Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ygor Dos Santos Souza

Problema de Leray em $\dot{H}^m$ para soluções do sistema MHD: uma prova direta

Recife

2020

Ygor Dos Santos Souza

Problema de Leray em $\dot{H}^m$ para soluções do sistema MHD: uma prova direta

Tese/Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestrado em Matemática.

Orientador: Cilon Valdez Ferreira Perusato

Recife

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Souza, Ygor dos Santos.
Problema de Leray em Hm para soluções do sistema MHD: uma prova direta. / Ygor dos Santos Souza. - Recife, 2020.
100 p

Orientador(a): Cilon Valdez Ferreira Perusato
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Inclui referências, apêndices.

1. área de concentração Análise. I. Perusato, Cilon Valdez Ferreira. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

YGOR DOS SANTOS SOUZA

PROBLEMA DE LERAY EM H^m PARA SOLUÇÕES DO SISTEMA MHD: UMA PROVA DIRETA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 30/10/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Robert Henrique Rodrigues Guterres (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos detalhadamente os resultados de decaimento assintótico das soluções do problema MHD para tempo grande, recentemente obtidos em [14]. Mais precisamente, supondo dados iniciais arbitrários em L^2, descrevemos o comportamento das soluções na norma $\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)$, para cada $m \geq 0$ (inteiro). Além disso, propomos uma prova mais direta (não observada pelos autores em [14]) usando uma desigualdade do tipo Sobolev recentemente descoberta em [5]. Foram incluídos ainda, por conveniência, a demonstração detalhada dessa desigualdade e outros resultados, tais como: estimativas auxiliares para equação do calor e desigualdades de Sobolev (bem conhecidas na literatura).

Palavras-chave: Problema de Leray, Taxas de decaimento. Comportamento assintótico. Desigualdades de Sobolev.

ABSTRACT

In this work we present (in full details) some results on the large-time decay for solutions to the MHD system, recently obtained in [14]. Precisely, we descriebed the $\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)$-decay for the solutions, under arbitrary data in L^2, for each $m \geq 0$ (integer). Moreover, we provide a direct proof (not observed by the authors in [14]) by using a new Sobolev-type inequality recently stablished in [5]. For convenience and self-containedness, we also include the proof of this inequality and present additional results, like auxiliary estimates for the Heat Equation and some well-known Sobolev inequalities.

Keywords: Leray's problem. Decay rates. Asymptotic behaviour. Sobolev inequalities.

Sumário

1 Introdução

A magneto-hidrodinâmica (MHD) é uma área de estudo da física-matemática que estuda a interação entre os fluidos em movimento e campos magnéticos, esses fluidos necessitam ter duas propriedades, serem condutores de eletricidade e não magnéticos, desta forma nos resta poucas opções como metais líquidos e gases ionizados quentes (plasmas). As equações de MHD são muito presente no dia a dia, seja a natureza ou por intermédio do ser humano, P.A. Davidson nos diz em [6] que:

> *Os campos magnéticos influenciam muitos fluxos naturais e artificiais. Eles são usados rotineiramente na industria para aquecer, bombear, agitar e elevar metais líquidos, além do campo magnético terrestre que é mantido pelo movimento do fluido no núcleo derretido da terra.*

O sistema MHD descrito acima é modelado através de um acoplamento das famosas equações de Navier-Stokes da Dinâmica dos Fluidos com as equações de Maxwell do Eletromagnetismo. Neste trabalho, estamos supondo que o nosso fluido em questão é incompressível. Desta forma, o sistema de equações pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (u \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \mu \Delta \vec{u} + (b \cdot \nabla)\vec{b} & (I) \\ \vec{b}_t + (u \cdot \nabla)\vec{b} = \nu \Delta \vec{b} + (b \cdot \nabla)\vec{u} & (II) \\ \nabla \cdot \vec{u}(\cdot, t) = 0 & (III) \\ \nabla \cdot \vec{b}(\cdot, t) = 0 & (IV). \end{cases} \tag{1.1}$$

Onde em (I), $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \to \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido, $\vec{b} : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \to \mathbb{R}^3$ é o campo magnético e $p : \mathbb{R}^3 \times [0,T) \to \mathbb{R}$ é a pressão total do fluido. Os parâmetros $\mu, \nu > 0$ são as constantes de viscosidade cinemática e de difusão magnética, respectivamente. A equação (III) representa a incompressibilidade fluido e, por fim, a equação (IV) é a chamada lei de Gauss do magnetismo.

Equações advindas da Dinâmica dos fluidos (ou de outros modelos físicos) são amplamente estudadas até os dias de hoje e compreender o comportamento qualitativo de suas soluções é o primeiro passo para compreender o fenômeno descrito por tais modelos. Desta forma, em 1934, Leray mostrou no seu popular artigo [12] a existência de soluções fracas (globais) de energia infinita $\vec{u}(\cdot,t) \in L^\infty([0,\infty), L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap C_\omega([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,\infty), \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ para equação de *Navier-Stokes* em $\mathbb{R}^3$. No entanto, infelizmente a unicidade dessas soluções e ainda a existência global de soluções clássicas são problemas em aberto, o que torna a compreensão teórica dessas soluções incompleta. Além disso, este problema pertence ao quadro de problemas do milênio, atribuídos pelo *Clay Mathematics Institute*. Veja a interessante nota descrita em [8] para maiores detalhes. Ainda em [12], Leray escreve na última página (p.248) do seu trabalho a seguinte *Nota Bene*:

J'ignore si $W(t)$ [1] tend nécessairement vers 0 quand t augmente indéfiniment.

Em outras palavras, se vale (ou não) que

$$\lim_{t\to\infty} ||\vec{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{1.2}$$

A essa propriedade iremos nos referir de **Problema de Leray**. Tal problema foi resolvido (positivamente) por T. Kato [10] e (posteriormente) por Masuda [13] no mesmo ano, somente cinquenta anos após a "conjectura" de Leray! Inclusive, a abordagem de K. Masuda se aplica a domínios mais gerais. Para maiores detalhes sobre as técnicas envolvidas nos dois trabalhos supracitados, recomenda-se a excelente revisão [2]. A partir daí, como já indicado no trabalho de Masuda, M.E. Schonbek [19] mostrou que para dados exclusivamente em L^2_σ o decaimento (para tempo grande) sem uma taxa uniforme é o melhor que pode ser esperado. Além disso, Schonbek [18] mostrou que ao considerar-se dados iniciais em $L^1 \cap L^2_\sigma$, se obtém um decaimento algébrico da ordem de $O(t^{-3/4})$.

[1] $W(t)$ é definido em [12] como quadrado da norma L^2 da solução $\vec{u}$ das equações de Navier-Stokes

O método, hoje conhecido como *Fourier Splitting* (FS), usado em [18] foi desenvolvido primeiramente em [17] para se obter taxas algébricas de decaimento para equações (leis de conservação) parabólicas.

O método *Fourier Splitting* se aplica a uma grande classe de sistemas difusivos e, em particular, ao sistema MHD. Por exemplo, em [1] os autores mostraram (usando *Fourier Splitting*) que as soluções do problema MHD satisfazem o problema de Leray para dados iniciais em L^2. Nesta dissertação, iremos provar este resultado, usando somente técnicas conhecidas até 1934 (ano do surgimento do problema de Leray) seguindo uma linha recentemente desenvolvida em [22] para a equação de Navier-Stokes. No capítulo 2, o leitor poderá encontrar esse resultado.

Há ainda diversas aplicações de FS para se estimar o comportamento das derivadas de ordem mais alta (**Problema de Leray em** $\dot{H}^m$), veja e.g. os trabalhos [20] e [21]. Dado o contexto histórico descrito acima, estamos em posição de enunciar nosso principal objeto de estudo. O objetivo central do nosso trabalho é mostrar *detalhadamente* que as soluções do sistema MHD satisfazem o problema de Leray em $\dot{H}^m$, mais precisamente, iremos mostrar que

$$t^{m/2}\|(D^m\vec{u}, D^m\vec{b})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0, \quad \text{para cada } m \geq 0 \text{ (inteiro)}. \tag{1.3}$$

ao $t \to \infty$. Para mostrar tal resultado se faz necessário traçar o seguinte caminho: no *Capítulo 1*, trabalhamos com a equação do calor afim de mostrar o problema de Leray, além de relembrar algumas propriedades importantes, como o Teorema de Plancherel (2.21), a igualdade de energia (2.27) e o decaimento de suas derivadas (2.29).

No *Capítulo 2*, começamos a trabalhar com o sistema (MHD) e estendemos as ideias feitas no capítulo anterior para as soluções do problema (MHD). Os resultados principais são as desigualdade de energia dos Teoremas (3.1) e (3.2) e o resultado de decaimento para primeira derivada Teorema (3.4). Este último é, inclusive, um ingrediente chave para provar o problema de Leray, veja o Teorema 3.7.

No *Capítulo 3*, provamos (detalhadamente) o principal resultado de [14], ou seja, o problema de Leray em $\dot{H}^m$ (1.3). Vale ressaltar que, usando uma desigualdade do tipo Sobolev recentemente obtida em [5], foi possível dar uma prova direta do problema de Leray em $\dot{H}^m$ aparentemente não observada pelos autores em [14]. Além disso, é interessante notar que através desta nova ferramenta, o decaimento das derivadas de ordem superior só depende do decaimento da norma L^2 da soluções e de sua primeira derivada, não usando o decaimento de outras derivadas como feito em [14]. Tal desigualdade foi provada e anexada no apêndice A (veja o Lema 2.1) por ter sua demonstração extensa.

N.B. 1. Como dito anteriormente, apesar de não se saber se as soluções do problema (MHD) são regulares para todo $t > 0$, pode-se mostrar a existência de um tempo de regularidade $t_* \gg 1$ (dependendo da condição inicial) tal que $(\vec{u}, \vec{b}\,) \in \mathbf{C}^\infty\,(\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty))$, veja [12] (na página 245), [14] (na página 14) ou [24] na página 655. Portanto, nos nossos cálculos estaremos considerando a região $\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty)$ a menos que dito o contrário.

N.B. 2. No nosso trabalho tentamos escrever os detalhes o máximo possível, não omitindo os passos das demonstrações. Porém, para um leitor experiente, mais familiarizado com os argumentos aqui apresentados, foram feitas algumas indicações nas demonstrações, o que poderá, portanto, encurtar a leitura do trabalho.

2 Preliminares e o decaimento $\dot{H}^m$ para a solução da equação do calor

A ideia principal deste capitulo é trazer à tona alguns resultados da literatura clássica sobre o decaimento da solução e de suas derivadas exclusivamente para equação do calor o que, desta forma, nos motiva a atacar o problema em MHD. Além disso, trouxemos algumas ferramentas preliminares que nos servirão de apoio em todo o texto. Para todo o desenrolar desse capítulo, vamos considerar $\vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto, a menos que seja dito o contrário.

2.1 Contexto Histórico

Na metade do século XVII, motivados pelo problema de vibração de cordas, matemáticos debateram sobre a expansão de funções arbitrária em séries trigonométricas. D'Alambert, Euler, Bernoulli e Lagrange desenvolveram a matemática da época e aproximaram do que é hoje conhecido como Série de Fourier. Utilizando a teoria dos antecessores, em 1807 Fourier submeteu seu primeiro trabalho a Academia Francesa, onde formalizou e solucionou o problema da condução de calor. Seu trabalho não foi aceito e um concurso foi feito para premiar quem solucionasse o problema. Em 1811, Fourier submeteu novamente seu trabalho, mas a banca julgadora mais uma vez resolveu não publicá-lo, alegando falta de rigor. A publicação dos seus trabalhos só ocorreu mais tarde, quando Fourier tornou-se secretário da Academia. Assim, a teoria de Fourier foi reconhecida, porém não finalizada, pois novos problemas surgiram a partir do seu trabalho. Equações diferenciais, Análise, Integral e teoria dos conjuntos foram alguns dos tópicos que desenvolveram-se ou aprimoraram-se depois da teoria de Fourier.

2.2 Ferramentas Preliminares e Notações

Nesta seção, desenvolvemos parte da teoria da transformada de Fourier, que fornece ferramentas extremamente poderosas para converter determinadas equações diferenciais parciais lineares em equações algébricas, equações diferenciais envolvendo menos variáveis ou até mesmo equações diferenciais ordinárias, que é inclusive o que ocorre com a equação do Calor, como veremos posteriormente. Para uma abordagem mais completa, veja [9], [11], [7], [3] e [5].

Notação. Como nos nossos resultados trabalhamos apenas com o caso tridimensional, nas nossas definições vamos definir as notações usando $n = 3$.

- $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$.
- $\vec{z}(x,t) = (\vec{u}, \vec{b})(x,t)$
- $\nabla \vec{u}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{3} D_i u_i(x,t)\hat{e}_i,$ denota o gradiente espacial de $\vec{u}(x,t)$.
- $\nabla \cdot \vec{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{3} D_i u_i(x,t)$ denota o divergente espacial de $u(x,t)$.
- $L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço das funções $\vec{u} \in L^p(\mathbb{R}^3),\ \textit{com}\ \nabla \cdot \vec{u} = 0$.

$|| \cdot ||_{L^q(\mathbb{R}^3)}$, com $1 \leq q < \infty$, denota a norma tradicional do espaço de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^3) = \{u :\ u$ é mensurável e $(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p)^{1/q} < \infty\}$, então podemos definir:

- $||\vec{u}(\cdot,t)||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \ = \ \left\{\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x,t)|^q dx\right\}^{1/q}$.
- $||D\vec{u}(\cdot,t)||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \ = \ \left\{\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i(x,t)|^q dx\right\}^{1/q}$.
- $||D^m\vec{u}(\cdot,t)||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \ = \ \left\{\sum_{i,j_1,\cdots,j_m=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |D_{j_1} \cdots D_{j_m} u_i(x,t)|^q dx\right\}^{1/q}$.

Porém se $q = \infty$, então ficamos com a definição do chamado supremo essencial de $u(x,t)$.

- $||\vec{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \ = \ \max ||u_i(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} : 1 \leq i \leq n.$

De maneira análoga podemos denotar $||D\vec{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}, ||D^2\vec{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, etc.

- $||(\vec{u},\vec{b})(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} := ||\vec{u}(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} + ||\vec{b}(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)}$.
- $||(D\vec{u},D\vec{b})(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} := ||D\vec{u}(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} + ||D\vec{b}(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)}$.
- $||(D^m\vec{u},D^m\vec{b})(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} := ||D^m\vec{u}(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} + ||D^m\vec{b}(\cdot,t)||^q_{L^p(\mathbb{R}^3)}$.

Sempre que $1 \leq q < \infty$. Se $q = \infty$,

$$||(D^m\vec{u},D^m\vec{b})(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \;=\; \max\{||D^m\vec{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}, ||D^m\vec{b}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\}$$

Seja $s \geq 0$,

- $||(\vec{u},\vec{b})(\cdot,t)||^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} := ||\vec{u}(\cdot,t)||^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} + ||\vec{b}(\cdot,t)||^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}$,

onde

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n} := \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\hat{f}|^2 d\xi$$

Observe que pelo Teorema de Plancherel (veja Teorema 2.21 abaixo), tem-se $\|D^m f\|_{L^2} = \|f\|_{\dot{H}^m}$, para cada $m \geq 0$ inteiro.

2.2.1 Teoremas de Análise

Lema 2.1. *Se uma função $f(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > t_*$ e $\int_0^\infty f(\cdot,s)ds < +\infty$ então $\liminf_{t\to+\infty} f(\cdot,t) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que:

$$||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \tau.$$

Para $\tau > 0$ constante. Assim existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que:

$$\int_{t_0}^{+\infty} ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \geq \int_{t_0}^{+\infty} \tau ds = +\infty.$$

O que contradiz a finitude da integral. Logo $\liminf ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. $\square$

Lema 2.2. *Se* $f \in L^p(E)$, *para* $1 \leq p \leq \infty$, *então dado* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto* $K \cup E$ *com* $|k| < \infty$ *tal que:*

$$||f||_{L^p(E)} \leq ||f||_{L^p(E)} + \varepsilon.$$

Demonstração. A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em [15]. □

Lema 2.3. *Se* $f \in L^p(\mathbb{E})$ *para* $1 \leq p \leq \infty$ *então dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $H \subset \mathbb{E}$ *e*

$$\mu(H) < \delta \Rightarrow \int_H |f|^p d\mu < \varepsilon.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma sequencia de conjuntos encaixados tal que $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E$, com

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ e } \int_{E_n} |f|^p d\mu \geq \varepsilon.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, logo $F_{n+1} \subset F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(F_n) < \dfrac{1}{2^{2-1}}$ com $\displaystyle\int_{F_n} |f|^p d\mu \geq \varepsilon$. Portanto temos que :

$$\mu\left(\bigcap_n^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} (F_n) = 0$$

e como a integral é uma medida, podemos fazer a seguinte manipulação

$$\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} |f|^p d\mu = \int_{\cap_n F_n} |f|^p d\mu = 0.$$

O que por sua vez é um absurdo. □

Teorema 2.4 (Teorema de Fubinni). *Seja* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para quase todo* $(x, y) \in (\Omega_1, \Omega_2)$ *temos:*

- $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *e* $\int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$
- $F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$ *e* $\int_{\Omega_1} F(x, y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$.

