



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE  
NÚCLEO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

BRENO GUSTAVO SILVA VILELA

**SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO A  
METODOLOGIA IMERSPEC ACOPLADA AO MÉTODO DE FOURIER-  
GEGENBAUER E A TÉCNICA DE FILTRAGEM ESPECTRAL**

Caruaru

2024

BRENO GUSTAVO SILVA VILELA

**SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO A  
METODOLOGIA IMERSPEC ACOPLADA AO MÉTODO DE FOURIER-  
GEGENBAUER E A TÉCNICA DE FILTRAGEM ESPECTRAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

**Área de concentração:** Mecânica dos Fluidos

**Orientador(a):** Prof. Dra. Mariana Fernandes dos Santos Villela

Caruaru

2024

*“You should enjoy the little detours to the fullest.  
Because that's where you'll find the things  
more important than what you want.”*

*Togashi, Hunter x Hunter, vol. 32*

## AGRADECIMENTOS

Houve um dia em que a minha mente tomou percepção de que não tinha certeza do caminho que estava trilhando. Revivi esse dia incontáveis vezes. Nunca parando. Mesmo querendo. E na busca do porquê, encontrei a resposta em frente de meus olhos, todos os dias seguintes.

Ao tempo, contra quem sempre competi. Não tive o tempo de viver o que poderia viver, mas vivi tudo que podia no tempo que tive. E por isso, agradeço às memórias que o transcendem. Às escolhas, que me permitiram enxergar coisas que jamais imaginaria ver. Então, agradeço às oportunidades e às possibilidades. Às mudanças, pois o que seria do mundo se não ocorressem? O que seria de mim? Por isso, agradeço aos não. O fim por vezes dói, por vezes fere, mas sempre termina. Já o término não é apenas um adeus, mas um tributo à dedicação, ao esforço e à superação que nos trouxeram até aqui. E mesmo que nunca seja fácil dizer adeus ...

Agradeço à Deus, que nunca deixou de estar ao meu lado quando mais necessitei. À minha vó Rita, que não teve a oportunidade de me abraçar nessa conclusão, mas sei que sempre zelará por mim, por toda eternidade. Aos meus pais, minha imensa gratidão por zelarem por minhas escolhas, pelo apoio quando decaía, pelo amor incondicional que encontrava quando estavam por perto. A minhas irmãs, obrigado pelos momentos de alegria e raiva que sempre me ofereceram, não me tornaria quem sou hoje sem vocês.

À Prof. Dra. Mariana Villela, minha orientadora, agradeço por tudo. Por me acolher como aluno de iniciação científica, por expandir meu conhecimento para áreas que não sabia que teria tanta afinidade, por acreditar em nossos estudos ardorosos, por me ensinar habilidades que vão além do acadêmico. À Prof. Dra. Jocilene Costa, obrigado pelo auxílio constante, pelas inigualáveis oportunidades, pelas conversas sinceras, pelas visões e conhecimento de mundo únicas. Dentre a academia, você sempre será destacada em minha formação.

Ao Prof. Dr. Felipe Mariano e à Laura Albuquerque, participantes essenciais na minha formação científica, auxiliando e contribuindo para os estudos deste trabalho. À UFG, FUNAPE e FURNAS pelo auxílio financeiro, elemento crucial para minha formação acadêmica e produção deste trabalho.

Muito se discute sobre as maravilhas do ingresso ao ensino superior, sobre a transformadora experiência que marcará sua vida. Porém nunca se menciona a luta contra os que têm ego corrompido, contra os que o duvidam, contra os que o julgam sem sequer hesitar, contra os que o fazem querer não existir. É por isso que esse caminho não se trilha a só.

Aos meus colegas de formação, Isa, Italo, Daniel, Erica, Jean, Gheyson, Bruno. Agradeço imensamente pelo companheirismo durante todos esses anos. Pelas risadas, pelas aventuras,

pelas confusões, pelas encrencas, pelas noites viradas de estudo, pelos bolos de aniversário, pelas inesquecíveis memórias que juntos construímos, vocês foram antes de tudo meu alicerce período a período. De toda cinematografia já produzida, não há roteiro que supere o que vivemos nesse tempo. Eu nunca, nunca teria conseguido sem vocês. À jornada que vivi, que nunca seja esquecida.

**Soluções das equações de Navier-Stokes utilizando a metodologia IMERSPEC acoplada ao método de Fourier-Gegenbauer e a técnica de filtragem espectral.**

**Numerical solutions of the Navier-Stokes equations using the IMERSPEC methodology coupled with the Fourier-Gegenbauer method and spectral filtering technique.**

**Breno Gustavo Silva Vilela<sup>1</sup>**

---

## **RESUMO**

Embora os métodos espectrais sejam comumente utilizados para simulações numéricas na Dinâmica dos Fluidos Computacional, o método Pseudoespectral de Fourier apresenta soluções não acuradas em problemas com descontinuidades e condições de contorno não periódicas devido ao Fenômeno de Gibbs. A metodologia IMERSPEC busca superar essas limitações, acoplando ao método Pseudoespectral de Fourier o método da Fronteira Imersa. Porém, as soluções ainda são afetadas pelo Fenômeno de Gibbs. A técnica de filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer são procedimentos de pós-processamento que minimizam as oscilações espúrias advindas do fenômeno de Gibbs. O presente trabalho avalia a implementação da metodologia IMERSPEC acoplada à filtragem espectral e ao método de Fourier-Gegenbauer em três problemas associados às Equações de Navier-Stokes: a equação de Burgers Inviscido, a equação de Burgers clássica em domínio não periódico e um escoamento monofásico em um canal plano utilizando a metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A). Portanto, análises quantitativas da medida do erro e da taxa de convergência são expostas, ao passo que se discute o potencial dos ganhos devido ao acoplamento das metodologias.

**Palavras-chave:** métodos espectrais; filtragem espectral; IMERSPEC; fourier-gegenbauer.

---

## **ABSTRACT**

Although spectral methods are commonly used for numerical simulations in Computational Fluid Dynamics, the Fourier Pseudospectral method yields inaccurate solutions in problems with discontinuities and non-periodic boundary conditions due to the Gibbs phenomenon. The

---

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: breno.vilela@ufpe.br

IMERSPEC methodology has overcome these limitations by coupling the Fourier Pseudospectral method with the Immersed Boundary method. However, the solutions are still affected by the Gibbs phenomenon. The spectral filtering technique and the Fourier-Gegenbauer method are post-processing procedures aimed at minimizing spurious oscillations arising from the Gibbs phenomenon. This study evaluates the implementation of the IMERSPEC methodology coupled with spectral filtering and the Fourier-Gegenbauer method in three problems related to the Navier-Stokes equations: the Inviscid Burgers Equation, the classical Burgers Equation in a non-periodic domain, and a single-phase flow in a plane channel using the IMERSPEC methodology with the Sparlat-Allmaras (S-A) turbulence model. Quantitative analysis of error measurement and convergence rate are presented, while the potential benefits of the methodology coupling are discussed.

**Keywords:** spectral Methods; spectral Filtering; IMERSPEC; fourier-gegenbauer.

---

**DATA DE APROVAÇÃO:** 23 de outubro de 2024.

---

## 1 INTRODUÇÃO

A mecânica dos fluidos é o ramo da física que estuda o comportamento dos fluidos, sejam líquidos ou gases, quando submetidos a diversas condições. Essa área é fundamental para a engenharia e outras ciências aplicadas, haja vista que permite a compreensão de fenômenos como escoamentos, pressão, viscosidade e a própria dinâmica que regem os fluidos. As equações de Navier-Stokes revolucionaram totalmente o campo da mecânica dos fluidos uma vez que apresentam em si conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) capazes de descrever o comportamento e movimento de substâncias fluidas para muitos problemas físicos (Wolfram, 2002). Contudo, devido à complexidade geométrica e as condições de temperatura e pressão que a maioria dos problemas físicos apresentam, as soluções para essas equações são por vezes impraticáveis de serem obtidas analiticamente.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics – CFD) foi um ramo que ganhou visibilidade na década de 1960 ao desenvolver ferramentas e métodos numéricos para resolução de tais problemas. Desde então, vem sendo a principal ferramenta para resolução de EDPs que descrevem o transporte de quantidade de movimento, massa, energia, componentes químicos e entre outros (Mariano, 2011). Hoje, conforme Versteeg e Malalasekera (2007), o CFD tornou-se uma ferramenta indispensável para engenheiros,

reduzindo a necessidade de experimentação física e permitindo a otimização de projetos com maior precisão e menor custo. Mariano (2011) descreve que, dentre os principais métodos contemplados pela CFD, pode-se citar o método das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos e os métodos espectrais, tomando o método que melhor se adeque ao problema estudado.

Kinoshita (2015) explica que os métodos espectrais são considerados métodos de alta ordem e oferecem excelente acurácia. Estes proporcionam mais de 10 dígitos de acurácia, enquanto os métodos clássicos como diferenças finitas ou elementos finitos, alcançam dois ou três dígitos, podendo chegar a ordens superiores aumentando o tamanho do estêncil. Os métodos espectrais são vistos como um desenvolvimento extremo da classe de esquemas de discretização para equações diferenciais conhecidas genericamente como método de Resíduos Ponderados (Method of Weighted Residuals – MWR) (Canuto; Hussaini; Quarteroni; Zang, 1988). Os elementos chave do MWR são as *trial functions*, chamadas de expansão ou funções de aproximação, e as *test functions*, conhecidas como funções peso (Canuto; Hussaini; Quarteroni; Zang, 1988). Os mais usuais métodos são caracterizados pela expansão da solução em termos séries truncadas de polinômios de Chebyshev e Legendre ou séries de Fourier. Segundo Canuto *et al.* (2006), as metodologias espectrais se mostram como as melhores alternativas para resolver equações diferenciais parciais com alta acurácia quando estas possuem domínios periódicos, regulares e de geometria simples.

A alta acurácia alcançada pelos métodos espectrais advém do fato de que estes utilizam de todos os pontos do domínio para aproximar um único ponto, enquanto que o método das diferenças finitas utiliza apenas de pontos vizinhos para fazer sua aproximação (Boyd, 2000). Dessa forma, estes coletam grande quantidade de informação local para obter uma ótima aproximação global, sendo assim ótimos para obter resultados de alta qualidade em problemas de engenharia.

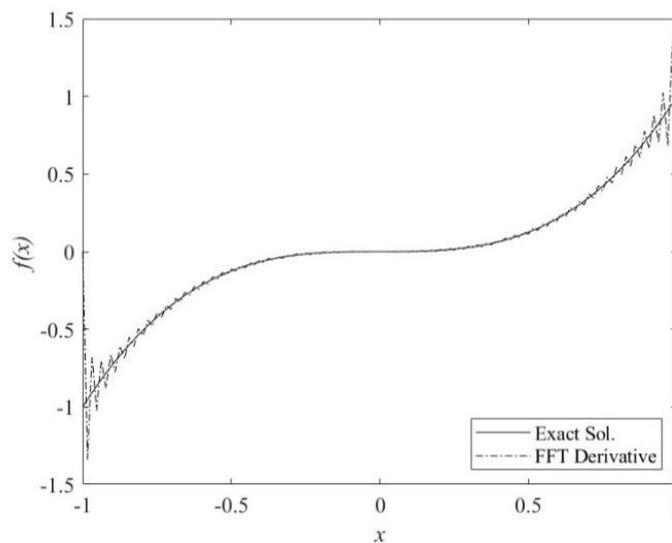
Apesar da grande acurácia, as metodologias espectrais possuem alto custo computacional associado. Assim, o método Pseudoespectral de Fourier (MPEF), foco de estudo do presente trabalho, passou a ser relevante após a introdução do algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT) por Cooley e Turkey (1965). O algoritmo trabalha com o procedimento de rotação de bit para calcular de forma eficiente a transformada de Fourier, reduzindo o custo computacional do método de  $\mathcal{O}(N^2)$  para  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ , onde  $N$  é o número de pontos de colocação.

Com efeito, tornou-se um método numérico atrativo, eficiente e confiável para simulação de muitos fenômenos físicos dada a sua capacidade de alcançar a alta acurácia e convergência com

baixo custo computacional, especialmente quando se trata de problemas tridimensionais (Mariano, 2011). Uma desvantagem enfrentada por essas técnicas numéricas ocorre quando são aplicadas em problemas com descontinuidades ou condições de contorno não periódicas: a ocorrência de oscilações espúrias nas soluções numéricas acaba por afetar a acurácia do método, o denominado fenômeno de Gibbs.

