UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALEX VICTOR BISPO DA SILVA

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO COM APLICAÇÕES À MATEMÁTICA DAS ABELHAS

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro

RECIFE
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Alex Victor Bispo da.
Métodos de otimização com aplicações à matemática das abelhas / Alex Victor Bispo da Silva. - Recife, 2023.
81 p. : il.

Orientador(a): Eduardo Shirlippe Goes Leandro
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - Licenciatura, 2023.
Inclui referências, apêndices.

1. Otimização. 2. Métodos de resolução de problemas. 3. Matemática das abelhas. 4. Caminho ótimo. 5. Formato ótimo. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

ALEX VICTOR BISPO DA SILVA

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO COM APLICAÇÕES À MATEMÁTICA DAS ABELHAS

Trabalho de conclusão de curso da graduação apresentado ao Departamento de Matemática – CCEN da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: _____de _____de _____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Orientador)

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Examinador)

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa (Examinador)

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALEX VICTOR BISPO DA SILVA

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO COM APLICAÇÕES À MATEMÁTICA DAS ABELHAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção de grau de graduado.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro

RECIFE
2023

Dedico este trabalho aos meus pais, Adriano e Verônica Bispo, por me ensinarem as minhas primeiras letras, os meus primeiros números e as minhas primeiras orações. Eles me instruíram no caminho em que eu devia andar e do qual o Espírito Santo não deixará que eu me desvie.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus, Todo-Poderoso, Criador do Céu e da Terra e de todas as coisas que neles habitam. Sim, todas as coisas vieram a existir por causa da vontade dEle e foram criadas de forma mui bela, bondosa, diversa, reveladora, ordenada e matemática. Por isso, somente Ele é digno de receber toda glória, honra e poder. Agradeço ao Pai celeste, que sustenta as aves do céu e veste os lírios do campo, por me nutrir e guardar. Agradeço ao Cordeiro pascoal por Seu sacrifício que me trouxe a paz. Agradeço ao Consolador por me preservar na Verdade e me capacitar para servir a Deus e a Sua Noiva. Que o meu coração não ande ansioso, pois Deus sabe todas as coisas, que eu celebre o Rochedo da minha salvação eternamente e que eu seja um servo bom e fiel ao Senhor. Amém! Amém! Amém!

Agradeço aos meus pais, Adriano e Verônica, por me incentivarem a estudar, por me amarem e por estarem presentes na minha caminhada. Agradeço também aos meus irmãos, Adriana, Vinícius e Adrianne, por seu amor, cuidado, fraternidade, alegria e paciência. Amo muito todos vocês.

Agradeço a todos os meus irmãos em Cristo Jesus da minha amada Igreja Presbiteriana do Barro por todas as orações, ensinos, conselhos, correções e comunhão que recebo desde a minha infância. Para mencionar alguns poucos nomes: tia Flávia, tia Nice, tia Abigail, tia Adeilda, tio Paulo (*in memoriam*), tio Esdras, Pr. Roberto, Cirlane, Diogo, Felipe, Juann, Lucas, Queren e Zab. Com vocês aprendi o quão importante é viver no corpo de Cristo.

Agradeço também a todos os meus irmãos em Cristo Jesus das outras igrejas também muito amadas por mim, em especial, aos meus amigos André, Edson, Matheus, Olívia, Dâmaris, Sara, Renato e Jennifer, por todas as conversas, conselhos, jogos, viagens, "pedais", rolês e confraternizações, principalmente, durante os anos de pandemia, quando vocês foram, muitas vezes, usados por Deus para alegrar a minha alma. Com vocês aprendi a ansiar ainda mais pela volta do Messias e finalmente conviver com todos os Seus filhos na Nova Jerusalém eternamente.

Agradeço aos meus colegas, especialmente, a Amanda, Joás e Mariana, por todo o companheirismo e orientações. Estou certo que vocês serão excelentes professores.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFPE por se engajar para que eu pudesse acelerar a conclusão do curso, principalmente, ao secretário Lucas Raposo e aos professores Airton Temistocles, Gleidson Gomes e Paulo Câmara.

Agradeço ao professor Eduardo Shirlippe pelas orientações no Programa de Iniciação Científica e Mestrado da OBMEP desde o início do curso, em 2020, e também por, apesar do curto prazo, ter aceitado orientar-me na elaboração deste TCC e corrigi-lo.

Agradeço e menciono os nomes de três professores que me inspiraram a trabalhar com o ensino e a pesquisa da matemática. Primeiramente, à professora Aldicleri, pelo amor, alegria e paciência no exercício da docência. Segundo, ao professor André Costa, por ter me estimulado a resolver problemas interessantes e desafiadores. Finalmente, ao professor Danilo Nóbrega,

cuja conversa comigo em 2017 foi crucial para a minha tomada de decisão de seguir carreira nesta área.

Agradeço ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada por manter a realização da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e promover a disseminação da matemática. A OBMEP teve um papel fundamental na minha vida e nos meus estudos. A partir dela, obtive apoio financeiro e acadêmico desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Ela me mostrou que a educação não é somente uma obrigação ou uma necessidade, mas também um gozo. Quão avançado o Brasil seria se os sistemas de ensino conseguissem despertar esse gosto por aprender na sociedade, valorizassem os profissionais da educação básica e superior e contribuíssem para a integração das escolas públicas com as universidades e institutos de pesquisa como a OBMEP vem fazendo durante as duas últimas décadas.

Por fim, agradeço pelo apoio financeiro do CNPq e do Instituto TIM - OBMEP durante todo o curso.

Os céus proclamam a glória de Deus, e o firmamento anuncia as obras das suas mãos.
Um dia discursa a outro dia, e uma noite revela conhecimento a outra noite.
Salmo 19:1-2

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta quatro métodos matemáticos para resolver problemas de otimização: máximos e mínimos de funções quadráticas, desigualdade triangular, desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, e máximos e mínimos de funções por derivadas. Os problemas abordados são do nível de Ensino Médio e tratam sobre a Matemática Financeira, o caminho mais curto, as dimensões ótimas da embalagem de produtos, dentre outros. Além disso, apresentam-se conceitos geométricos sobre duas situações matemáticas envolvendo abelhas: o caminho ótimo para a polinização, pela espécie *Bombus terrestris*, de um número finito de flores e o formato ótimo dos alvéolos de uma colmeia. Utiliza-se o método da Desigualdade Triangular para investigar algumas características de um caminho ótimo de polinização. Aplica-se os métodos da Desigualdade MA-MG e da derivada para analisar as dimensões ótimas de um alvéolo e comparar o seu formato com outras alternativas.

Palavras-chaves: otimização, máximos e mínimos, desigualdades, abelhas, polinização, caminho ótimo, alvéolo.

Abstract

This work presents four mathematical methods to solve optimization problems: maxima and minima of quadratic functions, triangular inequality, inequality of arithmetic and geometric means, and maxima and minima by derivatives. The problems addressed are at High School level and deal with Financial Mathematics, shortest path problems, optimal dimensions of product packaging problems, among others. Furthermore, geometric concepts are presented regarding two mathematical situations involving bees: the optimal path for pollination of a finite number of flowers by the species *Bombus terrestris* and the optimal shape of the cells of a beehive. The Triangular Inequality method is used to investigate some characteristics of an optimal path of pollination. The AM-GM Inequality and derivative methods are applied to analyze the optimal dimensions of a honeycomb cell and compare its shape with other alternatives.

Keywords: optimization, maxima and minima, inequalities, bees, pollination, shortest path, honeycomb cell.

Lista de Ilustrações

1 Na imagem, V_1 e V_2 são, respectivamente, o ponto mínimo e máximo de duas funções quadráticas distintas. 19
2 O ponto B está entre os pontos A e C. 20
3 Demonstração da desigualdade triangular. 21
4 A altura h é a média geométrica das medidas a e b das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. 24
5 Prova geométrica da Desigualdade MA-MG através do triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência. 28
6 Prova geométrica da Desigualdade MA-MG através de retângulos de lados a e b internos a um quadrado de lado $a+b$. 28
7 f tem valor mínimo quando $x = 1$. 34
8 A soma das distâncias de um ponto interno a um quadrilátero convexo é mínima quando esse ponto é a interseção das diagonais. 40
9 Aplica-se a Desigualdade Triangular aos pontos A, B' e P'. 41
10 Os comprimentos dos caminhos poligonais $CBB'C'$ são iguais ao respectivos perímetros dos triângulos APP'. 42
11 O menor caminho para o lenhador é ir, em linha reta, de A até O e depois retornar a A. 43
12 Na planificação do cubo, o caminho ótimo da formiga é um segmento de reta. . 44
13 O retângulo inferior é a planificação da superfície externa do copo e o retângulo superior, da superfície interna. 44
14 A ponte PQ é construída através da ligação dos pontos de interseção dos segmentos AB' e $A'B$ com as margens do rio. 45
15 À esquerda, os lados dos polígonos não são coincidentes com os lados dos outros, diferentemente do que ocorre no ladrilhamento à direita. 58
16 Pentágonos regulares não conseguem ladrilhar o plano. Os ângulos marcados têm medida igual a $36°$. 59
17 Octógonos deixam espaços na forma de quadrados na tentativa de ladrilhar o plano. 59
18 É possível dividir um n-gono regular em n triângulos isósceles congruentes. . . 60
19 Prismas hexagonais regulares reto e oblíquo de mesma base e área. Note que a altura do segundo prisma é menor e, por isso, o seu volume é menor do que o do primeiro. 63
20 A trajetória das abelhas se cruza no ponto P. 65
21 A flor F_{j+1} está entre as flores F_k e F_{k+1}. 65
22 A flor F_j está entre as flores F_k e F_{j+1}, e esta, entre F_j e F_{k+1}. 66
23 A flor F_k está entre as flores F_j e F_{j+1}, e esta, entre F_k e F_{k+1}. 67

24 O caminho aberto $F_{k_q}F_{k_q+1}...F_{k_p-1}F_{k_p}$ divide o fecho convexo em duas partes. . 68
25 Caminhos ótimos de polinização de 6 flores onde 5 delas formam um pentágono regular e a sexta é o seu centro. 69
26 θ é o ângulo entre o eixo central do alvéolo e as faces rômbicas. 71
27 Um dodecaedro rômbico de coordenadas $(\pm1,\pm1,\pm1)$, $(\pm2,0,0)$, $(0,\pm2,0)$ e $(0,0,\pm2)$. 73

Sumário

1 Introdução **11**

2 Objetivos **13**

2.1 Objetivo geral 13

2.2 Objetivos específicos 13

3 Metodologia **14**

4 Fundamentação teórica **15**

4.1 Polinização pela espécie *Bombus terrestris* 15

4.2 Formato ótimo dos alvéolos 15

4.3 Trilha Soluções Ótimas do Ensino Médio de Pernambuco 16

4.4 Máximos e mínimos de funções quadráticas 17

4.5 Desigualdade Triangular 20

4.6 Definição de média aritmética e geométrica 23

4.7 Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica 25

4.8 Máximos e mínimos de funções pelo método das derivadas 31

5 Problemas de otimização **36**

5.1 Método do mínimo ou máximo de funções quadráticas 36

5.2 Desigualdade Triangular 39

5.3 Desigualdade MA-MG 46

5.4 Método das Derivadas 50

6 A Matemática das Abelhas **56**

6.1 A matemática da polinização das abelhas *Bombus terrestris* 56

6.2 A matemática dos alvéolos 57

7 Otimização na matemática das abelhas **64**

7.1 Otimização do caminho de polinização 64

7.2 Otimização dos alvéolos de uma colmeia 70

8 Considerações Finais **75**

Referências **77**

Anexo — Tabela de Derivadas Fundamentais **79**

1 Introdução

No primeiro ano da pandemia de COVID-19, o professor Eduardo Shirlippe, do Departamento de Matemática da UFPE, propôs, para os seus orientandos do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), a realização de resenhas sobre artigos matemáticos que ele disponibilizou e a apresentação delas a ele de forma remota enquanto durasse a quarentena ou, pelo menos, até quando as aulas da universidade retornassem. Um dos artigos que abordei e que foi inspiração para a escolha do tema deste trabalho titula-se A Matemática das Abelhas, de SARAIVA (1999), encontrado na Revista Eureka! de número 6, e trata sobre as características ótimas dos alvéolos das colmeias. Esse problema de otimização é analisado de forma mais profunda neste trabalho, que também investiga uma outra situação matemática envolvendo abelhas: o caminho ótimo para a polinização de finitas flores por uma certa espécie de abelhas.

Para compor este trabalho, buscou-se métodos de otimização acessíveis — uns mais do que outros — aos alunos do Ensino Médio. O primeiro deles, máximos e mínimos de funções quadráticas, presente no Currículo do Ensino Médio de Pernambuco, é, provavelmente, o mais utilizado no ensino básico. Os demais métodos não aparecem de forma direta no currículo, mas podem ser abordados, acumulativamente com o primeiro, especialmente na trilha Soluções Ótimas. De fato, essa trilha também foi motivadora para o tema tratado aqui, sobretudo as disciplinas optativas: O que é otimizar e Protótipos de Embalagens.

A escolha de trazer os outros três métodos tem por causa, em parte, experiências pessoais como discente da última etapa do ensino básico. O primeiro contato com o método das derivadas que tive ocorreram ainda no Ensino Médio, primeiramente na disciplina O Cálculo Diferencial e suas aplicações, com o professor Giovanni, no programa Mentores da OBMEP e, no ano seguinte, em Matemática VII, com o professor André Costa, no Instituto Federal de Pernambuco (IFPE). Foi inclusive o professor André que me apresentou o método das desigualdades das médias através do seu excelente trabalho de conclusão do curso do Mestrado Profissional em Matemática (Profmat). Dessas, escolhi tratar apenas da Desigualdade MA-MG. Por fim, através das aulas e materiais da OBMEP e para além do critério de existência de um triângulo, aprendi a aplicar a Desigualdade Triangular para resolver problemas de otimização.

O corpo principal deste trabalho pode ser dividido em quatro partes. A Seção 4 apresenta um pouco da literatura da matemática das abelhas e da otimização no Ensino Médio de Pernambuco, além de conceitos matemáticos preliminares. A Seção 5 apresenta e aplica os métodos de otimização à resolução de problemas. A maioria dos problemas resolvidos com o primeiro método são — em coerência com uma das suas aplicações — da Matemática Financeira. O segundo e o terceiro método focam em problemas de otimização de caminhos e de embalagens respectivamente. Alguns desses últimos dois tipos de problemas foram resolvidos novamente, mas dessa vez pelo método das derivadas.

As terceira e quarta partes investigam mais profundamente as características matemáticas estudadas das abelhas. A Seção 6 traz mais alguns conceitos preliminares, sobretudo geométri-

cos, como definições, proposições e problemas sobre polígonos, caminhos poligonais, regiões convexas e prismas, que são importantes para a investigação dos problemas da Seção 7, que tratam sobre o caminho ótimo de polinização utilizando a Desigualdade Triangular e do formato ótimo do alvéolo através do método da Desigualdade MA-MG e das derivadas.

Finalmente, indica-se que o leitor tente demonstrar individualmente as proposições e teoremas e resolver os problemas apresentados antes de ver as respectivas demonstrações e soluções.

2 Objetivos

2.1 Objetivo geral

- Apresentar quatro métodos matemáticos para resolver problemas de otimização e aplicá-los para a investigação de duas situações envolvendo abelhas: o caminho ótimo para a polinização, pela espécie *Bombus terrestris*, de um número finito de flores e o formato ótimo dos alvéolos de uma colmeia.

2.2 Objetivos específicos

- Apresentar, através de definições, proposições e problemas, conceitos preliminares de quatro métodos matemáticos para resolver problemas de otimização, a saber: máximos e mínimos de funções quadráticas, desigualdade triangular, desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, e máximos e mínimos de funções pelo método das derivadas.

- Investigar, através de definições, proposições e problemas, conceitos matemáticos preliminares por trás das duas situações supracitadas.

- Apresentar os quatro métodos matemáticos estudados para resolver problemas de otimização.

- Enunciar e resolver problemas de otimização envolvendo os quatro métodos matemáticos apresentados.

- Aplicar a desigualdade triangular para investigar, através de problemas, as características de um caminho ótimo de polinização de n flores distribuídas de formas específicas.

- Aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, além do método das derivadas para calcular máximos e mínimos de funções, para analisar e comparar o formato dos alvéolos encontrado na natureza com outras alternativas.

3 Metodologia

Este trabalho valeu-se de pesquisa bibliográfica de documentos curriculares da educação básica nacional e pernambucana, de livros do Ensino Médio e Superior, de dissertações e de artigos matemáticos para fundamentar os métodos apresentados e as situações investigadas. Os principais trabalhos estudados foram o capítulo 6 – Funções Quadráticas do livro A Matemática do Ensino Médio, volume 1, de LIMA et al. (1997), o capítulo 6 – A Desigualdade Triangular do livro de problemas olímpicos Círculos Matemáticos: a experiência russa, de FOMIN et al. (2012), de alguns capítulos do livro Geometria Euclidiana Plana, de SANTOS e VIGLIONI (2011), a dissertação do mestrado profissional em matemática de COSTA (2013) e o capítulo 4 – *Application of Differentiation* do livro *Calculus: Early Transcendentals*, de STEWART (2015).

Os quatro métodos foram apresentados através de definições, proposições e problemas retirados ou adaptados das obras supracitadas. Depois, aplicou-se-os na resolução de alguns problemas envolvendo a Matemática Financeira, o caminho mais curto, as dimensões ótimas da embalagem de produtos, dentre outros.

Após isso, apresentou-se alguns conceitos matemáticos, sobretudo geométricos, sobre os caminhos de polinização e o formato ótimo dos alvéolos de uma colmeia. Por fim, através de problemas, investigou-se algumas características que os caminhos ótimos de polinização de um número finito de flores, distribuídas de uma certa forma, possuem, e comparou-se algumas alternativas de formatos para os alvéolos a fim de encontrar melhores soluções de estocagem minimizando o gasto de cera para construí-los.

4 Fundamentação teórica

4.1 Polinização pela espécie *Bombus terrestris*

Em 2010, pesquisadores da *Queen Mary University*, Londres, fizeram uma descoberta ao estudar abelhas da espécie *Bombus terrestris*. LIHOREAU et al. investigaram se a espécie, ao polinizar uma certa quantidade de flores artificiais, simplesmente visitaria as flores na ordem em que foram descobertas ou se desenvolveria algum tipo de estratégia mais complexa a fim de otimizar o percurso. O que se constatou foi que, depois de um certo intervalo, as abelhas de fato alteravam a ordem das visitas, minimizando o comprimento do percurso.

Esse experimento remete ao famoso Problema do Caixeiro Viajante, onde diz que, em uma de suas diversas variantes, um certo caixeiro viajante tem de visitar um número dado de cidades, começando e terminando numa mesma cidade, passando por todas as outras uma única vez e percorrendo a menor distância possível. Usando a Teoria de Grafos, o problema pode ser interpretado como encontrar, em um n-grafo completo não orientado cujas arestas têm pesos, um caminho hamiltoniano com a menor soma de pesos. Para um número não necessariamente muito grande de cidades, calcular a rota mais curta já se torna um problema bastante complicado mesmo para supercomputadores do século XXI.

Obviamente, as abelhas não descobriram uma estratégia para encontrar o caminho mais curto mais rápido que qualquer computador, porém ainda é notável e surpreendente ver a capacidade desses animais tão pequenos.

4.2 Formato ótimo dos alvéolos

No artigo A Matemática das Abelhas, SARAIVA (1999) mostra como as abelhas economizam na quantidade de cera na produção dos seus alvéolos para estocar uma maior quantidade de mel. Ele observou que apenas três polígonos regulares são capazes de ladrilhar o plano: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, e que, dentre eles, para um dado perímetro fixado, o hexágono regular é aquele que maximiza a área. Logo, nesse sentido, as abelhas fizeram uma boa escolha.

HALES (2001) provou que o hexágono não é apenas o polígono regular ótimo para ladrilhar o plano, mas também é, dentre todas as curvas isoperimétricas simples fechadas, a que tem a maior área. Esse problema era conhecido como a conjectura da colmeia e remonta desde a Antiguidade, comentada por personagens históricos como o romano polímata Marcus Terentius Varro (116 a. C. – 27 a. C.), em sua Geometria, e o matemático Pappus de Alexandria (290 – 350), no Livro 5 da sua Coleção, que trata sobre figuras isoperimétricas (KATZ, 1993).

Provas incompletas para a conjectura da colmeia foram dadas por muito tempo. TÓTH (1943) provou o caso especial para curvas convexas. A hipótese da convexidade força as curvas a serem poligonais.

Sobre a cobertura rômbica dos alvéolos, TAHAN (1972) observa quão maravilhado o físico francês René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683 – 1757) ficou ao notar a constância do ângulo agudo dos losangos de fechamento. Réaumur mandou buscar amostras de várias partes da Europa e da América e confirmou que todas tinham o mesmo padrão. O astrônomo francês Jean-Dominique Maraidi (1709 – 1788) mediu o ângulo com precisão, descobrindo o valor de 70°32'. Inquieto pela questão, Réaumur consultou o seu amigo matemático franco-alemão Samuel König (1712 – 1757) propondo-lhe a seguinte pergunta:

> É dado um prisma hexagonal regular. Esse prisma é fechado em uma de suas extremidades por três losangos iguais. Pergunta-se: Qual deve ser o ângulo desse losango de modo que se obtenha, para o prisma, um volume máximo com a maior economia de material? (TAHAN, 1972, p. 109)

Por causa de um defeito na sua tábua de logaritmos, König calculou erroneamente o valor de 70°34' para o ângulo ótimo, uma aproximação que já era muito boa e que podia deixar qualquer um admirado pela aparente inteligência das abelhas. Porém o seu erro foi descoberto pelo seu contemporâneo Collin Mac-Laurin (1698 – 1746), um matemático inglês, que calculou, através do Cálculo Diferencial, o ângulo correto precisamente usado pelas abelhas.

4.3 Trilha Soluções Ótimas do Ensino Médio de Pernambuco

A trilha Soluções Ótimas do Ensino Médio de Pernambuco busca tornar os alunos capazes de "tomar decisões de forma autônoma e criativa, contribuindo com a melhoria da qualidade de vida no que se refere ao desenvolvimento de 'soluções ótimas' nos campos da administração, finanças, mobilidade, entre outros contextos, a partir das relações existentes entre a matemática e as outras áreas do conhecimento", relacionando-se e preparando os discentes para cursos superiores nas áreas de "Matemática, Física, Engenharias, Estatística, Expressão Gráfica e Arquitetura, Administração, Economia, etc" (PERNAMBUCO, 2021, p. 7).

