples:

$$q^m.q^n = q^{m+n}\ ;\ \frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$$

Maor (2006) nos oferece um exemplo prático da aplicação dessas regras. Para ilustrar como essa ideia funciona, vamos usar como base o número 2. A tabela a seguir exibe as potências sucessivas de 2, iniciando em $(n = -3)$ e terminando em $(n = 12)$:

Suponha que queremos multiplicar 128 por 32. Nós procuramos na tabela os expoentes correspondentes a 128 e 32, que são, respectivamente, 7 e 5. Somando esses expoentes, obtemos 12. Agora, revertendo o processo, procuramos o número cujo expoente correspondente é 12; este número é 4096, a resposta desejada.

Como segundo exemplo, suponha que queremos calcular $2048/16$. Encontramos o expoente correspondente a 2048, que é 11, e o correspondente a 16 que é 4, e ao subtrair os expoentes $(11 - 4)$ temos como resultado 7. Então, procuramos na tabela o número cujo expoente é 7 e encontramos 128. E de fato: $(2048)\ /\ (16) = 128$.

Tabela 01 - Potências de 2

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	2024	2048	4096

Fonte: Maor (2006, p,20)

É interessante observar que os elementos desta tabela correspondentes a (2^n) (como $\ldots 1, 2, 4, 8, 16\ldots$) formam uma progressão geométrica, enquanto os elementos da linha da tabela correspondentes a (n) (como $. . . , 0, 1, 2, 3, 4. ..$) formam uma progressão aritmética. Esta relação entre termos de uma progressão aritmética e geométrica é a ideia chave por trás dos logaritmos. No entanto, Stifel aplicava isso apenas a expoentes inteiros. Ao trabalhar com potências de números inteiros, as diferenças entre termos sucessivos da progressão geométrica aumentam enormemente, o que é um grande inconveniente para cálculos práticos como afirma Boyer (1996, p.213). Por exemplo, ao observar a tabela, não é possível calcular (71×97) diretamente, pois, entre 64 e 128, existem 63 números que não estão na tabela. À medida que o expoente cresce, os espaços entre termos sucessivos desta progressão geométrica aumentam significativamente.

A originalidade da ideia de Napier estava em estender esses cálculos para uma faixa contínua de valores, saindo de uma visão puramente algébrica para uma geométrica. Nas seções seguintes, detalharemos o método que Napier adotou para criar suas tabelas de logaritmos e como essa inovação revolucionou os cálculos matemáticos da época.

3.3 LOGARITMO POR NAPIER

Na sessão anterior, vimos que John Napier foi influenciado pelo método da “prostaférese”, que permitia substituir o produto de senos e cossenos por uma soma ou subtração de senos e cossenos, além de uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e seus expoentes em progressão aritmética.

As obras de Napier, que foram fundamentais para o desenvolvimento de seus estudos sobre logaritmos, são duas principais, conforme apontam Eves (2004) e Hobson (2019). A primeira, publicada em 1614, intitulada *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* ("Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos"), apresenta uma tabela contendo os logaritmos dos senos dos ângulos para cada minuto de arco sucessivo, além de explicar como utilizar essa tabela. A segunda obra, *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* ("Construção da Maravilhosa Lei dos Logaritmos"), foi publicada postumamente em 1619 por seu filho, Robert Napier. Embora a tabela tenha sido apresentada em sua primeira obra, foi nesta segunda que Napier detalhou a justificativa e a concepção da ideia dos logaritmos, explicando como os desenvolveu. Segundo Hobson (2019), essa obra foi escrita anos antes da palavra "logaritmo" ser inventada. Na introdução, Robert explica que o trabalho foi concluído muito antes da publicação do “Descriptio", e é interessante notar que, embora a palavra "logaritmo" apareça no título do "Constructio", ao longo do texto, Napier refere-se aos logaritmos como "numeros artificiales" (números artificiais).

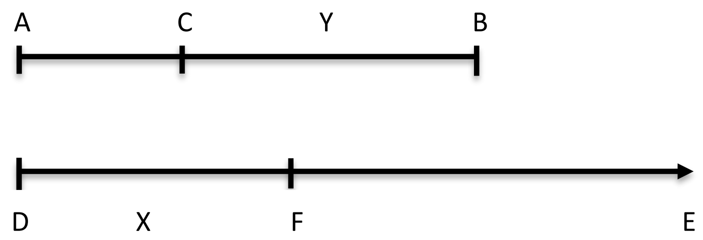
Robert Napier também menciona que seu pai não conseguiu dar os toques finais ao livro antes de sua morte. Ele escreve: "Nem duvido que esta obra póstuma teria sido muito mais perfeita e acabada se Deus tivesse concedido uma vida mais longa ao autor, meu adorado pai". Um dos motivos para o "Constructio" ter sido publicado após o "Descriptio" é que Napier preferiu aguardar a opinião do mundo acadêmico sobre sua tabela de logaritmos antes de divulgar o método de construção dos mesmos, porém a obra de Napier foi extremamente bem recebida por cientistas em toda a Europa Conforme Maor (2006, p. 25), "Raramente, na história da ciência, uma nova idéia foi recebida de modo mais entusiástico. [...] a invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda a Europa e até mesmo da distante China."

Nesse contexto da criação inicial dos logaritmos por John Napier, surge a intrigante questão sobre a linha de raciocínio que o impulsionou a desenvolvê-los. Nos dias atuais, os logaritmos parecem derivar naturalmente do conceito de expoente. No entanto, conforme destaca Cajori (2007, p. 215): "Uma das mais interessantes curiosidades da história da matemática é o fato de Napier ter construído os logaritmos antes de ter pensado no uso dos expoentes". Diante disso, uma pergunta fascinante se apresenta: se os logaritmos não surgiram inicialmente através do expoente, já que Napier não pensava no uso de expoentes, qual foi então a lógica do seu processo de pensamento ao criar os logaritmos?

Como mencionado na seção 3.2 deste trabalho, ao lidar com tabelas que envolvem termos de progressão geométrica e progressão aritmética, nos deparamos com um problema significativo: as diferenças entre termos sucessivos da progressão geométrica aumentam de forma drástica, o que torna essas tabelas inviáveis para cálculos práticos. Napier dedicou pelo menos vinte anos de sua vida a essa teoria e encontrou uma solução para esse problema, substituindo a abordagem aritmética por uma abordagem geométrica, utilizando o conceito de movimento. A ideia fundamental de Napier, segundo Eves (2004), foi a seguinte:

Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE, com origem em D, conforme a Figura 4. Suponha que os pontos C e F se movam simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitimos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB, enquanto F se move com velocidade constante. Napier então definiu DF como o logaritmo de CB. Ou seja, se $DF = x$ e $CB = y$, temos: $x = Nap\,log(y)$, que significa que x é o logaritmo de Napier de y.

Figura 04 - Modelo geométrico de Napier



Fonte: Eves (2004, p. 344).

Para evitar a complexidade das frações decimais, Napier, conforme descrito por Eves (2004), optou por definir o comprimento do segmento AB como 10^7. Na época, as melhores tabelas disponíveis, que calculavam senos, utilizavam até sete casas decimais. Assim, ao escolher esse valor, Napier facilitou os cálculos, pois seu trabalho "Descriptio" (1614) envolvia calcular logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco. Essa escolha ajudou a simplificar os cálculos e a utilização das tabelas na prática.

Napier imaginou dois pontos movendo-se ao longo de duas retas, um de maneira geométrica e outro de maneira aritmética. Essa concepção faz com que os pontos percorram toda a extensão da reta. Napier resolveu brilhantemente o problema dos espaços vazios entre termos sucessivos da progressão geométrica, visto anteriormente na seção 3.2, ao observar que um ponto em movimento contínuo passaria por todos os pontos na reta. O ponto F se move em movimento retilíneo uniforme, enquanto o ponto C se move ao longo de AB com velocidade variável e igual à distância $CB = y$. É interessante observar que sua velocidade vai diminuindo ao longo da trajetória.

Observações Importantes:

1. Velocidade de C ao longo da trajetória descrita é por CB: A velocidade de C é dada pela derivada da distância CB em relação ao tempo.

2. Diferenciação de ambos os lados em relação a t:

$$\frac{d(AC)}{dt} = \frac{d(10^7 - y)}{dt}$$

3. Sabendo que (10^7) é uma constante, sua derivada é zero:

$$\frac{d(AC)}{dt} = -\frac{d(y)}{dt}$$

4. Velocidade de C: A velocidade de C é numericamente igual a y, então:

$$\frac{d(AC)}{dt} = y$$

5. Substituindo na equação derivada:

$$y = -\frac{d(y)}{dt}$$

6. Rearranjando para encontrar $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{d(y)}{dt} = -y$$

Interpretação:

A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = -y$, mostra que a taxa de variação de y em relação ao tempo é proporcional a $-y$, indicando que y diminui ao longo do tempo. Vamos separar as variáveis y e t:

$$\frac{d(y)}{y} = -dt$$

2. Integração de Ambos os Lados:

Integramos ambos os lados da equação:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -1\, dt$$

3. Resultado das Integrações:

O resultado das integrações é: $\ln y = -t + c$, também temos que $t = c - lny$, onde C é a constante de integração.

Cálculo da Constante de Integração C

Para determinar a constante de integração C, usamos a condição inicial $t = 0$ e $y = 10^7$.

Substituindo na solução geral da equação diferencial:

$$\ln y = -t + c$$

Quando $t = 0$ e $y = 10^7$, obtemos:

$$C = \ln 10^7$$

Velocidade Inicial dos Pontos (C) e (F)

Dado que a velocidade do ponto (F) é constante e que tanto (C) quanto (F) têm velocidades iniciais iguais, a velocidade inicial $(t = 0)$ de ambos os pontos é (10^7).

Para o ponto (F), podemos escrever a posição como:

$$x = 10^7 t$$

Diferenciando em relação ao tempo, obtemos a velocidade:

$$\frac{d(x)}{dt} = 10^7$$

Relação com o Logaritmo de Napier

Dado que $x = Nap\ log(y)$:

$$Nap\ \log y = x = 10^7 t$$

Substituindo a solução de (y):

$$10^7 t = 10^7\ (ln\ 10^7 - ln\ y)$$

Simplificando, obtemos:

$$Nap\ log(y) = 10^7\ ln\ (\frac{10^7}{y})$$

Ou ainda:

$$Nap\ log(y) = 10^7\ log_{\frac{1}{e}}\ (\frac{y}{10^7})$$

Após um estudo detalhado do processo geométrico proposto por Napier para a concepção dos logaritmos, estabelecemos uma relação entre o logaritmo de Napier, denominado "$Nap\ log$", e a concepção atual dos logaritmos. A relação encontrada é:

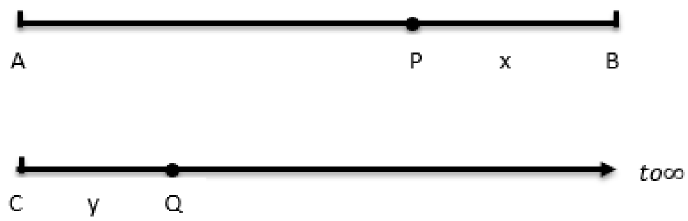
$$Nap\ log(y) = 10^7\ log_{\frac{1}{e}}\ (\frac{y}{10^7})$$

Segundo Eves (2004), afirmar que os logaritmos neperianos são equivalentes aos logaritmos naturais não é totalmente preciso. Observa-se que, na relação encontrada, a base do logaritmo de Napier é $\frac{1}{e}$. Isso faz com que os logaritmos neperianos decresçam à medida que os números crescem, ao contrário do comportamento dos logaritmos naturais, que crescem com o aumento dos números.

Além disso, notamos que, em uma sucessão de períodos de tempo iguais, (y) decresce em uma progressão geométrica, enquanto (x) cresce em uma progressão aritmética. Esta observação confirma o princípio fundamental do sistema de logaritmos de Napier, que é a associação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética. Esse modelo geométrico proposto por Napier representa uma abordagem brilhante e inovadora na representação de logaritmos.

Assim como Eves (2004) demonstra o modelo geométrico para explicar a ideia do logaritmo proposta por Napier, Maor (2006) faz uma abordagem semelhante, com algumas modificações na nomenclatura dos pontos. Em Eves (2004), o ponto F se move em progressão aritmética, enquanto em Maor (2006) esse ponto é denominado Q. Da mesma forma, o ponto C em Eves (2004), que se move em progressão geométrica, é chamado de P em Maor (2006).

Figura 05 - Modelo geométrico de Napier



Fonte: Maor (2006, p. 257).

Para ilustrar como a ideia de logaritmo proposta por Napier funciona, apresentamos um exemplo numérico com base na explicação de Maor (2006). Conforme descrito por Maor(2006) temos:

> Podemos ver, facilmente, que esta definição de fato transforma um produto de dois números (representados como distâncias ao longo de AB) em uma soma de dois outros números (distâncias em relação a C). Supondo que o segmento AB representa a unidade de comprimento, vamos marcar segmentos iguais, de comprimento arbitrário, ao longo do raio a partir de C; vamos chamá-los de 0, 1, 2,3, e assim por diante. Como Q se move com uma velocidade uniforme, ele vai percorrer estes segmentos em intervalos de tempo iguais. Quando P começa a se mover de A, Q encontra-se em 0 (o ponto C); quando P chega à metade de AB, Q se encontra em 1; e quando P cobriu $3/4$ de AB, Q chegou em 2, e assim por diante. Como x mede a distância que P ainda tem de percorrer para chegar em B, temos a seguinte tabela: (Maor, 2006, p.258)

Tabela 02 - Tábua simplificada de logaritmos

X	1	1/2	¼	1/8	1/16	1/32	1/64	...
Y	0	1	2	3	4	5	6	...

Fonte: Maor (2006, p. 258).

Esta é, na verdade, uma tábua de logaritmos muito primitiva: cada número na fileira de baixo é o logaritmo (na base $1/2$) do número correspondente na fileira de cima. De fato, a soma de quaisquer dois números na fileira de baixo corresponde ao produto dos números correspondentes na fileira de cima. Note que nesta tabela y aumenta enquanto x diminui, em contraste com os nossos logaritmos modernos (de base 10 ou base e), que aumentam à medida que os números aumentam.

Para facilitar a compreensão da relação entre o modelo geométrico de Napier e a tabela numérica apresentada por Maor (2006), é importante detalhar como esses dois métodos se conectam e evidenciar a importância da proposta de Napier. O objetivo é mostrar ao leitor como o modelo geométrico de Napier, descrito de maneira brilhante por Maor (2006), se traduz em uma notação aritmética moderna, destacando a inovação e a sofisticação do conceito de Napier.

Vamos analisar como (x) e (y) estão relacionados:

- Quando $(y = 0)$ temos $(x = 1)$. Isso significa que, no início quando y é zero, x é igual a 1.
- Quando $(y = 1)$ temos que $(x = 1/2)$. Aqui, (x) é igual a $1/2$, representando a subtração de $(1 - 1/2)$.
- Quando $(y = 2)$ temos que $(x = 1/4)$. Aqui, (x) é $1/4$, resultado da subtração de $\{1 - (1/2 + 1/4)\}$.
- Quando $(y = 3)$ temos que $(x = 1/8)$. Aqui, (x) é $1/8$, resultando da subtração de $\{1 - (1/2 + 1/4 + 1/8)\}$.

Cada vez que (y) aumenta em 1, (x) diminui pela metade do valor anterior. Isso cria uma progressão geométrica na linha de (x), onde cada novo valor de (x) é metade do valor anterior.

No modelo geométrico de Napier:

- Ponto (C) se move com uma velocidade proporcional à distância (CB), que corresponde a (x) no modelo da tabela.
- Ponto (F) se move com uma velocidade constante, correspondente a (y) na tabela.

Napier define a distância (DF) ao longo de (DE) como o logaritmo da distância (CB) ao longo de (AB). O conceito fundamental aqui é que (DF) representa o logaritmo de (CB).

Comparando os modelos:

A tabela numérica e o modelo geométrico de Napier têm uma relação direta:

1. Propriedade de Decrescimento:

No modelo numérico, conforme (y) aumenta, (x) diminui. Por exemplo, quando (y) passa de 0 para 1, (x) muda de 1 para $1/2$. À medida que (y) continua a aumentar, (x) continua a diminuir exponencialmente.

No modelo geométrico, Napier também observou que o logaritmo (a distância (DF) de um número (a distância $CB)$ aumenta à medida que o número (CB) diminui. O conceito é o mesmo: uma mudança no logaritmo corresponde a uma multiplicação ou divisão do valor base.

2. Progressão Geométrica vs Progressão Aritmética:

Na tabela, a relação entre (x) e (y) segue uma progressão geométrica, onde cada novo valor de (x) é metade do valor anterior. Isso reflete a base $1/2$, utilizada para calcular os logaritmos.

No modelo geométrico, a relação também pode ser descrita como uma progressão geométrica, pois a velocidade de (C) (a mudança no logaritmo) está relacionada à distância (CB) em uma base que faz com que o valor de (DF) diminua conforme (CB) aumenta.

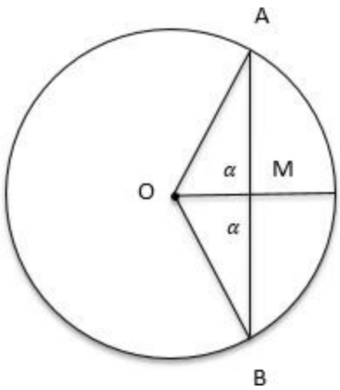
Tanto a tabela numérica quanto o modelo geométrico de Napier ilustram como uma base menor do logaritmo (neste caso, $1/2$) na tabela e ($1/e$ no modelo de Napier) leva a um comportamento de decrescimento. Quando (y) aumenta, (x) diminui, refletindo a característica dos logaritmos de transformar multiplicações em adições e mostrando como a base do logaritmo influencia esse comportamento. Ambos os modelos mostram que, independentemente da base utilizada, o conceito fundamental de logaritmos e o comportamento exponencial decrescente se mantém consistente.

3.3.1 Construção da primeira tabela de logaritmos

É interessante observar que, na época de Napier, já existiam tabelas extensas contendo valores dos senos. Boyer (1996) destaca que Viéte (1540-1603), em seu Canon Mathematicus, utilizava o "sinus totus"(seno total) ou hipotenusa dividida em 100.000 partes para criar suas tabelas de senos, o que ajudava a evitar números decimais. Em contraste, Napier decidiu dividir o raio do círculo em 10.000.000 partes, uma prática que já era comum na sua época. Como afirma Maor (2006, p.20-21), "E como seu principal objetivo era reduzir o enorme trabalho envolvido nos cálculos trigonométricos, ele seguiu a prática então usada na trigonometria de dividir o raio de um círculo unitário em $10.000.000$ partes ou 10^7 partes."

Um ponto aspecto importante sobre o cálculo do seno na época de Napier é que ele difere do método atual. Hoje, o seno de um ângulo varia entre 0 e 1 (ou seja, $0 < senx < 1$). No entanto, como aponta Hobson (2019), na época de Napier e por muitos anos depois, o seno de um ângulo não era visto como fazemos atualmente. Em vez disso, o seno de um ângulo era considerado como o comprimento da semicorda de um círculo com um raio específico, no caso de Napier ele usou o raio com $10.000.000$ partes, que subtende o ângulo no centro.

Figura 06 - Corda AB



Fonte: Eves (2004, p. 202).

Vou demonstrar, de acordo com Eves (2004), como se calculava o seno na época de Napier, pois irei apresentar nesta seção uma página da tábua de logaritmos feita por Napier em seu livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614). Nesta página, Napier calcula os senos dos ângulos de 9°, de minuto a minuto. Por exemplo, na primeira linha dessa folha da tábua de logaritmos, temos o seno de 9° e 0 minutos como sendo 1.564.345, que é o comprimento da semicorda de um círculo com raio de 10.000.000. Portanto, o seno era interpretado como o comprimento da semicorda correspondente ao ângulo central. Assim, ao associar o seno ao comprimento de uma semicorda de valor 1.564.345, seria possível calcular o ângulo correspondente utilizando uma fórmula trigonométrica relacionada à corda na circunferência. Como resultado, por exemplo, se encontraria que o ângulo associado a essa semicorda seria de 9°, conforme será detalhado mais adiante nesta seção.

Conforme explicado por Eves (2004), essa abordagem de medir o seno como o comprimento de uma semicorda era um conceito herdado da Grécia Antiga. Hiparco, um dos maiores astrônomos da antiguidade, é creditado como o primeiro a construir tabelas de cordas, que mais tarde serviriam como base para as tabelas de senos trigonométricos. Em sua obra, Hiparco dividia o raio do círculo em 60 partes, e os comprimentos das cordas eram expressos em termos dessas divisões sexagesimais. Segundo Eves (2004, p.202-203), a tábua de cordas atribuída a Hiparco, e aperfeiçoada por Ptolomeu, fornecia os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo, de 1/2º a 180º, com incrementos de 1/2º. Essas tábuas de cordas correspondiam às tábuas de senos, já que a fórmula para o seno de um ângulo, dado o comprimento da corda AB, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{crd\ 2\alpha}{2r} = \frac{1}{2}\frac{AB}{r} = \frac{AM}{r}$$

Ou seja, o seno de um ângulo (α) era obtido pela relação entre o comprimento da semicorda correspondente ao ângulo (α) e o raio do círculo. Esse conceito de comparar o seno com uma corda na circunferência era essencial para os cálculos trigonométricos da época e se diferenciava do conceito moderno, onde o seno é definido como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa em uma circunferência com raio unitário.

Na seção anterior, "3.2 A Jornada para os Logaritmos: Métodos e Ideias Precedentes", discutimos os métodos que influenciaram Napier na criação dos logaritmos. Eves (2004) explica que Napier se baseou na ideia de associar termos de uma progressão geométrica $(b, b^2, b^3, \ldots, b^m, \ldots, b^n)$ com termos de uma progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, \ldots, m, \ldots, n)$. Isso permite que, ao multiplicar dois números da progressão geométrica $(b^m \text{ e } b^n)$, o resultado seja associado à soma $(m + n)$ dos termos da progressão aritmética, e esse resultado possa ser encontrado na tabela.