O fenômeno de Gibbs, refere-se à ocorrência de oscilações nas soluções numéricas ao empregar, neste caso, uma série de Fourier finita para aproximar uma dada função que apresenta descontinuidades ou não periodicidade. A Figura 1 exibe o fenômeno de Gibbs para a derivada espectral da função  $f(x) = x^3$ .

**Figura 1** – Ocorrência do fenômeno de Gibbs para derivada espectral utilizando o FFT para N=128 pontos



Fonte: Autor (2024).

Tadmor (2007) explica, que considerando uma função por partes suave ou com descontinuidades finitas, a expansão finita da série implica em convergência de primeira ordem. Nesse contexto, o decaimento de primeira ordem dos coeficientes de Fourier não garante a convergência uniforme sobre toda a aproximação, causando a perda da precisão espectral alcançada pelos métodos espectrais (Tadmor, 2007). Essa anomalia é considerada um obstáculo ainda maior, especialmente dado que tais oscilações em equações não lineares podem induzir em mais instabilidade não linear (Kopriva, 1987).

As equações de Navier-Stokes, abordadas no presente trabalho, por vezes definem o comportamento de fenômenos físicos nos quais essas oscilações fortemente influenciariam, produzindo mais instabilidade não linear. Um exemplo disso são escoamentos compressíveis

com fluidos que se movem em torno de objetos com geometrias complexas, nos quais os choques advindos de mudanças abruptas de pressão representam descontinuidades nas soluções (Toro, 2009). Destacam-se também os escoamentos multifásicos, os quais tem mudanças abruptas de propriedades físicas. Outro exemplo indispensável são escoamentos em regimes turbulentos regidos por alto número de Reynolds, que compõem grande parte da física prática observada na natureza.

Para lidar com as limitações impostas pelo MPEF, Mariano (2011) introduziu uma nova metodologia que combina o método da Fronteira Imersa (MFI) e o método Pseudoespectral de Fourier, denominado IMERSPEC. Essa nova metodologia possibilitou a remoção da necessidade de condições de contorno periódica, sendo possível modelar problemas de variada complexidade geométrica. Até então, sua aplicação tem sido demonstrada e validada em diferentes problemas físicos.

Villela *et al.* (2017) aplicou a metodologia para escoamentos bifásicos incompressíveis com geometria móvel e flexível usando os métodos *front-tracking* (FT) e *volume of fluid* (VF) para simular interações fluido-fluido. Nascimento *et al.* (2020) trouxe uma análise comparativa do IMERSPEC com o método dos volumes finitos, estudando convergência e custo computacional da metodologia aplicada aos vórtices de Green-Taylor. Albuquerque *et al.* (2024a) aplicou a metodologia para escoamentos incompressíveis em baixo número de Reynolds para distintos perfis de aerofólios, avaliando a sua performance aerodinâmica.

No entanto, embora o IMERSPEC tenha se mostrado capaz de aliviar as restrições impostas pelo MPEF, a ocorrência do fenômeno de Gibbs ainda persiste, afetando assim a precisão dessa metodologia promissora. A fim lidar com o obstáculo do fenômeno de Gibbs, técnicas foram desenvolvidas para resolver esse problema.

A técnica de filtragem espectral é prática e versátil, se destacando hoje na área de análise e processamento de sinais. Partindo da perspectiva escrita anteriormente, supõe-se que ao aumentar o decaimento dos coeficientes de Fourier de maneira que não haja interferência drástica em sua exatidão, pode-se assim reduzir tais oscilações. Essa é a proposta trazida pelos filtros espectrais: aumentar a taxa de convergência da série de Fourier a partir da informação espectral contida em seus coeficientes com o intuito de atenuar o fenômeno de Gibbs. Porém, os filtros espectrais apresentam resultados não tão satisfatórios quando usados em problemas com a presença de descontinuidades (Kopriva, 1987).

Reconhecendo as limitações encontradas em resolver as oscilações de Gibbs, Gottlieb *et al.* (1992) propuseram um método teoricamente capaz de resolver completamente esse fenômeno: o método de Fourier-Gegenbauer (MFG), publicando uma série de artigos sobre esse

procedimento (Gottlieb, 1992, 1995a, 1995b, 1996). Usando os coeficientes de Gegenbauer para aproximar a solução obtida, é alcançada um decaimento exponencial e a precisão espectral pode ser recuperada, teoricamente.

Dessa maneira, o presente trabalho tem por objetivo geral resolver numericamente as equações de Navier-Stokes utilizando a metodologia IMERSPEC e acoplá-la ao método de Fourier-Gegenbauer e a técnica de filtragem espectral. Para tal, foi-se feita a análise para três problemas que estão intrinsicamente associadas às Equações de Navier-Stokes. O primeiro se refere à equação de Burgers Inviscida enquanto o segundo se refere à equação de Burgers clássica em um domínio não periódico. A escolha de tal problema é fundamentada pelo fato desta ser o centro do interesse para pesquisadores que estudam sobre inúmeros fenômenos físicos como teoria de onda de choques, escoamentos turbulentos e dinâmica dos gases (Oyar, 2017). Por fim, o terceiro problema se refere ao escoamento monofásico em um canal plano utilizando a metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Spalart-Allmaras (S-A) como proposto por Albuquerque (2024b). Desta forma, no presente trabalho, identificam-se os possíveis ganhos computacionais que venham tornar a metodologia IMERSPEC mais acurada.

Em linhas específicas, tem-se por objetivos revisar os conceitos da mecânica dos fluidos e metodologia híbrida IMERSPEC. Além disso, estudar a fenomenologia das oscilações numéricas de Gibbs, os filtros espectrais e o método de Fourier-Gegenbauer. Por fim, busca-se exibir uma análise quantitativa para os problemas propostos.

---

## 2 METODOLOGIA

Nesta seção, apresenta-se as metodologias empregadas para o desenvolvimento do presente trabalho. Assim, inicialmente, descreve-se a modelagem matemática das equações de Navier-Stokes. Em seguida são descritas o método da Fronteira Imersa, o método Pseudoespectral, o método de discretização temporal adotado e a metodologia IMERSPEC. Após, a técnica de filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer são descritos e suas peculiaridades são abordadas. Por fim, define-se a metodologia utilizada para as análises quantitativas.

## 2.1 Modelagem matemática das equações de Navier-Stokes

As equações governantes abordadas no presente trabalho estão restritas a fluidos Newtonianos e escoamentos incompressíveis, definidas pelas equações de Navier-Stokes, através da conservação de momento e equação da continuidade, observada nas Equações 1 e 2.

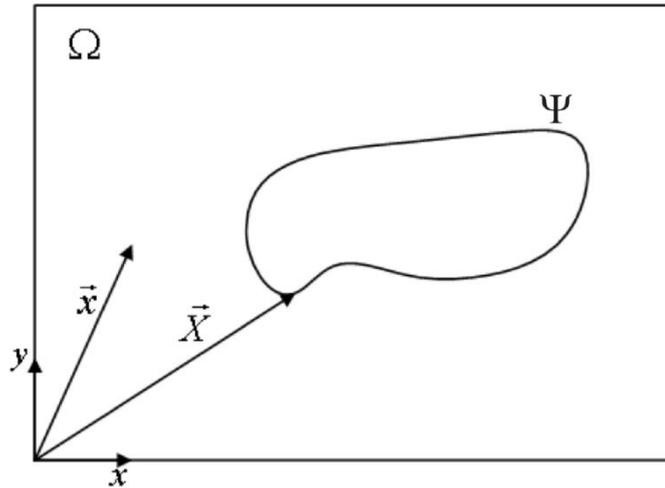
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + f_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

onde  $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i}$ , sendo  $p^*$  a pressão estática, em  $[\text{N.m}^{-2}]$ ,  $\rho$  é a massa específica, em  $[\text{kg.m}^{-3}]$ ,  $u_i$  é o campo de velocidades, em  $[\text{m.s}^{-1}]$ ,  $\nu$  é a viscosidade cinemática, em  $[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$ ,  $f_i = \frac{f_i^*}{\rho}$ , com  $f_i^*$  sendo o termo fonte que representa as forças externas atuantes no escoamento, em  $[\text{N.m}^{-3}]$ ,  $x$  é a variável espacial, em  $[\text{m}]$ ,  $t$  é a variável temporal, em  $[\text{s}]$  e  $i$  é índice que caracteriza em que dimensão se encontra o problema.

## 2.2 Método da Fronteira Imersa

Um método amplamente conhecido em simulações numéricas de mecânica dos fluidos é o método da Fronteira Imersa, desenvolvido por Peksin (2002). A principal vantagem deste reside em sua capacidade de simular problemas de escoamento com geometrias altamente complexas e flexíveis. O MFI opera empregando dois domínios independentes que se comunicam entre si: um é responsável por descrever o escoamento (euleriano), e o outro é responsável por representar a geometria imersa (lagrangiano), conforme mostrado na Figura 2 (Mariano, 2011).



Fonte: Adaptado de Mariano (2011)

O método possui abordagens diferentes quanto à imposição da força no sistema de equações a serem resolvidas. Neste estudo, foi utilizada a imposição direta das condições de contorno, desenvolvida por Uhlmann (2005), também conhecido como *direct-forcing*. Essa imposição baseia-se no uso das informações das soluções numéricas das equações governantes por meio de um termo fonte  $f_i^*$ . Assim, o termo fonte é responsável por conectar as informações entre os domínios lagrangiano e euleriano, ou seja, a interface sólido/fluido. Ele é definido em todo o domínio  $\Omega$  mas apresenta valores diferentes de zero apenas nos pontos que coincidem com a geometria imersa, permitindo que o campo euleriano perceba a presença da interface sólida (Enriquez-Remigio, 2007), conforme visto na Equação 3 e 4.

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (3)$$

$$u_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} U_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\vec{x}$  é a posição da partícula do fluido no domínio  $\Omega$  e  $\vec{X}$  é a posição da partícula na interface sólida no domínio  $\psi$ . Tratando por essa metodologia, rearranjando-se a Equação 1,

$$\frac{du_i}{dt} = \text{RHS} + f_i^* \quad (5)$$

onde  $\text{RHS} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}$  representa o lado direito da equação. Pelo método do *direct-forcing* e usando da formulação explícita de Euler, a Equação 4 se torna a Equação 6.

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^* + u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = \text{RHS} + f_i^* \quad (6)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo,  $u_i^{t+\Delta t}$  e  $u_i^t$  representam as soluções numéricas do campo de velocidades no domínio euleriano nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ ,  $u_i^*$  é uma variável temporária dentre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  que guarda a informação do campo de velocidades. Separando a Equação 6 em duas partes, obtém-se as Equações 7 e 8.

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^*}{\Delta t} = f_i^* \quad (7)$$

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = \text{RHS} \quad (8)$$

A Equação 7 nos permite obter  $u_i^*$  pelo método explícito de Euler. Contudo, no presente estudo optou por utilizar do método de Runge-Kutta de 4ª ordem devido a sua alta acurácia. Observando a Equação 3, pode-se obter explicitamente o termo fonte no domínio lagrangiano  $F_i$ . Para um domínio com pontos coincidentes, no domínio euleriano, a Equação 7 se torna a Equação 9.

$$\frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t} = F_i(\vec{X}, t) \quad (9)$$

onde  $U_i^*$  representam as soluções numéricas do campo de velocidades no domínio lagrangiano nos instantes. O termo  $U_i^{t+\Delta t}$  é a velocidade estimada ou conhecida na interface lagrangiana. Finalmente, atualize os valores do campo de velocidade através da Equação 10.

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t f_i \quad (10)$$

### 2.3 Método Pseudoespectral de Fourier

O método Pseudoespectral de Fourier consiste no uso numérico da transformada de Fourier,

a Transformada Discreta de Fourier (The DFT, 1995), que transforma as variáveis discretas do espaço físico para o espaço espectral, vista na Equação 11.