Dentre todas as unidades curriculares da trilha, duas optativas são as mais importantes para este trabalho: O que é otimizar e Protótipos de Embalagens. As habilidades trabalhadas na primeira são de investigação e análise de situações-problemas reais e de identificação e seleção de conhecimentos matemáticos relevantes para encontrar soluções ótimas para esses problemas que sejam éticas, estéticas, criativas e inovadoras. Essas habilidades também são tratadas na segunda optativa, porém com o enfoque na eficiência da produção de embalagens.

> Investigação e análise de situações-problemas que visem minimizar ou maximizar uma função a partir de uma escolha sistemática de variáveis na busca de uma 'solução ótima' como por exemplo, o máximo consumo x mínimo custo ou máximo uso x mínimo tempo, entre outros. Análise de gráficos de funções no desenvolvimento de diferentes abordagens e estratégias para uma "solução ótima". Investigação de situações-problemas envolvendo pontos de máximo e de mínimo em gráficos de uma função. (ementa de O que é otimizar, PERNAMBUCO (2021), p. 48)
>
> Pesquisa e modelização de situações-problemas, a partir do pensamento de sustentabilidade (construção de embalagens cada vez mais eficientes e ecologicamente

> corretas), por meio da otimização, interpretação de dados, resultados, validação, maior volume e menor quantidade de material, entre outros. (ementa de Protótipos de Embalagens, PERNAMBUCO (2021), p. 62)

O material de apoio à ação docente da unidade temática Otimização e Automação, que pertence a Trilha Soluções Ótimas, define otimização como "o estudo de problemas nos quais o objetivo é minimizar ou maximizar uma função pela escolha sistemática de valores das variáveis, dentro de um conjunto possível" (PERNAMBUCO, 2022, p. 8). Naturalmente, soluções ótimas são situações em que se alcançam os valores extremos — máximos ou mínimos — desejados dessas funções.

4.4 Máximos e mínimos de funções quadráticas

A partir desta, as subseções que se seguem fundamentam matematicamente os quatro métodos apresentados. O primeiro é provavelmente o mais conhecido e trabalhado no Ensino Médio: máximos e mínimos de funções quadráticas. O foco será apenas a investigação e o reconhecimento dos pontos extremos dessas funções, não sendo de interesse apresentar os demais conceitos e propriedades afins. Para os que desejam um estudo mais amplo de funções quadráticas, consultar o trabalho do ilustre professor LIMA et al. (1997). Doravante, funções reais de variável real serão chamadas simplesmente de funções reais e a notação $[n]$ designará o conjunto $\{1,2,...,n\}$, onde n é um número natural.

Definição 4.4.1. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$. Chama-se de **função quadrática** ou função polinomial do segundo grau a função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2+bx+c. \end{array}$$

A fim de se investigar algumas propriedades, é útil escrever a função quadrática da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

A forma acima é conhecida como a forma canônica do trinômio do segundo grau. Ora,

observe que, a partir dela, fica claro que

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \end{aligned}$$

onde $\Delta = b^2-4ac$ é chamado de discriminante do trinômio do segundo grau. Como f é uma função real, nota-se, da terceira equivalência, que $f(x)=0$ tem solução se, e somente se, $\Delta \geq 0$. Note também que essa é exatamente a fórmula bastante utilizada tanto no Ensino Fundamental - Anos Finais quanto no Ensino Médio para encontrar soluções de equações do segundo grau e que é erroneamente atribuída a Bhaskara (VIEIRA, 2011).

Além dessa, há uma outra aplicação da forma canônica e que é mais relevante para este trabalho. Perceba que, para $a>0$, à medida que x tende a $-\frac{b}{2a}$, $x+\frac{b}{2a}$ tende a zero e, portanto, $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ decresce até $-\frac{\Delta}{4a}$. Ou seja, f é decrescente no intervalo $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$, crescente em $\left(-\frac{b}{2a},\infty\right)$ e assume valor mínimo quando $x=-\frac{b}{2a}$. De fato, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo que f assume. Normalmente, esses valores são chamados de x e y do vértice, sendo denotados por x_v e y_v, respectivamente, pois são as coordenadas do vértice da parábola definida por f. Novamente, para entender melhor como se comporta o gráfico de uma função quadrática, ver (LIMA et al., 1997).

Uma pergunta importante a se fazer é se f tem um valor máximo. Suponha que sim. Então $\exists k \in \mathbb{R} : k \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} k &\geq a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ \frac{k}{a}+\frac{\Delta}{4a^2} &\geq \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \\ \sqrt{\frac{k}{a}+\frac{\Delta}{4a^2}} &\geq \left|x+\frac{b}{2a}\right| \\ \frac{\sqrt{4ak+\Delta}}{2a} &\geq \left|x+\frac{b}{2a}\right| \end{aligned}$$

Dessa forma, $\frac{\sqrt{4ak+\Delta}}{2a} \geq x+\frac{b}{2a} \geq -\frac{\sqrt{4ak+\Delta}}{2a}$ e, portanto,

$$\frac{-b+\sqrt{4ak+\Delta}}{2a} \geq x \geq \frac{-b-\sqrt{4ak+\Delta}}{2a}.$$

Como f está bem definida para todo elemento de $\mathbb{R}$, segue que este é limitado superiormente. Absurdo. Logo, quando $a > 0$, f não tem valor máximo. De fato, diz-se que o conjunto imagem de f é limitado inferiormente e ilimitado superiormente se $a > 0$.

Agora, seguindo de forma análoga, para $a < 0$, percebe-se que $f(x)$ cresce até $-\frac{\Delta}{4a}$ à medida que x tende a $-\frac{b}{2a}$. Logo, f cresce no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, decresce em $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ e assume valor máximo $-\frac{\Delta}{4a}$ quando $x = -\frac{b}{2a}$. Também de forma análoga, conclui-se que f não admite valor mínimo quando $a < 0$. Nesse caso, diz-se que o conjunto imagem de f é limitado superiormente e ilimitado inferiormente.

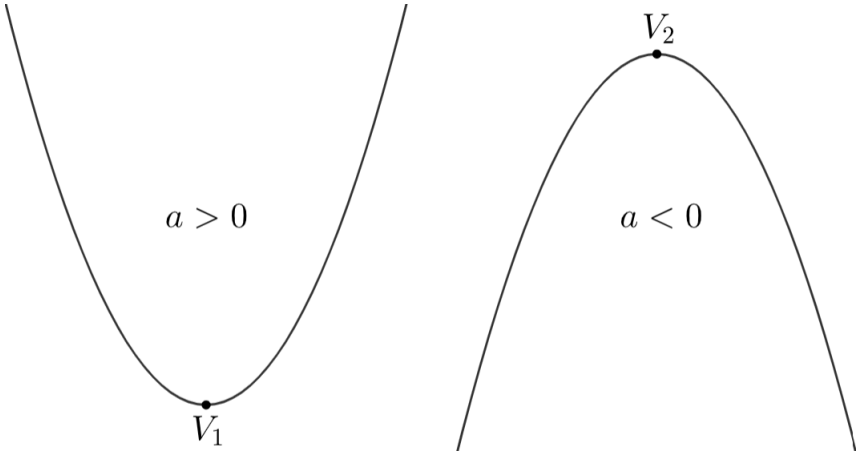


Figura 1: Na imagem, V_1 e V_2 são, respectivamente, o ponto mínimo e máximo de duas funções quadráticas distintas.

Comumente, diz-se que a concavidade da parábola definida pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

Resumindo, dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- f tem um valor mínimo se $a > 0$;
- f tem um valor máximo se $a < 0$;
- O valor mínimo ou máximo de f é sempre igual a $-\frac{\Delta}{4a}$ e ocorre apenas quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Problema 4.4.2. *Seja s a soma de dois números. Qual é o produto máximo que pode resultar entre eles?*

Solução. Sejam x e y tais que $x + y = s$. Se $p = xy$, então

$$p = x(s-x) = -x^2 + sx.$$

Logo, o valor máximo de p é $p = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{s^2}{4\cdot(-1)} = \frac{s^2}{4}$. Note que isso ocorre quando $x = -\frac{s}{2\cdot(-1)} = \frac{s}{2} = y$.

Portanto, o produto máximo que se pode obter entre dois números cuja soma é s é $\frac{s^2}{4}$ e isso ocorre apenas quando esses números são iguais.

4.5 Desigualdade Triangular

O seguinte axioma é necessário para a demonstração do teorema tratado nesta subseção. É um dos axiomas de medição de segmentos. Para conhecer os demais axiomas desse grupo, consultar (SANTOS e VIGLIONI, 2011).

Axioma 4.5.1. *Sejam A, B e C pontos colineares distintos. Se $B \in AC$, então $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.*

Figura 2: O ponto B está entre os pontos A e C.

Em palavras, este axioma afirma que, se B está entre A e C, então a soma das medidas dos segmentos AB e BC é igual à medida do segmento AC todo. O conceito de "estar entre" é uma noção primitiva da Geometria, ou seja, não possui uma definição, mas é intuitivamente entendida e aceita. A habilidade EF02MA12 da BNCC (BRASIL, 2018) trata da capacidade verbal e não verbal dos alunos de localizar objetos (ponto B) num espaço (a reta no plano que contém os três pontos) utilizando mais de um ponto de referência (os pontos A e C) ainda no Ensino Fundamental - Anos Iniciais.

Proposição 4.5.2. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Para uma demonstração dessa proposição, ver (SANTOS e VIGLIONI, 2011).

Segue, agora, um dos mais importantes teoremas da Geometria Euclidiana com aplicações em toda a Matemática.

Teorema 4.5.3 (Desigualdade Triangular)**.** *Sejam A, B e C pontos distintos quaisquer no plano. Então $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$, valendo a igualdade apenas quando $B \in AC$.*

Demonstração. Suponha que A, B e C são colineares. Logo, ou $A \in BC$, ou $B \in AC$, ou $C \in AB$.

- **Caso 1:** $A \in BC$.

$$\begin{aligned} \overline{AC}+\overline{AB} &= \overline{BC} \\ \overline{AC} &< \overline{BC} \\ \overline{AC} &< \overline{AB}+\overline{BC} \end{aligned}$$

- **Caso 2:** $B \in AC$.

  Diretamente do axioma, $\overline{AC} = \overline{AB}+\overline{BC}$.

- **Caso 3:** $C \in AB$.

$$\begin{aligned} \overline{AC}+\overline{BC} &= \overline{AB} \\ \overline{AC} &< \overline{AB} \\ \overline{AC} &< \overline{AB}+\overline{BC} \end{aligned}$$

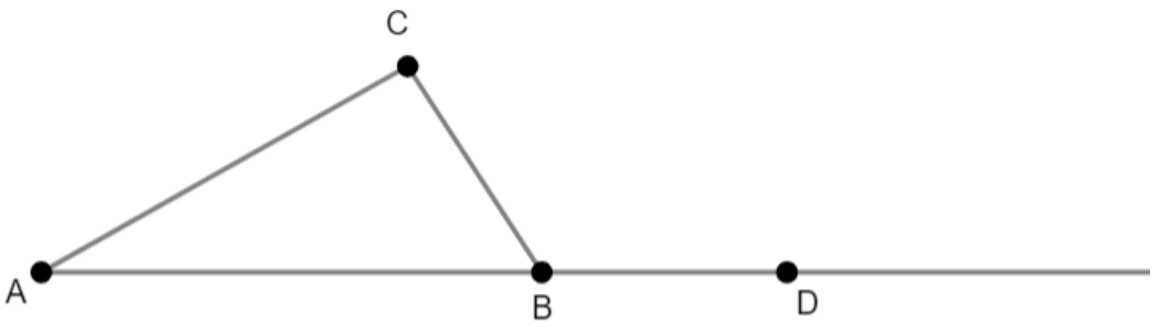


Figura 3: Demonstração da desigualdade triangular.

Agora, se A, B e C não são colineares, segue que ABC é um triângulo. Seja D o ponto da semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{BC} = \overline{BD}$ e $B \in AD$. Então BCD é um triângulo isósceles com base CD. Logo, $\widehat{BCD} = \widehat{CDB}$. Como $B \in AD$, segue que, observando o triângulo ACD, $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} > \widehat{BCD} = \widehat{CDB} = \widehat{CDA}$. Pela Proposição 4.5.2, segue que $\overline{AC} < \overline{AD} = \overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AB}+\overline{BC}$.

Logo, $\overline{AC} \leq \overline{AB}+\overline{BC}$, valendo a igualdade quando $B \in AC$. □

Note que, pela arbitrariedade de A, B e C, tem-se que $\overline{AB} \leq \overline{AC}+\overline{BC}$ e $\overline{BC} \leq \overline{AB}+\overline{AC}$, valendo a igualdade se $C \in AB$ e $A \in BC$, respectivamente.

É comum apresentar a Desigualdade Triangular de uma outra forma. Aqui, essa forma equivalente é apresentada como um corolário do Teorema 4.5.3

Corolário 4.5.4. *Sejam A, B e C pontos distintos quaisquer no plano. Então* $|\overline{AB}-\overline{AC}| \leq \overline{BC}$, *valendo a igualdade apenas quando* $B \in AC$.

Demonstração. Do Teorema da Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned} \overline{AC} &\leq \overline{AB}+\overline{BC} & \qquad \overline{AB} &\leq \overline{AC}+\overline{BC} \\ \overline{AC}-\overline{AB} &\leq \overline{BC} & \qquad \overline{AB}-\overline{AC} &\leq \overline{BC} \end{aligned}$$

Então $|\overline{AB}-\overline{AC}| \leq \overline{BC}$. Além disso, $B \in AC$ se, e somente se, $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ e $\overline{AB}-\overline{AC}=-\overline{BC}$, ou seja, vale a igualdade $|\overline{AB}-\overline{AC}|=\overline{BC}$. □

Uma das aplicações mais elementares do Teorema 4.5.3 é a condição de existência para um triângulo, mostrada no seguinte corolário.

Corolário 4.5.5. *Sejam A, B e C pontos distintos quaisquer no plano. Então ABC é um triângulo se, e somente se,*

$$\begin{cases} \overline{AB} < \overline{AC}+\overline{BC} \\ \overline{AC} < \overline{AB}+\overline{BC} \\ \overline{BC} < \overline{AB}+\overline{AC} \end{cases}$$

Demonstração. Lembre que ABC é um triângulo se, e somente se, A, B e C não são pontos colineares, ou seja, nenhum ponto está contido entre os outros dois. Pelo Teorema da Desigualdade Triangular, isso acontece quando

$$\begin{cases} \overline{AB} < \overline{AC}+\overline{BC} \\ \overline{AC} < \overline{AB}+\overline{BC} \\ \overline{BC} < \overline{AB}+\overline{AC} \end{cases}$$

□

Problema 4.5.6 (Jaboatão dos Guararapes)**.** *Considere 5 segmentos de reta com as seguintes medidas*

- *segmento I: 5 cm;*
- *segmento II: 8 cm;*
- *segmento III: 10 cm;*
- *segmento IV: 12 cm;*
- *segmento V: 15 cm;*

Pretende-se construir um triângulo. Para isso, escolher-se-ão 3 desses segmentos. Cada um deles corresponderá a um dos lados desse triângulo, sem sobras ou faltas.

A seguinte escolha não viabilizará a construção do triângulo.

a) *I, II e V.*

b) *I, II e IV.*

c) *II, III e IV.*

d) *II, IV e V.*

e) *III, IV e V.*

Solução. De todas as alternativas, apenas a alternativa a) não forma um triângulo, pois $5+8<15$.

Corolário 4.5.7. *Seja $n \geq 3$ um número natural. Prove que a soma das medidas de $n-1$ lados de um n-gono é sempre maior que a medida do n-ésimo lado.*

Demonstração. Provar-se-á por indução em n.

O caso $n=3$ é exatamente a Desigualdade Triangular. Suponha, então, que vale para um certo $k \geq 3$ natural. Seja $V_1V_2...V_kV_{k+1}$ um $(k+1)$-gono qualquer. Ligue os vértices V_2 e V_{k+1} e considere o k-gono $V_2V_3...V_kV_{k+1}$. Pela hipótese de indução, segue que

$$\overline{V_kV_{k+1}} < \overline{V_{k+1}V_2} + \overline{V_2V_3} + \overline{V_3V_4} + ... + \overline{V_{k-1}V_k}.$$

Como $\overline{V_{k+1}V_2} < \overline{V_{k+1}V_1} + \overline{V_1V_2}$, então

$$\overline{V_kV_{k+1}} < \overline{V_{k+1}V_1} + \overline{V_1V_2} + ... + \overline{V_{k-1}V_k}.$$

Analogamente, prova-se que todo lado de $V_1V_2...V_kV_{k+1}$ é menor que os outros k.

□

Problema 4.5.8. *O ponto C está dentro de um ângulo reto e os pontos A e B estão nos lados. Prove que o perímetro do triângulo ABC é maior do que o dobro da distância OC, onde O é o vértice do ângulo reto dado.*

Solução. *Sejam C' e C'' os pontos simétricos de C em relação aos lados que contém A e B respectivamente. É fácil ver que O, C' e C'' são colineares.*

Considere o quadrilátero $AC'C''B$. Pelo Corolário 4.5.7, segue que $\overline{C'C''} < \overline{AC'} + \overline{AB} + \overline{BC''}$. Como $\overline{C'C''} = 2\overline{OC}$, $\overline{AC'} = \overline{AC}$ e $\overline{BC''} = \overline{BC}$, então

$$2\overline{OC} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC}.$$

□

4.6 Definição de média aritmética e geométrica

Antes de iniciar o estudo da Desigualdade MA-MG, é essencial lembrar a definição dessas médias.

Definição 4.6.1. Sejam os números $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. O número $A = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$ é chamado de **média aritmética** dos números $x_1, ..., x_n$.

A média aritmética é, provavelmente, a mais conhecida dentre todas as médias e é, comumente, chamada apenas de média. Um exemplo clássico do uso dela é o cálculo da nota final dos alunos de uma escola, que, normalmente, é o resultado da média aritmética das notas obtidas em cada unidade letiva.

Note também que, numa progressão aritmética (a_n) com razão r, o termo a_i, com $i > 1$, é a média aritmética dos termos equidistantes a ele em relação à posição. De fato, seja $j \in [i-1]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{a_{i-j} + a_{i+j}}{2} &= \frac{[a_1 + (i-j-1)\cdot r] + [a_1 + (i+j-1)\cdot r]}{2} \\
&= \frac{2[a_1 + (i-1)\cdot r]}{2} \\
&= a_1 + (i-1)\cdot r \\
&= a_i.
\end{aligned}$$

Definição 4.6.2. Sejam os números $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$. O número $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}$ é chamado de a **média geométrica** dos números $x_1, ..., x_n$.

Um exemplo da aparição da média geométrica ocorre nas relações métricas de um triângulo retângulo ABC. Seja h a altura relativa à hipotenusa de ABC e a e b as medidas das projeções dos catetos nessa hipotenusa; sabe-se, através de semelhança de triângulos, que $h = \sqrt{a \cdot b}$.

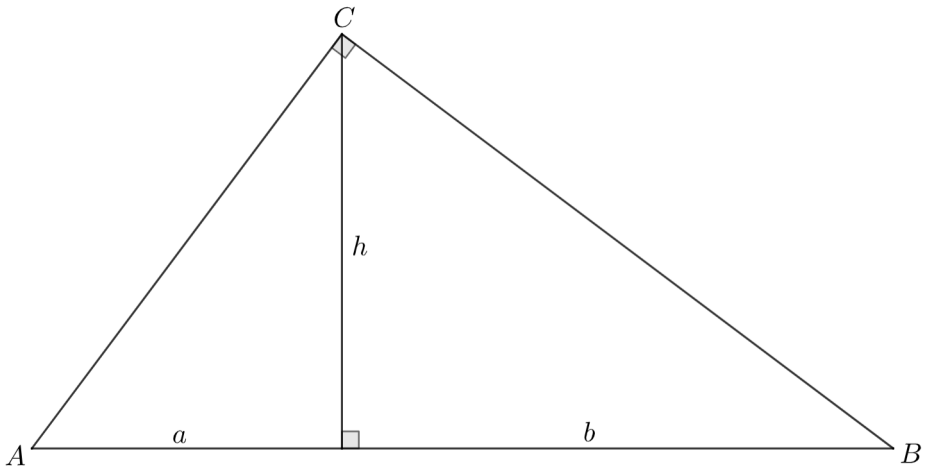


Figura 4: A altura h é a média geométrica das medidas a e b das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Além disso, numa progressão geométrica (a_n) com razão r, o módulo do termo a_i, ou seja, $|a_n|$, com $i > 1$, é a média geométrica dos termos equidistantes a ele em relação à posição. De

fato, seja $j \in [i-1]$, tem-se

$$\begin{aligned}\sqrt{a_{i-j} \cdot a_{i+j}} &= \sqrt{(a_1 \cdot r^{i-j-1}) \cdot (a_1 \cdot r^{i+j-1})} \\ &= \sqrt{a_1^2 \cdot r^{2(i-1)}} \\ &= \left|a_1 \cdot r^{i-1}\right| \\ &= |a_i|.\end{aligned}$$

4.7 Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

Iniciando o estudo da Desigualdade MA-MG, é interessante apresentar uma proposição bastante conhecida e importante para diversos problemas envolvendo desigualdades.

Proposição 4.7.1 (Desigualdade Básica)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então*

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. O resultado segue trivialmente do fato que o quadrado de todo número real é igual ou maior que 0. Além disso, como a raiz quadrada de zero é zero, então $(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow |a-b| = 0 \Leftrightarrow a = b$. □

A fim de utilizar essa proposição para resolver problemas, deve-se, primeiramente, identificar quais são os termos a e b, o que nem sempre é um trabalho simples, mas vai melhorando conforme a prática. Depois, aplica-se a Desigualdade Básica a esses termos e desenvolve-se as desigualdades até obter-se a expressão desejada.

Problema 4.7.2. *Seja x um número real positivo. Prove que*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x = 1$.

Solução. Uma tentativa óbvia para a escolha dos termos seria x e $\frac{1}{x}$. Aplicando a Desigualdade Básica, é obtido:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &\geq 0 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &\geq 2,\end{aligned}$$

que não é o desejado, mas que sugere duas novas escolhas.