Contudo, como a diferença entre dois termos sucessivos na progressão geométrica aumenta rapidamente com o tempo, especialmente quando se trabalha com números inteiros (b), Napier enfrentou o desafio de preencher lacunas na tabela devido ao aumento da diferença entre esses termos. Para resolver esse problema, Napier optou por uma “base” muito próxima de 1, mas ligeiramente menor. Essa escolha fez com que as potências sucessivas diminuíssem de maneira gradual e lenta, preenchendo assim as lacunas da tabela e resultando em uma tabela muito densa. A base selecionada, ou "razão", como Napier a denominava, para a construção de sua "Primeira Tábua de Logaritmos", foi $(1-\frac{1}{10^7})$, ou seja, 0,9999999, conforme descrito por Cajori (2007), e para evitar lidar com números decimais, Napier multiplicava cada potência por 10^7. Assim, ele transformava os cálculos com números pequenos em cálculos com números inteiros mais manejáveis, facilitando a construção e o uso da tabela dos logaritmos. Então se;

$$N = 10^7(1-1/10^7)^L$$

Napier chamava L de "logaritmo" do número N. Nesse contexto, como consequência, Eves (2004, p. 344) aponta que "Segue-se que o Logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1-1/10^7) = 9999999$ é 1." É importante destacar a observação de Boyer (1996) onde ele destaca que, ao dividir os números (N) e seu logaritmos (L) por (10^7), obtemos praticamente um sistema de logaritmos com base $(1/e)$. Isso ocorre porque $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}$,é extremamente próximo de $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$, que é igual a $(1/e)$.

De fato, se fizermos a divisão de (N) por (10^7) e multiplicar e dividir L por (10^7), temos:

$$\frac{\boldsymbol{N}}{10^7} = ((1-\frac{1}{10^7})^{10^7})^{\frac{L}{10^7}} = \frac{1}{e}^{\frac{L}{10^7}}$$

Isso significa que:

$$L = 10^7\, log_{\frac{1}{e}}(\frac{N}{10^7})$$

É equivalente a fórmula da sessão 3.3,

$$Nap\ log(y) = 10^7\, log_{\frac{1}{e}}(\frac{y}{10^7})$$

Segundo Maor (2006) e Hobson (2019), Napier construiu três tabelas. A primeira delas continha 101 elementos utilizava a progressão geométrica de elementos da forma $10^7(1-1/10^7)^L$, onde (L) variava de 0 a 100. Napier dedicou vinte anos (de 1594 a 1614) ao árduo trabalho de calcular manualmente os termos dessa progressão por meio de longas e repetitivas subtrações, enfrentando um dos processos mais exaustivos para um cientista de sua época.

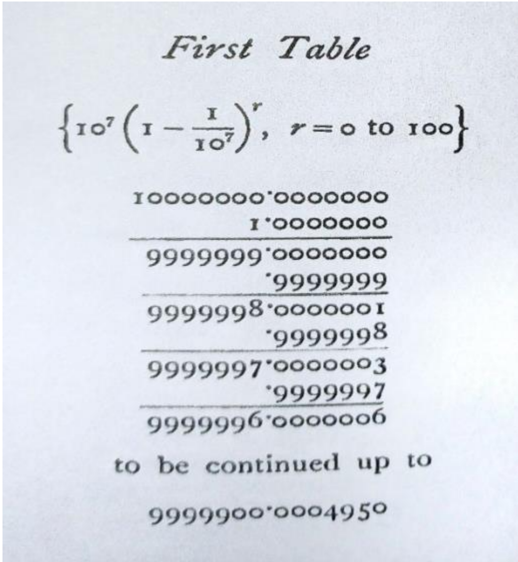
A tabela inicial começava com ($10^7 = 10.000.000$) para ($L = 0$), seguida por 10^7 (1 - 10^10^{-7})=9.999.999 para ($L = 1$), e continuava até ($10^7\ (1-10^{-7})^{100} = 9.999.900$), ignorando partes fracionárias pequenas, como 0,0004950.

Tabela 03 - Primeira tabela de Napier

PG $10^7(1-1/10^7)^L$	Aproximação
$10^7(1-1/10^7)^0$	10.000.000
$10^7(1-1/10^7)^1$	9.999.999
$10^7(1-1/10^7)^2$	9.999.998
$10^7(1-1/10^7)^3$	9.999.997
$10^7(1-1/10^7)^4$	9.999.996
Continua até	Continua até
$10^7(1-1/10^7)^{100}$	9.999.900

Fonte: O autor (2024).

Figura 07 -Primeira tabela de Napier



First Table

$$\left\{10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^r,\ r=0 \text{ to } 100\right\}$$

10000000·0000000
1·0000000
9999999·0000000
·9999999
9999998·0000001
·9999998
9999997·0000003
·9999997
9999996·0000006
to be continued up to
9999900·0004950

Fonte: Hobson (2019, p. 29).

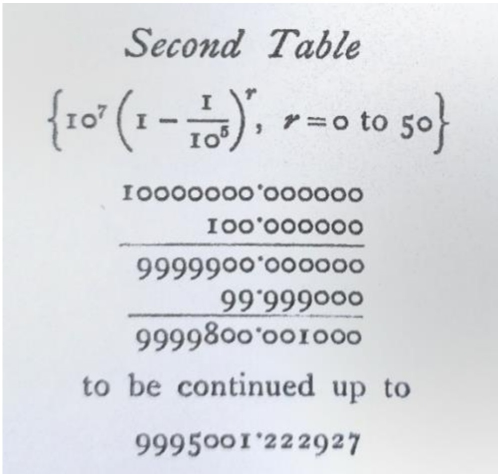
Para sua segunda tabela, Napier usou a proporção $(1 - 10^{-5})$, resultando em uma progressão geométrica com 51 elementos, onde o último valor era $10^7\ (1 - 10^{-5})\ ^{50}$ aproximadamente $9.995.001$, com (L) variando de 0 a 50.

Tabela 04 - Segunda tabela de Napier

PG ($10^7\ (1 - 10^{-5})\ ^L$	Aproximação
($10^7\ (1 - 10^{-5})\ ^0$	10.000.000
($10^7\ (1 - 10^{-5})\ ^1$	9.999.900
($10^7\ (1 - 10^{-5})\ ^2$	9.999.800
Continua	Continua
($10^7\ (1 - 10^{-5})\ ^{50}$	9.995.001

Fonte: O autor (2024).

Figura 08 - Segunda tabela de Napier



Second Table

$$\left\{10^7\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^r,\ r=0 \text{ to } 50\right\}$$

10000000·000000
100·000000
9999900·000000
99·999000
9999800·001000
to be continued up to
9995001·222927

Fonte: Hobson (2019, p. 29).

De acordo com Hobson (2019), a terceira tabela de Napier é composta por 69 colunas, e cada coluna contém 21 números. O primeiro número de qualquer coluna é obtido tomando $(1 - \frac{1}{100})$ do primeiro número da coluna anterior. Os números subsequentes em cada coluna são calculados través de multiplicações sucessivas por $(1 - \frac{1}{2000})$. Portanto, o p-ésimo número na q-ésima coluna é dado pela expressão

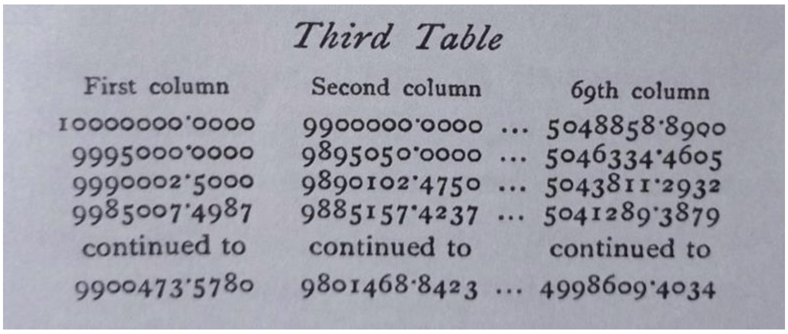
$$10^7\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{q-1}.$$

Tabela 05 - Terceira tabela de Napier

Primeira coluna	Segunda coluna	69° Coluna
10.000.000	9.900.000	5.048.858
9.995.000	9.895.050	5.046.334
9.990.002	9.890.102	5.043.811
9.985.007	9.885.157	5.041.289
Continua até	Continua até	Continua até
9.900.437	9.801.468	4.998.609

Fonte: O autor (2024).

Figura 09 - Terceira tabela de Napier



Third Table

First column	Second column		69th column
10000000·0000	9900000·0000	...	5048858·8900
9995000·0000	9895050·0000	...	5046334·4605
9990002·5000	9890102·4750	...	5043811·2932
9985007·4987	9885157·4237	...	5041289·3879
continued to	continued to		continued to
9900473·5780	9801468·8423	...	4998609·4034

Fonte: Hobson (2019, p. 29).

Como exemplo, vamos calcular o quarto número da segunda coluna usando a fórmula para determinar os elementos da terceira tabela de logaritmos:

$$10^7\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{q-1}.$$

Neste caso, $(p = 4)$ e $(q = 2)$. Portanto, substituindo os valores:

$$10^7\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{4-1}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{2-1}.$$

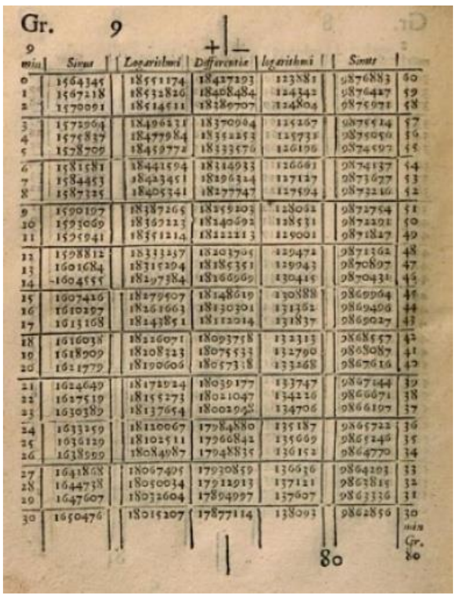
Ou seja:

$$10^7\,(0{,}9995)^3\,(0{,}99)^1 \approx 9.885.157$$

Para exemplificar o uso prático da primeira tabela de logaritmos de Napier, vamos fazer um exemplo. Suponha que queremos calcular o produto de $(9.999.997)$

por $(9.999.998)$. Primeiro, procuramos o valor de (L) correspondente a $(9.999.999)$ na tabela, e encontramos $(L = 1)$. Em seguida, encontramos o valor de (L) correspondente a $(9.999.997)$, que é $(L = 3)$. Pela propriedade das potências de mesma base, somamos os expoentes: $(1 + 3 = 4)$. Ao consultarmos a tabela novamente para $(L = 4)$, encontramos o valor $(9.999.996)$, por fim, multiplicamos o resultado por 10^7, obtendo (10^7) $9.999.996$. Foi com o intuito facilitar esse tipo de cálculo que Napier criou suas tabelas. Foi utilizando essa estratégia, que transformava operações complexas como a multiplicação em operações mais simples, como a soma, e localizando os resultados em suas tabelas, que Napier facilitou significativamente os cálculos da época. Ele repetiu esse processo exaustivamente e, dedicou 20 anos de sua vida a esse trabalho. Em 1614, Napier publicou sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, que continha a primeira tabela de logaritmos dos senos naturais calculados minuto a minuto, conforme descrito por Cajori (2007) e Maor (2006). Contudo, o *Descriptio* não explicava como Napier calculava os logaritmos. Apenas em 1619, foi publicada postumamente por seu filho Robert a obra *Mirifici Logarithmorum Constructio* (Construção do Maravilhoso Cânone dos Logaritmos), onde Napier expôs detalhadamente o modelo geométrico e a estratégia utilizada para calcular os logaritmos dos senos. Para ilustrar, apresentarei uma página do *Descriptio*, conforme reproduzida no livro de Hobson (2020), que contém a tabela de logaritmos correspondente ao ângulo de $9°$ de 0 a 30 minutos.

Figura 10 - Taboa do logaritmo do seno



Gr. 9

\+ | −

9 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333257	18203785	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057338	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30

min Gr. 80

80

Fonte: Hobson (2019, p.19)

Vamos demonstrar que cada seno dessa tabela criada por Napier pode ser calculado utilizando a fórmula que ele desenvolveu em sua primeira tabela apresentada nesta sessão: $10^7(1-\frac{1}{10^7})^L$. Como exemplo, vamos calcular o logaritmo do seno de 9°, que está localizado na primeira linha desta página da obra de Napier (1614). O seno é representado pelo valor $1.564.346$, e seu logaritmo é $18.551.176$. Aplicando a fórmula $10^7(1-\frac{1}{10^7})^{18.551.176}$, obtemos o valor de 1.564.345, o que confirma a precisão e a utilidade da tabela para o cálculo dos logaritmos dos senos.

3.4 HENRY BRIGGS E O LOGARITMOS DECIMAL

A publicação do sistema de logaritmos de Napier em 1614 despertou grande entusiasmo na comunidade científica da época, sendo Henry Briggs (1561-1631) um dos mais admirados pelo trabalho de Napier. Como destacado por Cajori (2007, p.217, grifo do autor), "Henry Briggs (1556-1631), que na época de Napier era professor de geometria em Gresham College, Londres, e depois em Oxford, ficou tão admirado com o livro de Napier que deixou os seus estudos em Londres para visitar o filósofo escocês." Em 1615, Briggs fez uma viagem à Escócia para se encontrar pessoalmente com Napier, onde discutiram modificações no método dos logaritmos (Boyer, 1996, p.215). Esse encontro foi de grande importância, pois Briggs propôs mudanças fundamentais que tornariam as tabelas de logaritmos mais práticas e acessíveis.

Durante o desenvolvimento do sistema de logaritmos, Henry Briggs propôs algumas mudanças significativas para simplificar e tornar o uso dos logaritmos mais prático. Uma de suas sugestões foi definir o logaritmo de 1 como sendo zero, em vez de 10^7, que era o valor adotado nas tabelas originais criadas por Napier. Além disso, Briggs também sugeriu que o logaritmo de 10 fosse igual a 1, estabelecendo um sistema baseado nas potências de 10. Essas modificações facilitaram a criação do logaritmo "comum", ou *briggsiano*, em que qualquer número positivo (N) pode ser expresso como $(N = 10^L)$, onde (L) é o logaritmo de (N) ou seja, $(L = \log_{10} N \ ou \ log \ N)$. Como explica Maor (2006), essas ideias de Briggs ajudaram a definir o conceito de base para os logaritmos. Embora Napier tenha concordado com essas propostas, reconhecendo que já havia considerado abordagens semelhantes, mas sua idade avançada e falta de vigor o impediram de implementar essas modificações antes de sua morte.

Briggs, então, assumiu essa tarefa e passou a recalcular as tabelas de logaritmos com base nas novas ideias. Em 1624, ele publicou o livro *Arithmetica Logarithmica*, que continha logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com uma precisão impressionante de quatorze casas decimais (Maor, 2006). Posteriormente, o matemático holandês Adriaan Vlacq (1600-1667) completou o intervalo entre 20.000 e 90.000, e seus cálculos foram incluídos na segunda edição da obra em 1628. Essas tabelas, com algumas revisões ao longo do tempo, permaneceram a base para todos os logaritmos decimais subsequentes.

Figura 11 - Capa da obra Arithmetica Logarithmica de Henry Briggs, publicada em 1624.

ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad
20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.

HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia
mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ
profeſſor SAVILIANVS.

DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.

Academiæ Cantabrigienſis
Liber

LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

Fonte: Briggs (1624).

Para explicar o procedimento criado por Henry Briggs na construção da primeira tabela de logaritmos comuns, é essencial entender sua abordagem inovadora. Enquanto John Napier usava potências sucessivas de números próximos de 1 para criar sua tabela de logaritmos, Briggs optou por uma estratégia diferente.

Briggs iniciou seu trabalho definindo que o logaritmo de 10 seria igual a 1. No entanto, em vez de continuar calculando potências com expoentes inteiros de um número próximo de dez, como Napier havia feito, ele adotou uma abordagem diferente ao calcular as raízes sucessivas de 10. Boyer (1996, p. 215) explica que, para calcular os logaritmos de outros números, Briggs começou com a raiz quadrada de 10, $\sqrt{10}$ que é aproximadamente $3{,}162277$. A partir disso, ele concluiu que o logaritmo de $3{,}162277$ seria $0{,}5000000$, ou seja $log3{,}162277 = 0{,}5000000$. Em seguida, calculou $10^{\frac{3}{4}}=\sqrt{31{,}62277}\approx\ 5{,}623413$, concluindo que $\log 5{,}623413 = 0{,}7500000$, de maneira análoga $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[4]{10}$, é aproximadamente $1{,}778279$, temos que $\log\ 1{,}778279\ =\ 0{,}2500000$. Utilizando essas raízes sucessivas, Briggs começou a construir sua tabela de logaritmos de base 10, conhecidos como logaritmos decimais ou logaritmos comuns.

Esse método permitiu a Briggs obter logaritmos de uma vasta gama de números sem precisar realizar multiplicações complexas repetidamente. Em vez disso, ele utilizava essas raízes para realizar várias iterações e preencher a tabela. A ideia de usar raízes foi brilhante, pois facilitou o cálculo de logaritmos para números que não eram múltiplos ou potências exatas de 10. Com esse método, Briggs pôde calcular os logaritmos de diversos números, construindo, assim, uma tabela prática e funcional.

Este trecho do estudo aborda uma questão central que motivou a realização deste trabalho. Desde o ensino médio, uma dúvida persistia sem uma explicação satisfatória: como o número 2 pode ser expresso como uma potência de base 10, ou seja, $10^{0{,}3010}\ =\ 2$? E mais importante, como se chega a esse valor? A dúvida vai além, levantando a questão de como é possível elevar a base 10 a uma potência fracionária, como $0{,}3010$, algo que, à primeira vista, não é de fácil compreensão.

Para elucidar essa questão, este estudo segue a metodologia desenvolvida por Henry Briggs. Primeiramente, será construída uma tabela que apresenta a sequência das raízes quadradas de 10, em que cada termo é obtido como a raiz quadrada do termo anterior. A partir dessa construção, será demonstrado, de maneira clara e didática, o processo utilizado por Briggs para calcular logaritmos com precisão para números inteiros. O foco será dado ao cálculo do logaritmo decimal de 2, utilizando essa mesma abordagem sistemática para ilustrar o método empregado.

Tabela 06 - Aproximações para logaritmos comuns (base 10)

10^x	VALOR APROXIMADO	$\log 10^X$
10^1	10,0000000000	1.0000000000
$10^{\frac{1}{2}}$	3.1622776602	0.5000000000
$10^{\frac{1}{4}}$	1.7782794100	0,2500000000
$10^{\frac{1}{8}}$	1.3335214322	0,1250000000
$10^{\frac{1}{16}}$	1.1547819847	0.0625000000
$10^{\frac{1}{32}}$	1.0746078283	0.0312500000
$10^{\frac{1}{64}}$	1.0366329284	0.0156250000
$10^{\frac{1}{128}}$	1.0186101701	0.0078125000
$10^{\frac{1}{256}}$	1.0090350448	0.0039062500
$10^{\frac{1}{512}}$	1.0045076894	0.0019531250
$10^{\frac{1}{1024}}$	1.0022511477	0.0009765625
$10^{\frac{1}{2048}}$	1.0011249980	0.0004882813
$10^{\frac{1}{4096}}$	1.0005623120	0.0002441406

Fonte: O autor (2024).

Para calcular o logaritmo de 2 na base 10, Henry Briggs utilizou um método engenhoso que envolvia multiplicar sucessivamente as raízes de 10 e somar os respectivos expoentes (logaritmos). Esse processo permitiu que ele aproximasse o valor desejado, utilizando a tabela de logaritmos com grande precisão.

Vamos demonstrar as etapas de como calcular o logaritmo de 2 na base 10, utilizando o Método de Briggs e a tabela criada nesta sessão:

1. Começando com as raízes de 10: Sabemos que a raiz quadrada de 10 é aproximadamente $3{,}1622776602$. No entanto, para calcular o logaritmo de 2, precisamos trabalhar com valores que, quando multiplicados, nos aproximem de 2. Um bom ponto de partida é a raiz quarta de 10, que é $1{,}7782794100$.

2. Multiplicação de raízes sucessivas: Para obter uma aproximação mais próxima de 2, precisamos multiplicar as raízes de 10 de maneira estratégica. Por exemplo, se multiplicarmos a raiz quarta de 10 $(1{,}7782794100)$ pela raiz trigésima-segunda de 10 $(1{,}0746078283)$, obtemos: $(1{,}7782794100)(1{,}0746078283) \approx$

$1{,}9109529800$. Esse resultado ainda não é exatamente 2, mas estamos nos aproximando.

3. Encontrando o fator corretor: Agora, fazemos o cálculo de quanto falta para alcançar 2. Dividimos 2 pelo valor obtido:

$$\frac{2}{1{,}9109529800} \approx 1{,}0465982300$$

Precisamos então multiplicar nosso resultado anterior por um valor que seja menor ou igual a $1{,}0465982300$. Consultando a tabela, encontramos que a raiz sexagésima-quarta de 10 é $1{,}0366329284$, o que se encaixa bem. Fazendo a multiplicação: $(1{,}7782794100)(1{,}0746078283)(1{,}0366329284) \approx 1{,}9809567800$. Agora estamos ainda mais próximos de 2.

4. Refinando a aproximação: Continuando com o processo, calculamos o quanto ainda falta para 2:

$$\frac{2}{1{,}9809567800} \approx 1{,}0096131400$$

Na tabela, encontramos que a raiz ducentésima-quadragésima-sexta de 10 é 1,0090350448. Multiplicamos novamente:

$$(1{,}7782794100)(1{,}0746078283)(1{,}0366329284)(1{,}0090350448) \approx 1{,}9988548116$$

5. Refinando a aproximação: Continuando com o processo, precisamos calcular quanto ainda falta para chegar ao valor 2. Dividimos 2 pelo valor obtido:

$$\frac{2}{1{,}9988548116} \approx 1{,}0005729222$$

Consultando a tabela, encontramos que a raiz $\frac{1}{4096}$ de 10 é aproximadamente $1{,}0005623120$. Agora, multiplicando os valores obtemos: $(1{,}7782794100)(1{,}0746078283)(1{,}0366329284)(1.0090350448)(1{,}0005623120) \approx 1{,}9999787916$

Agora temos uma aproximação excelente de 2.