Além disso:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx.$$

Teorema 2.5 (**Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, tal que $f_n \to f$ q.t.p. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f \; dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n \; dx.$$

Teorema 2.6 (**Teorema da Convergência Monótona**). *Sendo (f_n) uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \boldsymbol{X})$ que converge para f, então*

$$\int f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu.$$

Teorema 2.7 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). *Sendo $f, g \in L^2(\Omega)$, então $f, g \in L^1(\Omega)$ e*

$$||f \cdot g||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)} ||g||_{L^2(\Omega)}$$

Teorema 2.8 (**Desigualdade de Hölder**). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $f, g \in L^p(\Omega)$ e*

$$||f \cdot g||_{L^p(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^q(\Omega)}$$

Teorema 2.9 (**Desigualdade de Minkovski**). *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, $f + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$||f + g||_{L^p(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^p(\Omega)}$$

Teorema 2.10 (**Identidades de Green**). *Seja Ω, um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega \in C^1$. Se $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, então:*

- $\displaystyle\int_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \; dV = \oint_{\partial\Omega} f\,(\nabla g \cdot \mathbf{n})\, dS = \oint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot d\mathbf{S} \;\; (IPP),$

- $\int_{\Omega} \Delta f dV = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, dS$
- $\int_{\Omega} (f\, \Delta g - g\, \Delta f)\ dS = \oint_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)\, dS.$

Onde $\mathbf{n}$*, é o vetor unitário exterior normal.*

Teorema 2.11 (**Teorema Fundamental do Cálculo**)**.** *[Parte 1] Se f for contínua em $[a,b]$, então a função F definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.
[Parte 2] Se f for contínua em $[a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Onde $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

2.2.2 Teoremas de Interpolação

Lema 2.12. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $D^n \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e mais ainda*

$$||f||_{L^\infty} \leq K(n)||f||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}||D^n f||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. A prova desse resultado pode ser encontrado em [16]. □

Lema 2.13. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para cada $p \leq q \leq \infty$ e , ainda,*

$$||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||^{\frac{p}{q}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Lema 2.14. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,*

$$||f * g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Lema 2.15 (Lema de interpolação)**.** *Sendo* $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$*, com* $s_1 > 0$*, então* $f \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ *para cada* $0 < s < s_1$*, com*

$$||f||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{s_1}} ||f||_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{s_1}}$$

Demonstração. Para mostrar esse lema, que será útil pera demonstração da próxima proposição, vamos usar a desilgualdade de Hölder para integrais, assim sendo $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ podemos relembrar a desigualdade:

$$\left|\left|\int_V f(x)g(x)\right|\right| \leq \left(\int_V |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

note que $2 = \frac{2}{p} + \frac{2}{q}$; assim pela desigualdade de *Hölder* temos:

$$\begin{aligned} ||f||^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{q}} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}})^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{q}})^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2ps} |\hat{f}(\xi)|^2)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^2) d\xi\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Fazendo $sp = s_1$:

$$||f||^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^2) d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s_1} |\hat{f}(\xi)|^2)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podemos observar que pelo fato $sp = s_1$, temos que $p = \frac{s_1}{s} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{s}{s_1}$; isso unido ao fato de p e q serem conjugados podemos reescrever a expressão:

$$||f||^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^2) d\xi\right)^{1-\frac{s}{s_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s_1} |\hat{f}(\xi)|^2)\right)^{\frac{s}{s_1}} = ||\hat{f}||^{1-\frac{s}{s_1}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||f||^{\frac{s}{s_1}}_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Mas por Plancherel(teorema 2.21, que será demonstrado futuramente) temos que $||\hat{f}(\xi)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f(\xi)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e segue o resultado. □

2.2.3 Desigualdades de Sobolev

Nesta seção apresentaremos algumas desigualdades de Sobolev (bem conhecidas) que serão úteis no decorrer do trabalho e, em particular, na demonstração (veja apêndice A) da desigualdade recentemente obtida em [5] e descrita como segue.

Lema 2.16 (P. Braz e Silva, J. Zingano e P. R Zingano, 2019)**.** *Sendo $m, l \in \mathbb{N}$ tais que $0 < l < m-1$ e $m \geq 1$, vale a seguinte desigualdade:*

$$||D^l z||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} ||D^{m-l} z||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||z||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||Dz||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||D^{m+1} z||_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad \forall z \in H^{m+1}. \tag{2.1}$$

Para obtê-la, faremos o uso de outras duas desigualdades descritas nos lemas abaixo.

Lema 2.17 (Taylor [23], p. 12)**.**

$$\|z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3} \leq \|z\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3} \|D^2 z\|^{3/4}_{L^2(\mathbb{R}^3}, \quad \forall z \in H^2. \tag{2.2}$$

Além disso, usando a transformada de Fourier, pode-se mostrar facilmente o seguinte lema.

Lema 2.18.

$$\|Dz\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|z\|^{1/2}_{L^2\mathbb{R}^3} \|D^2\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3}, \quad \forall z \in H^2. \tag{2.3}$$

2.2.4 Transformada de Fourier

Lema 2.19.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax-tx^2}dx = \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-a^2}{4b}}.$$

Demonstração. Façamos a substituição

$$z = xb^{\frac{1}{2}} - \frac{ai}{2b^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = b^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, calculando $-z^2$.

$$-z^2 = -\left(b^{\frac{1}{2}}x - \frac{ai}{2b^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = -\left(bx^2 - \frac{2b^{\frac{1}{2}}iax}{2b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{4b}\right) = \left(-bx^2 + iax + \frac{a^2}{4b}\right)$$

$$\Rightarrow -z^2 - \frac{a^2}{4b} = iax - bx^2.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax-bx^2}dx = \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}\int_{\Gamma} e^{-z^2-\frac{a^2}{4b}}dz = \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}\int_{\Gamma} e^{-z^2}e^{-\frac{a^2}{4b}}dz = \frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{b^{\frac{1}{2}}}\int_{\Gamma} e^{-z^2}dz.$$

Sendo $\Gamma = \left\{Im(z) = -a/2b^{\frac{1}{2}}\right\}$, note que com isso estamos apenas fazendo uma translação da reta real unindo isso ao fato que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \pi^{1/2}$ temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax-bx^2}dx = \frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{b^{\frac{1}{2}}}\int_{\Gamma} e^{-z^2}dz = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{a^2}{4b}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-a^2}{4b}}.$$

□

Definição 2.20 (Transformada de Fourier em L^1). .

Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $||u||_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|dx$ é finita, definimos a transformada de Fourier como sendo:

$$\hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}u(x)dx \ (y \in \mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

e a inversa é definida da forma

$$\check{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} u(x) dx \ (y \in \mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$

Sempre que $||e^{\pm xy}|| = 1$ *essas integrais são finitas para cada* $y \in \mathbb{R}^n$*.*

Vamos agora estender as definições acima pra quando temos uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para isso é necessário o seguinte teorema:

Teorema 2.21 (**Teorema de Plancherel**)**.** *Se* $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *então* $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e ainda*

$$||\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\check{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Vamos dividir essa demonstração em duas partes, a primeira é mostrar que se $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(y)\hat{w}(y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)w(x)dx. \tag{2.6}$$

e a segunda parte será usar a primeira para mostrar o resultado. Para demostrar a primeira parte é suficiente que se $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pois se $||\hat{v}||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ é finita então o supremo essencial $\|\hat{v}\|_{L^\infty} = \operatorname{esssup}(\hat{v}) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \in X \mid \|\hat{v}\|_{L^\infty} > a\}) = 0\}$. existe, e com isso $\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
||\hat{v}(y)||_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} v(x)\ dx \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\underbrace{\leq}_{Holder(2.8)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} ||e^{-ixy} v(x)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ dx \\
&\underbrace{\leq}_{C-S(2.7)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} ||e^{-ixy}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} ||v(x)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ dx \\
&\underbrace{\leq}_{(||e^{-ixy}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} ||v(x)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ dx.
\end{aligned}$$

Como $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ segue que $||\hat{v}(y)||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||v(x)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Para terminar a primeira parte vamos mostrar a igualdade $\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)w(x)dx$.

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} v(x)(\hat{w}(x))\ dx \\
\underbrace{=}_{Def(2.4)} & \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} v(x)w(y)\ dydx \\
\underbrace{=}_{Fubini(2.4)} & \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} v(x)w(y)\ dxdy \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} w(y) \left(\frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} v(x)dx \right) dy \\
\underbrace{=}_{Def(2.4)} & \int_{\mathbb{R}^n} w(y)\hat{v}(y)dy.
\end{aligned}
$$

Mostrando a segunda parte do resultado. Seja $v_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon||x||^2}$ com $\varepsilon > 0$ temos:

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_\varepsilon(y) \underbrace{=}_{Def(2.4)} & \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} v_\varepsilon(x)\ dx \\
= & \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} e^{-\varepsilon||x||^2}\ dx \\
\underbrace{=}_{Lema(2.19)} & \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} e^{-\frac{||y||^2}{4\varepsilon}} = \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{n/2} e^{-\frac{||y||^2}{4\varepsilon}}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Seja $\varepsilon > 0$, podemos fazer a seguinte manipulação: por (2.6) e (2.7) temos:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon(y)\hat{w}(y)dx \\
\underbrace{=}_{Igualdade(2.6)} & \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}_\varepsilon(x)w(x)dx \\
\underbrace{=}_{Igualdade(2.7)} & \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||y||^2}{4\varepsilon}} w(x)dx.
\end{aligned}
$$

Agora tomamos $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e definimos $v(x) := \overline{u}(-x)$. Seja $w := u * v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, com isso, $\hat{w}(y) = (u \hat{*} v) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{v}$. Essa propriedade será demostrada mais abaixo.

$$\begin{aligned}\hat{w}(y) &= (2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{v}\\ \underbrace{=}_{Def(2.4)} &(2\pi)^{n/2}\hat{u}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}v(x)\ dx\\ = \hat{u}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}v(x)\ dx = \hat{u}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}\overline{u}(-x)dx &= (2\pi)^{n/2}||\hat{\overline{u}}||^2.\end{aligned}$$

Como w é contínua podemos aplicar o limite fazendo $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-||x||^2}{4\varepsilon}}w(x)\ dx\\ \underbrace{=}_{(z=\frac{x}{\sqrt{4\varepsilon}})} &\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||z||^2}w(x)(4\varepsilon)^{n/2}\ dz\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(2)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||z||^2}w(x)\ dz\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(2)^{n/2}w(x)(\pi)^{n/2}\\ &= (2\pi)^{n/2}\lim_{\varepsilon\to 0}w(x) = (2\pi)^{n/2}w(0).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por fim, sabemos que $\hat{w} = (2\pi)^{n/2}||\hat{\overline{u}}||^2 \geq 0$, fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que $\hat{w}$ é integrável, assim:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{w}(y)dy = (2\pi)^{n/2}w(0).$$

Com isso;

$$\int_{\mathbb{R}^n}||\hat{\overline{u}}(y)||^2dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n}u(x)v(-x) = \int_{\mathbb{R}^n}||u(x)||^2.$$

$\square$

Observação 2.22 (**Transformada de Fourier Para o Espaço** $L^2(\mathbb{R}^n)$). *Agora com posse do teorema (2.21), podemos definir ou estender a transformada de Fourier para funções do tipo $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Para isso seja definida a sequência $u_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ onde $u_k \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema (2.21) temos que :*

$$||\hat{u_k} - \hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u_k \hat{-} u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u_k - u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Pelo fato de $u_k \to u$ temos que $\hat{u_k} \to \hat{u}$ e com isso temos a extensão da transforada de Fourier para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.23 (**Propriedades da Transformada de Fourier**). *Seja as funções $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então vale a propriedades:*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)\hat{\overline{v}}(y)dy$;
2. $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}$;
3. $\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{v}$;
4. $u = \check{\hat{u}}$.

Demonstração. Seja $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então pelo teorema (2.21) temos:

$$||u + \alpha v||^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{u + \alpha v}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\hat{u} + \alpha\hat{v}||^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Por definição da norma L^2, podemos:

$$
\begin{aligned}
||u+\alpha v||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= ||\hat{u}+\alpha\hat{v}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
\int_{\mathbb{R}^n} |u+\alpha v|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}+\alpha\hat{v}|^2 dy\\
\int_{\mathbb{R}^n} (u+\alpha v)\overline{(u+\alpha v)}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u}+\alpha\hat{v})\overline{(\hat{u}+\alpha\hat{v})}dy\\
\int_{\mathbb{R}^n} (u+\alpha v)(\overline{u}+\overline{\alpha v})dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u}+\alpha\hat{v})(\hat{\overline{u}}+\overline{\alpha\hat{v}})dy\\
\int_{\mathbb{R}^n} (||u||^2+||\alpha v||^2+\overline{u}(\alpha v)+u(\overline{\alpha v}))dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (||\hat{u}||^2+\hat{u}(\alpha\hat{v})+\hat{\overline{u}}(\alpha\hat{v})+||\alpha\hat{v}||^2)dy\\
||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+||\alpha v||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&+\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{u}(\alpha v)+u(\overline{\alpha v}))dx\\
=||\hat{u}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+||\alpha\hat{v}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&+\int_{\mathbb{R}^n}(\hat{\overline{u}}(\alpha v)+\hat{u}(\alpha\hat{\overline{v}}))dy.
\end{aligned}
$$

Onde fazendo $\alpha = 1, i$ e novamente pelo teorema 2.21, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\overline{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\hat{\overline{v}}dy.$$

O que mostra a propriedade 1, às vezes também chamada de *identidade de Parseval.*

□

2. Vamos mostrar essa propriedade usando indução em α. Note que:

$$\widehat{D^\alpha u(y)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}D^\alpha(u(x)).$$

Sendo $\alpha = 1$ temos:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}D(u(x)).$$

Usando integração por partes unido ao fato que a função $u(x)$ possui suporte compacto, nos resta que:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - (-iy)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}u(x)dx = (iy)\hat{u}(y).$$

Supondo por indução que a igualdade é valida pra $\alpha = k$ resta mostrar que:

$$\widehat{D^{k+1}u(y)} = (iy)^{n+1}\hat{u}(y).$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio anterior temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{D^{k+1}u(y)} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}D^{k+1}(u(x)) \\
= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\partial\mathbb{R}^n} e^{-ixy}D^{k}(u(x))ds(x) &- \int_{\mathbb{R}^n}(-iy)e^{-ixy}D^{k}(u(x))dx \\
&= (iy)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}D^{k}(u(x))dx \\
&= (iy)\widehat{D^{k}(u(y)})) \\
&\underbrace{=}_{(H.I.)}(iy)(iy)^{k}\hat{u}(y) = (iy)^{k+1}\hat{u}(y).
\end{aligned}$$

□

Antes de trazer a demonstração do item 3, Precisamos da seguinte definição:

Definição 2.24 (Convolução). *Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ temos*

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Definida o que seria uma convolução entre duas funções podemos seguir com a demonstração da propriedade.

$$\begin{aligned}
\widehat{(u*v)}(y) &= \frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}(u*v)(x)\ dx \\
\underbrace{=}_{Def(2.24)} &\frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-z)v(z)dz\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}u(x-z)v(z)\ dzdx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z)y} e^{-izy} u(x-z)v(z)\ dzdx \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.4)} &\frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z)y} e^{-izy} u(x-z)v(z)\ dxdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy} v(z) \left(\frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z)y} u(x-z) \right) dxdz \\
&= \hat{u}(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy} v(z) dz \\
&= 2\pi^{n/2} \hat{u}(y)\hat{v}(y).
\end{aligned}
$$

□

4.

$$
\check{\hat{u}}(x) = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} (\hat{u}(y)) dy
$$

$$
= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} \left(\frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(x) dx \right) dy = u(x).
$$

□

2.3 Equação do Calor

Com os fatos básicos apresentados anteriormente, vamos finalmente relembrar alguns resultados da equação do calor que nos ajudarão a atacar os problemas referentes ao sistema MHD.

Seja $u(x,t)$ uma função que nos diz a temperatura numa posição x em um certo instante de tempo t numa barra de região ω. Se $U \in \omega$ é qualquer semi - região com fronteira suave, pelo principio de conservação de energia, a taxa de variação da temperatura em U é igual ao negativo do fluxo para fora da região U através da fronteira ∂U, ou seja:

$$
\frac{d}{dt} \int_U u(x,t) dx = - \oint_{\partial U} F \cdot \eta ds(x),
$$

onde F é conhecida como a densidade de fluxo. Pelo teorema da divergência temos:

$$\frac{d}{dt}\int_U u(x,t)dx = -\int_U divF dx.$$

Sendo $u(x,t)$ uma função diferenciável, temos:

$$u_t(x,t) = -divF(x).$$

Em muitas situações, F é proporcional ao gradiente de u, mas aponta na direção oposta (já que o fluxo é proveniente de regiões de maior para menor concentração), podemos então supor que:

$$F(x) = -\nabla u(x,t).$$

O que nos fornece a conhecida equação do calor:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0. \tag{2.9}$$

2.3.1 Solução Fundamental da equação do Calor

Nesta seção vamos usar as propriedades da transformada de Fourier descritas anteriormente para encontrar a solução (explícita) para o problema de Cauchy abaixo. Tal solução é chamada de **Solução Fundamental da Equação do Calor** ou Núcleo do calor.

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \\ u(\cdot,0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{2.10}$$

Supondo que $u(x,t)$ é solução do problema (2.10), deve-se ter que $u(x,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pois, como dito anteriormente, usaremos a transformada de Fourier em L^2. O lema abaixo garante esta propriedade.

Lema 2.25. *Se* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *então* $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $, \forall t > 0.$

Demonstração. A prova desse lema (e de outros resultados fundamentais) pode ser encontrada em [4].

□

Agora, em posse do Lema 2.25, iremos encontrar a solução fundamental da equação do calor. Para tal, vamos aplicar a transformada de Fourier (formalmente) no problema (2.10).

$$\begin{cases} \widehat{u_t(y,t)} - \Delta\widehat{u(y,t)} = 0, \\ \widehat{u(y,0)} = \hat{u_0} \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Usando a transformada inversa de Fourier é possível "recuperar" a $u(x, t)$, o que nos leva a seguinte expressão:

$$u(x,t) = (\hat{u_0} e^{-t|y|^2})^{\vee}.$$

Assim, temos que a solução fundamental é dada por:

$$u(x,t) = \frac{u_0 * F}{2\pi^{n/2}}. \tag{2.11}$$

Onde $\hat{F} = e^{-t|y|^2}$. Então, basta recuperarmos a função F.

$$\begin{aligned} F = (e^{-t|y|^2})^{\vee} &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} e^{-t|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2} dy \end{aligned}$$

Fazendo $a = x$ e $b = t$ no Lema 2.19, temos:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-|x|^2/4t} = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} \end{aligned}$$

O que recupera a lei da função F . Agora, basta substituirmos na equação (2.11) para encontrar a solução procurada.

$$u(x,t) = \frac{1}{(2t)^{n/2}} \frac{u_0 * e^{-|x|^2/4t}}{2\pi^{n/2}} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{2.12}$$

E com isso temos a expressão (2.12) que é chamada de **Solução Fundamental da Equação do Calor**. Para provar (rigorosamente) os principais resultados aqui apresentados, usaremos frequentemente o uso de funções de corte, o que introduz o lema abaixo.