A primeira escolha, os termos $\sqrt{x}$ e $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Aplicando a desigualdade, segue

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 &\geq 0\\ x-2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x} &\geq 0\\ x+\frac{1}{x} &\geq 2,\end{aligned}$$

como desejado. Além disso, $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Já na segunda escolha, são considerados os termos x e 1, obtendo

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &\geq 0\\ x^2-2x+1 &\geq 0\\ x^2+1 &\geq 2x\\ x+\frac{1}{x} &\geq 2,\end{aligned}$$

valendo $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

□

Analisando o Problema 4.7.2 através do estudo das funções reais, nota-se que está sendo afirmado que a função $f(x)=x+\frac{1}{x}$, com domínio igual aos reais positivos, tem valor mínimo no ponto $x=1$ do domínio e que esse valor é igual a 2. Na Subseção 4.8, está disponível uma resolução através do Método das Derivadas para esse mesmo problema.

Problema 4.7.3. *Sejam $a,b>0$ números reais. Prove que*

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a=b$.

Solução. Talvez, para iniciantes, o desenvolvimento para se chegar na expressão desejada não seja tão claro como no problema anterior, então será usado o pensamento inverso do que foi feito, *i. e.*, partir-se-á de $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ e, através da equivalência das desigualdades,

chegar-se-á em $(a-b)^2 \geq 0$. Como esta é verdadeira, aquela também deve ser.

$$\begin{array}{rcl} (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) & \geq & 4 \\ 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 & \geq & 4 \\ \frac{a}{b}-2+\frac{b}{a} & \geq & 0 \\ a^2-2ab+b^2 & \geq & 0 \\ (a-b)^2 & \geq & 0 \end{array} \quad \uparrow$$

Por fim, vale a igualdade $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 4 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

□

Proposição 4.7.4 (Desigualdade MA-MG para dois termos)**.** *Sejam a e b números reais positivos. Então*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b},$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Considere os termos $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$. Pela Desigualdade Básica, obtém-se

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 & \geq & 0 \\ a-2\sqrt{ab}+b & \geq & 0 \\ \frac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab}. \end{array}$$

Note que $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

Note que o Problema 4.7.2 pode ser resolvido utilizando a Proposição acima. Aplicando-a em x e $\frac{1}{x}$, tem-se

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2,$$

valendo $x+\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

A Proposição 4.7.4 pode ser provada, também, de forma geométrica.

Na Figura 5, como *MN* é raio da semicircunferência, ele mede $\frac{a+b}{2}$, pois *AB* é diâmetro da semicircunferência. Como $h = \sqrt{a \cdot b}$ é menor ou igual ao raio, vale a Desigualdade MA-MG.

Na Figura 6, nota-se que a área do quadrado grande é igual a $(a+b)^2$ e é maior ou igual a soma das áreas dos quatros retângulos contidos nele. Tomando a raíz quadrada e dividindo por dois em ambos os lados, obtém-se a Desigualdade MA-MG.

A prova do caso geral é mais complicada, porém não a um nível de complexidade tal que impediria a sua apresentação numa aula de Ensino Médio para alunos interessados, por exemplo.

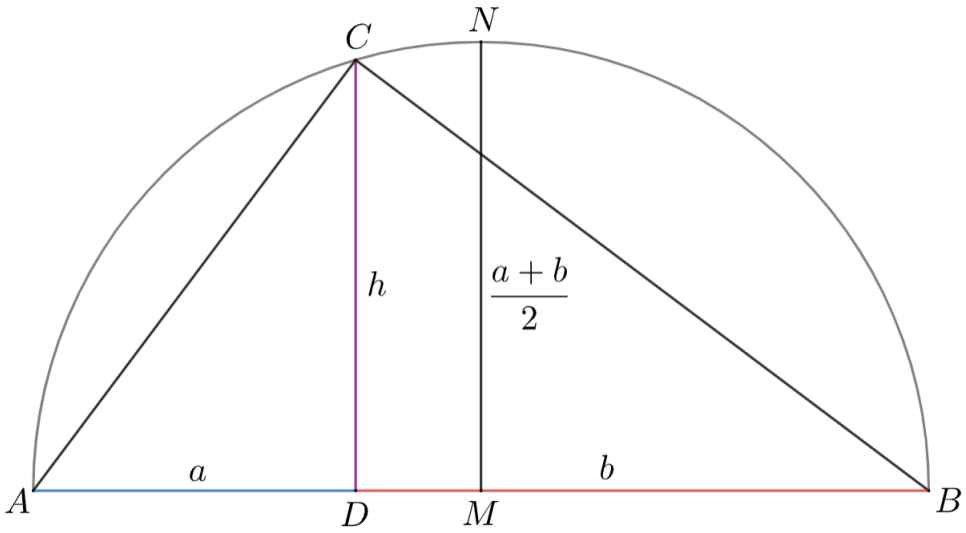


Figura 5: Prova geométrica da Desigualdade MA-MG através do triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência.

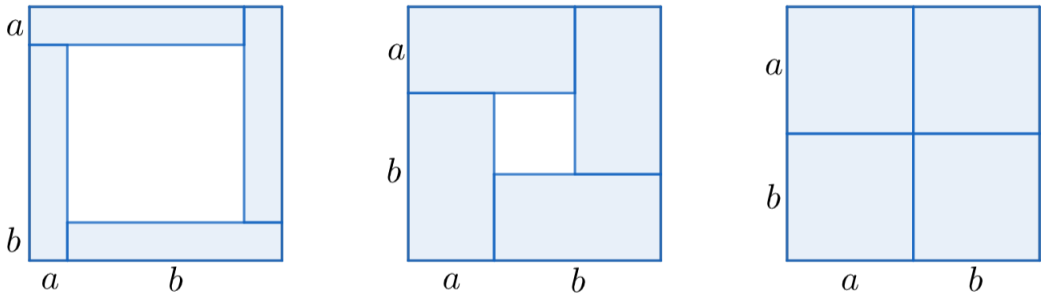


Figura 6: Prova geométrica da Desigualdade MA-MG através de retângulos de lados a e b internos a um quadrado de lado $a+b$.

O seguinte lema é necessário para essa demonstração.

Lema 4.7.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$. Então $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = ... = x_n = 1$.*

Demonstração. Este lema será provado por indução em n. O caso $n = 1$ é trivial. Além disso, note que o caso $n = 2$ segue do resultado do Problema 4.7.2, pois $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Suponha, então, que o resultado vale para um dado n. Considere os números reais positivos $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$. Sem perda de generalidade, pode-se reetiquetá-los de tal forma que $x_1 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1}$. Quer-se provar que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n+1$.

Se $x_1 = ... = x_n = x_{n+1}$, então

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_i^{n+1} = 1 \Rightarrow x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i = (n+1) \cdot x_i = n+1.$$

Assuma, agora, que pelo menos um x_i é diferente dos demais. Note que, se, $\forall i \in [n+1]$,

$x_i < 1$, então $\prod_{i=1}^{n} x_i < 1$, o que contradiz com a hipótese. De forma análoga, supondo que $x_i > 1$, $\forall i \in [n+1]$, ter-se-ia $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$, novamente contradizendo com a hipótese do produto dos $n+1$ números ser igual a 1. Por esses motivos, $x_1 < 1 < x_{n+1}$. Logo,

$$\begin{aligned} (1-x_1)(x_{n+1}-1) &> 0 \\ x_1 + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} - 1 &> 0 \\ x_1 + x_{n+1} - 1 &> x_1 x_{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução em $(x_1 x_{n+1}), x_2, ..., x_n$, segue que

$$\begin{aligned} (x_1 x_{n+1}) + \sum_{i=2}^{n} x_i &\geq n \\ (x_1 + x_{n+1} - 1) + \sum_{i=2}^{n} x_i &> n \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i &> n+1 \end{aligned}$$

□

Finalmente, eis uma prova para o caso geral da Desigualdade MA-MG.

Teorema 4.7.6 (Caso Geral da Desigualdade MA-MG)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Então*

$$A = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} = G,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = ... = x_n$.

Demonstração. Como $x_1 \cdot ... \cdot x_n = G^n$, então $\frac{x_1}{G} \cdot ... \cdot \frac{x_n}{G} = 1$. Logo, pelo Lema 4.7.5, segue que

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{G} + ... + \frac{x_n}{G} &\geq n \\ \frac{x_1 + ... + x_n}{n} &\geq G \\ A &\geq G. \end{aligned}$$

Além disso, vale $A = G \Leftrightarrow \frac{x_1}{G} = ... = \frac{x_n}{G} \Leftrightarrow x_1 = ... = x_n$. □

Observe que o Prolema 4.7.3 pode ser resolvido aplicando o teorema acima nos termos 1,

$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ e 1 como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{4} &\geq \sqrt[4]{1\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot 1}=1\\
1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 &\geq 4\\
(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) &\geq 4
\end{aligned}$$

Além disso, pode-se provar a generalização desse problema.

Problema 4.7.7. *Sejam $n\in\mathbb{N}$ $x_1,\ldots,x_n>0$ números reais. Prove que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\geq n^2,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x_1=\ldots=x_n$.

Solução. Ora, como há n parcelas em ambos $\sum_{i=1}^{n}x_i$ e $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$, então há n^2 parcelas da forma $x_i\cdot\frac{1}{x_j}$, onde $i,j\in[n]$, em $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$. Logo, aplicando a Desigualdade MA-MG nessas parcelas, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i,j=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{x_j}}{n^2} &\geq \sqrt[n^2]{\prod_{i,j=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{x_j}}\\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{x_j} &\geq n^2\cdot\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{x_j}}\\
\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j} &\geq n^2\cdot\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^{n}x_i^n\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}}\\
\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) &\geq n^2\cdot\sqrt[n^2]{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^n\right)\cdot\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^n}\right)}\\
\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) &\geq n^2\cdot\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^{n}x_i^n\cdot\frac{1}{x_1^n}}\\
\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) &\geq n^2\cdot\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^{n}1}\\
\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) &\geq n^2
\end{aligned}$$

Além disso, vale a igualdade quando todos os $x_i \cdot \dfrac{1}{x_j}$ são iguais entre si. Logo, $x_i \cdot \dfrac{1}{x_j} = \dfrac{x_i}{x_i} = 1$, $\forall i, j \in [n]$, implicando em $x_1 = ... = x_n$.

□

Problema 4.7.8. *Prove que a sequência de termo geral* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *é estritamente crescente.*

Solução. Quer-se provar que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Considere os termos $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = ... = x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n}$. Aplicando a Desigualdade MA-MG:

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{1 \cdot \prod_{1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
\frac{1 + (n+1)}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Como $1 + \dfrac{1}{n} \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então sempre vale $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

4.8 Máximos e mínimos de funções pelo método das derivadas

Na subseção 4.4, viu-se que uma função quadrática sempre tem valor mínimo ou máximo e chegou-se num método para sempre descobrir quando ocorre e quanto é esse valor. Entretanto, há outras funções reais estudadas no Ensino Médio que também têm valores máximos ou mínimos que não podem ser calculados por esse método, como algumas funções modulares, trigonométricas, quocientes, polinomiais, dentre outras. Portanto, algumas ferramentas e técnicas mais aprimoradas e gerais são necessárias.

Uma delas, provavelmente a mais famosa e utilizada no ensino superior, é o método das derivadas para encontrar mínimos e máximos de funções. De fato, o matemático alemão e co-inventor do cálculo, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em seu artigo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não são impedidos por quantidades fracionárias nem irracionais, e um cálculo

notável para eles), que foi a primeira obra publicada sobre o Cálculo, mostrou a utilidade da sua mais nova invenção aplicando-a para o cálculo dos valores extremos de funções.

Ora, embora o Cálculo não seja um conteúdo comum nos currículos do Ensino Médio brasileiro, algumas de suas aplicações estão presentes em objetos do conhecimento da etapa final da educação básica, como a cinemática. Sabe-se que a função horária espacial de um objeto com posição e velocidade iniciais S_0 e v_0, respectivamente, e aceleração a é

$$S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

A velocidade instantânea, ou seja, a velocidade do objeto num instante t é dada pela função

$$v(t) = v_0 + at.$$

Note, então, que $\frac{d}{dt}S(t) = v(t)$, *i. e.*, a velocidade do objeto num instante é a derivada da função S nesse mesmo instante. Então, se um aluno quer encontrar a velocidade instantânea de um corpo num determinado momento, tendo em mãos a função horária espacial S desse corpo, bastaria calcular a derivada de S nesse ponto. De fato, esse problema — o de encontrar a velocidade de um corpo em um determinado momento sabendo a posição dele em qualquer instante — foi um dos que motivaram Newton (1642 – 1726) a desenvolver, independente e simultaneamente a Leibniz, as suas ideias sobre o Cálculo. Para ler mais sobre isso e outras curiosidades sobre o surgimento do Cálculo, recomenda-se (KATZ, 1993).

Este trabalho não se aprofundará nas ideias, definições, propriedades e teoremas iniciais do Cálculo Diferencial, limitando-se a apenas apresentar o método das derivadas para encontrar os máximos e mínimos de funções tomando aqueles como já conhecidos. Recomenda-se, para preencher essa lacuna, (STEWART, 2015). Lembra-se que a derivada de uma função f num ponto c do seu domínio é denotada por $f'(c)$ e que função derivada de f é denotada por f'. Por fim, disponibiliza-se, em anexo, uma tabela com algumas derivadas fundamentais para auxiliar na resolução dos problemas propostos nesta e nas seções seguintes.

Definição 4.8.1. Seja f uma função com domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $c \in D$. Diz-se que $f(c)$ é

- o **mínimo absoluto** de f se, $\forall x \in D$, $f(x) \geq f(c)$ e
- o **máximo absoluto** de f se, $\forall x \in D$, $f(x) \leq f(c)$.

Pela definição acima e pelo que foi visto na Subseção 4.4, nota-se que o ponto mínimo ou máximo de uma função quadrática é sempre absoluto.

Definição 4.8.2. Seja f uma função com domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $c \in D$. Diz-se que $f(c)$ é

- o **mínimo local** de f se, $\exists a, b \in \mathbb{R} : a < b$ e $c \in (a,b) \subset D$ e $\forall x \in (a,b)$, $f(x) \geq f(c)$; e
- o **máximo local** de f se, $\exists a, b \in \mathbb{R} : a < b$ e $c \in (a,b) \subset D$ e $\forall x \in (a,b)$, $f(x) \leq f(c)$.

Em palavras, diz-se que $f(c)$ é um mínimo ou máximo local de f se ele é o menor ou o maior valor, respectivamente, dentre todos os x suficientemente próximos a c.

Teorema 4.8.3 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então $\exists c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Uma demonstração desse teorema pode ser vista em (STEWART, 2015).

Proposição 4.8.4. *Sejam f uma função e I um intervalo aberto onde f está definida. Então f é crescente em I se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, e decrescente em I se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$.*

Demonstração. Suponha que, $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$. Sejam $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, segue que $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, então $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Pela arbitrariedade de x_1 e x_2, segue que f é crescente em I.

Agora, suponha que, $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$. Sejam $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, segue que $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Como $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, então $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Pela arbitrariedade de x_1 e x_2, segue que f é decrescente em I.

□

Teste dos intervalos abertos: sejam f uma função contínua num intervalo aberto I e $c \in I$ um ponto do domínio de f.

1. Se $\exists a, b \in I : a < c < b$ e $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,c)$, e $f'(x) > 0$, $\forall x \in (c,b)$, então f tem um mínimo local em c;

2. Se $\exists a, b \in I : a < c < b$ e $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,c)$, e $f'(x) < 0$, $\forall x \in (c,b)$, então f tem um máximo local em c.

Em particular, se, $\forall x < c$ do domínio, $f'(x) < 0$ e, $\forall x > c$, $f'(x) > 0$, então f tem mínimo absoluto em c. Da mesma forma, f tem máximo absoluto em c se $f'(x) > 0$, $\forall x < c$, e $f'(x) < 0$, $\forall x > c$.

Problema 4.8.5. *Resolva o Problema 4.7.2 através do método das derivadas.*

Solução. Seja

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+\dfrac{1}{x} \end{array}$$

Então $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x \geq 1$. Isto é, f é decrescente no intervalo (0,1) e crescente em $(1,\infty)$. Logo, f tem valor mínimo no ponto $x = 1$, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \geq & f(1) \\ x+\dfrac{1}{x} & \geq & 2 \end{array} ,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x = 1$.

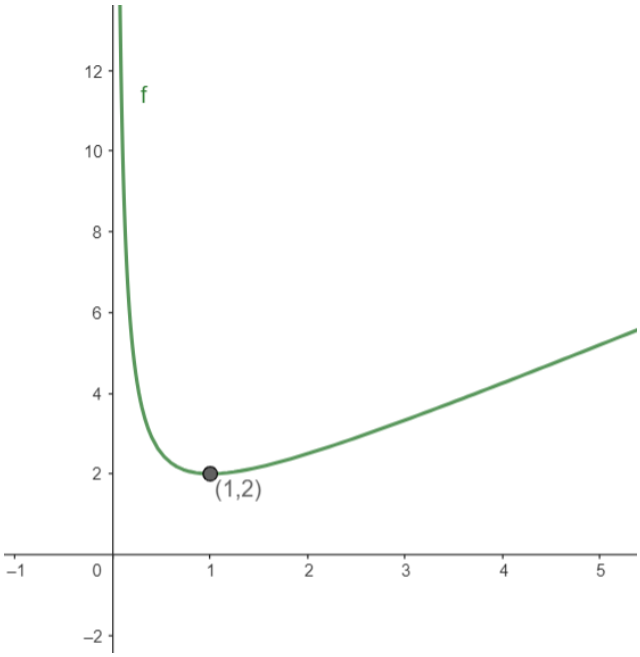


Figura 7: f tem valor mínimo quando $x = 1$.

Problema 4.8.6. *Prove, pelo método das derivadas, que uma função quadrática*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tem valor mínimo ou máximo quando $x = -\dfrac{b}{2a}$*, sendo mínimo se* $a > 0$ *e máximo se* $a < 0$*.*

Solução. Note que $f'(x) = 2ax + b$. Então $2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$. Isso é, $x = -\dfrac{b}{2a}$ é o único ponto crítico de f.

Se $a > 0$, então f' é crescente, com $f'(x) < 0$ se $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in \left(-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$. Logo, f decresce no intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ e é crescente em $\left(-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$, implicando em f assumir valor mínimo apenas quando $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Em contrapartida, se $a < 0$, então f' é decrescente, com $f'(x) > 0$ se $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$. Logo, f cresce no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ e é decrescente em $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, implicando em f assumir valor máximo apenas quando $x = -\frac{b}{2a}$.

□

Há um caso especial em que o domínio de uma função é um intervalo fechado. O seguinte método para encontrar mínimos e máximos absolutos pode ser aplicado nessa situação.

Método para intervalo fechado como domínio: sejam f uma função contínua e o intervalo fechado $[a,b]$ o seu domínio.

1. Encontre todos os pontos do domínio de f em (a,b) tais que f não é derivável neles ou a sua derivada se anula;

2. Calcule os valores de f nesses pontos e nas suas extremidades;

3. O menor desses valores será o mínimo absoluto e o maior deles, o máximo absoluto.

5 Problemas de otimização

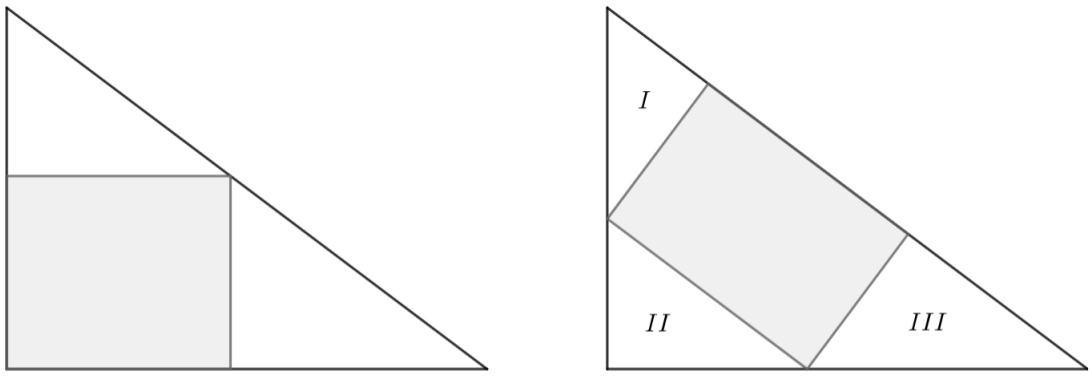
Nesta seção, serão abordados alguns problemas de otimização, como o caminho ótimo a ser percorrido por uma pessoa, um animal ou um objeto; as dimensões ótimas de uma certa embalagem com o objetivo de diminuir o custo de material, dentre outros, utilizando as ferramentas apresentadas.

5.1 Método do mínimo ou máximo de funções quadráticas

Para resolver problemas de otimização através do método do mínimo ou máximo de funções quadráticas, deve-se interpretá-los, identificar quais são as grandezas a serem otimizadas e as informações disponíveis a fim de escrever as medidas daquelas como funções quadráticas destas e utilizar o método visto na Subseção 4.4.

Verifique que, se a solução ótima desejada é o mínimo de uma grandeza, então a função gerada tem coeficiente quadrático positivo. Se a solução ótima é o máximo de uma grandeza, então o coeficiente quadrático será negativo.

Problema 5.1.1. *Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60 cm, 80 cm e 1 m. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.*



As posições sugeridas são as da figura acima. Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados.

Solução. Considere o primeiro caso. Obviamente, como se quer o retângulo com a maior área, então o seu vértice superior à direita deve pertencer a hipotenusa. Sejam b e h as base e altura do retângulo.

Note que os dois triângulos menores são semelhantes ao triângulo de lados 60 cm, 80 cm e

1 m. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{b}{80} &= \frac{60-h}{60} \\ b &= 80-\frac{4h}{3}. \end{aligned}$$

Logo, a área do retângulo é dada pela função

$$A = bh = \left(80-\frac{4h}{3}\right)h = -\frac{4h^2}{3}+80h.$$

Então o retângulo terá área máxima quando $h = -\dfrac{80}{2\cdot(-4/3)} = 30$ cm, implicando em $b = 80-\dfrac{4\cdot 30}{3} = 40$ cm e $A = 1200$ cm^2.

Considere agora o segundo caso. Analogamente, é fácil ver que os vértices que não pertencem à hipotenusa pertencem aos catetos. Novamente, sejam b e h as base (sobre a hipotenusa) e altura do retângulo.

Note que os triângulos I, II e III são semelhantes. Além disso, h é igual ao cateto maior de I e menor de III, e b é igual à hipotenusa do triângulo II. Sejam a e c o cateto menor de I e maior de II respectivamente. Logo, tem-se

$$a+b+c = \frac{3h}{4}+b+\frac{4h}{3} = 100 \Leftrightarrow b = 100-\frac{25h}{12}.$$

Seja A a área do retângulo. Logo,

$$A = bh = \left(100-\frac{25h}{12}\right)h = -\frac{25h^2}{12}+100h.$$

Então a área do retângulo será máxima quando $h = -\dfrac{100}{2\cdot(-25/12)} = 24$ cm, implicando em $b = 100-\dfrac{25\cdot 24}{12} = 50$ cm e $A = 1200$ cm^2.