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (11)$$

onde  $\hat{f}_k$  é a função transformada no domínio espectral,  $f_n$  é a função no domínio físico,  $k$  é o vetor de números onda,  $i = \sqrt{-1}$  é o número imaginário, e  $N$  é o número de pontos de colocação da malha. O vetor  $k$  foi calculado na forma  $k_\mu = \mu - 1$  para  $1 < \mu < N/2 + 1$ , e  $k_\mu = \mu - 1 - N$  para  $N/2 + 2 < \mu < N$ . Similarmente, a Transformada Inversa Discreta de Fourier é vista na Equação 12.

$$f_n = \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (12)$$

Utilizando a transformada nas Equações 1 e 2, tem-se,

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + ik_j (\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{1}{\rho} ik_j \hat{p}^* + ik^2 v \hat{u}_i + \frac{f_i^*}{\rho} \quad (13)$$

$$ik_j \hat{u}_i = 0 \quad (14)$$

onde  $k^2$  é o quadrado do vetor número onda, isto é,  $k^2 = k_j k_j$ . No espaço espectral, o Termo Não Linear (TNL) é dado pelo produto de duas funções transformadas  $ik_j (\hat{u}_i \hat{u}_j)$ . Formalmente, resolver este termo é um problema, uma vez que requer a resolução de uma integral de convolução de alto custo computacional, observada na Equação 15.

$$(\hat{u}_i \hat{u}_j)(\vec{k}) = \int \hat{u}_i(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \quad (15)$$

onde  $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$ , fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda  $\vec{k}$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ . A principal ideia do MPEF consiste em não calcular diretamente o TNL no espaço espectral para evitar esse custo oneroso (Kinoshita, 2015). A fim de mitigar esse empecilho, as derivadas espaciais dos termos não lineares são então inicialmente computadas no espaço espectral e depois transformadas para o espaço físico, onde as multiplicações são corretamente calculadas.

Com efeito, a manutenção da alta acurácia do método espectral de Fourier é garantida pela possibilidade de se realizar produtos no espaço físico e de se fazer os cálculos das derivadas no espaço espectral (Mariano, 2011). Além disso, uma característica do termo não linear é que ele pode ser tratado das diversas formas (Canuto; Hussaini; Quarteroni; Zang, 2006):

- Forma não conservativa ou advectiva:  $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ;
- Forma conservativa ou divergente:  $\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}$ ;
- Forma "skew-symmetric" ou antissimétrica:  $\frac{1}{2} \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right)$ ;
- Forma Rotacional:  $\frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$ .

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita e  $\omega_{ijk} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  representa a componente do vetor vorticidade, dado por  $\omega = \nabla \times u$ .

Um importante ponto a ser mencionado é que a forma antissimétrica é em si uma maneira de combater-se os erros numéricos provenientes do termo não linear. Geralmente, os erros gerados em termos quadráticos com o uso dos métodos espectrais são chamados de *Aliasing Error* (AE), e assim, essa abordagem do termo não linear se mostra como um método de *de-aliasing* (DA). Em suma, o AE ocorre quando há uma incompatibilização na qual os altos números de onda se associam aos baixos números de onda. De forma simplificada, esse fenômeno aparece como um acúmulo de ruído nos altos números de onda (Boyd, 2000).

No presente trabalho, o TNL foi tratado em sua forma antissimétrica, calculada pelos seguintes passos:

1. Dado  $\hat{u}_1$ , calcula-se a derivada espectral  $ik\hat{u}_1$ ;
2. Faça a transformada inversa dos termos  $ik\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_1$ ;
3. No domínio físico, calcula-se o produto  $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ;
4. Aplique a transformada de Fourier obtendo  $\widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ , a forma advectiva do TNL.

Em seguida,

5. Dado  $u_j$ , calcula-se  $u_j u_j$  no espaço físico;
6. Faça a transformada do produto das velocidades  $\widehat{u_j u_j}$ , passando-as para o espaço espectral;
7. No espaço espectral compute as derivadas  $ik_j \widehat{u_j}$ , obtendo a forma divergente do TNL;
8. Finalmente, para a forma assimétrica, tome a média aritmética entre a forma advectiva e divergente, obtendo  $\frac{1}{2} \left( \widehat{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + ik_j \widehat{u_j} \right)$ .

Uma das vantagens do método Pseudoespectral de Fourier é que ele possibilita o desacoplamento do campo de pressão do campo de velocidade (Mariano, 2011). Tal procedimento pode ser explicado de maneira mais clara ao compreender que os termos da Equação 12 estão relacionados a um plano  $\pi$ .

Tanto o termo da taxa de variação de quantidade de movimento linear,  $\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial t}$ , quanto o termo difusivo,  $ik^2 \nu \widehat{u}_1$ , pertencem ao plano  $\pi$ . O gradiente de pressão  $\frac{1}{\rho} ik_j \widehat{p}^*$  é colinear ao vetor de números onda, e dessa forma, é ortogonal ao plano  $\pi$ . Quanto aos termos não linear e fonte, nada pode-se afirmar sobre sua posição. Porém, sabendo-se que a soma do termo transiente com o termo difusivo pertence ao plano  $\pi$ , então, tem-se que a soma vetorial do termo não linear com o gradiente de pressão e o termo fonte também deve pertencer ao plano  $\pi$ , pois a soma de todos os termos é nula. Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores é nula, então os dois vetores devem ser colineares (Mariano, 2011).

Seguindo, define-se o tensor de projeção, capaz de projetar qualquer vetor sobre o plano  $\pi$ .

$$\zeta_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (16)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, definido pela Equação 17.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (17)$$

Haja vista que o gradiente de pressão era antes ortogonal ao plano, com a projeção sobre o plano  $\pi$ , o termo se torna nulo, sendo assim desacoplado do problema. Segundo Mariano (2011), esse procedimento equivale a substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz, que, em termos numéricos, é mais barato.

Conquanto o campo de pressão não seja calculado diretamente no espaço espectral, este pode ser recuperado em pós-processamento. Este procedimento pode ser conferido em Mariano (2011).

## 2.4 Método de discretização temporal

Uma vez que o método Pseudoespectral de Fourier possui uma discretização espacial de alta ordem, é interessante que seja utilizado um método de discretização temporal que seja compatível com essa acurácia.

Desse modo, o presente trabalho optou pelo uso do conhecido método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Tal método avalia a função em quatro pontos dentro de cada intervalo, permitindo uma aproximação mais precisa e com maior estabilidade. Hairer et al. (1993) destacam que o método de Runge-Kutta tem flexibilidade, pois pode ser ajustado para diferentes ordens de precisão e facilmente aplicado a sistemas de equações diferenciais acopladas.

O passo de tempo foi determinado conforme as condições de Courant-Friedrichs-Lewis (CFL) (1967), sendo determinado pela Equação 18.

$$dt = CFL * \min \left\{ \min \left[ \frac{dx}{\max|u_i|}, \frac{dy}{\max|v_i|} \right], \frac{2}{v} \left( \frac{1}{dx^2}, \frac{1}{dy^2} \right) \right\} \quad (18)$$

## 2.5 Acoplamento dos métodos Pseudoespectral de Fourier e da Fronteira Imersa - IMERSPEC

Visto que a abordagem dos métodos Pseudoespectral de Fourier e da Fronteira Imersa foi descrita nas seções anteriores, faz-se então o acoplamento entre ambas para obter a metodologia IMERSPEC proposta por Mariano (2011). Para uma melhor compreensão do algoritmo da metodologia IMERSPEC no presente trabalho, em ambiente Matlab, este é descrito da seguinte forma:

1. Inicia-se o campo de velocidade no espaço físico,  $u_i$ ;
2. Aplica-se a rotina FFT sobre o campo de velocidade,  $u_i$ , obtendo-se o campo transformado,  $\hat{u}_i$ ;
3. A fim de garantir a equação da continuidade, aplica-se o tensor projeção sobre o campo de velocidade,  $\zeta_{ij}(\hat{u}_i)$ ;

4. Calculam-se os termos do lado direito (RHS). Para o presente trabalho, o TNL foi calculado em sua forma antissimétrica, descrita na seção 2.3. Projeta-se o TNL,  $\zeta_{ij}(\text{TNL})$ ;
5. Obtém-se  $\widehat{u}_i^*$  pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem;
6. Transforma-se  $\widehat{u}_i^*$  para o espaço físico no domínio euleriano com a rotina IFFT, obtendo  $u_i^*$ ;
7. Pelos nós coincidentes, passa-se  $u_i^*$  do domínio euleriano para o domínio lagrangiano, obtendo  $U_i^*$ ;
8. Calcula-se  $F_i$  pela Equação 8, definindo-se as velocidades na geometria lagrangiana;
9. Pelos nós coincidentes, passa-se  $F_i$  do domínio lagrangiano para o domínio euleriano, obtendo  $f_i^*$ ;
10. Transforma-se  $f_i^*$  para o espaço espectral com a rotina FFT e aplica-se o tensor de projeção, obtendo  $\zeta_{ij}(\widehat{f}_i^*)$ ;
11. Atualiza-se o campo de velocidades pela Equação 9 e repete-se o passo 1 até os critérios de parada;
12. Finalmente, transforma-se  $\widehat{u}^{t+\Delta t}$  com a rotina IFFT de volta para o espaço físico exibindo as oscilações de Gibbs. Então, aplica-se a técnica de filtragem espectral ou o método de Fourier-Gegenbauer como pós-processamento e analisa-se os resultados.

## 2.6 Técnica de Filtragem Espectral

Os filtros espectrais utilizam da informação existente nos coeficientes de Fourier para aumentar convergência destes e tentar recuperar a acurácia espectral perdida em virtude do fenômeno de Gibbs. Seja  $f_n$  a aproximação pela transformada inversa de Fourier da Equação 11, então a aproximação filtrada é dada pela Equação 19.

$$f_n^\sigma = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sigma_j(\eta) \widehat{f}_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (19)$$

onde  $\sigma_j(\eta)$  é o filtro utilizado, com  $\eta = \frac{L \times k}{N}$ , e  $L$  é o comprimento do domínio. Vandeven (1991) traz a definição geral de um filtro descrevendo que uma função real e suave  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser um filtro de ordem  $p$  se satisfaz,

1.  $\sigma(0) = 1$ ,  $\sigma^{(l)}(0) = 0$ ;  $1 \leq l \leq p$ ;

2.  $\sigma(\eta) = 0, 1 \leq |\eta|$ ;
3.  $\sigma \in \mathbb{C}^{p-1}$ .

onde  $p$  é a ordem, e  $l$  é uma variável qualquer que representa a posição no intervalo.

Ao passo que o fenômeno de Gibbs foi sendo estudado, foram desenvolvidos diversos exemplos de funções as quais se adequam às condições de filtros. Porém, antes de comentar sobre alguns destes filtros e os resultados obtidos, é de extrema importância salientar que o desempenho dos filtros está na maioria das vezes ligado a dois itens: o problema com o qual está sendo aplicado e como ele está sendo aplicado.

A cerca do primeiro item, por exemplo, caso a solução tenha pouca quantidade de informação espectral longe da descontinuidade, é possível que os resultados sejam melhores do que os esperado. Um simples filtro de primeira ordem pode obter excelentes resultados longe da descontinuidade se a solução exata for uma função por partes com valores constantes (Kopriva, 1987). No entanto, no que se refere ao segundo item, para problemas que necessitam de longos processos iterativos, pode-se abordar a aplicação dos filtros de diferentes maneiras: filtrar apenas a solução final, filtrar a cada passo de tempo, filtrar em passos alternados; ou seja, se faz necessária uma análise para balancear o potencial de filtragem do filtro com o quanto se é factível filtrar, para que não haja nem pouca recuperação e nem grande perda de informação.

Isso significa que, presumivelmente, os resultados os quais estejam sendo almejados só possam ser obtidos após as mais diversas combinações de testes entre filtros. O presente trabalho implementou cinco diferentes filtros. Prosseguindo, o filtro de Féjer (FJR) é um filtro de primeira ordem. Este é definido pela Equação 20,

$$\sigma_1(\eta) = 1 - |\eta| \quad (20)$$

O filtro de Lanczos (LCZ) é um filtro de segunda ordem, expressado pela Equação 21. É equivalente a uma aproximação de diferenciação no espaço físico por diferenças centradas de segunda ordem (Kopriva, 1987).

$$\sigma_2(\eta) = \frac{\sin \pi\eta}{\pi\eta} \quad (21)$$

O filtro “Raised Cosine” (RC) também é um filtro de segunda ordem, Equação 22, equivalente à média comum no espaço físico denotada pela Equação 30 (Kopriva, 1987),

$$\sigma_3(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi\eta) \quad (22)$$

$$\frac{u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1}}{4} \quad (23)$$

O filtro “Raised Cosine” pode ser “afiado” por meio de técnicas padrões (Hamming, 1983), resultando no chamado “Sharpened Raised Cosine” (SRC), vista na Equação 24.

$$\sigma_4(\eta) = \sigma_3^4(\eta)[35 - 84\sigma_3(\eta) + 70\sigma_3^2(\eta) - 20\sigma_3^3(\eta)] \quad (24)$$

O filtro Exponencial de ordem  $p$ , onde  $p$  é par, é dado pela Equação 25.

$$\sigma_5(\eta) = e^{-\alpha\eta p} \quad (25)$$

Jiahong (1998) esclarece que o filtro exponencial não se adequa formalmente na definição de filtro, pois  $\sigma_5(1) = e^{-\alpha} \neq 0$ . Dessa maneira, pode-se escolher  $e^{-\alpha}$  igual ao erro de máquina, a fim de que o valor seja aproximado numericamente para zero. É um filtro comumente utilizado devido a sua simplicidade e bons resultados (Jiahong, 1998).