6. Somando os logaritmos: Para encontrar o logaritmo de 2, somamos os expoentes das raízes que utilizamos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} = 0{,}3010253906$$

Esse valor é uma ótima aproximação para o logaritmo de 2 na base 10, que é aproximadamente $0{,}3010299956$.

Briggs aplicou seu método de multiplicação de raízes sucessivas para calcular logaritmos de maneira eficiente e precisa. De acordo com Boyer (1996), as tabelas criadas por Briggs continham até quatorze casas decimais, proporcionando uma precisão ainda maior. No exemplo do logaritmo de 2 que utilizamos, trabalhamos com dez casas decimais, e mesmo assim alcançamos uma excelente aproximação. Essa construção foi possível graças à exploração das potências e raízes de 10, com a soma dos expoentes ao longo do processo, o que permitiu a criação de tabelas de logaritmos com uma precisão impressionante.

Esse método brilhante demonstra como, por meio de operações simples, é possível aproximar os logaritmos que utilizamos até hoje. Mesmo que o processo seja trabalhoso, como no caso de Napier, que dedicou 20 anos à construção de suas tabelas, ele nos mostra que, sem o auxílio da tecnologia moderna, como é possível construir essas tabelas manualmente, assim como Napier e Briggs fizeram.

4 O ENSINO DE LOGARITMOS E SUAS DIRETRIZES CURRICULARES

Neste capítulo, abordaremos o ensino atual dos logaritmos, explorando as diretrizes educacionais e os recursos didáticos utilizados. Inicialmente, analisaremos as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Currículo de Pernambuco (2021), destacando como os logaritmos são integrados no currículo do Ensino Médio. Em seguida, examinaremos as propriedades dos logaritmos com base no livro *Matemática: Ciência e Aplicações* de Iezzi *et al*. (2004). Por fim, dedicaremos uma seção às aplicações práticas dos logaritmos, como em abalos sísmicos e Matemática Financeira, alinhando-nos às abordagens previstas pela BNCC. Este capítulo visa conectar aspectos teóricos com contextos práticos e pedagógicos, proporcionando uma visão abrangente do ensino de logaritmos na atualidade.

4.1 DIRETRIZES OFICIAIS PARA O ENSINO DE LOGARITMOS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), define as diretrizes gerais para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Esse documento normativo busca garantir que todos os estudantes do país tenham acesso a um currículo básico e comum de qualidade. No que diz respeito às funções logarítmicas, a BNCC especifica duas competências principais que devem ser desenvolvidas ao longo do Ensino Médio:

1. (EM13MAT305): Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
2. (EM13MAT403): Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Figura 12 - Um recorte das habilidades previstas na (BNCC)

HABILIDADES
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Fonte: Brasil (2021).

O Currículo de Pernambuco (2021), que foi elaborado com base nas diretrizes da BNCC, traz uma organização mais detalhada e específica para o ensino de logaritmos. Diferentemente da BNCC, que aborda as funções logarítmicas de forma geral para os três anos do Ensino Médio, o Currículo de Pernambuco define que o estudo dessas funções deve ser realizado especificamente no 2º ano do Ensino Médio.

O Currículo de Pernambuco inclui as seguintes habilidades:

- (EM13MAT305PE21): Resolver e elaborar situações-problema envolvendo funções logarítmicas, interpretando a variação das grandezas em contextos diferentes como, por exemplo, o estudo da radioatividade, Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.
- (EM13MAT403PE35): Analisar e estabelecer relações, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas, expressas em tabelas e em planos cartesianos para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento ou decrescimento, raízes entre outras) de cada função, destacando-as como funções inversas.

Essas habilidades no Currículo de Pernambuco são derivadas das competências da BNCC, porém com uma abordagem mais focada e adaptada ao contexto local. Essa especificidade ajuda a garantir que os alunos recebam uma formação mais estruturada e adequada ao nível em que estão estudando, promovendo um alinhamento mais preciso com as necessidades educacionais da região.

Figura 13 - Recorte das Habilidades do Currículo de Pernambuco

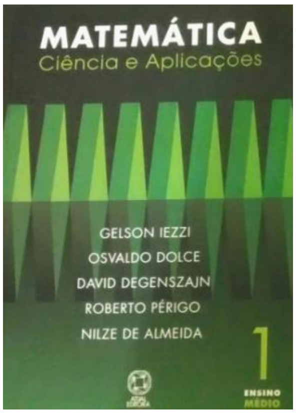
MATEMÁTICA		
2º ANO		
3º BIMESTRE		
HABILIDADES DA ÁREA BNCC	HABILIDADES ESPECÍFICAS DO COMPONENTE	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	(EM13MAT305PE21) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções logarítmicas, interpretando a variação das grandezas em contextos diferentes como, por exemplo, o estudo da radioatividade, Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções Logarítmicas: variação de grandezas
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	(EM13MAT403PE35) Analisar e estabelecer relações, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas expressas em tabelas e em planos cartesianos para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento ou decrescimento, raízes, entre outras) de cada função, destacando-as como funções inversas.	Funções Exponenciais e Logarítmicas: relações, representações e características.

Fonte: Currículo de Pernambuco, 2021.

4.2 PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS NO LIVRO: MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES (2004)

Nesta seção, apresentaremos a definição de logaritmos e suas principais propriedades, com o objetivo de fornecer ao leitor o suporte necessário para a compreensão deste trabalho e facilitar o entendimento da próxima seção, que abordará as aplicações práticas dos logaritmos. A referência utilizada será o livro didático *Matemática: Ciência e Aplicações* de Iezzi *et al*. (2004), que proporcionou o primeiro contato com a história dos logaritmos e foi fundamental para despertar o interesse pelo tema, servindo como base para a realização desta pesquisa. Esse livro, utilizado no primeiro ano do Ensino Médio, faz parte de uma coleção de três volumes dedicados ao ensino de matemática e oferece uma base sólida para o entendimento de conceitos importantes, como os logaritmos.

Figura 14 - Livro Matemática Ciência e Aplicações



Fonte: Capa extraida do livro "Matemática Ciência e aplicações" Iezzi *et al*. (2004)

- **Definição do Logaritmo**

Sendo a e b números reais e positivos, com a$\neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Na expressão $a^x = b$, temos:

a é a base do logaritmo

b é o logaritmando;

x é o logaritmo

- **Consequências da Definição**

Decorrem da definição do logaritmo as seguintes propriedades:

I. O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$\boxed{\log_a 1 = 0}$, pois $a^0 = 1$

II. O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$\boxed{\log_a a = 1}$, pois $a^1 = a$

III. A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$,

Pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar à base a para que a potência fique igual a b.

Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$\boxed{\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c}$, pois $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b \Rightarrow c = b$

- **Propriedades Operatórias dos Logaritmos**

Vamos abordar três propriedades operatórias dos logaritmos:

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos dos números.

Em símbolos: Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

✓ **Logaritmo do produto**

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

✓ **Logaritmo do quociente**

$$\log_a \frac{b}{a} = \log_a b - \log_a c$$

✓ **Logaritmo da potência**

$$\log_a b^r = \mathrm{r}.\log_a b$$

- **Mudança de base**

Suponhamos que a, b e c sejam números reais positivos e diferentes de 1.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

- **Sistema de logaritmos**

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a $(0 < a \neq 1)$ é chamado de sistema de logaritmos de base a. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o *sistema de logaritmos* de base 2.

Existem dois sistemas de logaritmos que são muito utilizados em Matemática, que são o de base “10” e o de base “e”. Indicaremos por $\log_{10} x$ ou simplesmente por $\log x$, o logaritmo decimal, e representamos o logaritmo natural de x por $\log_e x$, ou $\ln x$.

4.3 AS APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

4.3.1 Escala richter

Nesta seção, continuará a exploração da aplicação dos logaritmos, com foco na Escala Richter, que é utilizada para medir a magnitude de terremotos. Este tema é particularmente relevante, pois está alinhado à Habilidade EM13MAT305, prevista pela BNCC, que enfatiza a resolução e elaboração de problemas que envolvem a variação de grandezas em contextos reais, como abalos sísmicos, pH, radioatividade e matemática financeira. A compreensão do funcionamento da Escala Richter é essencial, uma vez que a magnitude dos terremotos é expressa em termos logarítmicos, refletindo a variação exponencial da energia liberada durante esses eventos. Com base nas discussões propostas por Youssef (2009), serão analisadas as aplicações dos logaritmos nesse contexto, ressaltando sua importância não apenas na compreensão de fenômenos naturais, mas também na sua aplicação pedagógica, que pode enriquecer o ensino em sala de aula. Essa abordagem permite que os alunos vejam a relevância dos logaritmos em situações do cotidiano, facilitando a conexão entre teoria e prática. A Escala Richter, desenvolvida em 1935 pelo sismólogo Charles Francis Richter (1900-1985), foi criada para medir a intensidade de terremotos, inicialmente aplicada no sul da Califórnia. Por ser uma escala logarítmica, cada aumento de uma unidade na magnitude, corresponde a uma liberação de energia dez vezes maior que a anterior. A escala classifica os terremotos de acordo com a magnitude das ondas sísmicas. Microterremotos, com magnitude inferior a 2, geralmente passam despercebidos, enquanto tremores entre 4 e 5 já são suficientemente intensos para serem detectados em diversas partes do mundo. Isso mostra como a escala logarítmica facilita a comparação de terremotos com intensidades variadas.

A fórmula mais comum para calcular a magnitude (M) de um terremoto com base na energia mecânica liberada (E), medida em joules, é:

$$M = 0{,}67.\log(E) - 3{,}25$$

Onde:

(M) é a magnitude do terremoto;

(E) é a energia liberada no epicentro, em joules.

Vamos analisar o caso de um terremoto de magnitude 5. Utilizando a equação:

$$0{,}67.\log(E) = 5 + 3{,}25$$

$$\log(E) = \frac{8{,}25}{0{,}67} \approx 12{,}31$$

Convertendo o valor $\log(E)$ para E:

$$E = 10^{12{,}31} \approx 2{,}0.10^{12}\ joules$$

Isso significa que um terremoto de magnitude 5 libera cerca de $2{,}0.\ 10^{12}\ joules$, equivalente à energia de uma bomba atômica como a de Hiroshima, conforme mostra a tabela a seguir (Youssef, 2009, p. 99).

Tabela 07 - Magnitude e Energia Liberada em Alguns Grandes Terremotos do Século XX

Magnitude	Energia liberada em joules	Ocorrência
2,0	$6{,}3.\,10^{7}$	Praticamente imperceptível
5,0	$2{,}0.\,10^{12}$	Energia liberada pela bomba atômica de Hiroshima, Japão, 1945
6,7	$7{,}1.\,10^{14}$	Estados Unidos (Los angeles), 1994
6,9	$1{,}4.\,10^{15}$	Armênia (Spitak, na antiga União Soviética), 1998
7,0	$2{,}0.\,10^{15}$	Magnitude de referência para grandes terremotos
7,2	$4{,}0.\,10^{15}$	Japão (kobe), 1995
7,4	$7{,}9.\,10^{15}$	Turquia (Düzce), 1999
7,8	$1{,}6.\,10^{16}$	China (Tangshan), 1976
7,9	$4{,}4.\,10^{16}$	Japão (Tóquio e Yokohama), 1923
8,1	$8{,}7.\,10^{16}$	México (Cidade do México), 1985
8,3	$1{,}8.\,10^{17}$	Estados Unidos (São Francisco), 1906
8,6	$5{,}0.\,10^{17}$	Chile (entre Concepción e Aysen), 1960

Fonte: Youssef (2009, p. 99).

Agora, vamos analisar a equação da Escala Richter para entender o que acontece com a magnitude de um terremoto 10 vezes mais intenso que outro. Suponha que temos um terremoto de magnitude M_1, que libera energia E_1 , e outro com magnitude M_2, que libera energia 10 vezes maior, $10E_1$.

$$M_1 = 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25$$

$$M_2 = 0{,}67 \log(10.\,E_1) - 3{,}25$$

$$M_2 = 0{,}67\,(\log 10 + \log E_1) - 3{,}25$$

$$M_2 = 0{,}67\,(1 + \log E_1) - 3{,}25$$

$$M_2 = 0{,}67 + \;0{,}67 \log E_1 - 3{,}25$$

$$M_2 = 0{,}67 + M_1$$

Vemos que liberar 10 vezes mais energia resulta em um aumento de apenas $0{,}67$ unidades na escala Richter. Por outro lado, o que acontece em termos de energia liberada ao aumentarmos 1 unidade na magnitude? Veja:

Portanto, o aumento de uma unidade na magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde a um terremoto cerca de 32 vezes mais intenso em termos de energia liberada.

$$M_1 = 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 \quad (1)$$

$$M_1 + 1 = 0{,}67 \log E_2 - 3{,}25 \ (2)$$

Subtraindo (1) de (2) temos:

$$1 = 0{,}67 \log E_2 - 0{,}67 \log E_1$$

$$1 = 0{,}67 \log \frac{E_2}{E_1}$$

$$\frac{1}{0{,}67} = \log \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1{,}5$$

$$\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1} = 10^{1{,}5} \Rightarrow \mathrm{E}_2 \approx 32\mathrm{E}_1$$

Portanto, o aumento de uma unidade na magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde a um terremoto cerca de 32 vezes mais intenso em termos de energia liberada. Em termos de ordem de grandeza, um aumento de 1 unidade na magnitude corresponde a um aumento de 10^1 vezes na intensidade. Da mesma forma, um acréscimo de 2 unidades equivale a um terremoto 1000 vezes mais intenso, e 3 unidades correspondem a uma intensidade aproximadamente 32.000 vezes maior.

A Escala Richter nos dá uma descrição quantitativa dos terremotos e, teoricamente, não tem limites. No entanto, como cresce exponencialmente, o próprio Richter afirmou que terremotos acima de magnitude $9{,}0$ seriam impossíveis, pois liberariam energia suficiente para destruir o planeta. Ele explicou: "Esta é uma limitação da Terra, não da escala".

4.3.2 Juros compostos

Nesta seção, vamos abordar o conceito de juros compostos e sua relação com os logaritmos, conforme explorado no livro *Matemática: Ciência e Aplicações* do Iezzi *et al*. (2004). A Habilidade (EM13MAT305) da BNCC contempla a matemática financeira, e é por isso que estamos utilizando essa abordagem para aplicar os logaritmos no cálculo do tempo necessário para um capital crescer em uma taxa específica.

O regime de juros compostos é amplamente utilizado em transações comerciais e financeiras. O princípio básico dos juros compostos é que, ao final de cada período, os juros gerados sobre o capital inicial são incorporados ao montante, formando uma nova base para o cálculo de juros no próximo período. Isso significa que os juros não incidem apenas sobre o valor original, mas sobre o montante acumulado, o que gera um crescimento exponencial do capital.

A fórmula geral para calcular o montante $M_n$após (n) períodos, é dada por:

$$M_n = C(1+i)^n$$

Onde:

(M_n) é o montante final após (n) períodos.

(C) é o capital inicial.

(i) é a taxa de juros por período.

(n) é o número de períodos.

Agora, vamos ao Exemplo 2 do Iezzi *et al.* (2004, p.319) para entender como usar logaritmos no cálculo do tempo necessário para que um capital atinja determinado montante. Exemplo 2: Suponha que Joana investiu $\text{R\$ } 400{,}00$ a uma taxa de 2% ao mês e deseja saber em quanto tempo o montante será de $\text{R\$ } 600{,}00$.

Utilizamos a fórmula dos juros compostos para resolver esse problema.

Dados:

$$M_n = 600, \qquad C = 400, \qquad i = 0{,}02$$

Substituímos esses valores na fórmula:

$$600 = 400(1+0{,}02)^n$$

Dividimos ambos os lados por 400:

$$1{,}5 = (1{,}02)^n$$

Agora, para determinar o valor de (n), utilizamos logaritmos:

$$\log 1{,}5 = \log(1{,}02)^n$$

Aplicando a propriedade dos logaritmos, temos:

$$\log 1{,}5 = \mathrm{n}.\log 1{,}02$$

Isolando (n):

$$n = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}02}$$

Substituindo os valores dos logaritmos:

$$n = \frac{0{,}1761}{0{,}0086} \approx 20{,}47\ meses$$

Isso significa que, após aproximadamente 20 meses, Joana ainda não terá o valor desejado, mas estará próxima. Veja os detalhes:

Após 20 meses, o montante será: $M_{20} = 400.\ 1{,}02^{20} = 594{,}37$, ou seja, o valor será um pouco abaixo de $\text{R\$}\ 600{,}00$. Já no $21º$ mês, o montante será: $M_{21} = 400.1{,}02^{21} = 606{,}26$. Nesse momento, Joana terá o valor desejado.

Este exemplo ilustra como o uso dos logaritmos facilita a determinação do tempo necessário para que um capital atinja um valor específico, em um regime de juros compostos.

5 ABORDAGENS TEÓRICAS EM MATEMÁTICA: REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, exploramos abordagens teóricas fundamentais para a compreensão e ensino da matemática, utilizando as contribuições de Raymond Duval e Luiz Roberto Dante. O objetivo é fornecer uma base teórica robusta para analisar os dados dos questionários aplicados nesta pesquisa, integrando as ideias de ambos os autores para enriquecer nossa compreensão sobre a aprendizagem matemática e a resolução de problemas.

5.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS): CONCEITOS E APLICAÇÕES DE DUVAL (2009)

Para analisar os dados dos questionários aplicados aos estudantes, utilizaremos como base teórica o livro *Semiósis e Pensamento Humano* do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Ele desenvolveu a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), que sugere que a compreensão efetiva da matemática está diretamente relacionada à capacidade de dominar mais de um tipo de registro de representação para o mesmo objeto matemático. Ou seja, para entender um conceito matemático de forma completa, é necessário ser capaz de representá-lo de diferentes maneiras.

Duval (2009) argumenta que a aprendizagem da matemática não se limita a operar com números ou fórmulas, mas envolve uma variedade de sistemas de representação, como figuras geométricas, gráficos cartesianos, diagramas e esquemas, além de notações simbólicas e algébricas. Ele afirma que “a aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos” (Duval, 2009, p. 13). Esses diferentes sistemas semióticos são essenciais para o pensamento matemático, pois permitem expressar relações e operações que vão além da linguagem natural.

A distinção entre um objeto matemático e sua representação é essencial na teoria de Duval (2009, p.14), que afirma que "não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguimos um objeto de sua representação". No caso dos logaritmos, quando o aluno compreende que o logaritmo indica a potência à qual uma base deve ser elevada para obter um certo número, ele consegue reconhecer esse conceito em diferentes formas, como equações algébricas, gráficos ou tabelas. Isso facilita a transição entre essas representações e ajuda a resolver problemas de forma mais eficaz.

Duval também enfatiza a importância de lidar com múltiplos registros de representação ao trabalhar com um mesmo objeto matemático. Ele destaca que, na resolução de problemas matemáticos, é comum a necessidade de converter representações de um registro para outro. Por exemplo, ao associar uma equação a sua representação gráfica, o aluno está fazendo uma conversão do registro algébrico para o gráfico. A capacidade de realizar essas conversões é fundamental para uma visão abrangente e profunda dos conceitos matemáticos.

Duval define as representações semióticas como produções que utilizam regras de sinais, como enunciados em linguagem natural, fórmulas algébricas, gráficos ou figuras geométricas. Essas representações, segundo Duval (2009, p. 15), são vistas, muitas vezes, apenas como "o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais", ou seja, ferramentas para tornar visíveis ou acessíveis as ideias que estão na mente de uma pessoa.

Contudo, para Duval, as representações semióticas são essenciais à compreensão matemática. Ele distingue dois conceitos fundamentais: *noésis* e *semiósis*.

- *SEMIÓSIS* refere-se ao ato de criar ou interpretar uma representação semiótica. Em matemática, isso pode envolver a escrita de uma fórmula, o desenho de um gráfico, ou a construção de uma tabela que represente uma ideia matemática. Por exemplo, no estudo de logaritmos, quando um estudante constrói uma tabela de logaritmos ou desenha o gráfico de uma função logarítmica, ele está realizando um ato de *semiósis*. Esse processo transforma a ideia abstrata do logaritmo, que pode ser compreendido como o inverso da exponenciação, em uma representação concreta que facilita a visualização e o entendimento. A criação da primeira tabela de logaritmos por John Napier, por exemplo, é um excelente exemplo de *semiósis* na prática, onde ele transformou cálculos complexos em uma tabela acessível.

- *NOÉSIS,* por outro lado, envolve o processo cognitivo de compreensão de um conceito matemático. Em relação aos logaritmos, a *noésis* ocorre quando o aluno entende o conceito de logaritmo como a operação inversa da exponenciação, ou seja, compreender que o logaritmo é o expoente ao qual a base

> deve ser elevada para obter um número. Por exemplo, quando o estudante compreende que $\log_{10} 100 = 2$, porque 10^2=100, ele está engajado em um ato de *noésis*. Esse processo de compreensão é fundamental para o domínio da teoria dos logaritmos, permitindo que o aluno aplique o conceito em diferentes situações e resolva problemas complexos.

Esses dois processos estão profundamente interligados. Duval (2009, p. 17, grifo do autor) afirma que "Não há *noésis* sem *semiósis*", o que significa que, para compreender profundamente um conceito matemático (noésis), é necessário ser capaz de representá-lo de alguma forma (semiósis). Por exemplo, para entender o conceito de função, o aluno precisa ser capaz de representá-la graficamente, algebricamente, ou de outras maneiras. A *semiósis* é, portanto, o meio através do qual a *noésis* ocorre.

Essa interdependência entre *noésis* e *semiósis* é fundamental no aprendizado de matemática. Os processos cognitivos não ocorrem no vácuo; eles dependem da manipulação de diferentes formas de representação. Para Duval (2009, p. 18, grifo do autor), "não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade [...] de sistemas semióticos[...]". Isso significa que entender matemática não é apenas compreender conceitos de maneira abstrata, mas também ser capaz de expressá-los e manipulá-los por meio de diferentes representações.