Portanto, a maior área que se pode obter em ambos os casos é a mesma: 1200 cm^2.

Problema 5.1.2. *Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima? Quanto a empresa receberá nessa situação?*

Solução. A rentabilidade da empresa é dada pela função

$$f(x) = 800x+10(100-x)x = -10x^2+1800x,$$

onde x é o número de passageiros.

Logo, o valor de f é máximo quando $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1800}{2\cdot(-10)} = 90$. Como $90 \in \{0,1,...,100\}$, então a rentabilidade da empresa será máxima quando 90 passageiros irem para a excursão.

A rentabilidade da empresa nessa situação será $f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1800^2 - 4\cdot(-10)\cdot 0}{4\cdot(-10)} =$ 81.000 reais.

Se $x_v \notin \{0,1,...,100\}$, então bastaria tomar o inteiro de $\{0,1,...,100\}$ mais próximo de x_v.

Problema 5.1.3. *João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima? Quanto seria essa receita?*

Solução. A receita de João é dada pela função

$$f(x) = (20-x)(300+40x) = -40x^2 + 500x + 6000,$$

onde x é o quanto João diminuiu, em reais, o preço da caixa.

Logo, o valor de f é máximo quando $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{500}{2\cdot(-40)} = 6,25$, isto é, João deveria cobrar $20 - 6,25 = 13,75$ reais por caixa para maximizar a sua receita.

O valor máximo que ele receberá será $f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{500^2 - 4\cdot(-40)\cdot 6000}{4\cdot(-40)} = 7.562,50$ reais.

Problema 5.1.4. *O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para cada redução de R$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima? Qual será o valor dessa receita?*

Solução. A receita da orquestra é dada pela função

$$f(x) = (9-x)(300+100x) = -100x^2 + 600x + 2700,$$

onde x é o quanto o diretor diminuiu, em reais, o preço do ingresso.

Logo, o valor de f é máximo quando $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{600}{2\cdot(-100)} = 3$, isto é, o diretor deve cobrar $9 - 3 = 6$ reais por ingresso para maximizar a receita da orquestra.

A receita máxima será $f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{600^2 - 4\cdot(-100)\cdot 2700}{4\cdot(-100)} = 3.600$ reais.

Problema 5.1.5. *Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível? Qual é o valor dessa receita máxima?*

Solução. A receita do restaurante é dada pela função

$$f(x) = (12+x)(100-0,5\cdot 10x) = -5x^2+40x+1200,$$

onde x é o quanto o restaurante aumentou, em reais, o preço do quilo da carne.

Logo, o valor de f é máximo quando $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{40}{2\cdot(-5)} = 4$, isto é, o restaurante deve cobrar $12+4=16$ reais pelo quilo da carne para maximizar a sua receita.

A receita máxima será $f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{40^2-4\cdot(-5)\cdot 1200}{4\cdot(-5)} = 1.280$ reais.

Problema 5.1.6. *Um prédio de 1 andar, cujo formato é de um prisma reto retangular, com lados proporcionais a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de 7 reais por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 2.500 reais. A prefeitura concede um desconto de 60 reais por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Quais devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo?*

Solução. O valor do imposto é dado pela função

$$f(x) = 7\cdot\frac{3x}{4}\cdot x + 2500 - 60\cdot 2\left(\frac{3x}{4}+x\right) = \frac{21x^2}{4} - 210x + 2500,$$

onde x é o comprimento do lado maior do retângulo.

Logo, o valor de f é máximo quando $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-210}{2\cdot 21/4} = 20$. Então será pago o mínimo de imposto se as medidas dos lados do prédio forem 20 por 15 metros.

O valor do imposto mínimo é $f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-210)^2 - 4\cdot\frac{21}{4}\cdot 2500}{4\cdot\frac{21}{4}} = 400$ reais.

Problema 5.1.7. *Determine dentre os retângulos isoperimétricos, aquele que tem a maior área.*

Solução. Sejam x e y as medidas dos lados de um retângulo qualquer de perímetro $2p$. De $2p = 2(x+y)$ segue $y = p-x$. Logo, a área do retângulo é dada pela função

$$f(x) = xy = x(p-x) = -x^2+px.$$

Logo, a área do retângulo será máxima quando $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{p}{2\cdot(-1)} = \dfrac{p}{2}$. Segue que $y = p-\dfrac{p}{2} = \dfrac{p}{2}$. Portanto, o quadrado é o maior dos retângulos isoperimétricos.

5.2 Desigualdade Triangular

Algumas situações-problemas do tipo "qual é a menor distância?", "qual é a menor soma das distâncias?" ou "qual é o menor percurso a ser percorrido?" podem ser resolvidas utilizando

a Desigualdade Triangular. Para isso, algumas ferramentas matemáticas, sobretudo geométricas, adicionais podem ser necessárias, como noções de simetria e de planificação de sólidos geométricos.

Portanto, é recomendável estar familiarizado com essas ideias para se debruçar nos problemas. Por exemplo, saber que pontos simétricos distam igualmente do ponto ou do eixo de simetria. Isso resulta diretamente da própria construção do ponto simétrico. O ponto de simetria é exatamente o ponto médio dos pontos simétricos e o eixo de simetria, a mediatriz deles.

Como é de praxe na matemática, a melhor forma para dominar as técnicas e as ideias para resolver os problemas abaixo é através da prática. Cada novo exercício resolvido expande o leque de ferramentas para resolver problemas mais complexos. Tendo isso em vista, recomenda-se o Capítulo 6 de (FOMIN et al., 2012), que trata sobre a Desigualdade Triangular e é de onde os problemas a seguir foram retirados ou adaptados.

Problema 5.2.1. *Encontre um ponto no interior de um quadrilátero convexo tal que a soma das distâncias do ponto aos vértices é mínima.*

Solução. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer e P um ponto interno seu. Pela Desigualdade Triangular, tem-se $\overline{AC} \leq \overline{AP} + \overline{CP}$ e $\overline{BD} \leq \overline{BP} + \overline{DP}$, valendo a igualdade quando P pertence à diagonal AC e BD, respectivamente.

Logo, $\overline{AC} + \overline{BD} \leq \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$, valendo a igualdade quando P é a interseção das diagonais do quadrilátero.

Portanto, a soma das distâncias de P aos vértices de $ABCD$ é mínima quando aquele é a interseção das diagonais deste.

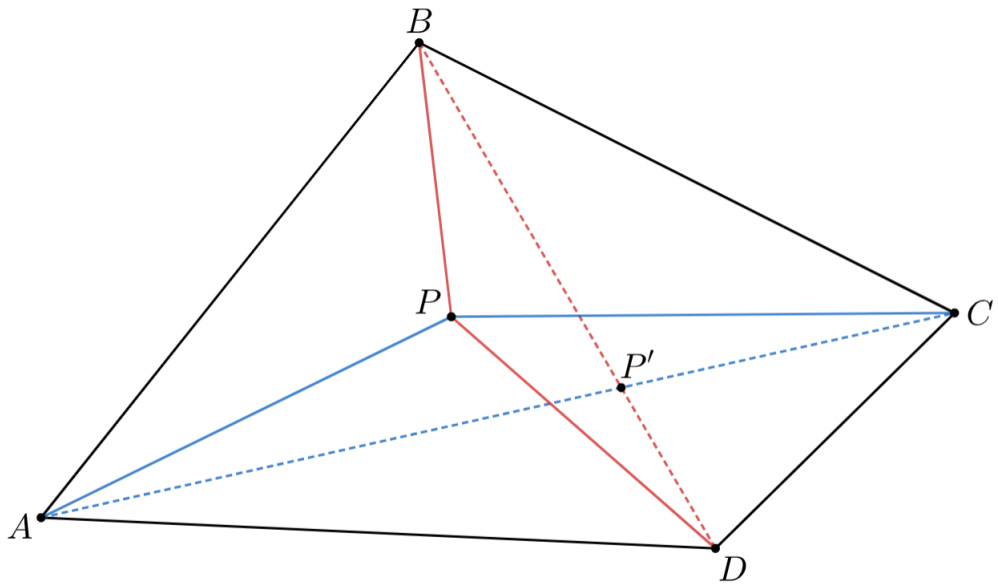


Figura 8: A soma das distâncias de um ponto interno a um quadrilátero convexo é mínima quando esse ponto é a interseção das diagonais.

Problema 5.2.2. *Um colhedor de cogumelos sai da floresta em um determinado ponto. Ele precisa chegar a uma estrada, que segue uma linha reta, e voltar para a floresta em outro ponto dado. Como ele deve fazer isso para seguir o menor caminho possível?*

Solução. Sejam A e B os pontos de partida e de chegada, respectivamente, do colhedor de cogumelos e r uma reta que representa a estrada. Quer-se encontrar um ponto P em r tal que a soma das distâncias de P a A e a B seja mínima.

Considere, então, o ponto B' que é simétrico a B em relação a r. Tome P como a interseção de AB' e r e seja P' um ponto qualquer de r. Por simetria, $\overline{BP} = \overline{B'P}$ e $\overline{B'P'} = \overline{B'P'}$. Ora, pela Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned} \overline{AP'} + \overline{B'P'} &\geq \overline{AB'} \\ \overline{AP'} + \overline{BP'} &\geq \overline{AP} + \overline{B'P} \\ \overline{AP'} + \overline{BP'} &\geq \overline{AP} + \overline{BP} \end{aligned}$$

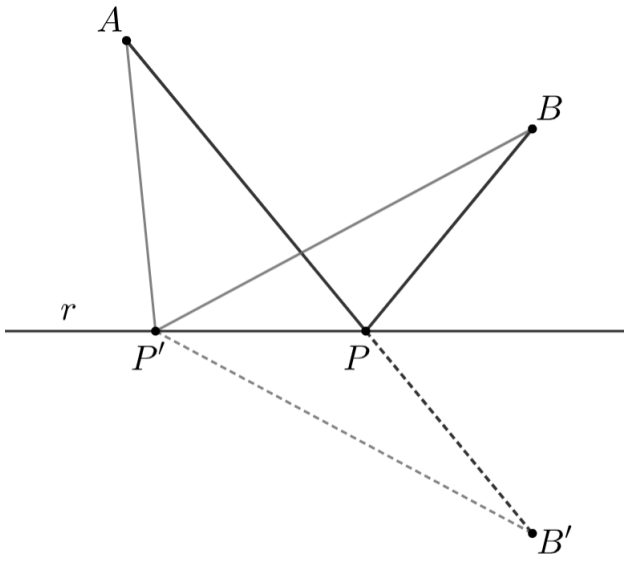


Figura 9: Aplica-se a Desigualdade Triangular aos pontos A, B' e P'.

Ou seja, qualquer caminho possível que o colhedor pode fazer tem comprimento maior ou igual a se ele seguir, em linha reta, de A até P e depois para B. Portanto, este último é o caminho mais curto que ele pode percorrer.

Problema 5.2.3. *A cabana de um lenhador fica no interior de uma península que tem a forma de um ângulo agudo. O lenhador tem que sair de sua cabana, andar até a praia de um dos lados da península, depois até a praia do outro, depois voltar para casa. Como ele deveria escolher o caminho mais curto?*

Solução. Sejam O a ponta da península, A o ponto onde está o lenhador, r e r' semirretas que representam as bordas da península, $B \in r$ e $B' \in r'$ pontos distintos de O e, por fim, C e C' os pontos simétricos a A em relação a r e r', respectivamente.

Por simetria, $\widehat{COB} = \widehat{BOA}$ e $\widehat{AOB'} = \widehat{B'OC'}$. Como $\widehat{BOB'}$ é agudo, então

$$\widehat{COC'} = \widehat{COB} + \widehat{BOA} + \widehat{AOB'} + \widehat{B'OC'} = 2 \cdot (\widehat{BOA} + \widehat{AOB'}) < 180^\circ$$

. Logo, CC' intersecta r e s em P e P', respectivamente.

Se B, B', C e C' não forem colineares, então, pelo Corolário 4.5.7, $\overline{CC'} < \overline{BC} + \overline{BB'} + \overline{B'C'}$.

Novamente por simetria, $\overline{CP} = \overline{AP}$, $\overline{C'P'} = \overline{AP'}$, $\overline{BC} = \overline{AB}$ e $\overline{B'C'} = \overline{AB'}$. Como $\overline{CC'} = \overline{CP} + \overline{PP'} + \overline{P'C'}$, então $\overline{AP} + \overline{PP'} + \overline{AP'} < \overline{AB} + \overline{BB'} + \overline{AB'}$.

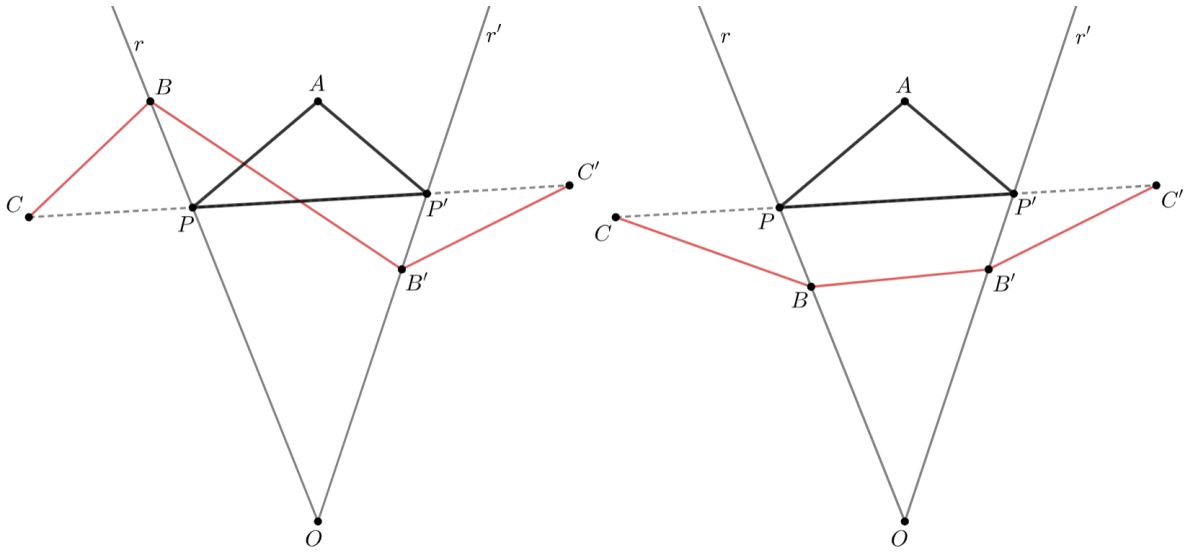


Figura 10: Os comprimentos dos caminhos poligonais $CBB'C'$ são iguais ao respectivos perímetros dos triângulos APP'.

Portanto, o menor caminho que o lenhador pode seguir ocorre quando $B = P$ e $B' = P'$, ou seja, o lenhador deve, em linha reta, sair do ponto A para o ponto P, depois seguir para o ponto P' e, finalmente, voltar para o ponto A.

Observe que, por construção, as retas r e r' são as mediatrizes dos pares A, C e A, C', respectivamente. Em particular, $\overline{AO} = \overline{OC} = \overline{OC'}$.

Problema 5.2.4. *Resolva o problema anterior supondo que a península do lenhador tem a forma de um ângulo obtuso.*

Solução. Sejam O, A, r, r', B e B' definidos como no problema anterior, exceto que r e r' formam um ângulo obtuso menor que 180° — pois não formaria uma península se contrário.

Note que pelo menos um dos ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{B'OA}$ é agudo. Sem perda de generalidade, suponha $\widehat{B'OA} < 90^\circ$. Seja C o pé da altura do ponto B em relação ao prolongamento da semirreta r'. Como $\widehat{AOC} > 90^\circ > \widehat{OCA}$, então, pela Proposição 4.5.2, $\overline{AC} > \overline{AO}$.

Como provado no Problema 4.5.8, segue que $\overline{AB}+\overline{AB'}+\overline{BB'} > 2\cdot\overline{AC} > 2\cdot\overline{AO}$.

Pela arbitrariedade de B e B', segue que o menor caminho que o lenhador pode fazer é ir até a ponta da península e depois voltar para a sua cabana.

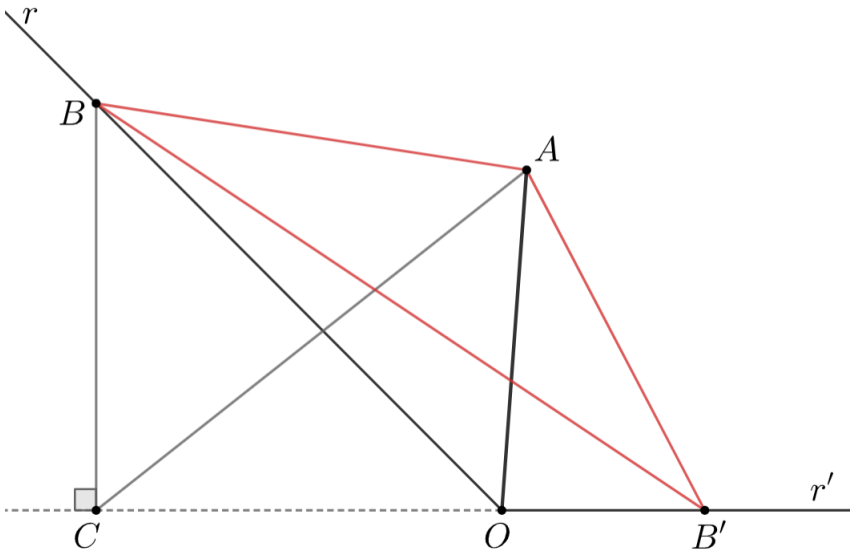


Figura 11: O menor caminho para o lenhador é ir, em linha reta, de A até O e depois retornar a A.

Comparando esse percurso com o Problema 5.2.3, note que, se o lenhador andar até a ponta da península aguda, pode-se aplicar a Desigualdade Triangular em OCC', obtendo, junto com $\overline{AO} = \overline{AC} = \overline{AC'}$, $2\cdot\overline{AO} > \overline{AP}+\overline{PP'}+\overline{AP'}$, como esperado.

Problema 5.2.5. *Uma formiga está pousada em um dos vértices de um cubo de madeira. Qual o menor caminho que ela pode seguir para chegar ao vértice oposto (suponha que ela pode andar por qualquer face)?*

Solução. Suponha que a formiga está no vértice P do cubo e quer chegar no vértice oposto Q. Considere a planificação do cubo.

Pela Desigualdade Triangular, os seis (dois para cada face adjacente a P) melhores caminhos que a formiga pode percorrer são como os da Figura 12.

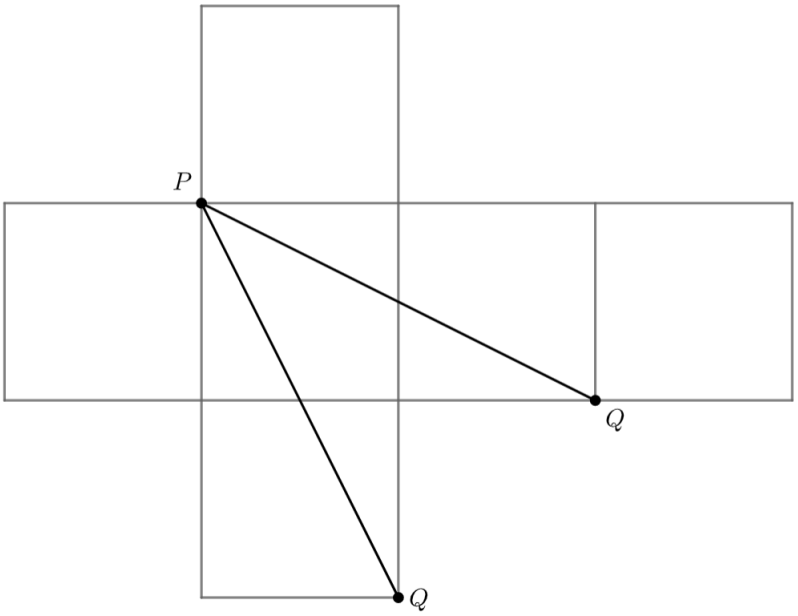


Figura 12: Na planificação do cubo, o caminho ótimo da formiga é um segmento de reta.

Problema 5.2.6. *Uma formiga está pousada num ponto da superfície externa de um copo cilíndrico. Ela precisa andar até outro ponto situado na superfície interna do copo. Encontre o menor caminho possível. (Despreze a espessura do copo.)*

Solução. Sejam P e Q o ponto externo onde a formiga repousa e o interno para onde ela precisa andar respectivamente. Obviamente, seria perda de tempo para a formiga andar para baixo na superfície externa do copo, então o seu fundo pode ser desprezado. Considere a planificação da lateral do copo e sua reflexão em relação a circunferência superior planificada.

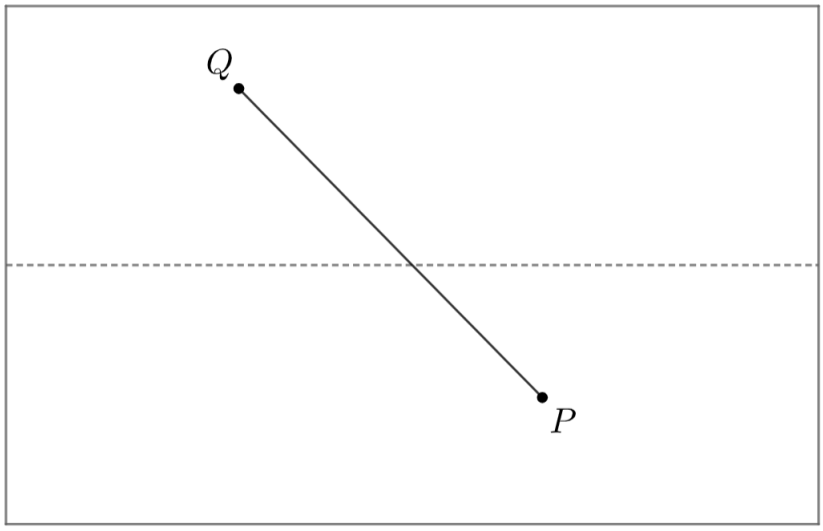


Figura 13: O retângulo inferior é a planificação da superfície externa do copo e o retângulo superior, da superfície interna.