Lema 2.26. *Se $f_\varepsilon(x)$ a função de corte definida da seguinte forma:*

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}, & ||x|| < R \\ 0, & ||x|| \geq R. \end{cases} \tag{2.13}$$

Então,

$$\Delta f_\varepsilon(x) = \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left[\frac{\varepsilon ||x||^2}{(1+||x||^2)} - \frac{1}{(1+||x||^2)^{3/2}} \right]. \tag{2.14}$$

Demonstração. Vamos derivar em relação a x_i duas vezes e depois somar em i. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left(-\varepsilon \frac{x_i}{\sqrt{1+||x||^2}} \right).$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} f_\varepsilon(x) &= e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left(\frac{x_i}{\sqrt{1+||x||^2}}\right)\left(\frac{x_i}{\sqrt{1+||x||^2}}\right) \\
&+ e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left(-\varepsilon\left[\frac{\sqrt{1+||x||^2} - x_i \frac{x_i}{\sqrt{1+||x||^2}}}{1+||x||^2}\right]\right) \\
= e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left(\varepsilon^2 \frac{x_i^2}{1+||x||^2}\right) &+ e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left(\frac{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2} + \frac{\varepsilon {x_i}^2}{\sqrt{1+||x||^2}}}{1+||x||^2}\right) \\
&= e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left[\left(\frac{\varepsilon^2 {x_i}^2}{1+||x||^2}\right) + \left(\frac{-\varepsilon(1+||x||^2) + \varepsilon {x_i}^2}{(1+||x||^2)^{3/2}}\right)\right] \\
&= \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left[\frac{\varepsilon {x_i}^2}{1+||x||^2} + \frac{-1-||x||^2 + {x_i}^2}{(1+||x||^2)^{3/2}}\right] \\
&= \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left[\frac{\varepsilon {x_i}^2 (1+||x||^2)^{1/2} - 1 - ||x||^2 + {x_i}^2}{(1+||x||^2)^{3/2}}\right].
\end{aligned}
$$

Somando em i temos o seguinte resultado.

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} f_\varepsilon(x) = \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}} \left[\frac{\varepsilon ||x||^2}{(1+||x||^2)} - \frac{1}{(1+||x||^2)^{3/2}}\right].
$$

□

2.4 Resultados de decaimento para equação do calor

Vamos apresentar alguns resultados de decaimento bem estabelecidos na literatura para o núcleo do calor.

Proposição 2.27 **(Igualdade de Energia para o Núcleo do Calor).** *Se $u(\cdot,t)$ é solução do problema* (2.10)*, então vale a seguinte igualdade de energia.*

$$
||u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^{t} ||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t > t_0
$$

para todo $t_0 \geq 0$.

Demonstração. Considere a função de corte $f_\varepsilon(x)$ definida como no lema anterior e multiplicamos ambos os lados do problema (2.10) por $2u(\cdot,t)f_\varepsilon(x)$ temos:

$$2u(\cdot,t)u_t(\cdot,t)f_\varepsilon(x) = 2u(\cdot,t)\Delta u(\cdot,t)f_\varepsilon(x)$$

Integrando na região $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ temos:

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot,\tau)u_t(\cdot,\tau)f_\varepsilon(x)\ dxd\tau}_{(I)} = \underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot,\tau)\Delta u(\cdot,t)f_\varepsilon(x)\ dxd\tau}_{(II)}$$

Vamos resolver as integrais termo a termo separadamente. Para o termo (I) vamos dividir a integral dentro e fora da bola $||x|| < R$ ficando assim com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
(I) = \int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||<R} 2u(\cdot,\tau)u_t(\cdot,\tau)f_\varepsilon(x)\ dx + \int_{||x||\geq R} 2u(\cdot,\tau)u_t(\cdot,\tau)f_\varepsilon\ dx\right) d\tau \\
\underbrace{=}_{Def(2.13)} \int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R} 2u(\cdot,\tau)u_\tau(\cdot,\tau)f_\varepsilon(x)\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.4)} \int_{||x||<R}\int_{t_0}^{t} 2u(\cdot,\tau)u_\tau(\cdot,\tau)f_\varepsilon(x)\ d\tau dx \\
\underbrace{=}_{(\frac{\partial}{\partial\tau}u^2 = 2uu_\tau)} \int_{||x||<R}\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial\tau}(u^2(\cdot,\tau))f_\varepsilon(x)\ d\tau\ dx \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.11)} \int_{||x||<R} f_\varepsilon(x)(u^2(\cdot,t) - u^2(\cdot,t_0))\ dx.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Podemos observar que os termos do primeiro membro da expressão são bem parecidos com os termos procurados; tendo isso em mente vamos trabalhar com o segundo membro da expressão usando os mesmos argumentos ao dividir a integral dentro e fora da bola $||x|| < R$ e vamos usar o *item* 2 do Teorema(2.10) que chamamos de integração por partes.

$$
\begin{aligned}
(II) &= \int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R} 2u(\cdot,\tau)\Delta u(\cdot,\tau) f_\varepsilon \ dx d\tau \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.10)} & 2\int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||=R} u(\cdot,\tau) f_\varepsilon \nabla\cdot u(\cdot,\tau)\ dS(x) - \int_{||x||<R}\nabla u(\cdot,\tau)\nabla[u(\cdot,\tau)f_\varepsilon]\ dx\right) d\tau \\
\underbrace{=}_{Def(2.13)} & -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}\nabla u(\cdot,\tau)\nabla[u(\cdot,\tau)f_\varepsilon]\ dx d\tau.
\end{aligned}
$$

Lembrando que vale a propriedade do produto pra o gradiente, ou seja, $\nabla[u(x)v(x)] = \nabla u(x)v(x) + u(x)\nabla v(x)$. Usando essa propriedade no termo acima temos:

$$
-2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}\nabla u(\cdot,\tau)\left[\nabla u(\cdot,\tau)f_\varepsilon(x) + u(\cdot,\tau)\nabla f_\varepsilon(x)\right]\ dx d\tau \tag{2.16}
$$

Assim podemos juntar os termos (2.15) e (2.16) ficando com a seguinte expressão :

$$
\begin{aligned}
\int_{||x||<R} f_\varepsilon(u^2(\cdot,t) - u^2(\cdot,t_0))\ dx &= -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}\nabla u\left[\nabla u f_\varepsilon + u\nabla f_\varepsilon\right]\ dx d\tau \\
\int_{||x||<R} u^2(\cdot,t) f_\varepsilon\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}\langle\nabla u,\nabla u\rangle f_\varepsilon\ dx d\tau &= \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t_0) f_\varepsilon\ dx \\
& - \int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}\langle 2u\nabla u,\nabla f_\varepsilon\rangle\ dx d\tau \\
\int_{||x||<R} u^2(\cdot,t) f_\varepsilon\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}||\nabla u||^2 f_\varepsilon\ dx d\tau &= \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t_0) f_\varepsilon\ dx \\
-\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}\langle\nabla u^2,\nabla f_\varepsilon\rangle\ dx d\tau \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t) f_\varepsilon dx &+ 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R}||\nabla u||^2 f_\varepsilon\ dx d\tau \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.10)} \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t_0) f_\varepsilon\ dx - \int_{t_0}^{t} & \left(\int_{||x||<R} u^2\Delta f_\varepsilon\ dx - \int_{||x||=R} u^2\langle\nabla f_\varepsilon,\mathbf{n}\rangle\ dS(x)\right) d\tau
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{||x||<R} u^2(\cdot,t) f_\varepsilon \; dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R} ||\nabla u||^2 f_\varepsilon \; dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{Lema (2.26)} \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t_0) f_\varepsilon \; dx \\
&+ \int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||<R} u^2 \Delta f_\varepsilon \; dx - \int_{||x||=R} u^2 \langle -\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}\left(\sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}}\right), \mathbf{n}\rangle \; dS(x)\right) d\tau \\
&\int_{||x||<R} u^2(\cdot,t) f_\varepsilon \; dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R} ||\nabla u||^2 f_\varepsilon \; dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{(\mathbf{n}=x/R)} \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t_0) f_\varepsilon \; dx \\
&+ \int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||<R} u^2 \Delta f_\varepsilon \; dx - \int_{||x||=R} u^2 \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}} \frac{x}{\sqrt{1+R^2}} \; dS(x)\right)\right) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

A ideia agora é fazer $R \to \infty$, para isso, precisamos ter um certo cuidado com o termo de fronteira. Pelo Lema 2.25, temos que $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja:

$$
\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,\tau) \; dx d\tau < +\infty, \; para \; cada \; t > t_0 \; fixo.
$$

Por outro lado, reescrevendo esse termo usando coordenadas polares, podemos estimar melhor o termo de fronteira.

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,\tau) \; dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{(Coordenadas \;\; Polares)} \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{+\infty}\int_{||x||=r} u^2(\cdot,\tau) \; dS(x) \; dr d\tau \\
&\underbrace{=}_{Teorema (2.4)} \int_{0}^{+\infty}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||=r} u^2(\cdot,\tau) \; dS(x) d\tau dr < +\infty
\end{aligned}
$$

Logo pelo Lema 2.1 temos:

$$\liminf_{r\to\infty}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||=r} u^2(\cdot,\tau)\ dS(x)d\tau = 0. \tag{2.19}$$

Agora tomando uma subsequencia $R_k \to \infty$, tem-se:

$$\lim_{R_k\to\infty}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||=R_k} u^2(\cdot,\tau)\ dS(x)d\tau = 0. \tag{2.20}$$

Note que $e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}} \leq 1$ e $\sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} \leq 1$, unindo esse fato a equação (2.18) temos:

$$\begin{aligned}\int_{||x||<R} u^2(\cdot,t)f_{R_k}\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R} ||\nabla u||^2 f_{R_k}\ dxd\tau \underbrace{=}_{(\mathbf{n}=x/R)} \int_{||x||<R} u^2(\cdot,t_0)f_{R_k}\ dx \\ + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||<R} u^2\Delta f_{R_k}\ dx - \int_{||x||=R} u^2\left(-\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}\sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}}\ dS(x)\right)\right)d\tau \\ \leq \varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{||x||=R} u^2(\cdot,\tau)\ dS(x)d\tau.\end{aligned}$$

Com isso temos que o termo de fronteira não vai divergir. Fazendo $R_k \to +\infty$ em (2.18), ficamos com a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lim_{R_k\to+\infty}\left(\int_{||x||<R_k} u^2(\cdot,t)f_{R_k}\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R_k} ||\nabla u||^2 f_{R_k}\ dxd\tau\right) = \\ \lim_{R_k\to\infty}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R_k}\Delta f_{R_k}u^2\ dxd\tau + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R_k} u^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+{R_k}^2}}\sqrt{\frac{{R_k}^2}{1+{R_k}^2}}\ dS(x)\right)d\tau \\ + \lim_{R_k\to\infty}\int_{||x||<R_k} u^2(\cdot,t_0)f_{R_k}\ dx.\end{aligned}$$

Como as integrais não dependem de R_k e pela Definição (2.13) o $\lim\limits_{R_k\to+\infty} f_{R_k} = e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}$ podemos fazer a seguinte manipulação:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t) \lim_{R_k\to+\infty} f_{R_k}\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} ||\nabla u||^2 \lim_{R_k\to+\infty} f_{R_k}\ dxd\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta \lim_{R_k\to+\infty} f_{R_k} u^2\ dxd\tau + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 \lim_{R_k\to+\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{1+{R_k}^2}}\sqrt{\frac{{R_k}^2}{1+{R_k}^2}}\ dS(x)d\tau$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t_0) \lim_{R_k\to+\infty} f_{R_k}\ dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t)e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} ||\nabla u||^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dxd\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}})u^2\ dxd\tau + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 \lim_{R_k\to+\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{1+{R_k}^2}}\sqrt{\frac{{R_k}^2}{1+{R_k}^2}}\ dS(x)d\tau$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t_0)e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dx.$$

Como $\sqrt{\frac{{R_k}^2}{1+{R_k}^2}} < 1$ e $\lim_{R_k\to+\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{1+{R_k}^2}} = 0$, podemos dizer que $\lim_{R_k\to+\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{1+{R_k}^2}}\sqrt{\frac{{R_k}^2}{1+{R_k}^2}} = 0$ e assim simplificar um pouco mais a expressão:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t)e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} ||\nabla u||^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dxd\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}})u^2\ dxd\tau + \int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t_0)e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t)e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dx + 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} ||\nabla u||^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\ dxd\tau$$
$$\underbrace{=}_{Lema(2.26)} \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}\left[\frac{\varepsilon||x||^2}{(1+||x||^2)} - \frac{1}{(1+||x||^2)^{3/2}}\right]u^2 dxd\tau$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\cdot,t_0)e^{-\varepsilon\sqrt{1+||x||^2}}dx.$$

Note que, sendo $0<\varepsilon<1$, temos que $|u\Delta(e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}})| \leq \varepsilon u$. Fazendo finalmente $\varepsilon \to 0$, pelo Teorema(2.5) temos:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|u\Delta(e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}})| \leq \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon u \to 0.$$

Por fim usando o Teorema(2.6) nos demais termos e como $e^0 = 1$ segue o resultado.

□

Vamos mostrar o lema abaixo afim de generalizar a proposição 2.27.

Lema 2.28. *Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então $\langle \nabla(g(x))f(x), \nabla(f(x))\rangle = \langle \nabla(g(x)), \nabla(f(x))f(x)\rangle$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(g(x))f(x), \nabla(f(x))\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}f(x), \cdots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}f(x)\right), \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)\right\rangle \\
&= \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}f(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}f(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}\right), \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}f(x), \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}f(x)\right)\right\rangle = \langle \nabla(g(x)), \nabla(f(x))f(x)\rangle$$

□

Corolário 2.29. *Vale também as igualdades para derivada da igualdade de energia para equação do calor:*

- $(t-t_0)||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||Du^2(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau = \int_{t_0}^{t}||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau;$
- $(t-t_0)^2||D^2u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^2||Du^3(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau$
  $= \int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2u(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau.$

Continuando sucessivamente;

- $(t-t_0)^m||D^mu(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^m||Du^{m+1}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau$
  $= \int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{m-1}||D^mu(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau.$

Demonstração. Vamos seguir os passos da demonstração anterior e assim, introduzir uma função de corte, derivar a equação do calor, multiplicar por $2(t-t_0)f_R(x)D_iu(\cdot,t)$ e por fim integrar na região $\mathbb{R}^n \times [t_0,t]$. Seja $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & ||x|| < 1 \\ \Phi(x), & 1 \leq ||x|| < 2 \\ 0, & ||x|| \geq 2 \end{cases}$$

Onde $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um função de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Dada definição de $f(x)$, seja $R > 0$ e com isso definimos a função $f_R(x)$ da seguinte forma:

$$f_R(x) := f\left(\frac{||x||}{R}\right) \tag{2.21}$$

Definida a função podemos seguir nosso roteiro de demonstração. Assim:

$$\begin{aligned} (D_iu(\cdot,t))_t &= \Delta(D_iu(\cdot,t)) \\ 2(t-t_0)f_R(x)D_iu(\cdot,t)(D_iu(\cdot,t))_t &= 2(t-t_0)f_R(x)D_iu(\cdot,t)\Delta(D_iu(\cdot,t)) \\ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^t 2(\tau-t_0)f_RD_iu(D_iu)_\tau \, d\tau dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^t 2(\tau-t_0)f_RD_iu\Delta(D_iu) \, d\tau dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Observe que $2D_iu(D_iu)_\tau = [(D_iu)^2]_\tau$. Com isso:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)f_R[(D_iu)^2]_\tau \, d\tau dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^t 2(\tau-t_0)f_RD_iu\Delta(D_iu) \, d\tau dx \\ \int_{||x||<2R}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)f_R[(D_iu)^2]_\tau \, d\tau dx \underbrace{=}_{Def(2.21)} & \int_{||x||<2R}\int_{t_0}^t 2(\tau-t_0)f_RD_iu\Delta(D_iu) \, d\tau dx \\ \underbrace{\int_{||x||<2R}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)f_R[(D_iu)^2]_\tau \, d\tau dx}_{(I)} &= \underbrace{\int_{||x||<2R}\int_{t_0}^t 2(\tau-t_0)f_RD_iu\Delta(D_iu) \, d\tau dx}_{(II)}. \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais termo a termo separadamente temos:

$$(I) = \int_{||x||<2R} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) f_R(x) [(D_i u(\cdot,\tau))^2]_\tau \; d\tau dx$$

$$\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)} \int_{||x||<2R} f_R(x)(t-t_0)(D_i u(\cdot,t))^2 \; dx - \int_{||x||<2R} \int_{t_0}^{t} f_R(x)(D_i u(\cdot,\tau))^2 \; d\tau dx. \tag{2.23}$$

$$(II) = \int_{||x||<2R} \int_{t_0}^{t} 2(\tau - t_0) f_R(x) D_i u(\cdot,\tau) \Delta(D_i u(\cdot,\tau)) \; d\tau dx$$

$$\underbrace{=}_{Teorema(2.4)} \int_{t_0}^{t} \int_{||x||<2R} 2(\tau - t_0) f_R(x) D_i u(\cdot,\tau) \Delta(D_i u(\cdot,\tau)) \; dx d\tau$$

$$= 2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) \int_{||x||<2R} f_R(x) D_i u(\cdot,\tau) \Delta(D_i u(\cdot,\tau)) \; dx d\tau.$$

$$\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)} 2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) \left(\int_{||x||=2R} f_R D_i u \nabla D_i u dS(x) - \int_{||x||<2R} \langle \nabla [f_R D_i u], \nabla D_i u \rangle dx \right) d\tau$$

$$\underbrace{=}_{Def(2.21)} -2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) \int_{||x||<2R} \langle \nabla [f_R(x) D_i u(\cdot,\tau)], \nabla D_i u(\cdot,\tau) \rangle \; dx d\tau$$

$$= -2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) \int_{||x||<2R} \langle \nabla f_R(x) D_i u(\cdot,\tau) + f_R(x) \nabla D_i u(\cdot,\tau), \nabla D_i u(\cdot,\tau) \rangle \; dx d\tau$$

$$= -2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) \int_{||x||<2R} \langle \nabla f_R(x) D_i u(\cdot,\tau), \nabla D_i u(\cdot,\tau) \rangle + \langle f_R(x) \nabla D_i u(\cdot,\tau), \nabla D_i u(\cdot,\tau) \rangle \; dx d\tau.$$

