UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA - EDUMATEC

WELLINGTON JOSÉ DE ARRUDA MELO

DIFERENTES CAMINHOS, DIFERENTES APREENSÕES: uma análise da conversão entre os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional

Recife
2024

WELLINGTON JOSÉ DE ARRUDA MELO

DIFERENTES CAMINHOS, DIFERENTES APREENSÕES: uma análise da conversão entre os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca do Centro de Educação

Melo, Wellington José de Arruda.
Diferentes caminhos, diferentes apreensões: uma análise da conversão entre os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional / Wellington José de Arruda Melo. - Recife, 2024.
304f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica.
Orientação: Rosinalda Aurora de Melo Teles.

1. Conversões; 2. Números Racionais; 3. Representações Intermediárias; 4. Material Manipulável. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo. II. Título.

WELLINGTON JOSÉ DE ARRUDA MELO

DIFERENTES CAMINHOS, DIFERENTES APREENSÕES: uma análise da conversão entre os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

BANCA EXAMINADORA

_____

Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Interna)
Universidade de Pernambuco

_____

Profa. Dra. Juliana Azevedo Montenegro (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Profa. Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva (Examinadora Externa)
Instituto Federal da Paraíba

_____

Profa. Dra. Rogéria Galdêncio do Rêgo (Examinadora Externa)
Universidade Federal da Paraíba

Dedico este trabalho às minhas filhas Letícia e Lara e à minha esposa Adriana. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por prover todas as condições para a conclusão desse trabalho.

À minha esposa Adriana Melo e às minhas filhas Letícia Melo e Lara Melo pelo apoio e toda compreensão demonstrada nestes anos em que o marido, o papai, esteve dedicado a essa produção.

Aos meus pais Josefa Suzana e José Gilberto (in memorian) pelo amor, cuidado e dedicação que me trouxeram até aqui. Amo vocês!

À minha querida e sempre orientadora professora Rosinalda Teles com quem aprendi muitíssimo durante todo esse tempo. Suas contribuições aliadas à forma atenciosa, generosa e, sempre, muito tranquila na condução de um processo tão complexo e desgastante como a produção de uma tese foram fundamentais para que esse objetivo fosse alcançado.

Às professoras Fernanda Andréa, Iracema Campos, Juliana Azevedo, Marilene Rosa e Rogéria Galdêncio cujas contribuições foram, desde o momento da qualificação, fundamentais para a continuidade desse trabalho de pesquisa e organização do texto final.

A todos os professores e demais colegas que tive o privilégio de conhecer no EDUMATEC/UFPE e com os quais compartilhei momentos, experiências e conhecimentos que guardarei para toda a vida. Meus sinceros agradecimentos a vocês.

À equipe gestora da Escola Municipal Antônio Farias Filho pela receptividade à proposta de trabalho e aos estudantes que se disponibilizaram a participar.

Enfim, sou muito grato a todos e todas que de algum modo contribuíram para essa conquista. Muito obrigado de coração!

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar, do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo, as apreensões relacionadas ao número racional em seu significado parte-todo a partir da utilização de dois caminhos distintos (um com escritas simbólicas e outro com material manipulável) para realizar conversões envolvendo suas representações fracionárias e percentuais. O estudo, cuja fundamentação foi a Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS de Raymond Duval, adotou um percurso metodológico que utilizou alguns aspectos da pesquisa do tipo experimental, tais como a definição do objeto de estudo (apreensões relacionadas ao número racional), a seleção de variáveis que poderiam influenciar o objeto (utilização de dois caminhos para converter uma representação fracionária em uma representação percentual) e a forma de controle e observação dos efeitos dessa influência. A investigação se deu em duas turmas do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública da cidade do Recife. Os resultados indicaram que o caminho de conversão com o material manipulável foi, do ponto de vista cognitivo, mais profícuo que o caminho de conversão com as escritas simbólicas. Nesse sentido, destacaram-se as representações figurativas associadas ao manipulável, sobretudo, no que concerniu à produção de representações mentais que auxiliaram os participantes na criação de estratégias matematicamente viáveis para a resolução de atividades envolvendo a conversão no sentido oposto, a percepção da parte em relação ao todo na representação e a comparação entre os tamanhos de partes representadas.

Palavras-chave: Conversões. Números Racionais. Representações Intermediárias. Material Manipulável.

ABSTRACT

This research aimed to analyze, on both the mathematical and the cognitive point of view, the apprehensions related to the rational number in its part-whole meaning occurred from conversions, involving its fractional and percentage representations, performed by using two different ways: one by symbolic writings and the other by manipulative material. The study, whose foundation was Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations – TRSR, adopted a methodological path that used some aspects of experimental research, such as the definition of the object of study (learning related to rational number), the selection of variables that could influence the object (use of two ways to convert a fractional representation into a percentage representation) and the way of controlling and observing the effects of this influence. The investigation took place in two classes of students in the 6th grade at a public school in the city of Recife. The results indicated that the conversion by manipulative material way was, from a cognitive point of view, more fruitful than the conversion by symbolic writings way. In this sense, the figurative representations associated with the manipulative stood out, especially with regard to the production of mental representations that helped participants in creating mathematically viable strategies for resolving activities involving the conversion in the opposite direction, the perception of the part in relation to the whole in the representation and the comparison between the magnitudes of represented parts.

Keywords: Conversions. Rational Numbers. Intermediate Representations. Manipulative Material.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura bilateral do signo de Saussure..... 28
Figura 2 - Exemplo com a triádica de Peirce..... 31
Figura 3 - Partição tricotômica das representações de Peirce segundo Duval..... 32
Figura 4 - Classificação dos tipos de registros semióticos..... 40
Figura 5 - Exemplo de atividade de tratamento..... 42
Figura 6 - Exemplo de atividade de conversão..... 44
Figura 7 - Estrutura de representação semiótica e seu funcionamento..... 45
Figura 8 - Variações figurais e covariações numéricas..... 49
Figura 9 - Exemplo de tratamento por divisão mereológica..... 51
Figura 10 - Reconfiguração intermediária por subdivisão das subfiguras..... 52
Figura 11 - Reconfiguração intermediária por inclusão das subfiguras..... 53
Figura 12 - Exemplo de conversão em ambos os sentidos..... 59
Figura 13 - Tipos de representações e sua função cognitiva..... 64
Figura 14 - Atividade envolvendo racional com sentido de número..... 71
Figura 15 - Atividade envolvendo racional com sentido de parte-todo..... 72
Figura 16 - Esquema de representações para o racional 1/4..... 74
Figura 17 - Adição de frações via tratamento figurativo..... 92
Figura 18 - Correspondências entre as unidades de sentido da fração centesimal e do registro numérico percentual..... 101
Figura 19 - Correspondências entre unidades de sentido variáveis nos registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional..... 103
Figura 20 - Conversão envolvendo os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional e as correspondências entre suas unidades de sentido variáveis..... 104
Figura 21 - Esquema destacando correspondências entre unidades de sentido variáveis e não variáveis nos registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional..... 105
Figura 22 - Materiais manipuláveis estáticos – sólidos geométricos..... 116
Figura 23 - Materiais manipuláveis dinâmicos – discos de frações..... 117

Figura 24 - Material dourado adaptado..... 118
Figura 25 - Atividade com aporte de informações adicionais via representação auxiliar..... 121
Figura 26 - Atividade com emprego de interpretação heurística, via representação auxiliar, em sua resolução..... 122
Figura 27 - Atividade com interpretação explicativa via representação auxiliar 122
Figura 28 - Atividade com seleção de elementos relevantes via representação auxiliar..... 123
Figura 29 - Função exemplo via representação auxiliar..... 123
Figura 30 - Atividade com ilustração via representação auxiliar..... 124
Figura 31 - Discos de frações..... 125
Figura 32 - Manipulável usado por Melo (2019) – conjunto verde..... 126
Figura 33 - Manipulável usado por Melo (2019) – conjunto amarelo..... 126
Figura 34 - Conversão 1/4 → 25% a partir de material usado por Melo (2019). 126
Figura 35 - Dois caminhos para a conversão 2/5 → 40%..... 128
Figura 36 - Representações figurativas A e B..... 129
Figura 37 - Conversão representação figurativa → representação numérica fracionária..... 132
Figura 38 - Sequência metodológica realizada na pesquisa..... 140
Figura 39 - Teste de sondagem..... 147
Figura 40 - Representações impressas no manipulável utilizado na pesquisa. 149
Figura 41 - Produção de representação figurativa numa base material manipulável..... 150
Figura 42 - Sobreposição de representações no material manipulável..... 151
Figura 43 - Material manipulável confeccionado para a pesquisa..... 153
Figura 44 - Trecho do livro didático adotado no 5° ano abordando frações equivalentes..... 155
Figura 45 - Trecho do livro didático adotado no 5° ano com atividade de conversão..... 156
Figura 46 - Atividade de determinação da fração centesimal..... 156
Figura 47 - Transformações de registros realizadas no caminho resolutivo com escritas simbólicas para a conversão no sentido *fração → percentual*..... 157

Figura 48 - Conversão com o manipulável..... 159
Figura 49 - Transformações de registros realizadas no caminho resolutivo associado ao manipulável para a conversão no sentido *fração → percentual*..... 160
Figura 50 - Grau de não-congruência semântica das conversões sem o manipulável e com o manipulável..... 162
Figura 51 - Reconfiguração intermediária no manipulável..... 164
Figura 52 - Atividade 1 – experimento piloto..... 169
Figura 53 - Atividade 2 – experimento piloto..... 169
Figura 54 - Respostas da estudante à atividade 1 com o manipulável..... 175
Figura 55 - Respostas da estudante à atividade 2 sem o manipulável..... 177
Figura 56 - Desenho feito pela estudante..... 178
Figura 57 - Esquema com a síntese dos resultados do experimento piloto..... 179
Figura 58 - Sequência de tratamentos em caminho de conversão apresentado no Grupo A..... 197
Figura 59 - Participantes do Grupo B utilizando o manipulável durante a intervenção..... 198
Figura 60 - Teste de Sondagem aplicado aos grupos A e B..... 200
Figura 61 - Resoluções de A2 (Teste do Sondagem)..... 202
Figura 62 - Resoluções de A7 (Teste do Sondagem)..... 202
Figura 63 - Resoluções de B3 (Teste do Sondagem)..... 203
Figura 64 - Resoluções de B4 (Teste do Sondagem)..... 204
Figura 65 - Resoluções de B15 (Teste do Sondagem)..... 204
Figura 66 - Resoluções de A1 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 217
Figura 67 - Resoluções de A10 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 218
Figura 68 - Caminho resolutivo adotado para a conversão percentual → fração no grupo A..... 220
Figura 69 - Resoluções de A2 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 220
Figura 70 - Resoluções de A7 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 221
Figura 71 - Resoluções de A18 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 221
Figura 72 - Caminho resolutivo adotado para a conversão percentual → fração..... 223
Figura 73 - Desenhos produzidos pelo participante B7..... 224

Figura 74 - Resoluções de B7 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 225
Figura 75 - Resoluções de B3 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 226
Figura 76 - Resoluções de B4 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 226
Figura 77 - Resoluções de B15 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 227
Figura 78 - Resoluções de B17 (Instrumento Avaliativo – Q1)..... 228
Figura 79 - Exemplo de não-congruência semântica em diferentes graus..... 231
Figura 80 - Resoluções de A1 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 234
Figura 81 - Resoluções de A10 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 235
Figura 82 - Resoluções de A2 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 236
Figura 83 - Resoluções de A7 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 237
Figura 84 - Resoluções de B4 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 238
Figura 85 - Resoluções de B3 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 239
Figura 86 - Resoluções de B7 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 240
Figura 87 - Resoluções de B15 (Instrumento Avaliativo – Q2)..... 240
Figura 88 - Resoluções de A1 (Instrumento Avaliativo – Q4)..... 250
Figura 89 - Resoluções de A2 (Instrumento Avaliativo – Q4)..... 250
Figura 90 - Resoluções de A18 (Instrumento Avaliativo – Q4)..... 251
Figura 91 - Resoluções de B4 (Instrumento Avaliativo – Q4)..... 252
Figura 92 - Resoluções de B3 (Instrumento Avaliativo – Q4)..... 253
Figura 93 - Resoluções de B15 (Instrumento Avaliativo – Q4)..... 253
Figura 94 - Adição de valores percentuais correspondentes às partes dos todos particionados..... 258
Figura 95 - Possíveis apreensões observadas entre os participantes dos grupos A e B..... 265

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Contribuições e limites dos modelos de Saussure, Peirce e Frege..... 35
Quadro 2 - Exemplos de sistemas semióticos, signos e representações semióticas segundo Duval (2011)..... 36
Quadro 3 - Interpretações imediatas a partir de representações figurais..... 54
Quadro 4 - Exemplos de conversões por regras de correspondência..... 62
Quadro 5 - Signos e respectivos significados no registro fracionário com sentido parte-todo..... 99
Quadro 6 - Signos e respectivos significados no registro percentual..... 99
Quadro 7 - Variações nas representações produzidas com manipulável e repercussões nos registros numéricos correspondentes..... 119
Quadro 8 - Conversões escolhidas para o experimento e possíveis representações figurativas com o manipulável..... 170
Quadro 9 - Análise das conversões propostas na atividade 1 a partir dos critérios de congruência..... 172
Quadro 10 - Análise das conversões propostas na atividade 2 a partir dos critérios de congruência..... 173
Quadro 11 - Trecho da entrevista relativo à conversão 2/4 → registro percentual..... 176
Quadro 12 - Trecho da entrevista relativo à conversão 75% →registro fracionário..... 178
Quadro 13 - Trecho da entrevista - desenho feito pela estudante..... 179
Quadro 14 - Desempenho da estudante com a atividade 1..... 181
Quadro 15 - Índices totais de acertos por atividade/habilidade no Instrumento Diagnóstico..... 194
Quadro 16 - Síntese da intervenção realizada nos grupos A e B..... 199
Quadro 17 - Cronograma das atividades de intervenção e coleta de dados..... 210
Quadro 18 - Falas dos participantes do Grupo A referentes às conversões *fração → percentual* realizadas..... 212
Quadro 19 - Falas dos participantes do Grupo B referentes às conversões *fração → percentual* realizadas..... 213

Quadro 20 - Falas dos participantes do Grupo A referentes às conversões *percentual* → *fração* realizadas..... 216
Quadro 21 - Falas dos participantes do Grupo B referentes às conversões *percentual* → *fração* realizadas..... 222
Quadro 22 - Estratégias utilizadas pelos grupos A e B na resolução da atividade 1..... 229
Quadro 23 - Falas dos participantes do Grupo A referentes à identificação das frações representantes de partes maiores e menores que a metade..... 233
Quadro 24 - Falas dos participantes do Grupo B referentes à identificação das frações representantes de partes maiores e menores que a metade..... 237
Quadro 25 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo A referentes à identificação das frações mais próximas das partes representadas figurativamente..... 241
Quadro 26 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo B referentes à identificação das frações mais próximas das partes representadas figurativamente..... 244
Quadro 27 - Estratégias utilizadas pelos grupos A e B na resolução das atividades 2 e 3..... 247
Quadro 28 - Falas dos participantes do Grupo A referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias..... 249
Quadro 29 - Falas dos participantes do Grupo B referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias..... 251
Quadro 30 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo A referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias e representações percentuais..... 254
Quadro 31 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo B referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias e representações percentuais..... 256
Quadro 32 - Estratégias utilizadas pelos grupos A e B na resolução das atividades 4 e 5..... 260

Quadro 33 - Estratégias utilizadas pelos participantes nas resoluções do Instrumento Avaliativo..... 262

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico no 6º ano A.. 188
Tabela 2 - Resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico no 6º ano B.. 189
Tabela 3 - Itens e índices de acertos na atividade 7..... 192
Tabela 4 - Resultados da aplicação do Teste de Sondagem..... 201
Tabela 5 - Resultados da aplicação do Instrumento Avaliativo no Grupo A..... 206
Tabela 6 - Resultados da aplicação do Instrumento Avaliativo no Grupo B..... 206
Tabela 7 - Índices individuais de acertos no Instrumento Diagnóstico (ID) e Instrumento Avaliativo (IA) – Grupo A..... 207
Tabela 8 - Índices individuais de acertos no Instrumento Diagnóstico (ID) e Instrumento Avaliativo (IA) – Grupo B..... 208
Tabela 9 - Índices de acertos dos grupos A e B nas conversões em ambos os sentidos..... 215

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	20
2	**OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**	27
2.1	**A crítica de Duval aos modelos de Saussure, Peirce e Frege**	27
2.2	**A Teoria de Raymond Duval**	37
2.2.1	A formação das representações semióticas	39
2.2.2	O tratamento	42
2.2.3	A conversão	43
2.2.4	As unidades de sentido e as operações próprias do registro	46
2.2.5	Os fenômenos inerentes à conversão	55
2.2.6	Sucesso matemático x sucesso cognitivo	60
2.2.7	Relação entre representações semióticas e não semióticas	63
3	**OS NÚMEROS RACIONAIS**	67
3.1	**Significados e Representações**	69
3.1.1	Os números racionais e seus variados significados	69
3.1.2	Os números racionais e suas variadas representações	73
3.2	**Desafios no processo ensino-aprendizagem dos números racionais**	83
3.3	**Tratamentos e conversões das representações simbólicas**	89
3.3.1	Os tratamentos simbólico-numéricos realizados	93
3.3.2	As conversões simbólico-numéricas realizadas	95
3.4	**Congruência e não-congruência semântica entre os registros numéricos fracionários e percentuais**	97
4	**OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS CONCRETOS**	107
4.1	**Os manipuláveis no ensino e aprendizagem da matemática**	110
4.2	**Os manipuláveis e os racionais**	114
4.3	**Os manipuláveis e a TRRS**	115
4.4	**O manipulável como base para representações auxiliares**	120
4.4.1	A conversão com o manipulável e a apreensão do objeto	127
4.4.2	O material manipulável e a codificação	131
5	**PROPOSIÇÃO DA TESE E PERCURSO METODOLÓGICO**	135
5.1	**Problema de pesquisa**	135

5.2 **Argumentação e hipótese**..... 135
5.3 **Objetivo geral**..... 136
5.4 **Objetivos específicos**..... 136
5.5 **Desenho da pesquisa**..... 137
5.6 **Campo e participantes da pesquisa**..... 138
5.7 **Intervenção e coleta de dados**..... 138
5.7.1 Aspectos éticos da pesquisa..... 141
5.8 **Instrumentos de coleta de dados**..... 141
5.8.1 Instrumento Diagnóstico e Instrumento Avaliativo..... 142
5.8.2 Teste de sondagem..... 147
5.8.3 Entrevista semiestruturada..... 148
5.9 **Material didático manipulável utilizado**..... 148
5.10 **Caminhos para conversão nos grupos A e B**..... 154
5.10.1 Caminho para conversão adotado no grupo A..... 154
5.10.2 Caminho para conversão adotado no grupo B..... 158
5.11 **Análise e interpretação dos resultados**..... 165
6 **EXPERIMENTO PILOTO**..... 168
6.1 **Instrumentos usados no experimento: atividades 1 e 2**..... 168
6.1.1 Variação de não-congruência nas atividades 1 e 2..... 171
6.2 **Sondagem**..... 174
6.3 **Apresentação do manipulável**..... 175
6.4 **Atividade 1 com o manipulável**..... 175
6.5 **Atividade 1 sem o manipulável e entrevista**..... 176
6.6 **Atividade 2 sem o manipulável e entrevista final**..... 177
6.7 **Discutindo os resultados do Experimento Piloto**..... 180
6.7.1 Análise do desempenho da estudante do ponto de vista matemático..... 180
6.7.2 Análise do desempenho da estudante do ponto de vista cognitivo..... 182
7 **DEFINIÇÃO DOS PARTICIPANTES, INTERVENÇÃO E APLICAÇÃO DO INSTRUMENTO AVALIATIVO**..... 187
7.1 **Aplicação do Instrumento Diagnóstico**..... 187
7.1.1 Análise dos resultados do Instrumento Diagnóstico e definição dos grupos A e B..... 189

7.2 **Intervenção nos grupos A e B**..... 195
7.2.1 Apresentação de caminho para conversão fração → percentual no Grupo A..... 196
7.2.2 Apresentação de caminho para conversão fração → percentual no Grupo B..... 197
7.3 **Aplicação do Teste de Sondagem**..... 200
7.3.1 Análise dos resultados e redefinição dos grupos A e B..... 201
7.4 **Aplicação do Instrumento Avaliativo**..... 205
7.4.1 Resultados do Instrumento Avaliativo e realização das entrevistas... 205
8 **DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO INSTRUMENTO AVALIATIVO**..... 210
8.1 **A conversão no sentido oposto**..... 211
8.1.1 Estratégias utilizadas para a conversão percentual → fração..... 216
8.1.2 As estratégias utilizadas e a variação de não-congruência semântica..... 230
8.1.3 Apreensões observadas a partir das resoluções da atividade 1..... 231
8.2 **A percepção da parte em relação ao todo na representação**..... 233
8.2.1 Estratégias utilizadas para indicar a fração maior e a menor que a metade do todo..... 233
8.2.2 Estratégias utilizadas para associar a fração à ilustração apresentada..... 241
8.2.3 Apreensões observadas a partir das resoluções das atividades 2 e 3..... 248
8.3 **A comparação de tamanho entre partes representadas**..... 249
8.3.1 Estratégias utilizadas para comparar as frações..... 249
8.3.2 Estratégias utilizadas para comparar representações fracionárias e percentuais..... 254
8.3.3 Apreensões observadas a partir das resoluções das atividades 4 e 5..... 261
8.4 **Diferentes caminhos, diferentes apreensões**..... 262
9 **CONSIDERAÇÕES FINAIS**..... 266
REFERÊNCIAS..... 274
APÊNDICE A - Instrumento Diagnóstico..... 283

APÊNDICE B - Teste de Sondagem..... 285
APÊNDICE C - Instrumento Avaliativo..... 286
APÊNDICE D - Instrumento Avaliativo respondido por A1..... 287
APÊNDICE E - Instrumento Avaliativo respondido por A2..... 288
APÊNDICE F - Instrumento Avaliativo respondido por A7..... 289
APÊNDICE G - Instrumento Avaliativo respondido por A10..... 290
APÊNDICE H - Instrumento Avaliativo respondido por A18..... 291
APÊNDICE I - Instrumento Avaliativo respondido por B3..... 292
APÊNDICE J - Instrumento Avaliativo respondido por B4..... 293
APÊNDICE K - Instrumento Avaliativo respondido por B7..... 294
APÊNDICE L - Instrumento Avaliativo respondido por B15..... 295
APÊNDICE M - Instrumento Avaliativo respondido por B17..... 296

1 INTRODUÇÃO

Dentre os maiores desafios que se apresentam para docentes e discentes de matemática no Ensino Fundamental, incluem-se o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Ocorre que os alunos, familiarizados com o universo dos números naturais, explorado nas primeiras etapas da escolaridade, apresentam dificuldades ao lidarem com este “novo” conjunto numérico, os números racionais.

Uma espécie de estranheza dos alunos frente aos racionais deriva da percepção de que estes números carregam especificidades não identificáveis entre os naturais, o que torna mais difícil a sua compreensão. Em outras palavras, os alunos demonstram dificuldades para assimilar que algumas propriedades relacionadas ao campo dos números naturais só têm sua validade naquele domínio e, portanto, não podem ser consideradas quando lidamos com outro conjunto numérico.

Essa ampliação de um conjunto numérico já familiar, os números naturais, para o conjunto dos números racionais exige rupturas que acabam favorecendo o surgimento de obstáculos à aprendizagem dos estudantes (Brasil, 1998).

Algumas destas particularidades dos racionais em relação aos naturais foram descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN em suas orientações didáticas para o ensino de matemática:

> cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9, 4/12... são diferentes representações de um mesmo número; a comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < 1/2; se o “tamanho” da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério (Brasil, 1998, p. 101).

Dessa forma, os alunos são apresentados a um conjunto numérico mais amplo que o conjunto dos números naturais, que abarca possibilidades e revela características não observadas até então, o que requer dos professores a utilização de estratégias de ensino que sejam capazes de favorecer essa compreensão.

Contudo, a dificuldade dos alunos com relação à apreensão conceitual dos números racionais tem sido claramente percebida em todas as etapas da escolarização, ainda que a maioria deles acabe dominando alguns algoritmos específicos que são ensinados para trabalhar, sobretudo, com as suas

representações numéricas. A deficiência quanto ao conhecimento conceitual mais geral dos racionais estende-se, segundo Moss e Case (1999), pelas suas formas decimais, fracionárias e percentuais de representação.

Pesquisas como as de Catto (2000), Merlini (2005), Teixeira (2008) e Santos (2005) têm apontado a variedade de significados e a variedade de tipos de representações que os números racionais podem assumir como a causa para a dificuldade de compreensão por parte dos alunos. Essa realidade também é objeto de uma percepção pessoal, pois, atuando como professor dos anos iniciais do ensino fundamental na rede municipal de Recife, vivencio as dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses números.

Dentre as teorias que apresentam um dos possíveis caminhos para a abordagem dos objetos matemáticos com vistas à superação de dificuldades de aprendizagem a partir de uma apreensão mais significativa e conceitual dos estudantes, podemos citar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS, desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval.

Segundo a TRRS, a aprendizagem em matemática pressupõe a exploração de seus objetos a partir da mobilização de, pelo menos, dois de seus registros de representação semiótica (Duval, 2003). Isso porque, nas palavras do autor, “toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (Duval, 2009, p.91). Nesse sentido, ao tratarmos sobre o ensino dos racionais, à luz da teoria de Duval, devemos considerar o trabalho com as diferentes formas de representar esses números.

São exemplos de registros de representação semiótica os sistemas de numeração, as expressões algébricas, as figuras geométricas, os gráficos, as tabelas e a própria linguagem natural. O número racional 0,25, por exemplo, pode também ser representado por outras formas numéricas, tais como 1/4 e 25%, além de suas expressões figurativas e em linguagem natural.

Desse modo, tais registros, embora tenham formas e conteúdos diferentes, referem-se ao mesmo objeto matemático e a coordenação dessas representações é essencial para a sua apreensão, pois tal ação é fomentadora de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, por exemplo (Duval, 2003).

Essa coordenação entre as diferentes representações de um mesmo objeto matemático, ou seja, a passagem de uma representação para outra ocorre, segundo

Duval (2003), por *tratamento*, quando temos uma transformação acontecendo num mesmo tipo de registro, ou por *conversão*, quando, na transformação, ocorre, também, a transição de um tipo de registro para outro.

Para o autor, a atividade de conversão sempre exige um esforço cognitivo maior por parte do estudante. No entanto, é exatamente esse trabalho cognitivo, que o estudante realiza ao articular os diferentes registros, o que mais importa para a aprendizagem, pois é no exercício das transições entre uma representação e outra que ele se apropria de aspectos conceituais do objeto representado. Isso ocorre porque qualquer que seja a representação, observada isoladamente, revelará apenas parcialmente aquilo que representa (Duval, 2003).

Duval (2003), no entanto, observa que, a despeito de sua importância, a conversão é comumente subutilizada nas aulas de matemática. Isso porque, muitas vezes, essas transformações são realizadas com o objetivo, apenas, de mudar para uma representação mais adequada à resolução de um dado problema e via aplicação de regras de correspondência, o que, segundo o autor, em nada favorece a apreensão conceitual do objeto representado.

Portanto, faz-se necessário, ao trabalhar com as conversões, identificar e saber distinguir aquilo que pode significar uma apreensão significativa do aluno em relação ao objeto em estudo, daquilo que corresponde, apenas, a sua habilidade de realizar a conversão através da aplicação direta e mecanizada de tais regras.

Assim, a superação dos desafios relativos ao ensino e aprendizagem dos números racionais, sobretudo no que tange à conversão entre os seus registros de representação, deve passar pela compreensão, segundo a TRRS, do papel de destaque que esse tipo de transformação assume nesse processo e pela elaboração de situações didáticas que auxiliem os alunos a alcançarem o êxito, do ponto de vista cognitivo, nas atividades propostas.

Por outro lado, estudos frequentemente recomendam a utilização de materiais manipuláveis para a abordagem dos objetos matemáticos durante as aulas. Segundo Gitirana e Carvalho (2010), tais materiais são concebidos para que, através de sua manipulação, tenha-se o início da construção de conceitos e procedimentos básicos da matemática entre os estudantes.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017), ao assumir sua orientação pelo pressuposto de que “a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de

significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações", indica recursos didáticos, tais como "malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica" ressaltando o seu "papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas"(Brasil, 2017, p. 276).

Lorenzato (2006) define esses recursos como materiais didáticos manipuláveis concretos, destacando a sua contribuição nos processos de ensino e de aprendizagem como "um excelente catalizador para o aluno construir o seu saber matemático (Lorenzato, 2006, p.21)". Nesse sentido, Turrioni (2004) afirma que os materiais manipuláveis podem ser muito significativos "para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos (Turrioni, 2004, p.78)".

A motivação para este trabalho de pesquisa passa pelo desejo de contribuir com a prática docente, especificamente, no que concerne à abordagem dos números racionais, e nasce, sobretudo, de inquietações e questionamentos oriundos de nossa pesquisa no mestrado. A pesquisa, desenvolvida no Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, cujo objetivo era investigar, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais, apontou para uma melhora no índice de acertos dos alunos quando estes se utilizavam de materiais manipuláveis nos exercícios de conversão entre diferentes representações do número racional (Melo, 2019).

A pesquisa, contudo, não produziu evidências que permitissem uma conclusão quanto aos eventuais ganhos do ponto de vista cognitivo, ou seja, ficaram incertezas relacionadas à possível influência que o caminho de conversão com a utilização do material manipulável, apesar das regras de correspondência a ele associado, teve na apreensão conceitual do objeto matemático abordado.

Pretendemos, portanto, nessa nova pesquisa, investigar de que modo caminhos distintos para uma mesma conversão envolvendo representações numéricas do número racional, um destes com uso de material manipulável, podem influenciar na aprendizagem desse objeto. Em outras palavras, buscamos analisar, do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo, quais as implicações que diferentes formas de realizar a conversão têm na apreensão do número racional ali representado.

Assim, o estudo que se empreenderá poderá ter sua contribuição no campo do ensino da matemática, sobretudo, se pudermos usar suas conclusões para o enriquecimento da prática docente, de modo particular, no que tange à exploração de vários caminhos para trabalhar as conversões durante as aulas.

Quanto à estrutura, o texto destaca, em sua introdução, a importância da pesquisa relacionada ao objeto matemático número racional por seu caráter desafiador no que tange ao ensino e à aprendizagem em matemática, a pertinência da TRRS para a compreensão e superação das dificuldades envolvidas, bem como a relevância que os materiais manipuláveis podem ter nesse processo. Também apresentamos a motivação e o foco de nossa investigação para esse trabalho.

No capítulo “Os registros de representação semiótica”, apresentamos, brevemente, elementos dos modelos semióticos de Saussure, Peirce e Frege, destacando os limites e contribuições apontadas por Duval (2011) e que serviram de fundamento para sua própria construção teórica. Discorremos sobre vários pressupostos da TRRS, sobretudo, a parcialidade do registro em relação ao objeto, a importância das conversões entre as representações para a apreensão do representado e a dependência das representações mentais em relação às representações semióticas, pontos essenciais em nossa pesquisa.

No capítulo “Os números racionais”, discutimos o surgimento e a importância dos números racionais, seus diversos significados e representações. Abordamos, também, os desafios que envolvem o processo de ensino-aprendizagem desse objeto matemático a partir de vários autores que se dedicaram ao tema. Por fim, vimos tratamentos e conversões possíveis a partir de suas representações simbólico-numéricas e analisamos a variação de não-congruência semântica entre algumas delas.

No capítulo “Os materiais manipuláveis concretos”, descrevemos a maneira como, ao longo da história, as referências concretas foram sendo vistas e utilizadas, sobretudo, no suporte ao pensamento matemático. A partir de trabalhos de vários pesquisadores, identificamos benefícios e distorções que podem resultar da adoção de materiais manipuláveis, especialmente, na abordagem dos números racionais em sala de aula. Discutimos, a partir da TRRS, características das representações produzidas a partir desses recursos, bem como a potencialidade de tais representações utilizadas como representações intermediárias nas conversões.

O capítulo “Proposição da tese e percurso metodológico” traz, inicialmente, a argumentação da tese, explicitando o problema de pesquisa, o objetivo geral e os objetivos específicos do trabalho. Ainda nesse capítulo, descrevemos o percurso metodológico planejado para a pesquisa empírica realizada com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal da cidade do Recife. Apresentamos e analisamos as atividades exploradas nos instrumentos aplicados aos participantes, bem como o material manipulável utilizado. Explicamos nossa proposta de intervenção e revelamos o caminho de conversão trabalhado em cada um dos grupos de participantes.

No capítulo “Experimento piloto”, discutimos o experimento aplicado a uma criança de 10 anos de idade, estudante do 5º ano de uma escola da rede particular de ensino em Recife, com vistas à avaliação do material manipulável elaborado para essa pesquisa, bem como do caminho de conversão a ele associado. Apresentamos os resultados do experimento e analisamos o desempenho da estudante tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo.

No capítulo “Definição dos participantes, intervenção e aplicação do Instrumento Avaliativo”, apresentamos e analisamos os resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico, que serviram para definir, inicialmente, os dois grupos de participantes na pesquisa. Descrevemos o roteiro seguido durante a intervenção realizada em cada grupo para a apresentação do caminho de conversão *fração* → *percentual*. Também apresentamos e analisamos os resultados do Teste de Sondagem, aplicado para a redefinição dos grupos, e, por fim, revelamos os resultados oriundos do Instrumento Avaliativo respondido por esses participantes.

No capítulo “Discussão dos resultados do Instrumento Avaliativo”, discutimos os resultados obtidos com a aplicação do Instrumento Avaliativo aos dez participantes que chegaram ao final dessa investigação. Identificamos, descrevemos, denominamos e analisamos as estratégias utilizadas pelos participantes na resolução das atividades propostas e que demandavam a conversão no sentido oposto ao trabalhado até então, a percepção da parte em relação ao todo na representação e a comparação de tamanho entre partes representadas. Com relação às conversões propostas, analisamos, também, a influência dos fenômenos de variação de congruência e não-congruência semântica e heterogeneidade dos sentidos. Discorremos sobre as possíveis apreensões realizadas pelos participantes e a sua relação com os caminhos de conversão trabalhados durante a intervenção.

Por fim, nas considerações finais, retomamos a argumentação desenvolvida para a formulação de nossa hipótese, sob os pressupostos da TRRS. Resgatamos, brevemente, os passos seguidos nessa investigação e os resultados oriundos da aplicação dos instrumentos aos participantes. Aprofundamos a análise a partir de alguns achados e expressamos a importância desse trabalho para o pesquisador, bem como a sua expectativa de que tal produção possa contribuir no campo da Educação Matemática, sobretudo, no que tange à abordagem dos números racionais em sala de aula.

2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Desde os primórdios da civilização, os seres humanos se valem de sinais que possam utilizar para expressar, no mundo exterior, os objetos que são pensados. Esses sinais ou signos não têm apenas o papel de comunicar um pensamento de uma pessoa para a outra, eles também cumprem uma função de natureza objetiva para o indivíduo, já que “o homem só conhece o mundo porque, de alguma forma, o representa e só interpreta essa representação numa outra representação” (Santaella, 2012, p.80).

Muito embora a noção de signos seja mais antiga, foi somente no final do século XIX que passamos a estudá-los a partir de modelos de análise formulados para discutir a sua diversidade e função concernentes, sobretudo, à atividade científica e à comunicação (Duval, 2011).

Esse novo campo do conhecimento foi denominado de Semiótica, oriundo do grego *semeion*, que significa signo. Assim, a Semiótica pode ser designada como a ciência dos signos ou a ciência geral de todas as linguagens (Santaella, 2012).

Nesse capítulo, descreveremos, de forma sintética, três modelos de análise sobre a diversidade e função dos signos que, segundo Duval (2011, p. 28), “apareceram quase ao mesmo tempo e, especialmente, de maneira independente” e contribuíram com todos os trabalhos de semiótica surgidos posteriormente. Apresentaremos a crítica que o autor faz a tais modelos e, finalmente, abordaremos os pontos de sua proposta teórica que consideramos mais pertinentes para fundamentar essa pesquisa.

2.1 A crítica de Duval aos modelos de Saussure, Peirce e Frege

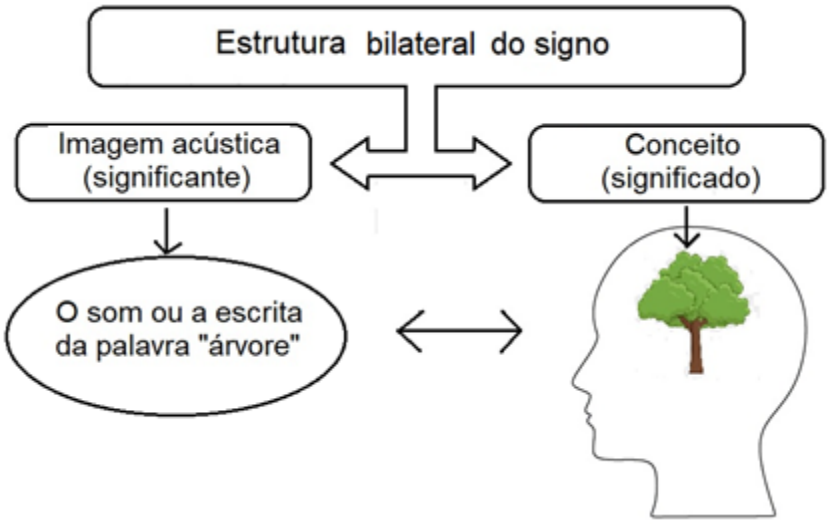
Destacando contribuições e limites de três diferentes modelos semióticos, o psicólogo e filósofo francês Raymond Duval, nascido em 1937, comparou os trabalhos de Saussure, Peirce e Frege que, segundo ele, nada tinham em comum, mas fundamentaram todos os estudos relacionados aos signos realizados em seguida (Duval, 2011). Sobre tais modelos, especificamente sobre alguns pontos que fomentaram a elaboração da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, falaremos, brevemente, a seguir.

Ferdinand de Saussure (1857-1913) usou a linguística como domínio de referência para formular a sua visão acerca da semiótica. A questão que orientava suas pesquisas era “o que constitui uma língua como um sistema comum de sentido, apesar das mudanças e variações resultantes de suas múltiplas utilizações?” (Duval, 2011, p.29). Embora seu objeto de estudo tenha sido a língua, o modelo de Saussure também é usado para a análise de signos não linguísticos.

Para ele, um signo podia ser definido por aquilo que “une um conceito a uma imagem acústica” (Saussure, 2006, p. 80). O conceito refere-se ao significado e a imagem acústica ao significante. O signo linguístico tem, portanto, uma estrutura bilateral ou diática, ou seja, refere-se a apenas dois constituintes: significado e significante.

A imagem acústica ou significante é “a expressão material do signo, como o som da palavra ‘árvore’ ou a imagem da palavra escrita no papel” (Salatiel, 2008, p. 2). O conceito ou significado é o que é projetado na mente do indivíduo que entra em contato com o significante, como procuramos ilustrar na figura 1.

Figura 1 - Estrutura bilateral do signo de Saussure.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que os signos para Saussure resultam de associações entre significados e significantes, já a referência aos objetos em si (uma árvore real, por exemplo) não é considerada em sua análise semiótica. Em outras palavras, o modelo saussuriano não inclui objetos do mundo físico, pois, como já dissemos, analisa signos linguísticos cujas expressões materiais restringem-se ao som e à escrita.

Essa definição de signo, segundo Duval (2011), conduz à proposição de que “os signos não têm nenhuma realidade material. Eles são os invariantes de ocorrências que mudam sensivelmente” (p.29).

Portanto, como observa Nöth (1996), a teoria de Saussure é “[...] incompatível com teorias semióticas que descrevem a semiose como um processo cognitivo de interação entre o indivíduo e o mundo, um processo no qual o signo tem o papel de mediador entre o pensamento e a realidade” (Nöth, 1996, p. 30). No entanto, o autor reconhece que, mesmo com observações feitas no sistema linguístico, a teoria de Saussure acrescenta itens que contribuem para a análise semiótica de sistemas de signos não linguísticos (Nöth, 1996).

Numa segunda proposição, Saussure defende que os signos só são identificáveis por conta das relações de oposição que estabelecem com outros signos dentro de um sistema semiótico, ou seja, o sentido de um signo depende dos outros signos pertencentes àquele sistema (Duval, 2011). Nas palavras de Nöth (1996, p.36), “[...] o valor do signo não vem daquilo que o signo é em si mesmo, mas do outro, ou seja, daquilo que o signo não é”.

Essa é, segundo Duval (2011), a verdadeira contribuição de Saussure, “o que leva a afirmar que é apenas no interior de um sistema semiótico que alguma coisa pode funcionar como signo” (Duval, 2011, p. 30). Entende-se, portanto, que não se deve confundir o signo com o objeto a que se refere, pois o seu sentido “está associado ao sistema no qual ele funciona como signo”, já a sua referência ao objeto “depende de uma operação intencional de designação” (Duval, 2011, p. 31).

Como limite do modelo de Saussure, Duval (2011) aponta a sua atenção restrita à língua enquanto sistema semiótico, desconsiderando, nas palavras do autor, “a diversidade de enunciados que a língua permite produzir, assim como as operações discursivas que essa produção requer” (p. 32). Há, portanto, para Duval (2011), no que concerne à análise de Saussure, uma ênfase no sistema semiótico em detrimento do modo como os interlocutores o utilizam.

Charles Sanders Peirce (1839-1914), por sua vez, teve como projeto “descrever o papel das representações e dos signos em todas as formas da atividade cognitiva, desde a da simples adaptação ao que se produz no ambiente próximo, até aquelas de exploração científica” (Duval, 2011, p.32). A questão orientadora de sua pesquisa era “como analisar a variedade dos tipos de representações no processo de interpretação de seu sentido?” (p. 29).