Porém, esse processo de transitar entre diferentes sistemas de representação não é algo simples para muitos alunos. Duval (2009, p. 18) observa que, apesar de ser comum na prática matemática, essa mudança de um sistema semiótico para outro não é evidente para a maioria dos estudantes. Por exemplo, alunos podem ter dificuldade em reconhecer que uma equação algébrica e seu gráfico cartesiano representam o mesmo conceito matemático. Essa falta de coordenação entre representações diferentes pode prejudicar a compreensão e o aprendizado dos estudantes.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) proposta por Raymond Duval oferece uma perspectiva essencial para entender como os alunos compreendem e utilizam a matemática. Duval (2009) destaca a importância de dominar múltiplos registros de representação para alcançar uma compreensão completa dos conceitos matemáticos. No estudo dos logaritmos, a habilidade de transitar entre diferentes representações, como fórmulas e expressões algébricas, é fundamental para a resolução de problemas e a aplicação eficaz do conceito.

Um aspecto fundamental da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) é a "congruência," que se refere à capacidade de estabelecer uma correspondência clara e consistente entre diferentes formas de expressar um mesmo conceito matemático. A congruência é essencial para que os alunos consigam realizar a transição, entre registros de uma expressão algébrica. De acordo com Duval (2009), essa correspondência exige coerência entre os registros, ou seja, uma sequência lógica que permite ao estudante compreender o conceito em diferentes formas de representação.

Um exemplo clássico de congruência em logaritmos é a transição da expressão $\log_{10} 100 = 2$ para sua forma exponencial correspondente, 10^2= 100. Essa mudança congruente entre as representações logarítmica e exponencial expressa a mesma ideia, permitindo ao aluno identificar o mesmo conceito em contextos distintos. Quando o estudante realiza essa transição sem dificuldades, demonstra que está operando de maneira *congruente* ao trabalhar com o conceito dentro do mesmo registro algébrico.

A *"não-congruência"* se manifesta quando a conversão entre diferentes registros não preserva uma relação natural para o estudante. Duval (2009) destaca que essa falta de congruência pode acarretar dificuldades consideráveis. Por exemplo, ao lidar com um problema prático em linguagem natural que envolve logaritmos, um aluno pode ter dificuldades para expressar a situação de maneira adequada, pois a transição da linguagem cotidiana para a forma algébrica pode não ser intuitiva.

A congruência nas representações impacta de maneira significativa o sucesso ou fracasso na resolução de problemas matemáticos. De acordo com Duval (2009, p.19), quando a conversão entre diferentes formas de representação é congruente, ou seja, mantém uma correspondência clara e consistente entre as diversas maneiras de expressar um conceito, tende a haver uma taxa de sucesso maior. Por outro lado, quando a conversão não é congruente e a relação entre as representações não é mantida de forma eficaz, a taxa de sucesso pode ser consideravelmente reduzida, refletindo a dificuldade em transitar entre diferentes sistemas semióticos.

Em resumo, a TRRS de Duval oferece uma estrutura valiosa para entender como a *congruência* e a *não-congruência* entre diferentes representações matemáticas afetam a aprendizagem. A capacidade de realizar *semiósis* e *noésis* efetivamente, bem como reconhecer e utilizar a congruência entre representações, são aspectos essenciais para dominar conceitos matemáticos.

Aplicar esses conceitos ao estudo dos logaritmos destaca a importância de uma abordagem ampla para a compreensão matemática e a aplicação prática do conhecimento. A congruência entre registros assegura que os alunos possam transitar facilmente entre diversas formas de representação, promovendo uma compreensão mais profunda e uma resolução mais eficaz de problemas matemáticos.

5.2 A DIDÁTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DANTE (2000): CONCEITOS E APLICAÇÕES

Para enriquecer a análise dos dados dos questionários aplicados aos participantes desta pesquisa, também utilizaremos o trabalho de Luiz Roberto Dante, um renomado pesquisador em Educação Matemática e autor do livro *Didática da Resolução de Problemas*. Este livro é um recurso valioso para professores do ensino básico e aborda a resolução de problemas como uma metodologia eficaz de ensino. Dante classifica os problemas matemáticos em seis categorias principais: Exercícios de Reconhecimento, Exercícios de Algoritmos, Problemas-padrão, Problemas-processo ou Heurísticos, Problemas de Aplicação e Problemas de Quebra-Cabeça.

Muitos alunos dominam os algoritmos básicos, como adição, subtração, multiplicação e divisão, mas ainda encontram dificuldades na resolução de problemas, especialmente ao lidar com as diferentes etapas que envolvem esses algoritmos. Dante (2000, p. 8) destaca essa questão ao afirmar:

> É muito comum os alunos saberem efetuar todos os algoritmos (as “continhas” de adição, subtração, multiplicação e divisão) e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Há muitos fatores que agravam essa dificuldade.

Esse entendimento será determinante para analisar como os alunos aplicam seus conhecimentos matemáticos em diferentes contextos de problemas.

Para Dante (2000), um "problema" é qualquer situação que exige pensamento crítico e solução por parte do indivíduo. Dante destaca que um dos principais objetivos do ensino de Matemática é incentivar o aluno a pensar de forma produtiva. Para alcançar isso, é fundamental apresentar situações-problema que envolvam e desafiem o aluno, estimulando-o a encontrar soluções. Esse processo ajuda a desenvolver a capacidade de raciocínio lógico e de criar estratégias eficazes para a resolução de problemas. Como Dante (2000, p. 14) afirma: "Para resolver problemas, precisamos desenvolver determinadas estratégias que, em geral, se aplicam a um grande número de situações."

Agora vamos explorar os diferentes tipos de problemas descritos por Dante (2000). Ele classifica os problemas matemáticos em várias categorias, cada uma com características e objetivos específicos. A seguir, apresento um resumo dessas categorias:

1. Exercícios de Reconhecimento: São projetados para ajudar o aluno a reconhecer, identificar ou lembrar conceitos, definições ou propriedades específicas.
2. Exercícios de Algoritmos: Envolvem a aplicação passo a passo de algoritmos básicos, como adição, subtração, multiplicação e divisão, com o objetivo de praticar e reforçar habilidades matemáticas.
3. Problemas-Padrão: Exigem a aplicação direta de algoritmos conhecidos e não demandam estratégias complexas. Geralmente, o enunciado já contém a solução ou uma indicação clara dos passos necessários para resolvê-lo.
4. Problemas-Processo ou Heurísticos: Demandam uma abordagem mais criativa, pois não há uma solução diretamente fornecida. O aluno deve desenvolver um plano de ação e uma estratégia para resolver o problema, estimulando a curiosidade e a criatividade.
5. Problemas de Aplicação: Retratam situações reais e exigem que o aluno use conceitos matemáticos para resolver problemas do cotidiano, envolvendo coleta de dados e análise matemática para encontrar soluções.
6. Problemas de Quebra-Cabeça: Englobam a Matemática recreativa e desafiam os alunos com soluções que muitas vezes dependem de truques ou insights criativos, em vez de métodos tradicionais.

Essas categorias ajudam a entender como diferentes tipos de problemas podem ser usados para desenvolver habilidades matemáticas e estimular o pensamento crítico dos alunos.

6 METODOLOGIA

A metodologia desta pesquisa consistiu na aplicação de dois questionários distintos, com o objetivo de avaliar o nível de conhecimento em logaritmos dos estudantes dos períodos finais do curso de Licenciatura em Matemática na UFPE/CAA. A pesquisa foi conduzida de maneira a combinar abordagens qualitativas e quantitativas, permitindo uma análise abrangente das percepções e competências dos alunos sobre o tema.

O Questionário 01, intitulado "Diagnóstico", foi elaborado para investigar o conhecimento prévio dos alunos sobre logaritmos e funções exponenciais, bem como sua segurança ao ensinar esses tópicos. As respostas abertas foram analisadas qualitativamente para explorar as percepções dos participantes, enquanto a atribuição de notas permitiu uma categorização quantitativa das respostas, fornecendo uma visão equilibrada sobre a formação dos alunos ao longo do curso.

O Questionário 02, foi composto por questões práticas, focando na capacidade dos alunos de resolver problemas relacionados a logaritmos. A análise desse questionário foi exclusivamente quantitativa, avaliando o desempenho dos estudantes em cada questão para identificar possíveis lacunas no entendimento e na aplicação dos conceitos.

Ambos os questionários foram aplicados presencialmente na UFPE/CAA, durante o mês de novembro de 2023, no período noturno e em dias alternados, contando com a participação de 15 estudantes dos períodos finais do curso. A aplicação presencial possibilitou a interação direta entre o pesquisador e os participantes, permitindo o esclarecimento de dúvidas e assegurando que os questionários fossem completados de maneira eficiente. O tempo médio de resposta foi de 1 hora e 30 minutos, com a aplicação organizada para não interferir nos horários de saída dos alunos.

Os participantes foram informados previamente sobre a natureza da pesquisa, que fazia parte do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do pesquisador. Contudo, o tema específico, relacionado aos logaritmos, foi revelado apenas após a aceitação da participação para evitar vieses nas respostas. Todos os participantes foram informados de que seus nomes seriam mantidos em sigilo, sendo identificados apenas por códigos (P1 a P15) para garantir a confidencialidade dos dados coletados.

6.1 SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi conduzida na Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste (UFPE/CAA) em Caruaru, devido ao vínculo do pesquisador com a instituição e ao desejo de contribuir para a mesma, demonstrando reconhecimento e estima. O estudo focou nos alunos dos períodos finais do curso de Licenciatura em Matemática, abrangendo os estudantes do 6º ao 9º período.

Os 15 participantes da pesquisa foram selecionados de forma aleatória e em dias alternados, garantindo uma amostra diversificada e representativa. Este método permitiu incluir alunos de diferentes períodos do curso, refletindo uma variedade de experiências e níveis de maturidade acadêmica. Além disso, o critério de alternância na seleção assegurou que a amostra não fosse enviesada, proporcionando maior imparcialidade aos resultados.

A aplicação dos questionários ocorreu em novembro de 2023, durante o período noturno, no horário das 19:30 às 20:30. Cada participante levou, em média, menos de 1 hora e 30 minutos para responder aos questionários. Embora não houvesse uma limitação de tempo específico, a aplicação foi organizada de maneira a respeitar o horário de saída dos alunos, evitando que as respostas se estendessem além das 22:00.

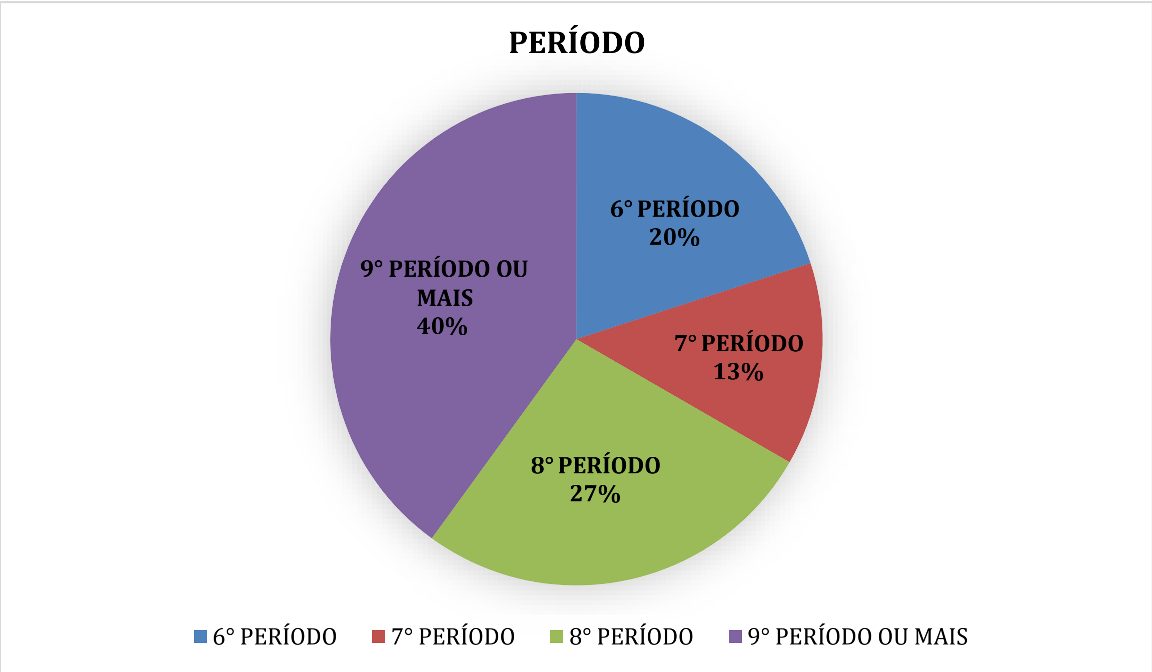
Os alunos foram inicialmente informados de que a pesquisa fazia parte do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do pesquisador. No entanto, o tema específico foi revelado apenas após a aceitação da participação, para evitar qualquer influência nas respostas. A importância da pesquisa foi destacada, e os participantes foram incentivados a fazer observações adicionais nas respostas, considerando que esses comentários poderiam enriquecer a análise dos dados.

Para garantir o anonimato dos participantes, foi assegurado que seus nomes seriam mantidos em sigilo. No decorrer da análise, os alunos foram identificados apenas como P1, P2, até P15. A aplicação presencial dos questionários permitiu interação direta, esclarecimento de dúvidas e criou um ambiente favorável para a coleta de dados precisa e completa.

Por fim, para ilustrar a distribuição dos participantes entre os diferentes períodos do curso, foi elaborado um gráfico que detalha a quantidade de alunos em cada período. Foi criada uma categoria específica para os alunos que estavam no 9º período ou que, por diversos motivos, ainda não haviam concluído o curso e estavam além desse período. Essa categoria, denominada "9º Período ou mais", foi criada para representar com maior precisão a realidade dos participantes. A distribuição dos estudantes foi a seguinte:

- 6º período: 3 participantes
- 7º período: 2 participantes
- 8º período: 4 participantes
- 9º período ou mais: 6 participantes

Gráfico 01 - Períodos dos participantes da pesquisa



Fonte: O autor (2024).

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, começaremos com uma análise qualiquantitativa dos resultados do Questionário 01, que examinará a falta de exposição prévia em logaritmos e exponenciais antes da faculdade, a compreensão conceitual dos participantes e a insegurança deles ao ensinar o tema. Em seguida, com uma análise quantitativa do Questionário 02, destacando as dificuldades encontradas em problemas-processo ou heurísticos, exercícios de algoritmo e problemas de aplicação relacionados a logaritmos. Utilizaremos tabelas e comentários detalhados das respostas dos participantes para discutir as implicações desses resultados para o ensino de logaritmos. A análise será enriquecida pela aplicação da Teoria dos Registros de Representação semiótica (TRRS) de Duval (2009) e das categorias de problemas matemáticos propostas por Dante (2000), proporcionando uma compreensão aprofundada das dificuldades enfrentadas pelos participantes**.**

7.1 ETAPAS DA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, abordaremos a etapa de elaboração de problemas que foi fundamental para a coleta e análise dos dados da pesquisa. A etapa da elaboração de problemas visa entender profundamente o conhecimento e a percepção dos alunos sobre logaritmos. Para isso, foram elaborados dois questionários distintos, cada um com um propósito específico, e foram aplicados a uma amostra de estudantes da Licenciatura em Matemática da UFPE/CAA.

Na subseção 7.2 **"**Do Questionário 01", detalharemos o Questionário Diagnóstico, que foi projetado para avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre logaritmos e suas percepções sobre o tema. Este questionário incluiu perguntas que exploram a experiência anterior dos alunos com logaritmos e funções exponenciais, bem como a sua capacidade de ensinar o assunto. Analisaremos cada questão em termos de seu objetivo específico e o que se pretendeu investigar com suas respostas.

A seguir, 7.3 **"**Do Questionário 02" será abordado, detalhando o segundo questionário aplicado. Este questionário focou em questões práticas de logaritmos, com o objetivo de avaliar a capacidade dos alunos de resolver problemas relacionados ao tema. Serão discutidos os objetivos de cada questão e a importância dessas questões na compreensão do nível de proficiência dos alunos.

7.2 DO QUESTIONÁRIO 01 “DIAGNÓSTICO”

Objetivo do Questionário Diagnóstico: O propósito do Questionário Diagnóstico é avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre logaritmos e sua percepção sobre o assunto. As questões foram elaboradas para explorar diferentes aspectos do conhecimento dos participantes, incluindo experiências passadas, o nível de aprendizado percebido, e a capacidade de ensinar logaritmos, considerando que eles se prepararão para ser futuros professores. A seguir, são apresentados os objetivos de cada questão.

7.2.1 Questionário diagnóstico sobre logaritmos

1. "Se você teve contato com funções exponenciais no ensino médio ou em algum outro momento anterior à faculdade, de 0 a 10, o quanto você considera que realmente aprendeu sobre o assunto? Por quê?"

- Objetivo da Questão: Avaliar a percepção do aluno sobre seu próprio aprendizado em funções exponenciais antes da faculdade. Dado que logaritmos são a operação inversa das funções exponenciais, uma compreensão inadequada das funções exponenciais pode dificultar o aprendizado de logaritmos.

2. "Você já teve alguma experiência anterior com logaritmos antes de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, onde?"

- Objetivo da Questão: Identificar se os alunos tiveram algum contato com logaritmos antes do curso de licenciatura e, em caso afirmativo, descrever essa experiência. Esta questão complementa a primeira, fornecendo um panorama mais amplo da experiência dos alunos com logaritmos.

3. "Em quais disciplinas do curso de licenciatura em matemática você viu logaritmos?"

- Objetivo da Questão: Identificar em quais disciplinas do curso de licenciatura os alunos foram expostos ao estudo de logaritmos. Esse levantamento permitirá compreender como o currículo aborda o tema dos logaritmos e como ele é distribuído ao longo do curso de licenciatura na UFPE/CAA. Isso ajudará a avaliar se os alunos tiveram uma exposição adequada e diversificada ao conceito ou se há necessidade de reforço em áreas específicas.

4. "Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam?"

- Objetivo da Questão: Avaliar o entendimento dos alunos sobre a relação entre funções logarítmicas e exponenciais. A resposta ajudará a identificar a profundidade do entendimento dos alunos e a clareza de suas concepções sobre esses conceitos matemáticos.

5. "De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos? Por quê?"

- Objetivo da Questão: Avaliar a autopercepção dos alunos sobre sua capacidade de ensinar logaritmos. A análise desta questão permitirá entender como os alunos percebem sua própria preparação para ensinar logaritmos.

7.3 DO QUESTIONÁRIO 02 (LOGARITMOS)

O Questionário 02 foi desenvolvido para avaliar a capacidade dos alunos em resolver problemas práticos relacionados a logaritmos. Seu objetivo é medir a aplicação do conhecimento sobre logaritmos em contextos problemáticos e a habilidade de manipular e converter entre diferentes registros semióticos. A seguir, serão apresentados os tipos de problemas e os objetivos de cada uma das 5 questões, com base nos conceitos discutidos por Dante (2000) sobre categorias de problemas.

7.3.1 Questionário de logaritmos

1. Com suas próprias palavras, descreva e explique o conceito de logaritmos. Se possível, forneça exemplos de situações práticas em que o conceito de logaritmos é aplicado.
   - Tipo de Problema: Problema-processo ou heurístico. Esta questão exige que o aluno desenvolva uma explicação e exemplos práticos, o que envolve a criação de uma estratégia para articular a definição e a aplicação de logaritmos.
   - Objetivo: Avaliar a compreensão conceitual do aluno e sua capacidade de aplicar o conhecimento a situações reais.
2. Resolva $4^x = 1/64$.

- Tipo de Problema: Exercício de algoritmos. A questão requer o uso de um método específico para resolver a equação exponencial, envolvendo procedimentos conhecidos e passo a passo.
- Objetivo: Testar a capacidade do aluno de aplicar algoritmos para resolver uma equação exponencial.

3. Se log(x) = 2, qual é o valor de x?
   - Tipo de Problema: Exercício de algoritmos. A questão requer a aplicação direta da definição de logaritmo para encontrar o valor de x, utilizando um método algorítmico específico.
   - Objetivo: Avaliar a capacidade de aplicar algoritmos simples para resolver problemas de logaritmos.
4. Se o logaritmo de 16 em uma base específica é igual a 2, qual será o logaritmo de 32 nessa mesma base?"
   - Tipo de Problema: Problema-processo ou heurístico. A questão exige que o aluno desenvolva uma estratégia para resolver o problema utilizando a propriedade dos logaritmos e relacionar os valores.
   - Objetivo: Avaliar a habilidade do aluno em aplicar propriedades dos logaritmos para resolver problemas relacionados.
5. "Se a população de uma cidade aumenta 10% a cada ano, qual é a expressão que representa o número de anos 't' necessário para dobrar a população?"
   - Tipo de Problema: Problema de aplicação. A questão busca uma modelagem matemática de uma situação real, envolvendo a aplicação de conceitos matemáticos a um problema contextual.
   - Objetivo: Avaliar a capacidade do aluno de formular uma expressão matemática para modelar o crescimento populacional.

7.4 ANÁLISE QUALIQUANTITATIVA DO QUESTIONÁRIO 01 “DIAGNÓSTICO”

A metodologia utilizada para avaliar o questionário diagnóstico foi dividida em três categorias principais: Falta de Exposição Prévia aos Logaritmos e Funções Exponenciais Antes da Faculdade (questões 1 e 2), Compreensão Conceitual (questão 4) e Insegurança ao Ensinar (questão 5). Embora todos os participantes tenham indicado, na questão 3, que estudaram logaritmos em alguma disciplina da graduação, essa questão não foi incluída nas categorias de análise, mas serviu como uma confirmação de que o tema foi abordado ao longo do curso.

