



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Maria Mariana Alves de França

Recorrência e Transiência do Passeio Aleatório em Árvores e Sua Conexão com Redes  
Elétricas

Recife

2024

Maria Mariana Alves de França

Recorrência e Transiência do Passeio Aleatório em Árvores e Sua Conexão com Redes Elétricas

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística.

**Área de Concentração:** Probabilidade

**Orientador (a):** Pablo Martin Rodriguez

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

França, Maria Mariana Alves de.

Recorrência e transiência do passeio aleatório e a sua conexão com redes elétricas / Maria Mariana Alves de França. - Recife, 2024.

44f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Estatística, 2024.

Orientação: Pablo Martin Rodriguez.

1. Número de ramificação; 2. Árvore; 3. Passeios aleatórios.  
I. Rodriguez, Pablo Martin. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**MARIA MARIANA ALVES DE FRANÇA**

**Recorrência e transiência do passeio aleatório em árvores e sua  
conexão com redes elétricas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

[Aprovada](#) em 24 de julho de 2024.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr Pablo Martin Rodriguez  
Presidente/Orientador, UFPE

Profª Drª Nevena Maric  
Examinadora Externa à Instituição  
Union University

Prof. Dr Élcio Lebensztayn  
Examinador Externo à Instituição, UNICAMP

Dedico a todos que me apoiaram em toda minha trajetória acadêmica.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por tudo. Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, Josilene e Luis e a minha irmã Júlia, que me apoiaram bastante no começo da minha caminhada na pós-graduação.

Agradeço ao meu noivo, Alyson, por toda a escuta e todo amor durante a minha trajetória, nos momentos de caos, sempre esteve ao meu lado para me apoiar. Aos meus colegas de turma, por todo conhecimento compartilhado.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte de toda minha trajetória. Agradeço a CAPES por todo apoio financeiro. Sem ele, seria insustentável continuar na pós-graduação.

E por fim, agradeço ao meu orientador Pablo. Agradeço profundamente por toda troca, todo conhecimento compartilhado, pela confiança e pela paciência.

## RESUMO

Neste trabalho estudamos a recorrência e transiência do passeio aleatório em árvores com raiz. O passeio aleatório é definido de tal forma que quando uma partícula encontra-se em um vértice de grau  $n + 1$  de uma árvore  $\Gamma$ , então ela escolhe pular para o vértice antecessor com probabilidade  $\lambda/(\lambda + n)$ , ou para um dos  $n$  vértices sucessores, com probabilidade  $1/(\lambda + n)$ . Estudamos os argumentos de Lyons (1990) para mostrar que este passeio aleatório é recorrente se  $\lambda > br(\Gamma)$  e transiente se  $\lambda < br(\Gamma)$ . Isto envolve a análise de propriedades de árvores e da conexão entre passeios aleatórios e redes elétricas.

**Palavras-chaves:** Passeio Aleatório. Árvores. Fluxo. Corrente. Número de Ramificação. Recorrência.

## ABSTRACT

In this work, we study the recurrence and transience of the random walk on the rooted trees. The random walk is defined in such a way that when a particle finds itself in a vertex of degree  $n+1$  of a tree  $\Gamma$ , then it chooses to jump to the predecessor vertex with probability  $\lambda/(\lambda+n)$ , or to one of the  $n$  successor vertices with probability  $1/(\lambda+n)$ . We studied the arguments of Lyons (1990) to prove that this random walk is recurrent if  $\lambda > br\Gamma$  and transient if  $\lambda < br\Gamma$ . This involves analyzing the properties of trees and the connection between random walks and electric networks.

**Keywords:** Random Walk. Tree. Flow. Current. Branching Number. Recurrence.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma$	Letra grega maiúscula Gama
$\lambda$	lambda
$\theta$	teta
$\sigma$	sigma
$\tau$	tau
$\Pi$	Letra grega maiúscula Pi
$\alpha$	alfa
$\rho$	ro
$\psi$	psi
$\phi$	fi
$\Phi$	Letra grega maiúscula Fi

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE ÁRVORES</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1	NÚMERO DE RAMIFICAÇÃO E CRESCIMENTO DE UMA ÁRVORE . . .	12
2.2	ÁRVORES QUASE-ESFÉRICAS E ÁRVORES SUBPERIÓDICAS . . . . .	18
<b>3</b>	<b>RECORRÊNCIA DO PASSEIO ALEATÓRIO EM ÁRVORES</b> . . . . .	<b>28</b>
3.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	28
3.2	REDES ELÉTRICAS E PASSEIOS ALEATÓRIOS . . . . .	28
3.3	PROVA DO TEOREMA 4.3,(LYONS, 1990) . . . . .	34
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>41</b>
	<b>APÊNDICE A – CONCEITOS</b> . . . . .	<b>42</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O conceito de passeio aleatório foi formalizado matematicamente por Karl Pearson em 1905. No artigo , Pearson propôs o seguinte: “um homem parte de um ponto 0 e anda 1 passo em linha reta, depois vira qualquer ângulo e anda 1 passo em linha reta. Ele repete esse processo  $n$  vezes. Eu gostaria de encontrar a probabilidade de que após  $n$  passos, ele esteja a uma distância entre  $r$  e  $r + dr$  do ponto inicial 0”(PEARSON, 1905). A teoria dos passeios aleatórios foi amplamente desenvolvida no século XX, com avanços significativos em processos estocásticos, teoria da probabilidade, entre outros campos matemáticos e se relacionando com outras áreas, como a física e a biologia. Um trabalho importante que relaciona a física e a biologia com o passeio aleatório foi o trabalho "Random Walks and the Theory of Brownian Motion"(KAC, 1947). No âmbito matemático, temos a conexão de passeios aleatórios e grafos feita por (GÖBEL; JAGERS, 1974) que faz um estudo sobre a expectativa de tempos de recorrência, tempos de primeira entrada e tempos de deslocamentos.

Dentro da teoria de grafos, temos um grafo especial que são as árvores. Uma árvore é um grafo conectado sem ciclos. Imaginamos a árvore crescendo longe de um vértice fixo que identificamos como sua raiz. Cada vértice então tem galhos que levam aos seus filhos, que são seus vizinhos mais distantes da raiz. Existe uma forma de definir o número "médio"de ramificações por vértice, que chamamos de **número de ramificação**.

Há uma correspondência notável, mas facilmente estabelecida, entre redes elétricas e passeios aleatórios em grafos. Dado um grafo conectado finito com condutâncias (ou seja, números positivos) atribuídas às arestas, consideramos o passeio aleatório que pode ir de um vértice apenas para um vértice adjacente e cujas probabilidades de transição de um vértice são proporcionais às condutâncias ao longo das arestas a serem obtidas.

Podemos fazer outra pergunta sobre fluxo nas árvores, esta relativa à corrente elétrica. Se números positivos,  $C(\sigma, \tau)$ , forem atribuídos às arestas de uma árvore, condutâncias, nesse caso, a energia de um fluxo  $\theta$  é definida como  $\sum_{0 \neq \sigma \in \Gamma} \theta(\sigma)/C(\sigma, \tau)$ . Dizemos que a corrente elétrica flui da raiz ao infinito se houver uma fluxo diferente de zero com energia finita.

Nosso objetivo é mostrar o quão é fundamental o número de ramificação para os processos probabilísticos associados a uma árvore e a redes elétricas como feito por (LYONS, 1990). Para explicar o o que fizemos, suponha a seguinte situação: suponha que façamos um passeio aleatório em uma árvore, começamos na raiz, por exemplo, e em cada vértice escolha qualquer

uma das arestas que sai com probabilidade igual e vá para o outro lado. Existem duas possibilidades: ou o passeio é transitório (ou seja, o passeio com probabilidade positiva a partícula retorna à raiz apenas um número finito de vezes) ou é recorrente (ou seja, quase certamente retorna à raiz infinitas vezes). A dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre árvores, vendo um pouco dos conceitos de árvores quase-esféricas e subperiódicas. No Capítulo 3 estudaremos a recorrência do passeio aleatório em árvores, fazendo uma breve motivação sobre o passeio aleatório em uma árvore, logo depois relacionaremos o passeio aleatório com as redes elétricas e por fim, provaremos Teorema o 4.3(LYONS, 1990).

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE ÁRVORES

Usaremos o termo **árvore**,  $\Gamma(V, E)$ , em que  $V$  é o conjunto de vértices de  $\Gamma$  e  $E$  o conjunto de arestas. Para denotar um grafo conectado contável com um vértice distinto chamado **raiz** que não tem loops ou ciclos e que é localmente finito, ou seja, cada vértice pertence apenas a um número finito de arestas.

Se  $\sigma \in V$  for um vértice, escrevemos  $|\sigma|$  para o número de arestas do único caminho conectando 0 a  $\sigma$ . Consistente com a orientação, escrevemos da seguinte forma:  $\sigma \leq \tau$  se  $\sigma$  está no caminho de 0 a  $\tau$ ;  $\sigma < \tau$  se  $\sigma \leq \tau$  e  $\sigma \neq \tau$ ;  $\sigma \rightarrow \tau$  se  $\sigma \leq \tau$  e  $|\tau| = |\sigma| + 1$ , ou seja,  $\sigma$  e  $\tau$  são vizinhos. Se  $\sigma \rightarrow \tau$ ,  $\tau$  é dito sucessor de  $\sigma$ . Se  $\sigma \neq 0$ , então denotamos  $\overleftarrow{\sigma}$  o único vértice tal que  $\overleftarrow{\sigma} \rightarrow \sigma$ . Denotamos por  $\text{grau}(\sigma)$  o grau do vértice  $\sigma$ , isto é, o número de vizinhos de  $\sigma$ .

Um *corte*  $\Pi$  de  $\Gamma$  é um conjunto finito de vértices não incluindo 0, tal que para cada vértice  $\sigma \in \Gamma$  ou  $\sigma \leq \tau$  para algum  $\tau \in \Pi$ ,  $\tau \leq \sigma$  para algum  $\tau \in \Pi$ , ou  $\{\tau \in \Gamma : \sigma \leq \tau\}$  é finito, e tal que não existe par  $\sigma, \tau \in \Pi$  com  $\sigma < \tau$ . Denotaremos por praticidade o conjunto  $\{\tau \in \Gamma : \sigma \leq \tau\}$  por  $\Gamma^\sigma$ . Um corte especial é a esfera de raio  $n$ ,  $S_n = \{\sigma \in \Gamma : |\sigma| = n\}$ . Nós escrevemos  $|\Pi| = \min \{|\sigma| : \sigma \in \Pi\}$  e  $M_n = \text{card } S_n$ , em que *card* denota a cardinalidade do conjunto. Diremos que  $\Pi_\alpha \rightarrow \infty$  quando  $|\Pi_\alpha| \rightarrow \infty$ .