Diferente de Saussure, Peirce não pretendeu limitar sua análise semiótica a único domínio de referência, pois “defendia que toda ideia é um signo” (Nöth, 1996, p.61). Nesse sentido, estudar a semiótica significaria estudar as leis que regem esses signos presentes em todos os campos do conhecimento humano. Assim, o desafio de Peirce era construir um modelo de análise sígnica tão abrangente que pudesse responder a toda e qualquer ciência aplicada (Santaella, 2012).

Peirce (2005, p.46) definiu o signo como “aquilo que sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém”. Se para Saussure, restrito à linguística como domínio de referência, o signo equivalia a uma palavra, para Peirce o signo pode ser qualquer coisa: uma palavra, um gesto, um som, um quadro, uma foto, enfim, tudo aquilo a que se pode atribuir significado.

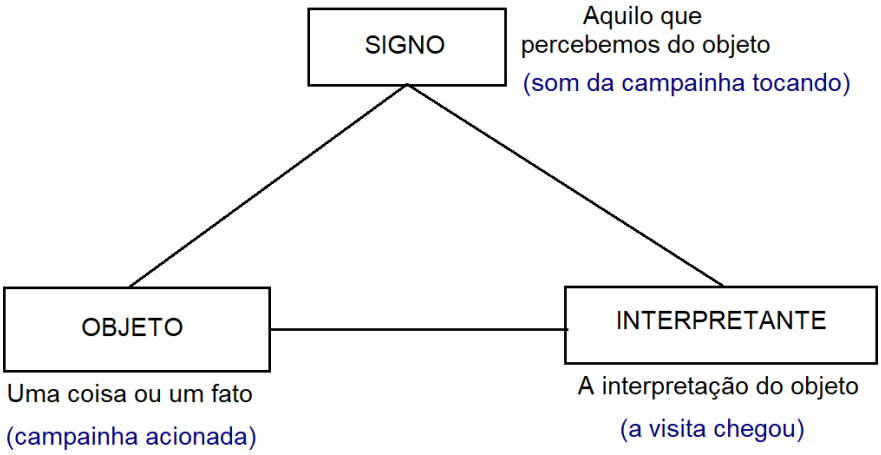
Para construir seu modelo de análise dos signos, Peirce (2005) estabeleceu três categorias universais para explicar os diversos fenômenos relacionados a tudo aquilo que sentimos, seja fisicamente, a partir do que captamos do mundo exterior através dos nossos sentidos, seja emocionalmente ou intelectualmente: a primeiridade, a secundidade e a terceiridade.

A primeiridade é a impressão imediata que temos ao interagirmos com um objeto da realidade, ou seja, é a sensação primeira gerada pelo estímulo sem que haja nenhum tipo de racionalização a respeito. A secundidade refere-se à distinção da impressão obtida na primeiridade. Nessa categoria, após o sentimento imediato, reagimos a esse estímulo com um outro sentimento na tentativa de decifrá-lo. Pires (2008, p.156) observa que, para Peirce, “a consciência de um certo sentimento sendo rompido por um outro é o que se pode chamar de experiência”. A terceiridade é a etapa em que chegamos à compreensão, ou seja, chegamos à conclusão do que aquele objeto, cuja impressão imediata reagimos, representa. É na terceiridade que representamos e interpretamos a realidade, pois essa é “[...] a categoria da mediação, do hábito, da memória, da continuidade, da síntese, da comunicação, da representação, da semiose e dos signos”. (Nöth, 1996, p. 64).

Essas três categorias são, segundo Santaella (2012, p. 64), “modos de operação do pensamento sígnico que se processam na mente” e, para Nörth (1996), servem de base para o signo que, em primeiridade, representará a impressão imediata que temos diante de um objeto concreto ou abstrato da realidade, em secundidade ocorrerá a distinção desse signo em relação aos demais e por fim, em terceiridade, o signo permitirá a interpretação do objeto.

No modelo de Peirce, o signo tem uma relação triádica com o seu objeto e seu interpretante. O objeto[1] aqui é a coisa em si, refere-se aos objetos da realidade, enquanto que o interpretante é o pensamento, a ideia, a interpretação que é determinada pelo signo que representa o objeto e, portanto, que é determinada também pelo objeto (Peirce, 2005). Na figura 2, buscamos ilustrar a relação triádica do signo peirceano usando como exemplo uma situação comum do cotidiano.

Figura 2 - Exemplo com a triádica de Peirce.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A campainha de uma residência é acionada (objeto), a pessoa no interior da casa ouve um som (signo em primeiridade), distingue que esse som é da campainha (signo em secundidade) e, por fim, conclui que a campainha foi acionada pela visita que esperava (interpretante/signo em terceiridade).

Segundo Duval (2011), esse processo triádico de interpretação de Peirce o levou a distinguir vários níveis hierárquicos de signos. Duval (2011), contudo, vai se interessar em seus escritos pela abordagem de Peirce quanto às três diferentes formas de signos usadas para projetar representações da realidade: Ícone, Índice e Símbolo.

Um Ícone é um signo que se parece com o objeto representado. Nas palavras de Peirce (2005, p.52), qualquer que seja a representação será Ícone de qualquer

[1] Peirce (2005) denomina de objeto dinâmico. Já o signo projetado no pensamento quando entramos em contato com o objeto dinâmico é chamado de objeto imediato.

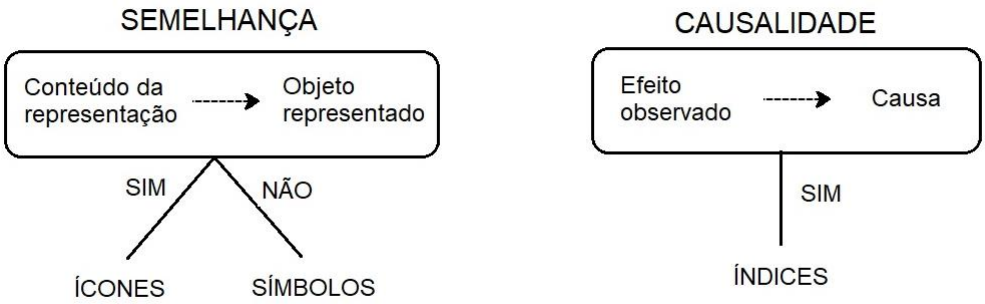
coisa “[...] na medida em que for semelhante a essa coisa e utilizado como um seu signo”. Nesse caso, desenhos, pinturas e algumas placas de trânsito são exemplos de Ícones, já que sugerem impressões que correspondem aos objetos representados.

Já o Índice está qualitativamente ligado ao objeto representado. Segundo Peirce (2005, p. 52), um signo é Índice quando compartilha alguma qualidade em comum com aquilo que representa e “[...] é com respeito a estas qualidades que ele se refere ao objeto”. Caracteriza-se por uma relação de causalidade em que o signo é o efeito observado e o objeto é a causa. Pegadas na areia são um Índice que pode representar o objeto pessoa, assim como fumaça pode representar fogo, por exemplo.

Por sua vez, o Símbolo não se caracteriza por uma relação de semelhança ou de efeito com o objeto, mas sim por uma simples convenção. Para Peirce (2005, p. 53), o Símbolo é todo signo que representa o objeto “[...] em virtude de uma lei, normalmente uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com o Símbolo seja interpretado como se referindo àquele objeto”. Como alguns exemplos de Símbolos, podemos citar as palavras de modo geral, os números e as cores no semáforo de trânsito.

Duval (2011, p. 33), observou que essa tricotomia elaborada por Peirce para designar os signos em função da relação com os objetos que representam baseia-se em dois critérios: “seja a similaridade entre o conteúdo de uma representação dada e o objeto representado, seja uma relação de causalidade entre a ocorrência de um fenômeno e o que pode ser a causa”. Na figura 3, vemos a sua apresentação ilustrativa da partição tricotômica das representações de Peirce.

Figura 3 - Partição tricotômica das representações de Peirce segundo Duval.



Fonte: Duval (2011, p.33).

Embora reconheça que o modelo de Peirce inova ao apresentar uma classificação dos tipos de signos, Duval (2011) critica o caráter pouco discriminante de tal classificação. Segundo Duval (2011, p.34), a tricotomia Ícone, Índice e Símbolo, por exemplo, “se limita à propriedade comum às representações e aos signos (“se colocar no lugar de...”), e ela ignora a propriedade específica dos signos (sua relação com o objeto é uma relação de referência e não de causa e efeito)”.

Duval (2011) também chama a atenção para o fato de que uma classificação dos signos que demanda apenas a identificação de similaridade ou não similaridade entre representação e objeto representado não dá conta de outras questões, tais como podemos considerar as palavras num enunciado de matemática, os algarismos na escrita de um número, os sinais de operações e as letras nas equações e fórmulas como surgindo do mesmo tipo de representação?

Outra crítica de Duval (2011) é que o modelo de Peirce concede ao objeto a prioridade cognitiva e epistemológica sobre as suas possíveis representações. As três fases na formação de um conhecimento (primeiridade, secundidade e teceiridade), apresentadas por ele, são “o próprio objeto, depois uma representação do objeto, e sua interpretação por um intérprete, a qual vai consistir em uma nova representação considerada objeto etc” (Duval, 2011, p. 34).

O autor argumenta que isso seria um problema em matemática, já que ela “é o domínio do conhecimento no qual existe quase sempre, se não sempre, prioridade das representações sobre os objetos do conhecimento” (Duval, 2011, p.34). Além de que o ensino da matemática também evidencia que é exatamente a distinção entre os objetos e suas diversas representações uma das principais dificuldades de aprendizagem demonstradas pelos estudantes (Duval, 2011).

Gottlob Frege (1848-1925), por fim, teve sua pesquisa orientada pela seguinte questão: “como explicar o progresso rigoroso e não tautológico do raciocínio matemático?” (Duval, 2011, p. 29). Frege, diferente de Saussure e Peirce, não nos oferece uma definição de signo, o seu interesse está direcionado ao modo da produção semiótica na matemática. Nesse caso, “os signos são as escritas simbólicas em álgebra e em análise” (p. 34).

Em seu célebre artigo “Sobre sentido e referência”, Frege (1978) apresenta a sua importante distinção entre os conceitos de sentido e referente. Para ele, por meio de um signo (palavra, combinação de sinais, expressão) podemos expressar o seu sentido e designar o seu referente (Frege, 1978).

O referente é o objeto da realidade sobre o qual falamos, já o sentido diz respeito à forma, ao modo como falamos desse objeto. Como exemplo, observemos as representações A e B a seguir:

A: LUA

B: SATÉLITE NATURAL DA TERRA

Temos que ambas as representações se referem ao mesmo objeto da realidade. Contudo, com a representação B, aprendemos algo sobre o objeto que não aprendemos com a representação A, logo, as representações têm o mesmo referente, mas não o mesmo sentido.

Assim, “duas expressões podem ter dois sentidos diferentes, mas se referirem ao mesmo objeto: 3 + 9; 3 x 4; 24 / 2; $\sqrt{\mathbf{144}}$ etc.” (Duval, 2011, p. 35). As representações, portanto, podem ter sentidos diferentes ou apresentar conteúdos muito diferentes e, ainda assim, representarem o mesmo número, por exemplo (Duval, 2011).

Nesse caso, quando expressamos, de forma tautológica, A = A, temos uma apresentação *trivial*, pois o objeto é apresentado da mesma forma duas vezes, já quando expressamos A = B, temos uma apresentação *informativa*, pois o mesmo objeto é apresentado de duas formas diferentes (Frege, 1978). Para Duval (2011, p.35), é essa equivalência a = b “que é a base de todo cálculo como de todo raciocínio em matemática (as deduções logicamente válidas)”.

O limite da contribuição de Frege, segundo Duval (2011), foi não considerar a importância dos outros tipos de representações envolvidas na produção matemática e usar como modelo para todos os sistemas semióticos as escritas simbólicas utilizadas em álgebra e análise. Frege acreditava que, assim como ocorrem com as escritas simbólicas cujos cálculos utilizam o processo de substituição baseado na equivalência a = b, o discurso em língua natural só teria sentido e contribuiria com o desenvolvimento do conhecimento se funcionasse de igual modo, o que, para Duval (2011, p. 35), “vai contra a experiência de todo indivíduo que fala em sua língua materna”.

O quadro 1, apresenta uma síntese das principais contribuições e limitações identificadas e discutidas por Duval (2011) a partir de cada um desses três modelos semióticos.

Quadro 1 - Contribuições e limites dos modelos de Saussure, Peirce e Frege.

	Saussure (1857-1913)	Peirce (1839-1914)	Frege (1848-1925)
Contribuições segundo Duval (2011)	Observou que o signo só pode significar algo no interior de seu sistema semiótico, ou seja, ele não tem sentido em si mesmo e o seu valor é dado em oposição a outros signos pertencentes aquele mesmo sistema.	Propôs um modelo abrangente de análise dos signos que pudesse atender a qualquer domínio de referência. Inovou ao apresentar uma classificação dos tipos de signos.	Observou que as diferentes representações podem ter um mesmo referente (objeto), mas não o mesmo sentido (forma, conteúdo).
Limites segundo Duval (2011)	Restringiu sua atenção a um único sistema semiótico, a língua.	Limitou-se à propriedade comum dos signos que é se colocar no lugar de algo e não ofereceu, em sua classificação dos diferentes tipos, uma discriminação que atendesse a outras questões interessantes ao campo da matemática. Entendeu que o objeto tem prioridade cognitiva sobre as suas possíveis representações, sendo que, em matemática, o que ocorre é o oposto.	Enfatizou as escritas simbólicas em detrimento de outros tipos de representações utilizadas na produção matemática.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A conclusão a que chega Duval (2011) é que nenhum dos três modelos aqui citados pode ser utilizado na análise das atividades propostas e produções dos alunos em matemática. Em suas palavras, “os modelos propostos são inadequados em relação a tudo que podemos observar sobre o funcionamento e o desenvolvimento da atividade matemática” (p. 36).

Por outro lado, é indiscutível que as contribuições advindas de cada um desses modelos foram fundamentais para a formulação da proposição teórica de Duval sobre a aprendizagem dos objetos matemáticos. No que concerne a nossa pesquisa, sobretudo, a contribuição dada por Frege (1978), destacando os diferentes sentidos presentes nas diferentes representações de um mesmo referente.

Duval (2011, p. 37) observa que esses diferentes modelos semióticos demonstram a dificuldade ou ambiguidade para definir aquilo que chamamos de *signo*. Por outro lado, o surgimento daquilo que chamamos de ‘linguagem matemática”, com a predominância das equações algébricas, fórmulas e representações gráficas, tornou preferível “falar de *representação semiótica* que de signo”. Para o autor, a representação semiótica se distinguiria do signo por duas características: a organização interna própria a cada tipo de representação semiótica (a frase, a equação, o gráfico e a figura geométrica têm formas bem distintas de organização) e a possibilidade de identificar, seja qual for a representação semiótica, as suas

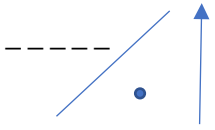
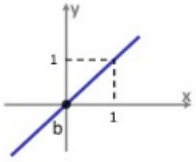
unidades de sentido, ou seja, os dados matematicamente pertinentes em seu interior (Duval, 2011).

Há, para o autor, portanto, uma importante distinção entre um simples signo e o que ele chama de representação semiótica. Um mesmo signo pode estar associado a coisas bem diferentes, já a representação semiótica, utilizada na linguagem matemática, é a expressão de um único objeto.

Para algumas pessoas, a letra b, por exemplo, significa a inicial de seus próprios nomes (Bianca, Baltazar, Benedito etc.), enquanto que para outros indivíduos não significa nada mais que a segunda letra do alfabeto. A letra b, portanto, é um signo (significante) cujo significado não é o mesmo para todos os que o observam. Contudo, à letra b na expressão a/b, não podemos atribuir outro significado que não seja o de variável para o denominador da fração. Neste caso, o signo b constitui-se como um componente do registro de representação semiótica a/b. Assim, um signo não deve ser tomado como um registro de representação semiótica e sim como parte dele.

No quadro 2, apresentamos exemplos que nos auxiliam a compreender a que se refere o autor quando utiliza termos como *sistema semiótico*, *signo e representação semiótica*.

Quadro 2 - Exemplos de sistemas semióticos, signos e representações semióticas segundo Duval (2011).

Sistema semiótico	Signos	Representação semiótica
Linguagem natural	quatro, mais, que...	Lara é quatro anos mais nova que Letícia.
Escrita simbólica (numérica e algébrica)	5, 4, + ...	5 + 4 – 8 = 1
	3, x, y, = ...	Y = 2x + 3
Linguagem figural		
		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para Duval (2011, p. 38), “as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços”. Os signos, por sua vez, estão associados às unidades elementares de sentido, são, segundo o autor, caracteres para codificar, tais como, letras, siglas, algarismos, palavras-chave ou gestos da mão. Assim, os signos podem ser considerados “como “coisas” pelas quais é preciso começar para dar um sentido!” (Duval, 2011, p. 38).

À expressão *representação semiótica*, Duval (2011, p. 70) acrescentará o termo *registro* para designar aquelas representações que são *identificáveis*, ou seja, são produzidas a partir de regras próprias do sistema semiótico a que pertencem e conseguem comunicar dados e informações do objeto que representam , e cujos sistemas semióticos caracterizam-se por “dar conta dos dois tipos de transformação que distinguem a atividade matemática de todas as outras formas de atividade intelectual”, a saber, os *tratamentos* e as *conversões* as quais descreveremos mais adiante.

Assim, em sua teoria, os chamados *registros de representação semiótica* vão assumir um papel fundamental ao tratar sobre os processos de ensino e aprendizagem em matemática. Isto porque, para o autor, não há *noesis* sem *semiose*, ou seja, a apreensão conceitual de um objeto matemático (noesis) não ocorre dissociada da apreensão ou produção de uma representação semiótica (semiose) (Duval, 2003).

Nesse sentido, um registro de representação semiótica cumpre três funções cognitivas: a *comunicação* ou expressão do objeto para outro indivíduo; o *tratamento da informação* que se refere a transformações realizadas no conteúdo das representações; a *objetivação* ou expressão particular (para o próprio indivíduo) do objeto e que independe da função de comunicação (Duval, 2012).

2.2 A teoria de Raymond Duval

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS defende que a eficácia da aprendizagem em matemática está profundamente relacionada à capacidade que o indivíduo tem de reconhecer o mesmo objeto matemático em suas distintas representações (Duval, 2003). O seu pressuposto fundamental é a ideia de que a apreensão de um objeto matemático por parte do aprendiz é ratificada pela sua

habilidade de mobilizar seus diferentes registros de representação, pois “[...] se é chamada ‘semiose’ a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e ‘noesis’ a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose” (Duval, 2012, p. 270). Segundo o autor

> Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros. Mesmo se, do ponto de vista matemático, o trabalho parece utilizar apenas um único registro, a compreensão necessária para conduzir o trabalho exige a mobilização pelo menos implícita de um segundo registro assim como sua coordenação (DUVAL, 2011, p. 99).

A coordenação espontânea dos vários e diferentes registros de representação de um mesmo objeto é, portanto, nos termos da TRRS, a evidência da apreensão de determinado conceito ou conteúdo (Duval, 2012). Duval (2009, p.63) afirma que “uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação, produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e de compreensão”. Por outro lado, “a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais” (Duval, 2009, p. 63).

Para essa elaboração, Duval (2003) parte da constatação de que a matemática é uma ciência de natureza abstrata cujos objetos são construções mentais. Desse modo, segundo o autor, a única maneira de um observador acessá-los é através de suas representações semióticas. Ao pensarmos ou desenharmos um quadrado, por exemplo, o que temos é nada mais que apenas uma representação desse objeto e que será sempre parcial em relação ao que é representado. As representações semióticas, portanto, não devem ser confundidas com aquilo que elas representam. Em outras palavras, a representação não pode ser tomada como sendo o próprio objeto matemático (Duval, 2003).

Temos aqui, portanto, o que Duval (2003) chama de paradoxo cognitivo do pensamento matemático: se os objetos matemáticos são abstratos e o acesso a eles só se dá por meio de suas representações, como não confundir o representado com a sua representação? Refazendo a questão de forma mais sintética: Como não confundir objeto e representação se só podemos acessar o primeiro a partir do segundo?

Segundo o autor, a resposta a esse paradoxo passa por uma abordagem no ensino de matemática que privilegie o enfoque dos objetos matemáticos a partir de, ao menos, duas de suas diferentes representações semióticas. É importante que esse trabalho contemple, também, a coordenação entre essas representações distintas de um mesmo objeto.

No que concerne aos números racionais, estamos falando da capacidade que o indivíduo demonstra de reconhecer que 6/8, 75% e “três quartos” representam, de formas distintas, o mesmo objeto, mesmo que nenhuma delas seja o próprio objeto. Para tal reconhecimento é necessário estabelecer coordenações entre esses diferentes registros, realizando transformações que implicam a mudança do tipo de registro de representação sem mudar o objeto representado. Na TRRS, estas transformações, que abordaremos mais detalhadamente adiante, são chamadas de conversões e são caracterizadas pela passagem de um tipo de representação semiótica para outro.

Segundo Duval (2009), as representações semióticas estão relacionadas a três atividades cognitivas fundamentais: a formação das representações, a transformação por tratamento e a transformação por conversão.

2.2.1 A formação das representações semióticas

A formação das representações semióticas, a primeira das atividades cognitivas fundamentais, é realizada “seja para “exprimir” uma representação mental, seja para “evocar” um objeto real” (Duval, 2009, p. 53). Para essa formação recorremos a um ou a vários signos pertencentes a algum sistema semiótico já reconhecido, tal qual “a língua materna, um código icônico de representação gráfica ou artística, uma língua formal, etc.” (Duval, 2009, p. 55).

Na formação de uma representação, Duval (2009) ressalta a importância do respeito às regras intrínsecas ao sistema semiótico empregado, não apenas pelas razões relacionadas à comunicabilidade, mas para que se possa utilizar os meios de tratamento que tal sistema semiótico oferece. Em suas palavras, “uma representação semiótica não deve sair do domínio definido pelas regras que constituem um sistema semiótico” (p. 55).

A representação semiótica formada deve permitir o acesso ao objeto matemático que representa, mas, como já vimos, não se pode confundir o objeto com

a sua representação. Fazer essa separação entre objeto e representação, contudo, não é uma tarefa fácil para os professores, pois comumente a representação é vista pelos alunos como sendo o próprio objeto.

Tal equívoco impede uma apreensão mais global do objeto, já que a visão oferecida por qualquer uma de suas representações semióticas será sempre parcial e, portanto, limitadora da percepção de todas as suas características e propriedades.

Nesse sentido, é fundamental para o ensino a exploração da diversidade representações para um mesmo objeto, pois “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica” (Duval, 2003, p.15).

A figura 4 apresenta um quadro elaborado por Duval (2011) em que o autor define os diferentes tipos de registros utilizados em matemática, bem como as suas características.

Figura 4 - Classificação dos tipos de registros semióticos.

	Registros DISCURSIVOS *Linearidade fundamentada na sucessão* Para a produção, apreensão e organização das expressões.	Registros NÃO DISCURSIVOS *Apreensão simultânea de uma organização bidimensional*
Registros MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são não algoritmizáveis	As línguas: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção: Oral e escrita	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **Três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológicas, desconstrução dimensional das formas
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: As transformações de expressões são **algoritmizáveis**	As ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (Sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: ESCRITA	Junção entre os pontos ou nós e orientação marcada por flechas. GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos** ESQUEMAS

Fonte: Duval, 2011, p.118.

Os tipos de registros estão separados entre discursivos e não discursivos. Os registros discursivos são aqueles cuja produção, apreensão e organização acontecem de forma linear e consecutiva (linearidade fundamentada na sucessão). As línguas formais, os sistemas de numeração, as escritas algébricas são exemplos de registros discursivos, pois a leitura de uma frase, expressão numérica ou equação atende a uma ordem de realização, existe um início, um meio e um final, ou seja, uma sequência a ser observada.

Já os registros não discursivos caracterizam-se pela leitura e apreensão de suas partes de forma simultânea. Incluem-se, neste caso, as representações icônicas, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos (Duval, 2011).

Os registros também podem ser multifuncionais, ou seja, aqueles nos quais os tratamentos são não algoritmizáveis (a linguagem natural oral ou escrita, as representações icônicas e figuras geométricas) ou monofuncionais, nos quais as transformações são algoritmizáveis (o sistema de numeração, a linguagem algébrica, os gráficos cartesianos) (Duval, 2011). O autor observa que enquanto os registros monofuncionais “são próprios da matemática”, os registros multifuncionais também “são utilizados fora da matemática, para as funções de comunicação, de objetivação, e não primeiramente, ou mesmo raramente, para uma função de tratamento” (Duval, 2011, p. 117).

Para a TRRS, não basta, contudo, conhecer e produzir os diferentes registros de representação de um objeto matemático, é necessário promover a coordenação dessas diferentes representações semióticas. Nesse sentido, é de suma importância para quem ensina e quem aprende, saber que a ênfase num único tipo de representação ou ainda a abordagem, em momentos distintos, de cada um dos tipos de registros sem que se estabeleça as relações de correspondência entre eles pode ser pouco producente para a aprendizagem em matemática (Duval, 2003).

A confusão entre o objeto e o seu registro, como já vimos, é resultado direto da dificuldade que os alunos têm para reconhecer o mesmo representado em meio às suas diferentes representações. É bastante comum, por exemplo, ao ouvir a expressão “um quarto”, o aluno associar imediatamente à representação 1/4, talvez por ser essa representação numérica fracionária bastante utilizada nos exercícios propostos, inclusive nos livros didáticos. Contudo, não se observa uma fácil associação da expressão “um quarto” às expressões 0,25 ou 25%, como se estas últimas representassem objetos distintos.

A coordenação entre as variadas representações é, portanto, fundamental para uma eficaz apreensão do objeto matemático estudado, garantindo, segundo o autor, o seu reconhecimento em variados tipos de registros e desenvolvendo atividades que são fundamentais do ponto de vista cognitivo, tais como a conceitualização ou a resolução de problemas (Duval, 2003).

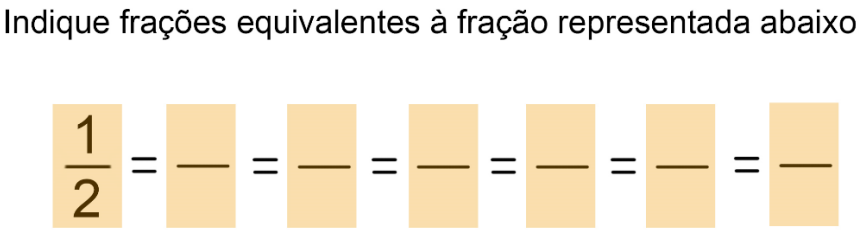
Segundo Duval (2013, p.16), “a distinção entre os diferentes registros permite separar os dois tipos de transformações que constituem a atividade matemática: as conversões e os tratamentos”.

Os tratamentos referem-se às chamadas transformações internas, ou seja, aquelas que ocorrem no interior de um registro de representação ou sistema. Por sua vez, as conversões referem-se a “uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida” (Duval, 2009, p.59). Exemplificamos, a seguir, estes dois tipos de transformações que, junto à formação das representações semióticas, configuram as atividades cognitivas fundamentais relacionadas às representações semióticas (Duval, 2009):

2.2.2 O Tratamento

O tratamento é a transformação da representação que é restrita a um mesmo registro semiótico, ou seja, é a transformação dessa representação numa outra representação pertencente ao mesmo tipo de registro em que ela foi formada. A habilidade cognitiva necessária para realizar o tratamento envolve, portanto, um único tipo de representação para o objeto em estudo. Assim, podemos dizer que o tratamento é uma transformação interna a um registro, como vemos no exemplo de atividade apresentado na figura 5.

Figura 5 - Exemplo de atividade de tratamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao solicitar que os alunos apresentem outras frações que sejam equivalentes à fração 1/2, a atividade restringe-se ao registro numérico fracionário. Ainda assim, em que pese o fato de termos apenas uma transformação interna acontecendo, não se pode negar o importante trabalho cognitivo que será posto em operação para produzir representações equivalentes à primeira e operacionalizar os cálculos matemáticos necessários à resolução do problema (Duval, 2003).

2.2.3 A Conversão

A ênfase numa abordagem de ensino que privilegie um dado tipo de registro de representação semiótica em detrimento de outros tipos de representação pode levar, como vimos em Duval (2003), o aluno a confundir o próprio objeto matemático com sua representação, o que seria um equívoco. Para superar esta confusão, será exigida do estudante, mais que a habilidade de produzir variados tipos de registros de representação e realizar os tratamentos particulares a cada um deles, a capacidade de transitar naturalmente entre estes diferentes registros através das conversões.

Ao realizar conversões nos exercícios propostos, o aluno tem de transformar as representações semióticas de um determinado objeto matemático migrando de um registro de partida para um registro de chegada pertencente a outro sistema semiótico. Essa nova representação poderá conservar a totalidade ou apenas uma parte do conteúdo da representação original.

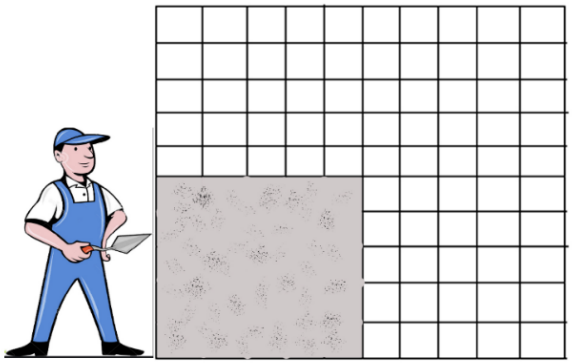
A conversão se destaca como uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento e é no seu exercício que o indivíduo consegue promover a necessária distinção entre significado e significante, ou seja, entre a apreensão do objeto e a apreensão de sua representação. Isto permite distinguir quais características são próprias do objeto matemático estudado e quais pertencem a sua representação.

Embora seja a transformação mais custosa do ponto de vista cognitivo, a conversão, segundo Duval (2003), constitui-se como a mais importante das três atividades cognitivas relacionadas aos registros de representação semiótica. A dificuldade demonstrada pelos alunos no exercício das conversões se deve ao grande esforço cognitivo que o indivíduo precisa empreender para passar de um tipo de registro a outro. A pretendida apreensão conceitual do objeto estudado pelo aluno passa, portanto, pela transformação externa dos registros que ele realiza (Duval, 2003).

A figura 6, apresenta um exemplo de atividade em que uma transformação por conversão é exigida para a resolução.

Figura 6 - Exemplo de atividade de conversão.

Baltazar vai trocar as pedras brancas de cerâmica na sua parede.
Indique a porcentagem de pedras que ele já removeu.



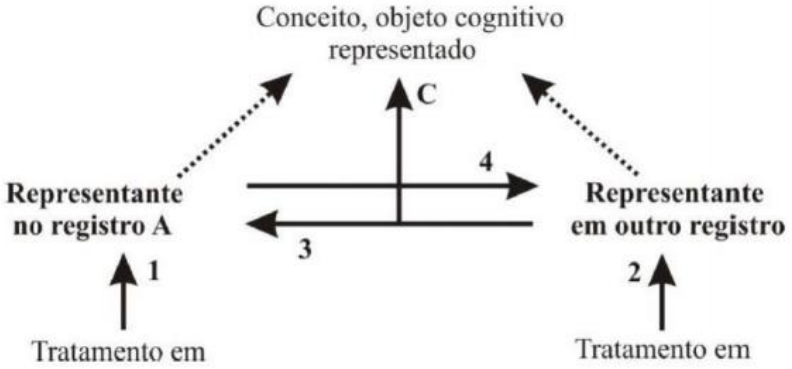
Fonte: Elaborada pelo autor.

A atividade utiliza uma representação que pode ser identificada como um registro figurativo de quantidades contínuas. Tem-se um quadrado que, após um tratamento de fácil dedução, pode ser dividido em quatro partes iguais com uma delas em destaque. A partir daí, os alunos devem passar de uma representação figurativa (1/4) para uma representação numérica percentual (25%).

Há, nesse caso, um esforço cognitivo que está para além daquele exigido na maior parte das atividades que propõem conversões entre representações figurativas dessa natureza e representações numéricas fracionárias e que são resolvidas relacionando o número de partes em que foi dividida a figura com o denominador da fração e o número de partes destacadas com o seu numerador.

Assim, a coordenação entre os diferentes registros de representação que se referem a um objeto matemático através das transformações por tratamentos e conversões pode, em síntese, ser expressa na estrutura apresentada na figura 7.

Figura 7 - Estrutura de representação semiótica e seu funcionamento.



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Percebe-se que as setas 1 e 2 referem-se aos tratamentos, pois são transformações internas, ou seja, restritas ao mesmo tipo de registro. Já as setas 3 e 4 sinalizam as conversões, ou seja, as transformações externas, pois indicam modificações que ocorrem para fora do tipo de registro inicial. As setas pontilhadas, além de destacarem a distinção entre o objeto e a sua representação, expressam a relação que cada representante tem com o objeto representado. Trata-se de uma representação apenas parcial, já que nenhuma representação pode dar conta do todo conceitual do objeto representado (Duval, 2003). Por fim, a seta C indica que a apreensão conceitual do objeto representado demanda a coordenação de, pelo menos, dois de seus diferentes registros de representação, ou seja, o conhecimento do objeto está diretamente relacionado à atividade cognitiva de conversão.

Assim, a importância do domínio dos diferentes registros de representação não está apenas no fato de poder representar o objeto de diferentes formas, mas, principalmente, porque tal habilidade cumpre um papel fundamental no que concerne à sua apreensão, já que “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica” (Duval, 2003, p. 15).

Duval (2012) apresenta três razões que justificam a necessária utilização de variados registros de representação na atividade matemática:

1- Os custos de tratamento, já que, em algumas situações, certo tipo de registro oferece uma condição de tratamento mais viável ou econômica.
2- As limitações dos registros, já que cada registro oferece sempre uma visão parcial em relação ao objeto.

3- A necessidade de fazer a distinção entre a representação e o objeto representado.

Contudo, segundo Duval (2003), muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas, exatamente, a limitações em sua capacidade de articular a diversidade de registros de representação semiótica que a atividade matemática obrigatoriamente mobiliza.

Nesse sentido, é importante que o ensino da matemática busque privilegiar diferentes contextos e diferentes significados na abordagem de um mesmo objeto matemático. Sob a perspectiva da TRRS, fica evidente a necessidade de incluir na prática docente, sobretudo nas séries iniciais, alternativas metodológicas que explorem, principalmente, os mais variados tipos de representação dos objetos em estudo.

No que concerne à abordagem dos números racionais, não basta explorar técnicas de transformação de um registro de representação em outro, é necessário criar situações nas quais os alunos possam desenvolver a habilidade de realizar conversões, ou seja, sejam capazes de oferecer soluções utilizando, ao seu favor, representações diferentes daquelas trazidas pelos problemas, pois “do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos de compreensão” (Duval, 2003, p. 16).

2.2.4 As unidades de sentido e as operações próprias do registro

Para que os estudantes sejam capazes de realizar a necessária correspondência entre os diferentes registros de representação semiótica de um dado objeto matemático é preciso que reconheçam as unidades de sentido, ou seja, os dados ou informações matematicamente pertinentes no interior das representações e se apropriem das operações de transformação dessas unidades de sentido, que são específicas para cada tipo de registro.

A discriminação das unidades de sentido é crucial para a realização das transformações, sejam tratamentos ou conversões, nas representações semióticas, o que, para a TRRS, é o que é mais relevante do ponto de vista matemático (Duval, 2011). Segundo Duval (2011, p. 103), esse reconhecimento das unidades de sentido junto com a apropriação das operações próprias do registro são “as duas condições

preliminares e absolutamente indispensáveis para que alguém possa compreender e fazer qualquer coisa em matemática".

Duval (2011) explica que as representações semióticas são dotadas de signos que expressam dados ou informações matematicamente pertinentes. Esses signos no interior das representações são chamados de unidades de sentido.

Segundo o autor, não se pode perceber as várias maneiras de representar um objeto matemático sem considerar as unidades de sentido em cada registro, pois "o reconhecimento de um mesmo objeto representado por duas representações A e B repousa sobre a correspondência das unidades de sentido de suas representações" (Duval, 2011, p.49). Em outras palavras, "para reconhecer quando duas representações semióticas de naturezas diferentes representam um mesmo objeto, é preciso colocar em correspondência as unidades de sentido entre os conteúdos respectivos das duas representações" (Duval, 2011, p.67). Vê-se que tal correspondência é a condição cognitiva fundamental para o reconhecimento de um dado objeto matemático a partir de suas diferentes representações.

Duval (2011b) observa que, no que concerne às expressões algébricas, embora cada signo corresponda quase sempre a uma unidade de sentido, há casos em que as unidades de sentido terão seus signos omitidos. A expressão y = x, por exemplo, não é escrita na forma y = +1x. O coeficiente 1 e o seu caráter positivo não são expressos em signos, ao contrário, é exatamente a ausência dos signos que, nesse caso, exprime essas unidades de sentido. Em contrapartida, escreve-se y = -2x. Desse modo, podemos sintetizar afirmando que, numa representação, nem todo signo corresponde a uma unidade de sentido e nem toda unidade de sentido corresponde a um signo.

Temos que a discriminação das unidades de sentido está diretamente relacionada ao reconhecimento de que um dado objeto matemático pode possuir várias e distintas formas de representação e que essa identificação, no interior dos registros, é um exercício primordial para promover as transformações desses mesmos registros. Surge, então, a questão: como podemos identificar as unidades de sentido no conteúdo de uma representação?

Segundo Duval (2011, p.100), essa identificação requer a utilização de um outro registro, pois "a mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro". Dessa forma, descobre-se quais as

variações cognitivamente importantes no registro de partida, ou seja, aquelas cujas modificações concomitantes no registro de chegada implicam um novo objeto representado (Duval, 2003). Somente pela observação dos dados ou informações que, quando variados na representação de partida, produzem covariações na representação de chegada podemos saber quais são aqueles matematicamente pertinentes em seu interior, ou seja, as unidades de sentido em ambos os registros.

Assim, para o autor, abordar cada tipo de representação semiótica de forma isolada para que os alunos identifiquem as unidades de sentido não é eficaz, já que é na coordenação das unidades de sentido das representações envolvidas que se pode percebê-las.

Em síntese, o procedimento proposto pelo autor para discriminar as unidades de sentido nas representações semióticas passa por duas operações necessárias:

1- Tomar dois registros distintos de um mesmo objeto matemático.

2- Produzir todas as modificações possíveis no primeiro registro e verificar se tais variações produzem ou não produzem covariações no segundo. Desse modo, “o segundo registro serve como revelador das unidades de sentido matematicamente pertinentes nas representações do registro de partida” (Duval, 2011, p.104).

É no exercício da conversão de um registro para outro, portanto, que podemos discernir as unidades de sentido. No entanto, é importante destacar que uma única conversão não é o bastante, já que seria insuficiente para perceber a pertinência de todos os dados em ambas as representações. É necessário realizar, para cada variação feita em cada signo do registro de partida, uma nova conversão observando as mudanças no registro de chegada. Nesse sentido, a visualização das unidades de sentido de uma dada representação é um exercício que requer uma série de conversões a partir dela (Duval, 2011).

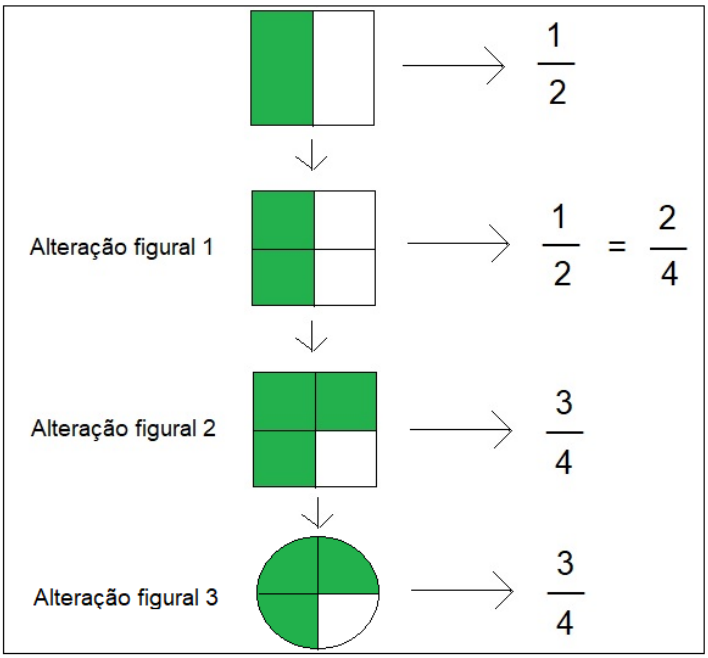
No caso das figuras, efetuamos variações em cada uma de suas unidades figurais, isoladamente, mantendo todas as outras inalteradas. A conversão da representação figural, após cada alteração feita, para uma representação numérica, por exemplo, permite perceber o que muda nessa representação, ou seja, quais valores numéricos respondem às alterações produzidas nos valores visuais (Duval, 2011).

Quando as variações num determinado signo ou conjunto de signos na representação de partida não produzem covariações no registro de chegada, dizemos, segundo Duval (2009), que tais variações foram unicamente semióticas ou

cognitivamente neutras. Já as variações no registro de partida que resultam em covariações no registro de chegada são chamadas de variações cognitivas. Nesse caso, os signos que foram variados e aqueles que sofreram covariações são designados como unidades de sentido.

O esquema apresentado na figura 8 demonstra três alterações produzidas num registro figurativo e a repercussão de tais alterações em seus registros numéricos correspondentes.

Figura 8 - Variações figurais e covariações numéricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A alteração figural 1 resultou numa nova subdivisão para a representação figurativa original. Essa mudança não implicou variações na representação 1/2, mas destacou sua equivalência referencial com a representação 2/4. Nesse caso, podemos dizer que a quantidade de partes iguais em que a figura está dividida tem pertinência matemática e se corresponde, enquanto unidade de sentido, com unidades na representação numérica fracionária.