Cada uma dessas categorias será analisada através de tabelas, gráficos e respostas representativas, conforme descrito a seguir:

1. Falta de Exposição Prévia em Logaritmos e Exponenciais Antes da Faculdade:

Para a pergunta 1 (*Se você teve contato com funções exponenciais no ensino médio ou em algum outro momento anterior a faculdade, de 0 a 10, o quanto você considera que realmente aprendeu sobre o assunto? Por quê?*), será criada uma tabela dividindo as notas dos participantes em três intervalos: [0 a 3], [4 a 5], e [6 a 8]. Isso nos permitirá visualizar como os participantes avaliaram seu aprendizado.

Em seguida, uma segunda tabela será elaborada para a pergunta 2 (*Você já teve alguma experiência anterior com logaritmos antes de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, onde?*), que indicará a quantidade de participantes que tiveram ou não contato prévio com logaritmos antes da faculdade. Essas informações nos ajudarão a entender o impacto da falta de exposição prévia a esses conceitos. Além disso, destacaremos algumas respostas representativas para ilustrar essas conclusões.

2. Compreensão Conceitual:

Para a pergunta 4 *(Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam)*, faremos uma análise qualitativa das respostas, categorizando-as entre acertos e erros. Um quadro será criado para mostrar essa distribuição, e respostas representativas serão destacadas para exemplificar o nível de compreensão conceitual dos participantes.

3. Insegurança ao Ensinar:

A pergunta 5 *(De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos?)* será analisada através de uma tabela que categorizará as respostas em três intervalos: [0 a 4], [5 a 6], e [7 a 8]. Isso nos ajudará a entender o nível de segurança que os futuros professores têm em ensinar logaritmos. Respostas representativas serão usadas para destacar a percepção dos participantes sobre sua própria aptidão.

7.4.1 Falta de exposição prévia em logaritmos e exponênciaisantes da faculdade

Pergunta 1 (*Se você teve contato com funções exponenciais no ensino médio ou em algum outro momento anterior a faculdade, de 0 a 10, o quanto você considera que realmente aprendeu sobre o assunto? Por quê?)*

Nota (0 a 3): Reflete uma baixa exposição ou aprendizado limitado das funções exponenciais no ensino médio.

Nota (4 a 5): Representa uma exposição moderada ou aprendizado intermediário.

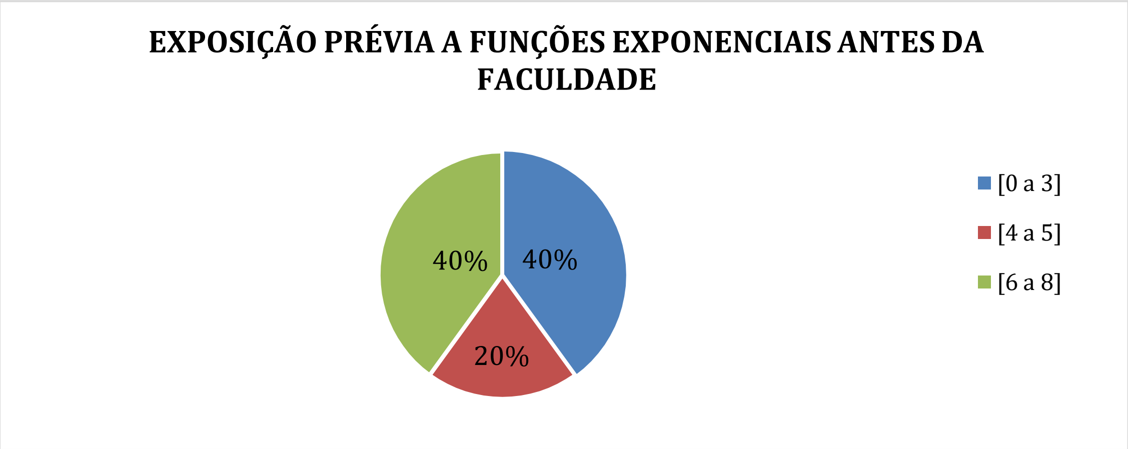
Nota (6 a 8): Indica uma exposição satisfatória e aprendizado mais sólido das funções exponenciais.

Tabela 08 - Exposição prévia a funções exponenciais antes da faculdade

Categoria de respostas	Nota de (0 a 3)	Nota de (4 a 5)	Nota de (6 a 8)
Quantidade de participantes	6	3	6
Porcentagem	40%	20%	40%

Fonte: O autor (2024).

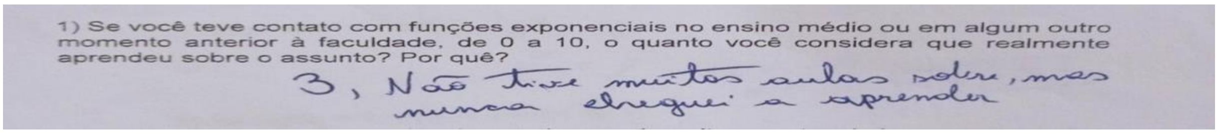
Gráfico 02 - Exposição prévia a funções exponenciais antes da faculdade



Fonte: O autor (2024).

Resposta de P3 *(“3, Não tive muitas aulas sobre, mas nunca cheguei a aprender”)*

Figura 15 - Resposta do P3 *(“3, não tive muitas aulas sobre, mas nunca cheguei a aprender”)*

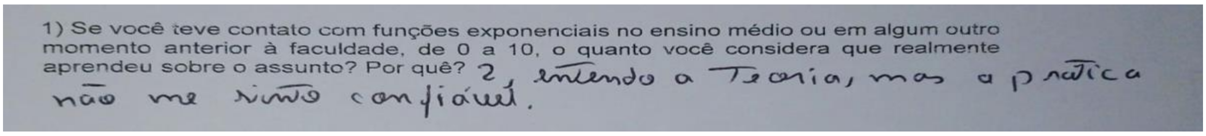


1) Se você teve contato com funções exponenciais no ensino médio ou em algum outro momento anterior à faculdade, de 0 a 10, o quanto você considera que realmente aprendeu sobre o assunto? Por quê?

3, Não tive muitas aulas sobre, mas nunca cheguei a aprender

Fonte: O autor (2024).

Figura 16 - Resposta do P4 *("2, entendo a Teoria, mas a prática não me sinto confiável")*


1) Se você teve contato com funções exponenciais no ensino médio ou em algum outro momento anterior à faculdade, de 0 a 10, o quanto você considera que realmente aprendeu sobre o assunto? Por quê? 2, entendo a Teoria, mas a prática não me sinto confiável.

Fonte: O autor (2024).

Os resultados da Pergunta 1 revelam uma diversidade significativa na exposição prévia dos participantes ao estudo de funções exponenciais. Cerca de 40% dos participantes indicaram ter aprendido muito pouco sobre o assunto, com notas entre 0 e 3, sugerindo uma base fraca ou insuficiente antes da faculdade. Além disso, 20% avaliaram seu aprendizado como intermediário, com notas entre 4 e 5, refletindo uma exposição moderada ao tema. Apenas 40% dos participantes classificaram seu aprendizado como satisfatório (notas entre 6 e 8), indicando que algum conhecimento foi adquirido. Portanto, 60% dos participantes demonstram ter tido uma exposição limitada ou aprendizado insuficiente das funções exponenciais no ensino médio. Essa falta de exposição adequada pode estar diretamente ligada às dificuldades atuais que muitos enfrentam no entendimento das funções exponenciais.

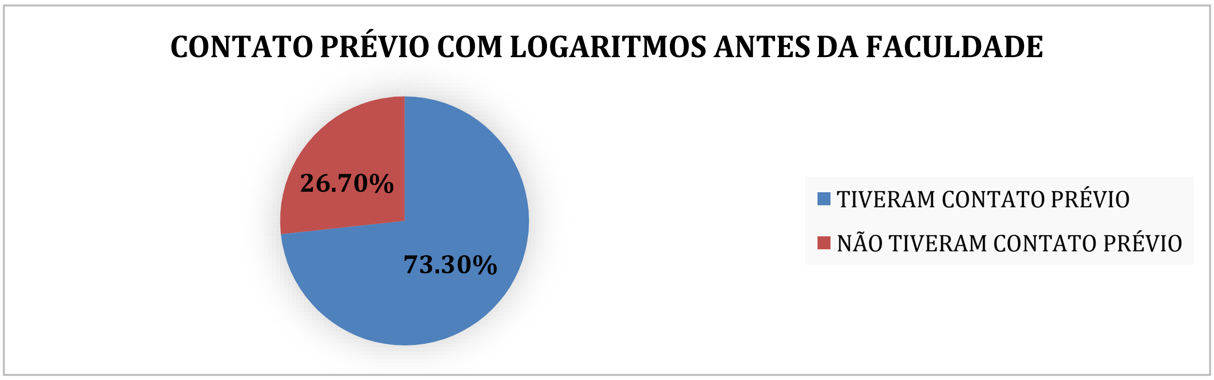
Pergunta 2 *(Você já teve alguma experiência anterior com logaritmos antes de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, onde?)*

Tabela 09- Contato prévio com logaritmos antes da faculdade

Exposição prévia a logaritmos	Quantidade de participantes	Porcentagem%
Tiveram contato prévio	11	73,3%
Não tiveram contato prévio	4	26,7%

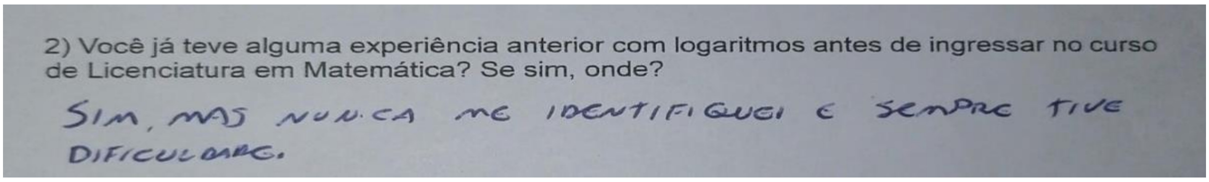
Fonte: O autor (2024).

Gráfico 03 - Contato prévio com logaritmos antes da faculdade



Fonte: O autor (2024).

Figura 17 - Resposta do P1 *(“Sim, mas nunca me identifiquei e sempre tive dificuldade”)*

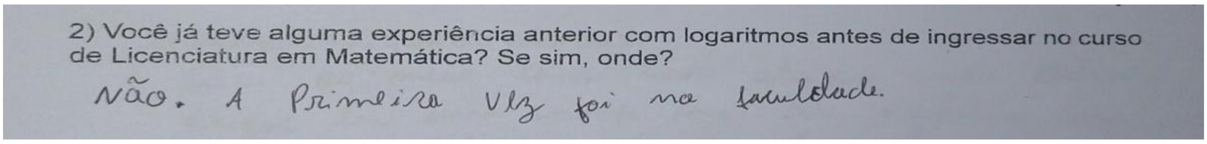


2) Você já teve alguma experiência anterior com logaritmos antes de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, onde?

SIM, MAS NUNCA ME IDENTIFIQUEI E SEMPRE TIVE DIFICULDADE.

Fonte: O autor (2024).

Figura 18 - Resposta do P8 *(“Não. A primeira vez foi na faculdade”)*



2) Você já teve alguma experiência anterior com logaritmos antes de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, onde?

Não. A Primeira Vez foi na faculdade.

Fonte: O autor (2024).

A maioria dos participantes (73,3%) teve algum contato prévio com logaritmos antes de começar a licenciatura, demonstrando uma exposição significativa ao tema. No entanto, 26,7% dos participantes afirmaram não ter tido qualquer contato anterior com logaritmos. Essa variação na exposição prévia pode influenciar diretamente a capacidade dos participantes em lidar com logaritmos, destacando a importância de revisar ou reforçar esse conteúdo para garantir uma compreensão sólida entre todos.

7.4.2 Compreensão conceitual

Pergunta 4 *(“Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam?”)*

A análise da Pergunta 4 do questionário Diagnóstico, visa avaliar a compreensão conceitual dos participantes sobre a relação entre essas funções. A resposta satisfatória deveria indicar que as funções logarítmicas e exponenciais estão relacionadas porque uma é o inverso da outra.

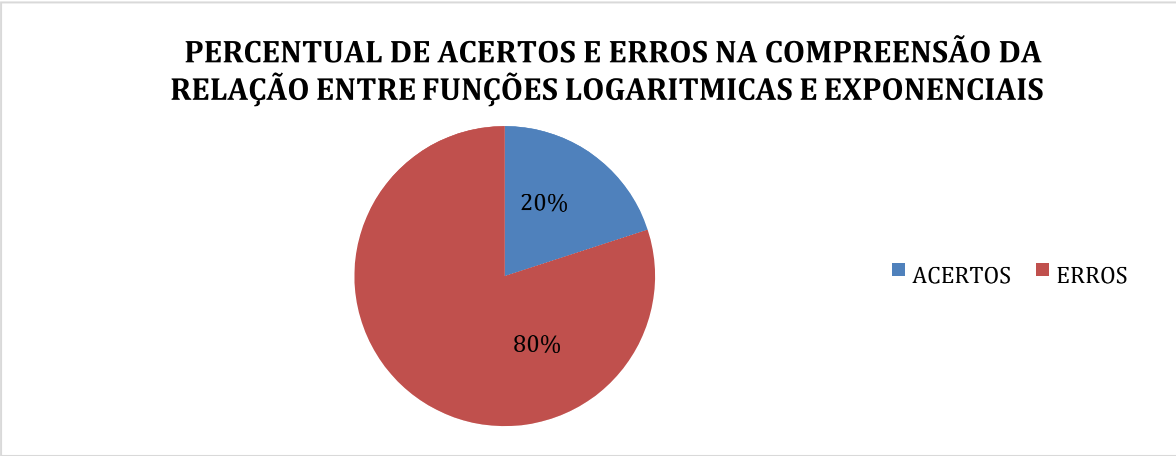
Para essa análise, as respostas foram categorizadas em duas opções: "Acertou" ou "Errou" através da tabela seguinte:

Tabela 10 - Percentual de acertos e erros na compreensão da relação entre funções logarítmicas e exponenciais

Categoria de Respostas	Quantidade de Participantes	Porcentagem (%)
Acertou	3	20%
Errou	12	80%

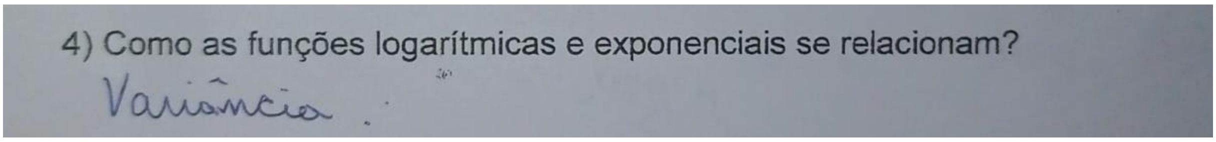
Fonte: O autor (2024).

Gráfico 04 - Percentual de acertos e erros na compreensão da relação entre funções logaritmicas e exponenciais



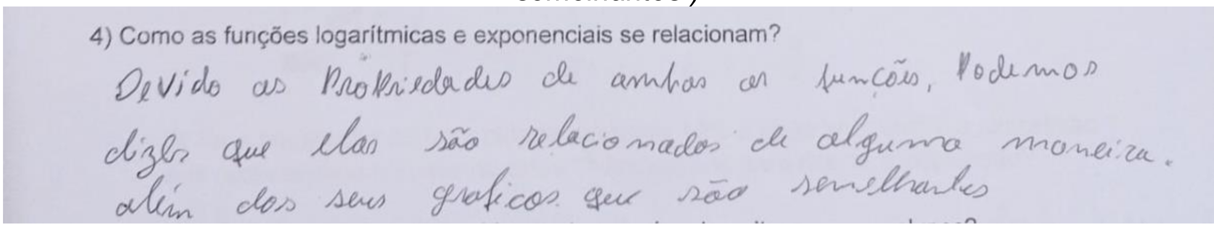
Fonte: O autor (2024).

Figura 19 - Resposta do P5 *(“Variância)*


4) Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam?
Variância.

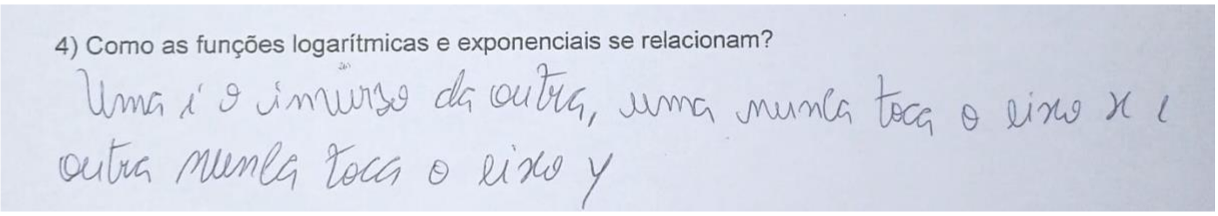
Fonte: O autor (2024).

Figura 20 - Resposta do P8 *(“Devido as propriedades de ambas as funções, podemos dizer que elas são relacionadas de alguma maneira. Além dos seus gráficos que são semelhantes”)*


4) Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam?
Devido as Propriedades de ambas as funções, Podemos dizer que elas são relacionadas de alguma maneira. além dos seus graficos que são semelhantes

Fonte: O autor (2024).

Figura 21 - Resposta do P9 *(“Uma é o inverso da outra, uma nunca toca o eixo x e outra nunca toca o eixo y”)*


4) Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam?
Uma é o inverso da outra, uma nunca toca o eixo x e outra nunca toca o eixo y

Fonte: O autor (2024).

A análise das respostas à Pergunta 4 revela que 80% dos participantes não conseguiram explicar corretamente a relação entre funções logarítmicas e exponenciais, revelando uma compreensão conceitual limitada. Esse dado é preocupante, pois o currículo de Pernambuco (2021) define essa habilidade como uma competência a ser desenvolvida (EM13MAT403PE35). Apenas 20% dos participantes entenderam claramente que essas funções são inversas, e essa lacuna pode dificultar a aplicação eficaz dos conceitos de logaritmos e exponenciais.

7.4.3 Insegurança ao ensinar

Para avaliar a confiança dos participantes em ensinar logaritmos, analisaremos a Pergunta 5 do questionário: *("De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos?")*

As respostas serão organizadas em três faixas de notas, cada uma representando um nível diferente de confiança:

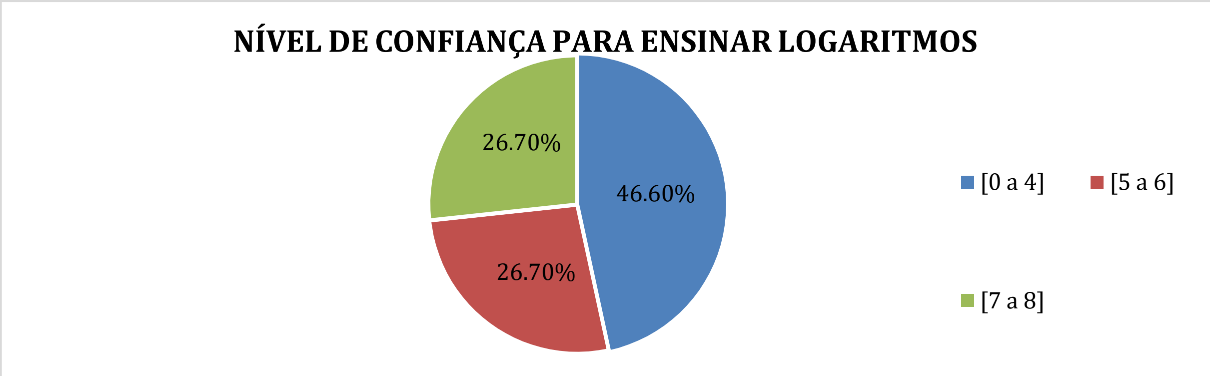
1. FAIXA [0 a 4]: Esta faixa indica baixa confiança dos participantes em ensinar logaritmos. Notas nessa faixa sugerem que os participantes se sentem significativamente inseguros sobre seu conhecimento e habilidades para ensinar o assunto.
2. FAIXA [5 a 6]: Nesta faixa, os participantes têm uma confiança moderada. Eles podem reconhecer algumas competências para ensinar logaritmos, mas também percebem que precisam melhorar ou revisar alguns conceitos para se sentirem totalmente preparados.
3. FAIXA [7 a 8]: A faixa mais alta reflete alta confiança. Participantes que atribuem notas nessa faixa acreditam estar bem preparados para ensinar logaritmos, possuindo uma compreensão sólida do conteúdo e habilidades para transmiti-lo aos alunos.

Tabela 11 - Nível de confiança dos participantes ao ensinar: análise das faixas de notas

Faixa de Notas	Quantidade de Participantes	Porcentagem (%)
Nota de (0 a 4)	7	46.6%
Nota de (5 a 6)	4	26.7%
Nota de (7 a 8)	4	26.7%

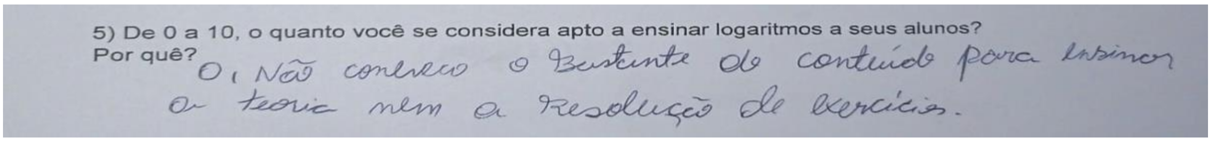
Fonte: O autor (2024).

Gráfico 05 - Nível de confiança para ensinar logaritmos



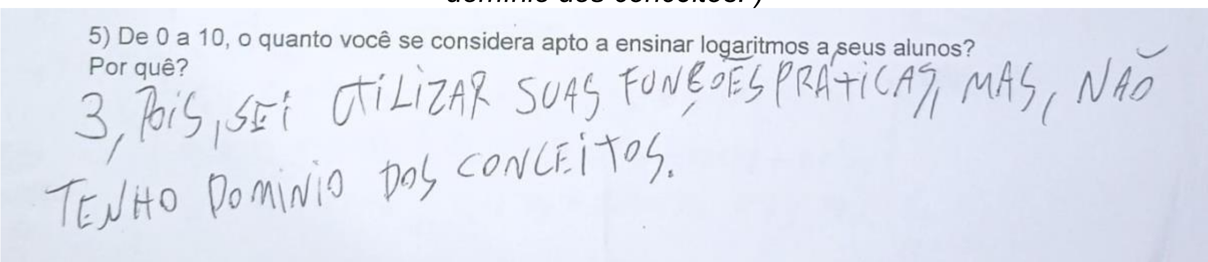
Fonte: O autor (2024).