### 2.1 NÚMERO DE RAMIFICAÇÃO E CRESCIMENTO DE UMA ÁRVORE

**Definição 2.1.** *O número de ramificação de uma árvore é definido por:*

$$\text{br } \Gamma := \inf \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}. \quad (2.1)$$

**Observação 2.1.** *O número de ramificação pode ser reescrito das seguintes maneiras:*

$$\text{br } \Gamma = \sup \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = \infty \right\} \quad (2.2)$$

$$\text{br } \Gamma = \inf \left\{ \lambda > 0 : \inf_{\sigma \in \Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}. \quad (2.3)$$

**Definição 2.2.** O crescimento de uma árvore  $\Gamma$  é definido por

$$\text{gr } \Gamma = \inf \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{\frac{1}{n}}.$$

**Teorema 2.1.**  $\text{br } \Gamma \leq \text{gr } \Gamma$

**Demonstração:** Fixe  $\lambda \in \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}$ . Então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-|\sigma|} = 0$  o que significa que 0 é o menor valor de aderência de  $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-|\sigma|}$ , ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-n} > -\varepsilon \cdot \lambda^A. \quad (2.4)$$

Isso implica que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \frac{|S_n|}{\lambda^{-n}} > -\varepsilon \cdot \lambda^A \quad (2.5)$$

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $N(\varepsilon)$  tais que 2.5 valha. Considere  $\Pi' = S_{N(\varepsilon)}$  e note que para todo corte  $\Pi$  tal que  $|\Pi| > |S_{N(\varepsilon)}|$  e com  $|\sigma_{\max}^{\Pi'}| - |\sigma_{\min}^{\Pi'}| < A$ . Então

$$\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} \geq \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma_{\max}^{\Pi'}|} \geq \frac{|S_{|\sigma_{\min}^{\Pi'}|}|}{\lambda^{|\sigma_{\max}^{\Pi'}|}} \geq \frac{-\varepsilon \cdot |\lambda^{|\sigma_{\min}^{\Pi'}|}|}{\lambda^{|\sigma_{\max}^{\Pi'}|}} \geq \frac{-\varepsilon}{\lambda^A} \geq \frac{-\varepsilon}{\lambda^A} \cdot \lambda^A > -\varepsilon.$$

Ou seja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Pi' : |\Pi| > |\Pi'| \Rightarrow \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} > -\varepsilon,$$

logo 0 é o menor valor de aderência de  $\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}$ . Assim  $\liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0$ . Logo,  $\lambda \in \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}$

$$\left\{ \lambda > 0 : \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\} \subseteq \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}$$

portanto,  $\text{br } \Gamma \leq \text{gr } \Gamma$ .  $\square$

**Definição 2.3.** Dizemos que  $\Gamma$  é uma árvore esféricamente simétrica com função de crescimento  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  se

- $\text{grau}(0) = f(0)$
- $\text{grau}(\sigma) = f(|\sigma|) + 1$  para cada  $\sigma \in V$ .

**Observação 2.2.** Se  $\Gamma$  é esféricamente simétrica, então  $\text{br } \Gamma = \text{gr } \Gamma$ .

**Observação 2.3.** Note que se  $\Gamma$  é uma árvore esfericamente simétrica, com função de crescimento  $f$ , então  $M_n = \prod_{i=0}^{n-1} f(i)$ .

**Exemplo 2.1.** Seja  $\Gamma$  uma árvore esfericamente simétrica (ver Figura 2.1) com função de crescimento:

$$f(i) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 3 & \text{se } i = 2k - 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Neste caso,  $\text{br}\Gamma = \sqrt{6}$ .

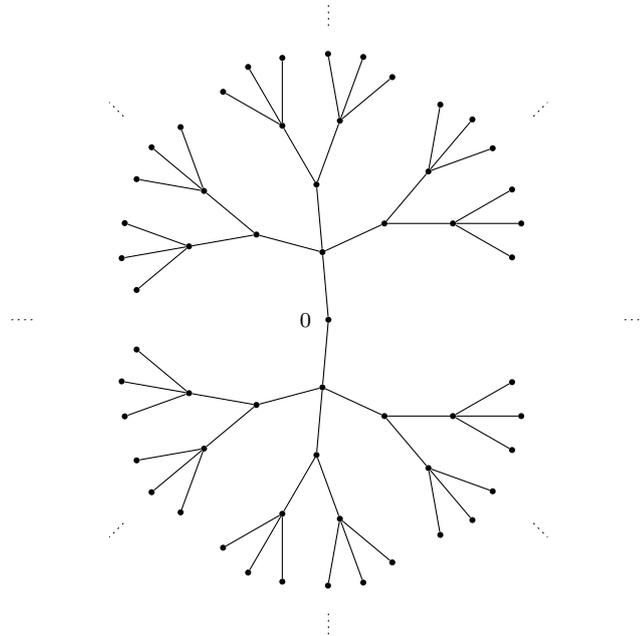


Figura 2.1. Árvore Esfericamente Simétrica

De fato, como  $\text{gr}\Gamma = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$  e como  $M_n = \prod_{i=0}^{n-1} f(i)$ , temos que

$$M_{2n} = \prod_{i=0}^{2n-1} f(i) = [f(0)f(1)]^n = [2 \cdot 3]^n = 6^n.$$

Assim,  $\text{gr}\Gamma = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_{2n}^{1/2n} = 6^{n(1/2n)} = \sqrt{6}$ . Como  $\Gamma$  é esfericamente simétrica,  $\text{br}\Gamma = \sqrt{6}$ .

**Exemplo 2.2.** Seja  $\Gamma$  uma árvore esfericamente simétrica (ver Figura 2.2) com função de

crescimento dada por

$$f(i) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = 3k \text{ } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 4 & \text{se } i = 3k - 2 \text{ } k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } i = 3k - 1 \text{ } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Assim,

$$M_{3n} = \prod_{i=1}^{3n-1} f(i) = [f(0)f(1)f(2)]^n = [2 \cdot 4 \cdot 1]^n = 8^n.$$

Logo  $\text{gr } \Gamma = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_{3n}^{1/3n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} 8^{n(1/3n)} = \sqrt[3]{8}$ . Assim,  $\text{br } \Gamma = \sqrt[3]{8}$

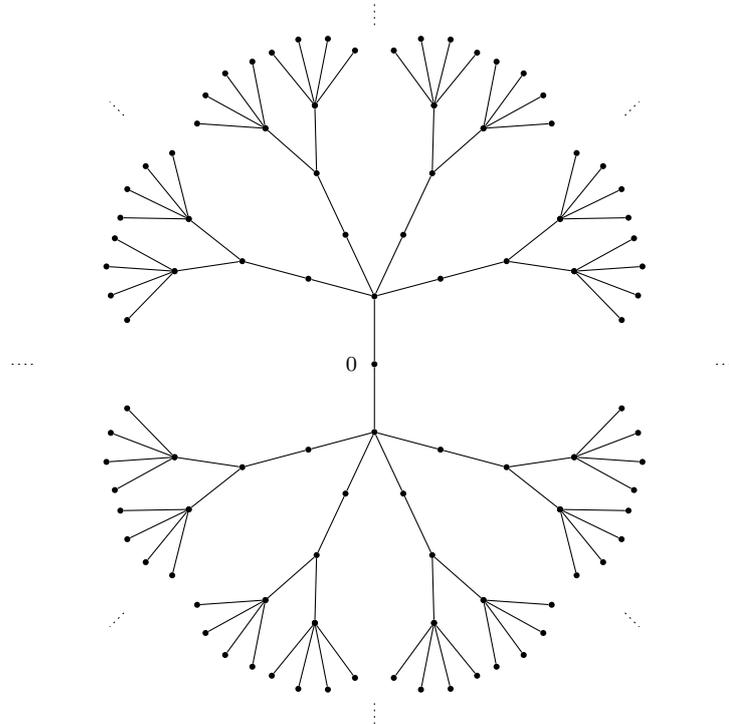


Figura 2.2. Árvore Esfericamente Simétrica

**Definição 2.4.** Seja  $\Gamma$  uma árvore. Um fluxo em  $\Gamma$  é uma função não negativa

$\theta : V \rightarrow [0, \infty)$  tal que para todo  $\sigma \in \Gamma$

$$\theta(\sigma) = \sum_{\sigma \rightarrow \tau} \theta(\tau). \quad (2.6)$$

Um fluxo  $\theta$  tal que  $\theta(0) = 1$  é chamado de fluxo unitário. O conjunto dos fluxos unitários é denotado por  $U(\Gamma)$ . Para um fluxo com  $\theta(0) \neq 0$  definimos a constante de Lipschitz como

$$\text{lip } \theta := \liminf_{|\sigma| \rightarrow \infty} \theta(\sigma)^{-1/|\sigma|}$$

e o número de ramificação como

$$\text{br } \theta = \exp \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) \log \theta(\sigma)}{\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) |\sigma|} \quad (2.7)$$

em que  $0 \log 0$  é interpretado como 0.

**Observação 2.4.** Note que  $\text{lip } \theta \leq \text{br } \theta$ .

Usaremos o fato de que para qualquer fluxo  $\theta$  e qualquer corte  $\Pi$

$$\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) = \theta(0).$$

**Exemplo 2.3.** Seja  $\Gamma_2$  (ver Figura 2.3). Note que aqui  $f(0) = 2$  e  $f(\sigma) = 3$  para todo  $\sigma \neq 0$ .

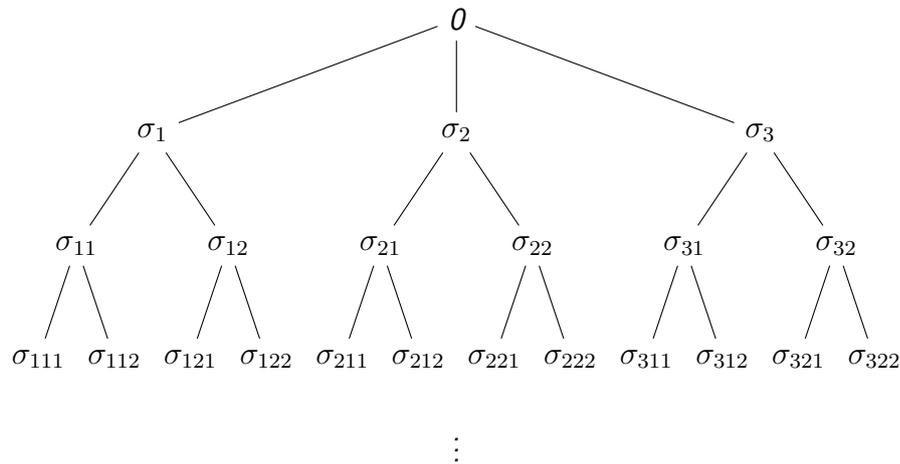


Figura 2.3.  $\Gamma_2$  Árvore.

Definimos  $\theta(0) = 1$ . Como  $\theta$  é um fluxo unitário, pela equação (2.6),  $\sum_{0 \rightarrow \tau} \theta(\tau) = 1$ , então  $1 = \theta(\sigma_1) + \theta(\sigma_2) + \theta(\sigma_3) \Rightarrow \theta(\sigma_1) = \theta(\sigma_2) = \theta(\sigma_3) = 1/3$ . Assim,  $1/3 = \theta(\sigma_{11}) + \theta(\sigma_{12}) \Rightarrow 1/6 = \theta(\sigma_{11}) = \theta(\sigma_{12})$  e assim sucessivamente.

**Lema 2.1.** Seja  $\lambda > 0$ . Se  $\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} \geq 1$ , para qualquer corte  $\Pi$  grande, então  $\text{br } \Gamma \geq \lambda$ .