A alteração figural 2 consistiu no destaque com cor de mais uma das partes em que foi dividida a figura original. Dessa forma, a variação na unidade de sentido “número de partes destacadas” da representação figurativa gerou covariações na representação numérica que mudaram, também, o objeto representado.

Por fim, a alteração figural 3 representou uma variação unicamente semiótica ou cognitivamente neutra, pois não provocou alterações na representação numérica,

o que demonstra que, nesse caso, a forma da figura não tem pertinência matemática e, portanto, não expressa uma unidade de sentido na representação.

Como pudemos notar, essa observação permite não apenas a discriminação das unidades de sentido, mas, também, a identificação das correspondências existentes entre as unidades do registro de partida e as unidades do registro de chegada.

Uma vez realizado o reconhecimento das unidades de sentido como primeira condição preliminar e absolutamente indispensável diante de qualquer produção matemática, resta-nos a segunda condição: a apropriação das operações de transformações próprias de cada registro (Duval, 2011).

Essa apropriação consiste em descrever ou delinear as transformações que cada representação sofre com as operações que são próprias do tipo de registro em questão (Duval, 2011). Em outras palavras, Duval (2011) defende que as operações de transformação das unidades de sentido devem ocorrer nas representações a partir de tratamentos que são próprios daquele tipo de registro. Assim, no caso das representações figurativas, estamos nos referindo às transformações que resultam, unicamente, da manipulação de suas unidades figurais e, portanto, sem que se recorra à utilização de registros e tratamentos da escrita simbólica, por exemplo.

Assim, para o autor, não se trata, por exemplo, de explorar as operações em linguagem algébrica de um gráfico e sim de observar as transformações produzidas pelas variações nas unidades de sentido do próprio gráfico. No que se refere às representações figurativas de frações, é importante estimular a observação das mudanças em seus valores figurais a partir das alterações que produzimos nelas.

Dessa forma, ao fazer mudanças numa representação figurativa como as apresentadas na figura 8, o estudante deve perceber, por exemplo, que a alteração figural 1 aumenta o número de partes iguais em que o todo foi dividido sem, contudo, mudar o tamanho da parte destacada, que a alteração figural 2 implica um aumento da parte representada em relação ao todo e que a alteração figural 3 em nada muda o objeto representado.

Nesse sentido, ao trabalharem com representações figurais, os alunos devem, em primeiro lugar, “aprender a ver” as figuras e, portanto, “é preciso propor tarefas em que se exclua toda atividade de medida e de cálculo”, fazendo com que os alunos explorem a representação figural sem que, nesse primeiro momento, recorram a aspectos não figurais (Duval, 2011, p.92).

Duval (2011) defende que somente a partir desta interiorização das operações figurais é que o aluno deve prosseguir efetuando enumerações e aplicação de fórmulas, ou seja, utilizando-se de representações não figurativas.

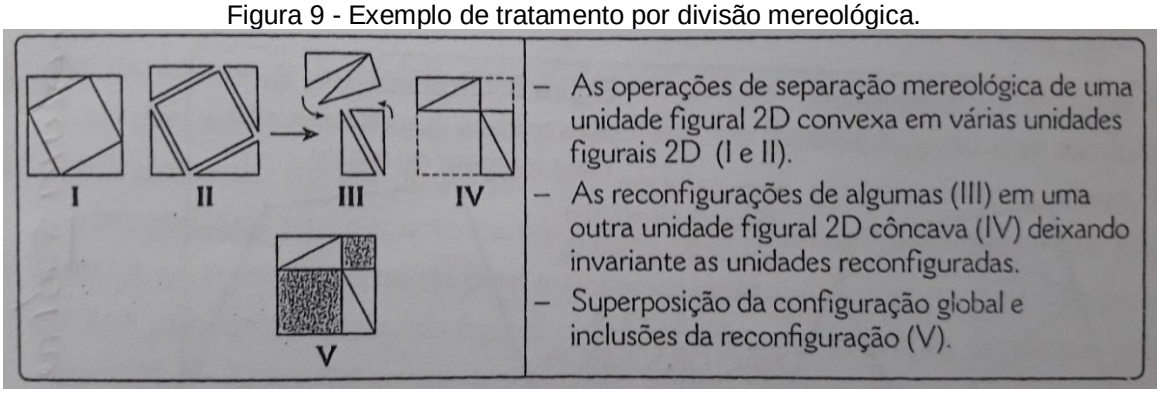
Para a TRRS, num primeiro momento, é, portanto, fundamental que o indivíduo seja capaz de distinguir as operações de transformação possíveis no interior de cada tipo de registro. No caso dos registros figurativos, então, o autor se refere aos tratamentos intrinsecamente figurais (Duval, 2011). Essa capacidade é oriunda do que o autor chama de apreensão operatória das figuras. Tal apreensão é "centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas figuras" (Duval, 2012c, p. 125).

No caso das figuras geométricas, essas modificações podem ser de três tipos: *mereológicas*, quando ocorre divisão e reconfiguração das partes da figura, alterando ou não o seu contorno global; *óticas*, quando a figura é aumentada, diminuída ou deformada; *posicionais*, quando a mudança implica translações ou rotações da figura em relação a um eixo de referência (Duval, 2012c).

As chamadas divisões mereológicas são tratamentos "que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais 2D/2D (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão". Para o autor, esse tipo de operação figural carrega "a particularidade de poder ser realizada por manipulações sobre objetos materiais" (Duval, 2011, p. 88).

Na figura 9, Duval (2011) apresenta exemplo de um tratamento puramente figural a partir da divisão mereológica:

Figura 9 - Exemplo de tratamento por divisão mereológica.



Fonte: Duval (2011, p. 89).

Como vimos, esse tipo de tratamento figural consiste em promover a divisão de uma determinada forma "em unidades figurais de mesma dimensão e sua

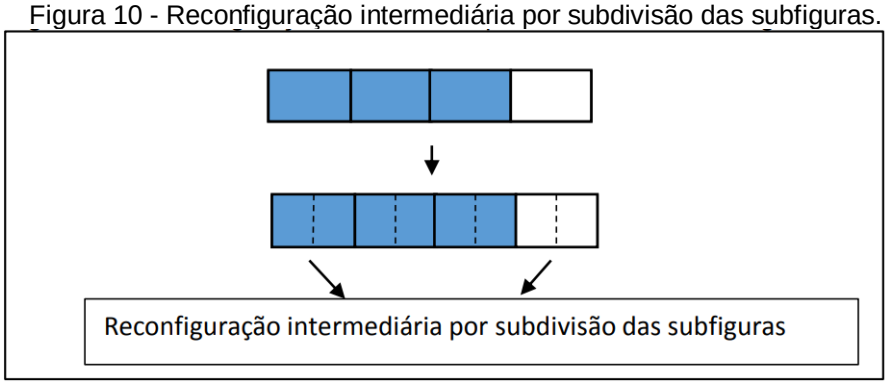
reconfiguração em outra figura cujo contorno global é ou não o mesmo" (Duval, 2011, p.88).

A modificação de uma figura geométrica, por divisão mereológica, pode ser realizada a partir de uma operação chamada por Duval (2012c) de *reconfiguração intermediária*. Esse tipo de tratamento, de acordo com Silva (2018, p. 88), é caracterizado "pelo particionamento da figura geométrica em subfiguras ou partes do todo que as contém, podendo ter as mesmas formas geométricas, ou seja, serem homogêneas, terem formas geométricas diferentes ou heterogêneas".

A reconfiguração intermediária permite fazer comparações entre a figura inicial e a figura modificada relacionadas à congruência das áreas das partes ou subfiguras do todo particionado. Também é possível verificar a equivalência entre os números de partes ou subfiguras destacadas na figura antes e após a modificação (Silva, 2018).

Na figura 10, vemos um exemplo de operação de reconfiguração intermediária aplicada a uma representação figural do número racional 3/4. No exemplo, realizou-se a subdivisão homogênea das partes ou subfiguras da figura inicial de modo a produzir uma nova representação figural para o mesmo racional.

Figura 10 - Reconfiguração intermediária por subdivisão das subfiguras.



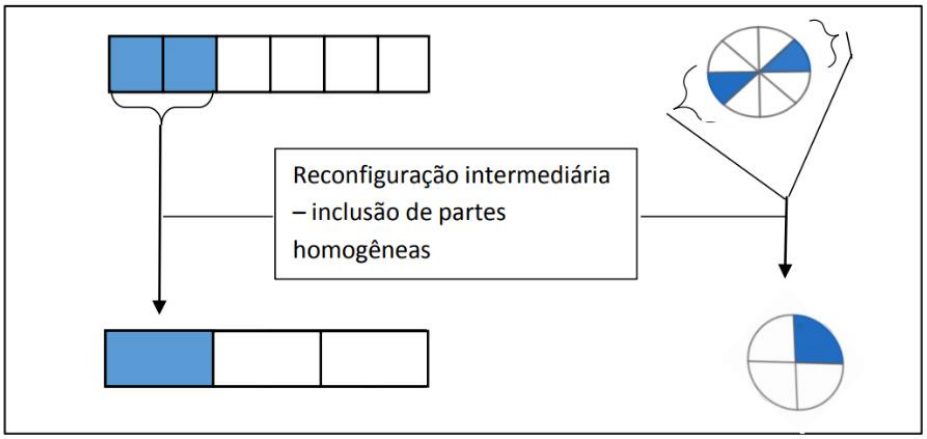
Fonte: Silva (2018, p. 89).

O tratamento, nesse caso, mantém a equivalência da relação *número de partes destacadas / número total de partes* em ambas as representações figurais, ou seja, 3/4 = 6/8.

Nesses tipos de representações figurais, ao invés de subdividir, a operação de reconfiguração intermediária pode incluir partes ou subfiguras de formas homogêneas produzindo outra representação figural, como podemos ver na figura 11, em que o número de partes totais será menor sem, contudo, alterar a equivalência da sua

relação *número de partes destacadas / número total de partes* com a da figura inicial (Silva, 2018).

Figura 11 - Reconfiguração intermediária por inclusão das subfiguras.



Fonte: Silva (2018, p. 89).

Segundo Duval (2011), é importante que os indivíduos possam explorar os objetos em estudo sem recorrer de modo imediato a seus aspectos métricos. Nesse sentido, é importante também que se privilegie a utilização de representações que favoreçam a visualização de características não evidenciadas em outros registros. Nesse aspecto, vale destacar as representações semióticas não discursivas como as figuras geométricas e os gráficos, que oferecem, já numa visualização imediata, informações sobre o objeto representado que, embora não estejam acompanhadas de uma precisão numérica, abrem caminho para a apreensão do objeto representado a partir de suas características mais gerais.

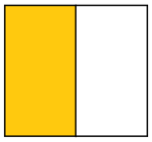
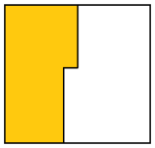
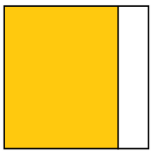
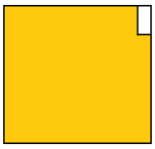
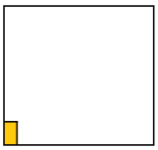
Assim, uma representação não discursiva traz consigo qualidades visuais que devem ser reconhecidas pelos alunos antes que esses possam recorrer a quaisquer tratamentos, até mesmo aqueles figurativos. Nesse sentido, a apreensão das representações figurativas deve começar com o simples exercício de olhar para a figura e culminar na identificação instantânea de aspectos importantes sobre o objeto representado.

Esse “aprender a ver”, a que se refere Duval (2011, p. 92), acontece, por exemplo, quando o aluno conclui, de forma imediata, que uma dada função cresce, ainda que não conheça sua taxa de crescimento, a partir de uma rápida olhada em seu gráfico. Há, nesse caso, um avanço da *apreensão puramente perceptiva*, que é a observação de cores, tamanhos, superposições, para a *apreensão operatória*, ou seja, a capacidade de, a partir do olhar atento sobre a figura, ler o máximo de unidades de

sentido no interior dessa representação, discernindo os valores visuais que elas expressam (Duval, 2012).

Consideremos, por exemplo, os registros de representação do tipo figurativo no quadro 3, ou seja, quadrados que representam um todo de quantidade contínua com uma de suas partes destacadas com a cor amarela, e vejamos como, em cada representação, a simples observação de suas unidades figurais nos permite conclusões imediatas acerca da parte representada em relação ao todo.

Quadro 3 - Interpretações imediatas a partir de representações figurais.

Representação		Interpretação imediata
1		A parte destacada em amarelo corresponde à metade do todo.
2		A parte destacada em amarelo corresponde a pouco menos da metade do todo.
3		A parte destacada em amarelo é mais próxima do total que da metade do todo.
4		A parte destacada em amarelo corresponde a quase o todo.
5		A parte destacada em amarelo corresponde a uma pequena parte do todo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No entanto, não são raras as situações em que os alunos, apesar de interpretarem bem as informações nos registros figurais e conseguirem expressá-las

através da linguagem natural, demonstram dificuldade para reproduzirem tais conclusões a partir de registros da escrita simbólica.

Alguns alunos podem indicar, por exemplo, que a figura 2 do quadro 3 é uma representação cuja parte destacada equivale a 90%, 75% ou 50%, mesmo que saibam afirmar que se trata de uma parte menor que a metade do todo, pois não identificam os registros ‘metade” e “50%” (cinquenta por cento) como representações de um mesmo objeto (Melo, 2019). Nesse caso, falta aos estudantes, principalmente, a compreensão de que as representações percentuais também exprimem a mesma relação existente nas representações figurais apresentadas no quadro 3, ou seja, a da parte em função do seu todo, nesse caso, o número de partes destacadas em um todo subdividido em cem partes iguais.

A direção apontada pela TRRS é, como já vimos, a da exploração das correspondências entre as unidades de sentido das representações figurais e das representações simbólicas. É a partir da observação das mudanças produzidas no interior de uma figura e da repercussão disso no interior de um registro simbólico percentual que os alunos passam a relacionar de forma correta os valores visuais (qualitativos) aos valores numéricos (quantitativos). Essas conversões devem, portanto, concorrer para a apreensão conceitual do objeto matemático, favorecendo a correção de distorções e lacunas evidenciadas durante o processo de aprendizagem (Duval, 2011).

Nesta pesquisa, utilizaremos a intermediação de um material manipulável com representações figurativas na realização de conversões partindo do registro numérico fracionário para o numérico percentual do número racional. O manipulável explorará a modificação figural do tipo mereológica, a partir da operação de reconfiguração intermediária. Pretendemos, dentre as várias observações que faremos, verificar as implicações de sua utilização no que tange à identificação das unidades de sentido e suas correspondências nesses registros simbólico-numéricos.

2.2.5 Os Fenômenos inerentes à Conversão

Duval (2003) explica que é algo característico das conversões entre representações semióticas a ocorrência de dois tipos de fenômenos. Para o autor,

esses fenômenos, inerentes à atividade de conversão, são reveladores da natureza cognitiva que é própria desse tipo de transformação. São estes:

a) As variações de congruência e não-congruência.

b) A heterogeneidade dos sentidos.

O fenômeno da variação de congruência e não-congruência pode ser percebido quando, diante de dois registros distintos, começamos a estabelecer comparações entre a representação de saída e a representação terminal, buscando determinar se são expressões de um mesmo objeto matemático. Nesse momento, segundo Duval (2003),

> duas situações poderão ocorrer: ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (p.19).

Esse fenômeno é, para Duval (2011, p.121), “uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos”. Nesse sentido, as muitas dificuldades apresentadas pelos alunos frente às conversões entre representações do número racional também podem ser entendidas a partir do que foi evidenciado pelo autor, ou seja, “os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência” (Duval, 2011, p.124).

Como podemos, então, identificar quais são as conversões congruentes e quais aquelas que são não-congruentes? Duval (2012) apresenta-nos três critérios que nos permitem, a partir da observação e comparação dos registros envolvidos, dizer se uma dada conversão é ou não congruente:

1- Correspondência semântica entre as unidades de sentido das representações: para cada unidade de sentido no registro de partida, há uma unidade de sentido correspondente no registro de chegada (correspondência uma a uma).

2 - Univocidade semântica terminal: para cada unidade de sentido no registro de partida, só há uma única unidade de sentido com correspondência semântica no registro de chegada.

3 - Conservação da ordem das unidades de sentido: as unidades de sentido que se correspondem nos registros seguem a mesma ordem de disposição em ambas as representações.

Para exemplificar, vejamos algumas conversões envolvendo representações em linguagem natural e representações em escrita simbólica algébrica. Representamos as idades de Letícia e Lara pelas incógnitas x e y, respectivamente:

A idade de Letícia corresponde à idade de Lara mais quatro.

$$\updownarrow$$

$$x = y + 4$$

Observa-se que as unidades de sentido, em ambas as representações, correspondem-se uma a uma, o sentido (significado) das unidades correspondentes é o mesmo, assim como a ordem em que aparecem nesses registros. Há, nesse caso, a obediência aos três critérios e, portanto, congruência entre esses registros de representação do objeto.

O dobro da idade de Letícia mais três corresponde ao triplo da idade de Lara.

$$\updownarrow$$

$$3 \,.\, y - 3 = 2 \,.\, x$$

Dessa vez, vemos que existem no registro de chegada mais de uma unidade de sentido em correspondência com apenas uma unidade no registro de partida (o signo “dobro” corresponde-se com os signos “2” e “.”, bem como o signo “triplo” com os signos “3” e “.”), não há univocidade semântica terminal (o signo “mais” no registro de partida não se corresponde semanticamente com o signo “−“, sinal de subtração, no registro de chegada) e a ordem das unidades que se correspondem também não se manteve.

Vê-se que não há obediência aos critérios e essa conversão, portanto, apresenta não-congruência entre os registros envolvidos. É importante dizer que, segundo Duval (2009, p. 69), bastava apenas a inobservância de um ou dois dos critérios para que as representações fossem ditas não-congruentes, ou seja, “a não-congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor”. Em outras

palavras, os critérios de congruência permitem, igualmente, determinar um grau de não-congruência.

Silva (2018), ao tratar das conversões envolvendo representações figurativas e numéricas fracionárias do número racional, destaca que alguns alunos erram porque não percebem que duas representações podem atender a critérios de congruência e ainda assim não representarem o mesmo objeto matemático.

A autora cita, por exemplo, erros do tipo “relação parte-parte” em que o aluno relaciona o número de partes destacadas (pintadas ou hachuradas) na figura com o numerador e o número de partes não pintadas ou hachuradas com o denominador da fração. Nesse caso

> A conversão, ao ser realizada erroneamente dessa forma, preserva o critério da univocidade semântica terminal para a correspondência entre a unidade figural, cor e o valor correspondente ao numerador da fração e entre a unidade figural ausência de cor e o denominador da fração (Silva, 2018, p. 103).

Silva (2018) observa que ocorre, desse modo, o favorecimento da percepção de uma congruência semântica sem que exista, contudo, a equivalência referencial entre os registros. Isto porque, segundo Duval (2012b, p.100),

> Entre duas expressões, duas apresentações de uma informação, há duas relações independentes a serem consideradas: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica. Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes.

A representação 75%, por exemplo, não transparece na representação 3/4, tanto quanto transparece na representação 3/75, ou seja, muito embora a primeira fração apresente equivalência referencial, é na segunda, em que não há equivalência referencial, que se observa uma unidade de sentido congruente semanticamente com uma das unidades de sentido da representação percentual, a saber, o signo 75 em ambos os registros.

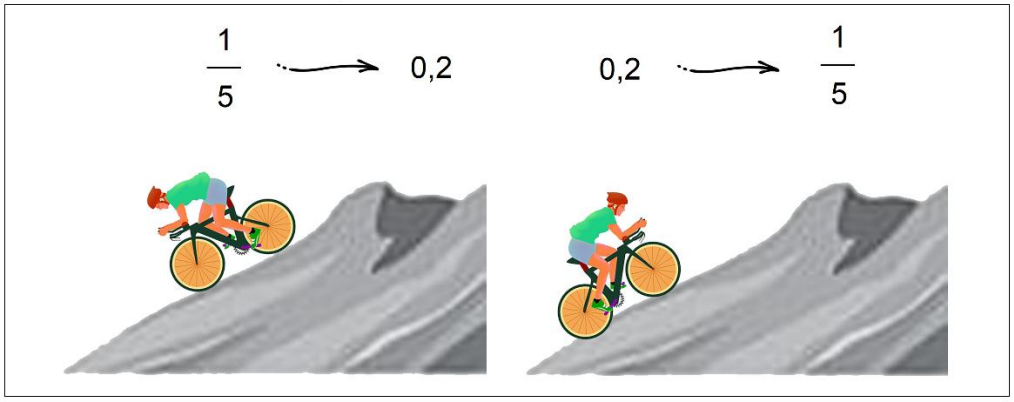
Enfim, priorizar a observação da transparência e não da equivalência referencial, ou seja, privilegiar os aspectos visuais em detrimento dos aspectos lógico-matemáticos pode redundar em muitos equívocos. Isso tende a ocorrer naturalmente,

pois, segundo Duval (2012b), o pensamento, em seu funcionamento espontâneo, busca manter a congruência semântica.

Já o fenômeno da heterogeneidade dos sentidos refere-se ao fato de que numa conversão envolvendo registros A e B não-congruentes o custo cognitivo de quem a realiza no sentido da representação A para a representação B não será o mesmo ao fazê-la no sentido de B para A.

Dessa forma, o estudante que executa a conversão num sentido nem sempre é capaz de refazer essa transformação quando há a troca do registro de partida pelo de chegada. O motivo, segundo Duval (2011, p. 118), é que "a conversão das representações, que não é uma codificação, é uma operação cognitivamente não reversível". Na figura 12, temos duas conversões envolvendo as mesmas representações, porém em sentidos diferentes.

Figura 12 - Exemplo de conversão em ambos os sentidos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A conversão 1/5 → 0,2 pode ser rapidamente realizada quando efetuamos a divisão do numerador 1 pelo denominador 5 da fração, já a conversão 0,2 → 1/5 demanda um outro, e menos econômico, processo de resolução. Do mesmo modo, as conversões 1/4 → 25% e 25% → 1/4 têm caminhos resolutivos distintos que podem envolver habilidades tais como a determinação de frações equivalentes, seja por meio da simplificação de frações ou não.

Essa heterogeneidade observada entre os diferentes sentidos de uma mesma transformação demonstra que "a conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha" (Duval, 2011, p. 118). É, portanto, do ponto de vista da TRRS, um equívoco

acreditar que ao exercitarmos a conversão num determinado sentido estaremos, a reboque, treinando a conversão no sentido inverso.

Um dado bastante interessante da pesquisa de Silva (2013) refere-se à exploração de ambos os sentidos da conversão envolvendo representações semióticas do número racional nas questões dos ENEM nos anos de 2009, 2010 e 2011. Observou-se que 34,5% dos 29 itens analisados tinham como registro de partida o numérico percentual e de chegada o numérico fracionário, com destaque para o ENEM de 2010 com 55,5% dos itens cujas resoluções podiam utilizar essa conversão. Por outro lado, 10,3% dos itens demandavam a conversão no sentido inverso, ou seja, partindo da representação numérica fracionária para a representação numérica percentual. Conclui-se, a partir destes números e considerando apenas o recorte temporal da pesquisa, o quão importante é que os alunos saibam utilizar a representação numérica percentual, bem como saibam lidar com as dificuldades impostas pelo fenômeno de heterogeneidade dos sentidos.

2.2.6 Sucesso matemático x sucesso cognitivo

Duval (2011) explica que, do ponto de vista matemático, é a resposta certa frente a um problema que ratifica a presença do conhecimento necessário para resolvê-lo, evidenciando assim um sucesso matemático. Contudo, do ponto de vista cognitivo, uma resposta correta não é suficiente para demonstrar tal conhecimento, ou seja, não é o bastante para evidenciar um sucesso cognitivo, pois, no que concerne ao problema proposto, “não serve de nada se lhe explicamos a solução, se você não vê como poderia pensar sobre ele” (p. 41). Atestar se houve ou não sucesso na aprendizagem ou na realização de alguma atividade em matemática vai depender, portanto, do ponto de vista.

Para o autor, do ponto de vista matemático, basta que utilizemos um só tipo de registro se quisermos realizar uma demonstração ou justificar um procedimento matemático. Por outro lado, se formos considerar algo do ponto de vista cognitivo, isto demandará a mobilização de, ao menos, um segundo registro.

> De forma mais fundamental, os registros mobilizados não preenchem as mesmas funções cognitivas no desenvolvimento da atividade matemática. Enquanto um permite efetuar a atividade matemática de resolução do problema, ou de

> demonstrar uma conjectura, os outros preenchem uma função heurística, ou permitem que se controlem intuitivamente a pertinência de resultados obtidos e a fiabilidade dos tratamentos efetuados (Duval, 2016, p. 18).

Entretanto, a despeito da importância do aspecto cognitivo, Duval (2003) observa que, nos processos de ensino e aprendizagem, há uma ênfase no aspecto matemático e isso tem relegado a conversão a um papel meramente secundário. Assim, segundo o autor,

> a conversão intervém somente para escolher os registros no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro (p.16).

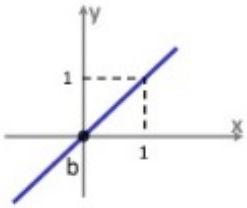
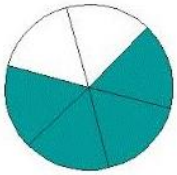
Ainda, para o autor, “é por isso que a conversão não chama a atenção, como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática” (Duval, 2003, p.16).

Porém, é exatamente no que concerne ao aspecto cognitivo que, segundo a TRRS, a transformação do tipo conversão aparece como atividade essencial para a apreensão do objeto em estudo, pois, como vimos, é ela que “conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (Duval, 2003, p.16).

Outra crítica feita por Duval (2003) é que boa parte das pesquisas em didática e no ensino da matemática não tem considerado essa importante distinção entre o ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo. Para o autor, é absolutamente necessário considerar, principalmente, o aspecto cognitivo em nossas análises das aprendizagens e dos processos de compreensão.

Olhar o desempenho dos alunos a partir, unicamente, de um ponto de vista matemático impede que consideremos e exploremos as conversões como transformações fundamentais no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, a conversão é, muitas vezes, reduzida a um tratamento, ou seja, ela passa a ser realizada como uma forma de tratamento em que uma dada representação do objeto é transformada numa outra representação através da aplicação direta de uma determinada regra de correspondência, fazendo-se uma espécie de tradução (Duval, 2003). No quadro 4, apresentamos algumas conversões dessa natureza, bem como as regras de correspondência envolvidas:

Quadro 4 - Exemplos de conversões por regras de correspondência.

Registro A	Registro B	Regra de correspondência
Conjunto dos pontos cuja ordenada é o dobro da abscissa.	Y = 2X	Escrita literal de uma relação.
Y = X		No plano cartesiano qualquer ponto é dado pelo par de coordenadas (x,y).
	4/6	Técnica de dupla contagem: o denominador refere-se à quantas partes iguais o inteiro foi dividido e o numerador à quantas partes foram destacadas.

Fonte: Melo, 2019.

Para Duval (2003, p.19), as conversões cuja representação de chegada apresenta uma transparência em relação à representação de partida estão próximas de “uma situação de simples codificação”. Essas conversões podem ser entendidas, portanto, como transformações muito limitadas do ponto de vista cognitivo, já que não possibilitam a visão e o aprofundamento conceitual que as conversões não condicionadas a regras de correspondência oferecem.

As regras de correspondência aplicadas nas conversões, embora se mostrem eficientes para promover a transformação entre os registros, favorecem apenas uma visão superficial do objeto representado. No caso das transformações envolvendo registros não discursivos, por exemplo, a aplicação de uma regra de correspondência, como as que vimos no quadro anterior, “permite somente uma leitura pontual das representações gráficas” e impede “uma apreensão global e qualitativa” (Duval, 2003, p.17).

Essa apreensão global e qualitativa citada pelo autor é absolutamente fundamental, por exemplo, nas conversões entre registros algébricos e registros gráficos. Esse conhecimento será necessário para “extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos” (Duval, 2003, p.17). Portanto, é importante que, ao tentar

realizar a conversão entre uma e outra representação, o aluno possa articular as variáveis cognitivas próprias de cada registro e identificar assim as unidades de sentido em seu interior.

Vimos que, numa conversão, à medida que aumenta a transparência entre as duas representações envolvidas, mais próxima de uma situação de codificação essa transformação está (Duval, 2003). Disso podemos inferir que o surgimento das regras de correspondência entre as representações também é favorecido pela congruência ou baixo grau de não-congruência nas conversões. Nesse sentido, ainda discutiremos no capítulo em que tratamos dos manipuláveis se a inclusão desses materiais na realização de conversões favorece a transparência entre os registros e, portanto, o surgimento de tais regras.

2.2.7 Relação entre representações semióticas e não semióticas

As representações semióticas são externas e conscientes, ou seja, são exteriores ao indivíduo e criadas de modo intencional a partir de um sistema semiótico conhecido. Há, contudo, representações não semióticas que são, por sua vez, internas e não intencionais, criadas automaticamente pelo efeito direto do objeto em nossos órgãos sensoriais (Duval, 2009).

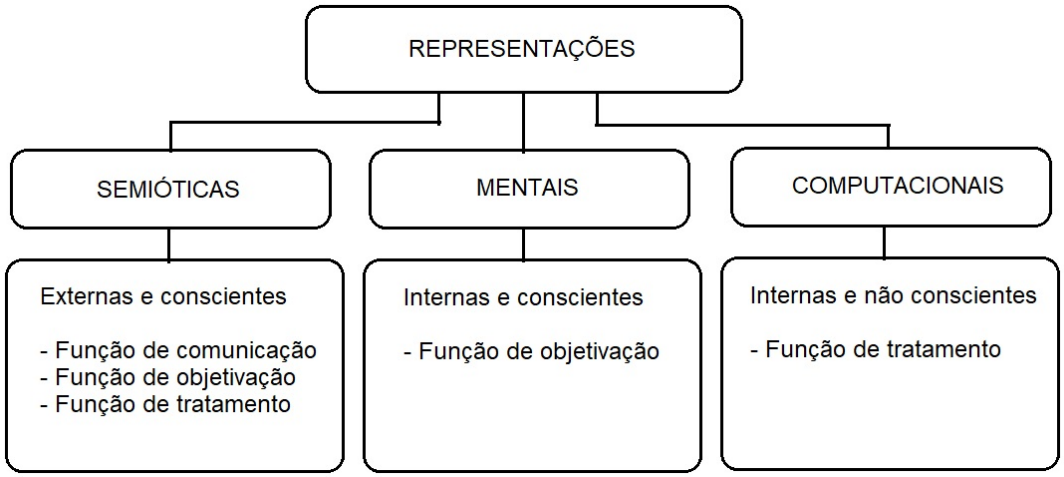
Dentre as chamadas representações não semióticas, há aquelas que são conscientes, ou seja, ocorrem no nível do pensamento consciente, tais como crenças, explicações e concepções acerca de fenômenos, e aquelas que, por outro lado, ocorrem no nível do pensamento inconsciente, são as tarefas que realizamos sem que tenhamos consciência dos passos que seguimos para a sua realização. Duval (2009) designa como *mentais* as representações não semióticas internas e conscientes e como *computacionais* as representações não semióticas internas e não conscientes.

Sejam estas semióticas, mentais ou computacionais, as representações se relacionam e desempenham papeis na cognição do indivíduo. As representações mentais cumprem uma função de objetivação que, como define Duval (2009, p.41), “corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado”, em outras palavras, a objetivação é a expressão particular, para si, que o sujeito tem do objeto e que independe da forma como ele o comunica a outro sujeito. Já as representações computacionais exercem uma função de tratamento que se dá de modo automático

ou quase instantâneo, elas são “internas a um sistema e independentes da visão que se tem do objeto” (Duval, 2009, p. 50).

A função de comunicação ou expressão do objeto para outrem é preenchida pelas representações semióticas que também cumprem as “duas outras funções cognitivas: a função de objetivação, como todas as representações conscientes, e a função de tratamento” (Duval, 2009, p.42). No esquema da figura 13, apresentamos, segundo Duval (2009), estes três tipos de representações, bem como sua função cognitiva.

Figura 13 - Tipos de representações e sua função cognitiva.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo a TRRS, as representações semióticas estão profundamente relacionadas à formação tanto das representações mentais quanto das representações computacionais.

Quanto à relação existente entre as representações semióticas e as representações mentais, Duval (2003) vai afirmar que essas últimas são, frequentemente, resultado da internalização daquelas primeiras. Segundo ele:

> Muitas vezes, as representações “mentais” não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas (p.31).

Assim, as representações externas além de se destacarem por permitir o tratamento e controle de um número muito mais elevado de informações, ainda

possibilitam a internalização e produção das representações mentais que, por sua vez, têm como vantagem “sua maior rapidez e seus “atalhos”” (Duval, 2003, p. 31).

É, então, pela interiorização das representações semióticas que ocorre o desenvolvimento das representações mentais e, assim, de um ponto de vista genético, elas “não podem ser opostas como dois domínios totalmente diferentes” (Duval, 2009, p. 17). Como “não há *noésis* sem *semiósis*”, não se pode, portanto, considerar as representações mentais de forma independente das representações semióticas (Duval, 2009, p. 17).

Já a relação das representações semióticas com as representações computacionais está evidenciada na interação entre os *tratamentos quase-instantâneos* e os *tratamentos intencionais* (Duval, 2009). Segundo o autor, esses dois tipos de tratamentos se complementam e são indispensáveis para o funcionamento e desenvolvimento cognitivos do pensamento humano.

Os tratamentos quase-instantâneos são “tratamentos não conscientes que fornecem uma organização objetiva imediata ao olhar do sujeito”. São efetuados independentemente de nossa atenção e “produzem os dados necessários para uma visão que se tenha do objeto”. Já os tratamentos intencionais são aqueles tratamentos que o sujeito “decide e que ele pode controlar” (Duval, 2009, p. 51).

Para o autor, “o caráter imediato ou evidente de uma apreensão, perceptiva ou conceitual, implica a colocação de um conjunto de tratamentos quase-instantâneos” (Duval, 2009, p. 51). Segundo Duval (2009, p. 52), as diferentes performances cognitivas entre os indivíduos resultam da “diversidade e da arquitetura dos tratamentos quase-instantâneos dos quais eles dispõem”. Nesse sentido, o progresso qualitativo na aprendizagem e os sucessos cognitivos que dele derivam estão condicionados à aquisição de novos tratamentos quase-instantâneos.

Contudo, a aquisição desses tratamentos não conscientes passa, necessariamente, pelo trabalho com tratamentos conscientes e intencionais (Duval, 2009). Em outras palavras, a atividade intencional sobre representações semióticas resulta em apreensões imediatas produzidas por representações computacionais.

Em síntese, vimos que a objetivação feita pelo indivíduo, ou seja, a apreensão do objeto para si, muito embora seja uma função comum às representações mentais e às representações semióticas, também depende dos tratamentos realizados pelo seu repertório de representações computacionais. Em outras palavras, a objetivação resulta da relação entre as representações externas (semióticas) e as representações

internas (não semióticas) ao indivíduo, sejam essas últimas conscientes (mentais) ou não conscientes (computacionais).

Para a TRSS, tal objetivação será um sucesso cognitivo, ou seja, corresponderá a apreensão conceitual do objeto se o sujeito for capaz de coordenar diferentes representações semióticas, discriminando "o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra" (Duval, 2009, p. 82).

Ainda sobre a relação entre as representações semióticas e as representações não semióticas, Duval (2009, p. 47) afirma que se trata de uma interação "cuja complexidade escapa ainda aos métodos de investigação e às teorias de que dispomos". Desse modo, não pretendemos, nessa pesquisa, analisar os mecanismos dessa interação, mas apenas observar possíveis indícios de objetivação a partir da adoção de dois diferentes caminhos para a conversão *fração* → *percentual*.

Nesse capítulo, apresentamos alguns elementos da TRRS que fundamentaram a nossa análise ao final do trabalho. Iniciamos com o resgate de alguns modelos semióticos que influenciaram Duval (2011) na elaboração de sua proposta teórica, já que nossa hipótese partia, principalmente, de uma dessas contribuições, a saber, a impossibilidade de que duas diferentes representações do mesmo objeto (referente) tivessem o mesmo conteúdo (sentido) (Frege, 1978). Abordamos outros pressupostos da teoria, tais como a importância da conversão, em ambos os sentidos e com diferentes graus de não-congruência semântica, e a necessária discriminação/coordenação das unidades de sentido no interior das representações envolvidas para a apreensão do objeto ali representado. Vimos também que tais representações são fomentadoras de representações mentais que podem ser fundamentais para o sucesso, do ponto de vista cognitivo, dos estudantes.

A partir dessa fundamentação, esperamos investigar, no que concerne à apreensão do número racional em seu significado parte-todo, a influência de dois possíveis caminhos para a conversão *fração* → *percentual*: um pela via de tratamentos em escritas simbólicas e outro a partir da utilização do material manipulável produzido para essa pesquisa.

No capítulo seguinte, abordaremos alguns aspectos que envolvem o processo de ensino-aprendizagem desse objeto matemático, discutiremos possíveis tratamentos e conversões a partir de suas representações simbólico-numéricas, bem como a variação de congruência e não-congruência semântica entre elas.

3 OS NÚMEROS RACIONAIS

Nesse capítulo, apresentaremos algumas informações que buscam situar historicamente o surgimento dos números racionais e, especificamente, do símbolo %. Discutiremos as variadas significações e representações que os racionais podem assumir, bem como alguns desafios relacionados ao seu ensino e a sua aprendizagem. Por fim, com o intuito de concentrar atenção nos aspectos que mais dizem respeito ao objeto dessa pesquisa, abordaremos, à luz da TRRS, os tratamentos e as conversões a partir de representações simbólico-numéricas desses números.

O conjunto dos chamados números racionais, designado pelo símbolo Q, abrange, segundo Figueiredo (1975), todos os números que podem ser expressos na forma p/q, onde p e q são números inteiros e q é diferente de zero. Em outras palavras, número racional é todo número que pode ser representado na forma de fração. Desse modo, podemos dizer que o conjunto Q contém o conjunto N (os números naturais), o conjunto Z (os números inteiros) e, ainda, todos aqueles números cuja representação numérica decimal é finita ou periódica.

Relatos históricos afirmam que a introdução do conceito de número racional, ou seja, da ideia numérica de fração entre os seres humanos foi motivada, sobretudo, pela necessidade de realizar medidas. De acordo com a descrição do historiador grego Heródoto, tal conceito matemático passou a ser utilizado pelos egípcios por ocasião da administração da relação entre as medidas das terras, distribuídas às margens do rio Nilo, e o pagamento dos impostos devidos (Caraça, 1989).

Segundo o historiador, os egípcios tiveram que lidar com a necessidade de aferir, periodicamente, as medidas das áreas das terras cultiváveis que variavam devido às cheias do Nilo. Para tanto, os chamados agrimensores utilizavam cordas com vários nós que eram esticadas para medir as dimensões de cada terreno. A medida do comprimento entre um nó e outro era a medida do cúbito do faraó[2] (Caraça, 1989).

De acordo com a descrição de Heródoto, o processo de medição consistia em esticar a corda e fazer a contagem de quantos cúbitos cabiam naquela distância. Ocorre que a contagem numérica já não se mostrava suficiente para determinar

[2] Unidade de medida utilizada pelos egípcios, há cerca de 4.000 anos, e que consistia na distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio do faraó.

precisamente o tamanho dos terrenos egípcios, já que nem sempre o cúbito do faraó, ou seja, o intervalo entre dois nós da corda cabia inteiramente ao final do comprimento medido (Caraça, 1989). A unidade de medida estabelecida precisava, portanto, ser subdividida, já que o campo dos números inteiros não era o bastante para mensurar, exatamente, grandezas dessa natureza. Esse dilema foi decisivo para a criação de um conjunto mais amplo que abrangesse também as frações do inteiro. Tem-se, desse modo, a gênese do campo dos números racionais, particularmente, as suas representações fracionárias.

Hoje, presentes com seus usos e significados em nosso cotidiano, os números racionais estão por toda parte. Para qualquer indivíduo que busca uma interação adequada e adaptada às demandas das sociedades contemporâneas, estar familiarizado com as variadas representações e significados desse objeto matemático é condição fundamental. Em outras palavras, a vida social requer que saibamos realizar, em diversas situações a que somos submetidos, a leitura e interpretação de informações que envolvem, por exemplo, expressões numéricas fracionárias, percentuais e decimais.

Entender a receita de um bolo que demanda a adição de 1/2 de xícara de chocolate em pó, saber o que significa o aumento de 5% no preço da gasolina noticiado no telejornal ou o anúncio de um produto que custa apenas R$ 1,99 exige que tenhamos a capacidade de reconhecer o número racional em seus diferentes registros de representação. Por outro lado, a fração 1/2, utilizada no exemplo anterior, pode, num outro contexto, significar a razão entre meninos e meninas numa sala de aula ou, até mesmo, um número numa reta numérica.

Essas situações do dia-a-dia são simples exemplos que demonstram a significativa presença das representações e significados dos números racionais em nossas vidas e, portanto, a importância de estudos e pesquisas relacionadas a este objeto matemático.

Nesse sentido, Mandarino (2010, p.107) afirma que desde os primeiros anos do ensino fundamental, “os números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, já são objeto de estudo e causam muita preocupação aos professores e alunos”. Tal preocupação justifica-se pela dificuldade que grande parte dos estudantes e professores apresentam ao terem que lidar com os vários significados e a diversidade de registros de representação associados a estes números.

Assim, podemos apontar, no mínimo, três aspectos relacionados ao processo do ensino e da aprendizagem dos números racionais que justificam a atenção e o esforço empregados em pesquisas que se dedicam ao tema:

- A variedade de significados, ou seja, de interpretações que podem ser atribuídas aos números racionais.

- A variedade de registros de representação possíveis para um mesmo número racional.

- As dificuldades observadas envolvendo o ensino e a aprendizagem deste objeto matemático.