Usando o Lema(2.28) podemos caminhar um pouco mais para o resultado desejado.

$$
\begin{aligned}
&-2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}\langle\nabla f_R(x),\nabla D_iu(\cdot,\tau)D_iu(\cdot,\tau)\rangle+f_R(x)||\nabla D_iu(\cdot,\tau)||^2\ dxd\tau\\
&=-\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}\langle\nabla f_R(x),2D_iu(\cdot,\tau)\nabla D_iu(\cdot,\tau)\rangle+2f_R(x)||\nabla(D_iu(\cdot,\tau))||^2\ dxd\tau\\
&\underbrace{=}_{(\nabla[u^2]=2u\nabla u)}-\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}\langle\nabla f_R(x),\nabla[(D_iu(\cdot,\tau))^2]\rangle+2f_R(x)||\nabla(D_iu(\cdot,\tau))||^2\ dxd\tau\\
&=\underbrace{-\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}\langle\nabla f_R,\nabla[(D_iu)^2]\rangle\ dxd\tau}_{(III)}-2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}f_R||\nabla(D_iu)||^2\ dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
(III)&=-\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}\langle\nabla f_R(x),\nabla[(D_iu(\cdot,\tau))^2]\rangle\ dxd\tau\\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\left(-\int_{||x||=2R}(D_iu)^2\nabla f_R\ dS(x)+\int_{||x||<2R}(D_iu)^2\Delta f_R\ dx\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

Sabemos que $f_R\in C^2(\mathbb{R}^n)$, assim $\nabla f_R=0$ sempre que $||x||\geq 2$, com isso temos:

$$
\nabla f_R\Big|_{||x||=2R}=\lim_{||x||\to 2R^+}\nabla f_R=0
$$

Assim ficamos com o seguinte resultado:

$$
(III)=\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{||x||<2R}(D_iu(\cdot,\tau))^2\Delta f_R(x)\ dxd\tau. \tag{2.25}
$$

O fato de $f_R\in C^2(\mathbb{R}^n)$ nos garante que Δf_R é continua e como a bola $||x||<2R$ é compacta podemos garantir Δf_R assume valor máximo dentro da bola. Por outro lado, a Proposição(2.27) nos assegura que $\displaystyle\int_{||x||<2R}|D_iu|^2\ dx$ é finita. Com esses dois fatos em mente é possível perceber que:

$$|\Delta f_R(x)|(D_i u(\cdot,\tau))^2 \leq \frac{M}{R^2}|D_i u(\cdot,\tau)|^2. \tag{2.26}$$

Pela Proposição 2.27 e usando o fato que $u, u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, teremos que:

$$\begin{aligned}(III) &= \int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\int_{||x||<2R}(D_i u(\cdot,\tau))^2 \Delta f_R(x)\ dx d\tau \\ &\underbrace{\leq}_{Desigualdade (2.26)} \int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\int_{||x||<2R}\frac{M}{R^2}|D_i u(\cdot,\tau)|^2\ dx d\tau\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$ e usando o teorema 2.6 temos:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{M}{R^2}\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ d\tau = 0. \tag{2.27}$$

Por $(2.23), (2.24)$ e (2.27) temos:

$$\begin{aligned}(t-t_0)\int_{||x||<2R} f_R(x)|D_i u(\cdot,t)|^2\ dx - \int_{||x||<2R}\int_{t_0}^{t} f_R(x)|D_i u(\cdot,\tau)|^2\ d\tau dx \\ = -2\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\int_{||x||<2R} f_R(x)|\nabla D_i u(\cdot,\tau)|^2\ dx d\tau.\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$ na expressão acima temos:

$$\begin{aligned}(t-t_0)\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{R\to+\infty} f_R(x)|D_i u(\cdot,t)|^2\ dx + 2\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{R\to+\infty} f_R(x)|\nabla D_i u(\cdot,\tau)|^2\ dx d\tau \\ = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^{t}\lim_{R\to+\infty} f_R(x)|D_i u(\cdot,\tau)|^2\ d\tau dx.\end{aligned}$$

Observe que $\lim_{R\to+\infty} f_R = \lim_{R\to+\infty} f\left(\frac{||x||}{R}\right) = f\left(\lim_{R\to+\infty}\frac{||x||}{R}\right) = f(0) = 1$. Logo a expressão será reduzida:

$$(t-t_0)\int_{\mathbb{R}^n}|D_iu(\cdot,t)|^2\ dx+2\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)|\nabla D_iu(\cdot,\tau)|^2\ dxd\tau=\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|D_iu(\cdot,\tau)|^2\ d\tau dx.$$

Por fim usando os Teoremas (2.5) e (2.6), somando em i teremos:

$$(t-t_0)||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}+2\int_{t_0}^t(\tau-t_0)||D^2u(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau=\int_{t_0}^t||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ d\tau.$$

De maneira recursiva, podemos demonstrar as demais igualdades basta aplicar na equação do calor pelo operador:

$$2f_R(x)(t-t_0)^mD_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_m}u(\cdot,t)D_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_m}.$$

e proceder de maneira análoga acima com isso segue o resultado. □

Teorema 2.30. *[Problema de Leray para equação do calor]*

Dada $u(\cdot,t)$ solução do problema do calor (2.10) temos:

$$\lim_{t\to+\infty}||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0.$$

Demonstração. Para a demonstração desse teorema vamos usar a transformada de Fourier pelo simples fato de ser mais elementar e se adequar melhor ao nosso trabalho, mas o leitor deve ter em mente que essa não é a única forma de mostrar tal resultado.

Pelo Lema 2.25 desde que $u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ a condição inicial u_0 esteja em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então o Núcleo do Calor também está, nesse caso é possível sem problemas aplicar a transformada de Fourier no Problema(2.10).

$$\begin{cases}\hat{u}_t(y,t)-\Delta\hat{u}(y,t)=0\\ \hat{u}(y,0)=\hat{u_0}\in L^2(\mathbb{R}^2)\end{cases}\tag{2.28}$$

Usando o Teorema(2.23) na primeira equação do problema acima temos:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(y,t) - (iy)^2\hat{u}(y,t) &= 0 \\ \hat{u}_t(y,t) + y^2\hat{u}(y,t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Perceba que a expressão(2.29) é uma Equação Diferencial Ordinária, que pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned} -y^2 &= \frac{\hat{u}_t(y,t)}{\hat{u}(y,t)} \\ -y^2 \quad \underbrace{=}_{ln'(u(x))=\frac{u'(x)}{u(x)}} &\quad [\ln(\hat{u}(y,t))]_t. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Integrando a expressão(2.30) de no intervalo $[0,t]$, ficamos com a seguinte equação:

$$\underbrace{\int_0^t [\ln(\hat{u}(y,\tau))]_\tau \; d\tau}_{(I)} = \underbrace{\int_0^t -y^2 \; d\tau}_{(II)}.$$

Resolvendo separadamente termos a termo, juntando os termos e aplicando exponencial em ambos os resultados, temos:

$$(I) = \int_0^t [\ln(\hat{u}(y,\tau))]_\tau \; d\tau \quad \underbrace{=}_{Teorema(2.11)} \quad \ln(\hat{u}(y,t)).$$

$$(II) = \int_0^t -y^2 \; d\tau = -y^2 \int_0^t \; d\tau = -y^2 t.$$

$$\exp(\ln(\hat{u}(y,t))) = c(y)\exp(-y^2 t)$$
$$\hat{u}(y,t) = c(y)\exp(-ty^2) \tag{2.31}$$

Podemos agora usar a expressão(2.31) no problema(2.28) para encontrar o valor da constante $c(y)$. De fato:

$$\hat{u}(y,0) = c(y)\exp(-0\cdot y^2) = c(y). \tag{2.32}$$

Substituindo (2.32) na expressão (2.31).

$$\hat{u}(y,t) = \hat{u_0}(y)\exp(-t|y|^2).$$

Usando o Teorema(2.21) temos:

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\hat{u}(y,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\hat{u_0}e^{-t|y|^2}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u_0}(y)e^{-t|y|^2}|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u_0}(y)|^2|e^{-t|y|^2}|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u_0}(y)|^2 e^{-2t|y|^2} dy.$$

Dividindo a integral dentro e fora da bola $||y|| < \delta$ ficamos com a seguinte expressão:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u_0}(y)|^2 e^{-2t|y|^2} dy = \int_{||y||<\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 e^{-2t|y|^2} dy + \int_{||y||\geq\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 e^{-2t|y|^2} dy.$$

Na primeira integral $||y|| < \delta$ assim $|e^{-2t|y|^2}| \leq 1$, para segunda integral como $||y|| \geq \delta \Rightarrow e^{-2t|y|^2} \leq e^{-2t\delta^2}$, com isso:

$$\int_{||y||<\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 e^{-2t|y|^2} dy + \int_{||y||\geq\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 e^{-2t|y|^2} dy$$
$$\leq \int_{||y||<\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 dy + e^{-2t\delta^2} \int_{||y||\geq\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 dy$$

Observe que $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então podemos aplicar o Lema(2.3) temos que:

$$\int_{||y||<\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, existe $t_0(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$t_0 = \ln \left(\frac{2||\hat{u_0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2\delta^2}}.$$

Logo sempre que $t \geq t_0(\varepsilon)$, tem-se:

$$e^{-2t\delta^2} \int_{||y||\geq\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 dy \leq e^{-2t\delta^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u_0}(y)|^2 dy = e^{-2t\delta^2} ||\hat{u_0}(y)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma fica mais simples concluir que:

$$\int_{||y||<\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 dy + e^{-2t\delta^2} \int_{||y||\geq\delta} |\hat{u_0}(y)|^2 dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que nos mostra $\lim_{t\to+\infty} ||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, como queríamos. $\square$

Agora sabemos que o núcleo do calor satisfaz o problema de Leray, e com isso é possível saber o que acontece com a norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$ das derivadas da solução fundamental(2.12) no infinito.

Proposição 2.31. *Se $u(x,t)$ é o Núcleo do calor então vale a expressão:*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{m}{2}}||D^m u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.33}$$

Em outras palavras,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{m}{2}}||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.34}$$

Onde $m \geq 0$ é um inteiro. Lembrando que de acordo com a literatura clássica a norma do espaço de Sobolev homogêneo é definida da seguinte forma :

$$||f||_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} < +\infty. \tag{2.35}$$

Demonstração. Como o núcleo do calor satisfaz o problema de Leray, Teorema(2.30), temos que $\lim_{t\to+\infty} ||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, pela definição formal de limites temos:

$$\lim_{t\to+\infty} ||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0;$$
$$t > N \to ||u(\cdot,t) - 0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$$

A Proposição(2.27) unida ao resultado acima nos permite escrever a seguinte expressão:

$$2\int_{t_0}^{t} ||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(R^n)} d\tau \leq ||u(\cdot,t)||^2_{L^2(R^n)} + 2\int_{t_0}^{t} ||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(R^n)} d\tau = ||u(\cdot,t_0)||^2_{L^2(R^n)} \leq \varepsilon^2.$$

Assim temos:

$$\int_{t_0}^{t} ||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(R^n)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.36}$$

Por outro lado ao usarmos a equação (i) do Corolário(2.29) temos:

$$(t-t_0)||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq (t-t_0)||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||Du^2(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t}||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Logo temos:

$$||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2(t-t_0)} \Rightarrow t||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{t}{t-t_0}\right). \tag{2.37}$$

Com algumas manipulações simples podemos notar que se $t \geq 2t_0$ então $t/(t-t_0) \leq 2$, agora recursivamente podemos calcular o resultado desejado, fazendo $m=1$ devemos mostrar que $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}}||Du(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, usando a expressão (2.37) desde que $t > 2t_0$ podemos mostrar o resultado. De fato:

$$t||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{t}{t-t_0}\right) < \frac{2\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \Rightarrow t^{\frac{1}{2}}||Du(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0.$$

Assim como ε é arbitrário segue que vale o resultado para $m=1$. Agora usando a expressão (2.36) unido ao Corolário(2.29) é possível rumar ao resultado para $m=2$. Fazendo:

$$\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||Du^2(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau \leq (t-t_0)||Du(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||Du^2(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t}||Du(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Assim ficamos com a expressão:

$$\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||Du^2(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Usando novamente o Corolário(2.29) ficamos com a seguinte desigualdade:

$$(t-t_0)^2||D^2u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = t^2\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^2||D^2u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Novamente fazendo algumas manipulações simples é possível mostrar que se $t \geq \sqrt{2}t_0$ então $(t/t-t_0)^2 \leq 2$, assim:

$$t^2||D^2u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{t}{t-t_0}\right)^2\frac{\varepsilon^2}{2} \leq \varepsilon^2.$$

Dessa forma ficamos com a expressão:

$$t||D^2u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

O que mostra o resultado para $m = 2$, recursivamente segue o resultado.

□

Usando os lemas de interpolação do inicio do capítulo é possível mostrar mais uma proposição com respeito ao decaimento do núcleo do calor a medida que o tempo passa, em outra palavras, é possivel analisar o decaimento do nucleo do calor na norma Sobolev do espaço homogêneo.

Proposição 2.32. *Se $u(\cdot,t)$ é núcleo do calor então vale a equação:*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{s}{2}}||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. É possível mostrar esse resultado de maneira bem sucinta, onde s é um inteiro positivo, usando apenas a Proposição 2.31 parte a, aliado ao teorema de Plancherel mas, o lema acima será de grande importância para as demonstrações futuras, assim vamos trazer uma demonstração alternativa da proposição onde é usada o lema. Dado $\varepsilon > 0$, tome $s > 0$ arbitrário, então para todo $m > s$, existe t^* tal que pelo teorema de Leray temos:

$$\lim_{t \to +\infty} ||u(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{m}} \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{2.38}$$

De fato, pelo problema de Leray(2.30) temos:

$$\lim_{t \to +\infty} ||u(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Assim por definição formal de limite temos que $\forall \varepsilon > 0$ tal que $\exists N > 0$ tal que se $t > N$ então

$$\begin{aligned} ||u(\cdot, t) - 0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} &< \varepsilon_1 \\ = ||u(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} &< \varepsilon_1 \\ = ||u(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{m}} &< \varepsilon_1^{1-\frac{s}{m}} \end{aligned}$$

Fazendo $\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon_1^{1-\frac{s}{m}}$; sendo $t > t^*$.

$$||u(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{m}} < \sqrt{\varepsilon}.$$

Analogamente pela Proposição 2.31 existe t^{**} tal que sendo $t > t^{**}$

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{m}{2}} ||u(\cdot, t)||_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} \leq (\sqrt{\varepsilon})^{\frac{m}{s}}. \tag{2.39}$$

Agora fazendo $t = \max\{t^*, t^* *\}$ teremos que é valida ambas as expressões, agora seja $\lambda > 0$, com isso temos que $t^\lambda > 0$ e podemos observar que t^λ conserva desigualdade, logo pelo Lema(2.15) ficamos com a expressão:

$$||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||u(\cdot,t)||^{1-\frac{s}{m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||u(\cdot,t)||^{\frac{s}{m}}_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}$$
$$t^\lambda ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq t^\lambda ||u(\cdot,t)||^{1-\frac{s}{m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||u(\cdot,t)||^{\frac{s}{m}}_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}$$
$$t^\lambda ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||u(\cdot,t)||^{1-\frac{s}{m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(t^{\lambda\frac{m}{s}} ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{s}{m}}.$$

Assim fazendo $\frac{m\lambda}{s} = \frac{m}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{s}{2}$, substituindo acima temos:

$$t^{\frac{s}{2}} ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||u(\cdot,t)||^{1-\frac{s}{m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(t^{\frac{m}{2}} ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{s}{m}}.$$

Agora usando as expressões (2.39) e (2.38) podemos terminar a demonstração. De fato:

$$t^{\frac{s}{2}} ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||u(\cdot,t)||^{1-\frac{s}{m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(t^{\frac{m}{2}} ||u(\cdot,t)||_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{s}{m}} \leq \sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}^{m/s})^{s/m} = \varepsilon.$$

assim por definição formal de limite segue o resultado. □

Proposição 2.33. *Dada $u(\cdot,t)$ núcleo do calor temos que :*

$$\lim_{t \Rightarrow +\infty} t^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}} ||D^m u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. Seguindo as mesmas ideias até aqui vamos estimar o valor de $t^{2\lambda}||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, pedir ajuda ao lema anterior e depois dar um valor a λ. De fato:

$$||D^m u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n) ||D^m u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D^n D^m u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)^2 ||D^m u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D^{n+m} u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$t^{2\lambda} ||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq t^{2\lambda} K(n)^2 ||D^m u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D^{n+m} u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Para finalizar a demonstração vamos usar o a Proposição(2.32) e terminar a prova, para isso devemos ter $2\lambda = \frac{m}{2} + \frac{m+n}{2}$ onde podemos isolar o λ o que implica $\lambda = \frac{m}{2} + \frac{n}{4}$.

Deste modo:

$$t^{2(\frac{m}{2}+\frac{n}{4})}||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq t^{2(\frac{m}{2}+\frac{n}{4})}K(n)^2||D^m u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}||D^{n+m}u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$t^{m+\frac{n}{2}}||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)^2 t^{\frac{m}{2}}||D^m u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{m+n}{2}}||D^{n+m}u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando a Proposição(2.32) e a definição formal de limites, temos:

$$t^{m+\frac{n}{2}}||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)^2\varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{m+\frac{n}{2}}||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Sabemos que $t^{m+\frac{n}{2}}||D^m u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = t^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}}||D^m u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Logo, segue o resultado. $\square$

3 Problema de Leray para as soluções do problema MHD

A ideia principal desse capitulo é provar o problema de Leray (decaimento não uniforme da norma L^2) para as soluções do problema MHD descrito abaixo.