**Demonstração:** Pela equação (2.1), temos que

$$\text{br } \Gamma = \inf \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}.$$

Seja  $\lambda > 0$ . Se  $\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} \geq 1$  isso implica que  $\liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} \geq 1$  o que implica  $\lambda \leq \text{br } \Gamma$ .  $\square$

**Proposição 2.1** ((LYONS, 1990), Proposição 2.1). *Para qualquer árvore  $\Gamma$*

$$\text{br } \Gamma = \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta = \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{br } \theta.$$

**Demonstração:** É suficiente mostrar que:

$$\text{para todo } \theta \in U(\Gamma) \quad \text{br } \theta \leq \text{br } \Gamma \quad (2.8)$$

e

$$\text{para todo } \lambda < \text{br } \Gamma \text{ existe } \theta \in U(\Gamma) \text{ lip } \theta \geq \lambda. \quad (2.9)$$

Iniciemos a prova de (2.8). Suponha primeiro que  $\theta \in U(\Gamma)$  e  $\text{br } \theta > \lambda$  então para todo  $\Pi$  grande temos que

$$\log \text{br } \theta > \log \lambda.$$

Pela equação (2.7), temos

$$\text{br } \theta = \exp \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) \log \theta(\sigma)}{\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) |\sigma|},$$

Então  $\log \text{br } \theta$  é

$$\log \text{br } \theta = \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) \log \theta(\sigma)}{\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) |\sigma|}.$$

como  $\log \text{br } \theta > \log \lambda$ , isso implica

$$\frac{-\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) \log \theta(\sigma)}{\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) |\sigma|} > \log \lambda.$$

Daí, temos

$$-\sum_{\theta \in \Pi} \theta(\sigma) \log \theta(\sigma) \geq \log \lambda \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) |\sigma|.$$

Reescrevendo  $\lambda^{-|\sigma|}$  temos:

$$\begin{aligned} \lambda^{-|\sigma|} &= \theta(\sigma) \exp[-\log \theta(\sigma) - |\sigma| \log \lambda] \\ &= \theta(\sigma) \exp[-\log \theta(\sigma) + \log \lambda^{-|\sigma|}] \\ &= \theta(\sigma) \exp[\log \theta(\sigma)^{-1}] \cdot \exp \log \lambda^{-|\sigma|} \\ &= \theta(\sigma) / \theta(\sigma) \cdot \lambda^{-|\sigma|}. \end{aligned}$$

Assim,  $\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) \exp[-\log \theta(\sigma) - |\sigma| \log \lambda]$ .

Pela Desigualdade de Jensen,

$$\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} \geq \exp \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) [-\log \theta(\sigma) - |\sigma| \log \lambda] \geq \exp 0 = 1.$$

Como  $\Pi$  é um corte grande temos que  $\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} \geq 1$  e pelo Lema(2.1), temos que  $\text{br } \Gamma \geq \lambda$  implica que  $\text{br } \Gamma \geq \text{br } \theta$ , pois  $\text{br } \theta > \lambda$ . Isso conclui a prova de (2.8).

Provaremos agora (2.9). Seja  $0 < \lambda < \text{br } \Gamma$ . Então  $\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} > 0$ . Se considerarmos  $\lambda^{-|\sigma|}$  como a capacidade da aresta anterior a  $\sigma$ , então segue do Teorema do Máximo-Fluxo, Mínimo-Corte, que existe um fluxo  $\theta \neq 0$ , tal que,  $\forall \sigma$

$$\theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|},$$

assim,

$$\theta^{-1/|\sigma|} \geq \lambda,$$

logo,

$$\text{lip } \theta \geq \lambda.$$

Assim, concluímos (2.9). Temos, então, a seguinte cadeia de desigualdade

$$\begin{aligned} \text{lip } \theta &\leq \text{br } \theta \leq \text{br } \Gamma \\ \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta &\leq \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{br } \theta \leq \text{br } \Gamma. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que  $\sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta = \text{br } \Gamma$ . Suponha por contradição que  $\sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta < \text{br } \Gamma$ , ou seja, existe  $\alpha$  tal que  $\sup \text{lip } \theta < \alpha < \text{br } \Gamma$  que é um absurdo, pois  $\sup \text{lip } \theta$  é a menor das cotas inferiores. Logo,  $\sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta = \text{br } \Gamma$ .

$$\sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta = \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{br } \theta = \text{br } \Gamma. \quad \square$$

## 2.2 ÁRVORES QUASE-ESFÉRICAS E ÁRVORES SUBPERIÓDICAS

Nesta seção, daremos duas condições suficientes para quase-esfericidade.

**Definição 2.5.** Uma árvore  $\Gamma$  é chamada quase-esférica se  $\text{br } \Gamma = \text{gr } \Gamma$ .

**Definição 2.6.** Uma árvore  $\Gamma$  é chamada subperiódica se para todo  $\sigma \neq 0$ , existe uma injeção preservadora de adjacência  $T : \Gamma^\sigma \rightarrow \Gamma^{T(\sigma)}$  com  $T(\sigma) \in S_1$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $\Gamma$  a árvore da Figura (2.4). Note que aqui  $\text{grau}(0) = 4$ . Note também que, por exemplo, se  $\sigma \in \Gamma^{\sigma_2}$ , então  $\text{grau}(\sigma) = 3$ . Vamos mostrar que  $\Gamma$  é subperiódica

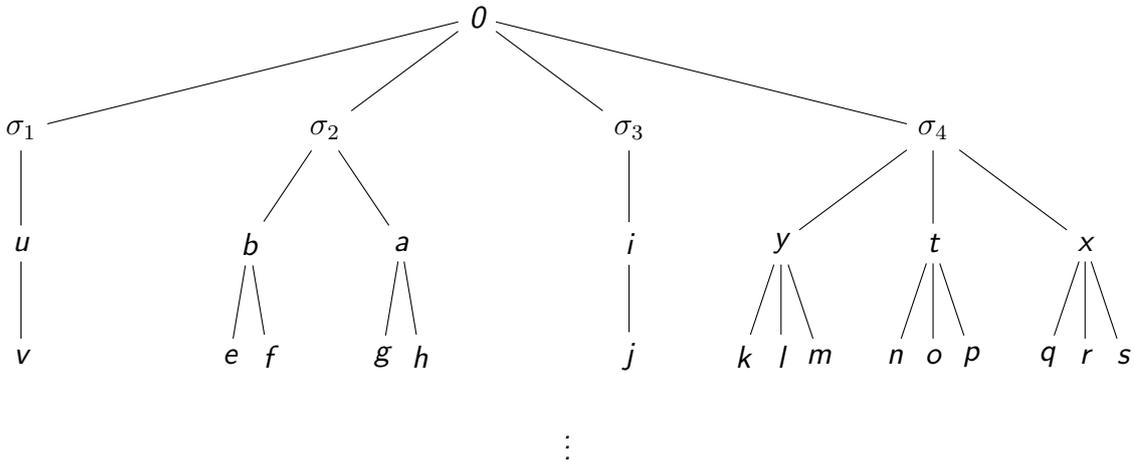


Figura 2.4. Árvore Subperiódica Figura

Seja  $T : \Gamma^{\sigma_i} \rightarrow \Gamma^{T(\sigma_i)}$  dada por

$$T(\sigma) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{se } \sigma \in T^{\sigma_1}, \\ \sigma_2 & \text{se } \sigma \in T^{\sigma_2}, \\ \sigma_3 & \text{se } \sigma \in T^{\sigma_3}, \\ \sigma_4 & \text{se } \sigma \in T^{\sigma_4}. \end{cases}$$

$T$  é uma injeção, pois cada  $\sigma_i$  é distinto. E preserva adjacência porque se  $u \sim v \sim w$  em que  $u, v, w \in \Gamma^{\sigma_1}$ . Então  $T(u) \sim T(v) \sim T(w)$ . Seja  $T(u) = \sigma_3$ , então  $T(u) \sim i \sim j$ , em que  $i, j \in \Gamma^{\sigma_3}$ .

Usaremos a seguinte notação, para  $\sigma \in \Gamma$ ,  $M_n^\sigma = \text{card}\{\tau \in \Gamma : \sigma \leq \tau \text{ e } |\tau| = |\sigma| + n\}$ .

**Lema 2.2.**  $B_{n+m} \leq B_n B_m$  em que  $B_n = \max_{|\sigma|=1} M_n^\sigma$ .

**Demonstração:** Como  $B_{n+m} = \max_{|\sigma|=1} M_{n+m}^\sigma$  temos que,  $B_{n+m} = \max \{M_{n+m}^{\sigma_1}, M_{n+m}^{\sigma_2}, \dots, M_{n+m}^{\sigma_l}\}$ .

Fixe  $\sigma_1$ .

$$M_{n+m}^{\sigma_1} \leq M_n^{\sigma_1} \cdot \max_{v_i \in \partial \Gamma_n^{\sigma_1}} \{M_m^{v_1}, M_m^{v_2}, \dots, M_m^{v_l}\}.$$

Como  $\Gamma$  é subperiódica existe  $T : \Gamma^{\sigma_1} \rightarrow \Gamma^{T(\sigma_1)}$ , com  $T(\sigma_1) \in S_1$

$$M_{n+m}^{\sigma_1} \leq M_n^{\sigma_1} \cdot \max \{M_m^{\sigma_1}, M_m^{\sigma_2}, \dots, M_m^{\sigma_l}\}.$$

Isso implica que

$$M_{n+m}^{\sigma_1} \leq M_n^{\sigma_1} \cdot B_m$$

e portanto

$$B_{n+m} \leq B_n B_m.$$

**Exemplo 2.5.** Considere  $\Gamma$  a árvore do exemplo (2.4). Vamos calcular o  $B_{n+m}, B_n, B_m$ .

Para isso, precisamos de  $M_{n+m}^{\sigma_i}, M_n^{\sigma_i}, M_m^{\sigma_i}$  para  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Como  $M_n^\sigma$  denota o número de vértices que estão a distância  $n$  de  $\sigma$  temos que  $M_n^{\sigma_1} = 1, M_n^{\sigma_2} = 2^n, M_n^{\sigma_3} = 1, M_n^{\sigma_4} = 3^n$ .

Logo,  $B_n = \max_{|\sigma_i|=1} M_n^{\sigma_i} = 3^n$ .  $M_m^{\sigma_1} = 1, M_m^{\sigma_2} = 2^m, M_m^{\sigma_3} = 1, M_m^{\sigma_4} = 3^m$ . Temos assim

$B_m = \max_{|\sigma_i|=1} M_m^{\sigma_i} = 3^m$ . E por fim  $M_{n+m}^{\sigma_1} = 1, M_{n+m}^{\sigma_2} = 2^{n+m}, M_{n+m}^{\sigma_3} = 1, M_{n+m}^{\sigma_4} = 3^{n+m}$ .

Portanto  $B_{n+m} = \max_{|\sigma_i|=1} M_{n+m}^{\sigma_i} = 3^{n+m}$ . Temos então que  $B_{n+m} \leq B_n B_m$ .