A seguir, discorreremos sobre essa multiplicidade de sentido e forma com a qual os números racionais podem ser expressos e, à luz de algumas pesquisas, discutiremos alguns dos desafios que envolvem o seu ensino e aprendizagem.

3.1 Significados e Representações

O mesmo número racional pode assumir significados diversos, de modo que uma mesma representação pode expressar diferentes sentidos a depender de sua aplicação e contexto. Por outro lado, observa-se, também, uma grande variedade no que concerne aos possíveis registros de representação que podem expressar um mesmo número racional.

3.1.1 Os números racionais e seus variados significados

Segundo Lamon (2007), todo número racional positivo se relaciona com uma dada unidade e é essa relação que determina a sua grandeza: a grandeza dos números inteiros é dada pelos conjuntos de unidades que eles nomeiam, enquanto que os números fracionários têm sua grandeza definida por uma relação com a unidade. Desse modo, embora existam vários significados para o número racional, todas as suas significações podem ser relacionadas diretamente a uma medida cuja referência é a unidade. Em síntese, qualquer número racional pode ser interpretado como medida (Lamon, 2012).

No entanto, autores como Kieren (1998), Behr, Lesh, Post e Silver (1983) e Ohlsson (1989) abordaram em seus trabalhos uma variedade de significados que podem ser atribuídos ao número racional, tais como o de *número, medida, quociente,*

operador multiplicativo, taxa, razão, coordenadas lineares, parte-todo e interpretação *parâmetro/parâmetro*.

Já nas orientações didáticas para o 3º e 4º ciclo dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, publicados nos anos de 1997 e 1998, encontramos quatro sentidos para as representações fracionárias dos números racionais: *parte-todo, divisão, operador e razão* (Brasil, 1998).

A aprovação e homologação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, no final de 2017, fez com que o Brasil passasse a ter um documento de caráter normativo definindo

> [...] o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2017, p. 8).

Com a chegada da BNCC, "redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas" (Brasil, 2017, p. 23).

Dentre as expectativas descritas no documento para os anos iniciais do Ensino Fundamental (1º a 5º ano) estão a resolução de "problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações" e o aprofundamento da noção de número a partir de tarefas de medição que apontam para a "necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (Brasil, 2017, p. 268 e 269).

Especificamente para o 5° ano, etapa final dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC apresenta dentre as habilidades esperadas para os estudantes em relação ao estudo dos números racionais:

> (EF05MA02) Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica;
> (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso;
> (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica;

> (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (Brasil, 2017, p. 295).

Podemos identificar dentre essas habilidades pelo menos quatro significados para os números racionais: *número, quociente, operador multiplicativo e parte-todo*. Enfim, vemos que a peculiaridade de poder assumir vários sentidos é destacada tanto em pesquisas que se dedicam aos racionais quanto em documentos oficiais referenciais para currículos e propostas de ensino.

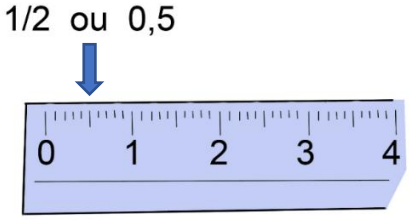
Dentre todos os já citados, escolhemos cinco significados atribuídos ao número racional para uma breve descrição neste texto:

Significado Número

Atribuímos o sentido de número a uma representação fracionária ou decimal do número racional quando a tomamos como integrante de uma sequência numérica. Quando buscamos localizar o número 1/2 ou 0,5 numa dada reta numérica, estamos trabalhando a ideia deste racional como um número. Como exemplo, temos a atividade da figura 14, cuja solução passa pela mobilização deste significado:

Figura 14 - Atividade envolvendo racional com sentido de número.

Indique o número racional 1/2 ou 0,5 na régua.



Fonte: Elaborado pelo autor.

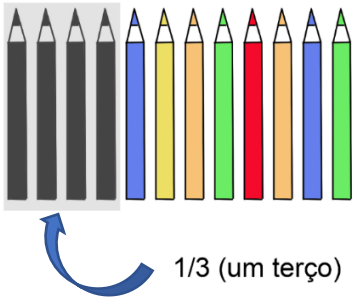
Significado Parte-todo

Nesse sentido, o número racional representado é tido como um todo que foi dividido num dado número de partes equivalentes. Assim, o sentido parte-todo refere-se à ideia de número racional representado, por exemplo, pela fração **a/b**, onde **b** indica o número de partes iguais em que foi dividido o todo e **a** indica o número de partes destacadas. Estabelece-se, portanto, uma relação direta do denominador e

numerador com, respectivamente, o número total de partes iguais em que a quantidade contínua ou discreta foi dividida e o número de partes consideradas, como mostra o exemplo de atividade presente na figura 15:

Figura 15 - Atividade envolvendo racional com sentido de parte-todo.

Num conjunto com 12 lápis, 4 são pretos. Que fração representa a quantidade de lápis pretos no conjunto?



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nessa pesquisa, buscaremos analisar possíveis contribuições, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, de diferentes caminhos de conversão entre os registros de representação numérico fracionário e numérico percentual dos números racionais no que tange a apreensões relacionadas às frações em seu significado parte-todo.

Significado Quociente

O sentido quociente refere-se à representação fracionária **a/b** como uma divisão em que **b** é diferente de zero. Podemos ver uma proposta de mobilização desse sentido no exercício a seguir, elaborado para este texto: “Gilberto comprou duas pizzas e vai dividi-las igualmente para cinco pessoas. Que parte de uma pizza cada pessoa receberá? Resposta: 2/5 = 2 ÷ 5 = 0,4 (quatro décimos)”.

Significado Operador Multiplicativo

O sentido operador é mobilizado quando usamos o número racional como uma função que atua sobre um outro número e o transforma. No exemplo de exercício a seguir, elaborado para este texto, temos a possibilidade de mobilização desse sentido para a sua resolução: “Suzana recebeu 90 reais, mas teve que gastar 1/6 desse valor

pagando algumas dívidas. Quanto Suzana gastou com suas dívidas? Resposta: 1/6 . 90 = 15 (quinze reais)".

Significado Razão

O sentido razão é atribuído a uma fração **a/b** quando esta representa uma relação existente entre dois valores, **a** e **b**, de uma mesma grandeza. Na atividade a seguir, elaborada para este texto, temos que para cada menina há dois meninos na sala-de-aula, ou seja, a razão entre meninas e meninos é dada pela representação 1/2: "Numa sala-de-aula há cinco meninas e dez meninos. Qual é a razão entre o número de meninas e meninos nesta turma?"

Como vimos no início dessa seção, pesquisadores destacam várias outras interpretações para o número racional. Contudo, optamos por exemplificar, nesse texto, aquelas que julgamos mais comuns nas atividades escolares.

A constatação das várias significações que podem assumir os números racionais leva-nos à conclusão, segundo Kieren (1976), de que a sua aprendizagem passa a ser, portanto, o resultado das experiências dos alunos com as diversas maneiras de se compreender este objeto e que tal sucesso não ocorrerá por meio de uma didática que se baseie apenas em cálculos.

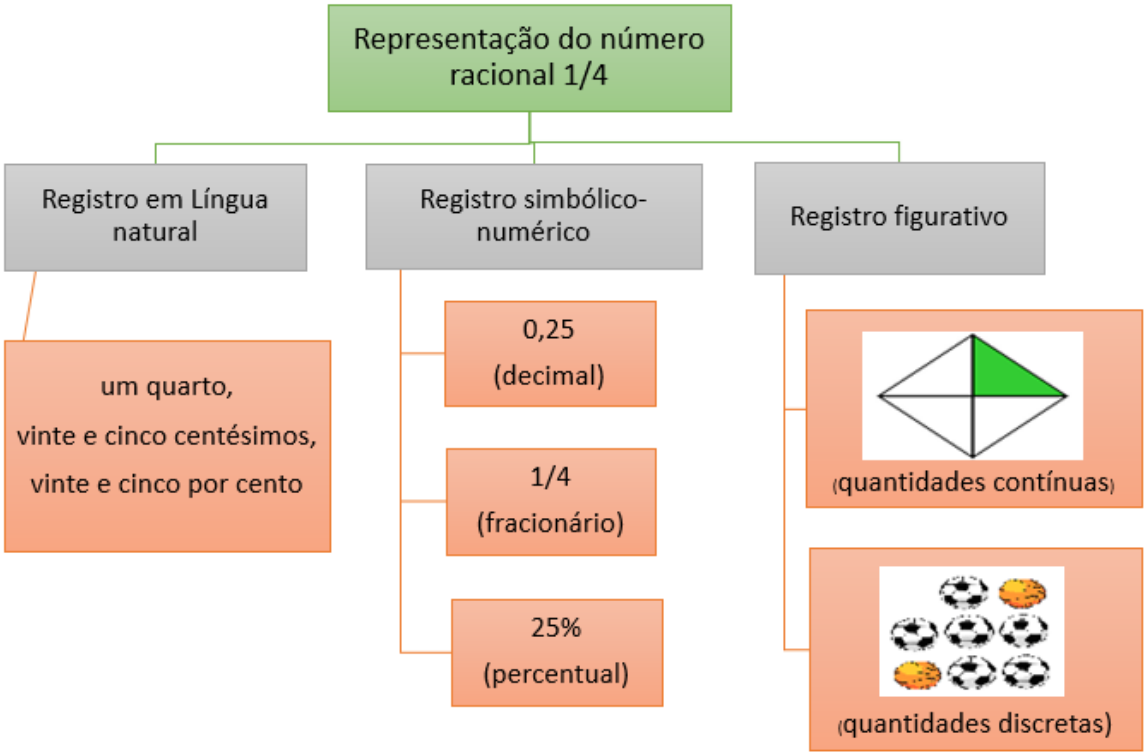
3.1.2 Os números racionais e suas variadas representações

À luz da TRRS, a variedade dos registros de representação cumpre um importante papel no ensino da matemática, pois, para Duval (2003), a abordagem dos objetos matemáticos deve sempre privilegiar a utilização de vários de seus possíveis registros, já que cada registro tomado isoladamente não pode dar conta do todo representado. Nesse sentido, cada registro revela uma ideia apenas parcial em relação ao objeto representado. Para o autor, a aprendizagem que se dá a partir da diversificação e coordenação dos registros de representação do objeto em estudo faz com que o indivíduo experimente um forte desenvolvimento de suas capacidades cognitivas globais (Duval, 2003).

No que tange aos números racionais, há uma variedade de representações possíveis: expressões em linguagem natural, seja falada ou escrita; registros em escrita simbólico-numérica decimal, fracionária ou percentual; representações

figurativas dentre outras. No esquema mostrado na figura 16, apresentamos, como exemplo, algumas possíveis representações para o número racional 1/4:

Figura 16 - Esquema de representações para o racional 1/4.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a descrição dos objetos de conhecimento e habilidades previstas na BNCC (Brasil, 2017) para a matemática, a introdução das várias representações do número racional, nos quatro anos iniciais do Ensino Fundamental, ocorre da seguinte maneira:

1º ano - Já pode haver a utilização de representações figurativas e representações simbólico-numéricas em atividades que relacionam a quantidade de elementos numa coleção a um número, a linguagem natural na forma verbal, obviamente, deve ser bastante empregada para nomear os números naturais até 100.

2º ano - Há a indicação do trabalho com a ideia de “metade” e “terça parte” ao explorar problemas que envolvam também a ideia de “dobro” e “triplo” com o suporte de imagens ou material manipulável, o que sugere a possível utilização de representações figurativas do número racional.

3º ano - Espera-se, como uma das habilidades desenvolvidas, que os estudantes associem os quocientes das divisões exatas por 2, 3, 4, 5 e 10 aos significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte, respectivamente, o que indica a utilização de expressões em linguagem natural relacionadas.

4º ano - Ocorre a introdução dos registros simbólicos numéricos fracionários, com as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100), e das representações decimais para escrever valores monetários (BRASIL, 2017).

Para o 5º ano do Ensino Fundamental, a BNCC prevê, como um dos objetos de conhecimento,

> Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica; Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica; Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência; Cálculo de porcentagens e representação fracionária; (Brasil, 2017, p. 294).

Nessa etapa, portanto, os estudantes deverão explorar, sobretudo, os registros em escrita simbólica dos números racionais, ou seja, suas representações numéricas decimais, numéricas fracionárias e numéricas percentuais.

Representação Decimal

As representações decimais do número racional, sobretudo aquelas relacionadas a valores monetários, são bem comuns em várias situações cotidianas. Basta dar uma boa caminhada por algum shopping center, ir ao supermercado, ler uma oferta na internet ou assistir a um anúncio pela tv para que percebamos o quanto uma correta leitura dos chamados “números com vírgula” é importante, entre outras coisas, para a comparação entre os preços dos produtos.

Ainda assim, pesquisas demonstram que o alto nível de exposição às representações decimais não parece refletir-se numa desejada ausência de problemas relacionados à compreensão dos números racionais nesse tipo de registro. Ou seja, a familiarização desde muito cedo com os registros de representação decimal vista nos preços não é, por si só, suficiente para eliminar todos os problemas relativos à aprendizagem dos alunos.

A pesquisa de Monteiro e Pinto (2007), por exemplo, aponta algumas dificuldades no trabalho com os números decimais, como a não distinção entre as

representações 2,5 e 2,05, o que indica o desconhecimento do significado de décimas e centésimas partes. As autoras ainda destacam que a representação em linguagem natural ainda pode agregar um maior nível de dificuldade, uma vez que termos como “cinco décimos” ou ‘cinco centésimos” já não são tão presentes no quotidiano dos alunos.

Dentre as estratégias que podem ser utilizadas por professores pra introduzir, ou até mesmo reforçar, o ensino dos números racionais em sua representação numérica decimal está o trabalho com o dinheiro de brinquedo. O uso desse recurso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos alunos e, não por acaso, vemos, com muita frequência, os exercícios propostos e o material de apoio nos livros didáticos trazerem, já desde os primeiros anos da escolaridade, ilustrações com cédulas e moedas utilizadas atualmente no país.

Espera-se que uma referência concreta, como o dinheiro de brinquedo, possa favorecer a visualização de algumas relações, tais como:

- Trinta centésimos de um inteiro equivalem a trinta centavos de um real.
- Cinquenta centavos é a metade de um real, assim como cinquenta centésimos é a metade de um inteiro.
- 0,25 (vinte e cinco centavos) representam a quarta parte de 1 real, assim como 0,25 (vinte e cinco centésimos) representam a quarta parte de 1 inteiro, ou seja, 0,25 = 1/4.

A possibilidade de relacionar os centavos aos centésimos, dando à atividade um caráter mais prático e próximo da realidade dos alunos, é, certamente, uma das vantagens desse tipo de abordagem didática.

É importante observar que a maneira como os alunos leem as representações numéricas decimais dos números racionais também tem implicações no que concerne à apreensão do seu sentido. A representação 0,25, por exemplo, é, na maioria das vezes, lida como “zero vírgula vinte e cinco”, ou seja, há uma leitura, em sequência, de três elementos que compõem o registro (o algarismo zero, a vírgula e o número vinte e cinco) sem, contudo, haver uma relação com o valor posicional de cada um. Por outro lado, a leitura da representação como “vinte e cinco centésimos”, segundo Nunes e Bryant (1997), traz, nessa forma linguística que pronuncia o nome das ordens, indícios que podem auxiliar o aluno nessa compreensão.

Representação Fracionária

Os registros numéricos fracionários, embora não sejam tão comuns na vida dos estudantes quanto os registros numéricos decimais, têm sua importância, sobretudo, se considerarmos que a apreensão dessa representação será fundamental para o seu trabalho com expressões algébricas, fórmulas e cálculos relacionados a diversos objetos matemáticos em etapas mais avançadas da escolaridade. Tal compreensão também será importante na resolução, principalmente, de problemas relacionados à geometria e ao campo das grandezas e medidas.

As frações estão mais presentes, nas situações da prática social, em representações da linguagem natural. É comum ouvirmos expressões tais como “meia xícara”, “um quarto do terreno”, “dízimo” etc. Embora, não raras vezes, as pessoas ignorem o sentido das representações numéricas correspondentes: 1/2, 1/4 e 1/10.

Muito embora a representação numérica fracionária possa assumir vários significados como vimos anteriormente, é o sentido “parte-todo” o mais aplicado à fração, desde os primeiros anos escolares. Nesse caso, a representação a/b refere-se à parte de um todo e é entendida como a relação: número de partes consideradas / números de partes “iguais” em que foi dividido o todo ou inteiro.

Nunes et al. (2003) aponta que a ideia por trás desse sentido da fração é a de partição de um todo contínuo em n partes iguais, bastando, portanto, o emprego da chamada “técnica de dupla contagem” pelos alunos para resolverem a maior parte dos exercícios que envolvem a conversão de representações numéricas fracionárias em representações figurativas e vice-versa. Assim, o número de partes pintadas ou destacadas na figura fica acima do “traço”, enquanto que o número total de partes iguais em que ela foi dividida fica abaixo.

O todo ou total considerado na concepção parte-todo poderá ser determinado, nas representações figurativas, por uma quantidade contínua ou por uma quantidade discreta. Por quantidades contínuas, entendem-se aquelas as quais podemos dividir o todo em um número infinito de partes iguais sem que haja qualquer prejuízo de suas propriedades, como por exemplo, a superfície de figuras planas. Por sua vez, ao falarmos de quantidades discretas, estamos nos referindo àquelas cujo total não podemos dividir infinitamente, sob pena de prejuízo a suas propriedades, como por exemplo, uma turma de alunos ou uma coleção de objetos.

Representação Percentual

Quanto às representações percentuais, podemos dizer que tais registros já passam a compor o universo de nossa vivência cotidiana desde muito cedo. Por isso, é esperado que a maior parte dos alunos já esteja bem familiarizada com o significado de algumas expressões relacionadas à ideia de representação percentual que são verbalizadas, tais como “cem por cento”, “cinquenta por cento”, “zero por cento”, em conversas do nosso dia-a-dia para designar, respectivamente, o total, a metade e o nada.

Isto foi demonstrado por Moss (2002) que, em seu estudo, concluiu que os alunos não tiveram muita dificuldade para estabelecer relações mais simples, tais como 100 por cento refere-se à ideia de “tudo”, 99 por cento à ideia de “quase tudo”, 50 por cento à ideia de “exatamente metade” e 1 por cento à ideia de “quase nada”. Contudo, para além do discernimento de expressões mais comuns, ainda resta o desafio de levar os alunos a uma apreensão mais global a respeito dos números racionais em sua representação numérica percentual. Embora muito presente no nosso dia a dia, sobretudo no que se refere às noções básicas, o conceito de porcentagem ainda parece ser de difícil compreensão para a maioria dos alunos.

Moss e Case (1999) e Tian e Siegler (2017) corroboram com a ideia de que os registros percentuais já integram as experiências sociais dos alunos mesmo antes do seu ingresso na escola e apresentam também como vantagem o fato de que os estudantes podem relacioná-las, de forma intuitiva, com outros tipos de representações. Contudo, os autores advertem que a literatura, com a exceção de alguns poucos estudos recentes, ainda privilegia, sobretudo na introdução aos números racionais, a discussão das representações fracionárias e decimais em detrimento das representações percentuais que são, segundo eles, postas em segundo plano (Moss: Case, 1999; Tian; Siegler, 2017).

Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018) destacam também a versatilidade da representação percentual que pode ser constatada, segundo esses autores, a partir da consideração de três aspectos:

> Em primeiro lugar, está presente na linguagem do quotidiano e a sua utilização está generalizada aos mais diversos contextos da sociedade, sendo intuitivo o entendimento da expressão “por cento”, como por cada cem ou em cada cem, isto é, algo que se compara com cem. Em segundo lugar, a sua notação, na forma simples, como 10%, envolve um numeral, com propriedades de número inteiro, e um

> símbolo, que lhe imprime uma relação multiplicativa. Esta notação apresenta-se mais próxima da notação dos números inteiros do que a fração ou o numeral decimal, em que dois números inteiros são usados, separados por um traço de fração ou por uma vírgula. Por último, a percentagem relaciona-se facilmente com as outras representações dos números racionais, na medida em que é simples converter qualquer percentagem em fração ou em numeral decimal (p. 357).

Cumpre-nos destacar, contudo, que a facilidade de conversão a que se referem os autores está, ao nosso ver, relacionada a conversões do tipo 75% → 75/100 → 0,75, cuja transparência entre os registros é evidente e os tratamentos são bastante simples. No entanto, o grau de não-congruência e, portanto, o nível de dificuldade em conversões que envolvem um número percentual e uma fração que não seja centesimal[3] tendem a aumentar, como na transformação 75% → 3/4, por exemplo.

Outro aspecto que merece ser evidenciado com relação ao registro percentual é a sua natureza essencialmente relacional, pois todo número percentual expressa uma comparação direta entre dois números, sendo um desses o número 100. Assim, esse tipo de registro representa uma relação parte-todo, em que o número que precede o símbolo % na notação indica o número de partes consideradas desse todo subdividido em cem partes iguais.

A importância da apreensão da representação percentual e do seu significado também se reflete na atenção que instrumentos oficiais de avaliação dispensam a esse tipo de registro do número racional.

Silva (2013) analisou as avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM entre 1998 e 2011 e constatou que, dos 70 itens identificados como mobilizadores de algum tipo de significado do número racional, 41 abordavam o significado *porcentagem*. A autora tomou por referência os estudos de Romanatto (1997) e Gomes (2010) e considerou os significados de medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, um número na reta numérica e porcentagem. Assim em mais da metade dos itens observados o que se demandava era a mobilização do sentido de porcentagem para a resolução das questões.

A pesquisadora apontou ainda que os resultados sugerem uma tendência do exame à exploração de situações, em suas questões, que envolvam contextos

[3] Chamamos de fração decimal uma fração cujo denominador é 10, 100, 1000... Nesse texto, contudo, usaremos o termo fração centesimal para referirmo-nos à fração decimal com denominador 100.

econômicos e sociais, ou seja, situações relacionadas a ideia de cidadania. Os achados da pesquisa evidenciam a utilização em profusão da ideia de porcentagem nos exames nacionais e apontam para a necessidade de estratégias didáticas que possam auxiliar os alunos na construção desse conceito.

O significado e a origem da representação percentual

A representação percentual do número racional traduz uma razão cujo denominador é igual a 100 e, como já dissemos, significa a comparação de uma determinada parte com o seu todo. Desse modo, todo número percentual pode ser expresso na forma de uma fração centesimal (fração cujo denominador é igual a 100).

Segundo Lamon (2007), a razão é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades que podem ser de mesma natureza ou não, os números percentuais são um tipo especial de razão em que a segunda quantidade é sempre 100.

Um número percentual pode, portanto, ser definido como uma medida de razão de base 100 e o símbolo usado para identificá-lo como tal é o “%” (lê-se: por cento). Machado (1992) observa que, na linguagem matemática, os símbolos se articulam diretamente com os seus significados e, dessa forma, o entendimento da simbologia é fundamental para a compreensão dos conceitos relacionados. Para Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018), a notação formada por um número inteiro e o símbolo % tem a vantagem de ser mais familiar, por ser mais parecida com os números naturais e os inteiros do que as frações e os decimais, em que temos dois inteiros separados por um traço ou por uma vírgula respectivamente.

Embora a representação numérica percentual tenha sido utilizada inicialmente no século XV para o cálculo de juros, impostos e lucros em operações comerciais, a ideia da taxa percentual já havia surgido muito antes com o imperador romano Augusto que criou o imposto de 1/100 sobre todas as coisas que eram comercializadas (Contador, 2008). Smith (1953) também cita essa mesma taxa denominada, em latim, de *centésimo rerum venalium*, ou seja, *o centésimo das coisas à venda*, destacando que o imposto instituído pelo imperador incidia sobre o valor de mercadorias vendidas em leilão.

Existiam também as taxações de 1/20 e 1/25 para a compra e venda de escravos, respectivamente, ou seja, era comum na matemática usada pelo comércio romano frações com denominadores 5, 20 e 25 que podiam ser substituídas facilmente por centésimos.

De fato, o uso de frações com denominadores que facilitassem os cálculos em contextos comerciais é bastante antigo. Segundo Boyer (1974), entre os babilônios, por exemplo, há mais de três mil anos, frações como 12/60 eram usadas como taxa anual em problemas de juros compostos, o que era perfeitamente adequado ao sistema de numeração sexagesimal da Babilônia (Imenes e Lellis, 2005).

É somente entre os séculos XV e XVI que, na Europa, as frações decimais começam a ser usadas com maior frequência para indicar taxas de juros e, assim, as frações com denominador 100 passaram a ser mais comuns que frações com outros denominadores, o que resultou certamente na adoção da expressão “por cento” (Imenes e Lellis, 2005).

O estabelecimento da base 100 para cálculos desse tipo durante o século XV pode ser constatado a partir de documentos da época que trazem representações tais como “*20 p 100”*, “*X p cento”* e “*VI p C 0*” para expressar “vinte por cento”, “dez por cento” e “seis por cento”, respectivamente (Contador, 2008).

Por tudo isso, é possível que, segundo Imenes e Lellis (2005), o primeiro significado associado ao número racional em sua representação numérica percentual tenha sido o de operador, ou seja, “**a %** de uma quantia **Q** indica **a/100 × Q** ou **(Q ÷ 100) × a**. Aliás, essas formas de calcular porcentagens são encontradas em obras didáticas antigas” (p. 17). Ainda com relação ao emprego do sentido operador nos cálculos envolvendo os números percentuais, os autores observam que

> muitas pessoas não escolarizadas são capazes de efetuar cálculos com porcentagens (comerciantes, carpinteiros, vendedores nas feiras livres, por exemplo); identificam 100% com o total, 50% com metade desse total, 10% com esse total dividido por 10, etc. Assim, calculam 10% de, digamos, R$ 30,00, efetuando 30 ÷ 10. Estendendo essa idéia, algumas pessoas calculam, por exemplo, 13% de uma quantia dividindo-a por 100 (para obter 1%) e multiplicando o resultado por 13 (para chegar aos 13%). Nessa concepção está implícita a proporcionalidade, mas é mais forte ainda a idéia de que **a %** é um operador. Isto é, um símbolo que “manda” dividir por 100 e multiplicar por **a**” (Imenes e Lellis, 2005, p. 23).

Já o símbolo percentual, como conhecemos hoje, pode ter sua origem ligada a um manuscrito italiano com data de 1425, de autoria desconhecida, em que aparece a representação $\mathfrak{p}_{\frown}^{o}$. Depois, em 1650, surge a expressão $per\frac{o}{o}$ substituindo o símbolo $\frac{o}{\frown}$. Mais tarde, o *per* deixou de ser escrito, restando o

símbolo $\frac{o}{o}$ que, com o passar dos anos, passou a ser usado na forma % (Contador, 2008).

Representação em Linguagem Natural e Representação Figurativa

Falas do cotidiano como “o tanque ainda tem mais de *um quarto*, já passamos da *metade* do percurso e, por isso, tenho *cem por cento* de certeza que não ficaremos sem gasolina” são exemplos de como as representações em linguagem natural de objetos matemáticos, presentes em muitos de nossos diálogos, são importantes na nossa comunicação.

Com relação à linguagem natural, Duval (2011, p.83) afirma que este é “o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento”. As representações em linguagem natural dizem respeito a expressões da língua falada ou escrita e, no caso dos registros relativos a objetos matemáticos, referem-se à linguagem matemática usada para comunicar um conhecimento sistematizado interpretado e expresso de forma verbal ou textual.

A partir da TRRS, entendemos que a simples leitura de um registro simbólico ou figurativo que resulta na verbalização ou mesmo no pensamento de expressões como “um terço”, “vinte por cento”, “cinco décimos” já implica conversões em que o registro de chegada é a linguagem natural. Nesse sentido, um estudante que, por exemplo, realizou por escrito a conversão da representação 1/2 para a representação 0,5, ao verbalizar para o seu professor que a representação decimal é “cinco décimos”, acabou de fazer uma nova conversão.

Os registros figurativos, por sua vez, são trabalhados na escola já desde os anos iniciais, principalmente, para ilustrar grandezas discretas, tais como coleções de objetos, que possam ser relacionadas quantitativamente a números naturais. No que concerne aos números racionais, é bastante comum, para a representação da fração em seu sentido parte-todo, o uso de figuras geométricas (polígonos e círculos) subdivididas em partes iguais, com algumas dessas partes pintadas ou hachuradas. Silva (2018) chama essas representações de *figuras perceptuais* e apresenta como características o seu particionamento explícito em subfiguras ou partes de áreas congruentes, bem como a homogeneidade das formas dessas partes.

É importante saber, por fim, que, segundo Kieren (1976), os vários significados e as várias representações do número racional são independentes em sua interpretação, pois cada registro ou sentido atribuído evidenciará alguns aspectos em

detrimento de outros referentes ao mesmo objeto matemático. E isto, segundo o autor, faz com que estas diferentes visões, que são oportunizadas por estas interpretações distintas, abram o caminho para o seu estudo também por perspectivas distintas.

3.2 Desafios no processo de ensino-aprendizagem dos números racionais

Nos primeiros anos de sua vida escolar, a ideia de número para as crianças está restrita ao conjunto dos números naturais. As atividades, nessa etapa, concentram-se, sobretudo, naquelas de contagem, em que as crianças exercitam a verbalização de uma sequência de termos que nomeiam os números (representações em linguagem natural), relacionando-os com os símbolos escritos correspondentes (representações em escritas simbólicas). Para a apreensão do significado de cada número, costuma-se privilegiar a utilização de exercícios que explorem a sua relação com uma determinada quantidade de elementos (dedos das mãos, pequenos objetos, figuras etc.)

Contudo, a ampliação dos números naturais ou dos inteiros positivos para o universo dos números racionais, vem acompanhada de uma necessidade, cada vez maior, de abstração por parte das crianças que agora têm de lidar com números que expressam inteiros não positivos e até números que sequer são inteiros.

O trabalho com esse conjunto numérico demandará dos estudantes a assimilação das relações entre esses novos números, as maneiras de representá-los, seus significados, suas propriedades, bem como as operações a eles relacionadas. Enfim, conhecimentos essenciais relativos a esse novo objeto matemático que deverão ser explorados e apreendidos.

Para Behr et al (1983), os conceitos associados aos números racionais com os quais as crianças se encontram ao longo dos oito primeiros anos de sua escolarização estão, ao mesmo tempo, entre as ideias mais importantes e as mais complexas com as quais elas terão de lidar. Segundo os autores, podemos vislumbrar essa importância a partir de três diferentes perspectivas. A primeira é que, do ponto de vista prático, a habilidade de trabalhar com tais conceitos aumenta grandemente a capacidade de compreensão e manejo das crianças referentes a vários problemas e situações, seja no ambiente escolar ou fora dele. Em segundo lugar, de um ponto de vista psicológico, a apreensão dos números racionais abre um caminho rico em possibilidades para a continuidade do seu desenvolvimento intelectual. Por fim, do

ponto de vista matemático, é a compreensão dos números racionais que fundamenta o desenvolvimento, também, dos tratamentos e operações algébricas elementares.

Portanto, não à toa, muitos pesquisadores têm se dedicado à discussão dos desafios que envolvem o ensino e aprendizagem dos números racionais. O *Rational Number Project* (RNP), por exemplo, iniciou em 1974 como um projeto cooperativo entre três universidades dos Estados Unidos (Universidade do Norte de Illinois, Universidade de Minnesota e Universidade de Indiana) e reúne atualmente vários grupos de professores e estudantes de pós-graduação de diferentes universidades em torno dessa temática (Maia, 2022). O trabalho do RNP dedica-se à investigação da melhor maneira de ensinar as ideias iniciais de fração a alunos que, em nosso Ensino Fundamental, corresponderiam aqueles cursantes do quarto e do quinto ano (Maia, 2022).

Azevedo (2018) destaca que, desde a década de 1970, já surgiram muitos trabalhos em Educação Matemática dedicados ao tema. No entanto, o fato é que tanto alunos quanto professores ainda apresentam muitas dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem de frações, o que, para o autor, significa dizer que o volume de produção acadêmica ainda não tem resultado numa alteração substancial desse quadro.

De acordo com a BNCC, os estudantes devem começar a trabalhar com partes de inteiros a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, resolvendo e elaborando problemas que envolvam a ideia de dobro, metade, triplo e terça parte, usando estratégias pessoais com o suporte de imagens e materiais manipuláveis (Brasil, 2017).

A expectativa já para o 4º ano do Ensino Fundamental é que os estudantes conheçam os números racionais na forma de frações mais simples, ou seja, frações tidas como mais comuns na vivência cotidiana (Brasil, 2017). Nesse sentido, uma das habilidades cujo desenvolvimento está previsto para essa etapa dos anos iniciais é, segundo o documento oficial, o reconhecimento das “frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (Brasil, 2017, p. 291). Assim, espera-se que os sujeitos da pesquisa, estudantes no início do 6° ano, já demonstrem um razoável conhecimento no que tange, especificamente, à grandeza desses racionais, isto é, a magnitude de um número em relação a outro.

No entanto, essa expectativa, não raras vezes, tem sido frustrada ante as dificuldades que a representação fracionária origina. Com relação ao obstáculo que a notação das frações constitui, Lopes (2008) observa que “não é trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho” (p. 9). Monteiro e Pinto (2007) também destacam essa dificuldade indicando o equívoco que muitos estudantes cometem ao comparar frações unitárias como, por exemplo, 1/3 e 1/4. Boa parte refere que a maior fração é 1/4, já que 4 é maior que 3. Outro equívoco citado pelas autoras é, por exemplo, considerar a fração 1/2 equivalente ao decimal 1,2, o que também implica desconhecimento relacionado às notações numéricas decimais.

Trabalhos como o de Santos (2010) e Silva (2004) indicam que boa parte dos alunos não consegue relacionar as diferentes representações de um mesmo número racional, bem como não interpreta corretamente os seus vários significados. Dentre as causas para tais dificuldades, Behr et al. (1983) aponta a ênfase no ensino mecanizado baseado em propostas curriculares que privilegiam a utilização excessiva de algoritmos e que tem se mostrado ineficiente para a aprendizagem dos alunos. Esta escolha didática pelo foco em aspectos procedimentais em detrimento da exploração de aspectos conceituais dos números racionais é tida, portanto, como causadora de obstáculos à apreensão desse objeto matemático.

Diante do grande desafio de compreender e contribuir com o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais, já surgiram diversos trabalhos e, a seguir, citaremos, brevemente, alguns deles.

Ponte e Quaresma (2014) estudaram em que medida alunos do 5º ano de escolaridade (de 10-11 anos) trabalhando com várias representações e diferentes significados dos números racionais desenvolveram a capacidade de comparar e ordenar tais números. Os estudantes foram observados no uso de diferentes representações e processos de raciocínio informais (considerados pelos autores como aqueles que “seguem formas de pensar ou de agir próprias do dia a dia”) e formais (quando, segundo os autores, “atendem à definição dos objetos matemáticos envolvidos, às propriedades desses objetos, às convenções matemáticas ou a procedimentos matemáticos já anteriormente aprendidos”).

As conclusões dos autores basearam-se no estudo de caso de uma aluna cujos resultados demonstraram uma maior proficiência quanto à compreensão em relação à comparação e ordenação dos números racionais nas representações decimais e

fracionárias. O estudo sugere que uma abordagem exploratória envolvendo diferentes representações favorece a apreensão da habilidade de comparar e ordenar números racionais através de processos de raciocínio formais e informais.

Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018), no estudo diagnóstico de sua pesquisa realizada com turmas do 3° e 4° anos, cujo objetivo era indicar as contribuições que o trabalho inicial com a percentagem, para a partir dela fazer emergir o conceito de número decimal e, posteriormente, de fração, trazem para a compreensão da natureza relacional dos números racionais, perceberam um conhecimento informal da percentagem demonstrado pelos alunos e que advinha de sua experiência cotidiana com várias tecnologias tais como smartphones e computadores.

Ao observar, num dos exercícios propostos, uma ilustração de uma barra de estado com 15% de download concluído para um jogo, alguns alunos responderam que faltavam carregar 85% para chegar a 100%. Fica evidente a associação que eles fazem de 15% como um dado grau de completude que só será atingida com 100%. Numa outra tarefa, os alunos tiveram que descobrir o que significava uma promoção de 50% numa camisa que custava 40 euros. Uma aluna justificou que, sempre que acompanha a sua mãe às compras, observa que ela paga a metade do preço todas as vezes que tem 50% de desconto e concluiu escrevendo que, se 50 é a metade de 100, então a resposta é 20 euros, pois 20 é a metade de 40. Os autores argumentam que a aluna percebe a relação de proporção intrínseca à percentagem e estabelece, de forma intuitiva, uma igualdade de razões.

Tais achados na pesquisa em questão reforçam, ao nosso ver, a percepção de que a noção de percentagem, ao menos no que concerne à relação de todo e metade com 100% e 50%, respectivamente, é resultado, muitas vezes e como já discutimos antes, da própria experiência dos alunos em situações do seu dia-a-dia onde tais representações estão inseridas.

Ainda nessa pesquisa, verificou-se que os alunos conseguiram representar frações e números decimais sem grandes dificuldades numa malha quadriculada 10 x 10. Para tanto, os alunos, segundo os pesquisadores, apoiaram-se no significado parte-todo e identificaram a quantidade que se queria e a unidade a que se referia. Nesse sentido, os alunos puderam representar a relação proporcional entre estas duas quantidades: número de quadradinhos destacados e número total de quadradinhos na malha.

Moss e Case (1999) realizaram atividade com 16 alunos da 4ª série abordando o número racional. Os pesquisadores inverteram a ordem normal de introdução das três representações simbólicas dos racionais e propuseram o trabalho inicial com as porcentagens, passando pelos decimais e culminando com as frações. A decisão de trabalhar os números racionais nesta sequência baseou-se nas seguintes considerações:

1 - Aos 10 ou 11 anos, segundo Noelting (1980), os indivíduos já são dotados de intuições qualitativamente bem desenvolvidas no que concerne a proporções. Por outro lado, nessa idade, também já conseguem intuir muito bem, segundo Okamoto e Case (1996), os números de 1 a 100. Segundo os pesquisadores, "começando com as porcentagens, permitimos que eles reunissem esses dois conjuntos de intuições de uma forma unidimensional natural" (Moss e Case, 1999, p.128, tradução nossa)[4].

2 - A introdução com as porcentagens permitiu que as crianças utilizassem uma forma de representação visual semelhante a uma "fita numérica" com a qual já estavam familiarizadas por conta das barras de progressão de status que surgem nas telas dos computadores quando estamos transferindo um arquivo. Tal representação promovia ainda mais esta conexão entre as intuições que as crianças tinham sobre as proporções e os números.

3 - Ao começar com as porcentagens, deixando as frações e decimais para depois, não haveria necessidade, nesse primeiro momento, de lidar com a comparação e manipulação de frações com denominadores diferentes o que vem sempre acompanhadas de procedimentos e algoritmos estranhos e complexos. Dessa forma, as crianças poderiam se concentrar no desenvolvimento de seus próprios caminhos para realizar os cálculos.

4 - É fácil determinar a uma representação equivalente, seja fracionária ou decimal, a partir de uma representação percentual, já a conversão no caminho oposto não é tão óbvia. "Frações simples, como 1/3 e 1/7, não têm equivalentes percentuais e decimais facilmente calculados" (Moss e Case, 1999, p.129, tradução nossa)[5]. Tal aspecto relacionado à atividade de conversão é o que Duval chama, como vimos, de fenômeno da heterogeneidade dos sentidos. Segundo os pesquisadores, a introdução

[4] "By beginning with percents, we allowed them to bring these two sets of intuitions together in a natural unidimensional fashion".

[5] "Simple fractions such as 1/3 and 1/7 have no easily calculated equivalent as percentages or decimals".

com as representações percentuais fez com que as crianças realizassem as primeiras conversões de forma direta e intuitiva e, assim, compreendessem melhor como as três representações simbólicas dos racionais se relacionam.

5 - Por fim, a percepção, a partir de conversas preliminares, que a terminologia percentual já era conhecida pelos alunos, pois mencionaram diferentes situações do seu cotidiano nas quais a porcentagem era usada tais como na apresentação das notas escolares de seus irmãos, nas promoções de vendas em lojas e nas taxas acrescentadas às contas de restaurantes. Também demonstravam a capacidade de estabelecer relações envolvendo valores percentuais e os seus significados tais como 100% e “tudo”, 99% e “quase tudo”, 50% e “exatamente a metade”, 1% e “quase nada”. Para os pesquisadores, o começo do trabalho com as porcentagens possibilitou o aproveitamento desse conhecimento preexistente dos alunos relacionado ao significado desses números e sua importância em alguns contextos.

No que concerne ao conhecimento profissional e à formação dos docentes, também há uma variedade de pesquisas que apontam lacunas nas apreensões dos professores e futuros professores dos anos iniciais, relacionadas aos números racionais, sobretudo, às frações.

A pesquisa de Campos e Silva (2009), por exemplo, mostrou que apenas 29,41% dos 17 pedagogos participantes conseguiram responder corretamente a uma questão que solicitava o cálculo da fração que caberia a cada indivíduo numa situação em que se pretendia dividir igualmente três barras de chocolate para quatro crianças.

Em sua pesquisa para verificar conhecimentos matemáticos dos alunos do quarto período do curso de Pedagogia, Menegazzi (2013) utilizou essa mesma questão e constatou que apenas um dos sete participantes conseguiu apresentar a resposta correta a partir de duas representações figurativas.

Costa e Poloni (2012), por sua vez, direcionaram a sua investigação para o último semestre do curso de Pedagogia em cinco universidades particulares e com um grupo de trinta graduandos participantes. A pesquisa demonstrou que os futuros professores indicaram, dentre 11 itens apresentados, aqueles relacionados a problemas e operações com números fracionários como os dois ou três itens que menos se sentiam preparados para ensinar. Outro achado importante da pesquisa é que mais da metade dos entrevistados, 53,3%, declararam-se insatisfatoriamente preparados ou totalmente despreparados para elaborar e planejar as aulas de matemática.