A aplicação da técnica de filtragem consiste em reproduzir a expressão antes demonstrada na Equação 18. Logo, o procedimento implementado em ambiente Matlab para os problemas abordados no presente trabalho está descrito a seguir:

1. Passa-se  $f_n$  para o espaço espectral aplicando a rotina FFT, gerando  $\hat{f}_k$ ;
2. Multiplica-se  $\hat{f}_k$  pelo filtro desejado,  $\sigma_j(\eta)$ ;
3. Retorna-se para o espaço físico aplicando a rotina IFFT, obtendo a solução filtrada.

## 2.7 Método de Fourier-Gegenbauer

O método de Fourier-Gegenbauer utiliza informações dos coeficientes de Fourier de uma função para reconstruí-la em uma nova expansão rapidamente convergente com coeficientes de Gegenbauer no intervalo  $[-1, 1]$ . Ao contrário do que se é observado nos filtros espectrais, a expansão de Gegenbauer demonstra a capacidade de aproximar exponencialmente uma função até seus pontos de descontinuidade, uma região fortemente afetada por oscilações de Gibbs.

Os polinômios de Gegenbauer são polinômios ortogonais sobre o intervalo  $[-1, 1]$ . Esses polinômios podem ser expressos em termos dos polinômios de Jacobi  $P_1^{(\alpha, \beta)}(x)$  com  $\alpha = \beta = 0.5$ , conforme mostrado na forma dada na Equação 26.

$$C_1^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(1 + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(1 + \lambda + 1/2)} P_1^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x) \quad (26)$$

O método tem como objetivo reconstruir uma aproximação de uma função dada  $f(x)$  por meio de dois passos: calcular os coeficientes de Gegenbauer e expandi-los na nova série de Gegenbauer, como observado nas Equações 27, 28 e 29.

$$g_l^\lambda(x) = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})} f_n(x) C_l^\lambda(x) dx \quad 0 < l < m \quad (27)$$

$$h_l^\lambda = \pi^{1/2} C_l^\lambda(1) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)(1 + \lambda)} \quad (28)$$

$$g(x) \approx \sum_{l=0}^m \hat{g}_l^\lambda(x) C_l^\lambda(x) \quad (29)$$

onde  $\hat{g}_l^\lambda$  representa os coeficientes de Gegenbauer,  $h_l^\lambda$  denota a constante de normalização,  $\Gamma$  é a função Gamma,  $f_n(x)$  é a aproximação truncada da série de Fourier para a função  $f(x)$ ,  $g(x)$  é a função reconstruída, e  $\lambda$  e  $m$  são variáveis numéricas livremente escolhidas. No presente trabalho a integral da Equação 27 foi resolvida pela Régra do Trapézio.

Não obstante, enfatiza-se que o método deve ser olhado diante de duas diferentes óticas: se a função é analítica por partes ou não. Para o caso em que não é analítica por partes, o procedimento acima permanece intacto e sem alterações. Para o caso em que é analítica por partes, se faz necessária uma “assertividade do domínio”, ou seja, analisar os subintervalos  $[a, b] \subset [-1, 1]$  em que a função é analítica e contínua. Dessa forma, seja  $f(x)$  uma função analítica num intervalo  $[a, b]$ , tomando-se uma variável local  $\xi$  onde  $-1 \leq \xi \leq 1$ , tem-se,

$$\xi(x) = \frac{x - \delta}{\epsilon} \Leftrightarrow x(\xi) = \epsilon\xi + \delta, \quad (30)$$

onde  $\delta = \frac{b+a}{2}$  e  $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ . Logo, substituindo na Equação 27 e 29, obtém-se,

$$g_l^\lambda = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)} f_N(\epsilon\xi + \delta) C_k^\lambda(\xi) d\xi, \quad 0 \leq k \leq m \quad (31)$$

$$g(\epsilon\xi + \delta) \approx \sum_{k=0}^m \hat{g}_l^\lambda C_l^\lambda(\xi) \quad (32)$$

Esse processo é então repetido para cada subintervalo  $[a, b] \subset [-1, 1]$ , sendo posteriormente necessário juntar cada um dos resultados para observar um resultado “global” do problema proposto. O procedimento implementado em ambiente Matlab para o método de Gegenbauer abordado no presente trabalho está descrito a seguir:

1. Com a solução no espaço físico, escolhe-se valores para  $\lambda$  e  $m$  e calcula-se a constante de normalização,  $h_l^\lambda$ , conforme a Equação 28;
2. Computa-se os coeficientes de Gegenbauer,  $g_l^\lambda$ , pela Equação 27;
3. Faz-se a reconstrução de Gegenbauer através da Equação 29.

A partir do que se observa em literatura, podem ser feitas algumas observações acerca do método de Fourier-Gegenbauer. Pode-se inferir, a partir das expressões supracitadas, a obtenção dos fatores necessários para a aplicação do procedimento implica em um custo computacional alto. Custo que se torna ainda mais oneroso caso sejam utilizados altos valores para  $\lambda$  e  $m$ .

Gottlieb *et al.* (1992, 1995a, 1995b, 1996) propõem que um bom chute inicial para tais variáveis seria  $m = \lambda = \frac{1}{4}N$ , de modo que tal relação minimizaria o erro de truncamento. Todavia, na prática, a escolha dessas variáveis acaba sendo tomada a depender do problema, existindo a necessidade de testes para obtenção de resultados otimizados.

Jiahong (1998) relembra que o fenômeno de Gibbs pode ser totalmente eliminado através do método. Contudo, isso apenas pode ser observado de um ponto de vista teórico, uma vez que o método é limitado pelas capacidades computacionais, de modo que o número de cálculos computacionais pode ser grande para algumas funções. Também, a série de Gegenbauer é limitada a  $\lambda$ ,  $m \sim 100$ , em detrimento das funções Gama e Bessel e cálculo dos termos para altas ordens permite que o método sujeito a erros de máquina.

## 2.7 Análise Quantitativa

No presente trabalho, para avaliar quantitativamente os resultados obtidos, adotou-se como medida do erro a norma  $L_2$  definida através da Equação 33,

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N |U_e - U_n|^2} \quad (33)$$

onde  $U_e$  é a solução exata e  $U_n$  é a solução numérica obtida. Além disso, uma análise para a taxa de convergência foi feita conforme a Equação 34 (Villar, 2007).

$$q = \frac{\log\left(\frac{\|\varphi_{2h} - \varphi_e\|}{\|\varphi_h - \varphi_e\|}\right)}{\log(2)} \quad (34)$$

onde  $\varphi_h$  representa a solução numérica em um espaçamento de malha  $h$ ,  $\varphi_e$  é a solução exata e  $\|\cdot\|$  é a norma  $L_2$  calculada na Equação 33. De acordo com Kirby e Karniadakis (2003), serão considerados métodos de alta ordem aqueles que apresentam  $q > 2$ .

---

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, apresenta-se os resultados para os três distintos problemas que são simplificações das equações de Navier-Stokes. Inicialmente, trabalha-se com a equação de Burgers Invíscida, caso particular da equação de Burgers clássica. Em seguida, manipula-se a equação de Burgers em sua forma completa, mas em condições de contorno não periódicas utilizando da metodologia IMERSPEC. Por último, implementa-se o escoamento monofásico em um canal plano utilizando a metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A) proposto por Albuquerque (2024b). A cada problema, uma análise da medida do erro e da taxa de convergência é obtida, observando os ganhos em acurácia alcançado por meio do acoplamento da técnica de filtragem espectral e do método de Fourier-Gegenbauer.

### 3.1 Equação de Burgers Inviscida

A equação de Burgers, definida na Equação 35, é uma equação diferencial parcial de grande

utilidade vide sua capacidade de formular o comportamento de ondas de choque.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (35)$$

Comparando com as equações de Navier-Stokes formuladas na Equação 1, é evidente que Burgers dispensa os termos do gradiente de pressão e do termo de fonte. Para Canuto *et al.* (1988), é uma expressão amplamente utilizada devido ao seu equilíbrio entre os termos de advectivo e difusivo, mostrando-se como um nível fundamental na hierarquia das equações de Navier-Stokes. A princípio, foi estudada por Bateman (1915) mas foi nomeada em homenagem a Burgers pelo tratamento da equação como um modelo matemático de turbulência. Ao tratar a Equação 35 em uma situação de viscosidade zero, isto é,  $\nu = 0$ , obtém-se a Equação 36, a equação de Burgers Inviscida. Sua solução analítica é dada pela Equação 37.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (36)$$

$$u_i(x, t) = u_0(x - u_{i-1} t) \quad (37)$$

onde  $u_0$  é a condição inicial. No presente trabalho, a solução exata vista na Equação 36 foi obtida numericamente de maneira explícita. O problema em questão foi simulado para a condição inicial disposta na Equação 38.

$$u_i(x, 0) = -\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \quad (38)$$

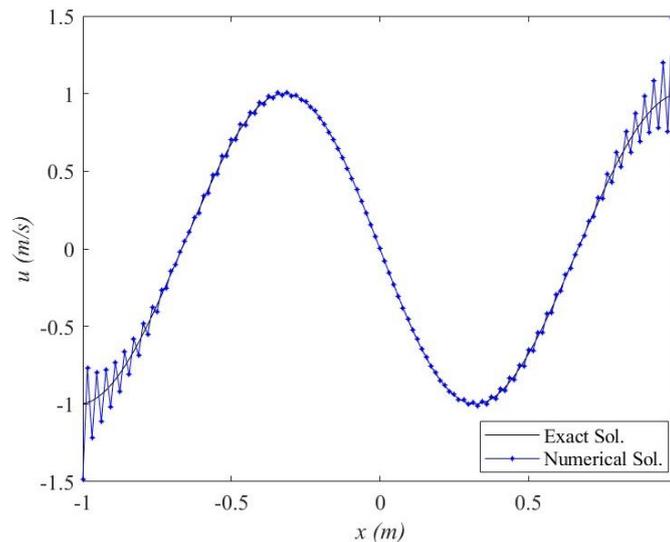
Frisa-se também que, no contexto deste trabalho, a equação de Burgers Inviscida foi resolvida usando apenas o método Pseudoespectral de Fourier, tratando o termo não linear em sua forma antissimétrica. Com efeito, a Tabela 1 resume os parâmetros adotados para as variáveis na simulação desse problema.