**Proposição 2.2** ((LYONS, 1990), Proposição 3.1). Seja  $\Gamma$  uma árvore subperiódica. Então  $\Gamma$  é quase esférica e existe um fluxo unitário  $\theta$  em  $\Gamma$  tal que  $\text{lip } \theta = \text{br } \theta = \text{br } \Gamma$ .

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração em duas partes. Mostraremos que:

1.  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$  existe.
2.  $\inf \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 1$ .

Com 1 e 2 mostraremos que  $\Gamma$  é quase-esférica e pelo Teorema do Máximo-Fluxo Mínimo-Corte (A.3) existe um fluxo unitário  $\theta$  satisfazendo  $\theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}$ .

**Prova de 1.** Do Lema (2.2), temos que  $B_{n+m} \leq B_n B_m$ . Isso implica que  $\log B_{n+m} \leq \log B_n + \log B_m$ . Como  $\log B_n$  é subaditiva, pelo Lema de Fekete (A.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log B_n}{n} = \inf \frac{\log B_n}{n}$$

Então existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log B_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log B_n^{1/n} = c.$$

Assim, existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{1/n} = e^c =: \lambda.$$

Note que

$$B_{nr} \leq B_n^r \tag{2.10}$$

e que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B_{nr}^{1/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( B_{nr}^{1/nr} \right)^n = \lambda^n. \quad (2.11)$$

Então de (2.10) e (2.11) temos

$$M_n \geq B_{n-1} \geq B_{(n-1)r}^{1/r} \rightarrow \lambda^{n-1}$$

quando  $r \rightarrow \infty$ . Portanto  $M_n \geq \lambda^{n-1}$ . Isso implica que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} \geq \lambda. \quad (2.12)$$

Temos também que

$$M_n^{1/n} \leq |S_1|^{1/n} B_{n-1}^{1/n}.$$

Assim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |S_1|^{1/n} B_{n-1}^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |S_1|^{1/n} \left( B_{n-1}^{1/n} \right)^{(n-1)/n} = \lambda$$

Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} \leq \lambda. \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

De (2.12) e (2.13), temos

$$\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} \leq \lambda,$$

concluimos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \lambda.$$

O que conclui a prova da parte 1.

**Prova de 2.** Queremos mostrar que  $\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 1$ . Suponha o contrário da nossa afirmação anterior,  $\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} < 1$ , para algum corte  $\Pi$ .

Então, seja  $G = \{\sigma \in \Gamma : (\exists \tau \in \Pi, \sigma < \tau) \text{ ou } (\forall \tau \in \Pi, \sigma \not\leq \tau \text{ e } \tau \not\leq \sigma)\}$  e observe que

$$\left( \sum_{\sigma \in G} \lambda^{-|\sigma|} \right) \sum_{n \geq 0} \left( \sum \lambda^{-|\sigma|} \right)^n < \infty.$$

Seja  $F$  o conjunto de seqüências  $t = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_0)$  com  $n \geq 0$  e  $\sigma_k \in \Pi$  se  $k \geq 1$  e  $\sigma_0 \in G$ ; escreva  $|t| = |\sigma_1| + |\sigma_2| + \dots + |\sigma_n| + |\sigma_0|$ . A desigualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\sum_{t \in F} \lambda^{-|t|} < \infty.$$

Porém, como  $\Gamma$  é quase-esférica, existe uma injeção  $S : F \rightarrow F$ , tal que  $|S(\sigma)| = |\sigma|$  e

$$\sum_{t \in F} \lambda^{-|t|} \geq \sum_{\sigma \in \Gamma} \lambda^{-|\sigma|} = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n} M_n \geq \sum_{n \geq 0} \lambda^{-1} = \infty$$

contradição! Provamos, de fato, que  $\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 1$ .

Queremos mostrar  $\text{gr } \Gamma \leq \text{br } \Gamma$ . Sabemos que  $\text{gr } \Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \lambda$  e

$\text{br } \Gamma = \inf \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\}$ . Se  $\lambda = \text{gr } \Gamma$  e  $\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 1$  pelo

Lema(2.1) temos  $\lambda \leq \text{br } \Gamma$ . Portanto

$$\text{gr } \Gamma \leq \text{br } \Gamma.$$

Pelo Teorema (2.1), temos  $\text{br } \Gamma \leq \text{gr } \Gamma$ . Assim, concluímos

$$\text{br } \Gamma = \text{gr } \Gamma.$$

Logo  $\Gamma$  é quase-esférica.

Queremos mostrar também que existe um fluxo unitário tal que,  $\text{lip } \theta = \text{br } \theta = \text{br } \Gamma$ . Da

Proposição (2.1), temos

$$\text{br } \Gamma = \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{lip } \theta = \sup_{\theta \in U(\Gamma)} \text{br } \theta.$$

Sabemos também que

$$\text{lip } \theta \leq \text{br } \theta \leq \text{br } \Gamma.$$

Devemos mostrar que  $\text{lip } \theta \geq \text{br } \Gamma$ . Pelo Teorema do Máximo-Fluxo Mínimo-Corte (A.3),

existe  $\theta \in U(\Gamma)$  tal que  $\theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|} \forall \sigma \in \Pi$ . Isso implica

$$\text{lip } \theta \geq \lambda = \text{gr } \Gamma$$

como  $\Gamma$  é quase-esférica,  $\lambda = \text{gr } \Gamma = \text{br } \Gamma$ , logo

$$\text{lip } \theta \geq \text{br } \Gamma.$$

Logo,

$$\text{lip } \theta = \text{br } \theta = \text{br } \Gamma.$$

□

Agora vamos dar uma condição para que uma árvore seja quase-esférica, isso depende do Lema de Falconer ((LYONS, 1990), Lema 3.2) que iremos enunciar a seguir. Sejam  $\sigma$  e  $\tau \in \Gamma$ , denotamos por  $\sigma \wedge \tau$  o vértice mais distante de 0 e que é menor ou igual a  $\sigma$  e  $\tau$ , ou seja,  $\sigma \wedge \tau$  é último vértice que liga  $\sigma$  a  $\tau$ .

**Lema 2.3** ((LYONS, 1990), Lema 3.2). *Seja  $f$  e  $g$  funções não negativas na árvore  $\Gamma$  tal que  $g$  é estritamente positiva e decrescente no sentido de que  $\sigma \leq \tau \Rightarrow g(\sigma) \geq g(\tau)$ . Sejam*

$$a_n = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} g(\sigma \wedge \tau)^{-1} f(\sigma) f(\tau)$$

e

$$b_n = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma).$$

Se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n b_n^{-2} < \infty \quad (2.15)$$

então

$$\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} g(\sigma) > 0. \quad (2.16)$$

**Demonstração:** Omitida, ver (LYONS, 1990), Lema 3.2, página 939.

**Teorema 2.2** ((LYONS, 1990), Proposição 3.3). *Seja  $\Gamma$  uma árvore tal que para algum  $\lambda \geq 1$*

$$\sup_{k, m \geq 0} M_k^{-1} \sum_{\sigma \in S_k} (\lambda^{-m} M_m^\sigma)^2 < \infty \quad (2.17)$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} M_n > 0. \quad (2.18)$$

Então  $\lambda = br\Gamma$  e  $\Gamma$  é quase-esférica.

**Demonstração:** Fazendo  $k = 0$  em (2.17), como  $M_0 = 1$ , resulta

$$\sup_{m \geq 0} \lambda^{-m} M_m < \infty.$$

Isto é, existe  $c$ , tal que

$$\lambda^{-m} M_m < c, \text{ o que implica, } M_m^{1/m} < \lambda c^{1/m}.$$

Assim,

$$\text{gr } \Gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} M_m^{1/m} \leq \lambda.$$

Devemos mostrar que  $\text{br } \Gamma \geq \lambda$ . Para isto, podemos assumir que  $\lambda > 1$ . Escolha  $\lambda_1 \in (1, \lambda)$  e defina  $f(\sigma) = \lambda^{-|\sigma|}$  e  $g(\sigma) = \lambda_1^{-|\sigma|}$ . Se estabelecermos (2.15), concluiremos (2.16) que vai implicar que  $\text{br } \Gamma \geq \lambda_1$  que completará a prova.

Agora seja

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} g(\sigma \wedge \tau)^{-1} f(\sigma) f(\tau) \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \left( \lambda_1^{-|\sigma \wedge \tau|} \right)^{-1} \lambda^{-|\sigma|} \cdot \lambda^{-|\tau|} \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \lambda_1^{|\sigma \wedge \tau|} \lambda^{-2n}. \end{aligned}$$

Defina  $\rho := \sigma \wedge \tau$ . Assim,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \\ &= \sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \sigma \wedge \tau = \rho}} \mathbf{1} \\ &= \sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \left\{ \left( \sum_{\rho \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right)^2 - \sum_{\rho \rightarrow \psi} \left( \sum_{\psi \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \sigma \wedge \tau = \rho}} \mathbf{1} = \left( \sum_{\rho \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right) \cdot \left( \sum_{\rho \leq \tau \in S_n} \mathbf{1} \right) - \sum_{\rho \rightarrow \psi} \left( \sum_{\psi \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right) \cdot \left( \sum_{\psi \leq a \in S_n} \mathbf{1} \right).$$

Observe que em  $\left( \sum_{\rho \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right) \cdot \left( \sum_{\rho \leq \tau \in S_n} \mathbf{1} \right)$  poderíamos obter pares indesejáveis  $(\sigma, \sigma)$ , por exemplo. Por isso, retiramos da nossa contagem  $\sum_{\rho \rightarrow \psi} \left( \sum_{\psi \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right) \cdot \left( \sum_{\psi \leq a \in S_n} \mathbf{1} \right)$ . Assim temos  $\sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \sigma \wedge \tau = \rho}} \mathbf{1} = \left\{ \left( \sum_{\rho \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right)^2 - \sum_{\rho \rightarrow \psi} \left( \sum_{\psi \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right)^2 \right\}$ .