Proença (2015) pesquisou o quanto uma formação proporcionada a 25 licenciandas do curso de Pedagogia favoreceu a compreensão das futuras professoras com relação ao ensino de frações via resolução de problemas. Para tanto, quatro ações foram definidas como caracterizadoras de um ensino que privilegia tal abordagem:

a) Propor um problema como ponto de partida para introduzir o assunto;
b) Permitir que os alunos exponham suas estratégias de resolução, evitando a apresentação direta de algoritmos;
c) Promover a discussão das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, avaliando como desenvolveram cada etapa do processo resolutivo;
d) Articular o novo conteúdo trabalhado às estratégias dos alunos, favorecendo a sua compreensão.

A pesquisa demonstrou que, apesar da formação proporcionada, a ocorrência destas quatro ações nas propostas de condução de aulas das licenciandas subiu de 36%, no início do curso, para apenas 44% no final. Concluiu-se que as participantes não compreenderam, sobretudo, a importância de se partir de um problema proposto. Ficou evidente, também, a partir de uma atividade relacionada à equivalência de frações, algumas dificuldades das licenciandas quanto a compreensão do significado do todo no conceito de fração.

A urgência pela correção das distorções que envolvem o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais, incluindo o conhecimento e a formação dos professores sobre o tema, tem demandado estudos cujas conclusões, mais que apontar as lacunas e identificar as causas, façam-nos vislumbrar a criação de alternativas didáticas mais exitosas e é, nesse sentido, que esperamos que esse trabalho possa contribuir.

3.3 Tratamentos e conversões das representações simbólicas

Diversas pesquisas defendem a proposição de uma situação problema como a forma ideal para iniciar a abordagem dos objetos matemáticos em sala de aula. Tal defesa já havia sido evidenciada, no final dos anos 1990, pelos PCN ao afirmarem que

> [...] o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias

> e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (Brasil, 1997, p. 32).

A BNCC, homologada em 2017, ratificou tal proposição ao apontar como expectativa para os anos iniciais do ensino fundamental, no que concerne à unidade temática números,

> que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados (Brasil, 2017, p. 268).

Para Brito (2006), a resolução de um problema é um processo cujo início é marcado pelo encontro do sujeito com uma determinada situação que lhe exige a busca por alternativas que o conduzam ao alcance de uma determinada meta. Frente a essa situação-problema, o indivíduo deve, portanto, desenvolver uma sequência de etapas no sentido de encontrar a sua resolução. A autora observou as propostas de Mayer (1992), Krutetskii (1976), Sternberg (2000) e Polya (1978) e concluiu que as estratégias utilizadas para a resolução de problemas seguem, basicamente, as seguintes fases/etapas:

Representação - É a etapa que corresponde à compreensão ou interpretação do problema. Essa etapa implica conhecimentos linguísticos, ou seja, da própria língua portuguesa, tais como a semântica das palavras e das frases em geral, o significado dos termos matemáticos envolvidos, bem como conhecimentos matemáticos que levem o indivíduo a reconhecer qual o objeto em questão e, portanto, a discernir quais as informações ou dados relevantes e irrelevantes.

Planejamento - É a etapa que demanda o conhecimento estratégico para a organização da busca pela resolução do problema. Corresponde ao momento em que "você organiza estrategicamente a informação, encontrando uma representação que o habilite da melhor forma para executar sua estratégia" (Sternberg, 2000, p.308).

Execução – É a etapa procedimental, ou seja, o momento em que o sujeito precisará do conhecimento relativo à realização de cálculos, produção de desenhos, diagramas e outros tipos de representações de forma correta.

Monitoramento – É a ação de avaliar a solução encontrada, ou seja, realizar a verificação do processo resolutivo utilizado. Nessa etapa, podemos vislumbrar novos problemas e novas estratégias, bem como agregar novos recursos ou mesmo ampliar aqueles dos quais já dispomos (Brito, 2006).

Ainda segundo Brito (2006), essas fases não devem ser compreendidas como uma sequência a ser seguida no ensino, ou seja, não se deve acreditar que o sucesso na resolução dos problemas passa, obrigatoriamente, pelo cumprimento linear dessas etapas. O propósito de tal descrição é subsidiar o professor que, a partir desse conhecimento, deve avaliar e analisar as dificuldades percebidas em qualquer fase desse processo.

O estudante pode, portanto, demonstrar dificuldades já no que tange à própria compreensão do problema. Uma vez compreendido o problema, a dificuldade pode ser não saber como organizar a sua estratégia de resolução. Finalmente, é possível que, mesmo compreendendo o problema e sabendo que estratégia seguir no sentido da resolução, o estudante esbarre, ainda, nas lacunas de aprendizagem relacionadas aos tratamentos e conversões das representações. Nesse último caso, e no que concerne aos problemas que envolvem os números racionais, tais dificuldades surgem, principalmente, quando há a necessidade de realizar transformações dos registros em escrita simbólica.

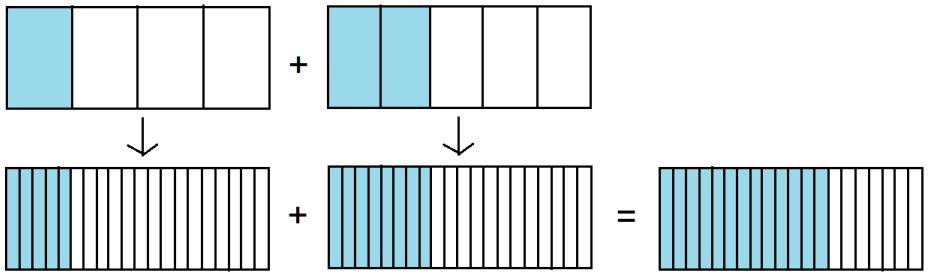
Nesta seção, abordaremos alguns tipos de tratamentos e conversões realizados em registros de representação das escritas simbólicas. Para tanto, partiremos da observação de alguns possíveis caminhos resolutivos para o problema descrito na seguinte atividade, elaborada para esse texto:

> O tanque do carro de Baltazar estava com 1/4 de gasolina. Ele foi ao posto de combustível e pôs mais uma quantidade de gasolina equivalente a 2/5 da capacidade total do tanque. Indique, em porcentagem, quanto de gasolina há no carro de Baltazar.

Percebe-se que uma estratégia de resolução que se fundamentasse em tratamentos figurativos, tais como a reconfiguração intermediária, descrita no capítulo anterior, exigiria, a priori, o conhecimento de que as figuras representantes das frações deveriam ser reconfiguradas com um número de subdivisões que correspondesse a um múltiplo comum dos números 4 e 5. Ainda assim, tal tratamento não seria economicamente viável, pois demandaria, como podemos ver no esquema

apresentado na figura 17, a subdivisão da figura modificada em, pelo menos, 20 partes iguais para se chegar à soma das frações, ou em 100 partes iguais para se chegar à representação figural equivalente ao número percentual buscado.

Figura 17 - Adição de frações via tratamento figurativo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, as representações figurativas cumpririam aqui o papel de representações intermediárias numa conversão cuja partida seria o enunciado do problema (linguagem natural e escritas simbólico-numéricas) e a chegada seria o registro numérico fracionário o qual, numa outra conversão, transformar-se-ia na representação percentual buscada.

Por outro lado, a utilização dos registros em escrita simbólica nas estratégias de resolução para esse problema parece ser o melhor caminho, já que podemos vislumbrar, rapidamente, várias formas de conduzi-la. Para exemplificar, vamos considerar apenas os quatro caminhos resolutivos a seguir:

(a) 1/4 + 2/5 = 5/20 + 8/20 = 13/20 = 65/100 = 65%
(b) 1/4 + 2/5 = 25/100 + 40/100 = 65/100 = 65%
(c) 1/4 + 2/5 = 0,25 + 0,4 = 0,65 = 65/100 = 65%
(d) 1/4 + 2/5 = 0,25 + 0,4 = 25/100 + 40/100 = 65/100 = 65%

A grande variedade de caminhos resolutivos possíveis com as escritas simbólicas não significa, obviamente, uma maior facilidade, já que, como pudemos perceber em todos os exemplos apresentados, os estudantes precisarão dominar, ao menos, os tratamentos relativos à adição de frações ou de números decimais, conseguir relacionar os números decimais e as frações (centesimais ou não) às representações percentuais correspondentes e, sobretudo, saber determinar frações equivalentes. Enfim, o processo resolutivo desencadeado pelos alunos a partir de

problemas que exigem tratamentos e conversões em representações simbólicas pode evidenciar muitas deficiências relacionadas ao domínio desse tipo de registro.

3.3.1 Os tratamentos simbólico-numéricos realizados

Umas das razões para as dificuldades de domínio das representações simbólico-numéricas é que, embora todas pertençam ao conjunto das escritas simbólicas, cada registro terá, segundo Duval (2009), sua própria significação operatória, de modo que os tratamentos não serão os mesmos para 1/4, 0,25 e 25%. Em outras palavras, a significação operatória não será a mesma para os registros fracionários, decimais e percentuais, o que pode ser constatado observando-se, por exemplo, os tratamentos necessários para as seguintes adições: 1/4 + 1/4 = 1/2; 0,25 + 0,25 = 0,5 e 25% + 25% = 50%.

Segundo o autor, algumas pesquisas têm demonstrado que alguns alunos são capazes de efetuar adições de números racionais na forma fracionária e na forma decimal, embora não consigam realizar conversões envolvendo esses registros (Duval, 2009). Nesse sentido, é possível que a escolha pelos caminhos resolutivos (a) e (b), que não demandam esse tipo de conversão, seja mais comum, muito embora haja, por outro lado, a necessidade do conhecimento relativo à ideia de proporcionalidade para a produção de frações equivalentes em todo o processo.

Duas frações são equivalentes, ou seja, $p/q = r/s$ se $ps = qr$ (Figueiredo,1975). Assim, frações equivalentes se relacionam proporcionalmente, de modo que, embora os valores dos seus numeradores e denominadores sejam diferentes, a razão entre essas quantidades em cada fração é a mesma. O reconhecimento e a produção de frações equivalentes é, como afirmam Behr et al. (1992), fundamental para a "compreensão do número racional como uma entidade (isto é, um só número) e para a compreensão da grandeza do número" (p. 316). A ideia de equivalência será, portanto, fundamental não apenas para comparar as grandezas de representações fracionárias do número racional, mas também para realizar tratamentos como simplificações e operações com frações.

O caminho resolutivo (a), por exemplo, inicia-se pela busca de frações equivalentes com denominadores comuns. Esse procedimento é usualmente indicado em atividades que solicitam dos estudantes o ordenamento ou comparação de

frações, muitas vezes, com o emprego dos sinais > (maior que), < (menor que) ou = (igual), bem como em atividades que requerem a adição ou subtração de frações.

Vale destacar que, como pudemos notar, todos os caminhos resolutivos apresentados têm em comum a busca pela definição de uma fração equivalente que seja uma fração centesimal. A produção de frações equivalentes está baseada no conceito de proporcionalidade, ou seja, duas frações serão equivalentes se seus numeradores e denominadores forem diretamente proporcionais entre si. Tomando as grandezas A e B por numerador e denominador de uma dada fração, o que se faz é aplicar o conceito de proporcionalidade descrito por Imenes e Lellis (2005)

> Duas grandezas A e B são diretamente proporcionais se duplicando um valor de A, duplica o valor correspondente de B, triplicando um valor de A, triplica o valor correspondente de B e, assim por diante. Generalizando, multiplicando-se um valor de A por qualquer número K, o mesmo acontece com o valor correspondente de B. A caracterização de grandezas inversamente proporcionais é análoga. Nesse caso, multiplicando-se um valor de A por qualquer número K ≠ 0, o valor correspondente de B fica dividido por K (p.19).

Desse modo, uma forma de tratamento que permite a transformação de qualquer fração numa fração centesimal é a igualdade de razões, mais frequentemente conhecida por regra de três. A regra de três pode ser aplicada a uma situação em que três números já são conhecidos e precisamos encontrar o quarto (Lima et al., 2006). Assim, para obter a fração centesimal equivalente a 1/4, por exemplo, seria necessário encontrar o valor de X na relação:

$$\frac{1}{4} = \frac{\mathrm{x}}{100}$$

Ainda sobre este tipo de tratamento, Lima e colaboradores (2006, p. 4) afirmam que:

> Na regra de três têm-se uma proporcionalidade x ↦ y, consideram-se valores específicos x' ↦ y', x" ↦ y" da mesma, supõe-se que são conhecidos três dos números x', y', x", y" e pede-se o quarto desses números [...]. Se conhecemos x', x" e y' podemos calcular y"=k.x" sem conhecer o fator de proporcionalidade k, usando a proporção $y'/y = x'/x$.

Nesse sentido, a regra de três surge como um caminho viável para a determinação de frações equivalentes, sobretudo, nos casos em que a fração

centesimal é a equivalente pretendida. Assim, os três números conhecidos são o numerador da fração original, o denominador da fração original e o denominador 100 da fração equivalente.

Para Imenes e Lellis (2005), o uso da regra de três, embora seja algo muito antigo, parece ter sido adotado de forma exclusiva pela matemática escolar a partir da década de 1960. Segundo os autores, essa criação didática pode ter sido motivada por duas vantagens:

> (i) a unificação de procedimentos, isto é, uma mesma técnica para resolver problemas de proporcionalidade e de porcentagem; (ii) a menor frequência de números fracionários nos cálculos (por exemplo, em vez das representações 0,15 ou 15/100, aparece 15%, permitindo que se calcule com o número inteiro 15) (p. 18).

Como desvantagem, no entanto, os autores consideram que alunos que limitam seus processos de resolução à utilização da regra de três acabam não desenvolvendo a capacidade de realizar cálculos mentais simples, tais como calcular 10% ou 15% de um determinado valor ou fazer estimativas a partir de números percentuais, por exemplo (Imenes e Lellis, 2005).

Outra advertência nesse sentido é trazida por Botta (1997) ao afirmar que

> grande ênfase tem sido dada apenas aos problemas de valor desconhecido e ao algoritmo da “regra de três”, tornando-se um algoritmo mecanizado que, muitas vezes, é erroneamente empregado. [...] Parece que, muitas vezes, no trabalho com proporcionalidade, o produto final desejado é a regra de três em si e não o raciocínio proporcional (p.126).

Essa ênfase destacada pelo autor tende a fazer com que os estudantes passem a perceber o domínio do algoritmo como finalidade e não como meio ou ferramenta na resolução de problemas em matemática.

3.3.2 As conversões simbólico-numéricas realizadas

A conversão de uma fração de denominador 100 para a sua representação numérica percentual, como notamos a partir dos exemplos apresentados, deve ocorrer sem exigir um grande custo cognitivo. Isso porque, uma vez definida a fração centesimal, a transformação desse registro para um registro percentual pode ser feita

de forma imediata, já que qualquer número percentual pode ser identificado como uma razão centesimal, ou seja, x % é igual a x/100.

Com respeito a essa relação direta entre os números percentuais e as frações centesimais, Imenes e Lellis (2005) afirmam que

> Ao contrário da proporcionalidade, tão importante na Matemática e nas ciências, surgindo em tópicos tão diferentes quanto as amostras da estatística, as funções ou a semelhança geométrica, a porcentagem tem pouco significado matemático, sendo apenas uma notação indicando a divisão de um número por 100. Em troca, as porcentagens têm enorme presença em nosso cotidiano (p. 16).

Portanto, nas situações em que as frações não têm denominador 100, uma boa alternativa para realizar as conversões para o registro percentual é, obviamente, fazer com que se tornem centesimais via tratamentos próprios do registro, como vimos anteriormente. Tal estratégia, embora demande conhecimentos relacionados à ideia de equivalência entre frações, faz com que a conversão de fato, ou seja, a passagem da fração centesimal para a representação percentual seja realizada com base na relação x/100 = x %, traduzindo-se, dessa forma, numa simples substituição dos signos "/" e "100" pelo signo "%".

Por outro lado, os caminhos resolutivos (c) e (d) revelam que outra maneira de transformar qualquer representação fracionária em uma representação percentual é encontrando a sua forma decimal a partir da divisão do numerador pelo denominador. Em seguida, esse quociente deve ser multiplicado por 100. Por fim, tomasse o resultado dessa multiplicação como sendo o numerador de uma fração centesimal e, pela relação x/100 = x %, chegasse ao número percentual como mostra o exemplo a seguir:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \rightarrow 0{,}25 \,.\, 100 = 25 \rightarrow 25\,\%$$

Observa-se nesse processo duas conversões envolvendo três representações simbólico-numéricas. A primeira conversão implica a passagem do registro fracionário para o registro decimal e a segunda corresponde à passagem do registro decimal para o registro percentual.

Segundo Duval (2012), "a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento" (p. 272). Assim, não se pode esperar que tenhamos regras para realizar conversões da mesma forma que dispomos de regras para

realizar uma série de tratamentos. Há, no entanto, como acabamos de ver, casos de conversões, mesmo entre representações semanticamente não congruentes, que podem ser realizadas a partir de processos simples. É importante destacar, porém, que a estratégia de conversão em questão pressupõe o conhecimento da relação x/100 = x % e pode ser justificada a partir da igualdade de razões, como vemos a seguir:

$$\frac{0{,}25}{1} = \frac{25}{100} \rightarrow 0{,}25 \,.\, 100 = 25$$

Esse processo de conversão também pode ser utilizado, conforme sugestão de Bezuk e Cramer (1989), como um recurso importante para a comparação de frações. Nesse sentido, a relação 2/5 > 1/4 torna-se mais evidente se escrita na forma 0,40 > 0,25 ou na forma 40% > 25%. Se, contudo, escrevemos 0,4 > 0,25, essa relação não será mais tão óbvia para alguns estudantes.

3.4 Congruência e não-congruência semântica entre os registros numéricos fracionários e percentuais

Segundo Duval (2009), ao mudarmos o sentido da conversão em um exercício estamos também alterando o custo cognitivo para a sua resolução. Assim, podemos dizer que a troca do tipo de registro de partida pelo tipo de registro de chegada, ou vice-versa, numa dada atividade de conversão já implica, necessariamente, uma variação do grau de congruência e não-congruência presente nesta transformação.

Uma dada conversão envolvendo dois registros distintos de um objeto matemático é chamada de congruente quando o registro de partida transparece no registro de chegada, ou seja, é possível identificar uma correspondência clara e direta entre as unidades de sentido de ambos. Por outro lado, numa conversão não congruente tal transparência inexiste e a dificuldade para a sua realização aumenta consideravelmente.

Como vimos no capítulo anterior, Duval (2011) aponta três critérios que servem para definir a existência de congruência numa conversão entre dois registros de representação semiótica: 1) As unidades de sentido próprias de cada registro devem se corresponder semanticamente, ou seja, cada unidade de sentido elementar no registro de partida encontra sua correspondente semântica numa unidade de sentido

elementar do registro de chegada (correspondência uma a uma); 2) Deve haver univocidade semântica terminal, ou seja, cada unidade de sentido elementar no registro de partida encontra uma única correspondente semântica entre as unidades de sentido elementares no registro de chegada. Esta característica demanda que o significado das unidades que se correspondem seja um só; 3) As unidades de sentido em ambos os registros devem aparecer na mesma ordem. Essa característica é importante, sobretudo, quando estamos examinando a congruência de conversões envolvendo frases e fórmulas literais (Duval, 2009). A não observância de pelo menos uma destas características indica que as representações envolvidas na conversão são não congruentes.

Buscaremos, a seguir, discriminar as unidades de sentido elementares nas representações simbólicas fracionária e percentual, bem como, a partir dos critérios definidos por Duval (2011), analisar as variações de congruência e não congruência nas conversões envolvendo tais representações.

O registro numérico fracionário apresenta-se na forma a/b, com b ≠ 0 em que "b" é o denominador e "a" o numerador da fração. No sentido parte-todo, "b" refere-se ao número de partes congruentes em que foi dividido um inteiro e "a" à quantidade de partes consideradas nesta subdivisão. Já o registro numérico percentual apresenta-se na forma n%, com "n" referindo-se ao número de partes centesimais consideradas num inteiro subdividido.

De acordo com Duval (2011), tais registros compõem o conjunto das representações do tipo escritas simbólicas e, portanto, são registros discursivos e monofuncionais. Assim, as representações fracionárias e as representações percentuais são registros discursivos porque suas escritas, e consequentemente suas leituras, ocorrem de forma linear, sequencial, ou seja, de cima para baixo e da esquerda para a direita, respectivamente. Também são monofuncionais, pois permitem que sofram transformações a partir de algoritmos (Duval, 2011).

As unidades de sentido ou as informações matematicamente pertinentes no interior dos registros de representação semiótica (Duval, 2011), podem ou não ser expressas por signos. Em algumas situações, a ausência do signo é a própria expressão da unidade de sentido na representação. Na representação algébrica da função f(x)= 2x + 1, por exemplo, a ausência de signos indica a positividade do coeficiente angular '2' e a operação de multiplicação entre ele e a variável "x".

Nos registros fracionários e percentuais, contudo, as unidades de sentido são, todas elas, expressas por signos. Considerando o significado parte-todo, podemos relacionar cada signo constituinte da representação fracionária ao seu sentido como vemos no quadro 5:

Quadro 5 - Signos e respectivos significados no registro fracionário com sentido parte-todo.

Signo	Sentido
a	Número de partes consideradas em um inteiro subdividido em b partes congruentes.
__	Relação entre as partes congruentes de um inteiro e este inteiro.
b	Número de partes congruentes em que foi dividido o inteiro.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De igual modo, os signos que formam a representação percentual têm um sentido próprio como apresentado no quadro 6:

Quadro 6 - Signos e respectivos significados no registro percentual.

Signo	Sentido
n	Número de partes consideradas em um inteiro subdividido em cem partes congruentes.
%	Relação entre as partes centesimais de um inteiro e este inteiro.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por matematicamente pertinentes, entende-se os dados do registro de partida que, ao sofrerem variação, produzem covariações no registro de chegada (Duval, 2011). No caso das conversões exploradas nesta pesquisa, variando-se o natural que representa o numerador ou o natural, diferente de zero, que representa o denominador produzimos covariações no racional que precede o símbolo % no registro percentual e vice-versa.

Notemos que, no registro fracionário **a/b** com significado parte-todo, os signos **a** (numerador) e **b** (denominador) são unidades de sentido cujos valores numéricos estão sujeitos a variação, já o signo **/** (traço de fração) representa uma unidade de sentido que neste trabalho chamaremos de invariável, ou seja, possui o sentido de

indicar a relação existente entre as partes congruentes de um todo e este todo, mas não está sujeito a variações. Já no registro percentual **n%**, a unidade de sentido invariável é a representada pelo signo **%** que denota a relação entre a parte e um todo dividido em cem partes iguais.

Discriminadas as unidades de sentido em ambos os registros de representação, analisaremos, em seguida, as variações de não congruência a partir dos critérios apresentados por Duval (2011).

Para tanto, é necessário estabelecer as correspondências entre as unidades de sentido de ambas as representações às quais, notadamente, referem-se o primeiro e o segundo critério (Duval, 2011).

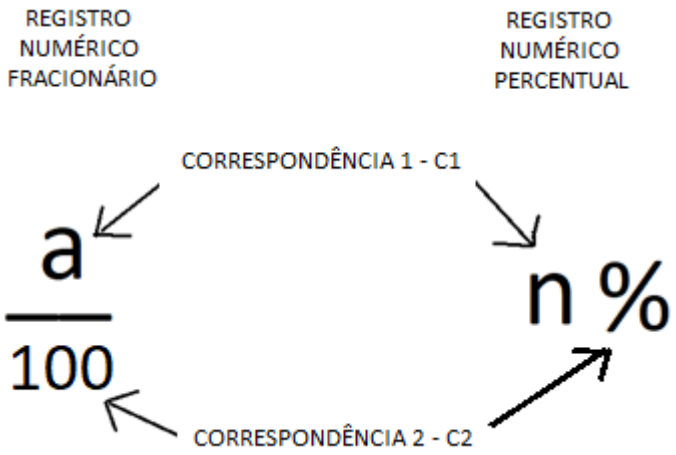
Nesse sentido, consideramos apenas as correspondências que, segundo o autor, permitem “discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro”, ou seja, aquelas que relacionam as unidades de sentido cuja variação no primeiro registro implicam covariações no segundo registro (Duval, 2011, p.100).

Portanto, para identificarmos as correspondências e quais as unidades de sentido nelas envolvidas, consideraremos as variações em cada uma das unidades de sentido no registro de partida isoladamente, ou seja, supondo que as demais unidades permanecem inalteradas e observaremos a unidade ou as unidades que poderão sofrer covariações resultantes no registro de chegada, pois “o segundo registro serve como revelador das unidades de sentido matematicamente pertinentes nas representações do registro de partida” (Duval, 2011, p.104).

Há, contudo, correspondências que envolvem os signos / e % que, como já dissemos, expressam unidades de sentido não variáveis no conteúdo destas representações.

Nesse trabalho de pesquisa, utilizaremos conversões envolvendo apenas frações próprias e não centesimais. As frações centesimais apresentam um grau de não-congruência muito baixo, ou seja, observa-se certa transparência entre a fração de numerador 100 e o registro numérico percentual envolvidos na conversão como podemos notar na figura 18:

Figura 18 - Correspondências entre as unidades de sentido da fração centesimal e do registro numérico percentual.



Fonte: elaborado pelo autor.

Vemos que o critério 1 é atendido em C1 de modo que “a” no registro de partida corresponde-se com “n” no registro de chegada estabelecendo uma correspondência um a um. Há, no entanto, duas unidades no registro de partida expressas pelos signos “/” e “100” em correspondência com a unidade expressa pelo signo “%” no registro de chegada, o que não atende ao critério.

O critério 2 é respeitado em ambas as correspondências, já que em C1 tanto “a” quanto “n” significam o número de partes consideradas em um inteiro subdividido em cem partes congruentes e em C2 temos “/100” e “%” com sentido de “por cem” e “por cento”, respectivamente.

Antes de passarmos à análise desta conversão a partir do critério 3, é importante destacar que, segundo Duval (2011), as representações numéricas compõem o sistema semiótico das escritas simbólicas e, portanto, são registros do tipo discursivo, ou seja, caracterizam-se por uma “linearidade fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização das expressões” (p.118). Assim, tanto o registro fracionário quanto o registro percentual obedecem a uma determinada disposição de suas unidades de sentido e que define como tais representações são lidas.

Assim, podemos dizer que a mesma ordem das unidades de sentido, observada no critério 3, também é atendida na conversão em questão. Se tomarmos, por exemplo, os registros 25/100 e 25%, veremos que suas representações em linguagem natural “vinte e cinco por cem”, “vinte e cinco sobre cem”, “vinte e cinco

centésimos", "vinte e cinco por cento" indicam uma mesma ordem de apreensão e leitura das unidades de sentido destes registros discursivos.

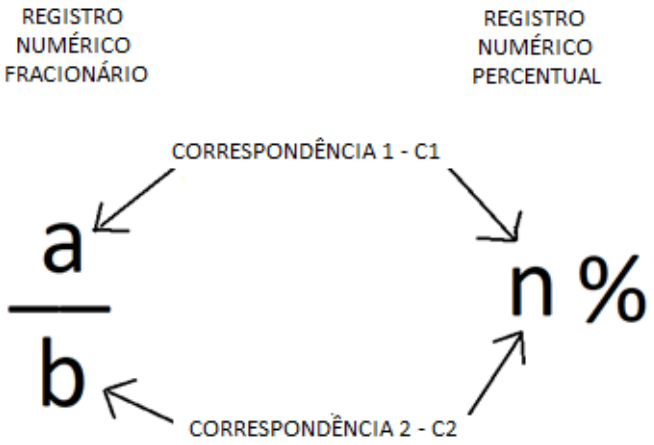
As conversões que envolvem uma fração centesimal e um registro numérico percentual apresentam, portanto, um baixo grau de não-congruência. Se levarmos em conta apenas as unidades de sentido variáveis numa transformação deste tipo, podemos desconsiderar C2 e teremos os três critérios de congruência atendidos. Nesse caso, teremos uma conversão em que se diz que as representações envolvidas são semanticamente congruentes. Segundo Duval (2003), quando há esta transparência entre as representações de partida e de chegada "a conversão está próxima de uma situação de simples codificação" (p.19).

A conversão que resulta de uma 'codificação" é baseada na aplicação direta de regras de correspondência a partir das quais se faz uma espécie de tradução de um registro para o outro (Duval, 2003). No caso das conversões envolvendo frações centesimais e registros numéricos percentuais, temos uma codificação em que a simples aplicação da regra de correspondência "**a** tem mesmo valor numérico de **n**" é suficiente para realizar a transformação de um registro para o outro.

Entretanto, as conversões propostas nesta pesquisa e na grande maioria das atividades que relacionam estes tipos de registros não envolvem frações centesimais e, portanto, não apresentam o mesmo grau de transparência, pois "os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência" e nisto reside uma das maiores causas de incompreensão e erro dos alunos (Duval, 2011, p.124).

O esquema apresentado na figura 19, destaca as correspondências semânticas entre as unidades de sentido variáveis de um registro numérico fracionário não centesimal e o registro numérico percentual de um número racional.

Figura 19 - Correspondências entre unidades de sentido variáveis nos registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Identificamos, entre as unidades de sentido variáveis nos registros, duas correspondências que denominamos de C1 e C2. A correspondência C1 estabelece a relação entre a unidade de sentido “a” no registro numérico fracionário e a unidade de sentido “n” no registro numérico percentual. De modo que, ao variarmos apenas o numerador da fração no registro de partida, teremos necessariamente uma variação no número percentual do registro de chegada. A correspondência C2, por sua vez, comunica as unidades “b” e “n”, pois quaisquer variações no denominador da fração também implicarão covariações no número percentual.

Existem, portanto, no sentido *fracionário → percentual* da conversão, mais de uma unidade de sentido no registro de partida cujas variações produzem covariações em uma unidade de sentido no registro de chegada, o que Silva (2018) chama de “correspondência de forma combinada”. Da mesma forma, na conversão de sentido *percentual → fracionário,* a variação do número percentual pode repercutir em variação do numerador, do denominador ou de ambos no registro de chegada.

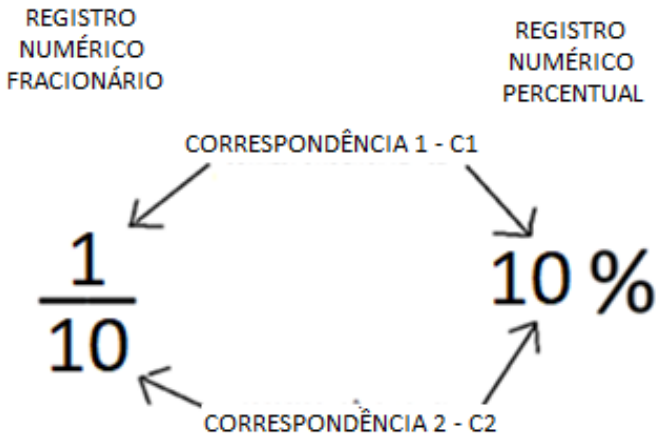
Assim, já que a unidade de sentido “n” no registro numérico percentual integra tanto C1 quanto C2, seja qual for o sentido da conversão envolvendo os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional, temos que alterações em “a” e “b” repercutem em “n”, bem como alterações em “n” podem repercutir em “a” e/ou “b”.

Podemos, então, dizer que as transformações envolvendo tais registros das escritas simbólicas caracterizam-se como conversões não-congruentes, já que não

atendem ao critério 1, pois existem unidades de sentido de um registro que se correspondem com mais de uma unidade de sentido do outro registro.

A univocidade semântica terminal requerida no critério 2 dependerá dos valores numéricos de “a” e “b” no registro fracionário e de “n” no registro percentual. Nesse sentido, para que unidades de sentido expressas em valores numéricos possam ter o mesmo significado é necessário que tais valores sejam iguais. Na figura 20, apresentamos um exemplo de conversão a partir do qual podemos analisar o atendimento ou não do critério 2 de congruência semântica:

Figura 20 - Conversão envolvendo os registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional e as correspondências entre suas unidades de sentido variáveis.



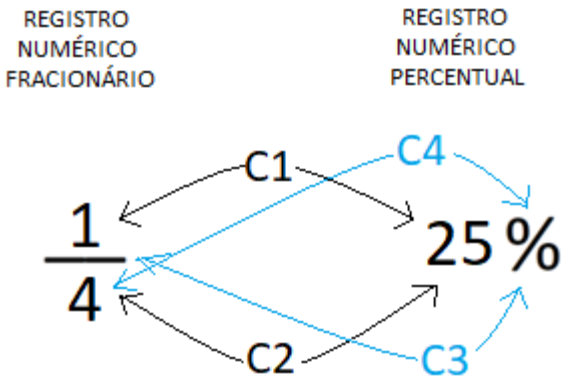
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para atender o critério, cada unidade de sentido elementar no registro de partida deveria encontrar uma única unidade de sentido, com a qual deveria se corresponder semanticamente, no registro de chegada (Duval, 2011). Assim, vemos que C1 não apresenta correspondência semântica entre as unidades de sentido ao passo que C2 relaciona unidades que apresentam correspondência semântica. O critério 2 é atendido, portanto, apenas em C2. Há, contudo, a possibilidade de que o aluno perceba certa transparência entre os signos expressos em “a” e “n” que se relacionam em C1, o que favoreceria ainda mais o reconhecimento do mesmo objeto matemática em ambas as representações.

Esta suposta transparência pode levar os estudantes a estabelecerem, de forma equivocada, uma equivalência referencial entre os registros 2/3 e 23%, por exemplo.

Levando em conta também as correspondências com as unidades de sentido que, neste texto, chamamos de não variáveis, os signos ***/*** e **%**, teremos a inclusão das correspondências C3 e C4 como vemos no esquema demonstrado na figura 21:

Figura 21 - Esquema destacando correspondências entre unidades de sentido variáveis e não variáveis nos registros numérico fracionário e numérico percentual do número racional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A correspondência C3 relaciona as unidades de sentido expressas pelos signos "***/***" e "**%**" que significam respectivamente "a relação entre as partes congruentes de um inteiro e este inteiro" e "a relação entre as partes centesimais de um inteiro e este inteiro". Já a correspondência C4 relaciona as unidades expressas pelos signos "4" e "**%**" que indicam o número de partes congruentes em que foi dividido o inteiro. O símbolo "%" representa, portanto, não apenas uma relação entre a parte e o todo, daí sua relação com "***/***", como também se relaciona com o signo "4", pois também estabelece o número de partes congruentes em que o todo foi dividido, ou seja, cem partes.

Neste caso, podemos afirmar que o critério 3 de congruência semântica é obedecido, pois leituras como "um quarto", "um por quatro", "vinte e cinco por cento" dos registros numéricos demonstram a disposição de uma mesma ordem das unidades de sentido que se relacionam em ambos os registros.

Nesse capítulo, discutimos os desafios que envolvem o ensino e a aprendizagem dos números racionais, seus diferentes significados e representações. Abordamos alguns tratamentos e conversões a partir de suas representações simbólico-numéricas, especificamente, as frações e percentuais, como possíveis transformações em um dos caminhos de conversão investigados. Também identificamos as unidades de sentido nessas representações e analisamos o

fenômeno de variação de congruência e não-congruência semântica entre esses registros, o que foi de suma importância para garantir diferentes graus de opacidade entre as conversões propostas nos instrumentos aplicados aos participantes.

No capítulo a seguir, discorreremos sobre a utilização dos materiais manipuláveis concretos, sobretudo, na abordagem do objeto número racional em seu significado parte-todo. A partir de elementos da TRRS, discutiremos a utilização de tais recursos na realização de conversões e as possíveis implicações desse uso no que tange à apreensão do objeto representado.

4 OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS CONCRETOS

Além de marcas em paredes de cavernas, relatos históricos dão conta também de riscos feitos em bastões de madeira, nós em cordas, ossos e até pequenas pedras que foram usadas por antigos grupos humanos para ajudar a contar os seus animais e sua pequena produção agrícola (Soares, 2007). Entre os primeiros homens é correto afirmar, portanto, que o exercício do pensamento matemático se valeu, também, da companhia de representações produzidas a partir de diversos objetos concretos.

Observando esse cenário da primitividade humana podemos indagar: foi o desenvolvimento da cognição que nos habilitou a produzir tais representações que são externas e que utilizam elementos da realidade ou seria, por outro lado, a experiência com esses elementos da realidade a causa para o desenvolvimento da nossa cognição? Em outras palavras, o desenvolvimento do pensamento (representações internas) pode prescindir ou é resultante da percepção sensorial da realidade (representações externas)?

Na História da Filosofia, até o século XVIII, surgiram, segundo Meneghetti e Bicudo (2003), duas diferentes respostas para essa questão. Especificamente, no que concerne ao saber matemático, enquanto alguns filósofos apontavam a razão como único fundamento, outros pensadores atribuíam esse papel exclusivo à intuição ou à experiência. Assim, se o aspecto lógico do conhecimento era o que prevalecia nesse primeiro grupo, o aspecto intuitivo do conhecimento foi tido como o primordial para o segundo grupo (Meneghetti; Bicudo, 2003).

Em suma, o processo para o conhecimento humano, inclusive para a apreensão dos saberes matemáticos, dar-se-ia pela via da razão, entendida como uma faculdade de natureza inata do indivíduo, ou da experiência, entendida como a ação empírica do indivíduo sobre o meio. Essa constatação evidenciava duas posições bem distintas e dividia os estudiosos do desenvolvimento epistemológico entre racionalistas e empiristas.

Foi o filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804) quem ofereceu uma solução para esse debate envolvendo essas duas vertentes do pensamento. Kant foi revolucionário ao colocar o sujeito do conhecimento como o centro de seu modelo, já que tanto os inatistas quanto os empiristas priorizavam o objeto do conhecimento.

Nesse sentido, ao darem primazia aos objetos do conhecimento, os filósofos partiram do pressuposto de que estes seriam racionais e, portanto, passíveis de serem

diretamente reconhecidos pela nossa razão, tais como eram em si mesmos. Por sua vez, Kant, contrariando a ambas as correntes de pensamento, negou que a razão fosse constituída de conteúdos inatos, assim como se opôs à ideia de que a realidade em si das coisas pudesse ser, por nós, descoberta (Kant, 1997).

A solução trazida pela filosofia kantiana, e que sintetiza as duas concepções até então prevalentes, é que a razão apresenta formas e estruturas inatas e, portanto, não pode ser adquirida ou causada pela experiência. A estrutura da razão é universal, única para todos os indivíduos seja qual for a época ou o lugar e a priori, ou seja, antecede qualquer tipo de experiência e existe independentemente dela. Todavia, os conteúdos reconhecidos pela razão ou a matéria do conhecimento depende da experiência, ou seja, os pensamentos que ocupam a razão são, por sua vez, empíricos. Sem a matéria do conhecimento a razão nada conheceria, seria vazia e ineficaz. Segundo Kant, essa matéria é a posteriori, ou seja, depende da experiência e surge depois dela (Kant, 1997).

Desse modo, ao revisitarmos o cenário de nossos antepassados descrito no início desse capítulo, poderíamos dizer, considerando a contribuição kantiana, que a produção de tais representações externas relacionadas ao pensamento matemático foi possível graças a uma estrutura racional inata e comum aos seres humanos cuja funcionalidade depende de representações internas geradas pela experiência. Assim, a razão humana tem uma forma que é vazia e inerente a todos nós, mas os conteúdos que a preenchem são produzidos a partir de nossas experiências e modificados a partir de novas experiências.

Conhecer é, portanto, acolher nessa forma ou estrutura inata chamada de razão os conteúdos ofertados pela interação com a realidade exterior. Essa concepção trazida por Kant está no cerne do construtivismo e, portanto, une teóricos como o histórico-cultural Vygotsky e o cognitivista Piaget, por exemplo. Dessa forma, a percepção da estreita relação entre a experiência do indivíduo com objetos da realidade concreta e a construção do seu conhecimento parece ser ponto pacífico mesmo entre estudiosos e pesquisadores de diferentes pressupostos teóricos, ou seja, conforme destaca Lorenzato (2006, p. 4), “cada educador, a seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem”.

No entanto, no que concerne ao modo como ocorre a formação desse conhecimento, ou seja, como acontece o desenvolvimento desse sujeito cognoscente,

há diferenças claras entre o cognitivismo piagetiano e a concepção histórico-cultural de Vygotsky.

Piaget (1977) defende que o ser humano vai construindo a capacidade de aprender à medida que se desenvolve cognitivamente ao longo do tempo e por meio da sua ação reflexiva sobre o objeto. O sujeito cognoscente, em Piaget, vai passando por fases de desenvolvimento com as quais adquire novas capacidades de interação com o ambiente.

Vygotsky (1988), por outro lado, dirá que a aprendizagem é a promotora do desenvolvimento cognitivo e, portanto, “o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento” (p. 114). Para Vygotsky, não há um desenvolvimento previsto no interior dos sujeitos. Isso se dá por meio de sua interação com o ambiente (contato com a cultura e relações sociais). Em outras palavras, o desenvolvimento intelectual do ser humano não é uma herança hereditária, e sim o resultado das suas interações na sociedade.

Para ambos, contudo, a aprendizagem estará contida no ambiente. É em contato com os objetos e demais entes da realidade ao seu redor que o indivíduo aprende. Assim, a partir do que percebe e das interações que realiza, ele cria suas imagens mentais.

Em síntese, a experiência vivenciada pelo indivíduo pode, numa perspectiva cognitivista, resultar na aprendizagem possível, considerando a maturidade de suas estruturas cognitivas e, numa perspectiva histórico-cultural, fomentar, inclusive, o desenvolvimento de tais estruturas.

Por fim, Duval (2009, p.17) destacará que, assim como, para Piaget e Vygotsky, “as imagens mentais são uma interiorização das percepções”, também, no que concerne à atividade matemática, “o desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas”. Isso porque, em se tratando dos objetos matemáticos, interagir com a realidade significa lidar unicamente com as suas representações semióticas.