Figura 22 - Resposta do P10 *("0, Não conheço o bastante do conteúdo para ensinar a teoria nem a resolução de exercícios").*


5) De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos?
Por quê? 0, Não conheço o bastante do conteúdo para ensinar a teoria nem a resolução de exercícios.

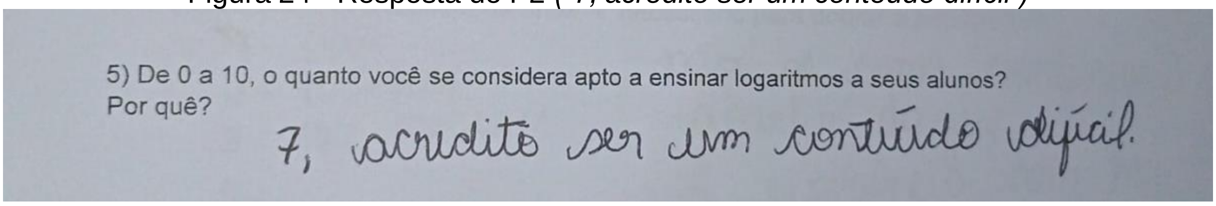
Fonte: O autor (2024).

Figura 23 - Resposta do P14 *("3, pois, sei utilizar suas funções práticas, mas, não tenho domínio dos conceitos.")*


5) De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos?
Por quê?
3, pois, sei utilizar suas funções práticas, mas, não tenho domínio dos conceitos.

Fonte: O autor (2024).

Figura 24 - Resposta do P2 *("7, acredito ser um conteúdo difícil")*


5) De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos?
Por quê? 7, acredito ser um conteúdo difícil

Fonte: O autor (2024).

A análise da Pergunta 5 evidencia um cenário variado em relação à confiança dos participantes em ensinar logaritmos. Quase metade dos participantes (46,6%)

relatou sentir-se pouco confiante, atribuindo notas entre 0 e 4, o que indica inseguranças significativas sobre sua capacidade de ensinar o conteúdo. Além disso, 26,7% dos participantes classificaram sua confiança como moderada, com notas entre 5 e 6. No entanto, é importante destacar que apenas 26,7% dos participantes se consideram realmente preparados para ensinar logaritmos, com uma confiança relativamente alta, expressa por notas entre 7 e 8. Isso significa que a grande maioria, 73,3%, não se sente totalmente segura para ensinar o tema, situando-se nas categorias de "Pouco Confiante" ou "Confiança Moderada." Esses dados refletem a necessidade de maior apoio e desenvolvimento para que os futuros professores possam se sentir mais preparados e confiantes ao abordar logaritmos em sala de aula.

7.5 ANÁLISE QUANTITATIVA DO QUESTIONÁRIO 02 *“LOGARITMOS”*

A metodologia para a análise do questionário 02 "QUESTIONÁRIO DE LOGARITMOS" será estruturada de forma a proporcionar uma compreensão clara e organizada dos dados coletados. Para isso, utilizaremos a classificação de problemas proposta por Dante (2000), categorizando as cinco questões do questionário prático de logaritmos em três tipos distintos: Problemas-Processo ou Heurísticos (associados às questões 1 e 4), Exercícios de Algoritmo (relacionados às questões 2 e 3), e Problemas de Aplicação (referentes à questão 5).

Além disso, para enriquecer a análise, iremos elaborar tabelas e gráficos que mostrarão os acertos dos participantes em relação a cada uma das três categorias de problemas, conforme a classificação de Dante (2000). Para cada questão, utilizaremos respostas representativas dos participantes para que possam ser analisadas de forma detalhada. A maneira como os participantes resolveram os cálculos será examinada à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (2009). Quando necessário, faremos uma correlação entre esses resultados e os obtidos na análise do questionário diagnóstico, discutido no capítulo 7.4 deste trabalho.

7.5.1 Problemas-processo ou heurísticos (questões 1 e 4):

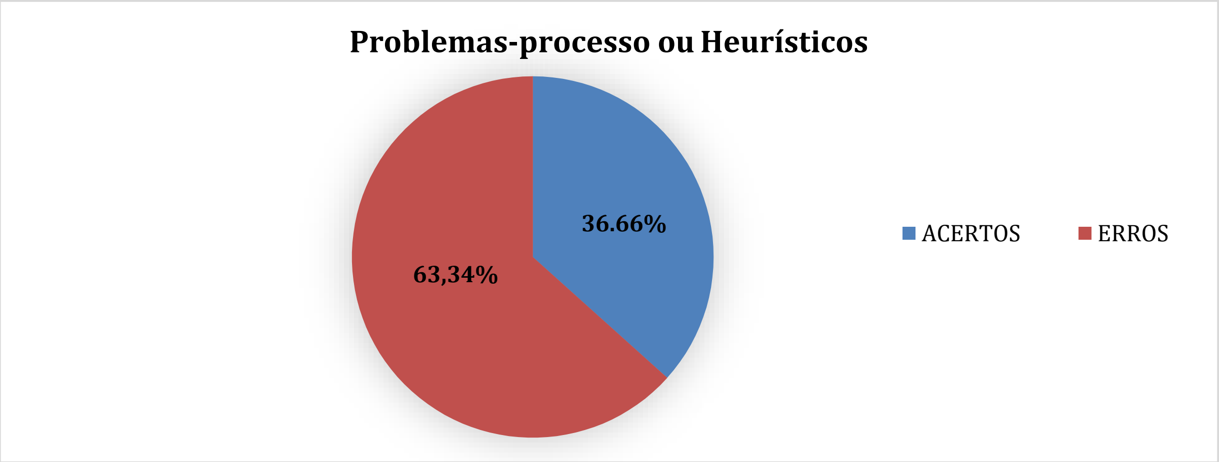
QUESTÃO 1: *"Com suas próprias palavras, descreva e explique o conceito de logaritmos. Se possível, forneça exemplos de situações práticas em que o conceito de logaritmos é aplicado."*

QUESTÃO *4: “Se o logaritmo de 16 em uma base específica é igual a 2, qual será o logaritmo de 32 nessa mesma base?"*

Na análise das questões de Problema-processo ou Heurísticos, como a Questão 1 e a Questão 4, buscamos avaliar o entendimento dos participantes sobre o conceito de logaritmos. Essas questões exigiam uma compreensão mais profunda do conceito e a capacidade de aplicar esse conhecimento de forma prática. Cinco participantes, em especial (P3, P6, P8, P9 e P13), tiveram suas respostas destacadas por representarem diferentes níveis de entendimento.

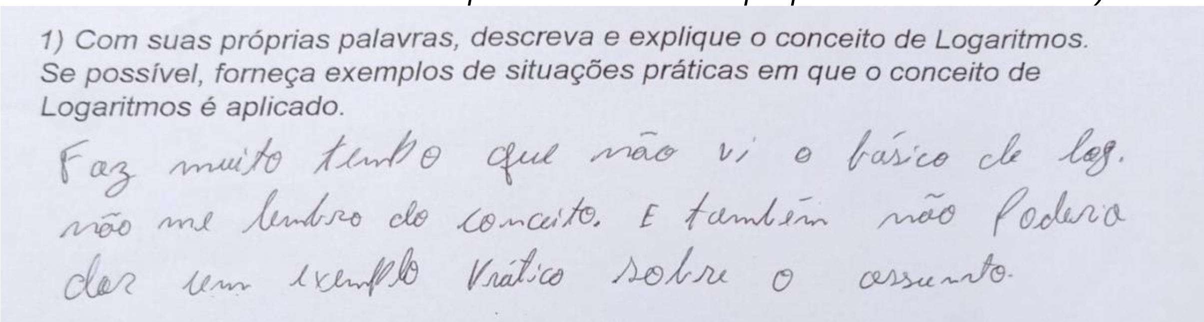
Das 30 respostas, apenas 11 foram consideradas corretas, resultando em uma taxa de acerto de 36,66%. Esse resultado evidencia que a maioria enfrentou dificuldades em lidar com o conceito de logaritmos. A Questão 1, que pedia uma explicação com palavras próprias e exemplos práticos, teve um nível de acerto bem mais baixo, com apenas 3 respostas corretas (P2, P7, P10). Isso sugere que os alunos tiveram maior dificuldade em articular o conceito teórico do que em aplicá-lo, como foi o caso da Questão 4, na qual 8 participantes responderam corretamente (P2, P5, P6, P8, P11, P13, P14, P15). Esse contraste destaca a dificuldade dos alunos em descrever e explicar o conceito de logaritmos de maneira clara, mas uma capacidade ligeiramente melhor de aplicá-lo em situações práticas.

Gráfico 06 - Problemas-processo ou heurísticos: erros e acertos



Fonte: O autor (2024).

Figura 25 - Resposta do P8 *(“Faz muito tempo que não vi o básico de log. Não me lembro do conceito. E também não poderia dar um exemplo prático sobre o assunto)*


1) Com suas próprias palavras, descreva e explique o conceito de Logaritmos. Se possível, forneça exemplos de situações práticas em que o conceito de Logaritmos é aplicado.

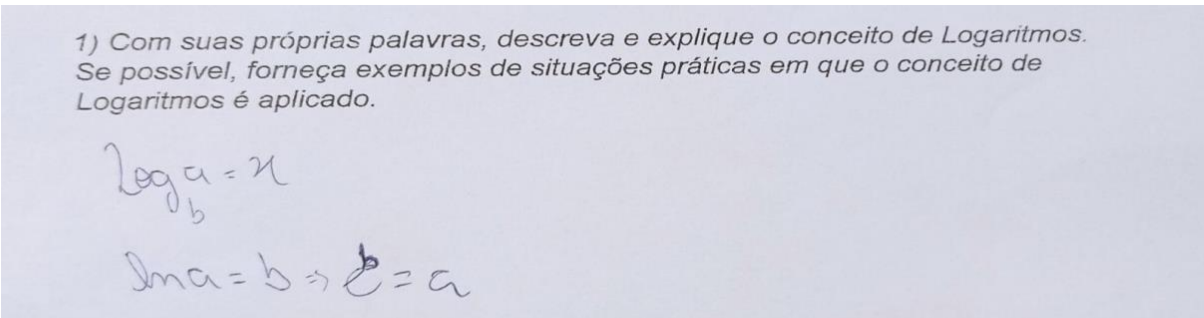
Faz muito tempo que não vi o básico de log. não me lembro do conceito. E também não poderia dar um exemplo prático sobre o assunto.

Fonte: O autor (2024).

A resposta de P8 à Questão 1 indica uma falta de familiaridade com o conceito de logaritmos. O participante admite não lembrar do conceito básico e também demonstra dificuldades em fornecer exemplos práticos, sugerindo um conhecimento deficiente e limitado sobre o tema.

Segundo Duval (2009), essa dificuldade pode estar relacionada à incapacidade de transitar entre diferentes registros semióticos e representações matemáticas. P8 não conseguiu transformar a compreensão teórica do conceito de logaritmo em uma explicação coerente e prática, o que é essencial para a resolução de problemas heurísticos. Isso aponta para uma falha em conectar o conhecimento teórico com a aplicação prática, fundamental para o entendimento profundo de conceitos matemáticos. De acordo com Dante (2000), problemas heurísticos exigem que o aluno desenvolva um plano de ação e uma estratégia para encontrar a solução. No caso de P8, a ausência de uma explicação e exemplos mostra que o participante não conseguiu elaborar um plano de ação para abordar a questão, evidenciando uma limitação significativa na compreensão e aplicação dos logaritmos.

Figura 26 - Resposta do P9 *(“$\log_b a$=x; $\ln a$=b⇒ e^b=a”)*


1) Com suas próprias palavras, descreva e explique o conceito de Logaritmos. Se possível, forneça exemplos de situações práticas em que o conceito de Logaritmos é aplicado.

$\log_b a = x$

$\ln a = b \Rightarrow e^b = a$

Fonte: O autor (2024).

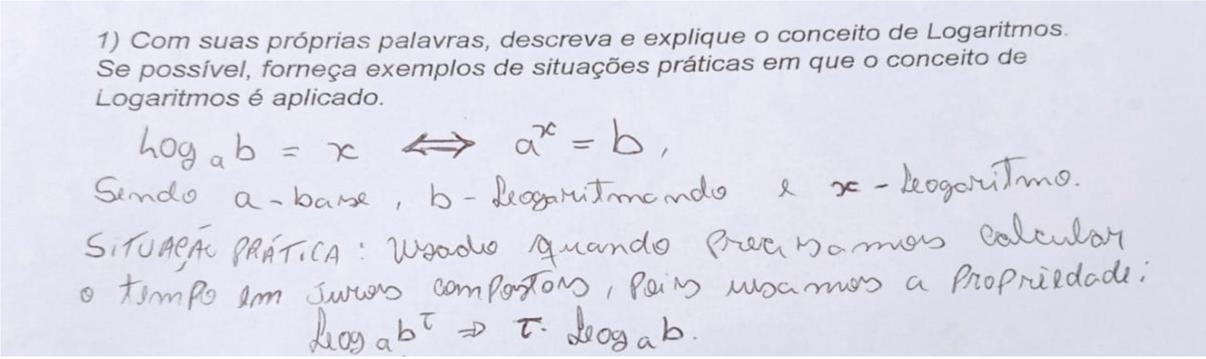
O participante P9, inicialmente, utilizou a definição algébrica do logaritmo, "$\log_b a = x$", mas sem esclarecer seu significado, ou seja, sem mencionar que x representa o expoente ao qual a base b deve ser elevada para obter o valor a.

Em seguida, o participante apresentou um exemplo de logaritmos naturais usando a expressão " $\ln a = b \Rightarrow e^b = a$ ", mostrando a relação entre o logaritmo natural de um número e sua forma exponencial, o que indica certo nível de compreensão do conceito. No entanto, ao analisar a estrutura geral da resposta, observamos que ela está fragmentada e carece de uma explicação completa do conceito de logaritmos, faltando a conversão efetiva do registro algébrico para a linguagem natural.

De acordo com Duval (2009), o sucesso na resolução de problemas matemáticos depende não só da habilidade de utilizar diferentes registros de representações semióticas, mas também da capacidade de realizar um *Tratamento* adequado ao converter essas representações de um sistema para outro. Na resposta à P9, observa-se uma dificuldade ao transitar entre o registro algébrico e a linguagem natural para explicar o conceito de logaritmo.

- *Incompletude na Definição*: A definição "$\log_b a = x$" carece de uma explicação mais profunda que permita ao leitor ou ao avaliador entender completamente o conceito de logaritmo. Isso sugere uma limitação na capacidade de P9 de realizar uma conversão congruente entre a representação algébrica do logaritmo e a sua representação em linguagem natural.
- *Fragmentação da Resposta:* A transição do registro logaritmo para o exponencial "$ln\ a = b \Rightarrow e^b = a$" demonstra que o participante possui algum entendimento da transição entre os registros algébricos, contudo, essa transição não foi totalmente integrada à definição inicial de logaritmo, resultando em uma resposta fragmentada. Nesse caso, faltou uma explicação mais detalhada e coesa, que conectasse as ideias de maneira mais fluida, sem deixar lacunas no raciocínio. Isso sugere que o participante ainda precisa desenvolver uma compreensão mais consolidada para conectar conceitos de maneira completa e clara. Assim, a análise da resposta do participante P9 revela que seu entendimento dos logaritmos é parcial e ainda está em construção.

Figura 27 - Resposta de P13 *(“$\log_b a$=x⇔⇒ a^x=b, sendo a- base, b- logaritmando e x – logaritmo. Situação prática: usado quando precisamos calcular o tempo em juros compostos, pois usamos a propriedade; $\log_a b^t \Rightarrow t \log_a b$”)*



1) Com suas próprias palavras, descreva e explique o conceito de Logaritmos. Se possível, forneça exemplos de situações práticas em que o conceito de Logaritmos é aplicado.

$\log_a b = x \iff a^x = b$,

Sendo a - base, b - logaritmando e x - logaritmo.

SITUAÇÃO PRÁTICA: usado quando precisamos calcular o tempo em juros compostos, pois usamos a propriedade:

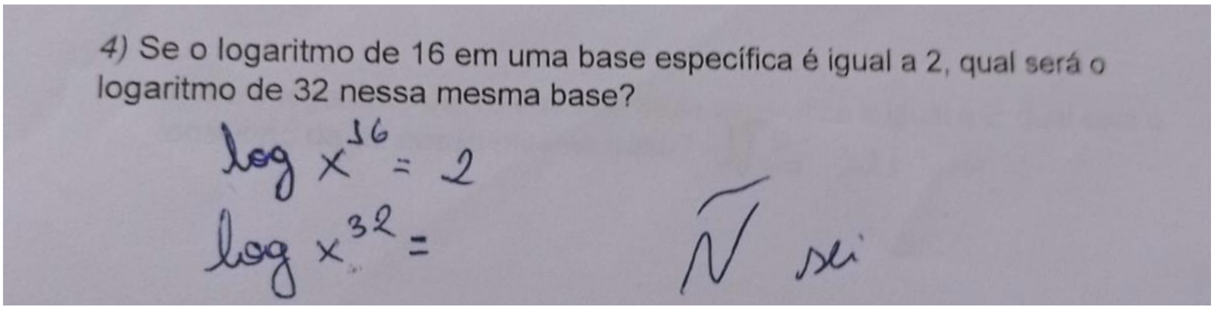
$\log_a b^t \Rightarrow t \cdot \log_a b$.

Fonte: O autor (2024).

A resposta de P13 foi bastante completa, demonstrando um sólido entendimento do conceito de logaritmos e suas propriedades. Ele apresentou a definição de logaritmo de maneira correta e clara, identificando a base, o logaritmando e o logaritmo em uma expressão algébrica. P13 foi capaz de realizar a conversão entre registros semióticos, conforme descrito por Duval (2009), ao transformar a linguagem simbólica (equações) em uma explicação em linguagem natural. Essa habilidade de alternar entre diferentes registros, como a representação algébrica e a descrição verbal, é um indicativo de uma compreensão robusta do conceito.

Além disso, ao fornecer um exemplo prático pertinente, P13 destacou o uso de logaritmos no cálculo de tempo em juros compostos, demonstrando um conhecimento aplicado das propriedades dos logaritmos, especificamente da propriedade que envolve potências. Essa capacidade de conectar o conceito abstrato a uma aplicação prática reflete um domínio avançado do conteúdo, o que é indispensável em problemas-processo ou heurísticos, segundo Dante (2000).

Figura 28 - Resposta do P3 para a questão 4). (“$\log_x 16 = 2$; $\log_x 32 =$; Ñ sei")



4) Se o logaritmo de 16 em uma base específica é igual a 2, qual será o logaritmo de 32 nessa mesma base?

$\log x^{16} = 2$

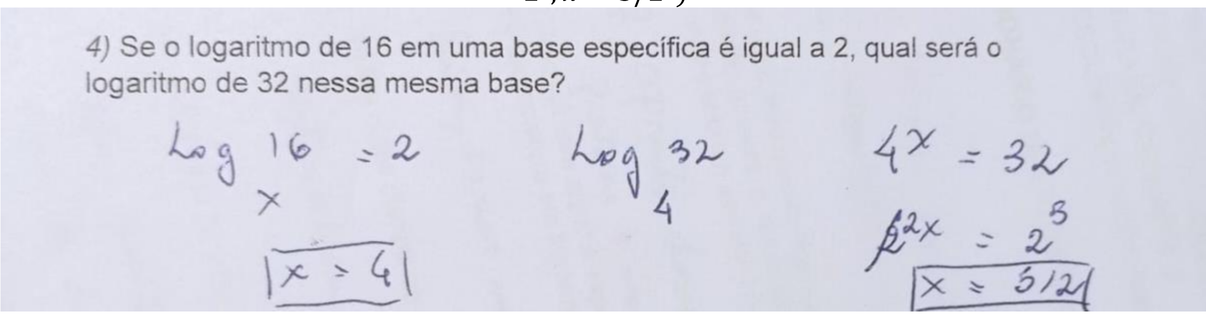
$\log x^{32} =$ Ñ sei

Fonte: O autor (2024).

A resposta de P3 revela um conhecimento incompleto e fragmentado do conceito de logaritmos. Inicialmente, o participante demonstra uma compreensão parcial ao converter corretamente a linguagem natural do problema para o registro algébrico, estruturando a equação ($\log_x 16 = 2$). Contudo, ao lidar com o segundo logaritmo, ($\log_x 32$), ele expressa sua incapacidade em prosseguir, indicando uma dificuldade em realizar a conversão necessária para transformar o registro logarítmico em exponencial. Esse obstáculo impediu P3 de identificar a base correta e utilizar as propriedades de logaritmos para concluir a questão.

Segundo Duval (2009), essa dificuldade pode estar relacionada à limitação no manejo de diferentes registros de representação semiótica, algo necessário para resolver a questão. P3 foi capaz de iniciar o processo, mas esbarrou na transição para outro registro, que é fundamental para resolver o problema. De acordo com Dante (2000), problemas heurísticos exigem do aluno tempo e reflexão para arquitetar um plano de ação e estratégia para alcançar a solução. P3, ao não conseguir avançar, evidenciou a necessidade de aprimorar a fluência nessa articulação entre registros, algo essencial para a resolução de problemas mais complexos como este.

Figura 29 - Resposta do P6 para a questão 4). *(*$\log_x 16 = 2$*;x=4;* $\log_4 32$*;* $4^x = 32;\ 2^{2x} = 2^5; x = 5/2$")



Fonte: O autor (2024).