Então

$$a_n = \sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \left\{ \left( \sum_{\rho \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right)^2 - \sum_{\rho \rightarrow \psi} \left( \sum_{\psi \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} \right)^2 \right\}.$$

Observe também que  $\sum_{\rho \leq \sigma \in S_n} \mathbf{1} = M_{n-|\rho|}^\rho$ . Reescrevendo  $a_n$ , temos

$$a_n = \sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \left\{ \left( M_{n-|\rho|}^\rho \right)^2 - \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} \left( M_{n-|\psi|}^\psi \right)^2 \right\}.$$

$$a_n = \overbrace{\sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2}^1 - \underbrace{\sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2}_{2}.$$

Vamos analisar os casos  $|\rho| = 0$  e  $|\rho| \leq n$  na expressão 1.

$$a_n = \sum_{0 < |\rho| \leq n} \overbrace{\lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2}^{|\rho| \leq n} + \overbrace{\lambda^{-2n} (M_n)^\rho}^{\rho=0} - \sum_{|\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2.$$

Vamos analisar os casos  $|\rho| = n$  e  $|\rho| < n$  para a expressão 2.

$$a_n = \sum_{0 < |\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 + \lambda^{-2n} (M_n)^\rho - \overbrace{\sum_{0 \leq |\rho| \leq n-1} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2}^{|\rho| < n} - \underbrace{\lambda_1^n \lambda^{-2n} M_{n-n}}_{=0, |\rho|=n}.$$

Logo,

$$a_n = \sum_{0 < |\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 + \lambda^{-2n} (M_n)^\rho - \sum_{0 \leq |\rho| \leq n-1} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2.$$

Agora, vamos mostrar que:

$$\sum_{0 \leq |\rho| \leq n-1} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2 = \sum_{0 < |\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|-1} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2.$$

Fixemos  $|\rho|$ , tal que  $0 \leq |\rho| \leq n-1$ . Se  $|\rho| = 0 \Rightarrow \rho \rightarrow \psi$  e  $\psi \in S_1$ , então

$$\lambda_1^0 \lambda^{-2n} (M_{n-1}^\psi)^2 = \lambda_1^0 \lambda^{-2n} (M_{n-1}^\rho)^2 = \lambda^{-2n} M_{n-1}^\psi = \lambda^{-2n} M_{n-1}^\rho.$$

Se  $|\rho| = 1, \Rightarrow \rho \rightarrow \psi$  e  $\psi \in S_2$ , então

$$\lambda_1 \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq 2}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2 = \sum_{0 < |\rho| \leq 1} \lambda_1^0 \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 = \sum_{0 < |\rho| \leq 1} \lambda_1^{|\rho|-1} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2.$$

Assim, segue que

$$\sum_{0 \leq |\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 = \sum_{0 \leq |\rho| \leq n-1} \lambda_1^{|\rho|-1} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\rho \rightarrow \psi \\ |\psi| \leq n}} (M_{n-|\psi|}^\psi)^2.$$

Fazendo uma mudança de índice, temos

$$\sum_{0 < |\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|-1} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2.$$

Deste modo

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{0 < |\rho| \leq n} (\lambda_1^{|\rho|} - \lambda_1^{|\rho|-1}) \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 + \lambda^{-2n} (M_n)^2 \\
&= \sum_{0 < |\rho| \leq n} [\lambda_1^{|\rho|} (1 - \lambda_1^{-1})] \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 + \lambda^{-2n} (M_n)^2 \\
&= (1 - \lambda_1^{-1}) \sum_{0 < |\rho| \leq n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} (M_{n-|\rho|}^\rho)^2 + \lambda^{-2n} (M_n)^2
\end{aligned}$$

Reescrevendo o somatório

$$\begin{aligned}
a_n &= (1 - \lambda_1^{-1}) \sum_{k=1}^n \left\{ \lambda_1^k \lambda^{-2k} \sum_{\rho \in S_k} (\lambda^{-n+k} M_{n-k}^\rho)^2 \right\} + \lambda^{-2n} (M_n)^2 \\
&= (1 - \lambda_1^{-1}) \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^k \lambda^{-k} \sum_{\rho \in S_k} (\lambda^{-n+k} M_{n-k}^\rho)^2 \right\} + (\lambda^{-n} M_n)^2.
\end{aligned}$$

Precisamos mostrar agora que  $a_n$  é uniformemente limitada por  $\sup M_k^{-1} \sum_{\sigma \in S_k} (\lambda^{-m} M_m^\sigma)^2$ .

Seja

$$a_n = (1 - \lambda_1^{-1}) \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^k \lambda^{-k} \sum_{\rho \in S_k} (\lambda^{-n+k} M_{n-k}^\rho)^2 \right\} + (\lambda^{-n} M_n)^2.$$

Fazendo  $m = n - k \Rightarrow -m = -n + k$ , temos

$$\begin{aligned}
a_n &= \underbrace{(1 - \lambda_1^{-1})}_{C} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{n-m} \lambda^{-(n-m)} \sum_{\rho \in S_{n-m}} (\lambda^{-m} M_{n-k}^\rho)^2 \right\} + (\lambda^{-n} M_n)^2 \\
&\leq C \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{n-m} \lambda^{-(n-m)} \sum_{\rho \in S_{n-m}} (\lambda^{-m} M_{n-k}^\rho)^2 \right\} + (\lambda^{-n} M_n)^2.
\end{aligned}$$

Como  $\sup \lambda^{n-m} M_{n-m} \leq c$ , implica que  $\lambda^{-(n-m)} \leq M_{n-m}^{-1}$

$$\begin{aligned}
a_n &\leq C \sum_{m=1}^{n-1} M_{n-m}^{-1} \sum_{\rho \in S_{n-m}} (\lambda^{-m} M_m^\rho)^2 \cdot \sum_{m=1}^{n-1} (\lambda_1/\lambda)^{n-m} + (\lambda^{-n} M_n)^2 \\
&\leq \underbrace{\sup_{m \geq 0} M_{n-m}^{-1} \sum_{\rho \in S_{n-m}} \lambda^{-m} M_m^\rho}_{A} \cdot \sum_{m=1}^{n-1} (\lambda_1/\lambda)^{n-m} + (\lambda^{-n} M_n)^2 \\
&\leq A \cdot \sum_{k=1}^n (\lambda_1/\lambda)^k + (\lambda^{-n} M_n)^2.
\end{aligned}$$

Temos aqui  $\sum_{k=1}^n (\lambda_1/\lambda)^k$ , porém  $\sum_{k=1}^n (\lambda_1/\lambda)^k \leq \sum_{k=1}^\infty (\lambda_1/\lambda)^k$ . Como  $\lambda_1/\lambda < 1$ , temos uma

série geométrica convergente. Logo  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1/\lambda)^k = A'$ . Então,

$$\begin{aligned} a_n &\leq A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1/\lambda)^k + (\lambda^{-n} M_n)^2 \\ &\leq A' \sup_{k,m \geq 0} M_k^{-1} \sum_{\rho \in S_k} \lambda^{-m} M_m^\rho + (\lambda^{-n} M_n)^2 \\ &\leq A' \sup_{k,m \geq 0} M_k^{-1} \sum_{\rho \in S_k} \lambda^{-m} M_m^\rho + \sup_{k,m \geq 0} M_k^{-1} \sum_{\rho \in S_k} \lambda^{-m} M_m^\rho \\ &\leq (A' + 1) \sup_{k,m \geq 0} M_k^{-1} \sum_{\rho \in S_k} \lambda^{-m} M_m^\rho. \end{aligned}$$

logo,  $a_n$  é uniformemente limitada.

Para usarmos o Lema (2.3), precisamos mostrar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n b_n^{-2} < \infty.$$

Sabemos que  $b_n = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{-n} = M_n \lambda^{-n}$ . Pela desigualdade (2.18),  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} M_n > 0$ .

Isso implica

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{-n} M_n} < \infty, \text{ logo } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} < \infty.$$

Como  $a_n$  é uniformemente limitada

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n b_n^{-2} < \infty.$$

Logo pelo Lema (2.1)

$$\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda_1^{-|\sigma|} > 0,$$

isso ocasiona

$$\text{br } \Gamma \geq \lambda_1.$$

Para todo  $\lambda_1 \in (1, \lambda)$ , vale que  $\text{br } \Gamma \lambda_1$ ,

$$\text{br } \Gamma = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda} \text{br } \Gamma \geq \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda} \lambda_1 = \lambda.$$

Assim,  $\text{br } \Gamma \geq \lambda$ . Desta maneira,  $\Gamma$  é quase-esférica.  $\square$

### 3 RECORRÊNCIA DO PASSEIO ALEATÓRIO EM ÁRVORES

#### 3.1 MOTIVAÇÃO

Seja  $\Gamma$  uma árvore com a raiz 0. Fixe  $\lambda > 1$ ; se estivermos em um vértice,  $\sigma \in \Gamma$ , com  $n$  ramos para fora e uma aresta para trás. Uma partícula encontra-se em um vértice de grau  $n+1$ , então ela escolhe pular para o vértice de trás com probabilidade  $\lambda/(\lambda + grau(\sigma) - 1)$  e escolhe cada ramificação com probabilidade  $1/(\lambda + grau(\sigma) - 1)$ . Observe que se  $\lambda = n$ , há probabilidade igual de avançar ou retroceder, no entanto,  $\lambda$  é uma constante independente de qual vértice estamos. Matematicamente falando, é a cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  com probabilidades de transição:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \tau | X_n = \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda + grau(\sigma) - 1} & \text{se } \tau \in \partial\Gamma_1^\sigma, \\ \frac{\lambda}{\lambda + grau(\sigma) - 1} & \text{se } \tau = \overleftarrow{\sigma} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

para todo  $n \geq 1$  e  $\sigma \in \Gamma$ .

O propósito deste capítulo é mostrar a recorrência e transiência do passeio aleatório provando o seguinte teorema.

**Teorema 3.1** ((LYONS, 1990), Teorema 4.3). *Seja  $\Gamma$  uma árvore. Então  $\lambda < \text{br } \Gamma$  o passeio associado a  $\lambda$  é transiente e quando  $\lambda > \text{br } \Gamma$ , o passeio é recorrente.*

**Exemplo 3.1.** *Quando  $\lambda = \text{br } \Gamma$  o passeio pode ser transiente ou recorrente. Por exemplo, quando  $\Gamma$  é uma  $n$ -árvore, o passeio é recorrente. Por outro lado, se  $\Gamma$  é uma árvore esféricamente simétrica tal que  $M_n = 3^k$  para  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , então o passeio é transiente.*

#### 3.2 REDES ELÉTRICAS E PASSEIOS ALEATÓRIOS

Cadeias de Markov enumeráveis correspondem a passeios aleatórios em grafos direcionados, em que as arestas são rotuladas com as probabilidades de transição. Cadeias de Markov reversíveis correspondem a passeios aleatórios em grafos não direcionados ou em redes elétricas, em que as arestas são rotuladas com resistências (ou condutâncias). A probabilidade de transição de  $\sigma$  para  $\tau$  é a condutância de  $\sigma$  para  $\tau$  dividida pela soma de todas as condutâncias

que emanam de  $\sigma$ . Exigiremos critérios de transiência para cadeias reversíveis que decorrem dessa correspondência.

Seja  $\Gamma$  um grafo finito não direcionado com um conjunto de vértices  $V$  e conjunto de arestas  $E \subseteq V \times V$ . Consideraremos  $E$  como um conjunto de pares ordenados tal que  $(\sigma, \tau) \in E \Rightarrow (\tau, \sigma) \in E$ . Seja  $l^2(V)$  um espaço de Hilbert complexo usual em  $V$  e  $l^2(E)$  o espaço de funções  $\theta$  a valores complexos em  $E$  tal que  $\theta(\sigma, \tau) = -\theta(\tau, \sigma)$  com o produto interno

$$\langle \theta, \theta' \rangle = 1/2 \sum_{(\sigma, \tau) \in E} \theta(\sigma, \tau) \overline{\theta'(\sigma, \tau)}.$$

Definimos o operador co-limitado por  $d : l^2(V) \rightarrow l^2(E)$

$$(dP)(\sigma, \tau) = P(\tau) - P(\sigma).$$

Seu operador adjunto é o operador de fronteira

$$(d^*\theta)(\sigma) = - \sum_{(\sigma, \tau) \in E} \theta(\sigma, \tau).$$

**Lema 3.1.**  $d$  e  $d^*$  são adjuntos.

**Demonstração:** Devemos mostrar que

$$\langle dP, \theta \rangle = \langle P, d^*\theta \rangle.$$

Seja

$$\begin{aligned} d : l^2(V) &\rightarrow l^2(E) \\ P &\mapsto dP. \end{aligned}$$

Note que  $dP : E \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $dP(\sigma, \tau) := P(\tau) - P(\sigma)$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} d^* : l^2(E) &\rightarrow l^2(V) \\ \theta &\mapsto d^*\theta. \end{aligned}$$

Note também  $d^*\theta : V \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $d^*\theta(\sigma) = - \sum_{(\sigma, \tau) \in E} \theta(\sigma, \tau)$ .