Assim, a aprendizagem em matemática requer que se possa acessar, por meio de suas representações, objetos existentes apenas no campo das ideias. Tais representações, por sua vez, podem ser de natureza concreta e, portanto, não se pode negar a sua potencialidade no que tange à fomentação de abstrações ou imagens mentais relacionadas ao objeto matemático representado.

4.1 Os manipuláveis no ensino e aprendizagem da matemática

No âmbito escolar, no entanto, a denominada abordagem tradicional desprestigiou a importância da experiência com o concreto para o ensino, sobretudo, dos conteúdos matemáticos. Nessa concepção e prática educacional o “uso de materiais ou objetos era considerado pura perda de tempo, uma atividade que perturbava o silêncio ou a disciplina da classe”. (Fiorentini; Miorin, 1990, p. 2).

Segundo Mizukami (1986), a abordagem tradicional persiste no tempo, em suas diferentes formas, e se caracteriza por privilegiar procedimentos mecanizados que devem ser assimilados pelos alunos por meio de exaustivas repetições.

Nesse modelo, o professor é o agente transmissor do conhecimento e, ao aluno, cabe absorver, passivamente, todas as informações transmitidas. Desse modo, no que concerne ao ensino da matemática, a ênfase é, sobretudo, na memorização de regras e de fórmulas (Mizukami, 1986).

Já no século XVII, tal abordagem é criticada por Comenius (1592–1671), considerado o pai da didática moderna. Em sua obra “Didática Magna” (1657), esse cientista e bispo protestante propõe que “ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude às próprias coisas, ao invés das suas sombras” (Ponce, 1985, p.127).

No século XVIII, Rousseau (1712-1778) faz considerações sobre a importância do trabalho manual e da experiência direta das coisas no processo natural de desenvolvimento da criança, abrindo espaço para o surgimento de uma nova concepção de escola. A partir do pensamento rousseauniano os processos de ensino deveriam valorizar aspectos psicológicos e biológicos do aluno (sentimentos, interesses, espontaneidade e criatividade) mais que a aprendizagem dos conteúdos.

Cabe ao educador Pestalozzi (1746-1827), no século XIX, destacar, pela primeira vez, o uso de materiais manipuláveis no ensino, defendendo que “a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (Nacarato, 2005, p.1).

Pestalozzi funda seu internato, privilegiando no currículo atividades como canto, desenho, modelagem, jogos, excursões ao ar livre e manipulação de objetos. Para o educador, a eficiência educativa só poderia vir da atividade dos jovens, as descrições deveriam preceder as definições e o conceito deveria nascer da experiência direta e das operações sobre as coisas (Castelnuovo, 1970).

Mais tarde, os médicos e educadores Montessori (1870-1952) e Decroly (1871-1932) reiteram a importância do ensino a partir da experiência sensorial dos estudantes com concreto e desenvolvem novas tecnologias e vários materiais para a abordagem dos objetos matemáticos em sala de aula.

As ideias de Piaget (1896-1980) também influenciam consideravelmente as práticas escolares nesse sentido. A partir do seu trabalho, percebe-se, também, o papel fundamental que as atividades com materiais concretos têm na aprendizagem das crianças. Sua defesa é o ensino com ênfase nas experiências ativas do tipo "mãos-à-obra" associadas à reflexão consciente. Para o autor, a memorização não demonstra que o indivíduo aprendeu algo, ou seja, o popular "saber de cor" não representa o saber (Piaget, 1977).

Em seu trabalho, Piaget (1977) observa a relação entre a visualização e manipulação de vários tipos de objetos pelas crianças com uma maior facilidade destas em representar suas ideias a partir de imagens mentais produzidas. Percebe, por outro lado, nas crianças com pouca experiência tátil-visual uma menor desenvoltura do pensamento abstrato. A conclusão a que chega o pesquisador é que a base do pensamento abstrato está nas experiências (Piaget, 1977).

No Brasil, a partir da década de 1920, surgem várias tendências educacionais, entre essas a empírico-ativista, que passam a recomendar a utilização de métodos de ensino que contemplem ações de manipulação e experimentação durante as aulas (Nacarato, 2005).

A tendência empírico-ativista, assim denominada por Fiorentini (1995), pressupõe que o conhecimento de seus objetos se dá empiricamente, ou seja, o estudante aprende ao descobrir características e propriedades desses objetos por meio da observação e a partir da manipulação de materiais que os representam.

Essa corrente da Educação Matemática pode ser separada em duas vertentes: a empírico-sensualista e a mais ativista. A empírico-sensualista tem por base o associacionismo[6], assim, considera que a aprendizagem ocorre por meio das associações que o indivíduo realiza. Nesse sentido, a apreensão ou abstração de um número natural, por exemplo, ocorre quando associamos o seu signo (representação simbólico-numérica) a uma quantidade correspondente de objetos (tampinhas, pedrinhas, palitos...) e à palavra falada que o designa (representação em linguagem

[6] Corrente teórica para a qual as ideias presentes no pensamento estão todas relacionadas umas às outras de várias maneiras (Almeida, 1999).

natural) (Fiorentini, 1995). Já a vertente mais ativista entende “que a ação, a manipulação ou a experimentação são fundamentais e necessárias para a aprendizagem” e, portanto, vai explorar, no processo de ensino, o desenvolvimento e utilização de jogos, materiais manipuláveis, experimentos e outras atividades lúdicas que possam reforçar noções já conhecidas, bem como fomentar novos conhecimentos (Fiorentini, 1995, p.10).

Nas últimas décadas, vários outros pesquisadores do campo da didática da matemática têm produzido trabalhos destacando a importância desses recursos para o ensino. Turrioni e Perez (2006, p.61) ressaltaram a importância do material manipulável por facilitar a observação e a análise, desenvolver o raciocínio lógico e crítico, “sendo excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos”. Estudos como os de Smole et al. (2007), Muniz (2010) e Gitirana e Carvalho (2010) também defenderam o uso dos materiais manipuláveis como forma de explorar, especialmente, os conteúdos matemáticos de maneira mais lúdica, estimulando os alunos à mobilização de seus saberes prévios e à construção de novos conhecimentos.

Reys (1982), após comparar várias teorias que abordam o tema, faz uma boa síntese dos aspectos que justificam a utilização dos materiais manipuláveis concretos no ensino da matemática. Alguns argumentos observados pelo autor foram: a apreensão de conceitos é essencial na aprendizagem em matemática; a aprendizagem é baseada na experiência; a aprendizagem é caracterizada por diferentes etapas de desenvolvimento; a motivação potencializa a aprendizagem; a aprendizagem é construída do concreto para o abstrato; a participação ativa do aluno é fundamental para a aprendizagem e a formação das abstrações matemáticas é um longo processo (Reys, 1982).

Nesta pesquisa, chamamos simplesmente de “manipuláveis” ou “materiais manipuláveis” esses objetos concretos que foram definidos por Lorenzato (2006, p.18) como “materiais didáticos manipuláveis concretos”. O termo “material didático” é atribuído pelo autor a “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”, enquanto que “manipulável concreto” pode referir-se “ao palpável, manipulável” e ainda, numa interpretação mais ampla, incluir imagens gráficas (Lorenzato, 2006, p.22).

Nesse sentido, podem ser incluídos no conjunto dos materiais manipuláveis todos os objetos que tocamos, sentimos e manuseamos e que podem ser usados

como suporte para alguma atividade matemática, ou seja, estamos considerando objetos dos mais simples, tais como papel, massa de modelar, palitos de fósforo, bolas de isopor, até aqueles cuja elaboração já pressupunha uma clara intenção didática ou de suporte à atividade matemática tais como o ábaco, o material dourado, o disco de frações, calculadora, entre outros.

Segundo Lorenzato (2012), é altamente desejável que, até o surgimento do raciocínio lógico-dedutivo por volta dos 13 ou 14 anos de idade, o estudante aceite "como verdadeiras as propriedades matemáticas que lhes foram propiciadas pelo material manipulável ou gráfico" (p.14). Isso porque, para o autor, a aquisição do conhecimento nos estudantes mais novos está fortemente apoiada naquilo que eles ouvem, veem e manipulam (Lorenzato, 2012).

Quanto a sua classificação, os materiais manipuláveis podem ser *estáticos*, quando não possibilitam, através da manipulação, alterações em sua estrutura, e *dinâmicos*, quando permitem, pela manipulação, mudanças em sua estrutura. Desse modo, os materiais manipuláveis estáticos limitam a ação do aluno ao simples manuseio e observação visual, enquanto que os materiais manipuláveis dinâmicos são mais vantajosos no que concerne à aprendizagem, já que possibilitam melhor percepção de propriedades e características relacionadas ao objeto matemático em estudo (Lorenzato, 2006).

A utilização de manipuláveis é hoje recomendada por documentos oficiais tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017). No entanto, se por um lado a necessidade de inclusão desses materiais nas práticas de ensino parece ser algo consensual para a maior parte dos autores que se dedicam ao tema, por outro não se pode cair no equívoco de considerar tais recursos eficazes por si mesmos. Em outras palavras, não é razoável pensar que a aprendizagem dar-se-á só porque os alunos estão interagindo de forma física com tais objetos movendo-os ou modificando-os, o que, segundo Pais (2001, p.2), caracterizaria um "empirismo desprovido de significado".

O princípio do "aprender fazendo", hoje tão difundido nas escolas para justificar a utilização de materiais manipuláveis durante as aulas, não pode ser confundido com uma espécie de supervalorização da manipulação pela manipulação, sem a devida atenção à relação que deve haver entre a experiência com o concreto e a apropriação do conceito matemático envolvido (Pais, 2001).

Como bem afirma Passos (2006, p.78), esses manipuláveis “devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído”.

Serrazina (1990) também destaca que não basta investir na utilização de materiais de ensino, pois esses, por si sós, não garantem a aprendizagem significativa em matemática. Nesse sentido, Lorenzato (2012, p.22,23) conclui que “para que se dê uma significativa aprendizagem, faz-se necessário que haja uma atitude mental, e não somente a manipulação, por parte do aluno”.

Assim, presume-se que alguns estudantes, embora experienciem a utilização de um mesmo material, possam avançar mais que outros. Cumpre-nos, portanto, cautela para se obter os resultados desejados, sem esquecer do papel fundamental que o professor assume nesse propósito.

4.2 Os manipuláveis e os racionais

Em 2009, o *Rational Number Project,* grupo de pesquisadores a que nos referimos na seção “Desafios no processo de ensino-aprendizagem dos Números Racionais”, publicou o *RNP: Initial Fraction Ideas* contendo

> o desenvolvimento do significado de frações, usando o modelo parte-todo, a construção de estratégias informais de ordenação com base nas representações mentais de frações, propondo a criação de significado para equivalência concretamente, além de realizar a adição e subtração de frações utilizando modelos concretos, não incluindo algoritmos formais (Maia, 2022, p. 24).

Percebe-se a importância que os autores atribuem ao concreto como referência tanto para a criação de significados de conceitos relacionadas a frações quanto para o fomento de suas representações mentais. Isso fica ainda mais claro quando Cramer e Henry (2002) citam algumas crenças refletidas no currículo proposto pelo RNP: o envolvimento ativo das crianças com vários modelos concretos otimizam o seu aprendizado sobre frações; para a maioria das crianças, o uso de modelos concretos, por longos períodos, é necessário para que elas desenvolvam imagens mentais que as possibilitem pensar conceitualmente sobre frações; antes de passar para o trabalho com símbolos e algoritmos, os materiais usados no ensino da fração devem privilegiar o desenvolvimento do conhecimento conceitual desse objeto.

Nas palavras de Cramer, Wyberg e Leavitt (2009, p. 6), citados por Maia (2022), podemos notar a estreita relação entre o uso dos materiais manipuláveis e a produção de imagens mentais relevantes na aprendizagem de frações.

> de todos os materiais manipuláveis disponíveis para o ensino sobre frações, os círculos de fração são os mais eficazes para a construção de imagens mentais para frações. Essas imagens mentais apoiam a compreensão dos alunos sobre ordem, equivalência e operações com frações, tradução de Maia (2022).

Maia (2022), em seu trabalho mapeando dissertações e tese produzidas no Brasil de 1997 a 2021 relacionadas ao ensino e aprendizagem dos números racionais na educação básica e nas licenciaturas de matemática e pedagogia, destaca as pesquisas de Demartini (2009), Rossato (2014) e Simoni (2018) que também reafirmaram a ideia de que o uso de materiais manipuláveis disponíveis para o ensino é eficaz “para a construção de imagens mentais, apoiando a compreensão dos alunos sobre ordem, equivalência e operações com frações” (Maia, 2022, p. 84).

Nesse mesmo sentido, Mamede (2011, p. 4) afirma que “a utilização de material manipulável para a exploração de relações entre quantidades e para a representação de fracções assume uma dimensão relevante no trabalho inicial com fracções”. A autora ainda destaca que o percurso para a aprendizagem das frações se dá do concreto ao abstrato e que, nesse caminho, a compreensão é fomentada, o raciocínio é estimulado e cultiva-se o estabelecimento de conexões (Mamede, 2011).

4.3 Os manipuláveis e a TRRS

Segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2012), alguns materiais específicos e outros objetos que encontramos facilmente em nosso cotidiano podem servir para criar representações de objetos matemáticos. No entanto, quando falamos de representação do objeto matemático à luz da TRRS, devemos considerar a distinção que Duval (2011) faz entre uma representação semiótica e um registro de representação semiótica.

Segundo o autor, uma dada representação semiótica precisa atender a três critérios para que seja um registro de representação semiótica:

1 – Deve ser identificável, ou seja, deve conseguir comunicar dados e informações do objeto que representa e ainda ser produzida a partir de regras próprias do sistema semiótico a que pertence.

2 – Deve permitir tratamentos, ou seja, a representação deve ser suscetível a possibilidade de transformações em seu conteúdo, sem que tais mudanças impliquem mudança do tipo de registro ou troca do objeto representado.

3 – Deve permitir conversões, ou seja, deve possibilitar a mudança do tipo de registro sem que haja troca do objeto representado (Duval, 2011).

Desse modo, é correto afirmar que, segundo a TRRS, todo registro é uma representação, mas nem toda representação é um registro.

Nesse sentido, cumpre-nos pensar, em primeiro lugar, se os materiais manipuláveis podem ser considerados representações e, em segundo lugar, se podemos classifica-los como registros.

Contudo, é necessário lembrar que cada material manipulável terá suas especificidades e que, portanto, precisamos, antes de tudo, definir sobre que tipo de material estamos falando.

Lorenzato (2006), como vimos, fez distinção entre os materiais manipuláveis estáticos e os materiais manipuláveis dinâmicos. Assim, parece-nos mais adequado que analisemos, separadamente, cada um desses dois tipos de manipuláveis a partir das três condições estabelecidas por Duval (2011).

No caso dos materiais estáticos, não haveria a possibilidade da realização de tratamentos, já que sua estrutura física não permite alterações a partir da manipulação. Desse grupo de manipuláveis podemos citar, como exemplo, os sólidos geométricos produzidos em madeira (figura 22).

Figura 22 - Materiais manipuláveis estáticos – sólidos geométricos.

Fonte: https://br.pinterest.com.

Os sólidos chamam a atenção por sua beleza, muito embora restrinjam toda atividade experimental possível ao manuseio e à visualização.

Quanto aos materiais dinâmicos, têm-se a condição da transformação física de sua estrutura, ou seja, é possível, pela ação do indivíduo que manipula, impor alterações ao manipulável. Os discos de frações (figura 23), por exemplo, permitem operações tais como a inclusão e a exclusão de partes, sobreposições, entre outras.

Figura 23 - Materiais manipuláveis dinâmicos – discos de frações.

Fonte: https://br.pinterest.com.

Desse modo, podemos dizer que as representações formadas pelos discos de frações são identificáveis, pois conseguem comunicar dados e informações sobre as frações que representam e são produzidas a partir de regras do sistema semiótico figural. Também podem sofrer transformações em seu conteúdo implicando mudança do objeto representado (conversão) ou não (tratamento).

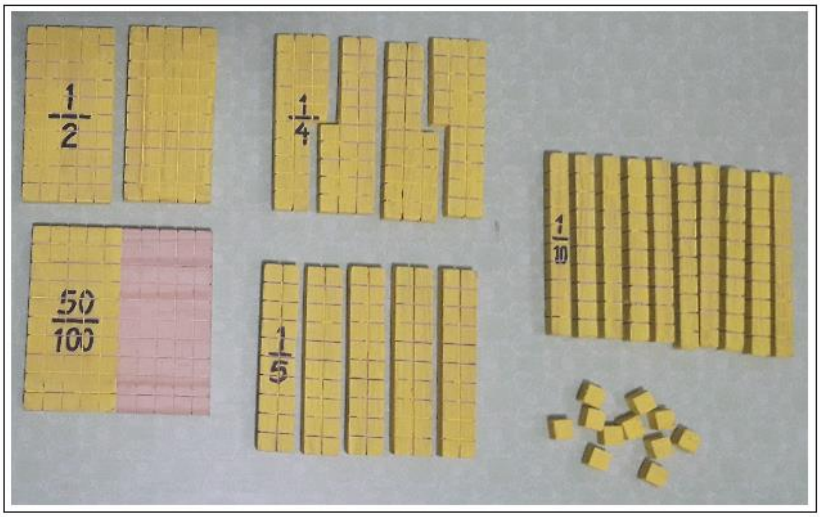
Nesse sentido, parece correto afirmar que materiais manipuláveis podem, a depender de suas características estruturais, viabilizar a produção de representações semióticas ou mesmo de registros de representação semiótica.

Ainda, com relação à possibilidade de que a variedade de registros de representação semiótica inclua, também, representações concretas, temos a fala do autor: “como exemplo de registros, consideramos a língua e as figuras geométricas euclidianas cujas formas podem ser reconhecidas ou construídas materialmente em 3D/3D1” (Duval, 2011, p. 98).

Melo (2019) utilizou em sua pesquisa representações concretas de frações a partir do que denominou de *material dourado adaptado* (figura 24). Tratava-se do

manipulável conhecido por material dourado ou material montessoriano[7] com algumas alterações feitas em sua estrutura.

Figura 24 - Material dourado adaptado.



Fonte: Melo, 2019, p.49.

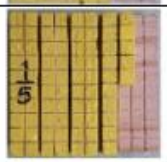
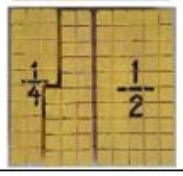
Segundo o autor, as alterações no material original "consistiram, basicamente, em algumas marcações com pinturas de diferentes cores e inscrições de registros numéricos em sua superfície" (Melo, 2019, p.48).

Nesse trabalho, Melo (2019) demonstra que as representações produzidas com esse material, assim como os registros de representação semiótica, também possuem unidades de sentido que podem ser discriminadas a partir das variações que realizamos, via manipulação, em sua estrutura física.

O quadro 7 apresenta possíveis mudanças operadas nessas representações e suas implicações nas representações numéricas percentuais correspondentes.

[7] Material manipulável desenvolvido pela médica e educadora italiana Maria Montessori no início do século XX. Geralmente produzido em madeira, o material dourado é bastante utilizado no ensino de conceitos relacionados ao sistema de numeração decimal. Consiste num conjunto de pequenos cubos, barras e placas que servem de representação para unidades, dezenas e centenas, respectivamente.

Quadro 7 - Variações nas representações produzidas com manipulável e repercussões nos registros numéricos correspondentes.

	Representação inicial	Variação	Informações variadas	Representação final
1			- Forma das partes. - Número de partes destacadas.	75%
2			- Forma das partes. - Número de partes destacadas.	75%
3			- Posição das partes destacadas.	75%
4			- Forma das partes. - Número de partes destacadas. - Área destacada em relação ao todo.	80%
5			- Número de partes destacadas. - Área destacada em relação ao todo.	50%
6			- Forma das partes. - Área destacada em relação ao todo.	100%

Fonte: Adaptado de Melo (2019).

Como vimos no capítulo em que discorremos sobre a TRRS, a ação de efetuar diversos tratamentos no registro inicial, observando a correspondência de tais variações no registro final é, segundo Duval (2011), o que nos permite identificar quais os dados que representam unidades de sentido no interior dessas representações. Estabelecer essa coordenação entre as unidades de sentido também “é a condição cognitiva para poder reconhecer um mesmo objeto em suas diferentes representações” (Duval, 2011, p.49).

As variações 1 e 2 produziram alterações na forma das partes e no número de partes destacadas, mas não resultaram em quaisquer variações no registro numérico percentual correspondente. A variação 3, por sua vez, alterou a disposição das partes destacadas no interior da representação, mas também não houve mudança no registro numérico. Por fim, as variações 4, 5 e 6 alteraram a área destacada em

relação ao todo e, dessa vez, houve variação nos registros numéricos correspondentes.

Desse modo, concluímos que a forma, a posição e o número de partes destacadas não são informações com pertinência matemática no interior dessas representações e, portanto, não são unidades de sentido. Já a área destacada em relação ao todo é o dado cuja variação implica covariação na representação final e, dessa forma, constitui-se como uma unidade de sentido nessas representações.

Percebemos, portanto, que materiais manipuláveis podem produzir representações e, até mesmo, registros de representação para objetos matemáticos, permitindo o que Duval (2011, p.103) destacou como “as duas condições preliminares e absolutamente indispensáveis” para realizar e compreender algo em matemática, a saber, o reconhecimento das unidades de sentido e a capacidade de realizar tratamentos a partir de operações que são próprias do tipo de registro, no caso do material usado por Melo (2019), as justaposições e sobreposições de suas partes.

Nesse texto, chamamos de representações figurativas concretas as representações produzidas a partir do manipulável que foi utilizado em um dos caminhos para a conversão *fração* → *percentual* trabalhados nessa pesquisa. O material, que será melhor descrito no capítulo em que apresentamos o percurso metodológico dessa pesquisa, consiste, basicamente, em seis folhas de papel (uma delas em papel vegetal ou outro tipo de material transparente), retangulares e de mesmo tamanho, com subdivisões feitas por linhas internas desenhadas em suas superfícies.

4.4 O manipulável como base para representações auxiliares

Para Duval (2012), considerando as representações internas que o indivíduo produz, é ilusório falar em conversão direta, pois sempre haverá representações intermediárias nesse processo. Segundo o autor, mesmo em situações em que a linguagem natural é o registro de partida e o de chegada, “esta conversão interna não é feita diretamente, ela passa por representações intermediárias” (Duval, 2012, p. 295).

No que concerne às representações semióticas, segundo Duval (1999b), a aprendizagem em matemática, por vezes, utiliza-se da produção de representações que se relacionam com outras representações cumprindo uma função auxiliar. Essas

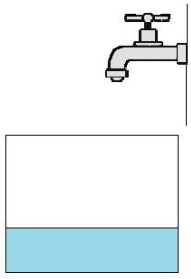
representações auxiliares são associadas à representação principal desempenhando, pelo menos, uma dentre sete funções descritas pelo autor:

1- Fornecimento de informações adicionais

A representação auxiliar apresenta informações novas, não fornecidas pela representação principal ou que não podem ser inferidas a partir do seu conteúdo. Podemos citar como exemplo as representações figurais que complementam os dados necessários para a resolução de um problema proposto em linguagem natural. Temos, nesse caso, o enunciado como a representação principal e a representação figural como representação auxiliar, conforme vemos na atividade da figura 25.

Figura 25 - Atividade com aporte de informações adicionais via representação auxiliar.

Uma torneira levou 10 segundos para encher uma parte do recipiente, como mostra a ilustração abaixo. Quanto tempo, no total, levaria para encher o recipiente completamente?



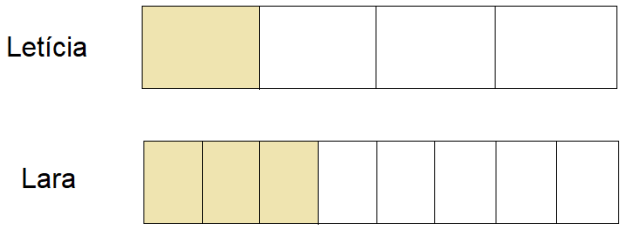
Fonte: Elaborada pelo autor.

2- Interpretação heurística

A representação auxiliar oferece possibilidade de tratamentos diferentes daqueles possíveis na representação principal. Como exemplos temos as representações figurais produzidas a partir dos registros em escrita simbólica ou enunciados em linguagem natural e que permitem tratamentos puramente visuais facilitando a solução do problema matemático proposto, conforme a atividade apresentada na figura 26.

Figura 26 - Atividade com emprego de interpretação heurística, via representação auxiliar, em sua resolução.

Letícia e Lara ganharam, cada uma, uma barra de chocolate. Letícia já comeu 1/4 de sua barra e Lara já comeu 3/8 da sua. Quem comeu mais chocolate até agora?



Fonte: Elaborada pelo autor.

3- Interpretação explicativa

A representação auxiliar apresenta de outra forma informações já contidas, de modo implícito ou explícito, na representação principal. O seu propósito é substituir, por exemplo, a partir de um esboço ou desenho, explicações prolongadas na representação principal ou mesmo oferecer imagens com referência concreta imediata para dar sentido a termos desconhecidos, como ‘ampulheta’ no enunciado da atividade apresentada na figura 27.

Figura 27 - Atividade com interpretação explicativa via representação auxiliar.

A ampulheta, também chamada de relógio de areia, é um instrumento antigo usado para medir o tempo. Se 1/5 da areia já escorreu para a parte de baixo, qual a porcentagem de areia que ainda resta na parte de cima?

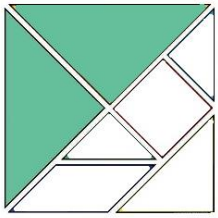
Fonte: Elaborada pelo autor.

4- Seleção de elementos relevantes

A representação auxiliar destaca, dentre as várias informações trazidas pela representação principal, os dados pertinentes para a resolução do problema proposto. Na atividade apresentada na figura 28, a representação figurativa tem a função de pôr em evidência os elementos do enunciado necessários para se chegar à resposta.

Figura 28 - Atividade com seleção de elementos relevantes via representação auxiliar.

Podemos montar um quadrado usando as sete peças do tangram: dois triângulos isósceles grandes, dois triângulos isósceles pequenos, um triângulo isósceles médio, um quadrado e um paralelogramo. Com os dois triângulos isósceles grandes já conseguimos montar a metade do quadrado. Qual fração corresponde a um triângulo isósceles grande na montagem final?



Fonte: Elaborada pelo autor.

5- Exemplo

A representação auxiliar apresenta uma ocorrência, dentre os vários contextos possíveis, que exemplifica uma "categorização de formas, propriedades ou de traços" presentes na representação principal (Duval, 1999b, p. 58). A figura 29 apresenta uma representação auxiliar, em escrita simbólico-numérica, que tem a função de exemplificar frações equivalentes a partir da relação *p/q = r/s se ps = qr* trazida pela representação principal.

Figura 29 - Função exemplo via representação auxiliar.

Duas frações são equivalentes, ou seja, $p/q = r/s$ se $ps = qr$ (FIGUEIREDO, 1975).

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

6- Ilustração

A representação auxiliar é geralmente uma imagem que remete a objetos da realidade e tem a função de ilustrar o conteúdo da representação principal que, na maioria das vezes, está expresso em linguagem natural, conforme a atividade apresentada na figura 30.

Figura 30 - Atividade com ilustração via representação auxiliar.

Adriana dividiu uma pizza em cinco pedaços iguais. Qual é a fração que representa cada pedaço?

Fonte: Elaborada pelo autor.

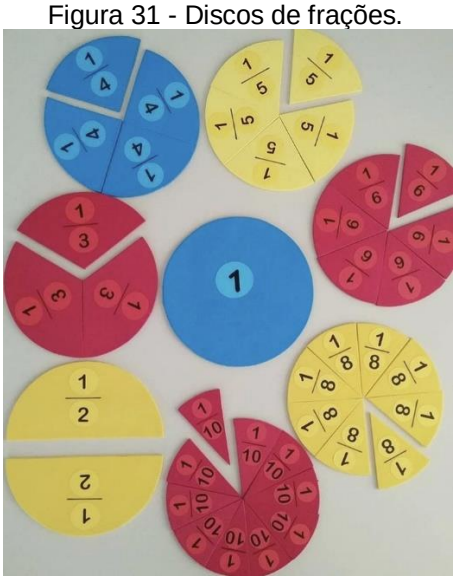
7- Material (substituto do objeto)

A representação auxiliar cuja função é material (substituto do objeto), segundo Duval (1999b, p. 59), difere radicalmente das anteriores, pois

> não é mais com base em certas correspondências entre elementos de seus respectivos conteúdos informacionais que a representação auxiliar serve à representação principal, mas por intermédio das operações materiais ou mentais que permite realizar.

Nesse sentido, a representação auxiliar serve como material para que, a partir das operações que permite realizar, possa-se compreender melhor o que está sendo representado na representação principal. Um exemplo dessa função é o que ocorre com os chamados “discos de frações”, que podem ser usados no ensino das frações. O disco de fração é um material manipulável e consiste num círculo, geralmente feito de madeira, subdividido em partes iguais e móveis. Assim, o disco de fração permite operações que podem ser realizadas fisicamente movendo suas peças, conforme apresentado na figura 31.

Figura 31 - Discos de frações.



Fonte: https://br.pinterest.com.

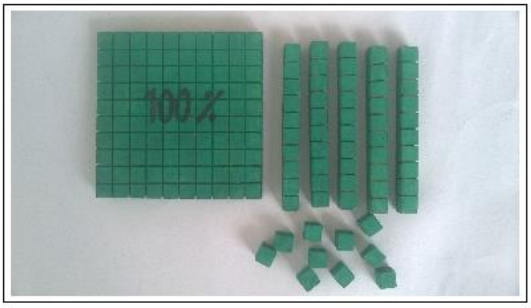
O uso desse tipo de manipulável tem por finalidade ajudar na compreensão da fração em seu significado parte-todo, ou seja, no reconhecimento do registro numérico fracionário como representação de uma ou mais partes de um todo subdividido igualmente.

Pode-se, pelo manuseio das peças do material, comparar tamanhos entre diferentes frações, bem como perceber equivalências entre elas, o que, conforme Duval (1999b, p. 60), “também pode ser feito mentalmente, deslocando o olhar ou o ponto-alvo da atenção visual”.

A utilização de material manipulável como base para representações auxiliares nas conversões pode, portanto, oferecer ao indivíduo outras possibilidades de apreender características do objeto matemático em questão, nesse caso, a partir das percepções derivadas de sua experiência tátil-visual.

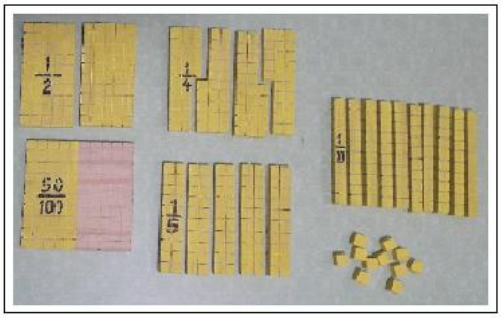
Ao investigar, à luz da TRRS, limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões, Melo (2019) utilizou representações concretas, produzidas com material manipulável (figuras 32 e 33), que cumpriam funções auxiliares em relação às representações simbólicas.

Figura 32 - Manipulável usado por Melo (2019) – conjunto verde.



Fonte: Melo (2019).

Figura 33 - Manipulável usado por Melo (2019) – conjunto amarelo.



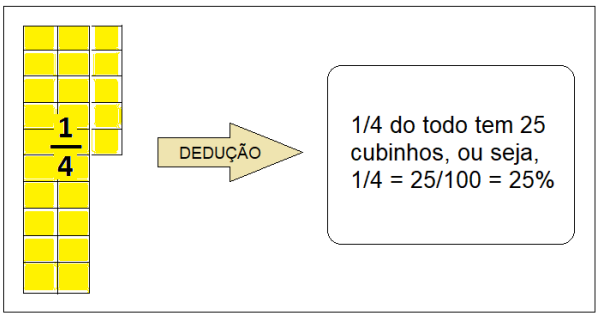
Fonte: Melo (2019).

No conjunto verde, a placa representava o total, ou seja, 100%. Assim, cada barra e cada cubinho representava 10% e 1%, respectivamente. Já no conjunto amarelo, as placas foram divididas em duas, quatro e cinco partes iguais, para as representações de meios, quartos e quintos. Nesse caso, cada barra e cada cubinho representava 1/10 e 1/100, respectivamente (Melo, 2019).

Percebe-se que essas representações concretas poderiam desempenhar, além da função material (substituto do objeto), outras funções como a interpretação explicativa, destacando informações sobre o objeto representado que não estavam tão evidentes nas representações simbólicas.

Desse modo, um possível caminho resolutivo para as conversões envolvendo as representações numéricas fracionárias e numéricas percentuais a partir desse material seria aplicar a relação *um cubinho verde equivale a um cubinho amarelo*, ou seja, 1% = 1/100 e realizar contagens conforme o exemplo apresentado na figura 34.

Figura 34 - Conversão 1/4 → 25% a partir de material usado por Melo (2019).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Duval (1999b, p. 60), “geralmente, as unidades constituintes das representações produzidas para servir de material não se enquadram em um sistema semiótico e são, portanto, unidades livres e, portanto, aleatórias em sua forma e em

seu valor". No caso do manipulável usado por Melo (2019), a relação 1 cubinho = 1/100 = 1% é um exemplo dessa aleatoriedade.

Os resultados da pesquisa, embora tenham indicado algumas limitações para a utilização das representações concretas como representações auxiliares nas conversões, tais como "a ênfase no significado parte-todo, em detrimento de outros sentidos da fração, e o uso de regras de correspondência (codificação) no caminho resolutivo", demonstraram, por outro lado, um considerável aumento no índice de acertos e a sugestão de que a inclusão do manipulável no processo de conversão atenuou as dificuldades oriundas dos fenômenos de variação de congruência e não-congruência semântica e heterogeneidade dos sentidos (Melo, 2019, p. 110).

4.4.1 A conversão com o manipulável e a apreensão do objeto

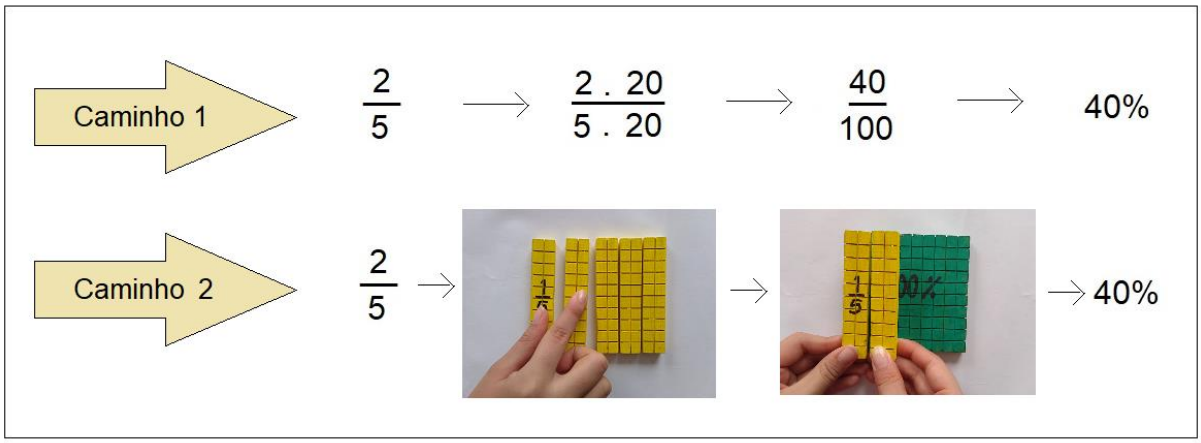
Vimos que, segundo Frege (1978), diferentes representações podem ter o mesmo referente (objeto representado), mas não o mesmo sentido (forma, conteúdo). Tal compreensão tornou-se um dos pressupostos da TRRS, pois Duval (2011, p. 47), corroborando com esse autor, afirma que "duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam". Assim, diferentes representações de um mesmo objeto têm diferentes conteúdos e, portanto, agregam diferentes informações a seu respeito.

Temos, ainda, que cada tipo de representação tem a sua "significação operatória", ou seja, permite tratamentos que lhes são próprios. De modo que os tratamentos usados para efetuar as adições 0,25 + 0,25, 1/4 + 1/4 e $25.10^{-2} + 25.10^{-2}$ não são os mesmos, pois, embora 0,25, 1/4 e 25.10^{-2} sejam representações do mesmo número racional, "cada uma destas três expressões tem uma significação operatória" (Duval, 2012, p. 273).

Disso, podemos inferir que cada representação auxiliar associada à representação principal vai produzir um tipo de apreensão próprio a respeito do objeto representado. Assim, no que concerne, particularmente, à conversão, acreditamos que a escolha de uma dada representação intermediária e, consequentemente, do caminho resolutivo a ela associada, abre a possibilidade de aprendizagens específicas. Em outras palavras, diferentes processos de resolução para as conversões propostas podem implicar diferentes apreensões relacionadas ao objeto em estudo.

No caso das conversões envolvendo registros do número racional em que materiais manipuláveis servem como base para representações auxiliares, pode-se fomentar apreensões diferentes daquelas que seriam produzidas se usássemos a intermediação de representações de outra natureza. Vejamos a descrição de dois diferentes caminhos resolutivos para a conversão 2/5 → 40% apresentada na figura 35:

Figura 35 - Dois caminhos para a conversão 2/5 → 40%.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O caminho 1 utiliza tratamentos na representação numérica fracionária original (2/5) com o objetivo de se chegar à fração centesimal equivalente (40/100) e, então, realizar a conversão 40/100 → 40%, a partir da relação x/100 = x%. Observa-se que a parte mais custosa do processo é, do ponto de vista cognitivo, encontrar o fator multiplicador que, ao multiplicar o numerador e o denominador da fração original, transforma 2/5 em sua equivalente 40/100.

Sabemos que duas frações são equivalentes, ou seja, $p/q = r/s$ se $ps = qr$ (Figueiredo, 1975). Assim, um dos possíveis tratamentos usados para produzir frações equivalentes consiste em multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração original pelo mesmo número natural diferente de zero. Portanto, para determinar uma fração equivalente que seja centesimal, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração original por um $n \neq 0$, de modo que o denominador da nova fração gerada seja 100. Como podemos deduzir a partir da descrição do caminho 1, o valor de n pode ser encontrado ao dividirmos 100 pelo denominador da fração original.

O caminho 2 apresenta um processo de conversão baseado no material manipulável utilizado na pesquisa de Melo (2019) e consiste, em primeiro lugar, na identificação da placa amarela cujas divisões correspondem à fração 2/5, ou seja, aquela dividida em quintos. Toma-se o número de partes dessa placa que corresponde ao numerador da fração, nesse caso, duas partes, e compara-se com a placa verde, que representa 100%. Finalmente, percebe-se que o número de cubinhos amarelos corresponde a 40 cubinhos verdes, ou seja, 40%.

Nota-se que cada um dos caminhos exemplificados apresenta, a partir das representações intermediárias usadas para a conversão, seu tipo específico de unidades de sentido, pois, como destaca Duval (2009, p.103), tais unidades podem ser discretas, como na língua natural e nas escritas simbólicas, e não-separáveis, como nas figuras e nos gráficos cartesianos, pois são, nesse último caso, “integradas numa só forma percebida”.

No que tange às figuras perceptuais representativas da fração com sentido parte-todo, por exemplo, o valor qualitativo da parte não pode ser visualmente separado do valor do todo, pois ambos se confundem num só valor visual, o da parte em relação ao todo. Como exemplo disso, observemos as representações A e B na figura 36:

Figura 36 - Representações figurativas A e B.

(A)

(B)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que a representação figurativa A não é um registro válido para identificar uma parte e muito menos o seu tamanho em relação ao todo, a não ser que a comparemos com o inteiro, o que ocorre na representação figurativa B. Da mesma forma, a apreensão das representações “um quarto” e “25%” não ocorre dissociada da apreensão das representações “um inteiro” e “100%” com as quais se relacionam.

Assim, concluímos que é imprescindível, sobretudo para a objetivação do número racional em seu significado parte-todo, que o caminho de conversão desenvolvido permita a visualização, o mais clara possível, da parte em relação ao todo. Nesse sentido, a utilização de representações figurativas intermediárias produzidas a partir de manipuláveis, como o que foi utilizado na pesquisa de Melo (2019), bem como o processo de conversão a ele associado, pode ser, pela natureza das unidades de sentido que apresenta, bastante promissora.

Os caminhos 1 e 2, tomados como exemplos nessa seção, caracterizam, para a mesma conversão, dois diferentes caminhos de resolução. Cada um possui suas próprias representações intermediárias e, portanto, seus próprios tratamentos. Tais tratamentos têm importância fundamental, pois, como afirmam Moretti e Baerle (2022, p.607),

> a operação semiocognitiva de conversão, em termos de aprendizagem matemática, exige que se conheça os sistemas em que ela opera para que haja a possibilidade de coordenação. Para tanto, será necessário implementar operações de tratamento que evidenciam, em cada registro, os elementos significantes pertinentes.

É essa coordenação entre os elementos significantes pertinentes ou unidades de sentido no interior dos registros que, segundo Duval (2011, p.49), faz com que o indivíduo possa “reconhecer um mesmo objeto em suas diferentes representações”. Isso porque, segundo o autor, **“**essa coordenação não pode ser a consequência da apreensão conceitual. Ela é, ao contrário, uma condição essencial” (Duval, 2009, p. 21).

Sendo assim, nesse trabalho, investigamos se algumas representações intermediárias podem possibilitar operações de tratamento mais favoráveis à percepção dos seus elementos significantes pertinentes, bem como oferecer maior possibilidade de visualização de correspondências entre essas unidades de sentido e as unidades de sentido nos registros de partida e de chegada. Em outros termos, queremos observar se há implicações distintas relacionadas a apreensão do objeto, num e noutro caminho de conversão.

Especificamente, no que concerne à conversão que utiliza o material manipulável como representação auxiliar, estamos falando da possibilidade de

apreensões relacionadas ao objeto matemático que demandam esse tipo de experiência tátil-visual por parte dos indivíduos.