**Tabela 1** – Variáveis utilizadas para a simulação da equação de Burgers Inviscida

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Número de Pontos	N	32, 64, 128, 256	-
Courant-Friedrichs-Lewis	CFL	0,05	-
Discretização Temporal	$\Delta t$	Eq. 25	[s]
Comprimento do Domínio	L	4	[m]
Tempo Final	T	$0,04/\pi$	[s]
Variável MFG	$\lambda$	3; 3,5; 5,5; 5,5	-
Variável MFG	m	10, 11, 18 e 28	-

Fonte: Autor (2024)

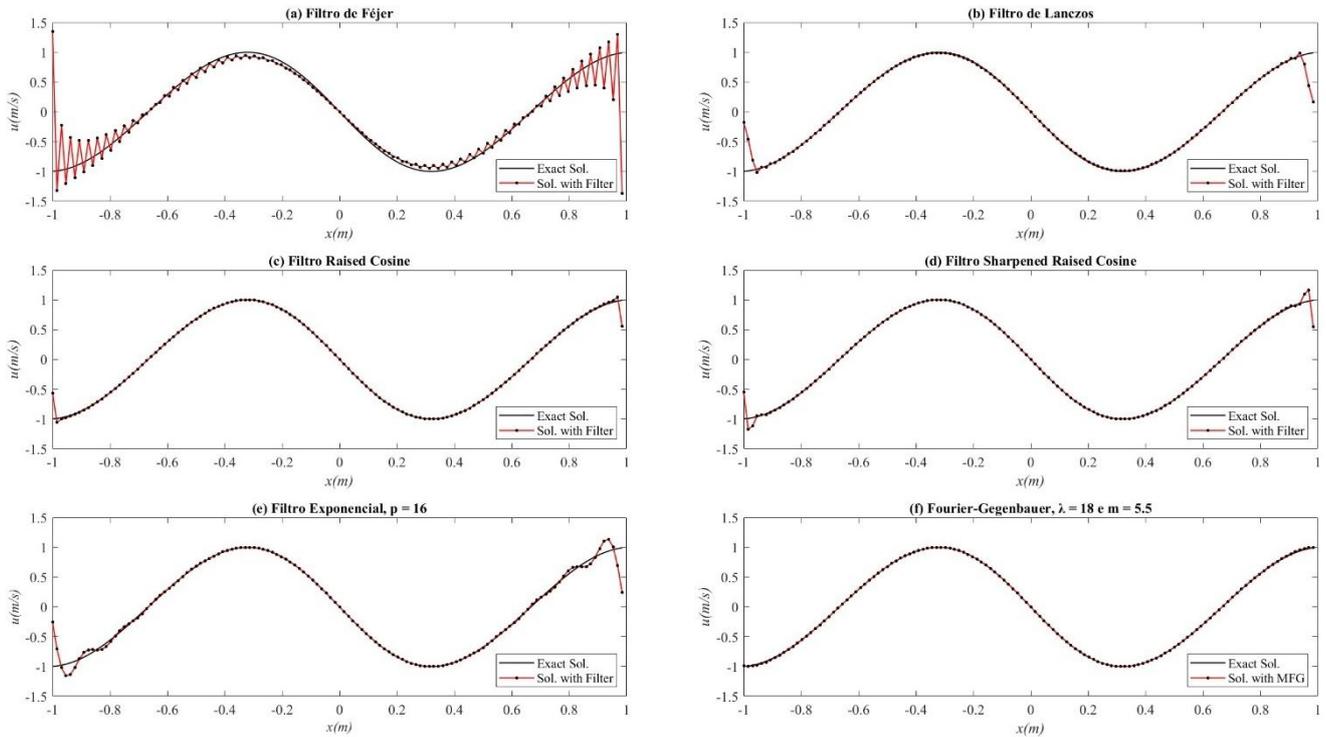
O tempo final foi escolhido de forma que fosse possível observar o início da formação dos choques ao longo da onda. A partir da condição inicial escolhida, a formação de choques é observada bem rapidamente, em  $T \cong 0.04/\pi$ . A solução numérica em comparação a solução exata fica ilustrada na Figura 3. Nesta, nota-se oscilações espúrias presentes na solução numérica, estas associadas a formação de choques e ao fenômeno de Gibbs. As oscilações surgem a partir das zonas de transição e se propagam de modo agravante ao longo do domínio até as extremidades.

**Figura 3** – Solução numérica da equação de Burgers Inviscida para  $N = 128$ 

Fonte: Autor (2024)

Aplicado a técnica de filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer, através do procedimento descrito nas seções 2.6 e 2.7, respectivamente, obteve-se os resultados apresentados na Figura 4.

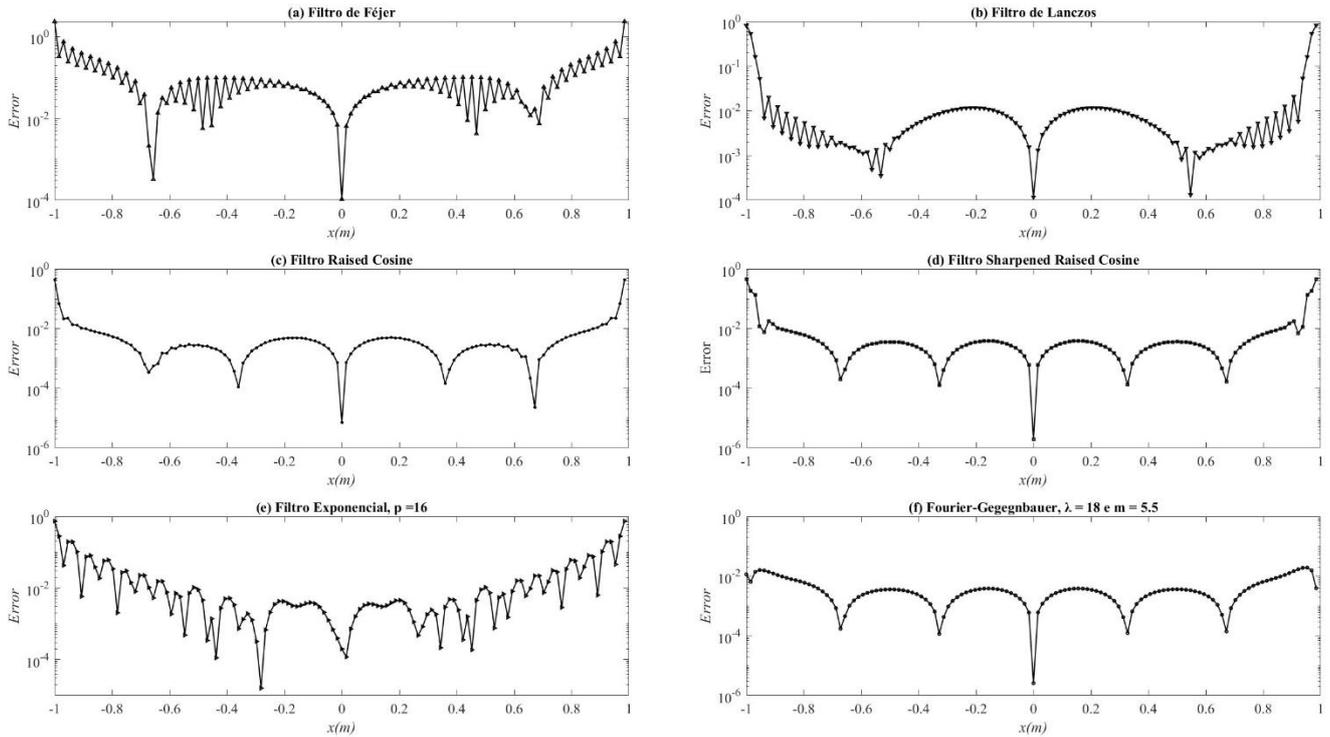
**Figura 4** – Soluções para equação de Burgers Inviscida com  $N = 128$



Fonte: Autor (2024)

Dentre os filtros, a Figura 4 nos permite observar que qualitativamente o filtro de Féjer entrega os piores resultados, agravando as oscilações na solução numérica. O filtro de Lanczos tem resultados consistentes para sua ordem. O filtro Exponencial apresenta boa qualidade, mas retorna a oscilar quando se aproxima das extremidades do domínio. O destaque fica com os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine”, reduzindo significativamente as oscilações pela maior parte do domínio. Em contrapartida, o método de Fourier-Gegenbauer demonstra o melhor resultado dentre todos. É excelente na resolução das oscilações numéricas atuando ao longo todo o domínio, até mesmo em suas extremidades.

Um fato que pode ser constatado na técnica de filtragem espectral está na incapacidade de os filtros não suavizarem as oscilações quando se aproxima das discontinuidades  $x = -1$  e  $x = 1$ , como discutido por Kopriva (1987). Reiterando, isso acontece pois o fenômeno de Gibbs advindo do método espectral de Fourier implica na limitação do decaimento dos coeficientes de Fourier ser de primeira ordem (Tadmor, 2007). Isso se torna mais evidente quando se investiga a Figura 5, que exhibe o erro ponto a ponto para as técnicas de pós-processamento utilizadas.

**Figura 5** – Erro ponto a ponto para equação de Burgers Inviscida com  $N = 128$ 

Fonte: Autor (2024)

Ponto a ponto, os erros alcançados atingem a ordem de  $10^{-2}$  e  $10^{-3}$  ao longo do domínio, com “Raised Cosine”, “Sharpended Raised Cosine” e Fourier-Gegenbauer atingindo erros de  $10^{-4}$  e até mesmo  $10^{-6}$ . Os filtros apresentam erros da ordem  $10^0$  nas extremidades, enquanto o método de Fourier-Gegenbauer tem erros da ordem de  $10^{-2}$  nessa mesma região.

A média do erro é vista na Tabela 2, que resume os resultados encontrados para norma  $L_2$ , calculada conforme a Equação 32. Já a Tabela 3 resume os resultados obtidos para a taxa de convergência conforme a Equação 33.

**Tabela 2** – Norma  $L_2$  encontradas para os diferentes casos simulados

N	Sem	FJR	LCZ	RC	SRC	Exp	FG
32	4.03E-02	4.91E-01	2.78E-01	1.20E-01	1.27E-01	2.19E-01	7.05E-02
64	5.98E-02	3.80E-01	1.81E-01	8.19E-02	8.90E-02	1.53E-01	1.85E-02
128	8.99E-02	3.34E-01	5.34E-02	5.49E-02	6.27E-02	1.08E-01	5.93E-03
256	1.29E-01	3.38E-01	8.66E-02	4.01E-02	4.98E-02	7.89E-02	1.77E-02

Fonte: Autor (2024)

**Tabela 3** – Taxas de convergência encontradas para os diferentes casos simulados

Comaparação	q[Sem]	q [FJR]	q [LCZ]	q [RC]	q [SRC]	q [Exp]	q [FG]
32-64	0.58	0.37	0.63	0.56	0.52	0.52	1.93
64-128	0.59	0.19	1.76	0.58	0.51	0.51	1.64
128-256	0.52	0.02	0.7	0.46	0.34	0.45	1.57

Fonte: Autor (2024)

A princípio, identifica-se que conforme  $N$  aumenta, a solução numérica sem qualquer tratamento tende a piorar. Isso se dá em virtude de que os choques aumentam conforme  $N$  cresce. Do ponto de vista médio, o filtro de Féjer tem um erro máximo da ordem de  $10^{-1}$  e o filtro Exponencial consegue alcançar a ordem  $10^{-2}$  apenas para  $N = 256$ , oferecendo os resultados menos consistentes. Os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” alcançam  $10^{-2}$  para valores menores de  $N$  em comparação com os outros filtros. Com o método de Fourier-Gegenbauer obteve-se os melhores resultados, obtendo erros de  $10^{-2}$  desde  $N = 32$  e até mesmo  $10^{-3}$  para  $N = 128$ .

Ainda, é importante salientar que o resultado para  $N = 256$  aparenta ser inconsistente com o que se é esperado uma vez que o erro volta a crescer mesmo que a malha esteja sendo refinada. Isso é explicado pois o MFG é fortemente dependente das variáveis  $\lambda$  e  $m$ , havendo a necessidade de escolher múltiplos valores conforme aumenta-se  $N$ .

Por meio da Tabela 3, que mede a velocidade ao passo que o erro decresce com o aumento de  $N$ , os filtros apresentaram uma taxa geral por volta de 0,5. Nesse contexto, identifica-se que o MFG é o mais rápido em convergência com uma boa margem.

### 3.2 Equação de Burgers não periódica com a Metodologia IMERSPEC

Para esse problema, trabalhou-se com a equação de Burgers, já definida na Equação 45 com a presença do termo de viscosidade, isto é,  $\nu \neq 0$ . A condição inicial e solução analíticas, propostas por Canuto *et al.* (2006), são vistas na Equação 39 a 41.