Pela Desigualdade Triangular, o caminho representado pelo segmento PQ na planificação acima é o que a formiga deve preferir.

Compare o problema acima com o Problema 5.2.2. Como a espessura do copo está sendo desprezada, pode-se assumir que o ponto Q está no mesmo retângulo que P. O problema agora pode ser interpretado como se a formiga quisesse sair do ponto P, ir até a borda do copo e voltar para o ponto Q na superfície externa.

Problema 5.2.7. *Dois vilarejos estão em margens opostas de um rio. As margens são retas paralelas e vai ser construída uma ponte perpendicular às margens. Onde a ponte deve ser construída para que o caminho entre os dois vilarejos seja o mais curto possível?*

Solução. Sejam A e B os vilarejos, d a distância entre as margens do rio, e A' e B' pontos que distam d de A e B, respectivamente, na direção perpendicular ao rio e em sentido para ele como mostra a figura.

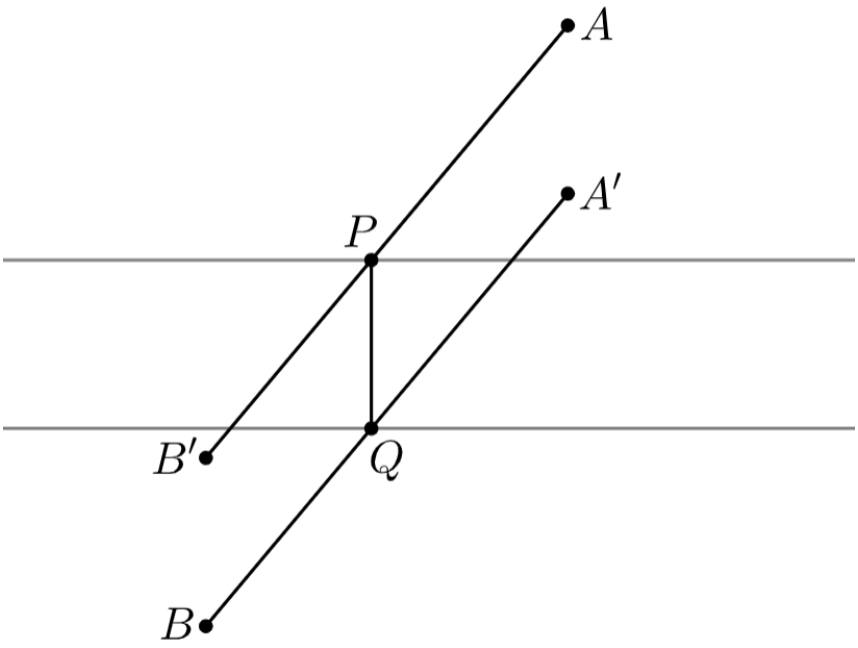


Figura 14: A ponte PQ é construída através da ligação dos pontos de interseção dos segmentos AB' e $A'B$ com as margens do rio.

Se a ponte fosse construída em quaisquer outros pontos P' e Q' das margens, ter-se-ía, pela Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned} \overline{AP'}+\overline{P'Q'}+\overline{BQ'} &= \overline{AP'}+\overline{PQ}+\overline{B'P'} \\ &> \overline{PQ}+\overline{AB'} \\ &> \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{B'P} \\ &> \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}. \end{aligned}$$

Logo, a ponte deve ser construída conforme a figura.

5.3 Desigualdade MA-MG

Os seguintes problemas buscam minimizar ou maximizar uma certa grandeza X que está, de alguma forma, relacionada com uma outra grandeza Y com medida fixada. Para resolver esses problemas, devemos, primeiramente, identificar variáveis $v_1, ..., v_n$ pelas quais as medidas dessas grandezas podem ser escritas na forma de funções. Ou seja, existem funções f_1 e f_2 tais que $x = f_1(v_1, ..., v_n)$ e $y = f_2(v_1, ..., v_n)$ são os valores das medidas de X e Y, respectivamente. O objetivo, então, passa a ser encontrar os valores dessas variáveis a fim de que X seja mínimo ou máximo para um dado valor y_0 fixado de Y.

O segundo passo é encontrar termos $t_1, ..., t_m$ que envolvam as variáveis $v_1, ..., v_n$, cujos valores numéricos sejam sempre positivos e que exista uma solução para o sistema de equações $t_1 = ... = t_m$. Além disso, essas expressões devem ser tais que, aplicando a Desigualdade MA-MG aos termos $t_1, ..., t_m$, obtenha-se expressões que dependam apenas dos valores das medidas de X e Y nos dois membros da desigualdade. Ou seja, devem existir funções g_1 e g_2 tais que

$$g_1(x) = \frac{t_1 + ... + t_m}{m} \geq \sqrt[m]{t_1 \cdot ... \cdot t_m} = g_2(y),$$

se se quer minimizar X e

$$g_2(y) = \frac{t_1 + ... + t_m}{m} \geq \sqrt[m]{t_1 \cdot ... \cdot t_m} = g_1(x),$$

se se quer maximizar X. No primeiro caso, diz-se que $g_2(y_0)$ é cota inferior do conjunto $g_1 \circ f_1 \circ f_2^{-1}(y_0)$, já no segundo, cota superior.

Por fim, X será mínimo ou máximo quando valer a igualdade $g_1(x) = g_2(y_0)$, que, segundo o Teorema 4.7.6, ocorre se, e somente se, $t_1 = ... = t_m$. A solução desse sistema de equações entrega os valores procurados das variáveis $v_1, ..., v_n$.

Para mais problemas semelhantes, utilizando ainda outras desigualdades interessantes, ver (COSTA, 2013) e (OBMEP).

Problema 5.3.1. *Quer-se fechar uma certa área retangular de uma fazenda com uma cerca. Qual é o perímetro mínimo da cerca? Quais são as dimensões que minimizam a quantidade de cerca a ser utilizada?*

Solução. Sejam x e y as dimensões do cercado, $A = xy$ a sua área e $2p = 2(x+y)$ o perímetro da cerca.

Aplicando a Desigualdade MA-MG, tem-se

$$\frac{p}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{A}$$

Logo, $2p$ será mínimo quando $x = y$.

Portanto, o perímetro mínimo do cercado é $4\sqrt{A}$, que ocorre quando este tem formato quadrado.

Compare a solução acima com a do Problema 5.1.7.

Problema 5.3.2 (ProfMat)**.** *Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

Solução. Sejam x e y as dimensões do cercado em metros onde $x+2y=40$. Então quer se encontrar os valores de x e y de modo que $A=xy$ seja máximo.

Aplicando a Desigualdade MA-MG em x e y, tem-se

$$20=\frac{40}{2}=\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{2xy}=\sqrt{2A}$$

Logo, o valor máximo de A é 200 m^2 e isso ocorre quando $x=2y$. Substituindo essa igualdade em $x+2y=40$, tem-se $x=20$ e $y=10$.

Portanto, o cercado tem área máxima quando as suas dimensões são 20 (na direção ortogonal ao muro) e 40 (na direção paralela ao muro) metros.

Problema 5.3.3. *Dentre todos os triângulos isoperimétricos, qual deles tem a maior área?*

Solução. Para este problema, utilizaremos o bastante conhecido Teorema de Herão, que diz que, em todo triângulo de perímetro $2p$ e lados a, b e c, vale

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde A é a área do triângulo.

Logo, quer-se encontrar os valores de a, b e c a fim de que A seja máximo para dado $2p=a+b+c$.

Aplicando a Desigualdade MA-MG nos termos $p-a$, $p-b$ e $p-c$, tem-se

$$\frac{2p}{3}=\frac{3p-p}{3}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt[3]{\frac{A^2}{p}}$$

Logo, A é máximo quando $p-a=p-b=p-c$, ou seja, $a=b=c$.

Portanto, dentre todos os triângulos isoperimétricos, o equilátero é o que tem a maior área.

Problema 5.3.4. *Dispõe-se de uma quantidade fixa, em área, de papelão para se fazer uma caixa fechada em formato de paralelepípedo. Quais devem ser as dimensões da caixa a fim de maximizar o seu volume? A espessura da caixa e quaisquer tipos de desperdício de papelão devem ser desprezados.*

Solução. Sejam x, y e z as dimensões da caixa, A a sua área e V o seu volume. Então $A=2\cdot(xy+xz+yz)$ e $V=xyz$.

Aplicando a Desigualdade MA-MG em xy, xz e yz, tem-se

$$\frac{A}{6} = \frac{xy+xz+yz}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{V^2}$$

Logo, V é máximo se vale $xy = xz = yz$, ou seja, quando $x = y = z$.

Portanto, a caixa terá volume máximo se ela tiver um formato cúbico.

Problema 5.3.5. *Resolva agora o problema anterior considerando que a caixa não tem tampa superior.*

Solução. Novamente, sejam x, y e z as dimensões da caixa, A a sua área e V o seu volume. Então $A = xy + 2 \cdot (xz + yz)$ e $V = xyz$.

Aplicando a Desigualdade MA-MG em xy, $2xz$ e $2yz$, tem-se

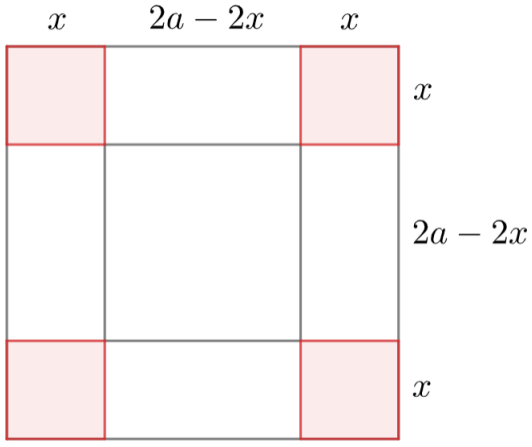
$$\frac{A}{3} = \frac{xy+2xz+2yz}{3} \geq \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{4V^2}$$

Logo, V é máximo se vale $xy = 2xz = 2yz$, ou seja, quando $x = y = 2z$.

Portanto, a caixa aberta que maximiza o volume fixado sua área tem base quadrada e altura medindo metade dos lados da sua base.

Compare os dois últimos problemas e observe como a retirada da tampa da caixa alterou as suas dimensões ótimas. Perceba também que a caixa do Problema 5.3.5 é justamente a metade inferior da caixa do Problema 5.3.4 quando esta tem área igual a $2A$, ou seja, aquela tem o formato da metade inferior de um cubo.

Problema 5.3.6. *Numa folha de cartolina quadrada de lados $2a$ retira-se quadrados de lado $x < a$ de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado $2a - 2x$ e altura x. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?*



Solução. Note que o volume da caixa é $V = x(2a - 2x)^2$.

Aplicando a Desigualdade MA-MG nos termos $4x$, $2a-2x$ e $2a-2x$, tem-se

$$\frac{4a}{3} = \frac{4x+(2a-2x)+(2a-2x)}{3} \geq \sqrt[3]{4x(2a-2x)^2} = \sqrt[3]{4V}$$

Logo, V é máximo quando $4x = 2a-2x = 2a-2x$, ou seja, quando $x = \frac{a}{3}$.

Compare o Problema 5.3.5 com esse último. Embora ambos procurem as dimensões de uma caixa aberta a fim de maximizar o seu volume, há desperdício de material na segunda situação. Na primeira situação, a área da caixa é constante, diferentemente do que ocorre na segunda.

Problema 5.3.7. *Resolva o problema anterior generalizando-o para uma cartolina retangular de lados $2a$ e $2b$.*

Solução. Note que o volume da caixa é $V = x(2a-2x)(2b-2x)$.

Não é possível aplicar a Desigualdade MA-MG diretamente em $4x$, $2a-2x$ e $2b-2x$, pois há duas equações do 1º grau, $4x = 2a-2x$ e $4x = 2b-2x$, e apenas uma incógnita. Logo, é necessário fazer algumas manipulações. Considere os reais positivos α e β.

Aplicando a Desigualdade MA-MG nos termos x, $\alpha(2a-2x)$ e $\beta(2b-2x)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{x+\alpha(2a-2x)+\beta(2b-2x)}{3} &\geq \sqrt[3]{x\cdot\alpha(2a-2x)\cdot\beta(2b-2x)} \\
\frac{(1-2\alpha-2\beta)x+2\alpha a+2\beta b}{3} &\geq \sqrt[3]{\alpha\beta V}
\end{aligned}$$

Como a cota superior independe de x, então $1-2\alpha-2\beta = 0$ $(*)$. Além disso, V será máximo quando $x = \alpha(2a-2x) = \beta(2b-2x)$, ou seja, quando $2\alpha = \frac{x}{a-x}$ e $2\beta = \frac{x}{b-x}$. Substituindo isso em $(*)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
1-\frac{x}{a-x}-\frac{x}{b-x} &= 0 \\
\frac{x(a-x)+x(b-x)}{(a-x)(b-x)} &= 1 \\
(a+b)x-2x^2 &= ab-(a+b)x+x^2 \\
3x^2-2(a+b)x+ab &= 0 \\
x &= \frac{2(a+b)\pm\sqrt{4(a+b)^2-12ab}}{6} \\
x &= \frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}
\end{aligned}$$

Como $x < a, b$, V será máximo quando $x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}$.

Note que, na situação específica em que a cartolina tem um formato quadrático, tem-se $x = \frac{a}{3}$, como provado no problema anterior.

Problema 5.3.8. *Gostar-se-ia de fabricar uma lata de formato cilíndrico com um dado volume. Quais devem ser as dimensões dessa lata a fim de minimizar o gasto de material para fabricá-la?*

Solução. Sejam r o raio da base da lata, h a sua altura, V o seu volume e A a sua área. Então $V = \pi r^2 h$ e $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Aplicando a Desigualdade MA-MG nos termos $2\pi r^2$, πrh e πrh, tem-se

$$\frac{A}{3} = \frac{2\pi r^2 + \pi rh + \pi rh}{3} \geq \sqrt[3]{(2\pi r^2)(\pi rh)(\pi rh)} = \sqrt[3]{2\pi(\pi r^2 h)^2} = \sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Logo, A é mínimo quando $2\pi r^2 = \pi rh = \pi rh$, ou seja, quando $2r = h$.

Portanto, a lata cilíndrica que menos gasta material para ser produzida é a que tem formato cilíndrico equilátero.

Problema 5.3.9. *Resolva agora o problema anterior considerando que a lata não tem tampa superior.*

Solução. Novamente, sejam r o raio da base da lata, h a sua altura, V o seu volume e A a sua área. Então $V = \pi r^2 h$ e $A = \pi r^2 + 2\pi rh$.

Aplicando a Desigualdade MA-MG nos termos πr^2, πrh e πrh, tem-se

$$\frac{A}{3} = \frac{\pi r^2 + \pi rh + \pi rh}{3} \geq \sqrt[3]{(\pi r^2)(\pi rh)(\pi rh)} = \sqrt[3]{2\pi(\pi r^2 h)^2} = \sqrt[3]{\pi V^2}$$

Logo, A é mínimo quando $\pi r^2 = \pi rh = \pi rh$, ou seja, quando $r = h$.

Portanto, a lata cilíndrica sem tampa que menos gasta material para ser produzida é a que tem altura igual a metade do seu diâmetro.

Mais uma vez, observe como a retirada da tampa da lata alterou as suas dimensões ótimas. A lata obtida no Problema 5.3.9 é a metade inferior da lata do Problema 5.3.8 quando esta tem volume igual a $2V$.

5.4 Método das Derivadas

Naturalmente, este método de otimização de uma grandeza consiste em interpretar a medida dessa grandeza como uma função real de uma variável e depois aplicar o método estudado na Subseção 4.8.

Problema 5.4.1. *Resolva através do método das derivadas os problemas abaixo.*

a) *Problema 5.2.2.*

b) *Problema 5.2.7.*

c) *Problema 5.3.6.*

d) *Problema 5.3.7.*

e) *Problema 5.3.8.*

f) *Problema 5.3.9.*

Solução.

a) Considere o plano cartesiano e suponha que os pontos iniciais e finais, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ respectivamente, do colhedor de cogumelos está no primeiro quadrante. Então $y_A, y_B > 0$. O eixo das abscissas representa a estrada. Logo, quer-se encontrar o ponto $P = (x, 0)$ que minimiza $\overline{AP} + \overline{BP}$.

Seja a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} \end{array}$$

Note que $f(x) = \overline{AP} + \overline{BP}$. Então quer-se encontrar x tal que $f(x)$ seja mínimo.

Perceba também que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \sqrt{0^2 + y_A^2} + \sqrt{0^2 + y_B^2} = y_A + y_B$, onde a igualdade ocorre apenas se $x_A = x_B = x$. Logo, P é a interseção do segmento $A'B$ com o eixo das abscissas, onde A' é o ponto simétrico a A em relação a esse mesmo eixo.

Suponha agora que $x_A > x_B$. Como $f'(x) = \dfrac{x - x_A}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2}} + \dfrac{x - x_B}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$, então, $\forall x \geq x_A$, $f'(x) > 0$ e, portanto, f é crescente em (x_A, ∞), e ainda, $\forall x \leq x_B$, $f'(x) < 0$, implicando em f ser decrescente em $(-\infty, x_B)$. Tome, então, $x \in (x_B, x_A)$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) = \dfrac{x - x_A}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2}} + \dfrac{x - x_B}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} & \geq & 0 \\ \dfrac{x - x_A}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2}} & \geq & \dfrac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \\ \dfrac{(x_A - x)^2}{(x_A - x)^2 + y_A^2} & \leq & \dfrac{(x_B - x)^2}{(x_B - x)^2 + y_B^2} \\ (x_A - x)^2 \left[(x_B - x)^2 + y_B^2\right] & \leq & (x_B - x)^2 \left[(x_A - x)^2 + y_A^2\right] \\ (x_A - x)^2 y_B^2 & \leq & (x_B - x)^2 y_A^2 \\ (x_A - x) y_B & \leq & (x - x_B) y_A \\ x_A y_B + x_B y_A & \leq & (y_A + y_B) x \\ x & \geq & \dfrac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B} \end{array}$$

Logo, $f'(x) < 0$ se $x \in \left(-\infty, \dfrac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B}\right)$, implicando em f ser decrescente nesse intervalo, e ainda $f'(x) > 0$ se $x \in \left(\dfrac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B}, \infty\right)$, tornando f crescente nesse intervalo.

Além disso, como $f'\left(\dfrac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B}\right) = 0$, então $f(x)$ é mínimo nesse ponto.

Ora, note que

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B} \\ x_A y_B + x_B y_A &= (y_A + y_B)x \\ (x_A - x)y_B &= (x - x_B)y_A \\ \overline{A_0P} \cdot \overline{BB_0} &= \overline{B_0P} \cdot \overline{AA_0} \\ \frac{\overline{A_0P}}{\overline{B_0P}} &= \frac{\overline{AA_0}}{\overline{BB_0}}, \end{aligned}$$

onde A_0 e B_0 são os pés das retas perpendiculares ao eixo das abscissas e que passam pelos pontos A e B respectivamente.

Logo, $\triangle APA_0 \sim \triangle BPB_0$, em particular, $\widehat{A_0PA'} = \widehat{APA_0} = \widehat{B_0PB}$. Portanto, $P \in A'B$, como era esperado.

O mesmo resultado seguiria supondo que $x_A < x_B$, pois o comprimento do caminho $A \to P \to B$ é igual ao de $B \to P \to A$.

b) Observe que o caminho mais curto de um vilarejo a qualquer ponto da margem do rio é sempre uma linha reta. Além disso, o comprimento da ponte é sempre o mesmo independente de onde ela está situada.

É óbvio ver que, se o segmento que passa pelos dois vilarejos é perpendicular às margens do rio, então a ponte deve ser colocada sobre esse segmento. Suponha então que os vilarejos não estão numa reta perpendicular às margens do rio. Pode-se representar as margens do rio e os dois vilarejos como retas paralelas e pontos distintos no plano cartesiano respectivamente. Sejam $y = 1$ e $y = 0$ as equações das margens r_1 e r_2 do rio, $V_1 = (x_1, y_1)$ e $V_2 = (0, y_2)$ as coordenadas dos vilarejos, onde $y_1 > 1$ e $y_2 < 0 < x_1$ (o caso em que $x_1 < 0$ segue por analogia), e $P = (x, 1)$ e $Q = (x, 0)$ as coordenadas das extremidades da ponte (onde ela toca as margens). Note, então, que a ponte tem comprimento igual a 1.

Logo, se a ponte for colocada num ponto P_0 de r_1 – consequentemente, a outra extremidade estará no ponto Q_0 de r_1, que tem mesma abscissa que P_0—, então o comprimento do menor caminho entre os dois vilarejos é $\overline{V_1P_0} + \overline{V_2Q_0} + 1$. Então, sendo

$$f(x) = \overline{V_1P} + \overline{V_2Q} + 1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - 1)^2} + \sqrt{x^2 + y_2^2} + 1,$$

quer-se encontrar x tal que $f(x)$ seja mínimo.

Ora, $f'(x) = \dfrac{x - x_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - 1)^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y_2^2}}$. Então, se $x \leq 0$, $f'(x) < 0$, e, se $x \geq x_1$, $f'(x) > 0$. Logo, f decresce no intervalo $(-\infty, 0]$ e cresce em $[x_1, \infty)$.

Suponha, então, que $x \in (0, x_1)$. Segue que

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - 1)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_2^2}} &\geq 0 \\ \frac{(x_1 - x)^2}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - 1)^2} &\leq \frac{x^2}{x^2 + y_2^2} \\ (x_1 - x)^2 (x^2 + y_2^2) &\leq x^2 [(x_1 - x)^2 + (y_1 - 1)^2] \\ (x_1 - x)^2 y_2^2 &\leq x^2 (y_1 - 1)^2 \\ (x - x_1) y_2 &\leq x(y_1 - 1) \\ (y_2 - y_1 + 1)x &\leq x_1 y_2 \\ x &\geq \frac{x_1 y_2}{y_2 - y_1 + 1} \end{aligned}$$

Logo, $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, \frac{x_1 y_2}{y_2 - y_1 + 1})$, implicando em f ser decrescente nesse intervalo, e ainda $f'(x) > 0$ se $x \in (\frac{x_1 y_2}{y_2 - y_1 + 1}, \infty)$, tornando f crescente nesse intervalo. Além disso, $f'\left(\frac{x_1 y_2}{y_2 - y_1 + 1}\right) = 0$, então $f(x)$ é mínimo nesse ponto.