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (u \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \mu \Delta \vec{u} + (b \cdot \nabla)\vec{b} \\ \vec{b}_t + (u \cdot \nabla)\vec{b} = \nu \Delta \vec{b} + (b \cdot \nabla)\vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u}(\cdot, t) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{b}(\cdot, t) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

com dados iniciais $(\vec{u}_0, \vec{b}_0) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$.

Como dito na introdução o sistema(3.1) se chama Magneto-hidrodinâmico incompressível (MHD), onde no nosso trabalho estamos apenas com o caso tridimensional, ou seja, para todo desenrolar do trabalho vamos tomar $n = 3$. Denotando $\vec{z}(\cdot, t) := (\vec{u}(\cdot, t), \vec{b}(\cdot, t))$ uma solução do sistema(3.1), temos como principal resultado o fato de que as soluções $\vec{z}(\cdot, t)$ satisfazem o pro de Leray. No entanto, antes de mostrar tal resultado mostraremos os resultados necessários abaixo.

1. $||\vec{z}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\lambda \displaystyle\int_{t_o}^{t} ||D\vec{z}(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||\vec{z}(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$;
2. $||D\vec{z}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\eta \displaystyle\int_{t_o}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||D\vec{z}(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$,

para cada $t_0 > t_*$. Aqui, t_* denota o tempo de regularidade (suavidade eventual), ou seja, dada qualquer solução (fraca, globalmente definida) $\vec{z}(\cdot, t)$ do problema MHD (3.1), tem-se

$$\vec{u} \in \mathbf{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty)\right)$$

As duas desigualdades descritas acima são as chamadas desigualdades de energia para solução $\vec{z}(\cdot, t)$ e para as suas derivadas de primeira ordem, respectivamente.

Teorema 3.1. *[Desigualdade de energia do sistema MHD para n=3] Sejam $t_0 \geq t_*$ e $(u, b)(\cdot, t)$ solução de Leray do problema MHD, tem-se :*

$$||\vec{z}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\lambda \int_{t_0}^{t} ||D\vec{z}(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \leq ||\vec{z}(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

$\forall t > t_0$.

Demonstração. Vamos mostrar esse resultado usando das mesmas ideias vistas anteriormente, ou seja, definindo uma função de corte, vamos reescrever o sistema MHD incompressível em coordenadas, logo após multiplicar as expressões e por fim integrar nas regiões adequadas. Para um leitor mais familiarizado com essas contas, recomenda-se ir direto pra expressão (3.15). Dado $R > 0$, seja $f_R(x)$ uma função de corte, $f_R(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ definida da seguinte forma:

$$f_R(x) := \begin{cases} 1, ||x|| \geq R; \\ \phi(x), R < ||x|| < R + 1; \\ 0, ||x|| \leq R + 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Onde $\phi(x) \in C^{\infty}$. Reescrevendo o sistema (3.1) coordenada a coordenada, tem-se

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j D_j u_i + D_i p = \mu \sum_{j=1}^{3} D_j D_j u_i + \sum_{j=1}^{3} b_j D_j b_i \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j D_j b_i = \nu \sum_{j=1}^{3} D_j D_j b_i + \sum_{j=1}^{3} b_j D_j u_i \tag{3.4}$$

Multiplicando a expressão (3.3) por $(2u_i f_R)$ e integrando na região $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$.

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(2u_if_R)\left[\frac{\partial(u_i)}{\partial t_i}+\sum_{j=1}^{3}u_jD_j(u_i)+D_i(p)\right]dxd\tau$$
$$=\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(2u_if_R)\left[\mu\sum_{j=1}^{3}D_jD_j(u_i)+\sum_{j=1}^{3}b_jD_j(b_i)\right]dxd\tau$$
$$\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}f_R\frac{\partial(u_i)^2}{\partial t_i}}_{(I)}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}2u_if_R\sum_{j=1}^{3}u_jD_j(u_i)}_{(II)}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}2u_if_RD_i(p)dxd\tau}_{(III)}$$
$$=\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}2f_R\mu\sum_{j=1}^{3}D_jD_j(u_i)^2dxd\tau}_{(IV)}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}2u_if_R\sum_{j=1}^{3}b_jD_j(b_i)dxd\tau}_{(V)}$$

Agora vamos trabalhar com cada expressão separadamente, seguindo as mesma ideia anteriores.

$$\begin{aligned}(I)&=\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}f_R(x)[(u_i(\cdot,\tau))^2]_t\ dxd\tau\\ &\underbrace{=}_{Teorema(2.4)}\int_{\mathbb{R}^3}f_R(x)\int_{t_0}^{t}[(u_i(\cdot,\tau))^2]_t\ dxd\tau\\ &\underbrace{=}_{Teorema(2.11)}\int_{\mathbb{R}^3}f_R(x)(u_i^2(\cdot,t)-u_i^2(\cdot,t_0))\ dx\\ &\underbrace{=}_{Def(3.2)}\int_{||x||<R+1}f_R(x)(u_i^2(\cdot,t)-u_i^2(\cdot,t_0))dx.\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
(II) &= \sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} 2u_i(\cdot,\tau)f_R(x)u_j(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)u_j(\cdot,\tau)u_i(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{[(u^2)'=2uu']} \int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}\sum_{j=1}^{3}(f_R(x)u_j(\cdot,\tau))D_j[u_i^2(\cdot,\tau)]\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)} \sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||=R+1}(f_Ru_j)u_i^2\ d\mathbf{S}(x) - \int_{||x||<R+1}u_i^2D_j(f_Ru_j)\ dx\right)\ d\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} u_i^2(\cdot,\tau)[D_j(f_R(x))u_j(\cdot,\tau)+f_R(x)D_ju_j(\cdot,\tau)]\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
(III) &= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} 2u_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_ip(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} \int_{t_0}^{t}\int_{||x||\le R+1} 2u_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_ip(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)} 2\int_{t_0}^{t}\left(\int_{||x||=R+1}u_if_Rp\ d\mathbf{S}(x) - \int_{||x||<R+1}D_j(u_if_R)p\ dx\right)\ d\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_j(u_i(\cdot,\tau)f_R(x))p(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&= -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}(D_j(u_i(\cdot,\tau))f_R(x)+u_i(\cdot,\tau)D_j(f_R(x)))p(\cdot,\tau)\ dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
(IV) &= 2\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot,\tau) f_R(x) D_j D_j u_i(\cdot,\tau)\ dx d\tau \\
\underbrace{=}_{Def(3.2)} &= 2\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau) f_R(x) D_j D_j u_i(\cdot,\tau)\ dx d\tau \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)} & 2\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \left(\int_{||x||=R+1} u_i f_R D_j u_i\ d\mathbf{S}(x) - \int_{||x||<R+1} D_j(u_i f_R) D_j(u_i)\ dx \right) d\tau \\
\underbrace{=}_{Def(3.2)} & -2\mu \sum_{j=1}^{3} \left(\int_{t_0}^{t} \int_{||x||<R+1} (D_j(u_i))^2 f_R\ dx d\tau + \int_{t_0}^{t} \int_{||x||<R+1} u_i D_j(f_R) D_j(u_i)\ dx d\tau \right)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
(V) &= 2 \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot,\tau) f_R(x) b_j(\cdot,\tau) D_j(b_i(\cdot,\tau))\ dx d\tau \\
\underbrace{=}_{Def(3.2)} & 2 \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau) f_R(x) b_j(\cdot,\tau) D_j(b_i(\cdot,\tau))\ dx d\tau \\
\underbrace{=}_{Teorema(2.10)(IPP)} & 2 \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \left(\int_{||x||=R+1} u_i f_R b_j b_i\ d\mathbf{S}(x) - \int_{||x||<R+1} D_j(u_i f_R b_j) b_i dx \right) d\tau \\
\underbrace{=}_{Def(3.2)} & -2 \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{||x||<R+1} [D_j(u_i) f_R + u_i D_j(f_R)] b_j b_i\ dx d\tau
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Após trabalhar um pouco com as expressões podemos juntar os termos (3.5),(3.6),(3.7),(3.8),(3.9) e ficamos com os seguinte resultado:

$$\underbrace{\int_{||x||<R+1} f_R(x)(u_i^2(\cdot,t)-u_i^2(\cdot,t_0))dx}_{(I)}\underbrace{-2\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{3}\int_{||x||<R+1}(u_i)^2[D_j(f_R)u_j+f_RD_j(u_j)]dxd\tau}_{(II)}$$

$$\underbrace{-2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}(D_j(u_i)f_R+u_iD_j(f_R))pdxd\tau}_{(III)}$$

$$=\underbrace{-2\mu\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}\sum_{j=1}^{3}(D_j(u_i))^2f_Rdxd\tau-2\mu\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}\sum_{j=1}^{3}u_iD_j(f_R)D_j(u_i)dxd\tau}_{(IV)}$$

$$\underbrace{-2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}\sum_{j=1}^{3}b_jb_iD_j(u_i)f_Rdxd\tau-2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}\sum_{j=1}^{3}b_jb_iu_iD_j(f_R)dxd\tau}_{(V)}\,.$$

Fazendo $R\to+\infty$ na expressões anteriores, podemos caminhar para o resultado desejado. Lembrando que mostramos no capitulo 1 que $D_j\phi_R(x)\to 0$ a medida que R cresce indefinidamente, unindo isso ao teorema da convergência monótona, podemos novamente trabalhar com cada termo separadamente. Fazendo $R\to+\infty$ temos:

$$\lim_{R\to+\infty}(I)=\lim_{R\to+\infty}\int_{||x||<R+1} f_R(x)(u_i^2(\cdot,t)-u_i^2(\cdot,t_0))dx=\int_{\mathbb{R}^3}u_i^2(\cdot,t)dx-\int_{\mathbb{R}^3}u_i^2(\cdot,t_0)dx$$
$$=||u_i^2(\cdot,t)||^2_{L^2\mathbb{R}^3}-||u_i^2(\cdot,t_0)||^2_{L^2\mathbb{R}^3}.$$

$$\lim_{R\to+\infty}(II)=\lim_{R\to+\infty}-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}(u_i)^2[D_j(f_R)u_j+f_RD_j(u_j)]dxd\tau$$
$$=-2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}(u_i)^2D_j(u_j)dxd\tau$$

$$\lim_{R\to+\infty}(III) = \lim_{R\to+\infty} -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} p(D_j(u_i)f_R + u_iD_j(f_R))dxd\tau$$
$$= -2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} pD_j(u_i)dxd\tau.$$

$$\lim_{R\to+\infty}(IV) = -2\mu\sum_{j=1}^{3}\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}[(D_j(u_i))^2f_R + u_iD_j(f_R)D_j(u_i)]dxd\tau\right)$$
$$= -2\mu\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}(D_j(u_i))^2dxd\tau.$$

$$\lim_{R\to+\infty}(V) = -2\sum_{j=1}^{3}\lim_{R\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}[b_jb_iD_j(u_i)f_R + b_jb_iu_iD_j(f_R)]dxd\tau$$
$$= -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_jb_iD_j(u_i).$$

Podemos agora juntar os termos e reescrever de modo a ficar mais parecido com o resultado a ser mostrado:

$$\begin{aligned}&||u_i^2(\cdot,t)||^2_{L^2\mathbb{R}^3} - 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}(u_i)^2D_j(u_j)dxd\tau - 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} pD_j(u_i)dxd\tau\\&+2\mu\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}(D_j(u_i))^2dxd\tau + 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_jb_iD_j(u_i) = ||u_i^2(\cdot,t_0)||^2_{L^2\mathbb{R}^3}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Vamos seguir com as mesmas ideias vistas previamente. Porém, agora aplicando as ideias na equação (3.4). Para um leitor mais familiarizado com essas contas, recomenda-se ir diretamente para a expressão (3.15). De fato, multiplicando a (3.4) por $2b_if_R$ e integrando na região $\mathbb{R}^3\times[t_0,t]$ temos:

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R({b_i}^2)_t dx d\tau}_{(I)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3} D_j({b_i}^2)u_j f_R dx d\tau}_{(II)}$$

$$= \underbrace{2\nu\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3} b_i f_R(D_j D_j(b_i)) dx d\tau}_{(III)} + \underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R b_i b_j D_j(u_i) dx d\tau}_{(IV)}.$$

Fazendo os cálculos de maneira mais sucinta pois já mostramos contas análogas a essas anteriormente.

$$\begin{aligned}
(I) &= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)({b_i}^2(\cdot,\tau))_t dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} \int_{t_0}^{t}\int_{||x||\leq R+1} f_R(x)({b_i}^2(\cdot,\tau)))_\tau dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.4)} \int_{||x||<R+1} f_R(x)\int_{t_0}^{t}({b_i}^2(\cdot,\tau)))_\tau d\tau dx \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.11)} \int_{||x||<R+1} f_R(x)({b_i}^2(\cdot,t) - {b_i}^2(\cdot,t_0))dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
(II) &= \sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} D_j({b_i}^2(\cdot,\tau))u_j(\cdot,\tau)f_R(x)\ dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} \sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||\leq R+1} D_j({b_i}^2(\cdot,\tau))u_j(\cdot,\tau)f_R(x)\ dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} {b_i}^2(\cdot,\tau)D_j(u_j(\cdot,\tau)f_R(x))\ dx d\tau \\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} {b_i}^2(\cdot,\tau)[D_j(u_j(\cdot,\tau))f_R(x) + u_j(\cdot,\tau)D_j(f_R(x))]\ dx d\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} {b_i}^2(\cdot,\tau)D_j(u_j(\cdot,\tau))f_R(x)\ dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}(III) &= 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)f_R(x)(D_jD_j(b_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau \\ &\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} b_i(\cdot,\tau)f_R(x)(D_jD_j(b_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau \\ &\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\nu\ \sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)(D_j(b_i(\cdot,\tau)))^2\ dxd\tau.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora usando os mesmo argumentos usados pra a expressão(3.3), ficamos com o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}||b_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} D_j(u_i(\cdot,\tau))b_i^2(\cdot,\tau)\ dxd\tau + 2\nu\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}(D_jb_i(\cdot,\tau))^2\ dxd\tau \\ -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)b_j(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau = ||b_i(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Somando as expressões (3.10) e (3.14), temos:

$$\begin{aligned}||u_i^2(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||b_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ -\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} D_j(u_i(\cdot,\tau))b_i^2(\cdot,\tau)\ dxd\tau + 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(D_jb_i(\cdot,\tau))^2\ dxd\tau \\ -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} u_i^2(\cdot,\tau)D_ju_j(\cdot,\tau)\ dxd\tau - 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} p(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\ +2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} D_ju_i^2(\cdot,\tau)\ dxd\tau + 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_j(\cdot,\tau)b_i(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau)) \\ -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)b_j(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\ = ||u_i^2(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||b_i(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por fim, somando em i, usando o fato de estarmos trabalhando com um sistema incompromissível, ou seja, $\sum_{i=1}^{3} u_i(\cdot,t) = \nabla \cdot u(\cdot,t) = 0$ e tomando $\lambda = \min(\nu,\mu)$ temos:

$$||\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\lambda \int_{t_0}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \leq ||\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Com posse da desigualdade de energia para o sistema MHD, resta apenas mostrar a desigualdade de energia para a primeira derivada, mostrado esse resultado, será possível mostrar finalmente o Problema de Leray para a solução MHD.

Teorema 3.2. *[Desigualdade de energia para primeira derivada do sistema MHD para n=3] Dada $\vec{z}(\cdot,t)$ solução de Leray do sistema MHD incompressível, vale a desigualdade:*

$$||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\eta \int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Onde η é uma constante positiva.

Demonstração. Vamos mostrar o caso tridimensional, mas vale resultar que esse resultado vale para $n = 2$ e $n = 4$. Começamos derivando a equação(3.3) em relação a x_e temos:

$$D_e(u_i)_t + \sum_{j=1}^{3} D_e(u_j D_j(u_i)) + D_e(D_i(p)) = \mu \sum_{j=1}^{3} D_j(D_j(D_e(u_i))) + \sum_{j=1}^{3} D_e(b_j D_j(b_i)). \tag{3.16}$$

Poderíamos mostrar esse resultado seguindo de maneira análoga como feito anteriormente, isto é, já seria possível omitir os passos da função de corte. Porém, para fins didáticos, vamos fazer uso dela novamente, mas vale ressaltar que nos próximos resultados esse passo será omitido. De fato, multiplicando a equação(3.16) por $2f_R(x)D_e(u_i(\cdot,\tau))$ e integrando na região $\mathbb{R}^3 \times [t_0,t]$ onde $t > t_0 > t*$, ficamos com a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e({u_i}^2)_\tau \; dxd\tau}_{(I)} + \underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e(u_i) D_e(u_j D_j(u_i)) \; dxd\tau}_{(II)} \\
&+\underbrace{2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e(u_i) D_e(D_i(p)) \; dxd\tau}_{(III)} = \underbrace{2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e(u_i) D_j(D_j(D_e(u_i))) \; dxd\tau}_{(IV)} \\
&+\underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e(u_i) D_e(b_j D_j(b_i)) \; dxd\tau}_{(V)} .
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Seguindo os passos anteriores vamos trabalhar com cada integral da expressão (3.17) separadamente, mas vamos fazer $R \to +\infty$ ao fim de cada termo e com isso reduzir um pouco mais os cálculos. Para um leitor mais experiente no assunto pode ir direto à expressão(3.21) onde nela ja foi feito todo o desenvolvimento das integrais para ambas as equações de MHD.