Observe que  $- \sum_{(\sigma, \tau) \in E} \theta(\sigma, \tau) = \sum_{(\sigma, \tau) \in E} \theta(\tau, \sigma)$ , pois  $\theta$  é antissimétrico. Fixe  $\sigma$ , então a soma de cada parcela  $(\sigma, \tau)$  pode ser escrita como

$$d^*\theta(\sigma) = \sum_{(\sigma, \tau) \in E} \theta(\tau, \sigma) = \sum_{\substack{\tau \in V \\ (\sigma, \tau) \in E}} \theta(\tau, \sigma).$$

Sejam as seguintes expressões

$$\langle dP, \theta \rangle = 1/2 \sum_{(\sigma, \tau) \in E} dP(\sigma, \tau) \overline{\theta(\sigma, \tau)} = 1/2 \sum_{(\sigma, \tau) \in E} (P(\tau) - P(\sigma)) \overline{\theta(\sigma, \tau)} \quad (3.3)$$

$$\langle P, d^*\theta \rangle = \sum_{\sigma \in V} P(\sigma) \overline{d^*\theta(\sigma)} = \sum_{\sigma \in V} P(\sigma) \left( - \sum_{\substack{\tau \in V \\ (\sigma, \tau) \in E}} \theta(\sigma, \tau) \right). \quad (3.4)$$

Observe que usamos na expressão (3.4) o produto hermitiano canônico.

Devemos mostrar que (3.3) = (3.4). Em (3.3) temos

$$\langle dP, \theta \rangle = 1/2 \sum_{(\sigma, \tau) \in E} (P(\tau) - P(\sigma)) \overline{\theta(\sigma, \tau)}.$$

Para cada  $(\sigma, \tau) \in E$ , temos  $(\tau, \sigma) \in E$ , pois o grafo é não-direcionado e teremos as duas seguintes parcelas

$$\begin{aligned} & \underbrace{[P(\tau) - P(\sigma)] \overline{\theta(\sigma, \tau)}}_{\text{parcela em } (\sigma, \tau)} + \underbrace{[P(\sigma) - P(\tau)] \overline{\theta(\tau, \sigma)}}_{\text{parcela em } (\tau, \sigma)} = \\ & = [P(\sigma) \underbrace{\overline{\theta(\sigma, \tau)}}_{(*)} - P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \tau)}] + [P(\sigma) \underbrace{\overline{\theta(\tau, \sigma)}}_{(**)} - P(\tau) \overline{\theta(\tau, \sigma)}] \\ & = -P(\tau) \overline{\theta(\tau, \sigma)} - P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \tau)} - P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \tau)} - P(\tau) \overline{\theta(\tau, \sigma)}. \end{aligned}$$

Em (\*) e (\*\*) usamos a antissimetria de  $\theta(\sigma, \tau)$ . Isso resulta em

$$[P(\tau) - P(\sigma)] \overline{\theta(\sigma, \tau)} + [P(\sigma) - P(\tau)] \overline{\theta(\tau, \sigma)} = -2[P(\tau) \overline{\theta(\tau, \sigma)} + P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \tau)}].$$

Note que temos  $P(x)\theta(x, y)$ , em que o elemento de  $P$  é primeiro elemento de  $\theta$ .

Com o  $\sigma$  fixado, teremos para o vértice duas parcelas, uma aresta pra cada,  $(\sigma, \tau)$  e  $(\sigma, \alpha)$ , então

$$P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \tau)} + P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \alpha)} = P(\sigma) \sum_{\substack{\sigma \text{ fixo} \\ (\sigma, \phi) \in E}} \overline{\theta(\sigma, \phi)}.$$

Se somarmos cada parcela dessa para cada vértice, temos

$$\sum_{\sigma \in V} P(\sigma) \sum_{\substack{\sigma \text{ fixo} \\ (\sigma, \tau) \in E}} \overline{\theta(\sigma, \tau)} = (3.3).$$

Por outro lado, vimos que

$$\sum_{\substack{(\sigma, \tau) \\ (\tau, \sigma)}} [P(\sigma) - P(\tau)] \overline{\theta(\sigma, \tau)} = -2[P(\tau) \overline{\theta(\tau, \sigma)} + P(\sigma) \overline{\theta(\sigma, \tau)}].$$

logo, somando sobre todas as arestas de  $E$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{(\sigma,\tau) \in E} [P(\tau) - P(\sigma)] \overline{\theta(\sigma, \tau)} &= -2 \left[ \sum_{\sigma \in V} P(\sigma) \sum_{\substack{\sigma \text{ fixo} \\ (\sigma,\tau) \in E}} \overline{\theta(\sigma, \tau)} \right] \\ \Rightarrow \underbrace{1/2 \sum_{(\sigma,\tau) \in E} [P(\tau) - P(\sigma)] \overline{\theta(\sigma, \tau)}}_{(3.3)} &= \underbrace{\left[ \sum_{\sigma \in V} P(\sigma) - \sum_{\substack{\sigma \text{ fixo} \\ (\sigma,\tau) \in E}} \overline{\theta(\sigma, \tau)} \right]}_{(3.4)}. \end{aligned}$$

Logo,  $\langle dP, \theta \rangle = \langle P, d^*\theta \rangle$ .  $\square$

**Observação 3.1.** No Lema (3.1) mostramos que  $\langle dP, \theta \rangle = \langle P, d^*\theta \rangle$ , porém estaremos interessados em  $\langle \theta, dP \rangle = \langle d^*\theta, P \rangle$ . Mas sabemos das propriedades de produto hermitiano que para todos  $v, u \in V$   $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ , assim

$$\begin{aligned} \langle dP, \theta \rangle &= \overline{\langle \theta, dP \rangle} \\ \langle P, d^*\theta \rangle &= \overline{\langle d^*\theta, P \rangle}. \end{aligned}$$

Como  $\langle dP, \theta \rangle = \langle P, d^*\theta \rangle$  concluímos que

$$\overline{\langle \theta, dP \rangle} = \overline{\langle d^*\theta, P \rangle} \text{ e portanto } \langle \theta, dP \rangle = \langle d^*\theta, P \rangle.$$

Suponha agora que  $\Gamma$  seja um grafo conectado enumerável com condutâncias  $C(\sigma, \tau) > 0$  atribuídas as arestas que satisfazem

$$C(\sigma, \tau) = C(\tau, \sigma) \text{ e } \forall \sigma \sum_{(\sigma,\tau) \in E} C(\sigma, \tau) < \infty.$$

Fixe um vértice  $0 \in \Gamma$ . Seja

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \left\{ \theta : E \rightarrow \mathbf{R} \mid \theta C^{-1/2} \in l^2(E), \forall \sigma \sum_{(\sigma,\tau) \in E} |\theta(\sigma, \tau)| < \infty \text{ e } \forall \sigma \neq 0, (d^*\theta)(\sigma) = 0 \right\} \quad (3.5)$$

o espaço de fluxos em  $\Gamma$  de energia finita em que a energia de uma função  $\theta$  é definida por

$$E(\theta) = \left\| \theta C^{-1/2} \right\|_2.$$

O passeio aleatório em  $(\Gamma, C)$  tem probabilidades de transição

$$p_{\sigma,\tau} = C(\sigma, \tau) / \alpha_\sigma$$

em que

$$\alpha_\sigma = \sum_{(\sigma,\tau) \in E} C(\sigma,\tau).$$

Seja  $\Gamma$  uma árvore e  $\Gamma_n$  uma sequência finita de subgrafos de  $\Gamma$  contendo 0 tal que  $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$  e  $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ . Seja  $Z$  o conjunto dos vértices em  $\Gamma \setminus \Gamma_n$ . Identificamos todos os vértice de  $Z$  como um único vértice,  $z_n$ .

**Definição 3.1.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , definimos o **potencial**,  $P_n(\sigma) : V \rightarrow \mathbb{C}$  como uma função nos vértices tal que

$$P_n(\sigma) \sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma,\tau) = \sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma,\tau) P_n(\tau)$$

com  $\tau, \sigma \in V$ .

**Observação 3.2.**  $P_n(0) := 1$  quando 0 está em potencial unitário e  $P_n(z_n) := 0 \forall z_n \in \Gamma \setminus \Gamma_n$

Observe que  $P_n(\sigma)$  é uma função harmônica, pois

$$P_n(\sigma) \sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma,\tau) = \sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma,\tau) P_n(\tau) \text{ implica que } P_n(\sigma) = \frac{\sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma,\tau) P_n(\tau)}{\sum_{\tau \sim \sigma \in V} C(\sigma,\tau)}. \quad (3.6)$$

**Definição 3.2.** Dada uma função potencial nós definimos o fluxo de corrente  $\theta_n$  uma função associada às arestas por

$$\theta_n(\sigma,\tau) := [P_n(\sigma) - P_n(\tau)]C(\sigma,\tau).$$

Esta definição de corrente é usualmente chamada de **Lei de Ohm**. Seja  $\sigma, \tau \in V$  o fluxo de corrente de  $\sigma$  para  $\tau$  satisfaz

$$\theta_n(\sigma,\tau) = [P_n(\sigma) - P_n(\tau)]C(\sigma,\tau).$$

Agora introduziremos alguns conceitos que serão importantes a seguir. Seja

$$T_v = \inf\{k \geq 0 : X_k = v\}$$

em que  $T_v$  é o primeiro tempo aleatório que a cadeia atinge  $v$  e  $X_k$  é a variável aleatória que indica a posição no  $k$ -ésimo instante de tempo.

**Definição 3.3.** Seja  $T_v := \inf\{n \geq 0 : X_n = v\}$  então dizemos que o passeio aleatório é recorrente se

$$\mathbb{P}(T_v < \infty | X_0 = v) = 1$$

e o passeio aleatório é transiente se

$$\mathbb{P}(T_v = \infty | X_0 = v) > 0.$$

Considere a probabilidade que a cadeia de Markov visite 0 antes de visitar  $z_n$  em função do seu ponto de partida  $x$ :

$$F(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n}).$$

$$F(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n}) = \sum_y \mathbb{P}_x(\text{o primeiro passo é para } y) \mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n} | \text{o primeiro passo é para } y).$$

$$F(x) = \sum p_{x,y} F(y). \quad (3.7)$$

Observe que  $\mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n})$  é uma função harmônica, pois

$$F(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n}) = \sum p_{x,y} F(y).$$

Seja  $A_n = \{T_{z_n} < T_0\}$ , o passeio atinge  $z_n$  antes de retornar a 0. Estaremos interessados em calcular a probabilidade do passeio atingir  $z_n$  antes de retornar a 0, dado que ele iniciou em 0. Mas, para isso, precisamos da seguinte proposição.