A resposta de P6 para a questão 4 demonstra uma boa compreensão dos conceitos de logaritmos e equações exponenciais. P6 resolveu a equação $\log_x 16 = 2$ identificando corretamente a base (x) é igual a (4), e aplicou essa informação para calcular ($\log_4\ 32$), convertendo a equação logarítmica para sua forma exponencial $4^x = 32$ e, após manipulação algébrica, chegou à resposta correta $x = 5/2$.

Do ponto de vista de Duval (2009), P6 demonstrou um Tratamento algébrico eficaz entre registros semióticos, indo do registro logarítmico ao registro exponencial de maneira fluida. Esse domínio no tratamento entre representações é fundamental para a resolução de problemas matemáticos, conforme destacado por Duval. A resolução correta evidencia que P6 consegue operar entre diferentes registros algébricos de maneira eficiente, mostrando um entendimento sólido dos procedimentos logarítmicos.

7.5.2 Exercícios de algoritmo (questões 2 e 3):

QUESTÃO *2. "Resolva $4^x = 1/64$."*

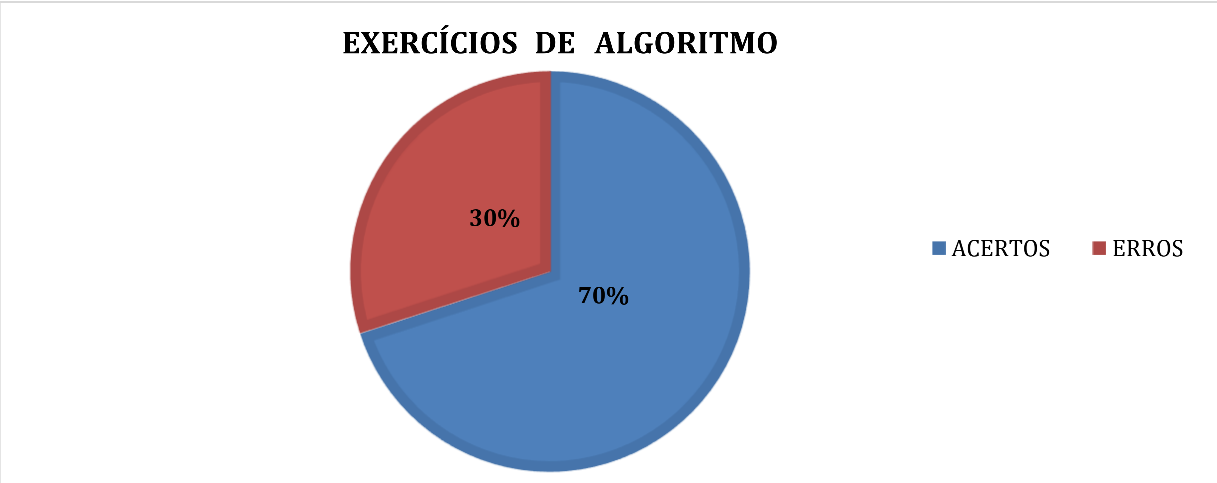
QUESTÃO *3. "Se log(x) = 2, qual é o valor de x?"*

Nesta seção, vamos examinar as respostas dos participantes para entender como eles resolveram os exercícios de algoritmo. As questões analisadas foram as de números 2 e 3, que foram categorizadas como exercícios de algoritmo.

Das 30 respostas obtidas, 21 foram corretas, resultando em uma taxa de acerto de 70%. Esse resultado indica que a maioria dos participantes conseguiu resolver corretamente os exercícios de algoritmo, mostrando um bom entendimento geral do tópico.

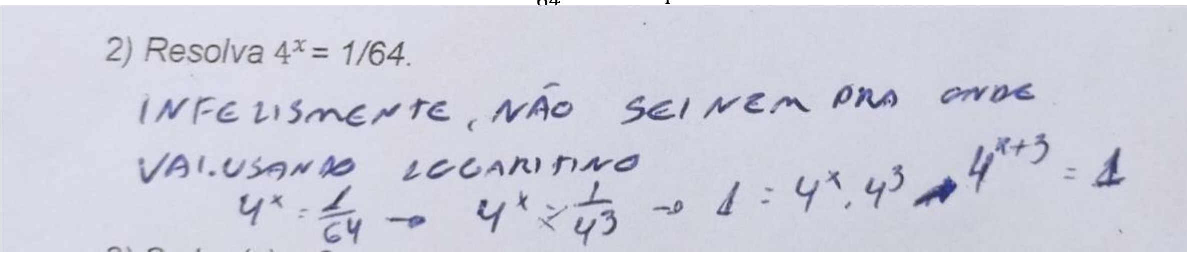
Para proporcionar uma visão mais detalhada, vamos destacar as respostas de alguns participantes específicos, como P1, P2, P7, P11 e P15. As respostas desses participantes são representativas da diversidade de compreensão entre os alunos e ajudam a ilustrar as diferentes abordagens e níveis de domínio dos conceitos de algoritmo.

Gráfico 07 - Exercícios de algoritmo: erros e acertos



Fonte: O autor (2024).

Figura 30 - Resposta do P1 para a questão 2. *(“Infelizmente, não sei nem pra onde vai usando logaritmo.* $4^x=\frac{1}{64}$ ⇒. $4^x=\frac{1}{4^3}$ ⇒*1*=4^x4^3 ⇒ 4^{x+3}=*1”)*

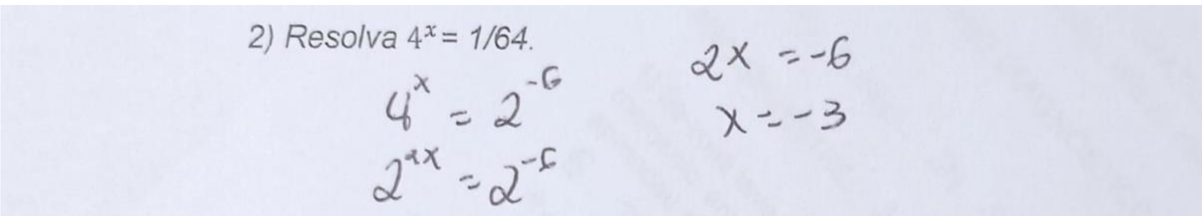


Fonte: O autor (2024).

A resposta de P1 evidencia uma dificuldade significativa na resolução de equações exponenciais, particularmente na transição entre registros de representação necessários para solucionar o problema. O participante expressa inicialmente sua insegurança ao afirmar que não sabe como utilizar logaritmos, o que reflete uma confusão sobre o método adequado, já que a questão exigia a resolução de uma equação exponencial, e não o uso direto de logaritmos. Esse fato revela uma fragilidade no tratamento das equações exponenciais que, segundo Duval (2009), deveria ser consistente para o estudante, considerando os tratamentos anteriores feitos nesse registro exponencial pelo participante P1.

Embora P1 tenha dado o primeiro passo corretamente ao reescrever $4^x = \frac{1}{64}$ como sendo $4^x = \frac{1}{4^3}$, ele demonstra uma dificuldade significativa em prosseguir ao se deparar com a equação,4^{x+3}=*1*. A falha em reconhecer que o número (1) pode ser representado como (4^0) e, consequentemente, igualar os expoentes para obter a expressão, $x + 3 = 0$ e resolver para $x = -3$, aponta para uma limitação na manipulação dos registros algébricos. Isso demonstra como dificuldades em realizar operações algébricas dentro do mesmo registro de representação semiótica pode resultar em problemas na resolução de questões matemáticas, conforme destacado por Duval.

Figura 31 - Resposta do P2 para a questão 2. (“4^x=2^{-6}; $2^{2x} = 2^{-6}$; 2x=-6; x=-3”)

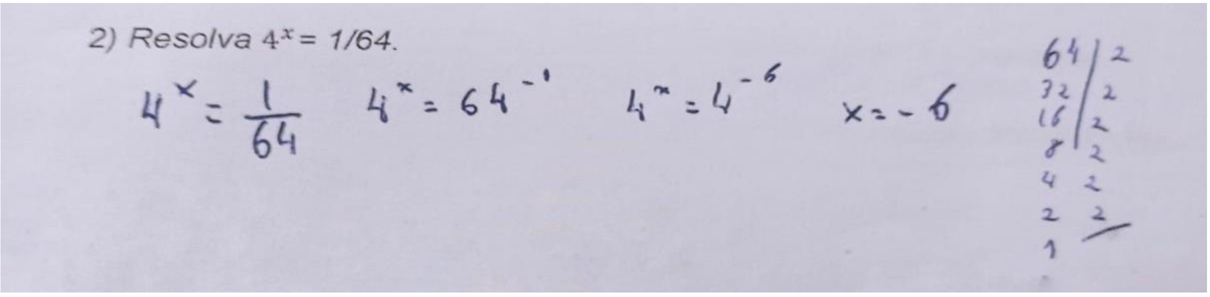


Fonte: O autor (2024).

A resposta de P2 demonstra uma boa compreensão da resolução de equações exponenciais, evidenciando uma habilidade clara na manipulação dos registros algébricos. O participante efetuou um tratamento algébrico correto, (4^x) como (2^{2x}) e, logo em seguida, igualou as potências de mesma base, simplificando a equação para $(2x = -6)$ e chegando ao resultado final $(x = -3)$. Esse procedimento mostra que P2 conseguiu realizar as conversões necessárias dentro do mesmo sistema semiótico sem dificuldade, conforme discutido por Duval (2009).

Essa fluidez na transição entre as representações algébricas e a capacidade de lidar com a estrutura da equação exponencial são indicativos de uma boa fluidez entre os registros semióticos, o que, segundo Duval, é essencial para o sucesso em tarefas matemáticas. A resolução eficiente por parte de P2 reflete uma compreensão sólida dos conceitos subjacentes e a habilidade de aplicar corretamente os procedimentos algébricos necessários.

Figura 32 - Resposta do P7 a questão 2 ("$4^x = \frac{1}{64}$; $4^x=64^{-1}$; $4^x=4^{-6}$; $x = -6$; ")

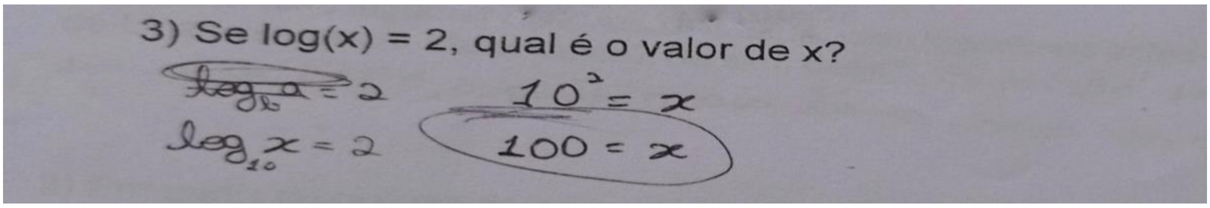


Fonte: O autor (2024).

A resposta de P7 à Questão 2 revela uma compreensão parcial da resolução de equações exponenciais, mas com um erro na manipulação dos expoentes e das bases. O participante começou corretamente ao reescrever a equação $(4^x = \frac{1}{64})$ como $(4^x = 64^{-1})$, o que é um bom passo inicial. No entanto, ao fatorar 64 em termos de fatores primos, P7 cometeu um erro ao representar 64^{-1} como 4^{-6}, quando deveria ter sido 4^{-3}. Se tivesse feito a transformação correta e igualado as bases, o resultado seria $x = -3$.

Segundo Duval (2009), a dificuldade de P7 pode ser atribuída à falta de habilidade na transformação e manipulação dos registros exponenciais. P7 não conseguiu ajustar os expoentes de maneira adequada após a conversão para a base comum. O erro na interpretação das bases e na igualação dos expoentes impediu a resolução correta do problema. A dificuldade em realizar essas transformações e manipulações é indicativa de uma limitação na compreensão do tratamento de registros exponenciais, essencial para a resolução de problemas desse tipo.

Figura 33 - Resposta do P11 a questão 3. *("$\log_b a = 2$; $\log_{10} x = 2$; $10^2 = x; 100 = x$")*

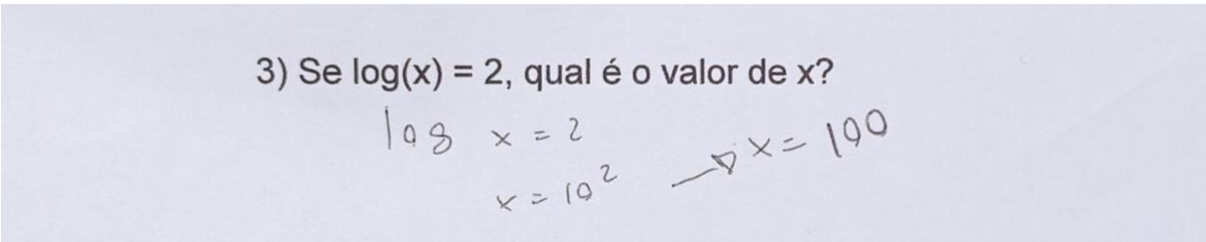


Fonte: O autor (2024).

A resposta de P11 à questão 3 demonstra uma boa compreensão do conceito de logaritmo decimal. Ao reescrever ($\log_{10} x = 2$) como ($10^2 = x$), ele aplicou corretamente o tratamento dentro do mesmo registro, utilizando a propriedade dos logaritmos, e obteve o resultado correto, ($x = 100$).

Essa resposta revela que P11 conseguiu realizar as transformações necessárias dentro do mesmo registro de representação, conforme discutido por Duval (2009). Ele usou a linguagem algébrica para tratar o problema de forma eficaz, demonstrando que domina o conceito de logaritmos.

Figura 34 - Resposta do P15 para a questão 3. *("$\log x$=2; x=$10^2 \Rightarrow x = 100$")*



Fonte: O autor (2024).

P15 demonstrou uma boa compreensão do conceito de logaritmo decimal ao resolver corretamente a equação ($log\ x = 2$), o participante fez a transição adequada do registro logarítmico para o registro exponencial, reescrevendo a equação como ($x = 10^2$) e, em seguida, encontrando o valor correto de ($x = 100$). Esse processo reflete um domínio sólido na manipulação dos registros e na aplicação do algoritmo correspondente.

A resolução de P15, conforme discutido por Duval (2009), ilustra uma transição adequada entre registros semióticos, um aspecto fundamental para a compreensão e solução de problemas matemáticos. Ao tratar o problema como um "exercício de algoritmo", o participante demonstrou proficiência no uso das regras algébricas envolvidas, sem apresentar dificuldades na transição entre representações.

7.5.3 Problemas de aplicação (questão 5):

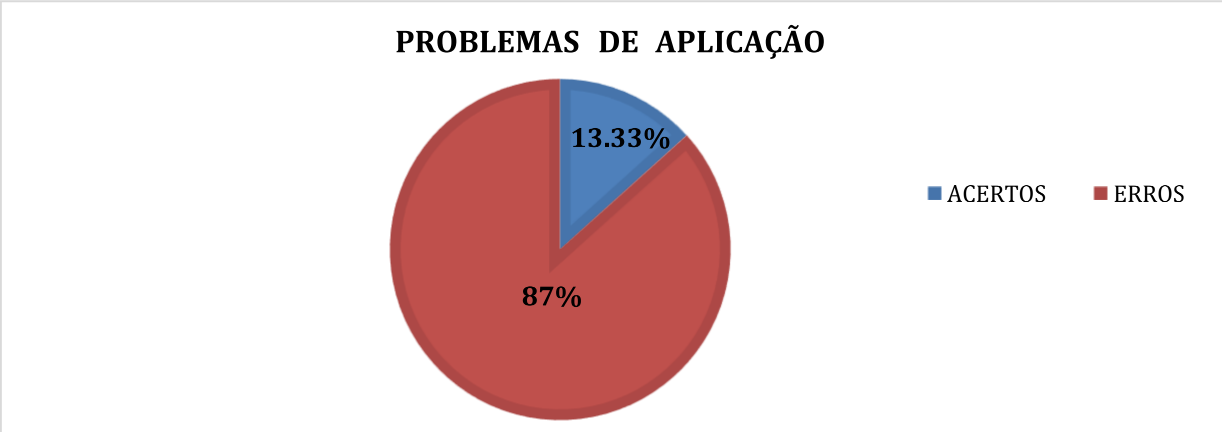
Questão 5: *“Se a população de uma cidade aumenta 10% a cada ano, qual é a expressão que representa o número em anos “t” necessário para dobrar a população?”*

Na seção dedicada aos problemas de aplicação, analisamos as respostas dos participantes à questão que pedia a expressão para calcular o tempo necessário para dobrar a população de uma cidade com um aumento de 10% ao ano. Esse problema é contemplado na BNCC, especificamente na Habilidade (EM13MAT305), e é classificado como um "Problema de Aplicação" conforme a definição de Dante (2000). Segundo Dante, esses problemas consistem em situações do cotidiano que exigem a aplicação de conceitos matemáticos para serem resolvidas, conectando a matemática ao contexto prático.

Das 15 respostas, apenas 2 estavam corretas, resultando em uma taxa de acerto de 13,33%. Esse desempenho insatisfatório revela que a maioria dos participantes teve dificuldades significativas em aplicar conceitos matemáticos, refletindo um entendimento limitado sobre a conversão de situações reais em expressões matemáticas. Essa dificuldade é corroborada pela seção 7.4.3, "INSEGURANÇA AO ENSINAR", que mostrou que 73,3% se sentiram despreparados para ensinar logaritmos, impactando negativamente sua capacidade de resolver problemas de aplicação.

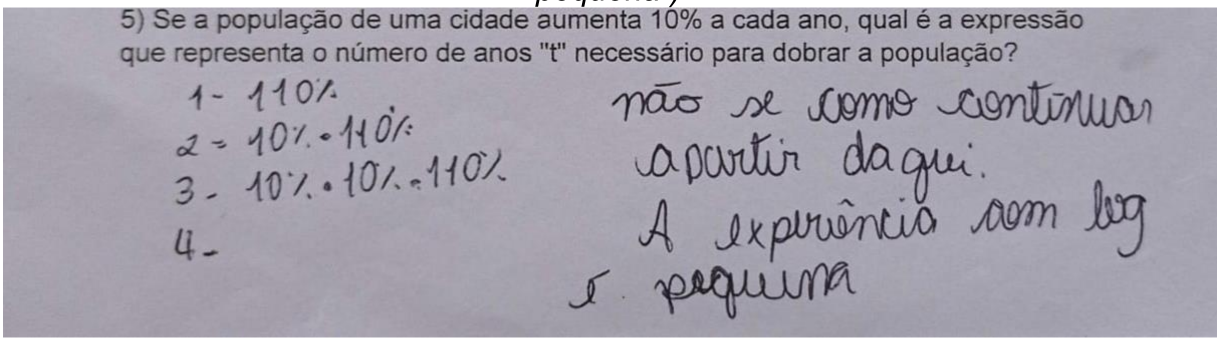
Para uma análise mais detalhada, vamos observar as respostas dos participantes que erraram, como P2, P5 e P9, bem como aquelas dos participantes que acertaram, P13 e P15. Essa questão, que se enquadra na categoria de Problemas de Aplicação, apresentou o menor índice de acerto entre todos os tipos de problemas analisados. Segundo Dante (2000), problemas de aplicação envolvem a tradução de uma situação real em termos matemáticos, utilizando conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos para organizar e resolver os dados fornecidos.

Gráfico 08 - Problemas de aplicação: erros e acertos



Fonte: O autor (2024).

Figura 35 - Resposta de P2 para a questão 5. *("1-110%; 2-10%*110%; 3-10%/10%*110%;4- ,não sei como continuar daqui. A experiência com log é pequena")*



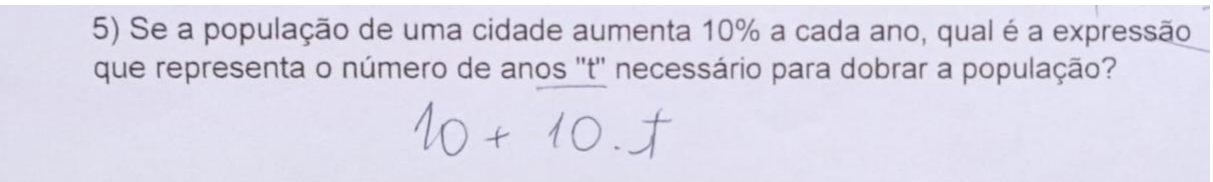
Fonte: O autor (2024).

A análise da resposta de P2 à Questão 5 mostra uma tentativa de estruturar um raciocínio, mas com dificuldade em aplicar corretamente os conceitos matemáticos necessários. P2 dividiu o problema em três etapas, começando pela soma de 10%, resultando em 110%. Na segunda etapa, tentou calcular 10% de 110%, e na terceira, tentou aplicar a multiplicação de 10% novamente. No entanto, P2 utilizou os conceitos de maneira confusa e incorreta, parecendo misturar noções incompletas de juros compostos com a ideia de crescimento populacional exponencial. A resposta indica que P2 estava tentando seguir um raciocínio, mas, ao final, demonstrou insegurança ao declarar que não sabia como continuar e mencionou sua falta de experiência com logaritmos.

Esse erro está alinhado com a análise do questionário diagnóstico, que revelou que 26,7% dos participantes não tiveram exposição prévia a logaritmos antes da faculdade. A ausência de uma base sólida nesse conteúdo pode explicar a dificuldade de P2 em aplicar corretamente o conceito. Além disso, a insegurança ao lidar com registros algébricos e ao transformar o problema em uma expressão matemática coerente reforça a lacuna na compreensão conceitual dos participantes, observada na análise da questão 4 do diagnóstico, onde 80% dos alunos demonstraram dificuldade em explicar a relação entre funções logarítmicas e exponenciais.

Do ponto de vista teórico, segundo Duval (2009), a compreensão de um conceito matemático exige a habilidade de traduzir entre diferentes registros de representação sem perder o significado do conceito. No caso de P2, há uma clara dificuldade em alternar entre o registro verbal, que descreve o problema, e o registro algébrico, necessário para formular a expressão correta que representa o tempo necessário para dobrar a população. A confusão nos passos intermediários sugere que P2 não conseguiu realizar adequadamente essa conversão de registros, o que comprometeu sua capacidade de resolver o problema.