De fato, para (I) vamos usar o Teorema de Fubinni unido ao teorema Fundamental do Cálculo, para os demais termos vamos usar Integração por Partes e após aplicar o módulo.

$$
\begin{aligned}
(I) &= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x) D_e({u_i}^2(\cdot,\tau))_\tau \; dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} \int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x) D_e({u_i}^2(\cdot,\tau))_\tau \; dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.4)} \int_{||x||<R+1} f_R(x) \int_{t_0}^{t} D_e(({u_i}^2(\cdot,\tau))_\tau) \; d\tau dx \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.11)} \int_{||x||<R+1} f_R(x)[D_e({u_i}^2(\cdot,t)) - D_e({u_i}^2(\cdot,t_0))] \; dx \\
&\underbrace{=}_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |D_e(u_i(\cdot,t))|^2 \; dx - \int_{\mathbb{R}^3} |D_e(u_i(\cdot,t_0))|^2 \; dx \\
&= ||D_e(u_i(\cdot,t))||^2_{L^2\mathbb{R}^3} - ||D_e(u_i(\cdot,t_0))||^2_{L^2\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(II) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_e(u_i(\cdot,\tau))D_e(u_j(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_e(u_i(\cdot,\tau))D_e(u_j(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R D_e(u_i)[D_e(u_j)D_j(u_i) + u_j D_e(D_j(u_i))]\ dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_e(u_i(\cdot,\tau))D_e(u_j(\cdot,\tau))D_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&\quad +2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_e(u_i(\cdot,\tau))u_j(\cdot,\tau)D_e(D_j(u_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau)D_e(f_R(x)D_e(u_j(\cdot,\tau))D_j(u_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau \\
&\quad -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_j(f_R(x)u_j(\cdot,\tau))(D_e(u_i(\cdot,\tau)))^2\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{\lim_{R\to\infty} D_e(f_R(x))=0} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_e(u_j(\cdot,\tau))D_eD_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&\quad -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_ju_j(\cdot,\tau)D_e(u_i(\cdot,\tau))^2\ dxd\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(Aplicando\ modulo)} \left|-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_e(u_j(\cdot,\tau))D_eD_j(u_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau\right| \\
&\quad \left|-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_ju_j(\cdot,\tau)D_e(u_i(\cdot,\tau))^2\ dxd\tau\right| \\
&\underbrace{\leq}_{Desigualdade(2.8)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} |u_i(\cdot,\tau)||f_R(x)||D_e(u_j(\cdot,\tau))||D_eD_j(u_i(\cdot,\tau))|\ dxd\tau \\
&\quad +2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} |f_R(x)||D_ju_j(\cdot,\tau)||D_eu_i(\cdot,\tau)|^2\ dxd\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(\nabla\cdot u=0)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|f_R(x)||D_e(u_j(\cdot,\tau))||D_eD_j(u_i(\cdot,\tau))|\ dxd\tau
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\leq}_{(R\to\infty)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e(u_j(\cdot,\tau))||D_eD_j(u_i(\cdot,\tau))|\ dxd\tau. \tag{3.18}$$

Integrando o termo (III) por partes temos:

$$\begin{aligned}
(III) &= 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)D_eD_ip(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)D_eD_ip(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_i(f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau))D_ep(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&= -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}[D_if_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)+f_R(x)D_iD_eu_i(\cdot,\tau)]D_e(p)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -2\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_iD_eu_i(\cdot,\tau)D_e(p)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{R\to+\infty} -2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} D_iD_eu_i(\cdot,\tau)D_ep(\cdot,\tau)\ dxd\tau.
\end{aligned}$$

Integrando o termo (IV) por partes novamente:

$$\begin{aligned}
(IV) &= 2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)D_jD_jD_eu_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)D_jD_jD_eu_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_j(f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau))D_jD_eu_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&= -2\mu\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1}\sum_{j=1}^{3}[D_j(f_R)D_e(u_i)+f_RD_j(D_e(u_i))](D_j(D_e(u_i)))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{R\to+\infty} -2\mu\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}|D_jD_eu_i(\cdot,\tau)|^2\ dxd\tau.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(V) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)D_eb_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau\\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_eu_i(\cdot,\tau)D_e(b_j(\cdot,\tau)D_j(b_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau\\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau)D_e(f_R(x)D_e(b_j(\cdot,\tau)D_j(b_i(\cdot,\tau))))\ dxd\tau\\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} u_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_eD_e(b_j(\cdot,\tau)D_j(b_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau\\
&\underbrace{=}_{R\to+\infty} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot,\tau)D_eD_e(b_j(\cdot,\tau)D_j(b_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau\\
&\leq 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_jD_e(b_i(\cdot,\tau))||D_eb_j(\cdot,\tau)|\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Terminado essas manipulações ficamos com o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
&||D_eu_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(D_jD_eu_i(\cdot,\tau))^2\ dxd\tau\\
&\leq ||D_eu_i(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} D_iD_eu_i(\cdot,\tau)D_ep(\cdot,\tau)\ dxd\tau\\
&+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)||D_eb_j(\cdot,\tau)|\ dxd\tau\\
&+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_eu_j(\cdot,\tau)||D_eD_ju_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Somando em $[i,e]$ em (3.19) ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&||D\vec{u}(\cdot,t)||^2_{L^2\mathbb{R}^3} + 2\mu \int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\leq\ & ||D\vec{u}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e b_j(\cdot,\tau)||D_j D_e b_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau \\
&+2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e u_j(\cdot,\tau)||D_e D_j u_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Vamos guarda por hora o resultado (3.20) e trabalha com a segunda equação do sistema MHD. De fato, derivando a expressão (3.4) em relação a x_e, multiplicando por $2f_R(x)D_e b_i(\cdot,\tau)$ e integrando na região $\mathbb{R}^3\times[t_0,t]$ temos:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(D_e(b_i))^2_t\ dxd\tau}_{(I)} + \underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e(u_j D_j(b_i))D_e(b_i)\ dxd\tau}_{(II)} \\
=\ & \underbrace{2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_j(D_j(D_e(b_i D_e(b_i))))\ dxd\tau}_{(III)} + \underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R D_e(b_j D_j(u_i))D_e(b_i)\ dxd\tau}_{(IV)}.
\end{aligned}$$

Podemos agora estimar essas integrais de forma análoga como foi feito anteriormente, fazendo:

$$\begin{aligned}
(I) &= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(D_e b_i(\cdot,\tau))^2_t\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.4)} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^{t}(D_e b_i(\cdot,\tau))^2_t\ d\tau dx \\
&\underbrace{=}_{Teorema(2.11)} \int_{\mathbb{R}^3}\left(|D_e b_i(\cdot,t)|^2 - |D_e(b_i(\cdot,t_0))|^2\right)\ dx \\
&= ||D_e b_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - ||D_e(b_i\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(II) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_e(u_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau))D_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_eb_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_e(u_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} b_i(\cdot,\tau)D_e(f_R(x)D_e(u_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} b_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_eu_j(\cdot,\tau)D_jD_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{R\to+\infty} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)D_eu_j(\cdot,\tau)D_jD_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\leq \left|-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)D_eu_j(\cdot,\tau)D_jD_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau\right| \\
&\underbrace{\leq}_{Desigualdade(2.8)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||b_i||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e(u_j)||D_jD_e(b_i)|\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(III) &= 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_jD_jD_eb_i(\cdot,\tau)D_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_eb_i(\cdot,\tau)D_jD_jD_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)} -2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_j(f_R(x)D_eb_i(\cdot,\tau))D_jD_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{Def(3.2)} -2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} f_R(x)D_jD_eb_i(\cdot,\tau)D_jD_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{R\to+\infty} -2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} |D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(IV) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} f_R(x)D_e(b_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))D_eb_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{Def(3.2)}&\ 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} D_eb_i(\cdot,\tau)f_R(x)D_e(b_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{(IPP)(2.10)}&\ -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} b_i(\cdot,\tau)D_e[f_R(x)D_e(b_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))]\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{Def(3.2)}&\ -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{||x||<R+1} b_i(\cdot\tau)f_R(x)D_eD_e(b_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{R\to+\infty}&\ -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)D_eb_j(\cdot,\tau)D_eD_ju_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
&\le \left|-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} b_i(\cdot,\tau)D_eb_j(\cdot,\tau)D_eD_ju_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau\right| \\
\underbrace{\le}_{Desigualdade(2.8)}&\ 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} ||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_eb_j(\cdot,\tau)||D_jD_eu_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Assim ficamos com a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
&||D_eb_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\ dxd\tau \\
\le\ &||D_eb_i(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_eu_j(\cdot,\tau)||D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau \\
&+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_eb_j(\cdot,\tau)||D_jD_eu_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Somando (3.21) em $[i,e]$ temos:

$$
\begin{aligned}
&||D\vec{b}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t}||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau \\
&\leq ||D\vec{b}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e u_j(\cdot,\tau)||D_j D_e b_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau \\
&+2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e b_j(\cdot,\tau)||D_j D_e u_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Podemos agora somar as expressões (3.20) e (3.22) :

$$
\begin{aligned}
&||D\vec{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||D\vec{b}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&+2\mu\int_{t_0}^{t}||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau + 2\nu\int_{t_0}^{t}||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&\leq ||D\vec{u}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||D\vec{b}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&+2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e u_j(\cdot,\tau)||D_j D_e b_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau := I_1(\cdot,t) \\
&+2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e b_j(\cdot,\tau)||D_j D_e u_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau := I_2(\cdot,t) \\
&+2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e b_j(\cdot,\tau)||D_j D_e b_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau := I_3(\cdot,t) \\
&+2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||u_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_e u_j(\cdot,\tau)||D_j D_e u_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau := I_4(\cdot,t).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Por fim temos que estimar as integrais I_1, I_2, I_3, I_4, separadamente, vamos fazer I_1 os demais termos são análogos. De fato:

$$
\begin{aligned}
I_1(\cdot,t) &= 2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||b_i(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_eu_j(\cdot,\tau)||D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau\\
&\leq 2\sum_{i,j,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|D_eu_j(\cdot,\tau)||D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau\\
&= 2\sum_{i,e=1}^{3}\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}|D_eu_j(\cdot,\tau)||D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|\ dxd\tau\\
&\underbrace{\leq}_{Holder(2.8)} 2\sum_{i=1}^{3}\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{e=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}|D_eu_j(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{3}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\ dxd\tau\\
&\leq 2\sum_{i=1}^{3}\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{e,j=1}^{3}|D_eu_j(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{e,j=1}^{3}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\ dxd\tau\\
&= 2\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{e,j=1}^{3}|D_eu_j(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{e,j=1}^{3}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\ dxd\tau\\
&\leq 2\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{i,e,j=1}^{3}|D_eu_j(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,e,j=1}^{3}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\ dxd\tau\\
&= 2\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\left(3\sum_{e,j=1}^{3}|D_eu_j(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,e,j=1}^{3}|D_jD_eb_i(\cdot,\tau)|^2\right)^{1/2}\ dxd\tau\\
&\leq 2\sqrt{3}\int_{t_0}^{t}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Estimados os valores vai nos resta o seguinte resultado, usando as notações e definições dadas no capítulo 1 temos :

$$
\begin{aligned}
&||D\vec{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||D\vec{b}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&+2\mu\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau + 2\nu\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&\leq ||D\vec{u}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||D\vec{b}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&+2\sqrt{3}\int_{t_0}^{t} ||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau\\
&+2\sqrt{3}\int_{t_0}^{t} ||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau\\
&+2\sqrt{3}\int_{t_0}^{t} ||\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau\\
&+2\sqrt{3}\int_{t_0}^{t} ||\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Vale lembrar que $||u(\cdot,t)||_E \leq ||(u,b)(\cdot,t)||_E$ onde E é um espaço normado. Assim é possível melhorar mais o nosso resultado, fazendo:

$$
\begin{aligned}
&||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&+8\sqrt{3}\int_{t_0}^{t} ||\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade (2.1) temos:

$$
\begin{aligned}
&||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&+8\sqrt{3}K\int_{t_0}^{t} ||\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Pelo teorema 3.1 ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned}||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2\mathbb{R}^3}+2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,d\tau\leq||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2\mathbb{R}^3}\\ +8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dxd\tau.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Novamente podemos usar o teorema 3.1, porém seguindo os passos de Leray no artigo [12] podemos tomar $t_0 = 0$, assim:

$$\int_0^{\infty}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq\frac{||\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2\min(\mu,\nu)}. \tag{3.25}$$

Dessa forma pelo Lema 2.1, temos que:

$$\liminf_{t\to+\infty}||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}=0.$$

Com isso, existe $t_{**} > t_*$ suficientemente grande de modo que:

$$||D\vec{z}(\cdot,t_{**})||_{L^2(\mathbb{R}^3)}<C \text{ onde } C:=\left(\frac{\min(\mu,\nu)}{4\sqrt{3}||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)}}\right)^2. \tag{3.26}$$

É possível mostrar que vale não só para t_{**} mas sim para todo $s \geq t_{**}$. Para isso suponhamos por absurdo que exista um instante $t_1 > t_{**}$ tal que $||D\vec{z}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} < C$ para todo $s \in [t_{**}, t_1)$ com

$$||D\vec{z}(\cdot,t_1)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}=C.$$

Fazendo $t = t_1$ em (3.24) e sendo $t_0 \geq t_{**}$ temos que :

$$||D\vec{z}(\cdot,t_1)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t_1} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
$$+8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t_1} ||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau.$$

Com o resultado acima temos:

$$C^2 = ||D\vec{z}(\cdot,t_1)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_1)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t_1} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau$$
$$\leq ||D\vec{z}(\cdot,t_{**})||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t_1} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau$$

O que implica:

$$C = ||D\vec{z}(\cdot,t_1)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_{**})||_{L^2(\mathbb{R}^3)} < C.$$

O que não pode acontecer. Assim com posse de (3.26) podemos melhorar mais a expressão (3.24).

$$||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
$$+8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau$$
$$\leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\sqrt{C}\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau$$
$$= ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
$$+8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\frac{\min(\mu,\nu)}{4\sqrt{3}||\vec{z}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}}\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau$$
$$= ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau.$$

Assim, $||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ sempre que $t \geq t_0 \geq t_{**}$ por fim usando essa desigualdade em (3.24) é possível determinar nossa constante η e finalmente terminar o resultado, fazendo:

$$\begin{aligned} ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\nu)\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau &\leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ +8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau & \\ &\leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ +8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dxd\tau. & \end{aligned}$$

Podemos agora reorganizar os termos ficando com a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ + \Big(2\min(\mu,\nu) - 8\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big) & \int_{t_0}^{t} ||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \\ & \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Seja $\eta := \min(\mu,\nu) - 4\sqrt{3}K||\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t_0)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ note que pela definição da constante C juntamente com o fato (3.26) é possível concluir com cálculos simples que η é positivo, concluindo assim a demonstração do teorema. □

Observação 3.3. *O teorema acima nos garante a norma L^2 da derivada (além de suave) é decrescente, ou seja, $||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||D\vec{z}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ para todo $t \geq t_0$. Esse resultado será usado posteriormente e vale aqui a ressalva.*

Teorema 3.4. *Dada $\vec{z}(\cdot,t)$ uma solução de Leray do problema MHD incompressível, temos:*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1/2}||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Demonstração.

$$t||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 2\int_{t/2}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq 2\int_{t/2}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.$$

$$\Rightarrow t||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\int_{t/2}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$

$$\Rightarrow t^{1/2}||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\int_{t/2}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.$$

Pelo teorema 3.2 temos que a integral $2\int_{t_0}^{t} ||Dz(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau$ é finita. Fazendo $t/2 < t_0 < t$ temos $[t/2, t_0] \subset [t/2, t]$, com isso pelo lema anterior:

$$2\int_{t_0}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau - 2\int_{t/2}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0$. O que garante que $2\int_{t/2}^{t} ||D\vec{z}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \to 0$ a medida que t cresce indefinidamente, provando assim o teorema. □

Lema 3.5. *Para $t > 0$, considere*

$$Q_1(\cdot,t) = -(u\cdot\nabla)\vec{u} - \nabla p + (b\cdot\nabla)\vec{b}.$$

Então,

$$\nabla \cdot Q_1(\cdot,t) = 0.$$

Demonstração. A ideia aqui é usar a primeira equação do sistema MHD unido com o fato que estamos trabalhando com um fluido incompressível. De fato,

$$\vec{u}_t = \mu\Delta\vec{u} + Q_1(\cdot,t). \tag{3.27}$$

Aplicando o operador divergente em (3.27) ficamos com a seguinte expressão:

$$\nabla\cdot\vec{u}_t = \mu\nabla\cdot\Delta\vec{u} + \nabla\cdot Q_1(\cdot,t).$$

Por linearidade temos:

$$(\nabla \cdot \vec{u})_t = \mu\Delta(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot Q_1(\cdot, t).$$

Agora usando a incompressibilidade do sistema temos:

$$\nabla \cdot Q_1(\cdot, t) = 0.$$

□

Lema 3.6. *Dada $u(\cdot, t)$ solução do problema (2.10), com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p < \infty$ então, tem-se:*

$$||u(\cdot, t)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_n(p)||u_0||_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

Demonstração. O resultado é trivial para $p = 1$, basta usar a desigualdade de Young para convolução provado no lema (2.14). Faremos, agora, para $p = \infty$. Note que,

$$|u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} |u_0(y)| \, dy \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} ||u_0(y)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Resumindo as contas, temos:

$$||u(x, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} ||u_0(y)||_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}}.$$

Agora usando interpolação, provada no lema (2.13), segue o resultado. □

Com a posse dos lemas 3.5 e 3.6 finalmente podemos mostrar o principal resultado desse capítulo, para tal vamos usar também o principio de Duhamel. Para um estudo mais aprofundado do principio, recomendo fortemente [7].

Teorema 3.7 (Propriedade de Leray para MHD)**.** *Seja $\vec{z}(\cdot, t)$ solução de Leray do problema MHD incompressível, então:*

$$\lim_{t \to +\infty} ||\vec{z}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Demonstração. Definindo $Q_2(\cdot,t) := -(u\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t)$ podemos reescrever o sistema 3.1 da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{u}_t(\cdot,t) = \mu\Delta\vec{u}(\cdot,t) + Q_1(\cdot,t) \\ \vec{b}_t(\cdot,t) = \nu\Delta\vec{b} + Q_2(\cdot,t) \\ \nabla\cdot\vec{u}(\cdot,t) = 0 \\ \nabla\cdot\vec{b}(\cdot,t) = 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Sendo $t > t^* \geq 0$ suficientemente grande tanto as soluções $\vec{z}(\cdot,t)$ como suas derivadas $D\vec{z}(\cdot,t)$ são suaves e estão em $L^2(\mathbb{R}^3)$, com isso podemos usar sem problemas o principio de Duhamel e escrever:

$$\begin{cases} u(x,t) = e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,\tau)d\tau \\ b(x,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}b(\cdot,t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_2(\cdot,\tau)d\tau. \end{cases}$$

Vamos estudar a norma L^2 do campo $\vec{u}(\cdot,t)$. O campo $\vec{b}(\cdot,t)$ é análogo.