Portanto, representando a ponte no mesmo plano cartesiano, a posição ótima dela é o segmento que liga os ponto $\left(\frac{x_1 y_2}{y_2 - y_1 + 1}, 0\right)$ e $\left(\frac{x_1 y_2}{y_2 - y_1 + 1}, 1\right)$. Ora, note — por semelhança de triângulos, por exemplo — que esses pontos são justamente as interseções de r_1 com a reta que passa pelos pontos V_1 e $(0, y_2 + 1)$ e de r_2 com a reta que passa pelos pontos V_2 e $(x_1, y_1 - 1)$, respectivamente, como esperado.

c) Seja f a função do volume dessa caixa. Note, então, que o domínio de f é o intervalo $(0, a)$. Logo, $f(x) = x(2a - 2x)^2$. Calculando a derivada de f, tem-se

$$f'(x) = (2a - 2x)^2 - 8x(a - x) = (4a - 12x)(a - x).$$

Como $a - x > 0$, então $f'(x) < 0$ se $4a - 12x < 0$, *i. e.*, quando $x > \frac{a}{3}$. Da mesma forma, $f'(x) > 0$ se $x < \frac{a}{3}$. Então f cresce no intervalo $\left(0, \frac{a}{3}\right)$ e decresce em $\left(\frac{a}{3}, a\right)$.

Logo, o volume da caixa será máximo quando $x = \frac{a}{3}$.

d) Sem perda de generalidade, tome $a \leq b$. Mais uma vez, sendo f a função do volume dessa caixa, o seu domínio é o intervalo $(0, a)$. Logo, $f(x) = x(2a - 2x)(2b - 2x)$. Calculando a derivada de f, tem-se

$$f'(x) = (2a - 2x)(2b - 2x) - 2x(2b - 2x) - 2x(2a - 2x) = 12x^2 - 8(a + b)x + 4ab.$$

Logo, o gráfico de f' (tomando como domínio toda a reta real) é uma parábola com

concavidade para cima. Note que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x &= \frac{8(a+b) \pm \sqrt{64(a+b)^2 - 192ab}}{24} \\ x &= \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 3ab}}{3} \\ x &= \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3}. \end{aligned}$$

Como $x \in (0,a)$, então f é crescente em $\left(0, \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}\right)$ e decresce em $\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}, a\right)$.

Portanto, o volume da caixa é máximo quando $x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}$, como esperado.

e) Sejam V o volume da lata, r o raio da sua base, h a sua altura e f a função da sua área em relação a r com domínio $(0,\infty)$. Então $V = \pi r^2 h$ e $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Dessas duas equações, segue que

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Note que

$$\begin{aligned} f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} &\geq 0 \\ r^3 &\geq \frac{V}{2\pi} \\ r &\geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Logo, f decresce em $\left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$ e cresce em $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \infty\right)$.

Portanto, a área é mínima quando $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{r^2 h}{2}}$, ou seja, quando $2r = h$, como esperado.

f) Mais uma vez, sejam V o volume da lata, r o raio da sua base, h a sua altura e f a função da sua área em relação a r com domínio $(0,\infty)$. Então $V = \pi r^2 h$ e $f(r) = \pi r^2 + 2\pi rh$. Dessas duas equações, segue que

$$f(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Note que

$$\begin{aligned} f'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} &\geq 0 \\ r^3 &\geq \frac{V}{\pi} \\ r &\geq \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}. \end{aligned}$$

Logo, f decresce em $\left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$ e cresce em $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, \infty\right)$.

Portanto, a área é mínima quando $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{r^2 h}$, ou seja, quando $r = h$, como esperado.

6 A Matemática das Abelhas

Nesta seção, apresentam-se alguns conceitos geométricos presentes na polinização de finitas flores pela espécie *Bombus terrestris* e no formato dos alvéolos das colmeias.

6.1 A matemática da polinização das abelhas *Bombus terrestris*

Como já foi dito na Seção 4, um estudo de LIHOREAU et al. (2010) descobriu que as abelhas da espécie *Bombus terrestris* buscam o melhor caminho para polinizar um conjunto finito de flores. Esse experimento remete ao clássico problema do Caixeiro Viajante, onde quer se descobrir a rota mais curta que um caixeiro viajante pode percorrer para visitar um certo número de cidades passando por todas elas exatamente uma única vez. Note que, como há um número finito de cidades (e de flores), então há também um número finito de rotas possíveis. Por consequência, de fato existe uma rota mínima, como também existe uma rota máxima. Porém, a unicidade dessa rota não é geralmente verdade, como será observado na Subseção 7.1.

Definição 6.1.1. Sejam $V_1, ..., V_n$ pontos distintos no plano. O **caminho poligonal** $V_1...V_n$ é uma curva composta pelos segmentos $V_1V_2, ..., V_{n-1}V_n$ em sequência.

Observe o abuso de notação na definição acima. De fato, o caminho poligonal $V_1...V_n$ é uma coisa distinta do polígono $V_1...V_n$. Como foi assumido até agora, quando não houver especificação, $V_1...V_n$ denotará o polígono de vértices $V_1, ..., V_n$.

Como, no plano euclidiano, o menor percurso entre dois pontos é um segmento de reta, se uma colmeia poliniza n flores, visitando todas uma única vez, através de um percurso ótimo, elas seguem por um caminho poligonal cujos vértices são as flores visitadas em sequência. Como as flores são distintas, cada vértice é extremidade de, no máximo, dois segmentos.

Definição 6.1.2. Diz-se que dois ou mais lados de um polígono são consecutivos se eles formam um **caminho poligonal**. Os vértices desses lados são chamados de vértices consecutivos.

Definição 6.1.3. Um **polígono é simples** se para quaisquer dois lados não consecutivos a interseção entre eles é vazia.

Supondo que as abelhas começam e terminam o seu percurso na mesma flor, então o caminho poligonal percorrido por elas é dito fechado. Denote por $F_1...F_n$ esse caminho poligonal fechado, onde F_i é a i-ésima flor a ser visitada e F_1 é tanto a flor de partida quanto a de chegada. Note que a interseção de dois segmentos distintos de $F_1...F_n$ pode ser um segmento de reta no caso em que as suas extremidades são colineares e que pelo menos uma delas é interior do outro segmento. Se quaisquer segmentos distintos se intersectam apenas em um único ponto, então $F_1...F_n$ é um polígono. Em particular, se todo ponto de interseção de dois segmentos de $F_1...F_n$ é exatamente o vértice em comum deles, *i. e.*, dois segmentos se intersectam se, e somente se, eles são consecutivos, então $F_1...F_n$ é um polígono simples.

Abaixo seguem algumas definições e resultados importantes para os problemas sobre a otimização do percurso de polinização das abelhas que serão tratados na Subseção 7.1.

Definição 6.1.4. A união de um polígono com o seu interior é chamada de **região poligonal** definida por esse polígono.

Definição 6.1.5. Chama-se um polígono de **polígono convexo** se, para quaisquer dois pontos distintos seus, o segmento definido por eles está incluso na região poligonal determinada por ele.

Definição 6.1.6. Diz-se que uma região qualquer do plano é uma **região convexa** se, para quaisquer dois pontos distintos seus, o segmento definido por eles está incluso na região.

Note a diferença das definições de convexidade para um polígono e uma região qualquer do plano euclidiano. Todo polígono, inclusive convexo, não é uma região convexa. Basta observar qualquer segmento cujas extremidades estão no interior de dois lados distintos seus.

Definição 6.1.7. O **fecho convexo** de um conjunto de pontos do plano é a menor região convexa que contém esse conjunto, *i. e.*, é a interseção de todas as regiões convexas que contêm o conjunto.

Proposição 6.1.8. *Sejam $n \geq 3$ e $P_1, ..., P_n$ pontos não-colineares do plano. Prove que o fecho desses pontos é uma região poligonal tal que os vértices do polígono que a define são $P_{k_1}, ..., P_{k_m}$, onde $k_1, ..., k_m \in [n]$.*

A proposição segue por indução em n.

Da proposição acima, decorre que o caminho ótimo percorrido pelas abelhas na polinização de n flores está contido numa região poligonal cujos vértices são $m \leq n$ dessas flores. O polígono que define esse fecho convexo será chamado doravante de fronteira.

6.2 A matemática dos alvéolos

Como visto na Seção 4, HALES (2001) provou que o hexágono regular é a curva fechada com a menor área dentre as isoperimétricas que conseguem ladrilhar o plano. Essa prova é demasiadamente complexa para este trabalho, então será visto aqui uma demonstração incompleta através de três problemas intermediários.

Problema 6.2.1. *Quais polígonos regulares conseguem ladrilhar o plano?*

Solução. Primeiramente, note que apenas o triângulo equilátero e o quadrado conseguem ladrilhar o plano sem ter necessariamente todos os lados de um polígono coincidentes com os lados de outros polígonos.

De fato, suponha o contrário, *i. e.*, $\exists n > 4$ tal que o n-gono regular ladrilha o plano sem ter necessariamente todos os lados de todos os polígonos coincidindo com o lado de outros

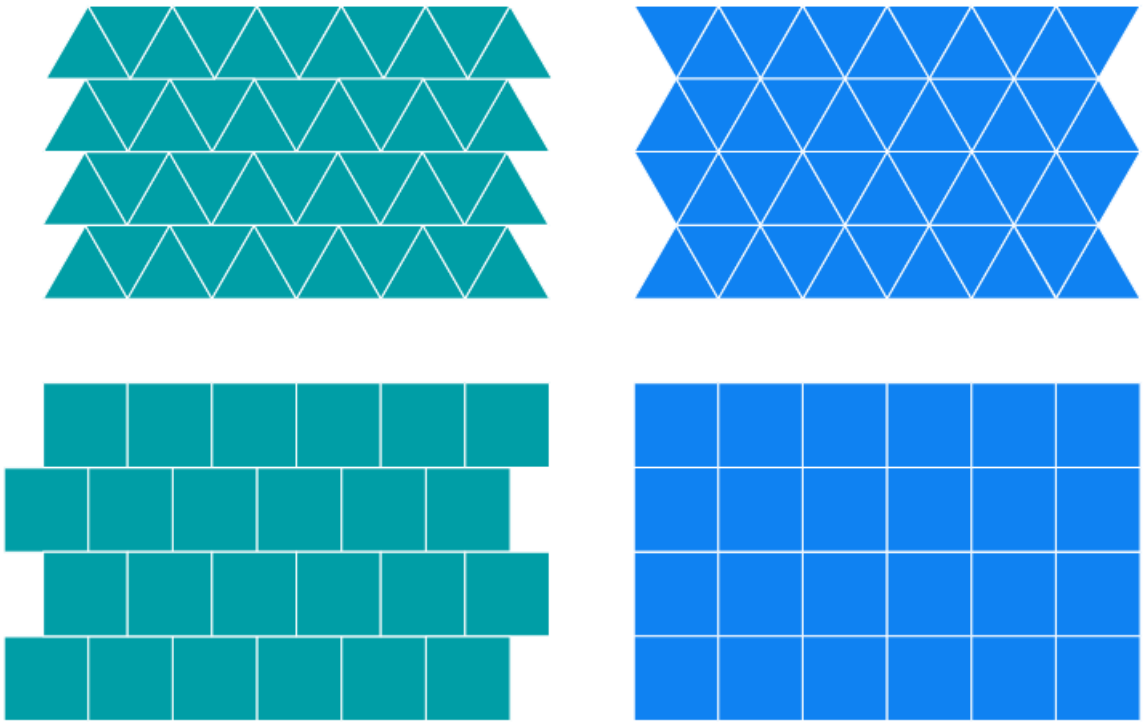


Figura 15: À esquerda, os lados dos polígonos não são coincidentes com os lados dos outros, diferentemente do que ocorre no ladrilhamento à direita.

polígonos. Logo, existe um ponto no plano interior a um lado de um n-gono e vértice de outros. Seja $k+1$ o número de ângulos formados nesse ponto. Como ele é interior de um lado de um n-gono, segue que um desses ângulos é raso. Logo, a soma dos demais também é um ângulo raso. Temos, então, $180^\circ = k \cdot \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} > k \cdot \dfrac{(4-2)\cdot 180^\circ}{4} = 90^\circ \cdot k$, implicando em $2 > k = 1$ e ainda em $180^\circ = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow \dfrac{n-2}{n} = 1$, um absurdo.

Tome agora um n-gono regular qualquer capaz de ladrilhar o plano tal que cada vértice de um n-gono pertence ao lado de outro se, e somente se, aquele também for vértice deste. Dessa forma, segue que $m \cdot \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ$, onde m é o número de n-gonos que compartilham um mesmo vértice. Então $m = \dfrac{2n}{n-2} = \dfrac{2n-4+4}{n-2} = \dfrac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \dfrac{4}{n-2}$. Como m é um número inteiro positivo, $n-2$ deve ser igual à 1, 2 ou 4, *i. e.*, $n \in 3,4,6$.

Conclusão, apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono, dentre os polígonos regulares, conseguem ladrilhar o plano.

Lembre que uma circunferência está inscrita num polígono se todos os lados dele são tangentes a ela. Além disso, diz-se que uma circunferência circunscreve um polígono se ela contém todos os vértices dele. Embora não seja verdade que todos os polígonos são inscritos ou circunscritos em alguma circunferência, isso é sempre válido quando eles são regulares. Não apenas isso, mas os centros dessas circunferências (chamados de incentro e circuncentro) são coincidentes. Por fim, a circunferência inscrita num polígono regular o tange nos pontos médios de seus lados. Para ver esses conceitos com mais detalhes, além de uma demonstração para a

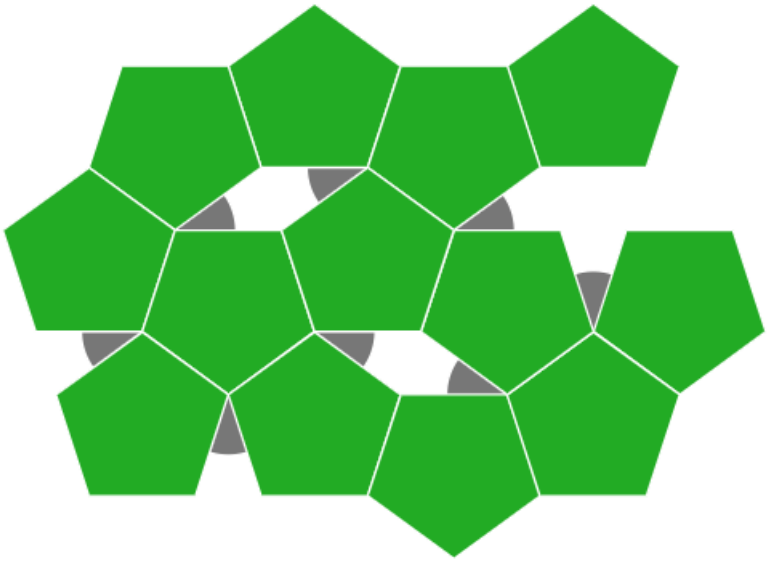


Figura 16: Pentágonos regulares não conseguem ladrilhar o plano. Os ângulos marcados têm medida igual a 36°.

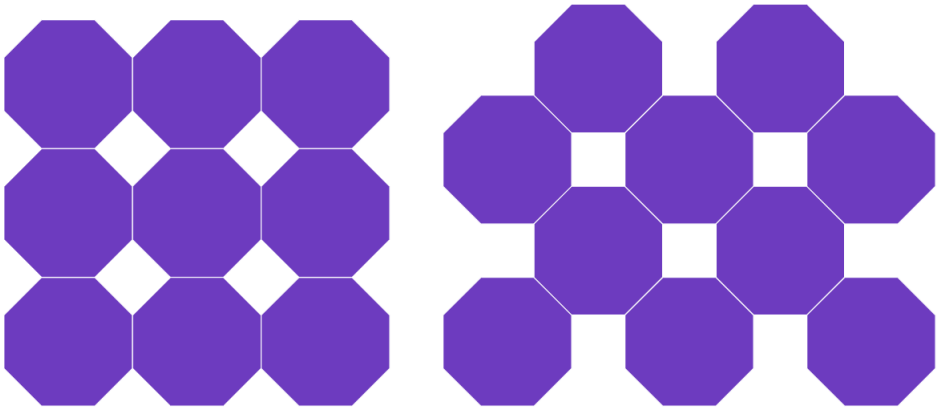


Figura 17: Octógonos deixam espaços na forma de quadrados na tentativa de ladrilhar o plano.

última proposição, consultar a Aula 6 de (SANTOS e VIGLIONI, 2011).

Essas observações foram necessárias para a apresentação de algumas definições que serão importantes para enunciar e resolver alguns problemas.

Definição 6.2.2. O **centro de um polígono regular** é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita nesse polígono.

Definição 6.2.3. *Um **apótema** de um polígono regular é um segmento cujas extremidades são o centro do polígono e o ponto médio de um de seus lados.*

Observe que os apótemas são raios da circunferência inscrita no polígono regular. Além disso, eles coincidem com as alturas dos triângulos isósceles congruentes que dividem o polígono.

Problema 6.2.4. *Prove que a área de um n-gono regular é igual ao produto do seu semiperímetro e da medida dos seus apótemas.*

Solução. Sejam P_n um n-gono regular, A a sua área, p o seu semiperímetro e l e a as medidas dos seus lados e dos seus apótemas, respectivamente. Logo, $2p = n \cdot l$. Quer-se provar que $A = p \cdot a$.

Note que P_n pode ser dividido em n triângulos isósceles congruentes cujas bases são os lados de P_n e o vértice oposto dessas bases é o centro do n-gono. De fato, são isósceles e congruentes, pois os dois outros lados são, por construção, raios da circunferência que contém os vértices de P_n. Logo, cada um desses n triângulos tem área igual a A_t e a área de P_n é igual a soma das áreas desses triângulos, *i. e.*, $A = n \cdot A_t$.

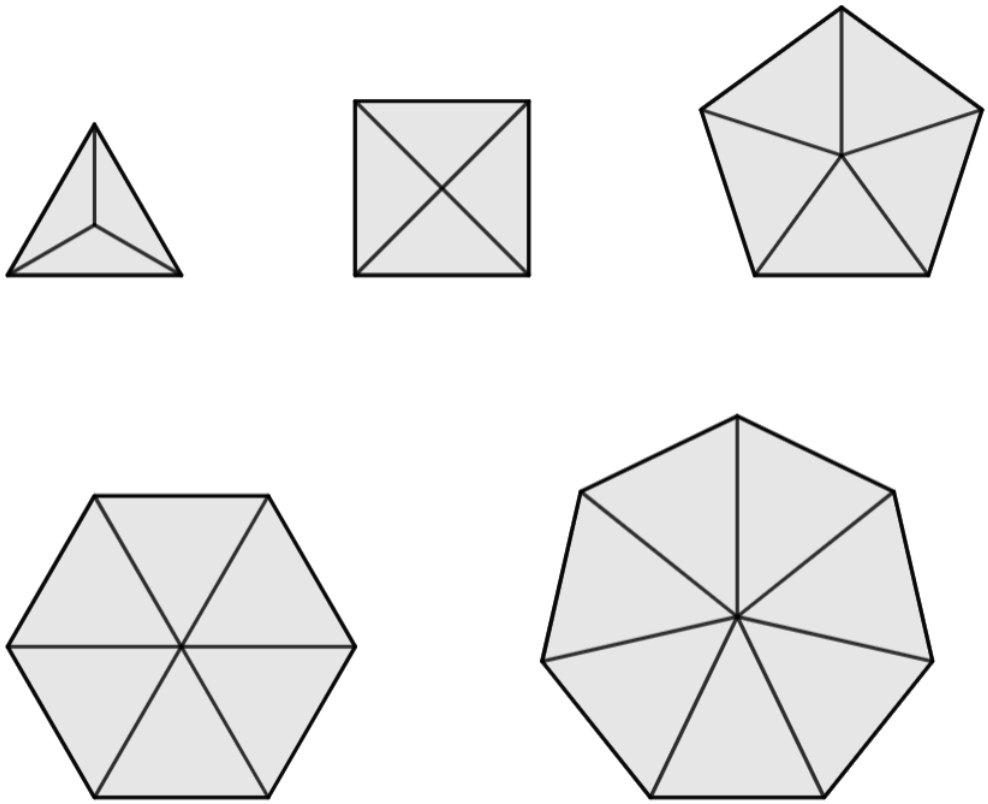


Figura 18: É possível dividir um n-gono regular em n triângulos isósceles congruentes.

Como $A_t = \dfrac{l \cdot a}{2}$, então $A = \dfrac{n \cdot l \cdot a}{2} = p \cdot a$.

□

Como o (bari)centro de qualquer triângulo divide qualquer uma de suas medianas numa proporção de $1 : 2$ e, no triângulo equilátero de lado l, os segmentos de suas alturas, que medem $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, coincidem com as medianas, então a medida de seu apótema é $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$. Calculando a área do triângulo equilátero pela expressão do Problema 6.2.4, tem-se $A = p \cdot a = \dfrac{3l}{2} \cdot \dfrac{l\sqrt{3}}{6} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Note que o apótema de um quadrado de lado l tem medida $\dfrac{l}{2}$. Então $A = p \cdot a = \dfrac{4l}{2} \cdot \dfrac{l}{2} = l^2$.

De fato, as expressões obtidas para o cálculo da área de um triângulo equilátero e de um quadrado, ambos com lado l, são as mesmas obtidas pelo produto da base pela altura (metade do produto para triângulos).

Como o hexágono regular de lado l pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes de lado l, a sua área é igual a $A = 6 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{2}$. É interessante notar que é possível fatorar a última expressão na forma $A = \dfrac{6l}{2} \cdot \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, onde o primeiro fator é justamente o semiperímetro e o segundo, a medida dos apótemas do hexágono, que coincidem com as alturas dos triângulos equiláteros que o divide (Figura 18).

De modo geral, a medida dos apótemas de um n-gono regular é $a = \dfrac{l}{2} \cdot \text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2p/n}{2} \cdot \text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{p}{n} \cdot \text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, onde α é a medida dos ângulos internos do n-gono. Logo, a área de um n-gono regular também pode ser escrita na forma $A = \dfrac{p^2}{n} \cdot \text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{n \cdot l^2}{4} \cdot \text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

De fato, verifique que, dessa forma, obtemos as mesmas expressões já encontradas para os casos do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono regular.

Problema 6.2.5. *Sejam $m, n \in \mathbb{N} : m > n \geq 3$. Considere dois polígonos regulares isoperimétricos: o m-gono e o n-gono. Prove que, dentre os dois, o m-gono é o que tem a maior área.*

Solução. Sejam A_m e A_n, p_m e p_n, e a_m e a_n as áreas, os semiperímetros e as medidas dos apótemas do m-gono e do n-gono, respectivamente.