4.4.2 O material manipulável e a codificação

Segundo Duval (2011), diante de algumas conversões envolvendo representações semanticamente não congruentes, os estudantes ficam sem saber o que fazer e, nesses casos, tudo ocorre “como se os alunos não tivessem nenhuma possibilidade de reconhecer o que é representado, nem as primeiras transformações que eles poderiam efetuar” (p.102).

Assim, representações auxiliares que cumpram funções tais como a *interpretação heurística,* permitindo tratamentos inviáveis na representação principal, ou mesmo a *interpretação explicativa,* revelando aspectos do objeto representado não tão evidentes na representação principal (Duval, 1999b), podem ajudar os estudantes a encontrar um caminho matematicamente viável para tais conversões.

As representações que cumprem a função auxiliar de material (substituto do objeto) são, por sua vez, frequentemente, usadas “em abordagens onde se procura passar de um material constituído por objetos fisicamente manipuláveis a uma simples codificação destes objetos” (Duval, 1999b, p. 60). Para o autor, busca-se com a utilização desses materiais, mesmo que não tenham a possibilidade semântica e combinatória oferecida pelos sistemas semióticos, “reconstituir uma passagem contínua dos próprios objetos aos signos que os representam” (Duval, 1999b, p. 60).

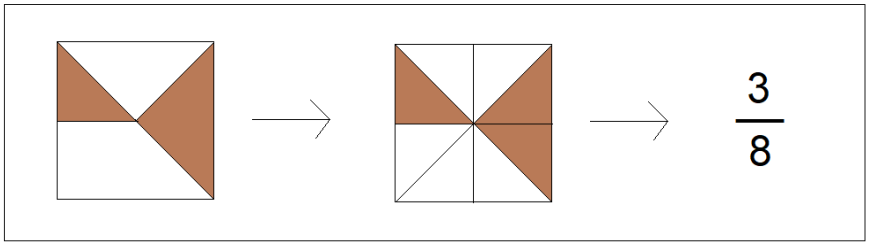
Essa codificação caracteriza-se por viabilizar a passagem de uma representação para outra “aplicando regras de correspondência ou utilizando listas de substituições inicialmente estabelecidas” (Duval, 2012, p. 273). Nesse caso, a conversão ocorre sem que o indivíduo que a realiza, necessariamente, saiba sobre como essa representação se organiza e nem o que ela representa.

Assim, a transformação que resulta de codificação é, segundo Duval (2003), limitada do ponto de vista cognitivo. Em outras palavras, embora o sucesso matemático, ou seja, o êxito na resolução de uma conversão seja observado, nada podemos dizer em termos de sucesso cognitivo, já que a aplicação de regras de correspondência para converter representações não implica apreensões conceituais sobre o objeto representado (Duval, 2003).

Nesse sentido, a conversão 40/100 → 40% realizada no final do caminho 1 (figura), dada a transparência entre as representações, pouco ou nada tem a acrescentar, do ponto de vista cognitivo, em relação à aprendizagem do objeto representado, pois configura “uma situação de simples codificação” (Duval, 2003, p. 19). Contudo, as transformações realizadas a partir do registro de partida 2/5 para se chegar à fração centesimal demandam operações simbólico-numéricas que podem, por sua vez, implicar apreensões a respeito desse objeto matemático.

Do mesmo modo, por exemplo, a conversão da representação algébrica para a representação gráfica de uma função pode utilizar, como representação auxiliar, uma tabela com os valores de y para cada x e a aplicação da seguinte regra de correspondência: no plano cartesiano, qualquer ponto é dado pelo par de coordenadas (x, y). Também a conversão de uma representação figurativa para a representação fracionária de um número racional pode se valer de uma representação auxiliar, produzida a partir de tratamentos na representação de partida, e da aplicação da dupla contagem como regra de correspondência, conforme apresentado na figura 37:

Figura 37 - Conversão representação figurativa → representação numérica fracionária.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No entanto, são as operações realizadas na expressão algébrica, na busca pelos valores da função nos elementos do seu domínio, para se chegar à representação tabular, assim como os tratamentos realizados na representação figurativa inicial para se chegar à representação figurativa intermediária, que demandarão algum custo cognitivo nessas conversões.

Assim, muito embora percebamos que as representações auxiliares, nesses exemplos, cumprem o papel de elevar o grau de congruência semântica com a representação de chegada, favorecendo o surgimento de regras de correspondência para a conversão, não podemos desconsiderar, no que tange à possibilidade de

apreensões relativas ao objeto matemático, as demais operações, tratamentos e representações que compõem o caminho resolutivo como um todo.

Nesse sentido, podemos identificar no caminho 2 (figura), ao menos, duas regras de correspondência que podem ser associadas ao material usado por Melo (2019): a primeira é a dupla contagem, que permite relacionar a representação de partida à parte ou às partes da placa correspondente, a segunda nasce da percepção, a partir da sobreposição das placas amarela e verde, de que um cubinho amarelo (1/100) equivale a um cubinho verde (1%), ou seja, n/100 = n%, sendo n o número de cubinhos contados na(s) parte(s) destacada(s) em cada placa. Contudo, não obstante a codificação associada ao manipulável, pode-se investigar se, na conversão com esse tipo de material, a experimentação tátil-visual e as percepções que dela derivam favorecem apreensões importantes, do ponto de vista cognitivo, a respeito do objeto matemático.

Enfim, considerando todo o caminho adotado para realizar uma conversão, com quaisquer que sejam os tratamentos e representações auxiliares utilizadas, espera-se que, em algum momento, a aplicação de algum tipo de regra de correspondência aconteça como parte desse processo.

Há de se verificar, portanto, a ocorrência de possíveis aprendizagens relacionadas ao objeto representado, que tenham sido fomentadas durante as demais operações realizadas no caminho entre a representação de partida e a de chegada.

Desse modo, acreditamos que, apesar da presença de regras de correspondência, o caminho de conversão com a utilização do manipulável pode proporcionar, a partir da experiência tátil-visual, importantes percepções e várias aprendizagens relacionadas ao objeto representado.

A partir das discussões apresentadas nesta fundamentação teórica, questionamo-nos sobre qual a influência que os diferentes processos de resolução e, portanto, os diferentes tratamentos e as diferentes representações intermediárias, aplicados na realização de uma mesma conversão, tem no que tange às aprendizagens relacionados ao objeto matemático representado.

Como vimos, segundo a TRRS, “não existe (nenhuma) *noésis sem sémiosis*, não existe ato matemático de pensamento sem transformação de representações semióticas quaisquer que sejam” (Duval, 2011, p.42). Dentre as transformações possíveis, a conversão é, do ponto de vista cognitivo, a atividade que “conduz aos mecanismos de compreensão” (Duval, 2003, p.16). Há de se considerar, no entanto,

que, ao converter, o indivíduo mobiliza representações intermediárias que, embora se refiram ao mesmo objeto, têm conteúdos distintos e, portanto, destacam diferentes aspectos do representado.

Agrega-se à discussão a ideia de que a abstração e a compreensão dos objetos matemáticos podem ser favorecidas pela experiência com os objetos concretos e que, portanto, tais recursos podem ser bons aliados do professor na desafiante tarefa de ensinar os números racionais, sobretudo, as representações numéricas fracionárias.

Ainda é necessário distinguir entre os possíveis êxitos dos estudantes o que é relevante do ponto de vista matemático e também do ponto de vista cognitivo.

Tais pressupostos formam a base teórica para um cenário de onde emerge o foco de nossa pesquisa, ou seja, a análise das apreensões acerca do objeto número racional a partir de dois diferentes caminhos de conversão entre representações numéricas fracionárias e numéricas percentuais.

No capítulo seguinte, apresentamos nossa hipótese, os objetivos da pesquisa e a descrição do percurso metodológico trilhado. Definimos o campo, os sujeitos pesquisados, a forma de intervenção, os instrumentos de coleta e materiais empregados, bem como os caminhos de conversão utilizados.

5 PROPOSIÇÃO DA TESE E PERCURSO METODOLÓGICO

A partir do exposto anteriormente, elaboramos o seguinte problema de pesquisa:

5.1 Problema de pesquisa

Diferentes caminhos adotados na resolução das conversões entre os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional implicam diferentes apreensões, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, relacionadas ao objeto representado?

5.2 Argumentação e hipótese

Duval (2003) observa que os objetos matemáticos, por conta de sua natureza abstrata, somente podem ser acessados a partir de suas representações semióticas. Contudo, cada representação é sempre cognitivamente parcial em relação ao que representa e "de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados" (Duval, 2012, p.280). Assim, nenhuma representação pode ser confundida com o próprio objeto (Duval, 2003).

Tal parcialidade implica, no que concerne à aprendizagem dos objetos matemáticos, a mobilização de, ao menos, dois de seus diferentes registros de representação via transformações do tipo conversão (Duval, 2003).

Essa coordenação entre diferentes representações expõe muito mais do objeto representado, pois, segundo Frege (1978) e corroborado por Duval (2011), as representações podem ter mesma referência (objeto representado), mas nunca o mesmo sentido (forma, conteúdo). Assim, cada representação evidencia "uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa" (Duval, 2012, p. 280).

Ocorre que os caminhos resolutivos adotados para a realização das conversões (não codificadas) também demandam representações auxiliares, sejam elas externas ou internas, pois o que se tem em alguns casos é apenas "a ilusão de uma passagem direta" (Duval, 2012, p. 295).

Nesse trabalho de pesquisa, pretendemos explorar dois caminhos resolutivos para as conversões entre as representações numéricas fracionárias e numéricas percentuais do número racional: a conversão pela via das escritas simbólicas e a conversão por meio de material manipulável, como representação auxiliar em relação à representação principal com a função de “material (substituto do objeto)” (Duval, 1999b).

Assim, se cada representação agrega informações e percepções específicas em relação ao representado, então, esses diferentes caminhos resolutivos para a conversão, com a utilização de diferentes representações auxiliares, implicarão, também, diferentes aprendizagens a respeito do objeto em questão.

Tais aprendizagens podem resultar apenas em sucessos matemáticos, ou seja, respostas corretas às conversões propostas, ou ainda manifestar indicativos de sucessos cognitivos a partir do bom desempenho dos estudantes também em atividades que explorem aspectos conceituais relativos ao objeto estudado.

A nossa hipótese é que diferentes caminhos adotados na resolução das conversões entre os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional implicam diferentes apreensões, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, relacionadas ao objeto representado.

A partir da argumentação e hipótese apresentada, definimos os seguintes objetivos para o nosso estudo:

5.3 Objetivo geral

Analisar, do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo, as apreensões acerca do objeto número racional a partir de dois diferentes caminhos de conversão entre suas representações numéricas fracionárias e percentuais.

5.4 Objetivos específicos

- Classificar e caracterizar as estratégias resolutivas adotadas pelos participantes em atividades de conversão no sentido oposto, percepção da parte em relação ao todo na representação e comparação de tamanho entre partes representadas.

- Verificar possíveis relações entre as estratégias adotadas e os diferentes caminhos de conversão trabalhados.

- Observar, do ponto de vista matemático, a efetividade das estratégias resolutivas utilizadas.

- Identificar, do ponto de vista cognitivo, possíveis apreensões relativas ao objeto matemático representado a partir das estratégias resolutivas adotadas.

5.5 Desenho da pesquisa

A pesquisa adotou um percurso metodológico de cunho qualitativo, já que buscou trabalhar com o "universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos" (Minayo, 1994, p.22).

Nesse trabalho, procuramos observar a aprendizagem dos estudantes participantes relacionada ao objeto em estudo. Para tanto, procedemos com uma abordagem metodológica identificada com a definição de Flick (2006):

> A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve a postura interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem (Flick, 2006, p. 16).

Fizemos a observação participante definida por Minayo (2013) como "um processo pelo qual um pesquisador se coloca como observador de uma situação social, com a finalidade de realizar uma investigação científica" (Minayo, 2013, p. 70-71). O percurso metodológico utilizou alguns aspectos da pesquisa do tipo experimental, conforme veremos a seguir.

O percurso metodológico utilizou alguns aspectos da pesquisa do tipo experimental que, conforme Gil (2002), pode ser definida como aquela que, essencialmente, "consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis

que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto" (p.47).

Nesse trabalho, tivemos como objeto de estudo as apreensões, do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo, relativas ao objeto matemático número racional. Selecionamos como variáveis independentes dois diferentes caminhos para a realização das conversões: um caminho com tratamentos simbólico-numéricos e outro caminho com a utilização do material manipulável. O controle e a observação da influência dessas variáveis sobre o objeto de pesquisa ocorreram a partir de dois grupos formados com os sujeitos participantes.

Essa dinâmica utilizou, portanto, características de um plano experimental do tipo fatorial que, de acordo com Gil (2002), "consiste, basicamente, em utilizar duas, ou três, ou mais variáveis independentes, simultaneamente, para estudar seus efeitos conjuntos ou separados em uma variável dependente" (p. 95). Assim, manipulamos as duas variáveis independentes (utilização do processo simbólico-numérico e utilização do material manipulável) ao realizarmos as conversões com vistas à análise de seus efeitos na variável dependente (apreensões, do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo, relativas ao número racional), nosso objeto de estudo.

5.6 Campo e participantes da pesquisa

O campo de pesquisa foi uma escola da rede pública municipal de ensino do Recife em que o pesquisador atua como professor dos anos iniciais. Os participantes foram alunos de duas turmas do 6º ano do ensino fundamental e estiveram, em princípio, aptos a participar todos os regularmente matriculados. Com isso, tivemos um número inicial de 42 participantes nesse estudo. A escolha pelo 6º ano buscou garantir que todos os participantes tivessem passado pela etapa anterior (5º ano), em que já é prevista, segundo a BNCC, a habilidade de relacionar representações numéricas fracionárias e percentuais do número racional (Brasil, 2017).

5.7 Intervenção e coleta de dados

No primeiro momento, tivemos a aplicação do Instrumento Diagnóstico em duas turmas do 6° ano do ensino fundamental disponibilizadas pela gestão da escola para a pesquisa. O instrumento avaliou o conhecimento dos participantes nos exercícios

de conversões, em ambos os sentidos, entre as representações fracionárias e percentuais dos números racionais. Também serviu para verificar a existência ou não de apreensões conceituais que possibilitasse aos participantes, entre outras habilidades, mensurar grandezas, identificar equivalências e realizar comparações entre esses números.

A pesquisa prosseguiu apenas com os participantes que, nas duas turmas investigadas, apresentaram os menores índices de acertos na aplicação do Instrumento Diagnóstico. Esses participantes foram divididos em dois grupos (A e B) e não consideramos necessário, a partir dos resultados obtidos, promover trocas entre os indivíduos das turmas originais, pois, ao nosso ver, havia uma certa equivalência em termos de número de sujeitos e nível de aprendizagem, já que o desejável era "experimentar com grupos essencialmente iguais" (Gil, 2002, p.99).

No segundo momento, tivemos a intervenção realizada pelo pesquisador em cada um dos grupos. No grupo A, o pesquisador apresentou o caminho para a conversão a partir de representações simbólico-numéricas e apenas no sentido *fração → percentual*. A intervenção foi realizada num período de quatro horas e consistiu na exposição do conteúdo de forma coletiva, apresentação de exemplos, proposição de exercícios, correção coletiva dos exercícios e, por fim, aplicação, individual, do Teste de Sondagem. No grupo B, o pesquisador apresentou o caminho para a conversão a partir do material manipulável produzido para essa pesquisa e apenas no sentido *fração → percentual*. A intervenção foi realizada num período de quatro horas e consistiu na apresentação coletiva do material, bem como do processo de resolução das conversões a ele associado, apresentação de exemplos, proposição de exercícios, correção coletiva dos exercícios e, por fim, aplicação, individual, do Teste de Sondagem.

É fundamental destacar que as intervenções realizadas pelo pesquisador, tanto no grupo A quanto no grupo B, limitaram-se apenas à apresentação da conversão *fração → percentual* a partir dos tratamentos em escritas simbólicas para um grupo e do material manipulável para o outro. A intervenção não tratou, portanto, de muitos outros aspectos relacionados aos números racionais e abordou tão somente o processo de conversão entre dois tipos de representações simbólicas e num único sentido.

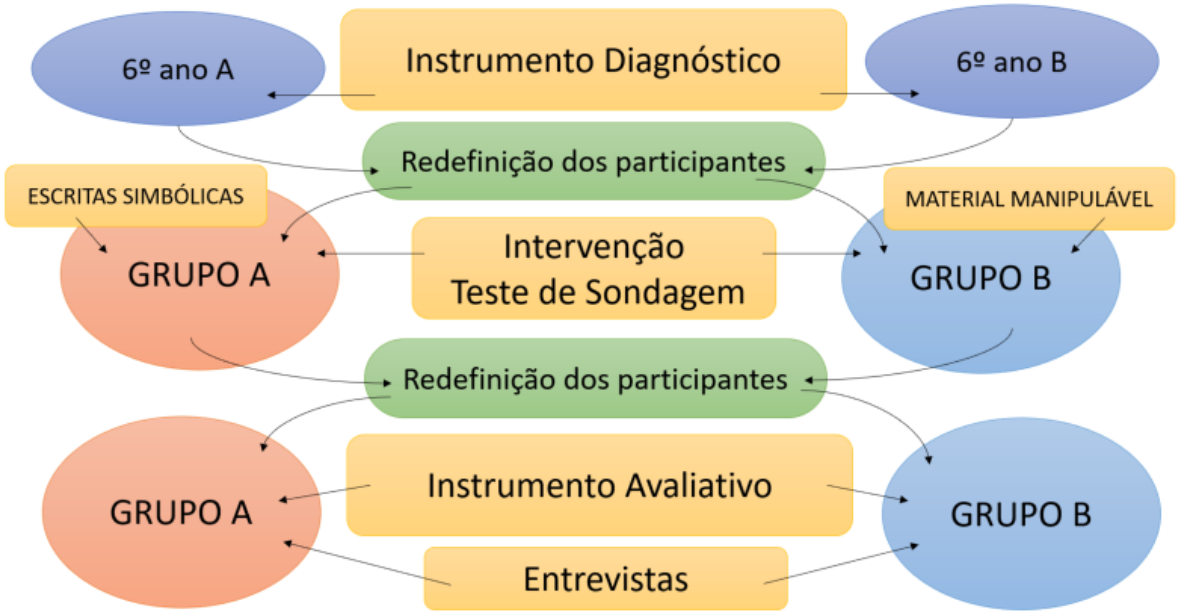
Os resultados do Teste de Sondagem permitiram a identificação dos participantes que conseguiram, em ambos os grupos, aplicar o caminho de conversão trabalhado e que, portanto, continuaram para o terceiro momento da pesquisa.

No terceiro momento, tivemos a aplicação do Instrumento Avaliativo e a realização das entrevistas com os participantes dos grupos A e B. Os participantes tiveram duas horas para a resolução das atividades propostas no instrumento. Aos participantes do grupo B não foi disponibilizado o material manipulável utilizado na intervenção ministrada pelo pesquisador.

As entrevistas foram semiestruturadas e serviram para registrar, de forma mais objetiva, as estratégias e os caminhos resolutivos adotados pelos participantes. As falas ajudaram a entender o modo como cada participante pensou para responder as atividades propostas no Instrumento Avaliativo, bem como serviram para determinar a influência que o caminho de conversão trabalhado na intervenção teve para o seu desempenho.

Na figura 38, apresentamos uma visão geral de toda a sequência de trabalho desenvolvida.

Figura 38 - Sequência metodológica realizada na pesquisa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em síntese, tivemos tão somente duas situações experimentais:

- Os participantes do grupo A trabalharam a transformação de uma dada representação numérica fracionária de partida numa representação numérica percentual de chegada por meio apenas das escritas simbólicas.

- Os participantes do grupo B trabalharam a transformação de uma dada representação numérica fracionária de partida numa representação numérica percentual de chegada por meio apenas de material manipulável.

5.7.1 Aspectos éticos da pesquisa

A realização desse trabalho de pesquisa buscou obedecer aos preceitos éticos da Resolução 466/12 ou 510/16 do Conselho Nacional de Saúde. Para tanto, os procedimentos adotados nas etapas da pesquisa não ofereceram quaisquer riscos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social ou cultural dos sujeitos participantes.

Como benefício produzido para os sujeitos participantes, podemos indicar que a intervenção realizada pelo pesquisador teve como foco o número racional e a conversão entre suas representações, oportunizando aprendizagens não consolidadas anteriormente.

Todos os dados coletados, ou seja, as atividades escritas (testes de sondagem e instrumentos diagnóstico e avaliativo) e os áudios das entrevistas realizadas, ficarão armazenados, física e digitalmente, sob a responsabilidade do pesquisador, pelo período mínimo de 5 anos.

5.8 Instrumentos de coleta de dados

Para a coleta de dados, utilizamos os seguintes instrumentos:

- Instrumentos diagnóstico e avaliativo, aplicados no início e no final da pesquisa, respectivamente. Os instrumentos aplicados nesses dois momentos foram diferenciados por pequenas alterações nas atividades propostas: mudança nos valores numéricos e alterações nas figuras;

- Testes de sondagem, aplicados após o período em que o professor pesquisador fez as intervenções em ambos os grupos;

- Entrevista semiestruturada, aplicada ao final da pesquisa. As falas, tanto dos

participantes quanto do pesquisador, foram gravadas e os trechos considerados mais importantes transcritos na análise dos resultados da pesquisa.

5.8.1 Instrumento Diagnóstico e Instrumento Avaliativo

Os instrumentos diagnóstico e avaliativo foram elaborados com a proposição de atividades abertas e atividades com alternativas. Segundo Duval (2016),

> "Compreender matemática é, desde já, não somente reconhecer os objetos matemáticos quando se muda de representação semiótica na mudança de registro, como também, poder por si mesmo mudar de registro para mudar a representação dos objetos" (p. 21).

Nesse sentido, entendemos que as atividades com alternativas para a resposta dos participantes podem avaliar, entre outras habilidades, o reconhecimento do mesmo objeto em diferentes registros de representação. Já atividades abertas (sem a oferta de alternativas) podem ser mais adequadas quando desejamos verificar a produção do registro de chegada, realizada pelo próprio participante.

Os instrumentos tiveram, além da proposta de conversões entre os registros numéricos fracionários e percentuais, atividades cujas resoluções poderiam indicar outras apreensões conceituais relacionadas ao objeto matemático em questão. Assim, nosso intuito era que os instrumentos não se limitassem a um único tipo de exercício, pois, como observa Duval (2003, p. 23),

> Muitos tratamentos estatísticos se baseiam em sucesso nos itens considerados separadamente e não em sucesso em toda uma sequência de itens; no entanto, este último é o único que possui um significado do ponto de vista de uma análise cognitiva.

Duval (2003), apresenta algumas características para atividades em que o sucesso dos alunos em sua resolução pode indicar apreensões conceituais relacionadas ao objeto matemático número racional. Considerando o foco de nossa pesquisa, seriam:

- Atividades que tratam dos dois sentidos da conversão: sentido *fração* → *percentual* e sentido *percentual* → *fração*.

- Atividades com “casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não-congruência” para cada sentido da conversão (Duval, 2003, p. 23).

- Atividades que exploram tanto registros monofuncionais quanto registros multifuncionais.

- Atividades que exploram tanto a produção de representações quanto “a identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais” (p. 23).

Buscamos contemplar essas características nas atividades elaboradas para os instrumentos e incluímos mais algumas que julgamos importantes para a nossa análise:

- Atividades que trabalham com a percepção do tamanho da parte em relação ao todo.

- Atividades que estabeleçam comparações entre os tamanhos de diferentes racionais em suas representações fracionárias e percentuais.

- Atividades que exploram a realização de estimativas intuitivas a partir de representações figurativas.

Apresentamos, a seguir, as atividades elaboradas para o Instrumento Diagnóstico:

Atividade 1

Transforme as frações abaixo em porcentagens:

$\frac{2}{5} =$ $\frac{1}{10} =$ $\frac{3}{4} =$ $\frac{2}{5} =$ $\frac{4}{10} =$ $\frac{1}{2} =$

Atividade 2

Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:

20% = 60% = 50% = 75% = 90% = 40% =

As atividades 1 e 2 tratavam da articulação entre os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional a partir das transformações do tipo conversão. As frações e os números percentuais foram escolhidos considerando a possibilidade de conversão a partir dos tratamentos em escritas simbólico-numéricas e também a partir do material manipulável. Ambos os sentidos

da conversão foram explorados e, no que concerne às variações de congruência e não congruência, percebe-se casos em que a transparência entre os registros envolvidos pode ser maior ou menor, como nas conversões 2/5 = 40% e 4/10 = 40%, ou ainda, 75% = 3/4 e 90% = 9/10, por exemplo.

Atividade 3

Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa mais que a metade do todo.

b) Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{10}$

Atividade 4

Observe as porcentagens abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa o todo ou total.

b) Faça um x naquela que representa mais que a metade do todo.

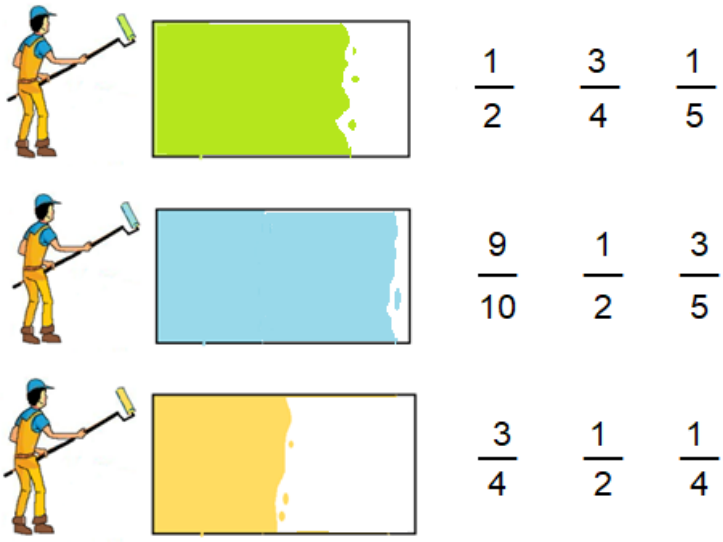
c) Risque aquela que representa menos que a metade do todo.

30% 100% 80% 50%

As atividades 3 e 4 tratavam do reconhecimento da relação parte-todo expressa a partir das representações numéricas fracionárias e percentuais do número racional. Nesse caso, os itens buscavam avaliar se os participantes conseguiriam identificar a magnitude ou tamanho dos números representados enquanto expressões de partes em relação a seus respectivos inteiros.

Atividade 5

Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:



Atividade 6

Ligue cada garrafa à porcentagem que mais se aproxima de sua quantidade de água:

As atividades 5 e 6 buscavam avaliar a habilidade de realizar estimativas intuitivas de frações e porcentagens. Nesses itens, particularmente, usamos registros monofuncionais (simbólico-numéricos) e multifuncionais (figuras). Os participantes deveriam pensar sobre as representações figurativas estimando as partes em relação ao todo em termos de fração e de porcentagem.

Atividade 7

Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$
$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{10}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$

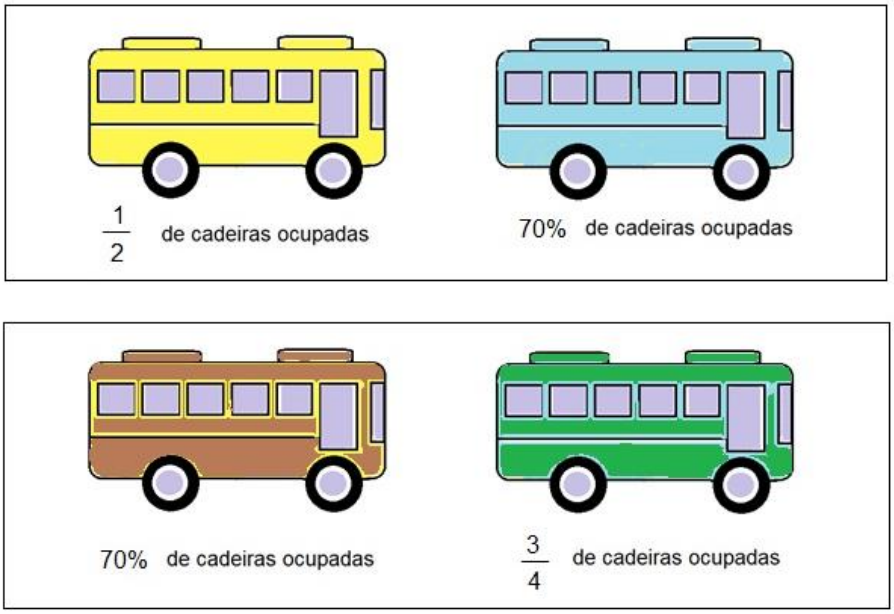
Atividade 8

Compare as porcentagens abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>menor</u> parte do todo:

10% 15%	49% 50%	75% 30%	100% 90%

Atividade 9

Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:



As atividades 7, 8 e 9 propuseram comparações entre números racionais expressos em representações fracionárias e percentuais. Com esses itens, pretendemos avaliar se os sujeitos conseguiriam estabelecer corretamente uma relação comparativa de grandeza, ou seja, se seriam capazes de identificar o maior e

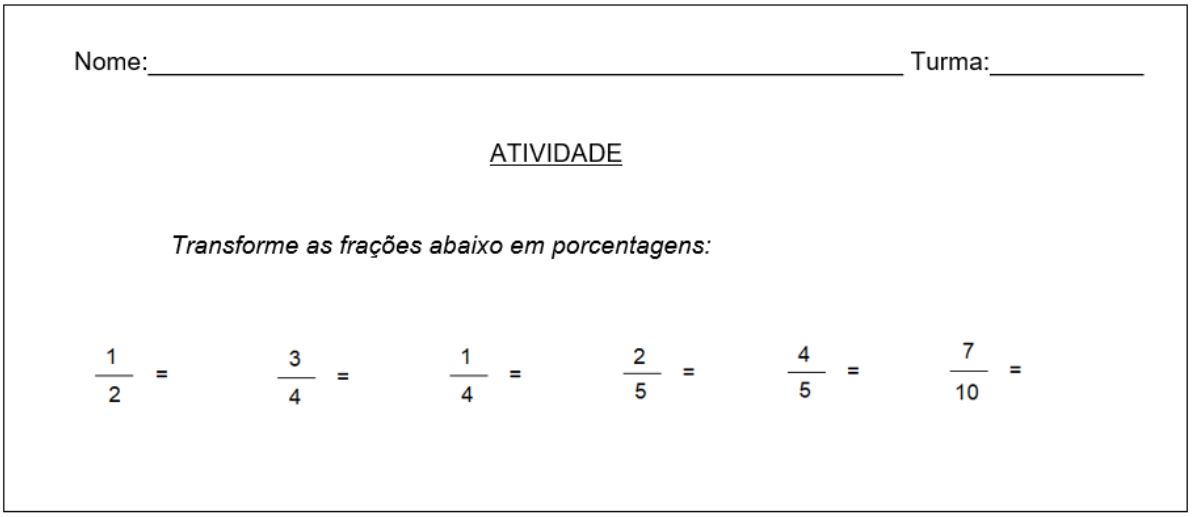
o menor entre dois números racionais, quer fossem expressos no mesmo tipo de registro de representação ou não. Optamos pela não utilização dos sinais > (maior que) e < (menor que) por avaliarmos desnecessária, considerando nosso foco de investigação, e também pela possibilidade de ocorrerem equívocos no emprego dessa simbologia matemática por parte dos participantes.

O Instrumento Avaliativo contou com os mesmos modelos de atividades explorados no Instrumento Diagnóstico, porém com valores numéricos e figurais modificados.

5.8.2 Teste de sondagem

O Teste de Sondagem foi aplicado durante a intervenção realizada em cada grupo e respondido individualmente. O teste consistiu em uma única atividade em que os participantes tiveram que determinar as representações numéricas percentuais correspondentes às seguintes frações 1/2, 3/4, 1/4, 2/5, 4/5 e 7/10, ou seja, o sentido da conversão foi o de *fração → percentual,* conforme apresentado na figura 39.

Figura 39 - Teste de sondagem.


Nome:_____ Turma:_____

ATIVIDADE

Transforme as frações abaixo em porcentagens:

$\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{4}$ = $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{5}$ = $\frac{4}{5}$ = $\frac{7}{10}$ =

Fonte: Elaborada pelo autor.

As frações foram escolhidas privilegiando os denominadores 2, 4, 5 e 10 porque se adaptavam aos limites do manipulável que pretendíamos utilizar.

5.8.3 Entrevista semiestruturada

Segundo Gil (1999), a entrevista semiestruturada permite que os entrevistados falem livremente sobre o assunto sem perder o foco do que está sendo discutido e solicitado pelo pesquisador.

Optamos pela entrevista ao invés de um questionário escrito, pois, segundo Duval (2011, p. 105), “a produção oral e a escrita não têm os mesmos papéis na tomada de consciência [...] das unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma representação”. É, portanto, mais fácil discorrer sobre determinado assunto oralmente que ter de escrever sobre ele, pois, além das questões relativas à tomada de consciência do objeto, surgem também questões inerentes à organização da própria escrita.

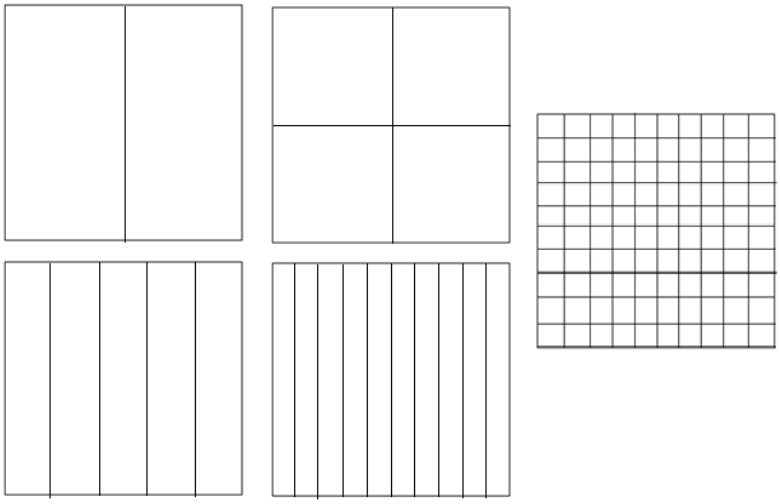
5.9 Material didático manipulável utilizado

A escolha do material didático manipulável concreto utilizado na pesquisa buscou atender aos critérios de simplicidade e disponibilidade de insumos para a sua confecção num ambiente escolar. Não tivemos a pretensão, nesse trabalho, de destacar um tipo particular de manipulável e sim de analisar a repercussão de recursos dessa natureza nos êxitos matemáticos e cognitivos dos participantes.

Para Lorenzato (2006, p.18), “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem” pode ser definido como material didático, já o material didático concreto pode referir-se “ao palpável, manipulável” e ainda, numa interpretação mais ampla, incluir até mesmo imagens gráficas (Lorenzato, 2006, p.22).

Assim, para a confecção do manipulável optamos por materiais suscetíveis à manipulação e facilmente encontrados nas escolas. Nesse sentido, o manipulável que utilizamos foi constituído, principalmente, por folhas de papel sulfite e papel vegetal ou acetato transparente. Nessa base material, foram representados retângulos de mesma medida subdivididos em partes de áreas iguais e formas homogêneas conforme ilustração da figura 40:

Figura 40 - Representações impressas no manipulável utilizado na pesquisa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com exceção do material usado para representar o retângulo subdividido em cem partes iguais, cuja superfície era transparente (papel vegetal ou acetato), todos as outras representações foram impressas em papel do tipo sulfite.

As representações figurativas inscritas no material manipulável foram as que Silva (2018) descreveu como figuras bidimensionais de particionamento explícito, ou seja, apresentavam, de forma explícita, todas as suas demarcações internas. As partes ou subfiguras demarcadas tinham, por sua vez, áreas congruentes, mesmo número de lados e medidas também iguais, o que favorecia, entre outras observações, a percepção de equivalências entre si, sobretudo, quando tais figuras eram sobrepostas.

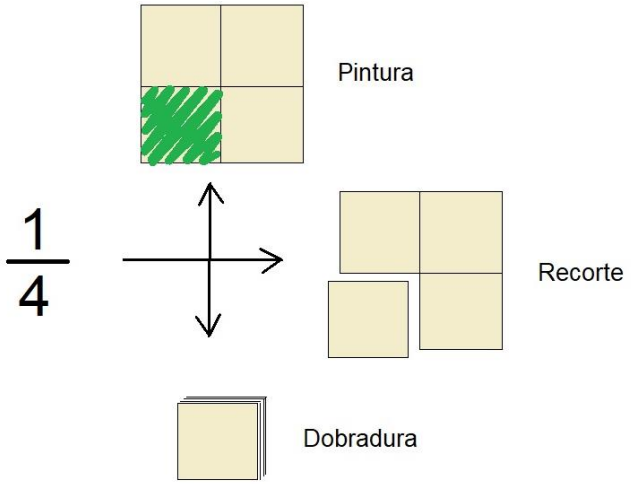
Para a definição das frações e percentuais que poderiam ser representados pelo manipulável, levamos em conta uma das habilidades descritas na BNCC e já esperada para os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental:

> (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (Brasil, 2017, p. 295).

O procedimento resolutivo associado ao material consistia, basicamente, em escolher o papel cuja representação impressa em sua superfície estivesse subdividida em um número de partes correspondente ao denominador da fração que se desejava converter.

Em seguida, destacar, nesse papel, o número de partes que correspondesse ao numerador através de pinturas, dobraduras ou recortes, conforme exemplo ilustrado na figura 41, produzindo uma representação figurativa da fração numa base material e manipulável.

Figura 41 - Produção de representação figurativa numa base material manipulável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

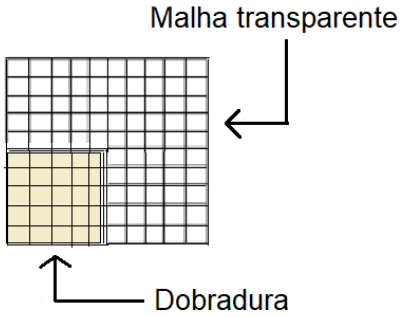
Tal conversão do registro numérico fracionário para o registro figural na base material poderia ser realizada pela aplicação direta de uma regra de correspondência como a dupla contagem, por exemplo.

As pinturas, dobraduras ou recortes seriam modificações que poderiam ser realizadas no material para que, durante a sobreposição, possibilitassem uma melhor visualização da relação parte-todo. No entanto, tais modificações seriam produzidas apenas se o participante julgasse importante para ajudar na visualização das partes destacadas em relação ao todo.

A partir de Duval (2011, p. 88), podemos inferir que ao dobrar ou separar partes da base material para destacar partes da representação figurativa nela impressa o participante operaria uma divisão mereológica, já que tal tipo de tratamento tem como particularidade o fato de poder ser, nas palavras do autor, “realizada por manipulações sobre objetos materiais”.

No passo seguinte, o participante deveria colocar sobre a representação produzida em papel, a representação figurativa do retângulo subdividida em cem partes iguais, impressa no material de superfície transparente (malha quadriculada transparente), conforme ilustrado na figura 42.

Figura 42 - Sobreposição de representações no material manipulável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse momento, aplica-se outra regra de correspondência, ou seja, o número de subfiguras ou quadradinhos da malha que equivale à parte destacada na representação produzida corresponde também ao número percentual equivalente.

Portanto, no exemplo que estamos ilustrando, o participante deveria contar vinte e cinco subfiguras ou quadradinhos e, finalmente, concluir que a representação numérica percentual resultante da conversão seria 25%.

A malha quadriculada transparente teria, nesse caso, a função de, a partir da sobreposição, revelar a equivalência entre um dado número de centésimas partes e outras frações do inteiro, tais como meios, quartos, quintos e décimos.

Estudos como os de Duarte (1987), Araújo (1987/88), Nacarato (2005) e Passos (2006) já destacaram que a utilização do material manipulável, quando mal planejada, pode afetar negativamente a aprendizagem. Nesse sentido, a seleção dos manipuláveis que serão usados em sala de aula deve considerar, sobretudo, sua adequação para a compreensão dos conceitos estudados, ou seja, a "distância existente entre o material concreto e as relações matemáticas que temos a intenção que eles representem" (Passos, 2006, p.80).

Outra situação indesejável, e que também pode decorrer da má utilização desses recursos, é o que Brousseau (1996) chamou de *escorregamento metacognitivo*, em que a técnica ou o recurso utilizado para resolver um dado problema é tomado como sendo o próprio objeto de estudo, perdendo-se de vista o verdadeiro conhecimento que se pretendia desenvolver.

Assim, é importante que o uso do manipulável não seja visto pelo professor como um fim, e sim como um meio, sobretudo, para a introdução de conceitos matemáticos mais complexos. Nesse sentido, o trabalho com tais recursos será bem

sucedido se essas representações concretas “são abandonadas pelos próprios alunos logo que eles compreendem, pois sua utilização lhes parece um procedimento longo e custoso” (Duval, 2011, p. 130).

Quanto ao tipo de manipulável a ser usado, Reys (apud Passos, 2006, p. 88) definiu alguns critérios que poderiam ajudar nessa escolha. A partir desses critérios, fizemos uma análise a priori do material que utilizaríamos na pesquisa:

- *Os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas.*

No que concerne ao significado parte-todo, em que limitamos a pesquisa, e entendendo o termo “personificação” como a expressão clara do conceito trabalhado, acreditamos que o material deva favorecer uma boa percepção dessa relação, ou seja, da identidade da fração ou do número percentual enquanto tamanho da parte em relação a um todo.

- *Os materiais devem representar claramente o conceito matemático.*

O conceito de porcentagem está fortemente relacionado à razão entre um dado número e o número 100. No que concerne ao sentido parte-todo, esse 100 é tomado como o todo subdividido em 100 partes iguais e, desse modo, a malha quadriculada 10 x 10, que compõe o material, parece ser uma boa representação para favorecer essa percepção.

- *Os materiais devem ser motivadores.*

A dinâmica exigida na realização das conversões, que deve contemplar dobraduras e sobreposições, além de outras manipulações, pode fomentar uma atmosfera instigante e desafiadora durante a intervenção, despertando o interesse dos estudantes envolvidos na pesquisa.