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \left|\left| e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,\tau)\ d\tau \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ \underbrace{\leq}_{(Desigualdade\ triangular)} & \quad ||e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left|\left| \int_{t_0}^{t} e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,t)\ d\tau \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ \underbrace{\leq}_{Desigualdade (2.8)} & \quad ||e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau. \end{aligned}$$

Observe que :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} ||e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \lim_{t\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0)|^2\ dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \lim_{t\to+\infty} |e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0)|^2\ dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora pelo Teorema2.30 temos:

$$\lim_{t\to+\infty} ||e^{\mu\Delta(t-t_0)}u(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Dessa forma nos resta apenas estimar os termos:

$$(I)\int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$
$$(II)\int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_2(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.$$

Pelo lema (3.5) temos que $\nabla\cdot Q_1(\cdot,t) = 0$ e temos também pela definição do $Q_1(\cdot,t)$ que $Q_1(\cdot,t) + \nabla p(\cdot,t) = -(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)$, assim podemos observar que $Q_1(\cdot,t) = \mathbb{P}_H[-(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)]$ onde $\mathbb{P}_H$ é o projetor de Leray. Para um melhor entendimento sobre projetor de Leray, é indicado [25]. Assim:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ = &\int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}\mathbb{P}_H[-(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,\tau) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,\tau)]||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau. \end{aligned}$$

Da literatura temos que o projetor de Leray comuta com o núcleo do calor, usando esse fato na equação acima:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}\mathbb{P}_H[-(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)]||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ = &\int_{t_0}^{t} ||\mathbb{P}_H[-e^{\mu\Delta(t-\tau)}(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)]||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ \leq &\int_{t_0}^{t} ||[-e^{\mu\Delta(t-\tau)}(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)]||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ \underbrace{\leq}_{(Desigualdade\ Triangular)} &\int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau + \int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}(b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau. \end{aligned}$$

Assumindo que $v(\cdot,t)$ é solução do problema de difusão;

$$\begin{cases} v_t(\cdot,t) = \alpha\Delta v(\cdot,t) \\ v(\cdot,t) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Podemos usar o lema (3.6) e assim :

$$||v(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C||v(\cdot,t_0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}(\alpha t)^{-\frac{3}{4}}. \tag{3.29}$$

Portanto, usando a expressão(3.29), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau + \int_{t_0}^{t} ||e^{\mu\Delta(t-\tau)}(b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \\ \leq C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \\ +C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||(b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^3)}\, d\tau. \end{aligned}$$

Vamos trabalhar separadamente com a expressão $||u(\cdot,t)\cdot\nabla u(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^3)}$. De fato:

$$
\begin{aligned}
||(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^3)} &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{j=1}^{3}u_j(\cdot,t)D_ju_i(\cdot,t)\right|\ dx\\
&\underbrace{\leq}_{(Desigualdade\ triangular)} \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}|u_j(\cdot,t)D_j(u_i(\cdot,t))|\ dx\\
&\underbrace{\leq}_{(Desigualdade\ de\ H\ddot{o}lder)} \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{j=1}^{3}|u_j(\cdot,t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{3}|D_j(u_i(\cdot,t))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{i,j=1}^{3}|u_j(\cdot,t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{3}|D_j(u_i(\cdot,t))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{3}\left(\sum_{j=1}^{3}|u_j(\cdot,t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{3}|D_j(u_i(\cdot,t))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx\\
&\leq \sqrt{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{j=1}^{3}|u_j(\cdot,t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx\int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{i,j=1}^{3}|D_j(u_i(\cdot,t))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx\\
&= \sqrt{3}||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||Du(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

Para o segundo termo da integral segue de forma análoga, assim ficamos com a expressão.

$$
\begin{aligned}
&C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||(u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&+C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||(b\cdot\nabla)\vec{b}]||_{L^1(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&\leq \sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&+\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{b}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{b}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&\leq \sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&+\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&= 2\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema3.4 temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > t_*$, tal que:

$$t^{\frac{1}{2}}||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\leq 2\varepsilon\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}||\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}$$

Usando a observação3.3 podemos melhorar um pouco mais a expressão. De fato:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}||\vec{z}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\leq 2\varepsilon\sqrt{3}C\mu^{-\frac{3}{4}}||\vec{z}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau \\
\leq K\varepsilon\mu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau.
\end{aligned}$$

Agora supondo que $t > 2t_0$.

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau &= \int_{t_0}^{t/2}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau + \int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau \\
&\leq (t/2)^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t/2}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau + (t/2)^{-\frac{1}{2}}\int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\ d\tau \leq K_1 t^{-1/4}.
\end{aligned}$$

Com isso em mente, temos que:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}||e^{\mu\Delta(t-\tau)}Q_1(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Assim, resta apenas estimar o termo:

$$\int_{t_0}^{t} ||e^{\nu\Delta(t-\tau)}Q_2(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.$$

Analogamente, vamos ter que :

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} ||e^{\nu\Delta(t-\tau)}Q_2(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ \leq &\int_{t_0}^{t} ||e^{\nu\Delta(t-\tau)}(u\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau + \int_{t_0}^{t} ||e^{\nu\Delta(t-\tau)}(b\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau. \end{aligned}$$

Novamente vamos trabalhar com os termos separadamente de forma análoga feita para (I). Para um leitor mais experiente com esse tipo de cálculo é recomendável ir para o próximo resultado pois a única diferença desse termo para o termo anterior é que não temos a pressão e assim não será necessário usar o Projetor de Leray, o que vai simplificar ainda mais as contas. Logo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} ||e^{\nu\Delta(t-\tau)}(u\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau &\leq C\nu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||(u\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^1(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ &\leq 2\sqrt{3}C\nu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ &\leq 2\sqrt{3}C\nu^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}||\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ &\underbrace{\leq}_{(Teorema 3.4)} 2\varepsilon\sqrt{3}C\nu^{-\frac{3}{4}}||z(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\tau. \end{aligned}$$

O que vai acarretar finalmente que:

$$\lim_{t\to\infty}||z(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3.30}$$

□

4 Problema de Leray em $\dot{H}^m$ para as soluções do problema MHD

O objetivo desse capítulo é estender as desigualdade e decaimentos feitos no capitulo 2 para qualquer m natural, ou seja, queremos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $\vec{z}(\cdot,t)$ solução de Leray do problema MHD incompressível, então para vale o caso tridimensional para qualquer $m \geq 1$:*

1. $(t-t_0)^m||(D^m\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_m\displaystyle\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^m||(D^{m+1}\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$
$\leq m\displaystyle\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{m-1}||(D^m\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau;$

2. $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}(\tau-t_0)^m||(D^{m+1}\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau < +\infty;$

3. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{m}{2}}||(D^m\vec{z})(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$

Para todo $t > t_*$ suficientemente grande e $C_m > 0$.

Demonstração. Vamos mostrar o resultado usando indução em m, assim sendo $m = 1$ devemos verificar as desigualdades:

1. $(t-t_0)||(D\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_1\displaystyle\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||(D^2\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$
$\leq \displaystyle\int_{t_0}^{t}||(D\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau;$

2. $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}(\tau-t_0)||(D^2\vec{z})(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau < +\infty;$

3. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}}||(D\vec{z})(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$

Para verificar esses resultados podemos trabalhar com as mesma ideias já feitas anteriormente, como por exemplo no Teorema3.2. Relembrando a equação:

$$\vec{u}_t(\cdot,t) + (u\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t) + \nabla p(\cdot,t) = \mu\Delta\vec{u}(\cdot,t) + (b\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t). \tag{4.1}$$

Reescrevendo a equação (4.1) e diferenciando em relação a x_l, com $1 \leq l \leq 3$, temos:

$$\begin{aligned} &D_l[(u_i)_t](\cdot,t) + \sum_{j=1}^{3} u_j(\cdot,\tau)D_j u_i(\cdot,\tau) + D_l D_i p(\cdot,t) \\ &= \mu\sum_{j=1}^{3} D_j D_j D_l u_i(\cdot,t) + \sum_{j=1}^{3} D_l(b_j(\cdot,t)D_j b_i(\cdot,t)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Multiplicando (4.2) por $2(t-t_0)D_l(u_i)$ e integrando em $\mathbb{R}^3\times[t_0,t]$ temos:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)[(D_l(u_i(\cdot,\tau)))^2]_\tau\, dxd\tau}_{(I)} + \underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l u_i D_l[u_j D_j u_i]\, dxd\tau}_{(II)} \\ &\quad + \underbrace{2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l(u_i(\cdot,\tau))D_l[D_i(p(\cdot,\tau))]\, dxd\tau}_{III} \\ &= \underbrace{2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l[u_i(\cdot,\tau)]D_j D_j D_l[u_i(\cdot,\tau)]\, dxd\tau}_{(IV)} \\ &\quad + \underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l[u_i(\cdot,\tau)]D_l[b_j(\cdot,\tau)D_j b_i(\cdot,\tau)]\, dxd\tau}_{(V)}\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podemos seguir as mesmas ideia feitas em resultados passados, ou seja, vamos resolver separadamente as integrais, deste modo para um leitor já familiarizado com esses tipo de calculo pode ir direto para a expressão(4.16), onde nessa expressão já foi feito os calculos para cada expressão do sistema MHD e estamos somando os resultados. Dito isso, podemos explicar o passo a passo que será feito, para (I) vamos usar o Teorema de fubinni e Integração por Partes na reta, nas expressões (II) e (V) aplicamos integração por parte unidos a desigualdade de Cauchy-Scharwz e por fim em (III) e (IV) aplicamos apenas integração por partes.

$$\begin{aligned}
(I) &= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau - t_0)[(D_l(u_i(\cdot,\tau)))^2]_\tau \; dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(Teorema 2.4)} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)[(D_l(u_i(\cdot,\tau)))^2]_\tau \; d\tau dx \\
&\underbrace{=}_{(IPP)2.10} (t-t_0)\int_{\mathbb{R}^3}|D_l u_i(\cdot,t)|^2 \; dx - \int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^{t}(D_l[u_i(\cdot,\tau)])^2 \; d\tau dx \\
&\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ [i,l])} (t-t_0)||D\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \int_{t_0}^{t}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \; d\tau.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
(II) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau - t_0)D_l u_i(\cdot,\tau)D_l[u_j(\cdot,\tau)D_j(u_i(\cdot,\tau))] \; dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau - t_0)D_l u_i(\cdot,\tau)[D_l u_j(\cdot,\tau)D_j u_i(\cdot,\tau) + u_j(\cdot,\tau)D_l D_j u_i(\cdot,\tau)] \; dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\int_{\mathbb{R}^3} D_l u_i D_l u_j D_j u_i \; dxd\tau + 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\int_{\mathbb{R}^3} D_l u_i u_j D_l D_j u_i \; dxd\tau \\
&\underbrace{=}_{(Teorema 2.10)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\left(\int_{\mathbb{R}^3} D_j D_l u_i D_l u_j u_i \; dxd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} D_j D_l u_i u_j D_l u_i \; dx\right) \; d\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(x\leq|x|)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)\left(\int_{\mathbb{R}^3} |D_j D_l u_i||D_l u_j||u_i| \; dxd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} |D_j D_l u_i||u_j||D_l u_i| \; dx\right) \; d\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ [i,l])} 2\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \; d\tau \\
&\quad +2\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \; d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\leq}_{(||\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)})} \quad & 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
& +2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\underbrace{\leq}_{Desigualdade(2.1)} \quad & 2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
& +2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
& = 4k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Teorema3.1)} \quad & 4k||\vec{z}_0||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Analogamente como feito na demonstração do Teorema3.2, mais precisamente na expressão(3.25), temos que existe $t_0 > t_*$ suficientemente grande, tal que :

$$
||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \frac{C}{4k||\vec{z}_0||^{\frac{1}{2}}}{}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.6}
$$

Usando (4.6) em (4.5) temos:

$$
C\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau. \tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
(III) &= 2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l u_i(\cdot,\tau)D_lD_ip(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{(IPP)(Teorema 2.10)} &\quad -2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{\mathbb{R}^3}D_lD_iu_i(\cdot,\tau)D_lp(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ i)} &\quad -2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{\mathbb{R}^3}D_l\sum_{i=1}^{3}D_iu_i(\cdot,\tau)D_lp(\cdot,\tau)\ dxd\tau = 0.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
(IV) &= 2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_lu_i(\cdot,\tau)D_jD_jD_lu_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{(IPP)(Teorema 2.10)} &\quad -2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{\mathbb{R}^3}D_jD_lu_i(\cdot,\tau)D_jD_lu_i(\cdot,\tau)\ dxd\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ [i,l])} &\quad -2\mu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
(V) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_lu_i(\cdot,\tau)D_l(b_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_lu_i(\cdot,\tau)[D_lb_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau)+b_j(\cdot,\tau)D_lD_jb_i(\cdot,\tau)]\ dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{\mathbb{R}^3}D_lu_iD_lb_jD_jb_i\ dxd\tau + 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\int_{\mathbb{R}^3}D_lu_ib_jD_lD_jb_i\ dxd\tau \\
\underbrace{=}_{(IPP)(Teorema 2.10)} &\quad -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\left(\int_{\mathbb{R}^3}D_jD_lu_iD_lb_jb_i\ dxd\tau+\int_{\mathbb{R}^3}D_jD_lu_ib_jD_lb_i\ dx\right)\ d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(x\leq|x|)} &\ 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|D_jD_lu_i||D_lb_j||b_i|\ dxd\tau+\int_{\mathbb{R}^3}|D_jD_lu_i||b_j||D_lb_i|\ dx\right)\ d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ [i,l])} &\quad 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&\quad +2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{b}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\leq}_{(||\vec{b}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)})} 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&+2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(Desigualdade(2.1)} 2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&+2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&= 4k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(Termo(4.6))} C\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Assim pelas expressões (4.4),(4.5),(4.8),(4.9) e (4.10).

$$
(t-t_0)||D\vec{u}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+2\mu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ dxd\tau \leq \int_{t_0}^{t}||D\vec{u}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau. \tag{4.11}
$$

Agora relembrando a segunda equação do sistema MHD.

$$
\vec{b}_t(\cdot,t)+(u\cdot\nabla)\vec{b}(\cdot,t)=\nu\Delta\vec{u}(\cdot,t)+(b\cdot\nabla)\vec{u}(\cdot,t). \tag{4.12}
$$

Reescrevendo a equação(4.12) coordenada a coordenada e diferenciando em relação a x_l, com $1\leq l\leq 3$, temos:

$$
D_l((b_i(\cdot,t))_t)+\sum_{j=1}^{3}u_jD_jb_i(\cdot,t)=\nu\sum_{j=1}^{3}D_jD_jD_lb_i(\cdot,t)+\sum_{j=1}^{3}D_l(b_j(\cdot,t)D_ju_i(\cdot,t)). \tag{4.13}
$$

Multiplicando (4.13) por $2(t-t_0)D_lb_i(\cdot,t)$ e integrando em $\mathbb{R}^3\times[t_0,t]$ temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)[(D_l(b_i(\cdot,\tau)))^2]_\tau\ dxd\tau\\
+2\sum_{j=1}^{3}&\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l(b_i(\cdot,\tau))D_l(u_j(\cdot,\tau)D_j(b_i(\cdot,\tau)))\ dxd\tau\\
=2\nu\sum_{j=1}^{3}&\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l(b_i(\cdot,\tau))D_jD_jD_l(b_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau\\
+2\sum_{j=1}^{3}&\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)D_l(b_i(\cdot,\tau))D_l(b_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))\ dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Podemos seguir os passos análogos ao feito na primeira equação do sistema MHD e vamos chegar as seguinte resultado:

$$
(t-t_0)||D\vec{b}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+2\nu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{b}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\le\int_{t_0}^{t}||D\vec{b}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \tag{4.15}
$$

Somando as expressões (4.11) e (4.15) temos:

$$
\begin{aligned}
&(t-t_0)||D\vec{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+(t-t_0)||D\vec{b}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
+2\mu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau&+2\nu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\\
&\le\int_{t_0}^{t}||D\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau+\int_{t_0}^{t}||Db(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Usando as definições e notações feitas no capítulo 1 temos:

$$
(t-t_0)||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C_1\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)||D^2\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau\le\int_{t_0}^{t}||D\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau
$$

Onde $C_1=2\min(\mu,\nu)$ Mostrando assim o resultado (1) para $m=1$. Devemos mostrar agora que:

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\tau - t_0)||(D^2 z)(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau < +\infty. \tag{4.17}$$

Para provar isso podemos usar o Teorema3.1 da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)||(D^2 \vec{z})(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\ \leq\ &||\vec{z}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)||(D^2 \vec{z})(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq ||\vec{z}(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Fazendo t crescer indefinidamente temos a seguinte expressão:

$$\int_{t_0}^{\infty} (\tau - t_0)||Dz(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \leq ||z(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.18}$$

Usando (4.18) em (4.16) segue o resultado do item (2), O item (3) já foi mostrado no Teorema3.4, agora suponhamos por indução que o resultado é válido para um $m = k$ e vamos mostrar que o resultado se mantém proveitoso para um $m = k + 1$, para tal feito vamos tomar a equação(4.2), derivar em relação $x_{l_1}, \cdots, x_{l_{k+1}}$, multiplicar o resultado por $2(t - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}} u_i$ e integrar na região $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ e ficamos com as expressão.