Então, do Problema 6.2.4, seque que $A_m = p_m \cdot a_m$ e $A_n = p_n \cdot a_n$. Como está sendo suposto que os dois polígonos regulares são isoperimétricos, então $p = p_m = p_n$. Logo, a relação de A_m e A_n depende das medidas de seus respectivos apótemas.

Como afirmado anteriormente, os apótemas de um k-gono regular de lado l coincidem com as alturas dos triângulos isósceles congruentes que dividem esse polígono. Logo, sendo α_k o valor dos ângulos internos do k-gono, a medida de seus apótemas é $a_k = \dfrac{l}{2} \cdot \text{tg}\left(\dfrac{\alpha_k}{2}\right)$. Como a medida dos ângulos internos de um polígono regular é sempre menor que 180°, então $0^\circ < \dfrac{\alpha_k}{2} < 90^\circ$, ou seja, $\dfrac{\alpha_k}{2}$ está no primeiro quadrante. Visto que $\alpha_m = \dfrac{(m-2)}{m} \cdot 180^\circ > \dfrac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ = \alpha_n$ e que, no primeiro quadrante, a função tangente é positiva e crescente, segue que $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha_m}{2}\right) > \text{tg}\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right)$ e, por conseguinte, $a_m > a_n$.

Finalmente, conclui-se que $A_m = p \cdot a_m > p \cdot a_n = A_n$.

□

Dos três problemas acima, segue que, dentre todos os polígonos regulares isoperimétricos, o hexágono é o que tem a maior área.

Sabe-se que os alvéolos têm inclinação de 90°. Abaixo verifica-se que essa é, de fato, a inclinação que maximiza o volume deles.

Problema 6.2.6. *Prove que a área lateral de um prisma reto é o produto do perímetro da sua base com a sua altura.*

Solução. Lembre que a as faces laterais de um prisma reto são retângulos de altura igual à do prisma e bases coincidentes com os lados da base do prisma. Sendo, então, n o número de faces laterais do prisma, $b_1, ..., b_n$ as medidas dos lados da sua base, h a sua altura, $2p$ o perímetro da sua base, A_l a sua área lateral e $A_1, ..., A_n$ a área de cada face lateral, segue que

$$A_l = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot h) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \cdot h = 2ph$$

□

Problema 6.2.7. *Mostre que, dentre todos os prismas com uma dada área e cuja base seja definida por um dado n-gono, o prisma reto é o que possui o maior volume.*

Solução. Ora, o volume de um prisma depende apenas da área de sua base e a medida de sua altura, então basta provar que a altura de um prisma reto é sempre maior que a de qualquer prisma oblíquo de mesma base.

A área de um prisma P é dada pela fórmula

$$S_t(P) = 2S_b(P) + S_l(P)$$

sendo $S_b(P)$ a área da seção transversal (base) e $S_l(P)$ a soma das áreas das faces laterais de P.

Sejam P_r e P_{ob} um prisma reto e oblíquo, respectivamente, tal que eles possuem mesma base e mesma área. Logo,

$$S_t(P_r) = S_t(P_{ob}) \Rightarrow 2 \cdot S_b(P_r) + S_l(P_r) = 2 \cdot S_b(P_{ob}) + S_l(P_{ob}).$$

Ora, P_r e P_{ob} tem mesma seção transversal, então

$$S_b(P_r) = S_b(P_{ob}) \Rightarrow S_l(P_r) = S_l(P_{ob}).$$

Sejam $f_1, ..., f_n$ as faces laterais de P, $\pi_1, ..., \pi_n$ os planos definidos por $f_1, ..., f_n$, respectivamente, π o plano que contém a base inferior de P e h a altura deste. Além disso, sejam $\alpha_1, ..., \alpha_n$ os ângulos entre os planos $\pi_1, ..., \pi_n$, respectivamente, e π.

Logo, cada f_k é um paralelogramo, por construção, cujas base e altura medem b_k e $h_k = \dfrac{h}{\operatorname{sen} \alpha_k}$, respectivamente, e, portanto, tem área igual a $A_k = b_k \cdot h_k = b_k \cdot \dfrac{h}{\operatorname{sen} \alpha_k}$.

Aplicando essas informações em $S_l(P_r) = S_l(P_{ob})$, segue que

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k,r} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,r} \cdot \frac{h_r}{\operatorname{sen} \alpha_{k,r}} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,ob} \cdot \frac{h_{ob}}{\operatorname{sen} \alpha_{k,ob}} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,ob}.$$

Como $\alpha_{1,r} = ... = \alpha_{n,r} = 90^\circ$ e P_r e P_{ob} têm mesma base, então

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot h_r = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \frac{h_{ob}}{\operatorname{sen} \alpha_{k,ob}}.$$

Note que pelo menos um $\alpha_{k,ob}$ é diferente de 90° e, portanto, $\dfrac{h_r}{\operatorname{sen} \alpha_{ob}} > h_r$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \frac{h_r}{\operatorname{sen} \alpha_{k,ob}} &> \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot h_r \\ h_r \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\operatorname{sen} \alpha_{k,ob}} &> h_{ob} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\operatorname{sen} \alpha_{k,ob}} \\ h_r &> h_{ob} \end{aligned}$$

□

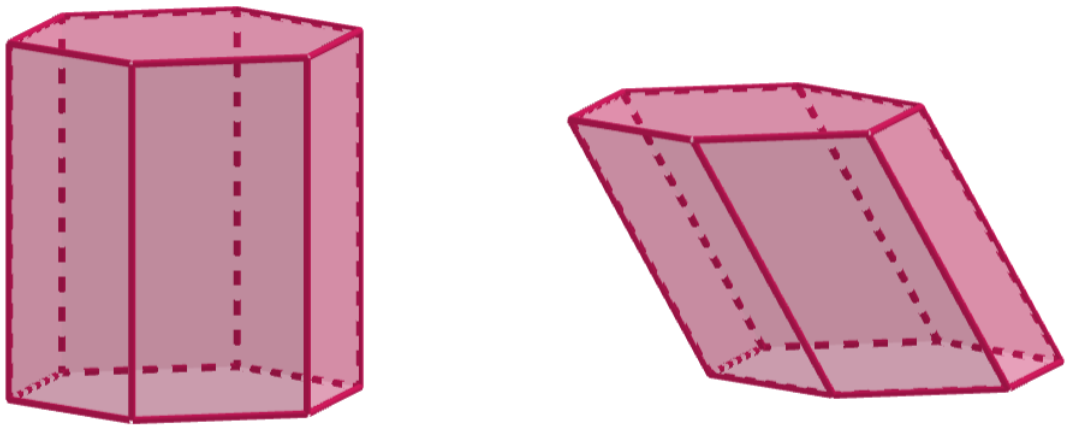


Figura 19: Prismas hexagonais regulares reto e oblíquo de mesma base e área. Note que a altura do segundo prisma é menor e, por isso, o seu volume é menor do que o do primeiro.

Doravante, um prisma reto ou um objeto prismático reto será chamado apenas de prisma ou objeto prismático.

7 Otimização na matemática das abelhas

Serão resolvidos e analisados agora alguns problemas de otimização relacionados com a matemática das abelhas. A primeira subseção trata da busca de um caminho ótimo que as abelhas podem percorrer a fim de polinizarem um certo número de flores distribuídas de uma forma específica. Já a segunda trata sobre a otimização dos alvéolos, procurando um formato ótimo para maximizar o seu volume diminuindo o custo de cera para fazê-los.

7.1 Otimização do caminho de polinização

Para os problemas e comentários que se seguem, considera-se uma visita a uma flor se as abelhas de fato polinizarem essa flor. Então, havendo três flores colineares, é possível que as abelhas saiam de uma extremidade, voem exatamente por cima da flor intermediária sem visitá-la, cheguem na flor da outra ponta e depois visitem a segunda flor.

Note que, para 2 flores, só existe um caminho possível que as abelhas podem fazer na polinização, começando e terminando numa mesma flor.

Para 3 flores, sejam elas colineares ou não, existem dois caminhos de mesmo comprimento, mudando apenas a ordem em que as flores são visitadas.

Note que, nos casos acima, o problema de encontrar o caminho ótimo é trivial, pois não há caminhos com diferentes comprimentos. Logo, qualquer um deles é ótimo. Agora, para mais de três flores, já é possível encontrar rotas com diferentes comprimentos. Os seguintes problemas abordam o caso em que há mais de três flores a serem polinizadas. Para possíveis índices $a \notin [n]$, tomar-se-á $F_a = F_b$, onde $b \in [n]$ e $a \equiv b \mod n$.

Problema 7.1.1. *Uma colmeia de abelhas encontrou um caminho ótimo para a polinização de $n > 3$ flores. Elas saem de uma flor, passam por todas as outras uma única vez e voltam para a primeira novamente. Mostre que o caminho encontrado por elas é um n-gono simples.*

Solução. Sejam $F_1, ..., F_n$ as flores visitadas pela colmeia, onde F_i é a i-ésima flor visitada.

Quer-se provar que $F_1...F_n$ é um polígono simples. Suponha que não é. Então $\exists j,k \in [n]$: $F_jF_{j+1} \cap F_kF_{k+1} = P \neq \emptyset$ e $j+1 < k \leq n$. Note que F_jF_{j+1} e F_kF_{k+1} não são consecutivos. Um dos seguintes casos ocorre.

- **Caso 1:** P é um ponto interior de ambos segmentos.

Então F_jF_kP e $F_{j+1}F_{k+1}P$ são triângulos. Aplicando a Desigualdade Triangular neles, tem-se $\overline{F_jP} + \overline{F_kP} > \overline{F_jF_k}$ e $\overline{F_{j+1}P} + \overline{F_{k+1}P} > \overline{F_{j+1}F_{k+1}}$, respectivamente. Somando essas duas desigualdades, obtém-se

$$\overline{F_jF_{j+1}} + \overline{F_kF_{k+1}} > \overline{F_jF_k} + \overline{F_{j+1}F_{k+1}}.$$

Logo, o comprimento de $F_1...F_j[F_{j+1}...F_k]F_{k+1}...F_n$, onde $[F_{j+1}...F_k]$ significa a ordem inversa dos vértices $F_{j+1}...F_k$, é menor que o comprimento de $F_1...F_n$. Isso contradiz o fato de que $F_1...F_n$ é o caminho ótimo percorrido pelas abelhas.

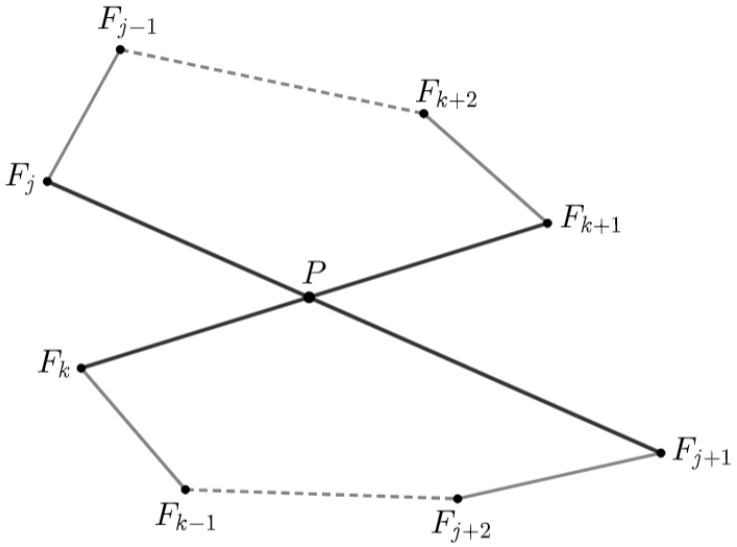


Figura 20: A trajetória das abelhas se cruza no ponto P.

- **Caso 2:** P é uma flor, *i. e.*, é um dos extremos de um dos segmentos.

Como F_jF_{j+1} e F_kF_{k+1} não são segmentos consecutivos, então P não pode ser extremo dos dois segmentos. Sem perda de generalidade, pois os demais subcasos seguem de forma análoga, suponha que $P = F_{j+1}$.

Aplicando a Desigualdade Triangular no triângulo $F_jF_kF_{j+1}$, tem-se $\overline{F_jF_{j+1}} + \overline{F_kF_{j+1}} > \overline{F_jF_k}$. Novamente se conclui que o comprimento de $F_1...F_j[F_{j+1}...F_k]F_{k+1}...F_n$ é menor que o comprimento de $F_1...F_n$.

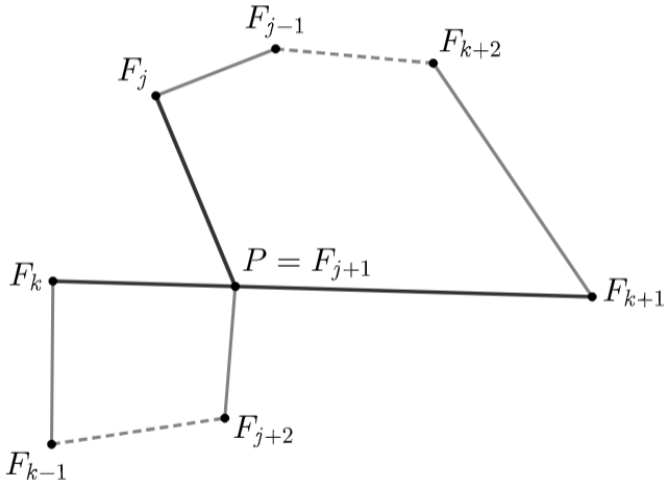


Figura 21: A flor F_{j+1} está entre as flores F_k e F_{k+1}.

- **Caso 3:** P é um dos segmentos.

Isso significa que um dos segmentos está contido no interior do outro. Além disso, como os segmentos não são consecutivos, então o menor segmento está contido no interior do maior.

Suponha, sem perda de generalidade, que $P = F_jF_{j+1} \subsetneq F_kF_{k+1}$ e $F_j \in F_kF_{j+1}$. Os demais subcasos seguem de maneira análoga.

Logo,

$$\overline{F_kF_{k+1}} = \overline{F_kF_j} + \overline{F_jF_{j+1}} + \overline{F_{j+1}F_{k+1}},$$

implicando em $\overline{F_jF_{j+1}} + \overline{F_kF_{k+1}} > \overline{F_jF_k} + \overline{F_{j+1}F_{k+1}}$. Então $F_1...F_j[F_{j+1}...F_k]F_{k+1}...F_n$ tem menor comprimento que $F_1...F_n$, chegando numa contradição mais uma vez.

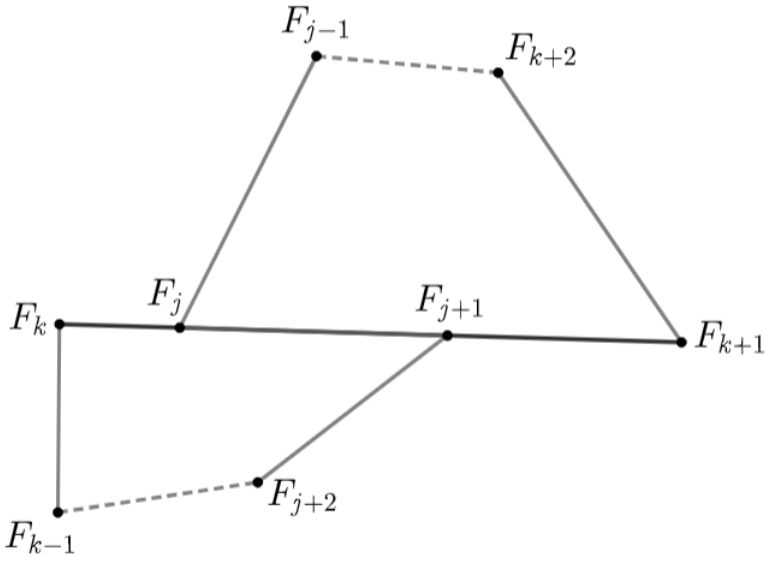


Figura 22: A flor F_j está entre as flores F_k e F_{j+1}, e esta, entre F_j e F_{k+1}.

- **Caso 4:** P é um segmento diferente dos outros dois.

Isso significa que apenas um extremo de cada segmento está contido no interior do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $F_k \in F_jF_{j+1}$. Os demais subcasos seguem de maneira análoga.

Logo,

$$\overline{F_jF_{k+1}} = \overline{F_jF_k} + \overline{F_kF_{j+1}} + \overline{F_{j+1}F_{k+1}},$$

implicando em $\overline{F_jF_{j+1}} + \overline{F_kF_{k+1}} > \overline{F_jF_k} + \overline{F_{j+1}F_{k+1}}$. Então $F_1...F_j[F_{j+1}...F_k]F_{k+1}...F_n$ tem menor comprimento que $F_1...F_n$, contradizendo, mais uma e última vez, com o fato deste ser o caminho ótimo.

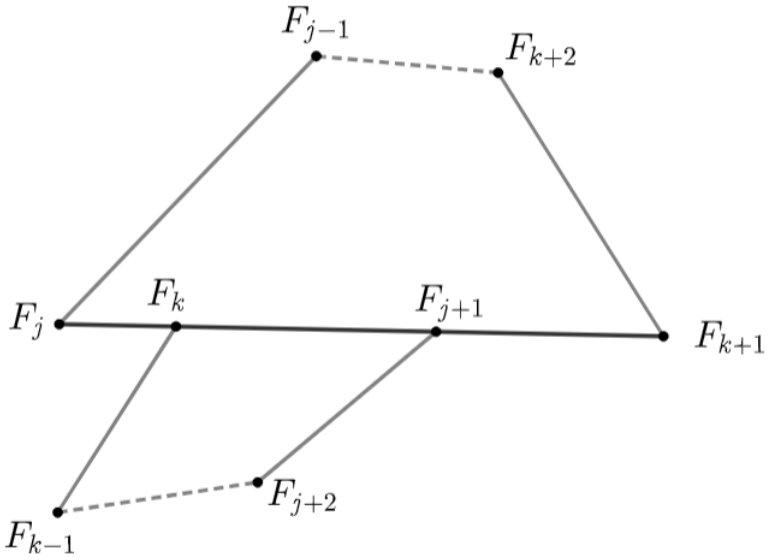


Figura 23: A flor F_k está entre as flores F_j e F_{j+1}, e esta, entre F_k e F_{k+1}.

Portanto, $F_1...F_n$ é um polígono simples.

□

O que o problema acima provou foi que, se uma colmeia descobriu um caminho ótimo para a polinização de n flores, então ela nunca voou por uma mesma coordenada do plano, *i. e.*, não há cruzamentos na sua rota.

Problema 7.1.2. *Uma colmeia de abelhas encontrou um caminho ótimo para a polinização de $n > 3$ flores: $F_1, ..., F_n$, onde F_i é a i-ésima flor a ser visitada. Elas começam e terminam em F_1. Seja $F_{k_1}F_{k_2}...F_{k_m}$, $m \leq n$, a fronteira do fecho convexo de $\{F_1, ..., F_n\}$, onde $k_1 < k_2, k_3, ..., k_m$ e $k_2 < k_m$. Mostre que $k_1 < k_2 < ... < k_m$.*

Solução. Suponha que não é verdade que $k_1 < k_2 < ... < k_m$. Logo, $\exists p, q \in [m] : p + 1 < q$ e $k_{p+1} > k_q$. Note, então, que o caminho poligonal aberto $F_{k_q}F_{k_q+1}...F_{k_p-1}F_{k_p}$ separa os vértices de $F_{k_1}...F_{k_m}$ em dois conjuntos não vazios: $A = \{F_{k_1}, ..., F_{k_q-1}, F_{k_p+1}, ..., F_{k_m}\}$ e $B = \{F_{k_q+1}, ..., F_{k_p-1}\}$. Como qualquer caminho está contido no fecho convexo de $\{F_1, ..., F_n\}$, então todo caminho que liga um vértice de A a um vértice de B intersecta $F_{k_q}F_{k_q+1}...F_{k_p-1}F_{k_p}$. Pelo problema anterior, segue que $F_1...F_n$ não é um caminho ótimo, um absurdo.

Portanto, $k_1 < k_2 < ... < k_m$.

□

Por que a condição $F_{k_2} < F_{k_m}$ foi necessária no enunciado do problema acima? Note que, num polígono, há dois possíveis sentidos a percorrê-lo. Em particular, num polígono convexo, como o do problema, os sentidos são horário e anti-horário. Considerando a Figura 24, as abelhas visitaram as flores $F_{k_1}, ..., F_{k_m}$ no sentido horário da fronteira. Sem a condição mencionada, as abelhas podiam percorrer o mesmo caminho, porém na ordem inversa, passando

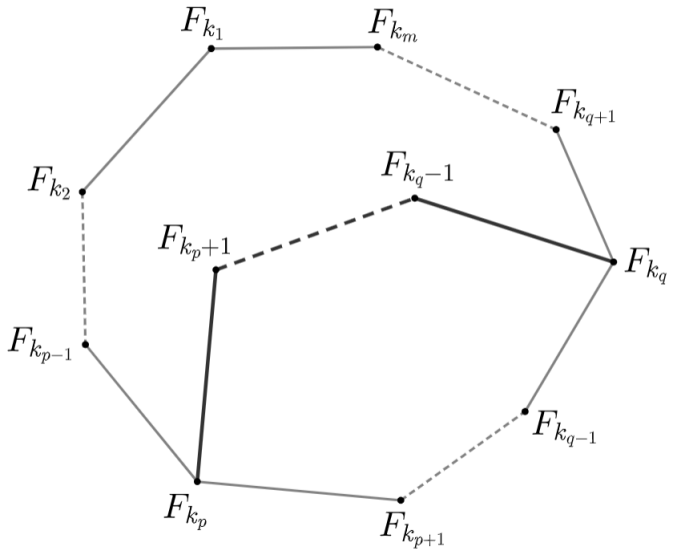


Figura 24: O caminho aberto $F_{k_q}F_{k_q+1}...F_{k_p-1}F_{k_p}$ divide o fecho convexo em duas partes.

pelas flores da fronteira no sentido anti-horário. Dessa forma, teríamos duas possibilidades $k_1 < k_2 < ... < k_m$ (sentido horário) e $k_1 < k_m < k_{m-1} ... < k_2$ (sentido anti-horário).

Outra coisa importante a se perceber, é que as flores que pertencem a fronteira, mas que não são vértices desta, *i. e.*, não são nenhumas das $F_{k_1}, ..., F_{k_m}$, também são visitadas na ordem cíclica em que aparecem na fronteira. Novamente, isso decorre diretamente do Problema 7.1.1, pois, caso contrário, haveria uma interseção de segmentos não consecutivos do caminho.

Em resumo, se uma colmeia percorre um caminho ótimo na polinização de n flores, então elas passam pelas flores da fronteira numa das duas ordens cíclicas em que estas estão na fronteira.