### Proposição 3.1.

$$\mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n}) = \mathbb{P}(A_n^c | X_0 = x) = \frac{P_n(x)}{P_n(0)}.$$

**Demonstração:** Como  $F(x) = \mathbb{P}(A_n^c | X_0 = x)$  é uma função harmônica pela equação 3.7, e  $P_n(x)/P_n(0)$  também é uma função harmônica pela equação 3.6. Como  $\mathbb{P}(A_n^c | X_0 = x) = P_n(x)/P_n(0)$  em  $\{0, z_n\}$ , pelo princípio da Unicidade (DOYLE; SNELL, 2006)

$$\mathbb{P}(A_n^c | X_0 = x) = P_n(x)/P_n(0) \quad \forall x \in V. \square$$

**Observação 3.3.**  $\mathbb{P}_x(T_0 < T_{z_n}) = \mathbb{P}(A_n^c | X_0 = x) = P_n(x)$ , quando 0 está em potencial unitário.

Agora vamos estudar a probabilidade do passeio atingir  $z_n$  antes de retornar a 0 dado que iniciou em 0. Defina

$$T'_v = \inf\{k \geq 1 : X_k = v\}.$$

Seja

$$\mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0) = \mathbb{P}(A'_n | X_0 = 0).$$

Pelo teorema da probabilidade total, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0) &= \mathbb{P}(A'_n | X_0 = 0) \\ &= \sum_x p_{0,x} \cdot \mathbb{P}_x(T'_{z_n} < T'_0) \\ &= \sum_x p_{0,x} [1 - \mathbb{P}_x(T'_0 < T'_{z_n})] \\ &= \sum_x \frac{c(0,x)}{\alpha_0} \left[ 1 - \frac{P_n(x)}{P_n(0)} \right] \\ &= \sum_x \frac{c(0,x)}{\alpha_0} \left[ \frac{P_n(0) - P_n(x)}{P_n(0)} \right] \\ &= \frac{1}{P_n(0)\alpha_0} \sum_x c(0,x) [P_n(0) - P_n(x)]. \end{aligned}$$

Pela Lei de Ohm, temos

$$\mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0) = \frac{1}{P_n(0)\alpha_0} \sum_x \theta_n(0,x).$$

Em outras palavras

$$P_n(0) = \frac{\sum_x \theta_n(0,x)}{\alpha_0 \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0)}$$

Como  $\sum_x \theta_n(0,x)$  é a quantidade total de corrente que flui em 0, podemos considerar todo o circuito de 0 a  $z_n$  como um único condutor. Definimos, assim, a **condutância efetiva**

$$C_{eff} := \alpha_0 \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0) = C(0 \rightarrow z_n)$$

### 3.3 PROVA DO TEOREMA 4.3, (LYONS, 1990)

**Teorema 3.2.** (LYONS, 1990, Teorema 4.1) *O passeio aleatório em  $(\Gamma, C)$  é transiente se e somente se  $\mathcal{F} \neq \{0\}$*

**Demonstração:** *Podemos assumir que não há loops (de modo que  $p_{\sigma,\sigma} = 0$ ) sem afetar qualquer condição.*

*Seja  $\{\Gamma_n\}$  uma sequência finita de subgrafos de  $\Gamma$  contendo o 0 tal que  $\bigcup_n \Gamma_n = \Gamma$ . Seja  $P_n(\sigma)$*

o potencial quando 0 está no potencial unitário e todos os  $\tau \notin \Gamma_n$  estão aterrados.

Seja  $\theta(\sigma, \tau)$  o fluxo de corrente definido pela Lei de Ohm. Seja

$$\begin{aligned}\theta_n(\sigma, \tau) &= P_n(\sigma) - P_n(\tau) \cdot C(\sigma, \tau) \\ \theta_n(\sigma, \tau) &= -C(\sigma, \tau)[P_n(\tau) - P_n(\sigma)] \\ &= -C(\sigma, \tau)dP_n(\sigma, \tau).\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o passeio aleatório é recorrente se e somente se

$$[-d^*\theta_n(0)] \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja

$$\begin{aligned}-d^*\theta_n(0) &= \sum_{(0,\tau) \in E} \theta_n(0, \tau) \\ &= \sum_{(0,\tau) \in E} -C(0, \tau) \cdot dP_n(0, \tau) \\ &= \sum_{(0,\tau) \in E} -C(0, \tau) \cdot [P_n(\tau) - P_n(0)] \\ &= \sum_{(0,\tau) \in E} C(0, \tau) \cdot [1 - P_n(\tau)]\alpha_0/\alpha_0 \\ &= 1/\alpha_0 \sum_{(0,\tau) \in E} p_{0,\tau} \cdot [1 - P_n(\tau)].\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -d^*\theta_n(0) = 0 \text{ se e somente se } \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - P_n(\tau)] = 0$$

Para isso, vamos reescrever  $d^*\theta(0)$  da seguinte maneira

$$-d^*\theta_n(0) = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{(0,\tau) \in E} \mathbb{P}(A'_n | X_0 = 0, X_1 = \tau) \cdot \mathbb{P}(X_1 = \tau | X_0 = 0)$$

em que  $\mathbb{P}(X_1 = \tau | X_0 = 0) = p_{0,\tau}$  e  $\mathbb{P}(A'_n | X_0 = 0, X_1 = x) = 1 - P_n(\tau)$ . Isso implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P_n(\tau)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\tau(T'_{z_n} < T'_0)$$

Como  $A'_n \supseteq A'_{n+1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\tau(T'_{z_n} < T'_0) = \mathbb{P}_\tau\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T'_{z_n} < T'_0\right) = \mathbb{P}(T'_0 = \infty | X_0 = \tau) = 0.$$

Logo, o passeio é recorrente.

Agora  $d^*\theta_n = 0$  em  $\Gamma_n \setminus \{0\}$  pela Lei de Kirchoff, de onde

$$\begin{aligned}
 E(\theta_n) &= \|\theta_n C^{-1/2}\| \\
 E^2(\theta_n) &= \langle \theta_n C^{-1/2}, \theta_n C^{-1/2} \rangle \\
 &= C^{-1/2} \langle \theta_n, \theta_n C^{-1/2} \rangle \\
 &= C^{-1/2} C^{-1/2} \langle \theta_n, \theta_n \rangle \\
 &= C^{-1} \langle \theta_n, -CdP_n \rangle \\
 &= -C^{-1} \cdot C \langle \theta_n, dP_n \rangle \\
 &= -\langle \theta_n, dP_n \rangle = -\langle d^*\theta_n, P_n \rangle.
 \end{aligned}$$

Vamos analisar a energia em 0 e em  $z_n \notin \Gamma_n$

$$\begin{aligned}
 E^2(\theta_n) &= -\langle d^*\theta_n, P_n \rangle \\
 &= -d^*\theta_n(0) \underbrace{P_n(0)}_{=1} - \sum_{z_n \notin \Gamma_n} d^*\theta_n(z_n) \cdot \underbrace{P_n(z_n)}_{=0} \\
 &= -d^*\theta_n(0).
 \end{aligned}$$

Ou seja, a energia é igual à corrente em 0 quando o potencial unitário é aplicado. Agora, defina  $\theta_n$  como um fluxo de corrente quando  $\Gamma \setminus \Gamma_n$  está aterrado e 0 está em um potencial tal que  $-d^*\theta_n(0) = 1$ . Temos que a energia é  $E^2(\theta_n) = -\langle d^*\theta_n, P_n \rangle$ . Seja  $z_n \in \Gamma \setminus \Gamma_n$ , então

$$E^2(\theta_n) = \underbrace{-d^*\theta_n(0)}_{=1} P_n(0) - \sum_{z_n \notin \Gamma_n} d^*\theta_n(z_n) \cdot \underbrace{P_n(z_n)}_{=0} = P_n(0).$$

Porém,

$$P_n(0) = \frac{\sum_x \theta(0, x)}{\alpha_0 \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0)} = \frac{-d^*\theta_n(0)}{\alpha_0 \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0)} = \frac{1}{\alpha_0 \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0)}.$$

Por isso,

$$E^2(\theta_n) = \frac{1}{\alpha_0 \mathbb{P}_0(T'_{z_n} < T'_0)} = \frac{1}{C(0 \rightarrow z_n)}.$$

Então, pelo Teorema 2.3(LYONS; PERES, 2017) o passeio é recorrente se e somente se  $E(\theta_n) \rightarrow \infty$ . Além disso, pelo princípio de Thompson(LYONS; PERES, 2017)  $\theta_n$  é a única função de  $\theta$  de energia mínima que satisfaz  $-d^*\theta(0) = 1$  e  $d^*\theta = 0$  em  $\Gamma_n \setminus 0$ . Assim,  $\mathcal{F}(\Gamma) \neq \{0\}$ , existe  $\theta \in \mathcal{F}(\Gamma)$  com energia finita e  $-d^*\theta(0) = 1$  que implica  $E(\theta_n) \leq E(\theta) < \infty$  e o passeio aleatório é transiente.

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, se o passeio é transiente, então  $E(\theta_n) \not\rightarrow \infty$  e tomando uma subsequência

$\theta_n \rightarrow \theta$  pela Proposição 6.2.5 (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012) implica que  $E(\theta) \leq \liminf E(\theta_n) = \lim E(\theta_n) = M < \infty$ . Como  $0 \leq P_n(\sigma)/P_n(0) \leq 1$ , isso implica

$$0 \leq P_n(\sigma) \leq P_n(0) = E(\theta_n) \leq M \quad \forall \sigma.$$

Logo  $0 \leq P_n \leq M$ .

Como  $\theta_n(\sigma, \tau) = [P_n(\sigma) - P_n(\tau)]C(\sigma, \tau)$ , isso implica que  $\theta_n(\sigma, \tau)/C(\sigma, \tau) = [P_n(\sigma) - P_n(\tau)]$ . Vamos analisar os casos: se  $P_n(\sigma) > P_n(\tau)$ , então  $\theta_n(\sigma, \tau)/C(\sigma, \tau) > 0$ . Se  $P_n(\sigma) < P_n(\tau)$ , isso implica que  $P_n(\sigma) - P_n(\tau) < 0$ . Mas, como  $\theta_n(\sigma, \tau) = -\theta_n(\tau, \sigma)$ , então  $\theta_n(\tau, \sigma)/C(\sigma, \tau) > 0$ . Isso implica que  $|\theta_n(\sigma, \tau)|/C(\sigma, \tau) \leq M$  que implica  $|\theta_n(\sigma, \tau)| \leq MC(\sigma, \tau)$ . Vamos mostrar que

$$\sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta(\sigma, \tau)| < \infty.$$

Seja  $\theta(\sigma, \tau) = \theta(\sigma, \tau) - \theta_n(\sigma, \tau) + \theta_n(\sigma, \tau)$ . Pela desigualdade triangular, temos

$$\sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta(\sigma, \tau)| \leq \sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta(\sigma, \tau) - \theta_n(\sigma, \tau)| + \sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta_n(\sigma, \tau)|.$$

Como  $\forall \sigma \sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta(\sigma, \tau) - \theta_n(\sigma, \tau)| \rightarrow 0$  e  $|\theta_n(\sigma, \tau)| \leq MC(\sigma, \tau)$ , então  $\sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta_n(\sigma, \tau)| \leq M \sum_{(\sigma, \tau) \in E} C(\sigma, \tau) < \infty$ , logo  $\sum_{(\sigma, \tau) \in E} |\theta(\sigma, \tau)| < \infty$ . Consequentemente  $0 \neq \theta \in \mathcal{F}(\Gamma)$ .  $\square$

Quando  $\Gamma$  é uma árvore com condutâncias  $C$ , escrevemos  $\Phi(\sigma)$  para resistência  $C(\overleftarrow{\sigma}, \sigma)^{-1}$  da aresta que precede  $\sigma$  ( $\sigma \neq 0$ ). Também será conveniente escrever

$$E^\Phi(\theta) = \sum_{0 \neq \sigma \in \Gamma} \theta(\sigma)^2 \Phi(\sigma)$$

para a energia de um fluxo  $\theta$  e

$$E^\Phi(\Gamma) = \min_{\theta \in U(\Gamma)} E^\Phi(\theta)$$

para energia do fluxo de corrente unitária (ou  $\infty$  se a corrente não fluir).