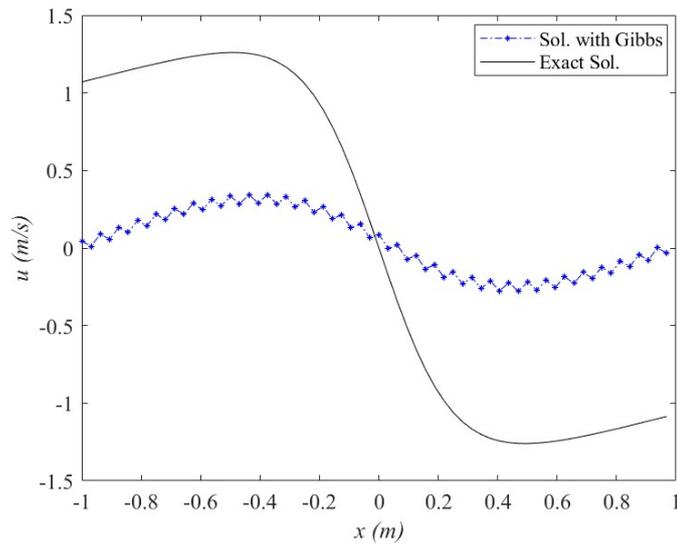
$$u_i(x, 0) = c + u_b(x, 0) \quad (39)$$

$$u_b(x, 0) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x-ct, t+1)}{\phi(x-ct, t+1)} \quad (40)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(2n+1)\pi]^2}{4vt}} \quad (41)$$

onde  $c$  é a velocidade de advecção, em [m/s], e  $n$  é o contador do somatório. A aplicação do MPEF na equação de Burgers em um domínio não periódico naturalmente força periodicidade na solução numérica, o que fica exemplificado na Figura 6.

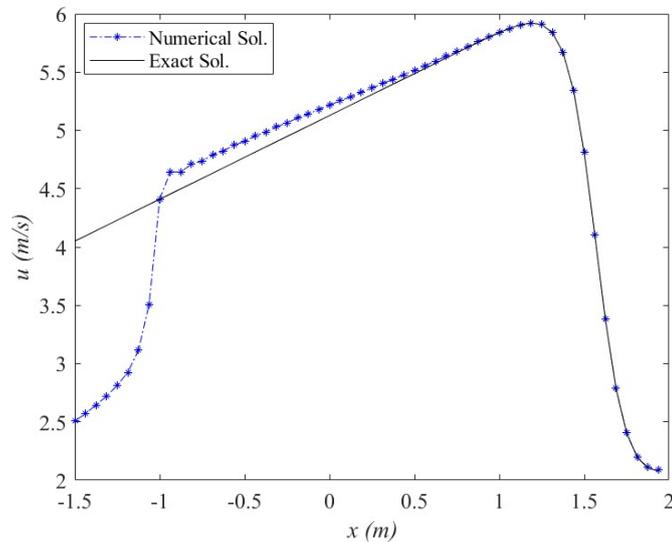
**Figura 6** – Oscilações de Gibbs exibidas na equação de Burgers em um domínio não periódico para  $N = 64$



Fonte: Autor (2024)

Assim, recorrendo ao IMERSPEC, consegue-se definir limites através de pontos de força que impõem a condição não periódica ao domínio, possibilitando garantir uma solução que tende a convergir para a solução analítica, observado na Figura 7. O domínio de interesse está compreendido entre  $[-1, 1]$  e o domínio complementar é estabelecido entre  $[-1,5, 1[$  e entre  $]1, 2]$ .

**Figura 7** – Convergência para solução analítica recuperada pelo IMERSPEC para  $N = 64$



Fonte: Autor (2024)

No entanto, apesar dessa convergência para o analítico após a imposição da força em  $x = -1$  e  $x = 1$ , é evidente que a metodologia ainda se encontra afetada pelo fenômeno de Gibbs. A Tabela 4 descreve as variáveis utilizadas para esta simulação.

**Tabela 4** – Variáveis utilizadas para a simulação da equação de Burgers em domínio não periódico

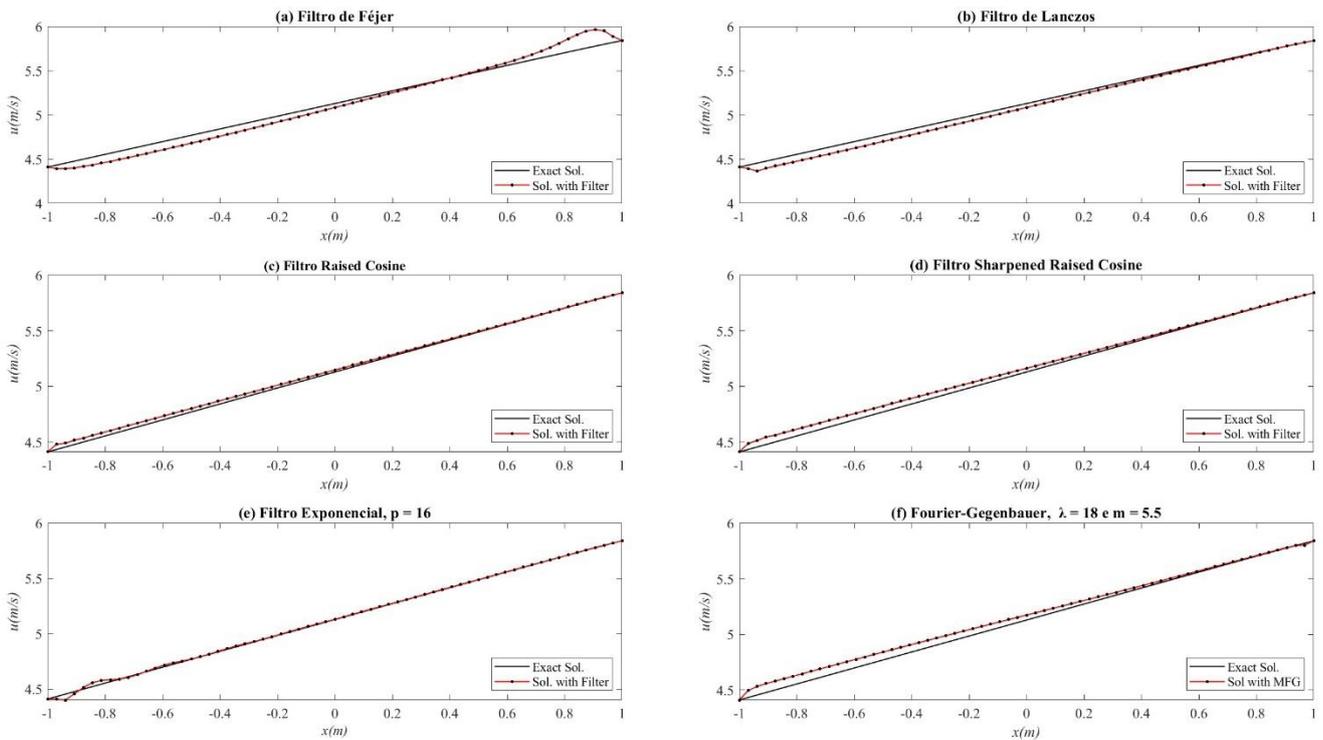
Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Número de Pontos	$N$	32, 64, 128, 256	-
Discretização Temporal	$\Delta t$	$1/N^2$	-
Comprimento do Domínio	$L$	4	[m]
Tempo Final	$T$	$\pi/8$	[s]
Velocidade de Advecção	$c$	4	[m/s]
Viscosidade Cinemática	$\nu$	0,2	[m <sup>2</sup> /s]
Intervalo do Somatório	$n$	-50 a 50	-
Variável MFG	$\lambda$	8, 5; 5,5; 6	-
Variável MFG	$m$	8, 10, 18 e 28	-

Fonte: Autor (2024)

A Figura 8 ilustra os resultados encontrados para o problema com a aplicação da técnica da filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer. Especificamente, para esse problema, a técnica de filtragem espectral foi aplicada diretamente no termo não linear, haja vista que testes mostraram que filtrar a cada passo de tempo com a presença do termo difusivo ocasiona numa forte perda de informação da solução numérica.

Similarmente para a equação de Burgers Inviscida, a Figura 8 nos permite observar que qualitativamente o filtro de Féjer entrega os piores resultados, ao contrário dos filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine”, que melhor atuam no problema. No que concerne o método de Fourier-Gegenbauer, este apresentou resultados consistentes, mas que não foram melhores que os dois filtros anteriores. A Figura 9 exibe o erro ponto a ponto para cada caso.

**Figura 8** – Solução com IMERSPEC para equação de Burgers em um domínio não periódico para  $N = 128$



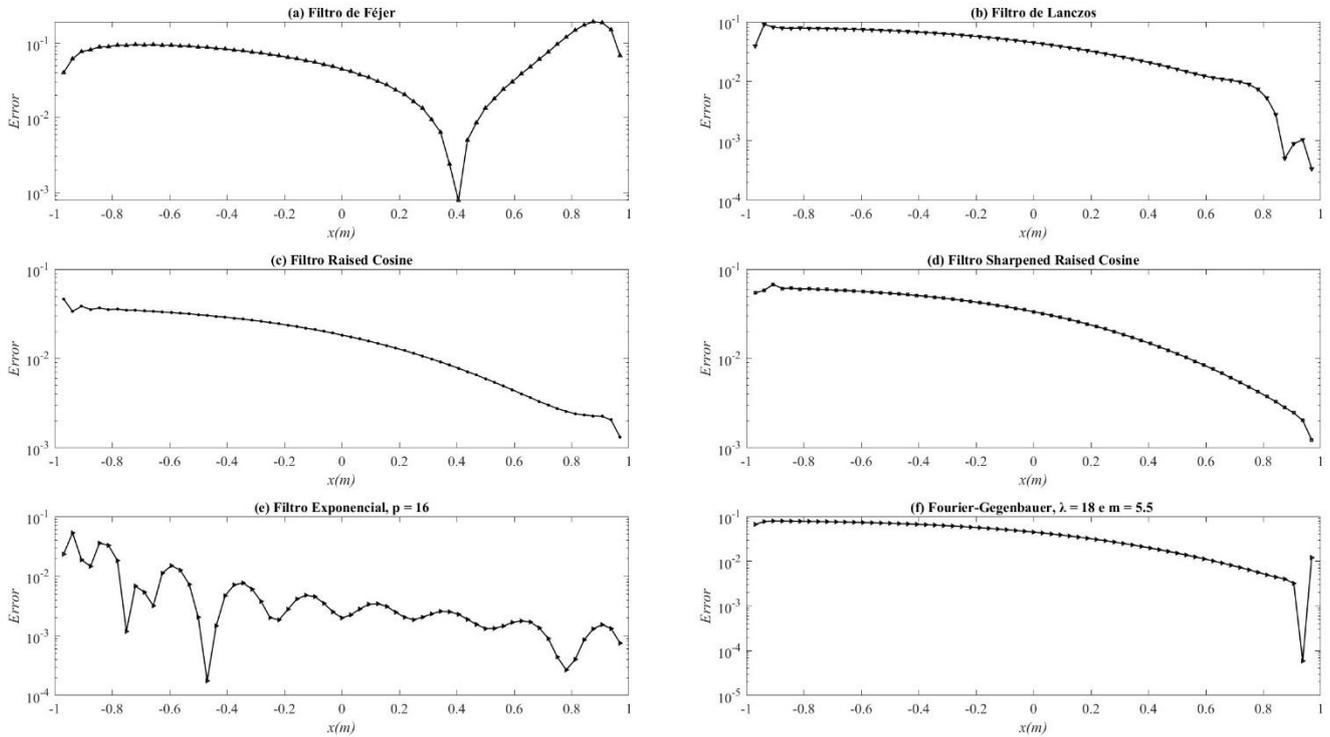
Fonte: Autor (2024)

Através da Figura 9, infere-se que o “Raised Cosine” teve um melhor resultado global e uniforme em comparação aos outros casos. A Tabela 5 resume os resultados encontrados para norma  $L_2$  em todos os casos simulados, enquanto a Tabela 6 exibe a taxa de convergência associada a cada filtro por simulação.

**Tabela 5** – Norma  $L_2$  encontradas para os diferentes casos simulados

N	Sem	FJR	LCZ	RC	SRC	Exp	FG
32	1.78E-01	4.78E-01	4.77E-01	1.41E-02	2.83E-02	3.34E-01	1.66E-01
64	9.95E-02	2.10E-01	1.18E-01	2.21E-02	4.51E-02	6.96E-02	9.81E-02
128	5.05E-02	7.80E-02	4.97E-02	2.20E-02	3.81E-02	1.09E-02	4.99E-02
256	2.51E-02	4.03E-02	1.45E-02	1.61E-02	2.30E-02	1.58E-02	2.50E-02

Fonte: Autor (2024)

**Figura 9** – Erro ponto a ponto para equação de Burgers com IMERSPEC para  $N = 128$ 

Fonte: Autor (2024)

**Tabela 6** – Taxas de convergência encontradas para os diferentes casos simulados

N	q	q [FJR]	q [LCZ]	q [RC]	q [SRC]	q [Exp]	q [FG]
32	0.83	1.2	2	0.64	0.67	2.26	0.76
64	0.98	1.42	1.25	0.006	0.24	2,7	0.98
128	1	0.95	1.78	0.45	0.72	0,53	1
256	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autor (2024)

Em média, os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” entregam os resultados mais consistentes, alcançando ordem de  $10^{-2}$  para valores menores de  $N$  em comparação com os outros filtros. Os filtros de Lanczos e Exponencial ganham um pouco de destaque para  $N = 256$ , pois traduzem os melhores erros obtidos. O método de Fourier-Gegenbauer apresentou pouca capacidade de melhoria na capacidade para esse caso.