Problema 7.1.3. *Uma colmeia de abelhas encontrou um caminho ótimo para a polinização de $n > 3$ flores. Mostre que, se todas as flores pertencem à fronteira do fecho convexo definida por elas, então o caminho ótimo é a própria fronteira.*

Solução. Seja $F_{k_1}...F_{k_n}$ a ordem cíclica em que as n flores aparecem na fronteira, onde $\{k_1, ..., k_n\} = [n]$, $k_1 < k_2, k_3, ..., k_m$ e $k_2 < k_m$. Do problema anterior, decorre que $k_1 < k_2 < ... < k_n$. Logo, $k_i = i$, $\forall i \in [n]$.

Portanto, a fronteira é um caminho ótimo, podendo as abelhas voarem pelo sentido horário ou anti-horário.

□

Um caso particular do problema acima é quando as n flores definem um n-gono convexo. Nesse caso, os caminhos ótimos serão o próprio polígono percorrido em suas ordens horária e anti-horária.

Problema 7.1.4. *Uma colmeia de abelhas encontrou um caminho ótimo para a polinização de $n > 3$ flores. Seja $F_1...F_n$ esse caminho. Mostre que, se todas as flores, exceto F_q, pertencem à*

fronteira de $\{F_1,...,F_n\}$*, então*

$$\overline{F_qF_{k_i}}+\overline{F_qF_{k_{i+1}}}-\overline{F_{k_i}F_{k_{i+1}}}$$

é mínimo (não necessariamente de forma exclusiva) quando $k_i = q-1$*, onde* $\{k_1,...,k_{n-1}\} = [n]\backslash\{q\}$ *e* $k_1 < ... < k_{n-1}$.

Solução. Do Problema 7.1.2, segue que as flores $F_1,...,F_{q-1},F_{q+1},...,F_n$ aparecem na ordem cíclica da fronteira de $\{F_1,...,F_n\}$. Seja $2p$ o perímetro da fronteira. Então o comprimento da trajetória ótima da colmeia é dado por

$$2p+\overline{F_qF_{q-1}}+\overline{F_qF_{q+1}}-\overline{F_{q-1}F_{q+1}}.$$

Logo, $\forall i \in [n-1]$,

$$\begin{aligned} 2p+\overline{F_qF_{k_i}}+\overline{F_qF_{k_i+1}}-\overline{F_{k_i}F_{k_i+1}} &\geq 2p+\overline{F_qF_{q-1}}+\overline{F_qF_{q+1}}-\overline{F_{q-1}F_{q+1}} \\ \overline{F_qF_{k_i}}+\overline{F_qF_{k_i+1}}-\overline{F_{k_i}F_{k_i+1}} &\geq \overline{F_qF_{q-1}}+\overline{F_qF_{q+1}}-\overline{F_{q-1}F_{q+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{F_qF_{k_i}}+\overline{F_qF_{k_i+1}}-\overline{F_{k_i}F_{k_i+1}}$ é mínimo (não necessariamente de forma exclusiva) quando $k_i = q-1$.

□

O resultado do problema acima diz que o caminho ótimo de polinização, quando as flores estiverem distribuídas como no enunciado, terá a forma de um polígono não convexo.

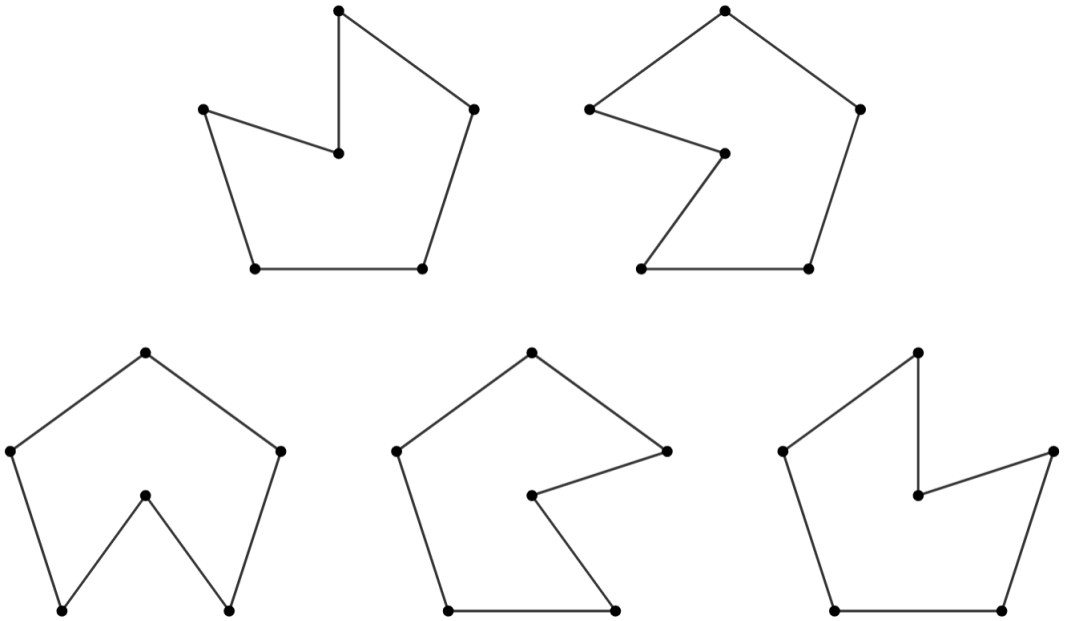


Figura 25: Caminhos ótimos de polinização de 6 flores onde 5 delas formam um pentágono regular e a sexta é o seu centro.

É importante observar que, em alguns casos, o caminho mais curto, mesmo desconsiderando as ordens inversas, não é único, como mostra a Figura 25.

7.2 Otimização dos alvéolos de uma colmeia

Já foi visto que as abelhas de fato escolheram o melhor formato para a seção transversal dos seus alvéolos: o hexágono regular. No entanto uma possível pergunta pode surgir: é o formato espacial dos alvéolos realmente o que minimiza a sua área — reduzindo, assim, o gasto de cera para a sua produção — e maximiza o seu volume dentre todos os sólidos que "ladrilham" o espaço ou, pelo menos, a região entre dois planos paralelos?

Uma primeira alternativa ao formato real dos alvéolos seria, naturalmente, um prisma regular hexagonal reto. Seria ele uma opção melhor para as abelhas?

Problema 7.2.1. *Quais são as dimensões de um alvéolo de formato prismático hexagonal regular a fim de minimizar o custo de cera para fazê-lo dado um certo volume?*

Solução. Sejam a, p e h o apótema da base, o semiperímetro da base e a altura do alvéolo. Como a base é hexagonal, então

$$p = \frac{6a}{\operatorname{tg}\left(\frac{120^\circ}{2}\right)} = \frac{6a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}a.$$

Logo, o volume do alvéolo é

$$V = A_b \cdot h = pah = 2\sqrt{3}a^2h,$$

e a sua área total,

$$A = A_b + A_l = pa + 2ph = 2\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}ah.$$

Aplicando a Desigualdade MA-MG aos termos $2\sqrt{3}a^2$, $2\sqrt{3}ah$ e $2\sqrt{3}ah$, tem-se

$$\frac{A}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^2 + 2\sqrt{3}ah + 2\sqrt{3}ah}{3} \geq \sqrt[3]{2\sqrt{3}a^2 \cdot 2\sqrt{3}ah \cdot 2\sqrt{3}ah} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}V^2}.$$

Como V é fixado, segue que A será mínimo quando valer a igualdade. Isso ocorre quando $2\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{3}ah = 2\sqrt{3}ah$, ou seja, quando $a = h$.

Compare a solução desse problema com as dos Problemas 5.3.5 e 5.3.9. Nos três, o formato ótimo ocorre quando a altura é igual ao apótema ou ao raio da base. De fato, é possível mostrar, de forma análoga ao que foi feito acima, que isso vale para todo prisma regular.

O seguinte problema foi adaptado de (STEWART, 2015).

Problema 7.2.2. *Numa colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto numa das extremidades e fechado por uma cobertura rômbica na outra como mostra a Figura 26.*

Sendo h a medida da maior aresta lateral e l a medida dos lados da sua base, então, baseado na geometria do alvéolo, pode-se mostrar que a sua área é dada por

$$A = 6lh - \frac{3}{2}l^2 \operatorname{cotg}(\theta) + \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 \operatorname{cosec}(\theta)$$

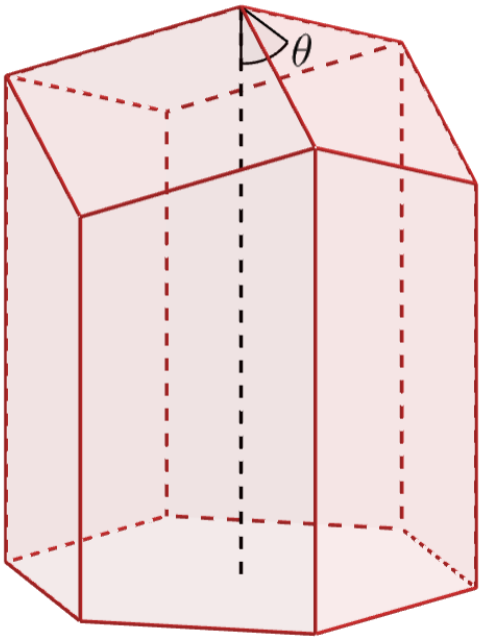


Figura 26: θ é o ângulo entre o eixo central do alvéolo e as faces rômbicas.

a) *Calcule $dA/d\theta$.*

b) *Qual valor do ângulo θ as abelhas deveriam preferir?*

c) *Em termos de l e h, qual é a área mínima de um alvéolo?*

d) *Escreva h em termos de l a fim de que a área seja mínima.*

Solução.

a) As derivadas das funções cotangentes e cossecantes são, respectivamente, $-\operatorname{cosec}^2(\theta)$ e $-\operatorname{cosec}(\theta)\operatorname{cotg}(\theta)$ (vide anexo). Então

$$\frac{dA}{s\theta} = \frac{3}{2}l^2 \operatorname{cosec}^2(\theta) - \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 \operatorname{cosec}(\theta)\operatorname{cotg}(\theta).$$

b) Como $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ e arccos é decrescente, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}l^2 \operatorname{cosec}^2(\theta) - \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 \operatorname{cosec}(\theta)\operatorname{cotg}(\theta) &\geq 0 \\
\operatorname{cosec}(\theta) - \sqrt{3}\operatorname{cotg}(\theta) &\geq 0 \\
1 - \sqrt{3}\cos(\theta) &\geq 0 \\
\cos(\theta) &\leq \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\theta &\geq \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 54^\circ 44'.
\end{aligned}$$

Logo, A decresce no intervalo, $\left(-\infty, \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ e cresce em $\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \infty\right)$.

Portanto, a área do alvéolo será mínima quando $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 54^\circ 44'$.

c) Do item anterior, segue que a área mínima do alvéolo é

$$\begin{aligned}
A &= 6lh - \frac{3}{2}l^2 \operatorname{cotg} \circ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 \operatorname{cosec} \circ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= 6lh - \frac{3}{2}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \\
&= 6lh - \frac{3\sqrt{2}}{4}l^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}l^2 \\
&= 6lh + \frac{3\sqrt{2}}{2}l^2.
\end{aligned}$$

d) Note que o volume do alvéolo é igual ao volume de um prisma com mesma seção hexagonal e altura h, ou seja,

$$V = A_b \cdot h = \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2 h}{2}.$$

Segue, então, que $h = \dfrac{2V}{3\sqrt{3} \cdot l^2}$ $(*)$.

Substituindo na equação obtida no item anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
A &= 6l \cdot \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot l^2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}l^2 \\
&= \frac{4\sqrt{3} \cdot V}{3l} + \frac{3\sqrt{2}}{2}l^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade MA-MG aos termos $\frac{2\sqrt{3}\cdot V}{l}$, $\frac{2\sqrt{3}\cdot V}{l}$ e $\frac{9\sqrt{2}}{2}l^2$, tem-se

$$A = \frac{2\sqrt{3}\cdot V/l + 2\sqrt{3}\cdot V/l + 9\sqrt{2}\cdot l^2/2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}\cdot V}{l}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot V}{l}\cdot\frac{9\sqrt{2}\cdot l^2}{2}} = 3\sqrt[3]{2\sqrt{2}\cdot V^2}.$$

Logo, A será mínimo quando $\frac{2\sqrt{3}\cdot V}{l} = \frac{2\sqrt{3}\cdot V}{l} = \frac{9\sqrt{2}}{2}l^2$, ou seja, quando $V = \frac{3\sqrt{6}}{4}l^3$. Finalmente, substituindo isso em $(*)$, tem-se

$$h = \frac{2}{3\sqrt{3}\cdot l^2}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}l^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

O formato ótimo resultante desse problema é a metade de um dodecaedro rômbico. Esse poliedro é convexo e tem 12 faces rômbicas congruentes. Ele tem 14 vértices no total, 8 deles são comuns a 3 faces e os outros 6, a 4 faces. O ângulo agudo dos losangos mede, aproximadamente, 70°32'. Esse ângulo, não coincidentemente, é o mesmo que aparece entre as diagonais de um cubo. De fato, pode-se formar um dodecaedro rômbico a partir de um cubo, refletindo as 6 pirâmides contidas nele, onde as bases e os vértices daquelas são, respectivamente, as faces e o centro deste, pelas suas relativas faces.

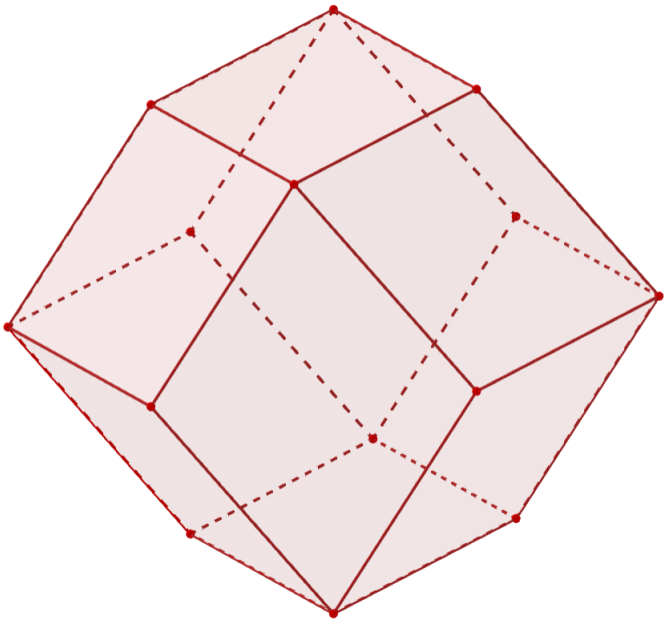


Figura 27: Um dodecaedro rômbico de coordenadas $(\pm1,\pm1,\pm1)$, $(\pm2,0,0)$, $(0,\pm2,0)$ e $(0,0,\pm2)$.

Comparando os resultados dos dois problemas acima, percebe-se que, dado um certo volume V, a área mínima da alternativa prismática do alvéolo é $3\sqrt[3]{2\sqrt{3}\cdot V^2}$, enquanto a da segunda alternativa é $3\sqrt[3]{2\sqrt{2}\cdot V^2}$. Como $3\sqrt[3]{2\sqrt{3}\cdot V^2} > 3\sqrt[3]{2\sqrt{2}\cdot V^2}$, então, do ponto de vista

da otimização, a metade de um dodecaedro rômbico é, de fato, preferível. Isso responde negativamente a segunda pergunta feita no início desta subseção.

Porém, como observou TÓTH (1964), as abelhas constroem os seus alvéolos com uma altura maior do que a ótima. Além disso, há outros sólidos isovolumétricos com seções transversais capazes de ladrilhar o plano com áreas menores do que a do dodecaedro rômbico. Por exemplo, a área da metade de um octaedro truncado é $A = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{37+30\sqrt{3}}{4}V^2}$.

Portanto, a resposta à primeira pergunta é não, o formato escolhido pelas abelhas não é o que mais minimiza a área dos alvéolos. No entanto, esse formato ótimo ainda não é conhecido pelo homem, sendo ainda um problema em aberto na matemática.

8 Considerações Finais

Neste trabalho, foram apresentados quatro métodos de otimização: máximos e mínimos de funções quadráticas, Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica, Desigualdade Triangular e derivadas. Esses métodos foram fundamentados em conceitos matemáticos preliminares apresentados através de definições, proposições e problemas. Aplicou-se essas ferramentas para resolver alguns problemas da Matemática Financeira, de economia de embalagens e do menor caminho.

Investigou-se os problemas do caminho de polinização de finitas flores mais curto e o formato ótimo dos alvéolos através da perspectiva matemática, sobretudo geométrica, trazendo definições, proposições e problemas intermediários. Aplicou-se a Desigualdade Triangular para estudar de maneira mais profunda algumas características que um caminho ótimo de polinização de n flores distribuídas de certa forma deve ter. Descobriu-se que a rota ótima de polinização não se cruza. Além disso, que as flores que estão na fronteira da região poligonal definida por todas as flores são visitadas na ordem cíclica em que estão na fronteira. Em particular, se todas as flores — com exceção de, no máximo, uma — estão na fronteira, então o caminho ótimo é a própria fronteira — respectivamente, o caminho ótimo é uma parte da fronteira com a adição de dois segmentos que ligam à flor interna.

Aplicou-se também a Desigualdade MA-MG e o método das derivadas para descobrir quais são as dimensões ótimas que um alvéolo deveria ter para maximizar o seu volume e diminuir o gasto de cera para construí-lo. Constatou-se que, de fato, o formato escolhido pelas abelhas é mais econômico do que a alternativa de ser apenas um prisma regular hexagonal reto, porém os alvéolos construídos não são metades de um dodecaedro rômbico — as suas alturas extrapolam um pouco —, que seria o formato ótimo nessa situação de cobertura rômbica. Além disso, dentre todos os sólidos que "ladrilham" uma região entre dois planos paralelos, a metade de um dodecaedro rômbico também não é a escolha ótima, sendo a metade de um octaedro truncado uma melhor opção.

Vale observar como os problemas de otimização se mostram atrativos tanto pela contextualização deles e importância real em situações cotidianas de economia quanto pela relativa facilidade dos métodos para resolvê-los. Sabendo que é interessante conhecer diferentes métodos para investigar diferentes problemas ou analisá-los por outras perspectivas, recomenda-se, novamente, (COSTA, 2013) a fim de aprender aplicações de outras desigualdades na resolução de problemas de otimização.

Observa-se também que há algumas limitações nos métodos estudados. Por exemplo, o método da derivada apresentado neste trabalho não pode ser aplicado para resolver o problema das dimensões que uma caixa, aberta ou fechada, com área fixa deve ter para maximizar o seu volume, pois não é possível escrever o volume como uma função de uma variável real. A fim de ultrapassar essa barreira, pode-se dispor de mais uma ferramenta do cálculo diferencial, a saber, os multiplicadores de Lagrange, que é utilizada para resolver problemas de otimização

envolvendo funções de mais de uma variável. Por englobar alguns conceitos mais complexos e sendo a proposta deste trabalho apresentar métodos acessíveis a alunos do Ensino Médio, omitiu-se a exposição dessa ferramenta aqui, porém sem prejuízo de abordá-la em trabalhos futuros.

Por fim, salienta-se que algumas situações que não foram tratadas neste trabalho envolvendo abelhas também podem servir como objetos de estudo para investigar alguns outros conceitos da Matemática, como, por exemplo, o número de ouro na genética e na construção das colmeias de algumas espécies, além da simetria dos alvéolos.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

COSTA, A. **Médias, desigualdades e problemas de otimização**. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. ***Círculos Matemáticos**: A Experiência Russa*. AMS/IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

HALES, T. C. The honeycomb conjecture. **Discrete & Computational Geometry**, New York, v. 25, n. 1, p. 1–22, 2001.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics***: An Introduction*. HarperCollins, New York, 3ª edição, 1993.

LIHOREAU, M.; CHITTKA, L.; RAINE, N. E. Travel optimization by foraging bumblebees through readjustments of traplines after discovery of new feeding locations. **The American Naturalist**, Chicago, v. 176, n. 6, p. 744–757, 2010.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 8ª edição, 1997.

Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Playlist **Desigualdades**. YouTube, 11 de novembro de 2015. <https://youtube.com/playlist?list=PLrVGp617x0hDWkj5le9mJUMG28TxspB-A>. Acesso em 18 de agosto de 2023.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. Portfólio: **Trilha Soluções Ótimas**. Recife. <https://drive.google.com/file/d/1VcbMf_gV4G3C5WK_TZZHA4bb3koAjaEv/view?usp=drive_link>, 2021. Acesso em 04 de setembro de 2023.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. Material de apoio à ação docente: **Otimização e Automação**. Recife. <https://drive.google.com/file/d/1Mh1U433GS-baUlRYzKZ5EOcBIJTMT95Z/view?usp=sharing>, 2022. Acesso em 26 de setembro de 2023.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. B. ***Geometria Euclidiana Plana***. Editora UFS, São Cristóvão, 2011.

SARAIVA, J. C. A matemática das abelhas. **Eureka!**, Rio de Janeiro, n. 6, p. 18-22, 1999.

STEWART, J. **Calculus***: Early Transcendentals*. Cengage Learning, [*s. l.*], 8ª edição, 2015.

TAHAN, M. **As Maravilhas da Matemática**. Edições Bloch, Rio de Janeiro, 2ª edição, 1972.

TÓTH, L. L. Über das kürzeste kurvennetz das eine kugeloberfläche in flächengleiche konvexe teil zerlegt. **Mat. Term.-tud. Értesitö**, [*s. l.*], v. 62, p. 349–354, 1943.

TÓTH, L. L. What the bees know and what they do not know. **Bulletin AMS**, Providence, v. 70, n. 4, p. 468–481, 1964.

VIEIRA, A. C. **Fundamentos de Álgebra II**. CAED-UFMG, Belo Horizonte, 1ª edição, 2011.

Apêndice — Tabela de Derivadas Fundamentais

$y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$	$y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \operatorname{tg} u$
$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$	$y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$y = a^u \Rightarrow y' = a^u (\ln a) u', a > 0, a \neq 1$	$y = \operatorname{arcsen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v (\ln u) v'$	$y = \operatorname{arctan} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = u' \cos u$	$y = \operatorname{arcsec} u, \lvert u \rvert \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{1-u^2}}, \lvert u \rvert > 1$
$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{sen} u$	$y = \operatorname{arccosec} u, \lvert u \rvert \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}, \lvert u \rvert > 1$
$y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$	$y = \operatorname{arccotg} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$