**Corolário 3.1** ((LYONS, 1990), Corolário 4.2). *Seja  $\Gamma$  uma árvore com resistências  $\Phi$ . Se  $(\Gamma, \Phi^{-1})$  é transiente, então*

$$\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \Phi(\sigma)^{-1} = \infty. \quad (3.8)$$

Por outro lado, se houver números positivos  $w_n$  tal que  $\sum_{n \geq 1} w_n < \infty$  e

$$\liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} w_{|\sigma|} \Phi(\sigma)^{-1} > 0 \quad (3.9)$$

então  $(\Gamma, \Phi^{-1})$  é transiente.

**Demonstração:** Se  $(\Gamma, \Phi^{-1})$  é transiente, então existe um fluxo unitário  $\theta$  de energia finita. Como  $\theta$  é unitário, então  $\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) = 1$ . Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$1 = \left( \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) \right)^2 \leq \left( \sum_{\sigma \in \Pi} \Phi(\sigma)^{-1} \right) \left( \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma)^2 \Phi(\sigma) \right).$$

Suponha por contradição que  $\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \Phi(\sigma)^{-1} < \infty$  como,  $\left( \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma)^2 \Phi(\sigma) \right) \rightarrow 0$ , teríamos  $1 \leq 0$ , que é um absurdo. Por conseguinte,

$$\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \Phi(\sigma)^{-1} = \infty$$

Por outro lado, se  $\liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} w_{|\sigma|} \Phi(\sigma)^{-1} > 0$ . Pelo Teorema do Máximo-Fluxo e Mínimo-Corte, existe um fluxo não nulo  $\theta$  que satisfaz

$$\theta(\sigma) \leq w_{|\sigma|} \Phi(\sigma)^{-1} \text{ implica que, } \theta(\sigma) \Phi(\sigma) \leq w_{|\sigma|}$$

Devemos mostrar que esse fluxo tem energia finita.

$$\sum_{0 \neq \sigma \in \Gamma} \theta(\sigma)^2 \Phi(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\sigma \in S_n} \theta(\sigma) (\theta(\sigma) \Phi(\sigma)) \leq \sum_{n \geq 1} w_n \cdot \overbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \theta(\sigma)}^1 < \infty$$

Logo,  $(\Gamma, \Phi^{-1})$  é transiente.  $\square$

**Teorema 3.3** ((LYONS, 1990), Teorema 4.3). *Seja  $\Gamma$  uma árvore. Então quando  $\lambda < \text{br } \Gamma$  o passeio associado a  $\lambda$  é transiente e quando  $\lambda > \text{br } \Gamma$ , o passeio é recorrente.*

**Demonstração:** Se o passeio aleatório associado a  $\lambda$  é transiente, então pelo Corolário (3.1) e equação (3.8)

$$\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \Phi(\sigma)^{-1} = \infty.$$

Escolhendo  $\Phi(\sigma) = \lambda^{|\sigma|-1}$  em que  $\lambda > 0$ , temos

$$\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} (\lambda^{|\sigma|-1})^{-1} = \infty$$

Isso implica em

$$\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} (\lambda^{1-|\sigma|}) = \infty \text{ implica que } \lim_{\Pi \rightarrow \infty} \lambda \sum_{\sigma \in \Pi} (\lambda^{-|\sigma|}) = \infty.$$

E portanto,

$$\lim_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = \infty.$$

Pela equação (2.2), temos que

$$\text{br } \Gamma = \sup \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = \infty \right\}.$$

Isso resulta em  $\lambda \leq \text{br } \Gamma$ . Consequentemente se  $\lambda > \text{br } \Gamma$ , então o passeio aleatório é recorrente. Para  $\lambda < \text{br } \Gamma$  escolha  $\lambda_0 \in (\lambda, \text{br } \Gamma)$  e seja  $\omega_n := (\lambda/\lambda_0)^n$ . Claro que  $\sum_n \omega_n < \infty$ . Pelo teorema do Máximo-Fluxo Mínimo-Corte, existe um fluxo  $\theta$  tal que

$$0 \leq \theta(\sigma) \leq \lambda_0^{-|\sigma|} = \omega_{|\sigma|} \lambda^{-|\sigma|} < \omega_{|\sigma|} \Phi(\sigma)^{-1}.$$

Isso implica

$$\liminf_{\Pi \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \omega_{|\sigma|} \Phi(\sigma)^{-1} > 0$$

Pelo Corolário (3.1), o passeio aleatório é transiente.  $\square$

**Observação 3.4.** O passeio associado a  $\lambda$  tem de fato as probabilidades da equação (3.1), de fato

$$p_{\sigma, \overleftarrow{\sigma}} = \frac{C(\sigma, \overleftarrow{\sigma})}{\sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma, \tau)}$$

em que,

$$\sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma, \tau) = C(\sigma, \overleftarrow{\sigma}) + [\text{grau}(\sigma) - 1].C(\sigma, \tau)$$

em que,  $\tau \rightarrow \sigma$ . Então

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \sim \sigma} C(\sigma, \tau) &= \lambda^{1-|\sigma|} + [\text{grau}(\sigma) - 1].\lambda^{1-|\sigma|} \\ &= \lambda^{1-|\sigma|} + [\text{grau}(\sigma) - 1].\lambda^{1-|\sigma|-1} \\ &= \lambda^{1-|\sigma|} + [\text{grau}(\sigma) - 1].\lambda^{-|\sigma|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{\sigma, \overleftarrow{\sigma}} &= \frac{\lambda^{1-|\sigma|}}{\lambda^{1-|\sigma|} + [\text{grau}(\sigma) - 1] \cdot \lambda^{-|\sigma|}} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + [\text{grau}(\sigma) - 1]} \end{aligned}$$

e

$$p_{\sigma, \tau} = \frac{1}{\lambda + [\text{grau}(\sigma) - 1]}.$$

## REFERÊNCIAS

- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. [S.l.]: SBM, 2012.
- DOYLE, P. G.; SNELL, J. L. *Random walks and electric networks*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2006. v. 22.
- GÖBEL, F.; JAGERS, A. Random walks on graphs. *Stochastic processes and their applications*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 311–336, 1974.
- JENSEN, J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, Springer, v. 30, n. 1, p. 175–193, 1906.
- KAC, M. Random walk and the theory of brownian motion. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 54, n. 7P1, p. 369–391, 1947.
- LIMA, E. L. Curso de análise vol 1. 11a edição. *Rio de Janeiro: IMPA*, p. 4, 2004.
- LYONS, R. Random walks and percolation on trees. *The annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 18, n. 3, p. 931–958, 1990.
- LYONS, R.; PERES, Y. *Probability on trees and networks*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. v. 42.
- MESQUITA, D. B. Expoentes de lyapunov e decomposição de oseledets. 2013.
- PEARSON, K. The problem of the random walk. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 72, n. 1867, p. 342–342, 1905.

## APÊNDICE A – CONCEITOS

**Definição A.1.** Escrevemos  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  e  $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ , diremos que  $a$  é o limite inferior e que  $b$  é o limite superior da sequência  $x_n$ . Tem-se evidentemente

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

**Teorema A.1** (Teorema 10, página 122 (LIMA, 2004)). *Seja  $x_n$  uma sequência limitada. Então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  é o menor valor de aderência e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  é o maior valor de aderência de  $(x_n)$ .*

**Teorema A.2** (Teorema 11, página 124(LIMA, 2004)). *Sejam  $a = \liminf x_n$  e  $b = \limsup x_n$ , onde  $(x_n)$  é uma sequência limitada. Dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$ . Além disso,  $a$  é o maior e  $b$  é o menor número com esta propriedade.*

**Corolário A.1** (Corolário 1, página 124 (LIMA, 2004)). *Se  $c < \liminf x_n$  então existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$ . Analogamente, se  $\limsup x_n < d$  então existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n < d$  para todo  $n > n_2$ .*

**Teorema A.3** (Máximo-fluxo Mínimo-corte, página 75 (LYONS; PERES, 2017)). *Sejam  $A$  e  $Z$  conjuntos disjuntos de vértices em uma rede finita  $G$  (direcionado ou não). A força máxima de um fluxo admissível entre  $A$  e  $Z$  é igual à soma mínima das capacidades no conjunto de cortes. Em outras palavras, no caso direcionado,*

$$\max\{\text{Força}(\theta); \theta \text{ fluxo de } A \text{ para } Z \text{ satisfazendo } 0 \leq \theta(\sigma, \tau) \leq C(\sigma, \tau)\} = \min \left\{ \sum_{\sigma, \tau \in \Pi} C(\sigma, \tau) \mid \Pi \text{ separa } A \text{ e } Z \right\}$$

enquanto no caso não direcionado,

$$\max\{\text{Força}(\theta); \theta \text{ fluxo de } A \text{ para } Z \text{ satisfazendo } |\theta(\sigma, \tau)| \leq C(\sigma, \tau)\} = \min \left\{ \sum_{\sigma, \tau \in \Pi} C(\sigma, \tau) \mid \Pi \text{ separa } A \text{ e } Z \right\}.$$

Em que  $\text{Força}(\theta) := \sum_{\sigma \in V} d^*(\theta)(\sigma)$ .

**Lema A.1.** (Lema de Fekete, página 22 (MESQUITA, 2013)) *Seja  $a_n$  uma sequência subaditiva, então existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}.$$

**Definição A.2** (Função Harmônica, página 20, (LYONS; PERES, 2017)). *Seja  $f$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma função harmônica em  $x$  se*

$$f(x) = \sum_{x,y \in V} p_{x,y} f(y).$$

*Ou seja,  $f(x)$  é a média dos valores de  $f$  nos vizinhos de  $x$ .*

**Observação:** *Em geral, a média é tomada como pesos.*

**Teorema A.4** (Desigualdade de Jensen, página 179 (JENSEN, 1906) ). *Seja  $f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável. Se  $f''(x) \geq 0$  (convexa) em todo intervalo  $(a, b)$ , então para quaisquer  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  vale*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$