Ainda, ao se observar as convergências, os filtros Exponencial e Lanczos apresentaram a mais rápida taxa de convergência de um modo geral para esse problema.

### 3.3 Escoamento monofásico com a metodologia IMERSPEC e o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A)

O último problema estudado é escoamento monofásico em um canal plano utilizando a metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A). O modelo de turbulência utilizado, publicado em Spalart e Allmaras (1994), é amplamente empregado na modelagem de turbulência em virtude de ter significativa acurácia ao passo que possui um custo computacional consideravelmente baixo (CELIC; HIRSCH, 2006).

Toda metodologia completa empregada para esta simulação, bem como a descrição e definição das demais variáveis não definidas podem ser encontradas em Albuquerque (2024b). Nesse contexto, essa simulação se tornou possível pela utilização dos códigos elaborados por Albuquerque (2024b). Os parâmetros utilizados para a simulação desse problema são observados na Tabela 7.

**Tabela 7** – Variáveis utilizadas para a simulação do Escoamento Turbulento de Albuquerque (2024b)

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Número de Pontos	N	$64 \times 128$	-
Discretização Temporal	$\Delta t$	$10^{-3}$	[s]
Comprimento na Direção x	$L_x$	10	[m]
Comprimento na Direção y	$L_y$	1	[m]
Tempo Final	T	25	[s]
Reynolds (Tensão de Cisalhamento)	$Re_\tau$	1000	-
Reynolds	Re	40000	-
Velocidade de Entrada	$U_\infty$	1	[m/s]
Velocidade na Direção y	v	0	[m/s]
Viscosidade Cinemática	$\nu$	$2,5 \times 10^{-5}$	[m <sup>2</sup> /s]
Massa Específica do Ar	$\rho$	1	[kg/m <sup>3</sup> ]
Variável MFG	$\lambda$	17	-
Variável MFG	m	21	-

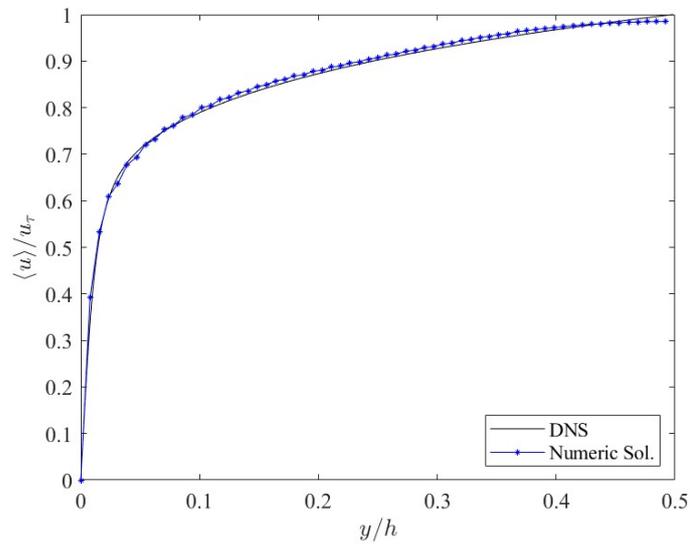
Fonte: Autor (2024)

Diversos estudos com resultado de Simulação Numérica Direta (DNS) oferecem uma ampla base de dados para a validação de modelos de turbulência, como RANS e LES. O presente estudo utiliza como referência os dados do DNS de Lee e Moser (2015).

A solução numérica obtida para a malha  $N = 64 \times 128$  do perfil de velocidade média,

normalizado pela velocidade no eixo central, em função da distância normalizada pela largura do canal, para um escoamento totalmente desenvolvido com  $Re_\tau = 1000$ , comparado aos dados do DNS pode ser observada na Figura 10.

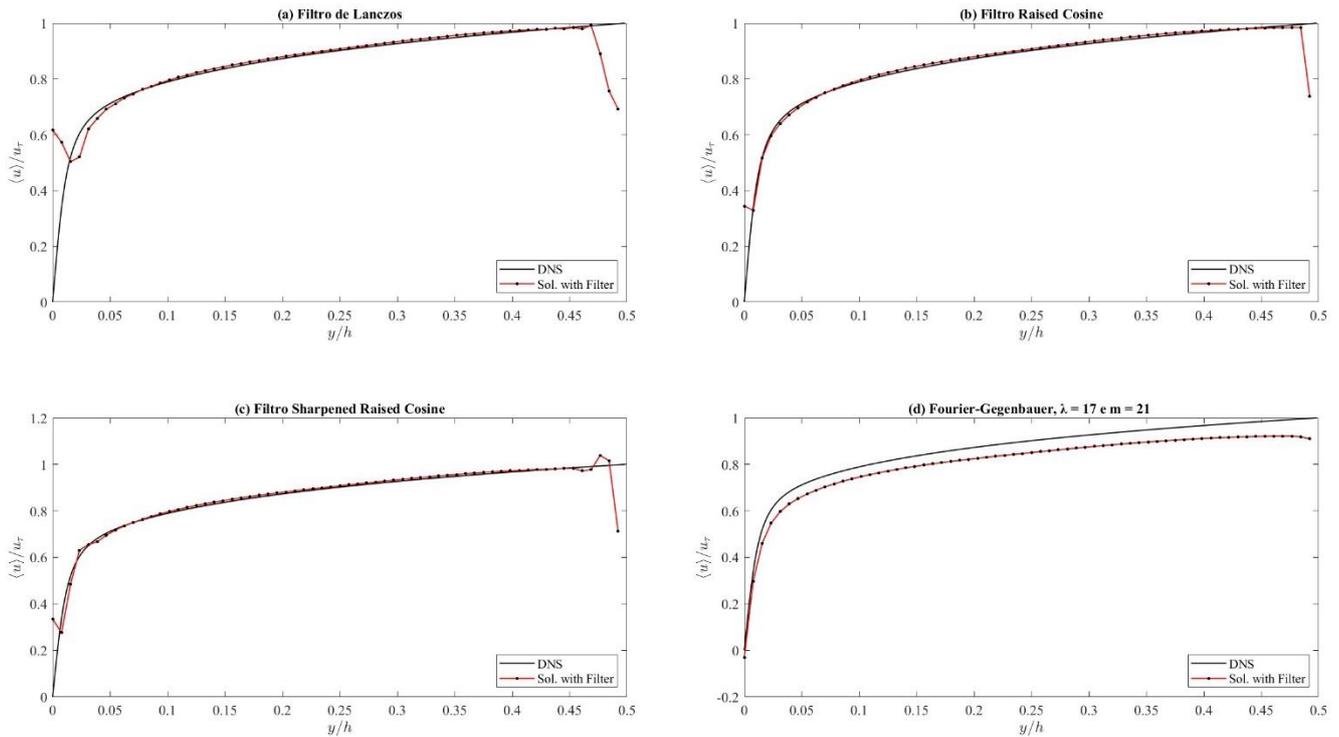
**Figura 10** – Perfil de velocidade média para  $N = 64 \times 128$ , com  $Re_\tau = 1000$



Fonte: Autor (2024)

Pela Figura 10, observa-se a presença de oscilações no início da transição do perfil. Dessa forma, as soluções filtradas e com o MFG são vistas na Figura 11.

**Figura 11** – Solução para o perfil de velocidade média com  $N = 64 \times 128$  e  $Re_\tau = 1000$

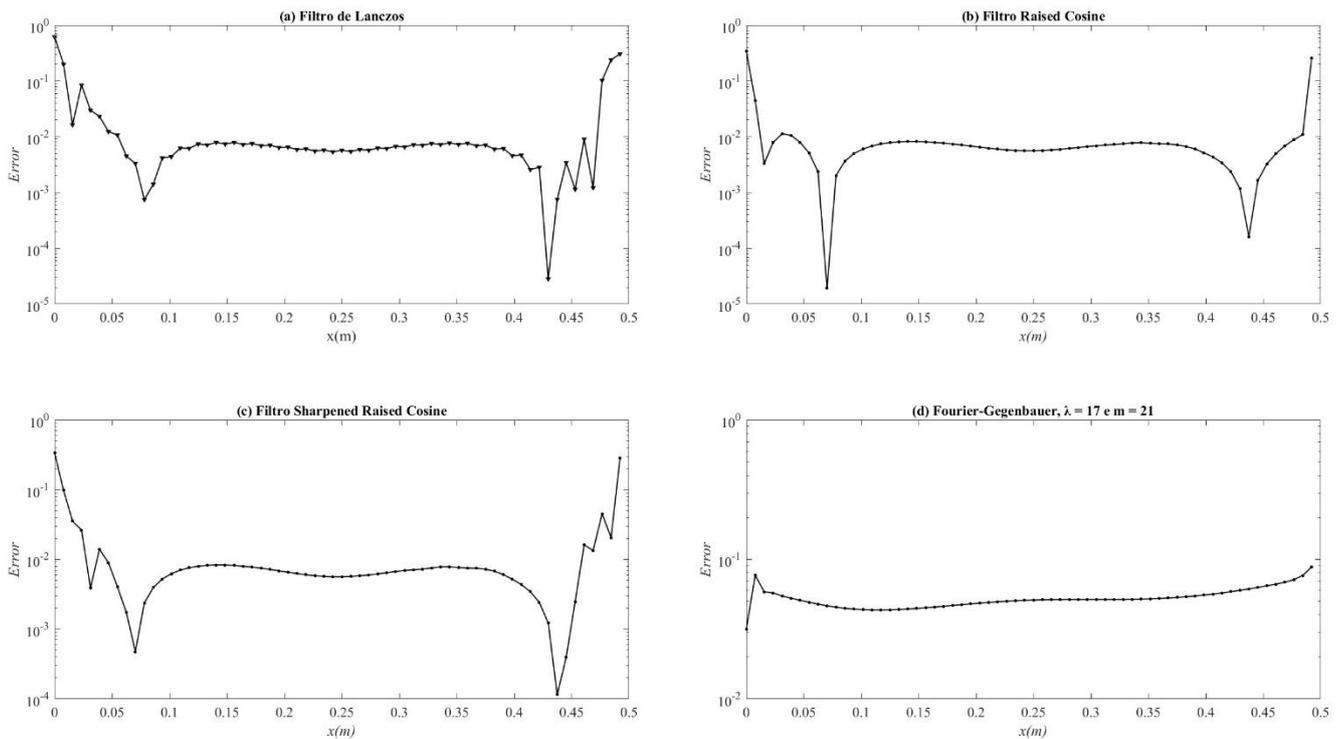


**Fonte:** Autor (2024)

Nesse contexto, nota-se que as oscilações são combatidas com maior eficiência com o uso do filtro “Raised Cosine”. No que se refere ao método de Fourier-Gegenbauer observa-se completa resolução das oscilações e mantimento da forma da solução numérica. No entanto, enquanto os filtros encontram dificuldades de suavizar a solução nas extremidades da solução o método de Fourier-Gegenbauer não consegue alcançar totalmente a solução esperada.

Ao longo das simulações, buscou-se identificar qual melhor situação para a técnica de filtragem entregaria os melhores resultados. Diferentemente do segundo problema, a equação de Burgers em condições de contorno não periódicas, a filtragem a cada passo de tempo no termo não linear pouco afetou na mitigação das oscilações identificadas. Isso pode ser explicado devido à forte influência que os termos viscosos têm sobre esse escoamento turbulento, porém isso não permite aplicar a técnica de filtragem nestes termos. Com a experiência da aplicação dessa técnica em outras situações, filtrar o termo viscoso das Equações de Navier-Stokes apresentam um grande obstáculo visto que é uma parcela extremamente sensível do problema, e assim as soluções acabam por divergir numericamente.