Figura 36 - Resposta de P5 a questão 5. *(“10+10t’)*


5) Se a população de uma cidade aumenta 10% a cada ano, qual é a expressão que representa o número de anos "t" necessário para dobrar a população?

$10 + 10.t$

Fonte: O autor (2024).

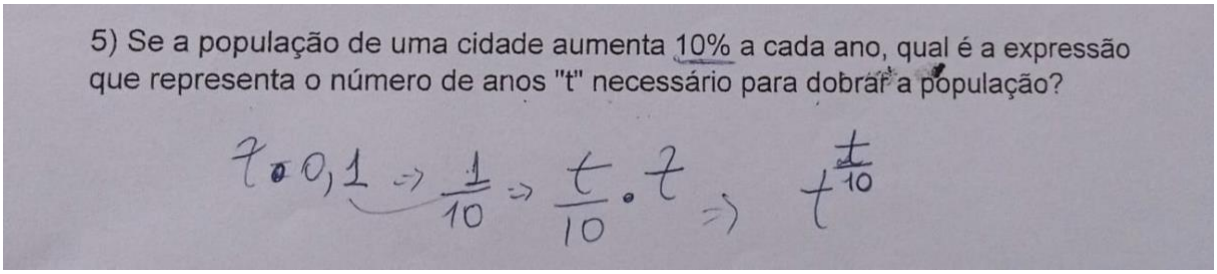
A resposta de P5 demonstra uma incompreensão dos conceitos matemáticos necessários para resolver o problema de aplicação. Ao formular a expressão dessa maneira, P5 tratou o aumento populacional como um crescimento linear, em vez de exponencial, o que revela uma falha fundamental na compreensão do problema. P5 também não apresentou uma explicação ou justificativa para sua resposta, sugerindo uma falta de confiança no raciocínio desenvolvido.

Essa dificuldade em lidar com o problema pode ser contextualizada pelos resultados do questionário diagnóstico, onde 26,7% dos participantes relataram não ter tido exposição prévia ao conteúdo de logaritmos e exponenciais antes da faculdade. Isso pode ter contribuído para a incapacidade de P5 de identificar que o problema envolve uma função exponencial, e não uma função linear. A questão abordava um problema típico de crescimento exponencial, e a ausência de uma base sólida nesse conteúdo provavelmente influenciou o desempenho de P5.

Além disso, a resposta de P5 reflete a análise geral da compreensão conceitual dos participantes, onde 80% demonstraram dificuldades em explicar a relação entre funções logarítmicas e exponenciais. Essa lacuna de entendimento é evidente na resposta de P5, que não reconheceu a necessidade de aplicar conceitos de exponenciais para modelar o crescimento populacional.

Do ponto de vista teórico, a resposta de P5 ilustra bem o conceito de registros de representação discutido por Duval (2009). P5 não conseguiu passar do registro verbal, que descreve o problema em termos de crescimento, para o registro algébrico correto, que exigiria a formulação de uma equação exponencial para representar o crescimento de 10% ao ano. A resposta de P5 ("$10\ +\ 10t$") sugere que houve uma tentativa de modelar o crescimento, mas sem a compreensão de que o crescimento acumulado não pode ser simplesmente somado ano a ano, como se fosse uma progressão aritmética. Isso é uma demonstração clara da dificuldade em alternar entre registros de representação, essencial para a compreensão matemática adequada.

Figura 37 - Resposta de P9 a questão 5. *(“t.0,1*$\Rightarrow\ \frac{1}{10}\Rightarrow\frac{t}{10}t\ \Rightarrow\ t^{\frac{t}{10}}$ *“)*



Fonte: O autor (2024).

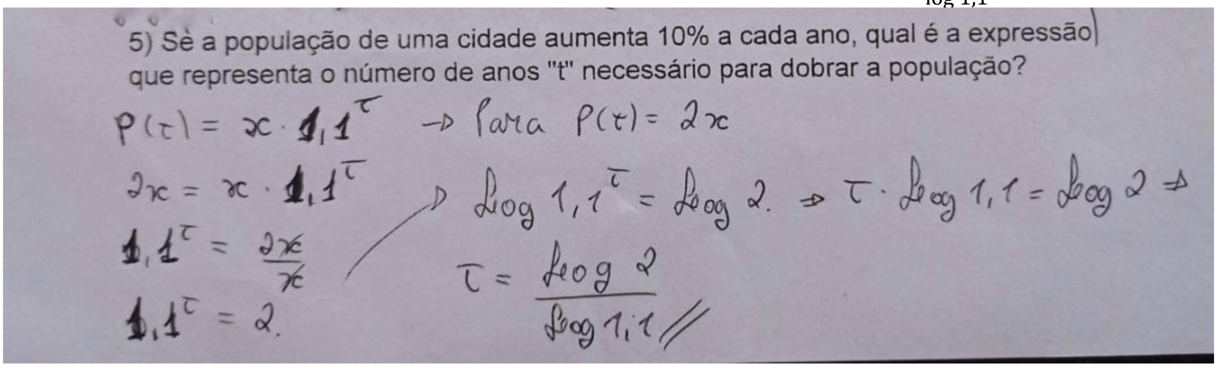
A análise da resposta de P9 à questão 5 demonstra uma tentativa confusa de resolver o problema, que envolve um crescimento populacional exponencial. A resposta de P9 ("*t.0,1*$\Rightarrow\ \frac{1}{10}\Rightarrow\ \frac{t}{10}t\ \Rightarrow\ t^{\frac{t}{10}}$") revela um raciocínio desconexo, sem uma compreensão clara do conceito de exponencial ou logaritmo.

P9 parece ter iniciado o processo pensando no crescimento de 10%, ao multiplicar o tempo por $0{,}1$, $(0{,}1t)$, o que indica uma tentativa de lidar com o aumento percentual. No entanto, essa abordagem rapidamente se desconecta da lógica correta ao evoluir para "$t^{\frac{t}{10}}$", uma expressão sem relação com o problema de crescimento exponencial que deveria ser resolvido. Isso reflete uma dificuldade significativa em aplicar os conceitos matemáticos corretos ao problema.

Os resultados do *questionário 1 (diagnóstico)*, revelam que 80% dos participantes não conseguiram explicar corretamente a relação entre funções logarítmicas e exponenciais. Esse dado reflete uma lacuna conceitual evidente na resposta de P9, que não compreendeu a natureza do problema e tentou resolver de forma errônea.

A partir da perspectiva de Duval (2009), a dificuldade de P9 pode ser vista como uma incapacidade de operar adequadamente com os diferentes registros de representação. P9 ficou preso ao registro algébrico, sem conseguir traduzir o problema de aplicação para uma forma que representasse corretamente o crescimento exponencial da população. Ao não entender a relação entre o aumento percentual e o tempo necessário para dobrar a população, P9 falhou em alternar entre os registros, como Duval sugere ser necessário para uma compreensão completa e adequada de conceitos matemáticos.

Figura 38 - Resposta do p13 a questão 5. *(“p(t)=x(*$1{,}1^t$*); 2x=x(*$1{,}1^t$*);* $1{,}1^t = \frac{2x}{x}$; $1{,}1^t$*=2.* ⇒ $Para\ p(t) = 2x; \log_{1,1} t = \log 2 \Rightarrow t \log 1{,}1 = \log 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}1}$”)


5) Se a população de uma cidade aumenta 10% a cada ano, qual é a expressão que representa o número de anos "t" necessário para dobrar a população?

$p(t) = x \cdot 1{,}1^t \rightarrow$ Para $p(t) = 2x$

$2x = x \cdot 1{,}1^t$ $\rightarrow \log 1{,}1^t = \log 2 \rightarrow t \cdot \log 1{,}1 = \log 2 \rightarrow$

$1{,}1^t = \frac{2x}{x}$ $\qquad t = \frac{\log 2}{\log 1{,}1}$ //

$1{,}1^t = 2.$

Fonte: O autor (2024).

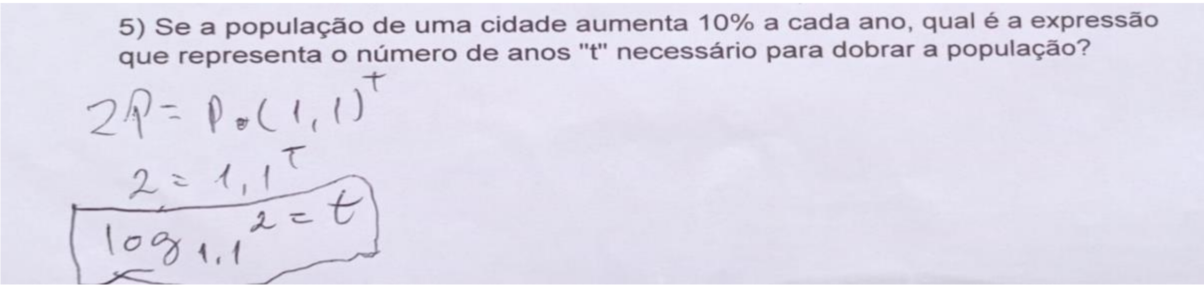
A resposta de P13 à questão 5 revela uma compreensão sólida do conceito de crescimento exponencial e da aplicação correta dos logaritmos. P13 estruturou a solução de forma didática, demonstrando um raciocínio claro ao passar pela resolução do problema. Primeiramente, P13 inicia com a expressão que representa o crescimento populacional: $p(t) = x(1{,}1^t)$*;* onde (x) é a população inicial e $(1{,}1^t)$; representa o crescimento a cada ano. Ao igualar a expressão para o dobro da população, $2x = x(1{,}1^t)$, P13 mostra um entendimento correto da equação exponencial necessária para resolver o problema.

P13 segue com a transformação algébrica ao dividir ambos os lados por (x), resultando em $(1{,}1^t = 2)$. Aqui, P13 converte o problema de um registro exponencial para um registro logarítmico, aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação, o que é um procedimento correto e essencial para isolar a variável (t). Finalmente, P13 utiliza a propriedade dos logaritmos para encontrar o valor de (t), com a expressão final $t = \frac{\log 2}{\log 1{,}1}$, o que é a solução correta.

Essa resposta demonstra a habilidade de P13 em realizar a *conversão* entre a linguagem natural (descrição do problema) e a linguagem algébrica (equação exponencial), como sugere Duval (2009). P13 também mostra competência na transformação de tratamentos dentro do registro algébrico para o registro logarítmico, o que é fundamental para resolver problemas que envolvem crescimento exponencial.

Comparando com os dados do questionário diagnóstico, onde 80% dos participantes não conseguiram explicar corretamente a relação entre funções logarítmicas e exponenciais, P13 se destaca como um dos poucos que possui uma compreensão conceitual clara. Esse entendimento permitiu a P13 aplicar corretamente os conceitos de logaritmos e exponenciais para resolver o problema de aplicação, algo que a maioria dos outros participantes não conseguiu fazer.

Figura 39 - Resposta do P15 a questão 5. (“$2p = p(1{,}1)^t; 2 = 1{,}1^t;\ log_{1,1} 2 = t$ ")



Fonte: O autor (2024).

A resposta de P15 à questão 5 demonstra uma compreensão adequada do problema de crescimento exponencial, levando à formulação correta da equação e à sua resolução. P15 inicia corretamente com a equação $2p = p(1{,}1)^t$, onde (p) é a população inicial $e(1{,}1)^t$ representa o crescimento anual de 10%. Em seguida, P15 simplifica a equação para $(2 = 1{,}1^t)$, que é a forma correta de representar o crescimento populacional até dobrar. A partir daí, P15 aplica o logaritmo para resolver a equação exponencial, escrevendo corretamente $\log_{1,1} 2 = \mathrm{t}$.

Essa resposta evidencia uma compreensão clara da relação entre funções exponenciais e logarítmicas, e P15 faz a *conversão* correta da linguagem natural (a população dobra) para o registro algébrico (equação exponencial). Ao aplicar o logaritmo, P15 demonstra habilidade no tratamento dos registros matemáticos, conforme sugerido por Duval (2009).

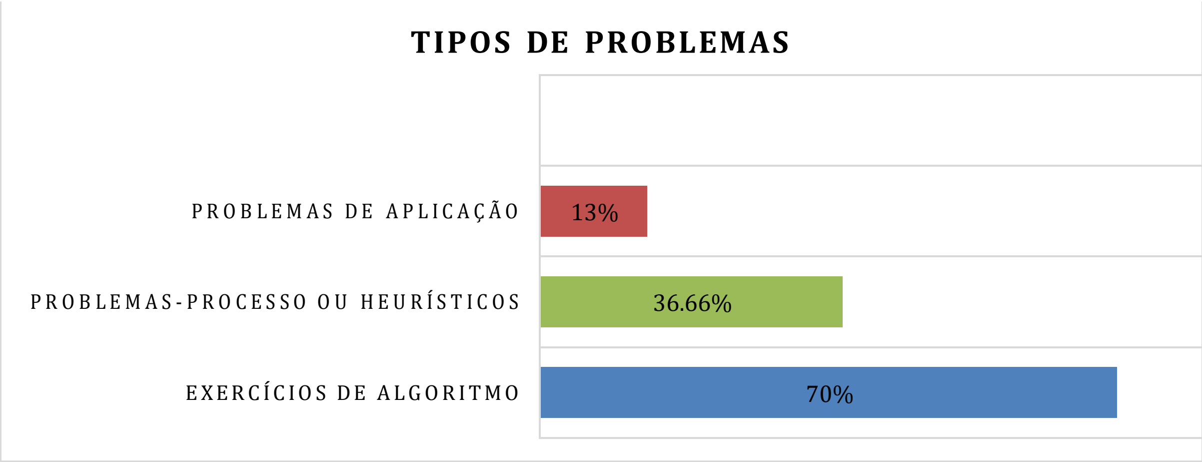
Em comparação com os dados do questionário diagnóstico, onde apenas 20% dos participantes demonstraram uma compreensão correta das funções logarítmicas e exponenciais, P15 está entre os poucos que conseguiram aplicar esses conceitos de maneira correta e eficiente.

Tabela 12 - Taxas de acerto por tipo de problema no questionário 02 sobre logaritmos

Tipo de Problema	Questões envolvidas	Total de Respostas	Total de Acertos	% de Acertos
Problemas-Processo ou Heurísticos	1 e 4	30	11	36,66%
Exercícios de Algoritmo	2 e 3	30	21	70%
Problemas de Aplicação	5	15	2	13.33%

Fonte: O autor (2024).

Gráfico 09 - Tipos de problemas



Fonte: O autor (2024).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo investigar o nível de conhecimento dos licenciandos de Matemática da UFPE sobre logaritmos, além de avaliar sua confiança ao ensinar esse conteúdo nas salas de aula. A pesquisa foi conduzida por dois questionários: um diagnóstico, que avaliou a familiaridade dos licenciandos com o tema logaritmos, e outro prático, que testou suas habilidades na resolução de questões relacionadas ao tema. Os resultados revelaram lacunas significativas tanto no conhecimento teórico quanto no prático, levantando preocupações sobre a preparação dos futuros professores para lidar com esse conteúdo em sala de aula.

Os dados demonstram que muitos licenciandos tiveram uma exposição limitada ao estudo de funções exponenciais e logaritmos no ensino médio, o que resultou em uma base conceitual insuficiente. Embora todos os participantes tenham relatado algum contato com logaritmos durante a graduação e, ao consultar o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de 2016 da Licenciatura em Matemática da UFPE/CAA, tenha sido confirmada a inclusão do estudo de logaritmos nas disciplinas de Matemática Básica e Matemática 1, oferecidas nos primeiros períodos do curso, essa exposição inicial não foi suficiente para suprir as lacunas conceituais dos estudantes. Essa deficiência foi refletida diretamente no desempenho em questões que exigiam maior compreensão teórica, como as questões heurísticas do Questionário 2. Por exemplo, a questão que pedia a definição de logaritmos, em palavras próprias, teve apenas 20% de acertos, evidenciando a dificuldade dos alunos em articular conceitos matemáticos de forma clara e precisa. Em contrapartida, as questões de cálculo algorítmico apresentaram um desempenho superior, com 70% de acertos, destacando um descompasso entre a execução de algoritmos e a compreensão conceitual mais ampla.

Além disso, a pesquisa revelou uma significativa insegurança por parte dos licenciandos quanto à sua capacidade de ensinar logaritmos. Cerca de 73,3% dos participantes se sentem pouco confiantes ou moderadamente confiantes para abordar esse conteúdo em sala de aula, o que reflete a necessidade de uma formação pedagógica mais robusta e prática. Essa insegurança está diretamente relacionada às lacunas de conhecimento conceitual identificadas, sugerindo que a formação atual privilegia a execução de algoritmos em detrimento da aplicação prática dos conteúdos.

Esse descompasso entre a execução mecânica de algoritmos e a compreensão conceitual não é um fenômeno isolado. Como apontado por Dante (2000), muitos estudantes conseguem realizar operações matemáticas, mas encontram dificuldades ao enfrentar problemas que exigem uma abordagem mais reflexiva. Esse ponto é especialmente relevante no caso dos logaritmos, um tema que exige tanto a manipulação algorítmica quanto a interpretação conceitual e a aplicação prática.

Diante desses resultados, fica clara a necessidade de uma revisão curricular nos cursos de formação de professores de Matemática, de modo a integrar teoria, prática e pedagogia de forma equilibrada. A inclusão de metodologias ativas, conforme recomendado pela BNCC, pode fortalecer a formação desses licenciandos, promovendo não apenas o domínio técnico, mas também a capacidade de aplicar os conceitos em contextos diversos. Programas de formação continuada e cursos de aperfeiçoamento focados em temas desafiadores, como os logaritmos, são essenciais para garantir que os futuros professores desenvolvam confiança e competência ao ensinar esse conteúdo.

Portanto, este estudo destaca a importância de uma abordagem educacional que vá além da mera instrução algorítmica, estimulando uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e sua aplicação prática. As dificuldades identificadas entre os licenciandos, tanto no domínio conceitual quanto na confiança em ensinar logaritmos, reforçam a necessidade de reformular o processo de formação docente, proporcionando uma educação mais integrada, reflexiva e prática.

Além disso, este trabalho focou nos conceitos básicos de logaritmos, e futuras pesquisas poderiam expandir esse escopo para incluir o estudo de funções logarítmicas. A investigação das habilidades dos licenciandos em representar e interpretar gráficos dessas funções seria uma contribuição valiosa para avaliar sua compreensão conceitual e prática. Ao desenvolver estratégias pedagógicas eficazes para o ensino de funções logarítmicas, essas pesquisas poderiam oferecer aos futuros professores o suporte necessário para lidar com esse conteúdo de forma mais confiante e aplicada em suas carreiras docentes.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Érico Felintro de et al. Uma proposta para o aprofundamento do ensino de logaritmos: as escalas logarítmicas. 2023.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996. 496 p. Tradução de Elza F. Gomide.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 12 de setembro de 2024.

BRIGGS, Henry. Arithmetica Logarithmica. 1624. Disponível em: https://archive.org/details/bim_early-english-books-1475-1640_arithmetica-logarithmica_briggs-h_1624/page/n297/mode/2up?view=theater. Acesso em: 12 set. 2024.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007. 654 p. Tradução de Lázaro Coutinho.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo: Editora Ática, 2000. 176 p. (Educação).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2008. 504 p.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p. Tradução Lênio Fernandes Levy.

EVES, Howard. **Introdução a História da matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004. 843 p. Tradução de Higyno H. Domingues.

FOREST, Marciano. **Ensino e aprendizagem de logaritmos através da resolução de problemas**. 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

HOBSON, E. W. **John Napier and the invention of logarithms, 1614**. Londres: Alpha Editions, 2019. 48 p.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 2004. 432 p. (1).

LIMA, Elon Lages. **LOGARITMOS**. Brasilia: Sbm, 1980. 142 p.

MAOR, Eli. **E: A História de um Número**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2006. 291 p. Tradução de Jorge Calife.

MENDES, Iran Abreu (org.). **A matemática no século de Andrea Palladio**. Natal: Edufrn, 2008. 194 p.

NAPIER, John. *Rabdologiae*. 1617. Disponível em: https://archive.org/details/rabdologiaseunu00napi/page/n11/mode/thumb?view=theater. Acesso em: 12 set. 2024.

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco**: Ensino Médio. 2021. Disponível em: https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2023/11/CURRICULO_DE_PERNAMBUCO_DO_ENSINO-MEDIO-2021_Final.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books, 2012. 216 p. Tradução de Mario Fecchio.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. *Projeto Pedagógico de Curso – Licenciatura em Matemática*. Disponível em: https://www.ufpe.br/documents/39114/0/PPC+2016+-+ementas2.pdf/46094a98-ec5d-4142-98b7-ea972fc41570. Acesso em: 15 set. 2024.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática**. São Paulo: Editora Scipione, 2009. 488 p.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO (01) DIAGNÓSTICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE/CAA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
ALUNO PESQUISADOR: HÉLIO IVANILDO PEREIRA
QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO SOBRE LOGARITMOS

ALUNO:

ANO.SEMESTRE:

1) Se você teve contato com funções exponenciais no ensino médio ou em algum outro momento anterior à faculdade, de 0 a 10, o quanto você considera que realmente aprendeu sobre o assunto? Por quê?

2) Você já teve alguma experiência anterior com logaritmos antes de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, onde?

3) Em quais disciplinas do curso de licenciatura em matemática você viu logaritmos?

4) Como as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam?

5) De 0 a 10, o quanto você se considera apto a ensinar logaritmos a seus alunos? Por quê?

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 02 (LOGARITMOS)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE/CAA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
ALUNO PESQUISADOR: HÉLIO IVANILDO PEREIRA
QUESTIONÁRIO DE LOGARITMOS

ALUNO:

ANO.SEMESTRE:

1) Com suas próprias palavras, descreva e explique o conceito de Logaritmos. Se possível, forneça exemplos de situações práticas em que o conceito de Logaritmos é aplicado.

2) Resolva $4^x = 1/64$.

3) Se log(x) = 2, qual é o valor de x?

4) Se o logaritmo de 16 em uma base específica é igual a 2, qual será o logaritmo de 32 nessa mesma base?

5) Se a população de uma cidade aumenta 10% a cada ano, qual é a expressão que representa o número de anos "t" necessário para dobrar a população?