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}[(D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i(\cdot,\tau))^2]_\tau dxd\tau}_{(I)} \\
&+\underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))dxd\tau}_{(II)} \\
&+\underbrace{2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(D_i(p_i(\cdot,\tau)))dxd\tau}_{(III)} \\
&=\underbrace{2\mu\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))D_jD_j(D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau)))dxd\tau}_{(IV)} \\
&+\underbrace{2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_j(\cdot,\tau)D_jb_i(\cdot,\tau))dxd\tau}_{(V)}\,.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Resolvendo as integrais termo a termo separadamente temos:

$$
\begin{aligned}
(I) &= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}[(D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i(\cdot,\tau))^2]_\tau dxd\tau \\
\underbrace{=}_{(Teorema 2.4)} &\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}[(D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i(\cdot,\tau))^2]_\tau\ d\tau dx \\
\underbrace{\leq}_{(IPP)(Teorema 2.10)} &(t-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}(D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i(\cdot,t))^2\ dx \\
&-(k+1)\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}(D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i(\cdot,\tau))^2\ d\tau dx \\
\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ [i,l_1,\cdots,l_{k+1}])} &(t-t_0)^{k+1}||D^{k+1}\vec{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&-(k+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$(II) = 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_j(\cdot,\tau)D_ju_i(\cdot,\tau))dxd\tau$$

$$= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))\times$$

$$[D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_j(\cdot,\tau))D_ju_i(\cdot,\tau)+\cdots+u_j(\cdot,\tau)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}D_ju_i(\cdot,\tau)]dxd\tau$$

$$= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_j(\cdot,\tau))D_ju_i(\cdot,\tau)dxd\tau$$

$$+\cdots+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i(\cdot,\tau))(u_j(\cdot,\tau))D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}D_j(u_i(\cdot,\tau))dxd\tau$$

$$\underbrace{\leq}_{(IPP)(Teorema2.10)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}D_{l_1}\cdots D_jD_{l_{k+1}}(u_i)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_j)(u_i)dxd\tau$$

$$-\cdots-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}D_jD_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)(u_j)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)dxd\tau$$

$$\underbrace{\leq}_{(x\leq|x|)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}|D_{l_1}\cdots D_jD_{l_{k+1}}u_i||D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_j||u_i|dxd\tau$$

$$+\cdots+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3}|D_jD_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i||u_j||D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}u_i|dxd\tau$$

$$\underbrace{\leq}_{(Somando\ \ em\ \ [i,l_1,\ldots,l_{k+1}])} 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{u}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$

$$+\cdots+2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{u}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$

$$\underbrace{\leq}_{(||\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)})} 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$

$$+\cdots+2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{z}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$

$$\underbrace{\leq}_{(Desigualdade(2.1))} 2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau$$

$$+\cdots+2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||Dz||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} ||D\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} ||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \; d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Teorema 3.1)} & \lambda ||\vec{z}_0||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||D\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} ||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \; d\tau \\
\underbrace{\leq}_{Termo (3.25)} & C \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||D^{k+2}\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \; d\tau.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

$$
\begin{aligned}
(III) &= 2 \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_i) D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(D_i(p_i)) \; dx d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(IPP)(Teorema(2.10))} & -2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}} D_i(u_i) D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}} p_i \; dx d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Somando \; em \; i)} & -2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}} D_i(u_i) D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}} p_i \; dx d\tau = 0.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
(IV) &= 2\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_i) D_j D_j D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_i) dx d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(IPP)(Teorema 2.10)} & -2\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^3} D_j D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_i) D_j D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_i) \; dx d\tau \\
&= -2\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^3} |D_j D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_i)|^2 \; dx d\tau \\
\underbrace{\leq}_{(Somando \; em \; [i, l_1, \cdots, l_{k+1}])} & -2\mu \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \; d\tau.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

$$
\begin{aligned}
(V) &= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}(\tau-t_0)^{k+1}D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_jD_jb_i)\ dxd\tau \\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_j)D_j(b_i)\ dxd\tau \\
&+\cdots+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)(b_j)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}D_j(b_i)\ dxd\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(IPP)(Teorema 2.10)} -2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3} D_jD_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_j)(b_i)\ dxd\tau \\
&-\cdots-2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3} D_jD_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)(b_j)D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_i)\ dxd\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(x\leq|x|)} 2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3} |D_jD_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)||D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_j)||b_i|\ dxd\tau \\
&+\cdots+2\sum_{j=1}^{3}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^3} |D_jD_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(u_i)||b_j||D_{l_1}\cdots D_{l_{k+1}}(b_i)|\ dxd\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(Somando\ em\ [i,l_1,\cdots,l_{k+1}])} 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{b}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&+\cdots+2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{b}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&\underbrace{\leq}_{(||\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)})} 2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&+\cdots+2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+1}\vec{z}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&\underbrace{\leq}_{Desigualdade(2.1)} 2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D^{k+2}\vec{z}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&+\cdots+2k\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}||D^{k+2}\vec{z}||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
&= \lambda\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\leq}_{(Teorema 3.1)} \lambda||\vec{z}_0||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||D\vec{z}||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ d\tau$$
$$\underbrace{\leq}_{Desigualdade (3.25)} C \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||D^{k+2}\vec{z}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ d\tau. \tag{4.24}$$

Juntando as expressões (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24) temos o seguinte resultado:

$$(t - t_0)^{k+1} ||D^{k+1}\vec{u}(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\mu \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k+1} ||D^{k+2}\vec{u}(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ d\tau$$
$$\leq (k+1) \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{k} ||D^{k+1}\vec{u}(\cdot, \tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ d\tau. \tag{4.25}$$

Agora vamos trabalhar com a segunda expressão do sistema MHD, seguindo os passos feito anteriormente, ou seja, derivando em relação a $x_{l_1}, \cdots, x_{l_{k+1}}$, multiplicando o resultado por $2(t - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(b_i)$ e por fim integramos na região $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ e nos resta a expressão:

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{k+1} [(D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}} b_i(\cdot, \tau))^2]_\tau dx d\tau$$
$$+2 \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(b_i(\cdot, \tau)) D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(u_j(\cdot, \tau) D_j b_i(\cdot, \tau)) dx d\tau$$
$$= 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(b_i(\cdot, \tau)) D_j D_j (D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(b_i(\cdot, \tau))) dx d\tau$$
$$+2 \sum_{j=1}^{3} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{k+1} D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(b_i(\cdot, \tau)) D_{l_1} \cdots D_{l_{k+1}}(b_j(\cdot, \tau) D_j u_i(\cdot, \tau)) dx d\tau.$$

Ocultando os cálculos da expressão porém tendo em mente que são inteiramente análogo ao feito na primeira equação do sistema MHD, temos:

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^{k+1}||D^{k+1}b(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}b(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\leq (k+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}b(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Somando as expressões (4.25) e (4.26), podemos usar as definições do capítulo 1 ficando assim com o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^{k+1}||D^{k+1}\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (t-t_0)^{k+1}||D^{k+1}\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
2\mu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau + 2\nu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\leq (k+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}\vec{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau + (k+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}\vec{b}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
(t-t_0)^{k+1}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_m\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau \\
\leq (k+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Com isso por indução sobre m temos que o $item(1)$ é valido para todo $m \in \mathbb{N}$. Para mostrar o $item(2)$ vamos usar o $item(1)$ já demonstrado. De fato:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+2}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\underbrace{\leq}_{Item(1)} (k+1)\int_{t_0}^{\infty}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau < +\infty
\end{aligned}
$$

Resta mostrar por fim o $item(3)$, onde devemos provar que $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\frac{k+1}{2}}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$. Usando a hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k+1}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\underbrace{\leq}_{(Item(1))}(k+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{k}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por outro lado usando novamente o $item(1)$, temos:

$$t^{k+1}\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^{k+1}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}=(t-t_0)^{k+1}||D^{k+1}\vec{z}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq\varepsilon.$$

Mostrando, desta forma, o resultado desejado.

$\square$

Observação 4.2. *Vale ressaltar que, na prova do decaimento das derivadas superiores, só usamos o decaimento de $\|\vec{z}\|$ e $\|D\vec{z}\|$, diferentemente do que foi feito em [14], onde os autores dependiam mostrar o decaimento de outras derivadas de ordem $m=2$, $m=3$ ou $m=4$, por exemplo.*

A Prova da desigualdade do tipo Sobolev (2.1)

Neste apêndice iremos provar a desigualdade do tipo Sobolev (2.1), recentemente obtida em [5]. Primeiro, observe que aplicando sucessivamente a desigualdade (2.3) descrita no capítulo 1, obtém-se

$$\|D^l z\|_{L^2} \leq \|z\|_{L^2}^{\frac{m+1-l}{m+1}} \|D^{m+1} z\|_{L^2}^{\frac{l}{m+1}}, \tag{A.1a}$$

$$\|D^l z\|_{L^2} \leq \|Dz\|_{L^2}^{\frac{m+1-l}{m}} \|D^{m+1} z\|_{L^2}^{\frac{l-1}{m}}, \tag{A.1b}$$

$$\|D^{l+2} z\|_{L^2} \leq \|z\|_{L^2}^{\frac{m-l-1}{m+1}} \|D^{m+1} z\|_{L^2}^{\frac{l+2}{m+1}}, \tag{A.1c}$$

$$\|D^{l+2} z\|_{L^2} \leq \|Dz\|_{L^2}^{\frac{m-l-1}{m}} \|D^{m+1} z\|_{L^2}^{\frac{l+1}{m}}, \tag{A.1d}$$

$$\|D^{m-l} z\|_{L^2} \leq \|z\|_{L^2}^{\frac{l+1}{m+1}} \|D^{m+1} z\|_{L^2}^{\frac{m-l}{m+1}}, \tag{A.1e}$$

$$\|D^{m-l} z\|_{L^2} \leq \|Dz\|_{L^2}^{\frac{l+1}{m}} \|D^{m+1} z\|_{L^2}^{\frac{m-l-1}{m+1}}. \tag{A.1f}$$

Agora, observe que pela desigualdade (2.2), tem-se

$$\begin{aligned} &\|D^l z\|_{L^\infty} \|D^{m-l} z\|_{L^2} \leq \|D^l z\|_{L^2}^{1/4} \|D^{l+2} z\|_{L^2}^{3/4} \|D^{m-l} z\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\|D^l z\|_{L^2}^{a/4}}_{(1)} \underbrace{\|D^l z\|_{L^2}^{\frac{(1-a)}{4}}}_{(2)} \underbrace{\|D^{l+2} z\|_{L^2}^{3b/4}}_{(3)} \underbrace{\|D^{l+2} z\|_{L^2}^{\frac{3}{4}(1-b)}}_{(4)} \underbrace{\|D^{m-l} z\|_{L^2}^{c}}_{(5)} \underbrace{\|D^{m-l} z\|_{L^2}^{1-c}}_{(6)}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

para certos $(a, b, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ a serem escolhidos de forma conveniente. De fato, substituindo (A.1a) em (1), (A.1b) em (2), (A.1c) em (3), (A.1d) em (4), (A.1e) em

(5) e (A.1f) em (6), na desigualdade (A.2), obtém-se (após juntar todos os termos):

$$\begin{aligned}
&\|D^l z\|_{L^\infty}\|D^{m-l}z\|_{L^2}\\
&\leq \|z\|^{\frac{a}{4}\frac{m+1-l}{m+1}+\frac{3b}{4}\frac{m-l-1}{m+1}+c\frac{l+1}{m+1}} \times\\
&\times \|Dz\|^{\frac{1-a}{4}\frac{m-l+1}{m}+\frac{3}{4}(1-b)\frac{m-l-1}{m}+\frac{(1-c)(l+1)}{m}} \times\\
&\times \|D^{m+1}z\|^{\frac{a}{4}\frac{l}{m+1}+\frac{1-a}{4}.\frac{l-1}{m}+\frac{3b}{4}\frac{l+2}{m+1}+\frac{3(1-b)}{4}\frac{l+1}{m}+c\frac{m-l}{m+1}+(1-c)\frac{m-l-1}{m+1}}.
\end{aligned}$$

Deve-se escolher $a, b, c \in [0, 1]$, tais que para cada m e l, (sob as hipóteses da desigualdade (2.1)), se tenha

$$\begin{aligned}
\frac{a}{4}\frac{m+1-l}{m+1}+\frac{3b}{4}\frac{m-l-1}{m+1}+c\frac{l+1}{m+1}&=1/2\\
\frac{1-a}{4}\frac{m-l+1}{m}+\frac{3}{4}(1-b)\frac{m-l-1}{m}+\frac{(1-c)(l+1)}{m}&=1/2\\
\frac{a}{4}\frac{l}{m+1}+\frac{1-a}{4}.\frac{l-1}{m}+\frac{3b}{4}\frac{l+2}{m+1}+\frac{3(1-b)}{4}\frac{l+1}{m}+c\frac{m-l}{m+1}+(1-c)\frac{m-l-1}{m+1}&=1.
\end{aligned}$$

Note que, ao mostrarmos a existência de a,b e c satisfazendo o sistema acima, a desigualdade (2.1) estará demonstrada. Porém, é possível escolher tais constantes para cada m e l? A resposta é dada no lema a seguir.

Lema A.1. *Sejam $m > 1$ e $0 < l < m - 1$. Então o sistema*

$$\begin{cases}
\frac{m-l+1}{4(m+1)}a+\frac{3(m-l-1)}{4(m+1)}b+\frac{l+1}{m+1}c=\frac{1}{2}\\
\frac{m-l+1}{4m}a+\frac{3(m-l-1)}{4m}b+\frac{l+1}{m}c=\frac{m+1}{2m}\\
\frac{-l+m+1}{4m^2+4m}a+\frac{-3l+3m-3}{4m^2+4m}b+\frac{1}{m+1}c=\frac{-2l+3m-1}{2m^2+2m}
\end{cases} \tag{A.3}$$

tem solução $a, b, c \in [0, 1]^3$.

Demonstração. Podemos escrever o sistema acima na forma matricial e usar escalonamento de matriz a fim de resolver-lo.

$$\begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ \frac{-l+m+1}{4m} & \frac{-3l+3m-3}{4m} & \frac{l+1}{m} & \frac{m+1}{2m} \\ \frac{-l+m+1}{4m^2+4m} & \frac{-3l+3m-3}{4m^2+4m} & \frac{1}{m+1} & \frac{-2l+3m-1}{2m^2+2m} \end{pmatrix}$$

- $L_2 - \left(\dfrac{m+1}{m}\right) L_1 \to L_2$

$$\begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-l+m+1}{4m^2+4m} & \frac{-3l+3m-3}{4m^2+4m} & \frac{1}{m+1} & \frac{-2l+3m-1}{2m^2+2m} \end{pmatrix}$$

- $L_3 - \left(\dfrac{1}{m}\right) L_1 \to L_3$

$$\begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-l+m-1}{m^2+m} & \frac{-l+m-1}{m^2+m} \end{pmatrix}$$

- $L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-l+m-1}{m^2+m} & \frac{-l+m-1}{m^2+m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Onde por suas vez possui solução geral.

$$\begin{pmatrix} \frac{4l-2m+2}{l-m-1} - \frac{3l-3m+3}{l-m-1}b \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo o sistema possui solução para cada m, l dado, isso garante pra gente a existência dos m, l satisfazendo assim a Desigualdade mostrada anteriormente. □

Referências

[1] R. Agapito e M. Schonbek, *Non-uniform decay of MHD equations with and without magnetic diffusion*, Commun. Partial Differ. Equ. 32(10–12), 1791–1812, (2007).

[2] L. Brandolese e M. E. Schonbek, Large Time Behavior of the Navier-Stokes Flow.Handbook of mathematical analysis in mechanics of viscous fluids, 579–645, Springer, Cham, (2018).

[3] R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library Edition. Second Series, (1995).

[4] H. Brézis, *Functional analysis, Theory and applications, (Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.) Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*, Paris: Masson,(1994).

[5] Braz e Silva, P., Zingano, J.P. & Zingano, P.R. *A Note on the Regularity Time of Leray Solutions to the Navier–Stokes Equations*. J. Math. Fluid Mech. 21, 8 (2019).

[6] P. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics* (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. (2001).

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, (2002).

[8] C. L. Fefferman, *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems*, 57–67, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, (2006).

[9] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Hold, Rinehart and Winston, New York, (1969).

[10] T. Kato, *Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equation in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions*. Math. Z., (**187**) (4), 471-480, (1984).

[11] H.O. Kreiss e J. Lorenz, *Initial-boundary value problems and the Navier- Stokes equations*, Academic Press, New York,(1989).

[12] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63(1), 193–248 (1934).

[13] K. Masuda, *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J. (2) 36 (4), 623–646, (1984).

[14] W.G. Melo, C.F. Perusato, R.H Guterres. et al. *Large Time Decay for the Magnetohydrodynamics System in $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$*. Acta Appl Math 168, 1–16 (2020).

[15] C.F. Perusato, *Contribuições à Teoria Matemática de Escoamentos Magneto-micropolares*. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, (2018).

[16] C. Perusato, *O problema de Leray para equação de Navier-Stokes e algumas generalizações*. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, (2014).

[17] M. Schonbek, *Decay of solutions to parabolic conservation laws*, Commun. Partial Differ. Equ. 5(5), 449–473, (1980).

[18] M. Schonbek, *L^2 decay for weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 88(3), 209–222 (1985).

[19] M. Schonbek, *Large time behaviour of solutions to the Navier–Stokes equations*, Commun. Partial Differ. Equ. 11(7), 733–763 (1986).

[20] M. Schonbek, *Large time behaviour of solutions to the Navier–Stokes equations in H^m spaces*. Commun. Partial Differ. Equ. 20(1–2), 103–117, (1995).

[21] M. Schonbek, M. Wiegner, *On the decay of higher-order norms of the solutions of Navier– Stokes equations*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 126(3), 677–685, (1996).

[22] L. Schütz, J. P. Zingano, P. R. Zingano, *On the supnorm form of Leray's problem for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Math. Phys. 56, (2015).

[23] M. Taylor, *Partial Differential Equations III, Nonlinear Equations*, 2nd Edition, Applied Mathematical Sciences, (2011).

[24] M. Sermange, R. Temam, *Some mathematical questions related to the MHD equations*, Commun. Pure Appl. Math. 36, 635–664, (1983).

[25] R. Temam, *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis.* (1979).