**Figura 12** – Erro ponto a ponto para o perfil de velocidade média com  $N = 64 \times 128$  e  $Re_\tau = 1000$



Fonte: Autor (2024)

Haja vista que o DNS disponível em literatura é dado em  $N = 172$  pontos, comparação quantitativa dos resultados em norma  $L_2$  não é possível de ser propriamente feita. Desse modo, com auxílio do Excel, pode-se interpolar os pontos de tal modo que fosse possível obter uma estimativa do erro encontrado. A Figura 12 exibe o erro ponto a ponto e a Tabela 8 exibe tais resultados estimados.

**Tabela 8** – Norma  $L_2$  encontradas para os diferentes casos simulados

Malha	Sem	LCZ	RC	SRC	FG
64 x 128	7.25E-03	9.62E-02	5.46E-02	5.72E-02	5.36E-02

Fonte: Autor (2024)

Apesar do erro médio na norma estimado para o método de Fourier-Gegenbauer ser menor que para os outros filtros, nesse caso, isso não o garante uma posição privilegiada em qualidade, uma vez que a norma para os filtros é fortemente afetada pelos resultados nas extremidades. Dessa maneira, nota-se que pela Figura 12 que os filtros, em geral, atingem erros da ordem de  $10^{-3}$  ao longo do domínio, alcançando até  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  para os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine”. O método de Fourier-Gegenbauer, porém, apresenta um erro uniforme de  $10^{-2}$ .

---

## CONCLUSÃO

O estudo desenvolvido no presente trabalho trouxe resultados significativos sobre o acoplamento da metodologia IMERSPEC ao método de Fourier-Gegenbauer e à técnica de filtragem espectral, a fim de lidar com as oscilações espúrias em problemas com descontinuidades, em condições de contorno não periódicas ou com formação de choques.

Com a equação de Burgers Inviscida, verificou-se que os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” foram os mais eficientes em reduzir as oscilações, oferecendo uma solução mais estável em comparação aos outros filtros, como o de Féjer, que apresentou os piores resultados. O MFG, por sua vez, destacou-se ao apresentar a melhor resolução para as oscilações, conseguindo suavizar as transições ao longo de todo o domínio. A norma  $L_2$  calculada para os diferentes valores de  $N$  evidenciou a superioridade do MFG em termos de acurácia e convergência, embora seus resultados para 256 pontos de colocação tenham mostrado certa inconsistência.

No que concerne a equação de Burgers clássica em um domínio não periódico, o uso do método IMERSPEC permitiu a imposição de condições de fronteira não periódicas, possibilitando que a solução numérica convergisse para solução analítica, mesmo com a presença do fenômeno de Gibbs, especialmente na extremidade esquerda da imposição da força. Nesse contexto, com a filtragem espectral localizada no termo não linear, obteve-se os resultados mais consistentes com o filtro “Raised Cosine” em contraste do método de Fourier-Gegenbauer, que pouco influenciou na acurácia da solução.

Por fim, o estudo do escoamento turbulento com o modelo de Spalart-Allmaras e a metodologia IMERSPEC proporcionou uma nova visão acerca da aplicabilidade dos filtros espectrais e do MFG em problemas mais complexos. Novamente, os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” apresentaram um bom desempenho em acurácia ponto a ponto, enquanto o MFG mostrou ser uma ferramenta promissora capaz de resolver as oscilações até as extremidades do domínio, mas não alcançar completamente a convergência para solução.

Dessa forma, afirma-se que a técnica de filtragem espectral é uma boa ferramenta em geral na suavização das oscilações numéricas, sendo práticas e pouco onerosas em custo computacional, mas que são pouco efetivas em problemas caracterizados por descontinuidades e de difícil compatibilização em problemas com termos dissipativos como a viscosidade turbulenta do modelo de Spalart-Allmaras. Em contrapartida, o método de Fourier-Gegenbauer

se apresenta de modo extremamente promissor visto que consegue eliminar oscilações numéricas até mesmos nos pontos de descontinuidade. Contudo, possui um custo computacional mais oneroso, uma forte dependência das variáveis  $\lambda$  e  $m$  e é limitado ao domínio  $[-1,1]$ . Não obstante, julga-se que o potencial deste método ainda pode alcançar resultados ainda mais acurados. Isso se deve pois, no presente trabalho, a integral para o cálculo dos coeficientes de Gegenbauer é obtida por meio da Regra do Trapézio, e assim acredita-se que conforme uma integral de maior ordem seja implementada, menores serão os erros encontrados.

Conclui-se, que o acoplamento da metodologia IMESRPEC junto do método de Fourier-Gegenbauer e da técnica de filtragem espectral é uma combinação ótima na melhoria da qualidade das soluções numéricas em problemas não lineares e turbulentos com a presença de oscilações, oferecendo uma boa base para futuras investigações e aplicações em outros modelos de equações diferenciais com descontinuidades.

---

## REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, L.; VILLELA, M.; MARIANO, F. Numerical Simulation of Flows Using the Fourier Pseudospectral Method and the Immersed Boundary Method. **Axioms** 13, no. 4: 228. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/axioms13040228>. Acesso em: 05 mai. 2024a.
- ALBUQUERQUE, L.; VILLELA, M.; MARIANO, F. **Aplicação dos métodos pseudoespectral de Fourier e da fronteira imersa na análise de escoamentos utilizando o modelo de turbulência Spalart-Allmaras**. Qualificação (Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGECAM)) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2024b.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E. **The DFT - An owner's Manual for the Discrete Fourier Transform**. Filadélfia, Pensilvânia, Estados Unidos: (1st.) SIAM, p. 16-59, 1995. ISBN 0-89871-342-0. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611971514>. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611971514>. Acesso em: 05 mai. 2021.
- BOYD, J. P. **Chebyshev and Fourier spectral methods**. New York: DOVER, 2000.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. **Spectral Methods in Fluid Dynamics**. 1st. ed. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, New York, USA, 1988. DOI: 10.1007/978-3-642-84108-8. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-84108-8>. Acesso em: 15 mai. 2021.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. **Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains**. New York: Springer Verlag, 2006. DOI: 10.1007/978-3-540-30728-0. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-30728-0>. Acesso em: 15 mai. 2021.

CELIC, A.; HIRSCH, E. H. Comparison of eddy-viscosity turbulence models in flows with adverse pressure gradient. **AIAA Journal**, v. 44, p. 2156–2169, 2006. DOI: 10.2514/1.14902.

COOLEY, T.; TUKEY, J. **An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Mathematics Computation**. Providence. v.19, 1965. ISSN 1088-6842. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/>. Acesso em: 15 mai. 2021.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWIS, H. On the partial difference equations of mathematical physics. **IBM Journal of Research and Development**, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.

GOTTLIEB, D.; SHU. C. W. On the Gibbs Phenomenon III: Recovering exponential accuracy in a subinterval from a spectral partial sum of a piecewise analytic function, **SIAM J. Numer. Anal.**, v. 33, p. 280-290, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1137/0733015>. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/0733015>. Acesso em: 20 jan. 2022.

GOTTLIEB, D.; SHU. C. W. On the Gibbs Phenomenon IV: Recovering exponential accuracy in a sub-interval from a Gegenbauer partial sum of a piecewise analytic function. **Mathematics of Computation**, v. 64, p. 1081-1095, 1995a. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1995-1284667-0>. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/mcom/1995-64-211/S0025-5718-1995-1284667-0/>. Acesso em: 20 jan. 2022.

GOTTLIEB, D.; SHU. C. W. On the Gibbs Phenomenon V: Recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function. **Numerische Mathematic**. v. 71, p. 511-526, 1995b. DOI: <https://doi.org/10.1007/s002110050155>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s002110050155>. Acesso em: 20 jan. 2022.

GOTTLIEB, D.; SHU. C. W.; SOLOMONOFF, A.; VANDEVEN, H. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a nonperiodic analytic function. **J. Comput. Appl. Math.** v. 43, p. 81-98, 1992. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/On-the-Gibbs-phenomenon-I%3A-recovering-exponential-a-Gottlieb-Shu/0297f89d6cd9f3691010904b7bb4c856807ae44a>. Acesso em: 14 set. 2021.

HAIRER, E.; NORSETT, S. P.; WANNER, G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. **Springer Series in Computational Mathematics**. 2ª ed. Springer, 1993. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-78862-1>. Acesso em 12 de jul. 2024.

INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 19., 2007, Brasília. **Proceedings** [...]. Brasília: International Congress of Mechanical Engineering (COBEM). ENRIQUEZ-REMIGIO, S. A.; NETO, A. S. A new modeling of fluid-structure interaction problems through immersed boundary method/virtual physical model (IBM/VPM).

JIAHONG, Y. **Reconstrução de funções a partir de coeficientes de Fourier e de Momentos Ortogonais: Novos Métodos**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, 1998. Acesso em: 10 set. 2021.

KIRBY, R. M.; KARNIADAKIS, G. E. De-aliasing on non-uniform grids: algorithms and applications. **Journal of Computational Physics**, v. 91, p. 249-264, 2003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999103003140?via%3Dihub>. Acesso em: 12 jan. 2023

KINOSHITA, D. **Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Acesso em: 18 mai. 2022

KOPRIVA, D. A. A Practical Assessment of Spectral Accuracy for Hyperbolic Problems with Discontinuities. **J. Sci. Comput**, v. 2, p. 249-262, set. 1987. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01061112>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01061112>. Acesso em: 08 jul. 2021.

LEE, M.; MOSER, R. D. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $re_\tau = 5200$ . **Journal of Fluid Mechanics**, v. 774, p. 395–415, 2015.

MARIANO, F. P. **Solução numérica das Equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias Fronteira Imersa e Pseudo-Espectral de Fourier**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; NASCIMENTO, A. A.; SILVEIRA-NETO, A. An improved immersed boundary method by coupling of the multi-direct forcing and Fourier pseudo-spectral methods. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 44, n. 388, ago. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03679-5>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40430-022-03679-5>. Acesso em: 02 jun. 2023.

NASCIMENTO, A.A., MARIANO, F.P., PADILLA, E.L.M.; SILVEIRA-NETO, A. Comparison of the convergence rates between Fourier pseudo-spectral and finite volume method using Taylor-Green vortex problem. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 42, n. 491, ago. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02570-5>. Acesso em: 14 fev. 2024.

OYAR, N. **Inviscid Burgers Equations and Its Numerical Solutions**. Thesis (Master of Science in Mathematics) - The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University.

PESKIN, C. S. The immersed boundary method. **Acta Numerica**, v. 11, p. 479-517, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0962492902000077>. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/acta-numerica/article/immersed-boundary-method/95ECDAC5D1824285563270D6DD70DA9A>. Acesso em: 20 dez. 2023.

TADMOR, E. Filters, mollifiers and the computation of the Gibbs phenomenon. **Acta Numerica**, v. 16, p. 305-378, mai. 2007. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0962492906320016>. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/acta-numerica/article/abs/filters-mollifiers-and-the-computation-of-the-gibbs-phenomenon/C2CFC76358E105304E9E2D51E70389DA#>. Acesso em: 09 set. 2021.

TORO, E. F. **Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction**. 3<sup>a</sup> ed. Springer, 2009.

UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. **J. of Comput. Phys.** v. 209, p. 448-476, nov. 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.017>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999105001385>. Acesso em: 20 dez. 2023.

VILLAR, M. **Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

VILLELA, M. F. S.; VILLAR, M. M.; SERFATY, R.; MARIANO, F. P.; SILVEIRA-NETO, A. Mathematical modeling and numerical simulation of two-phase flows using Fourier pseudospectral and front-tracking methods: The proposition of a new method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 52, p. 241-254, dec. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.041>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X1730433X>. Acesso em: 20 dez. 2023.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2<sup>a</sup> ed. Pearson, 2007. ISBN 13: 9780131274983. Disponível em: <https://www.pearson.com/en-gb/subject-catalog/p/introduction-to-computational-fluid-dynamics-an-the-finite-volume-method/P200000005670/9780131274983>. Acesso em 13 de jul. 2024.

WOLFRAM, S. **A New Kind of Science**. Wolfram Media, 2002. ISBN: 1-57955-008-8.

BRENO GUSTAVO SILVA VILELA

**SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO A  
METODOLOGIA IMERSPEC ACOPLADA AO MÉTODO DE FOURIER-  
GEGENBAUER E A TÉCNICA DE FILTRAGEM ESPECTRAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Engenharia Civil do  
Campus Agreste da Universidade Federal de  
Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo  
científico, como requisito parcial para obtenção  
do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em: 23/10/2024

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Mariana Fernandes dos Santos Villela (Orientadora)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Alessandro R. Echevarria Antunes (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Goiás