- *Os materiais, se possível, devem ser apropriados para serem usados quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de conceitos.*

O trabalho com o manuseio de papel, via dobraduras e sobreposições, parece mais apropriado nos primeiros anos do ensino fundamental, sobretudo, para a aprendizagem da representação fracionária em seu significado parte-todo. No entanto, é possível usar o material, também, em etapas posteriores da escolaridade, principalmente, na abordagem de equivalências referenciais entre diferentes frações e de conversões envolvendo outros registros simbólico-numéricos.

- *Os materiais devem proporcionar uma base para a abstração.*

A produção de representações a partir do manipulável pode fomentar o processo de abstração, sobretudo, no que tange às partes representadas em relação ao todo. Nos termos da TRRS, tais representações semióticas podem ser interiorizadas, tornando-se “representações mentais úteis ou pertinentes em matemática” (Duval, 2003, p.31).

E, finalmente:

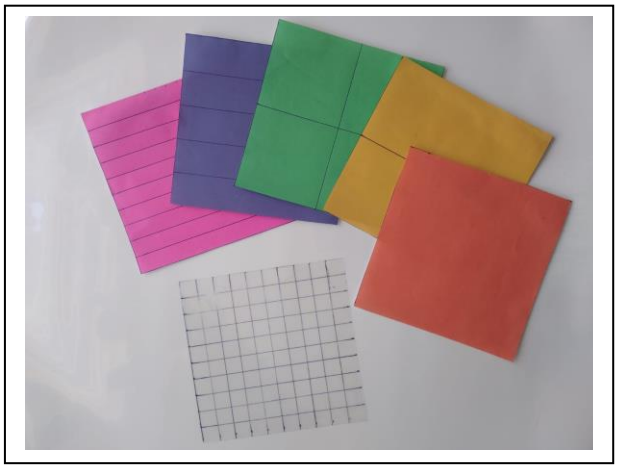
- *Os materiais devem proporcionar manipulação individual.*

Essa também é uma característica do material elaborado para esse trabalho. Sua utilização pode ser feita individualmente ou por vários participantes ao mesmo tempo.

Assim, o manipulável utilizado, embora apresentasse limites que o tornavam inapropriado para a abordagem de outros aspectos relacionados aos números racionais, tais como a exploração dos vários significados para os registros fracionários e o trabalho com quantidades de grandezas discretas, deveria ser suficiente para atender aos interesses de nossa investigação.

A figura 43 apresenta o material confeccionado pelo pesquisador, a partir das características citadas no início desse tópico.

Figura 43 - Material manipulável confeccionado para a pesquisa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O conjunto era composto por cinco representações quadrangulares, medindo 15 cm x 15 cm, produzidas em papel com marcações e cores diferentes para representar todo (laranja), meios (amarelo), quartos (verde), quintos (roxo) e décimos (rosa). Completava o material uma folha de acetato, de mesmas dimensões, em cuja superfície transparente foi desenhada uma malha quadriculada 10 x 10.

5.10 Caminhos para conversão nos grupos A e B

Admitimos, aqui, a hipótese de que diferentes caminhos adotados na resolução das conversões entre os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional implicariam diferentes apreensões, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, relacionadas ao objeto representado.

Para o teste de tal hipótese, fizemos variar os caminhos para a conversão *fração → percentual* trabalhados nos dois grupos de participantes: o Grupo A explorou os tratamentos simbólico-numéricos e o Grupo B utilizou material manipulável.

Assim, como já dissemos, tivemos duas situações experimentais: participantes realizando a conversão *fração → percentual* por meio das escritas simbólicas e participantes realizando a conversão *fração → percentual* por meio de material manipulável.

5.10.1 Caminho para conversão adotado no Grupo A

Há várias maneiras de transformarmos uma representação numérica fracionária em uma representação numérica percentual por meio de tratamentos efetuados nessas escritas simbólicas. Para a intervenção realizada com os participantes do Grupo A, decidimos optar pelo caminho resolutivo abordado em dois instrumentos de apoio (livro didático e material complementar) utilizados pelos professores e alunos de ambas as turmas no ano anterior (5º ano). Nossa pretensão era adotar uma forma de realizar essa conversão que não fosse diferente da que fora abordada, anteriormente, em sala de aula.

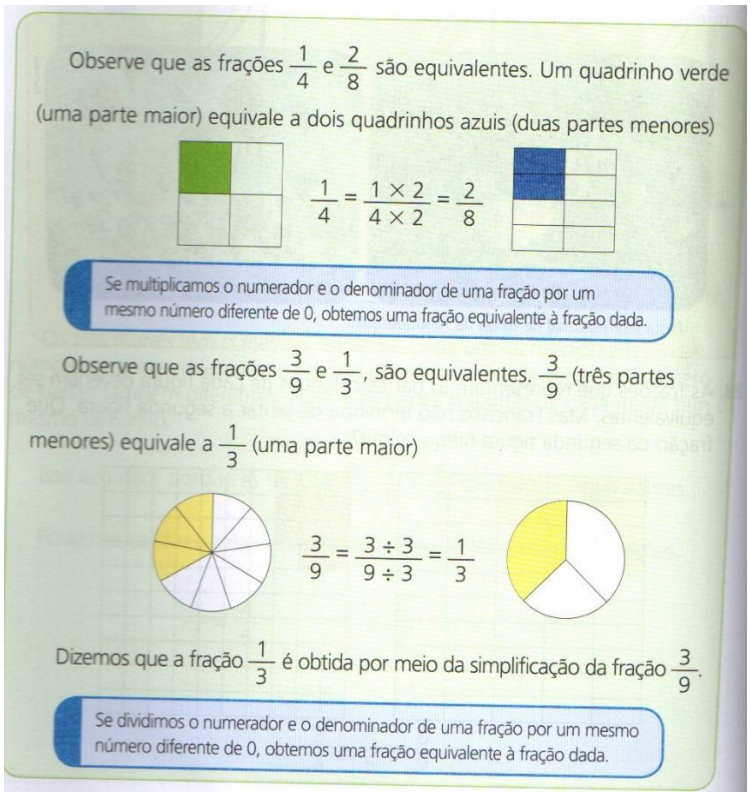
A representação numérica percentual era abordada na quarta e última unidade do livro didático[8] adotado para o 5º ano e apresentada como uma maneira de escrever a fração decimal de denominador 100. Usando exemplos como 70/100 = 70% e 60/100 = 60%, o autor destacava que o símbolo % representa o traço da fração e os zeros do denominador 100. As conversões entre esses dois registros do número racional propostas nas atividades privilegiavam, quase que totalmente, a passagem

[8] Youssef, Antonio Nicolau
Meu livro de matemática, 5º ano : ensino fundamental / Antonio Nicolau Youssef, Oscar Augusto Guelli. - - 1. Ed. - - São Paulo : Editora AJS, 2017. - - (Coleção meu livro de matemática)

da fração centesimal, no registro simbólico numérico ou no registro figurativo, para o registro numérico percentual.

Embora não tenhamos encontrado, em todo o livro, a apresentação de um caminho para a conversão de representações fracionárias não centesimais em representações percentuais, supomos que o processo mais óbvio, a partir dos conceitos trabalhados nessa obra, deveria passar pela identificação da fração centesimal equivalente à fração que se desejava converter, já que a noção de equivalência entre frações era trabalhada na unidade anterior, como vemos nesse trecho apresentado na figura 44.

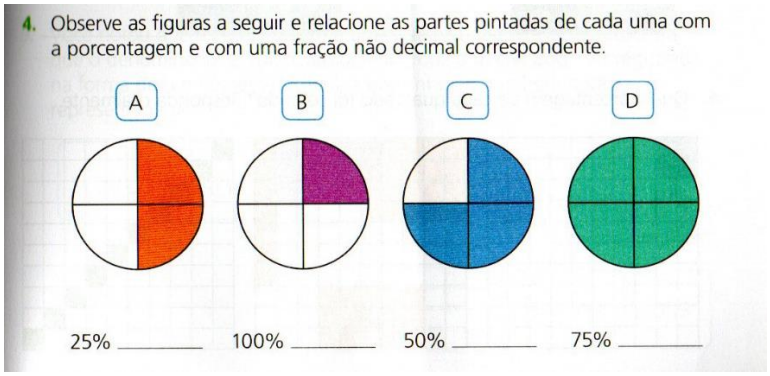
Figura 44 - Trecho do livro didático adotado no 5° ano abordando frações equivalentes.



Fonte: Youssef e Guelli (2017).

A figura 45, contudo, ilustra uma atividade em que a proposta era realizar conversões de representações numéricas percentuais em representações numéricas fracionárias não centesimais. Para tanto, apresentava representações intermediárias figurativas para apoiar os estudantes nessas transformações.

Figura 45 - Trecho do livro didático adotado no 5° ano com atividade de conversão.



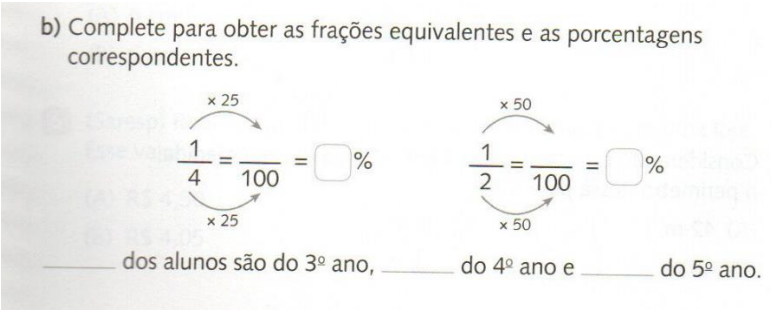
Fonte: Youssef e Guelli (2017).

Para a resolução da atividade, acreditamos que os alunos poderiam converter as representações figurativas em representações numéricas da fração a partir da técnica de dupla-contagem[9].

Por sua vez, o livro do Projeto Aprova Recife[10], adotado como material complementar, apresentava um caminho de conversão que demandava a determinação da fração centesimal equivalente à fração inicial, para se chegar ao registro percentual pretendido.

Assim como observado na obra anterior, o método para determinar essa equivalência passava por encontrar um número que pudesse dividir ou multiplicar o denominador da fração inicial transformando-o no denominador 100. Em seguida, repetia-se a operação com o numerador, conforme apresentado na figura 46.

Figura 46 - Atividade de determinação da fração centesimal.



Fonte: Aprova Brasil (2016).

[9] A dupla contagem pode ser usada em conversões envolvendo figuras perceptuais e representações numéricas fracionárias e, segundo Carraher, Schliemann (1992), consiste na correspondência direta entre o número de partes em que a figura foi dividida e o número de partes pintadas ou hachuradas com, respectivamente, o denominador e o numerador da fração.

[10] Aprova Brasil: matemática: ensino fundamental: anos iniciais/ organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. - 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2016. – (Aprova Brasil) (p. 85).

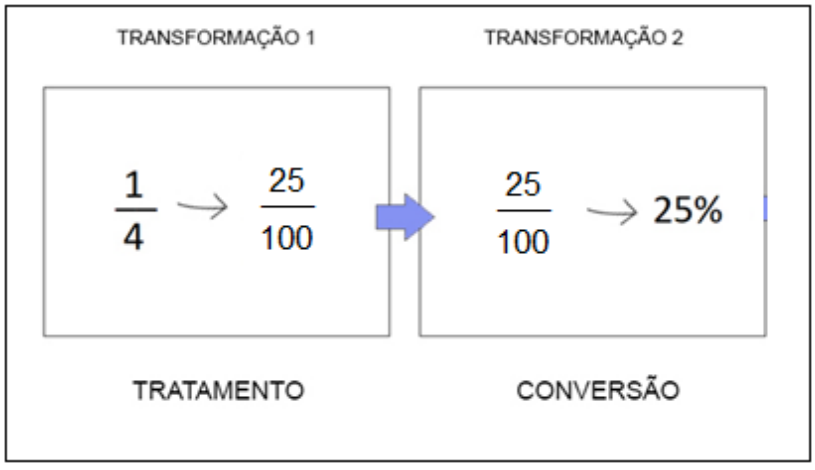
Aqui, o fator de proporcionalidade, termo usado por Lima et al (2006), já estava dado para as duas frações iniciais, ou seja, k = 25 e k = 50. Nesse caso, os alunos deveriam perceber que k será sempre o número que ao multiplicar ou dividir o denominador da fração inicial resultará em 100.

A partir das observações realizadas tanto no livro didático quanto no material complementar, pudemos definir o caminho adotado, nessa pesquisa, para as conversões por meio das escritas simbólicas.

Assim, o caminho para converter uma representação numérica fracionária numa representação numérica percentual, trabalhado com os participantes do grupo A, consistiu em determinar, primeiramente, a fração *a' / b'*, equivalente à fração *a / b* no registro de partida, em que *b' = 100*. Para tanto, dever-se-ia encontrar *n*, diferente de zero, tal que *n . b = 100*. A fração centesimal ***a' / b'***, equivalente à fração inicial *a / b*, seria dada por *n . a / n . b*. Em seguida, aplicar-se-ia a relação ***a' / b' = a' %*** para concluir a conversão.

Esse caminho para a conversão no sentido *fração → percentual* demandaria, portanto, duas transformações, sendo um tratamento e uma conversão, conforme o esquema apresentado na figura 47.

Figura 47 - Transformações de registros realizadas no caminho resolutivo com escritas simbólicas para a conversão no sentido *fração → percentual*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A transformação 1 é do tipo tratamento e, como vimos, consiste na determinação da fração centesimal equivalente à fração inicial. A conversão acontece, de fato, na transformação 2, e é realizada pela aplicação direta de uma regra de

correspondência surgida devido à congruência semântica entre a fração de denominador 100 e o registro percentual.

É importante notar que, nesse caminho de conversão, é o tratamento a transformação que apresenta o maior grau de não-congruência semântica entre as representações envolvidas. Desse modo, percebemos que duas representações, referencialmente equivalentes e pertencentes ao mesmo grupo de registros, podem, em alguns casos, apresentar uma opacidade tão grande quanto as observadas entre registros de tipos distintos. Em outras palavras, o fenômeno de não-congruência semântica também ocorre nos tratamentos.

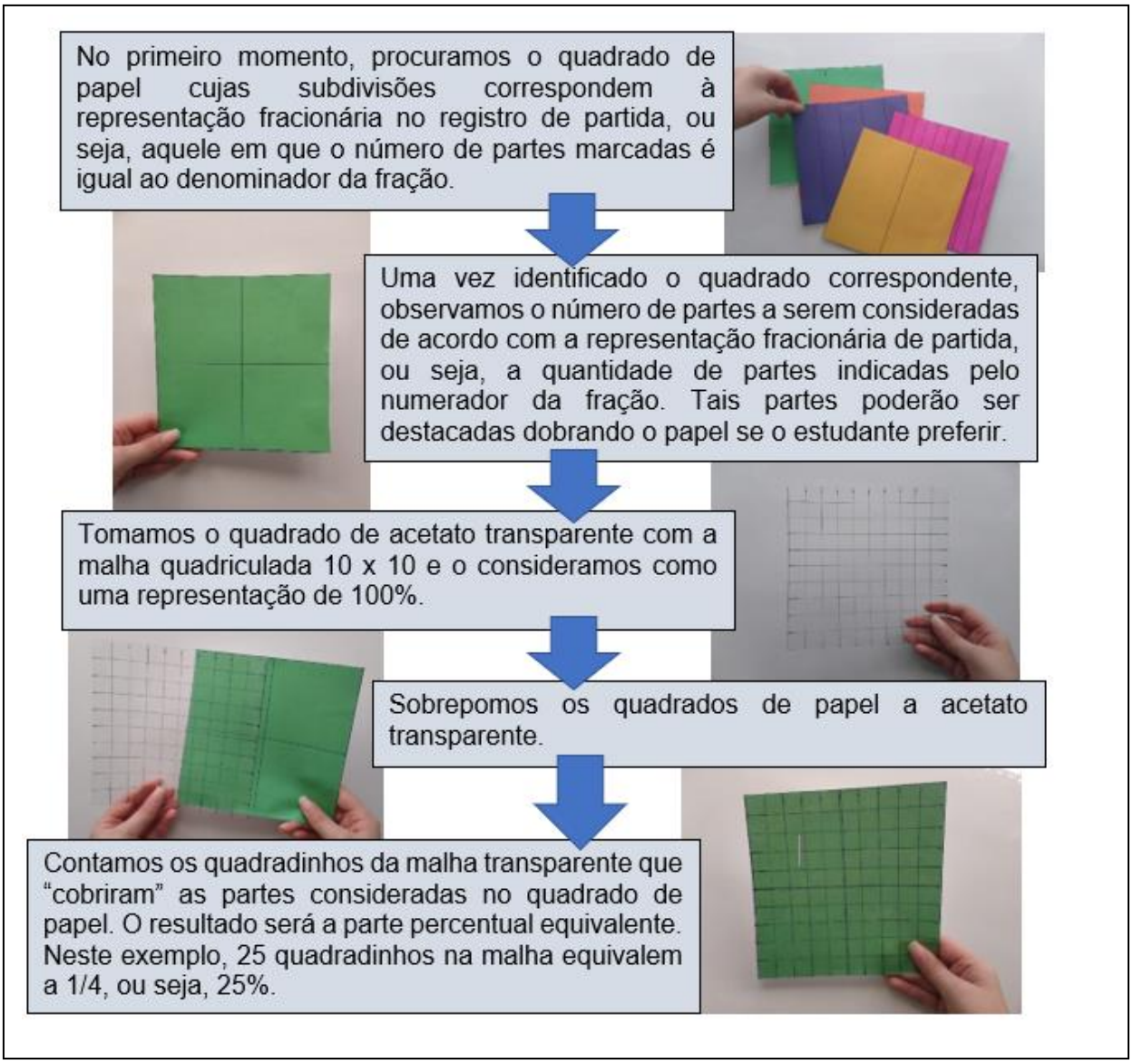
Por fim, é certo que o caminho apresentado favorece a conversão, ao elevar, consideravelmente, a transparência entre as representações envolvidas na transformação 2. No entanto, será a transformação 1 que, nesse processo, corresponderá à parte mais custosa, do ponto de vista cognitivo.

5.10.2 Caminho para conversão adotado no grupo B

O caminho para a realização das conversões trabalhado com os participantes do grupo B contou, exclusivamente, com o emprego do material manipulável utilizado nessa pesquisa.

O fluxograma apresentado na figura 48 descreve a maneira como o manipulável pode ser utilizado para auxiliar na resolução das conversões. Para tanto, tomamos, como exemplo, a passagem da representação 1/4 para a representação 25%.

Figura 48 - Conversão com o manipulável.

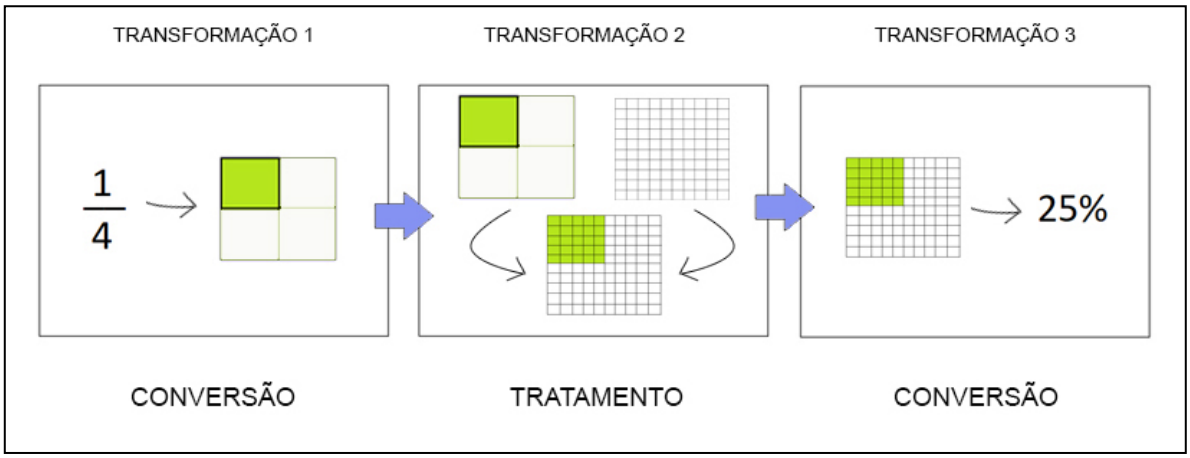


Fonte: Elaborada pelo autor.

Como indica a figura, esse manipulável está associado a um caminho resolutivo que consiste, simplesmente, na sobreposição de representações figurativas para a identificação da fração centesimal equivalente à fração que se quer converter. Uma vez descoberta a fração centesimal equivalente, a conversão para o registro percentual ocorre de forma imediata.

O caminho resolutivo associado ao material manipulável para a conversão no sentido *fração → percentual* implica, portanto, três transformações envolvendo registros simbólico-numéricos e registros figurativos, sendo duas conversões e um tratamento. Na figura 49, temos um esquema apresentando a sequência das transformações realizadas com o manipulável, bem como o tipo de cada uma delas:

Figura 49 - Transformações de registros realizadas no caminho resolutivo associado ao manipulável para a conversão no sentido *fração → percentual*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como vemos, a transformação 1 é do tipo conversão e envolve uma representação numérica fracionária no registro de partida e uma representação figurativa, produzida com o manipulável, no registro de chegada.

Silva (2018), estabeleceu seis graus de não-congruência para as conversões envolvendo representações figurativas no registro de partida e representações numéricas fracionárias no registro de chegada e classificou como grau 1, ou seja, como baixo grau de não-congruência semântica, aquelas cuja representação de partida era o que chamou de “figuras perceptuais”. Segundo a autora, as figuras perceptuais são “aquelas particionadas explicitamente em subfiguras ou partes de áreas congruentes e formas geométricas homogêneas, sem necessidade de recomposição das partes” (Silva, 2018, p.77).

Uma figura perceptual pode ser um círculo ou um polígono representando o inteiro contínuo dividido em partes justapostas, de áreas e formas iguais, por demarcações internas visíveis, sendo algumas delas destacadas por diferente cor ou hachura (Silva, 2018).

Já nos quadrados de papel que compõem o manipulável, todas as partes têm a mesma cor e o destaque dado a algumas delas pode ser feito mentalmente ou por dobradura. A partir de Silva (2018), podemos definir as frações obtidas com esse material como representações concretas de figuras perceptuais e a transformação 1, no caminho resolutivo associado ao manipulável, como uma conversão com baixo grau de não-congruência semântica. Neste caso, a técnica de dupla-contagem se

oferece como uma alternativa eficiente para relacionar representações numéricas fracionárias com este tipo de representação figurativa.

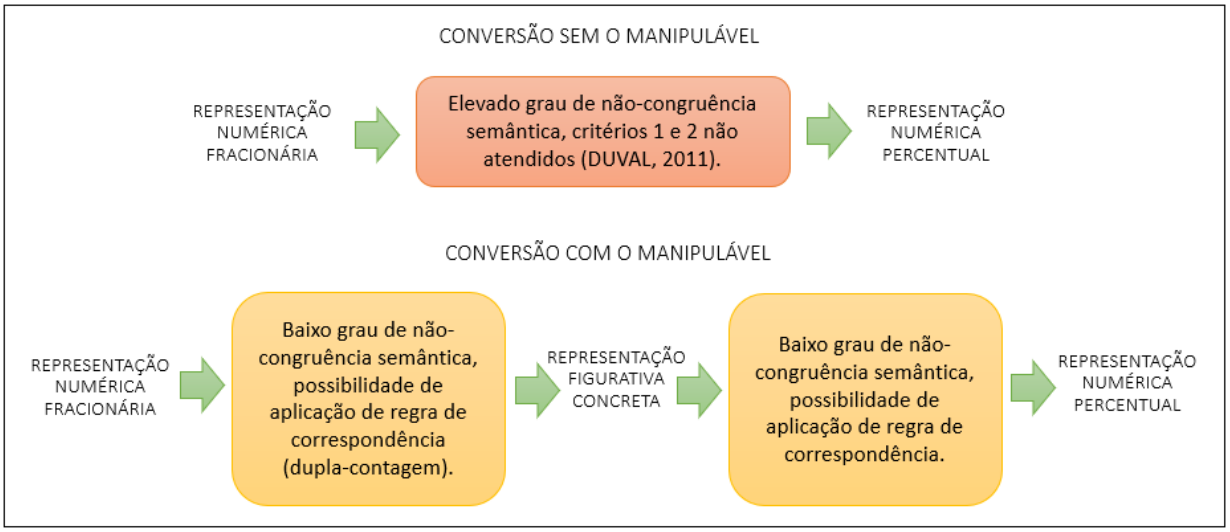
A transformação 2 é um tratamento, pois não implica mudança do tipo de registro, nem do objeto representado, embora produza alterações no interior da representação figurativa concreta original com a sobreposição da malha quadriculada transparente.

A transformação 3 é uma conversão que envolve a passagem da representação figurativa, que resultou da sobreposição, para a representação numérica percentual do número racional em questão. Como vimos (figura 49), esta conversão finaliza o processo resolutivo com o material e é realizada a partir da contagem das partes centesimais (quadradinhos da malha quadriculada) que ocupam as partes consideradas no quadrado de papel. O número de partes contadas é a parte percentual equivalente, ou seja, **n** partes contadas representam **n%**.

Percebe-se que a conversão, neste caso, pode ser realizada pela aplicação direta de uma “regra de correspondência” (Duval, 2003), a saber, a representação numérica percentual pode ser determinada pela simples contagem das partes consideradas na representação figurativa. Para Duval (2003), este tipo de conversão aproxima-se de uma simples codificação, ou seja, não demanda um alto custo cognitivo para a sua realização, pois é suficiente que se aplique uma regra de correspondência fazendo uma espécie de tradução.

Quanto ao fenômeno de variação de congruência e não-congruência semântica, percebemos, portanto, que a inclusão das representações figurativas produzidas com o manipulável deve resultar na diminuição do grau de não-congruência nas transformações realizadas, conforme apresentado na figura 50.

Figura 50 - Grau de não-congruência semântica das conversões sem o manipulável e com o manipulável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Duval (2009, p.19), “toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso, conforme o grau de não-congruência”. Nesse caso, tais conversões podem “criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente” (Duval, 2012, p. 284). Isso faz com que a coordenação entre as diferentes representações, em algumas situações, pareça impossível e não aconteça de forma rápida e espontânea.

No processo resolutivo associado ao manipulável, entretanto, temos duas conversões com baixo grau de não-congruência e a possibilidade de adoção de regras de correspondência em ambas. Nesse sentido, a inclusão do manipulável e a diminuição do grau de não congruência entre os registros poderia favorecer o aumento na taxa de sucesso. Cumpria-nos, no entanto, verificar qual o tipo de sucesso atingido pelos participantes.

Para Duval (2011), as representações figurativas são registros não discursivos e, portanto, não podem ser apreendidos de forma linear. A apreensão de tais registros ocorre de modo simultâneo, ou seja, unidades básicas figurais, tais como traços, formas, cores e tamanhos são visualizados ao mesmo tempo e não obedecem a uma ordem de leitura.

Nesse sentido, a capacidade de “ver” as figuras é fundamental para que o indivíduo possa desenvolver o seu raciocínio a partir de tais representações. Estas

apreensões podem ser do tipo perceptiva, discursiva, operatória e sequencial (Duval, 2012).

A apreensão perceptiva pode ser evidenciada, sobretudo, quando há congruência semântica entre uma dada figura e o enunciado de um problema, por exemplo. Nestes casos, ao observar a figura o indivíduo a reconhece, de forma imediata, espontânea, automática, como uma representação do mesmo objeto representado em linguagem natural no enunciado, sem a necessidade de uma análise mais atenta dos elementos figurais (Duval, 2012b).

A apreensão discursiva ocorre quando o indivíduo é capaz de observar a figura e, a partir desta visualização, identificar e interpretar as suas propriedades.

A apreensão operatória faz com que o indivíduo seja capaz de realizar os tratamentos figurais, modificando ou reorganizando uma figura inicial, já que, segundo Duval (2011), as representações figurativas são multifuncionais, ou seja, possuem tratamentos que lhes são próprios e não se prestam a utilização de algoritmos.

A apreensão sequencial, por sua vez, permite que o indivíduo realize atividades em que precisa construir ou descrever uma representação figurativa. Tal apreensão é necessária para realizar conversões cujos registros de partida são representações numéricas fracionárias e os de chegada são figuras, por exemplo.

Voltando ao esquema (figura 49), vê-se que a transformação 1 requer apenas a apreensão perceptiva, já que, para selecionar a representação do todo cujo particionamento é adequado e destacar mentalmente ou por dobradura, as partes a serem consideradas de acordo com a representação numérica fracionária, o estudante só precisa aplicar a técnica de dupla-contagem.

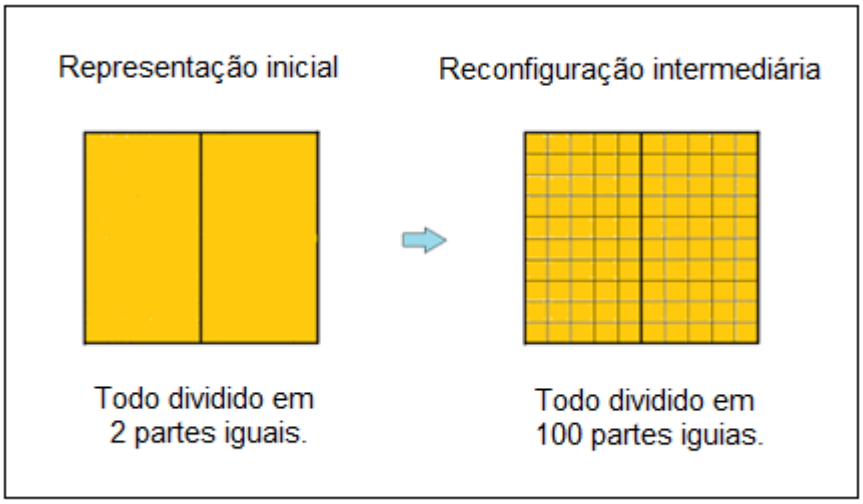
A transformação 2, por sua vez, embora implique a modificação de uma representação figurativa, não caracteriza a apreensão operatória, pois não cabe ao estudante realizar quaisquer tratamentos, restando-lhe, apenas, a observação da figura após a sobreposição. Isso porque a sobreposição da malha quadriculada transparente já produz um novo particionamento, ou seja, uma nova divisão de partes, alterando a representação figurativa inicial.

Essa divisão ou inclusão de partes na figura não implica, porém, seu aumento, diminuição ou deformação. Segundo Duval (2012c), esse tipo de transformação realizada, na figura geométrica, chama-se “mereológica”, já a operação que produz tal transformação é denominada de “reconfiguração intermediária”.

A reconfiguração intermediária é o particionamento de um todo representado por uma figura geométrica em partes ou subfiguras de mesma forma geométrica (homogêneas) ou de formas geométricas diferentes (heterogêneas). Com esse tipo de tratamento é possível observar, entre outras coisas, a equivalência entre um dado número de partes reconfiguradas e um outro número de partes da figura original (Duval, 2012c).

Do mesmo modo, com a sobreposição das representações figurativas concretas do manipulável, têm-se uma reconfiguração intermediária em que se pode visualizar, em relação ao todo, o número de partes centesimais que é equivalente ao número de partes da representação inicial, como vemos na figura 51.

Figura 51 - Reconfiguração intermediária no manipulável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a transformação 3 também é resultado da aplicação de uma regra de correspondência e, nesse caso, a apreensão perceptiva é suficiente.

Assim, no que concerne às apreensões a partir das representações figurativas utilizadas, podemos dizer que a adoção do caminho de conversão com o material manipulável não trazia garantia alguma de que os participantes avançariam para além da apreensão perceptiva.

Outra observação a priori é que o caminho resolutivo com o material se restringe ao significado parte-todo, o que se entende como uma limitação para uma aprendizagem mais global do número racional já demonstrada em pesquisas tais como a de Soares (2013) que, ao investigar o conhecimento de estudantes do quarto ano a partir de uma sequência didática com o uso de material manipulável, concluiu

que, embora tenha gerado resultados positivos, não se deve trabalhar apenas com o significado parte-todo.

Diante disso, concluímos que o material utilizado nessa pesquisa apresenta limitações para uma abordagem mais ampla do número racional. No entanto, nessa pesquisa, quisemos investigar se a experiência tátil-visual proporcionada pela manipulação desses materiais, por mais simples que estes fossem, quando utilizados para produzir representações auxiliares numa conversão, poderia resultar em outras aprendizagens relacionadas ao objeto matemático representado.

Nosso intuito era de que, ao final da pesquisa, a análise dos resultados pudesse trazer elucidações a esse respeito. Assim, esperávamos que, em princípio, o manipulável utilizado fosse tão somente suficiente para permitir que os participantes realizassem as conversões no sentido *fração → percentual* a partir do caminho resolutivo a ele associado.

5.11 Análise e interpretação dos resultados

Toda a intervenção realizada pelo pesquisador, incluindo o emprego do material manipulável e dos tratamentos com escritas simbólicas, limitou-se a um recorte bem específico na abordagem dos números racionais: a conversão que tem a representação numérica fracionária como registro de partida e a representação numérica percentual como registro de chegada.

Portanto, como já dissemos, não foram explorados com os participantes, em ambos os grupos, os demais aspectos relacionados aos números racionais. Nesse sentido, o que pretendíamos verificar era a eventual ocorrência de aprendizagens que não foram intencionalmente fomentadas na intervenção. Em outras palavras, buscamos investigar se existiam e quais eram as apreensões relacionadas ao objeto representado surgidas tão somente a partir dos caminhos de conversão trabalhados em cada grupo.

Para tanto, o Instrumento Avaliativo explorou outros conhecimentos não trabalhados na intervenção, tais como: a conversão no sentido *percentual → fração*, com variados graus de não-congruência semântica; a percepção do tamanho da parte em relação ao todo e a comparação entre diferentes racionais em suas representações fracionárias e percentuais. A intenção, como dissemos, era observar, com relação ao conceito de número racional, o que não foi diretamente abordado na

intervenção, mas foi deduzido pelos participantes a partir da utilização das escritas simbólicas e do material manipulável para realizar as conversões.

Para as conclusões relativas ao desempenho dos grupos do ponto de vista matemático, os resultados dos instrumentos aplicados foram analisados quantitativamente. Assim, o sucesso ou insucesso dos participantes esteve relacionado, nesse caso, ao índice de acertos nas atividades propostas. Já para as interpretações referentes ao desempenho dos grupos do ponto de vista cognitivo, procuramos identificar, sobretudo a partir das falas dos participantes, indicativos de apreensões conceituais do objeto a partir de sua representação.

Segundo Duval (2003, p. 31), "as representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas". Assim, no que tange, principalmente, aos participantes que vivenciaram a experiência com o manipulável, observamos as suas estratégias para a resolução das conversões e demais atividades do instrumento avaliativo sem a possibilidade de uso desse material. Desse modo, buscamos analisar a influência dessa manipulação anterior no que concerniu a eventuais ocorrências de representações mentais evocadas pelos participantes na formulação de suas respostas.

Com relação à análise dos dados oriundos das entrevistas, consideramos que as falas dos participantes foram, do ponto de vista cognitivo, reveladoras. Buscamos identificar a partir dos registros em língua natural[11], os raciocínios mobilizados para o desenvolvimento de seus caminhos resolutivos.

Contudo, vale considerar que "as representações internas são as representações, pertencendo a um sujeito e que não são comunicadas a um outro pela produção de uma representação externa" (Duval, 2009, p. 42). Também é importante saber que "pode haver uma grande diferença entre as representações mentais de um sujeito e as representações semióticas que ele produz para exprimir suas representações mentais" (Duval, 2009, p. 45). Desse modo, é bem provável que a utilização de cada caminho de conversão tenha gerado muitas internalizações, as quais são incomunicáveis, e, portanto, não percebíveis a partir das entrevistas realizadas com os participantes nessa pesquisa.

[11] Segundo Duval (2011, p. 74), o registro de representação semiótica em língua natural também corresponde a "interações em classe ou, mais amplamente, todas as explicações verbais dos alunos".

Na discussão dos resultados, utilizamos a transcrição apenas dos trechos e fragmentos das falas que julgamos pertinentes para as conclusões.

No capítulo a seguir, descrevemos o experimento piloto realizado e que serviu para analisarmos, preliminarmente, a influência da utilização do material manipulável para a conversão *fração* → *percentual* na produção de representações mentais e, especificamente, na dedução de um caminho para a conversão no sentido oposto.

6 EXPERIMENTO PILOTO

Nesse trabalho de pesquisa, dedicamo-nos à investigação de dois diferentes caminhos para a realização da conversão *fração → percentual*: um a partir dos tratamentos simbólico-numéricos e outro a partir da utilização de um manipulável.

Por considerarmos esse último um caminho para conversão um tanto quanto incomum e, portanto, não sabermos como os participantes poderiam reagir à proposta de utilização do material produzido, realizamos um experimento piloto.

Buscando um maior aprofundamento analítico e em concordância com os objetivos desse trabalho, delimitamos nossa observação às conversões envolvendo apenas os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais, em ambos os sentidos: *fração → percentual* e *percentual → fração*.

O estudo foi desenvolvido com uma criança de 10 anos de idade, estudante do 5° ano de uma escola da rede privada de ensino da cidade do Recife. O experimento ocorreu em encontro único, quando a estudante vivenciava o período de férias em julho de 2021, e durou cerca de 1 hora.

6.1 Instrumentos usados no experimento: atividades 1 e 2

No experimento, utilizamos dois instrumentos que chamamos de atividade 1 e atividade 2. Para essas atividades, escolhemos 10 conversões envolvendo os dois registros foco de nossa pesquisa, o registro numérico fracionário e o registro numérico percentual. Escolhemos as conversões para as atividades buscando atender a três critérios:

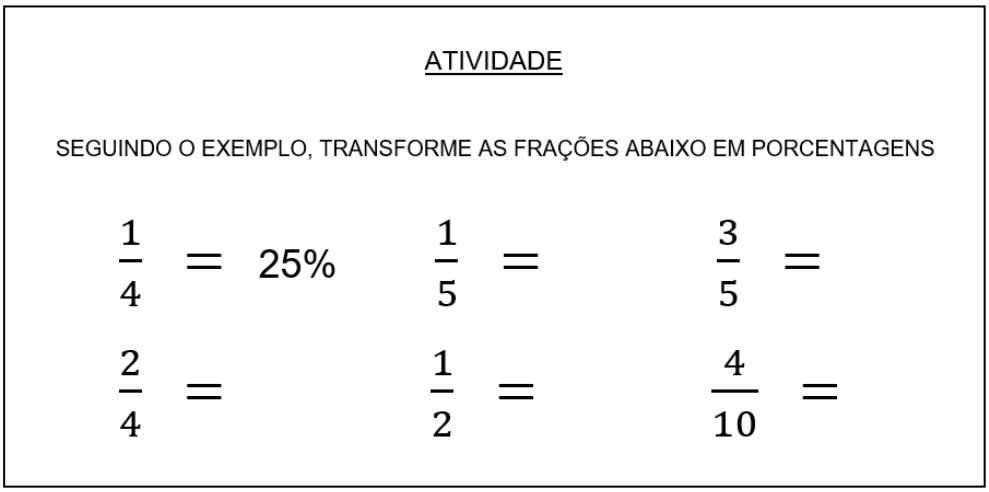
- Deveriam envolver frações e percentuais possíveis de serem representadas pelo manipulável utilizado.

- Deveriam explorar ambos os sentidos da conversão.

- Deveriam explorar diferentes níveis de não-congruência semântica nas conversões.

A atividade 1, conforme vemos na figura 52, propunha conversões que indicavam representações numéricas fracionárias como registros de partida e demandavam a determinação de representações numéricas percentuais como registros de chegada. A conversão proposta obedecia, portanto, o sentido *fração → percentual*.

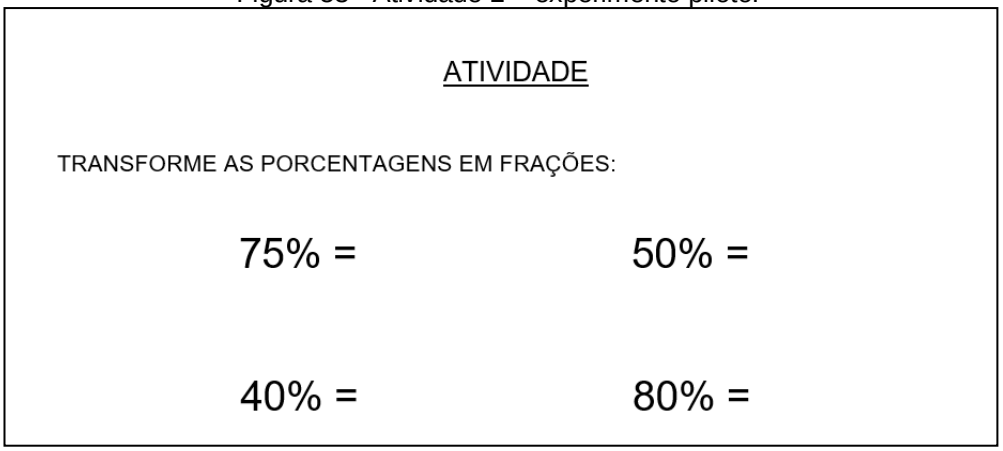
Figura 52 - Atividade 1 – experimento piloto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já, na atividade 2, as conversões propostas estavam no sentido *percentual → fração* (Figura 53). Havia, ainda, conversões envolvendo dois racionais não explorados na atividade 1, a saber, 75% e 80%.

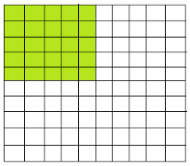
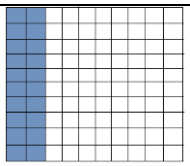
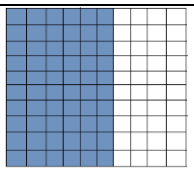
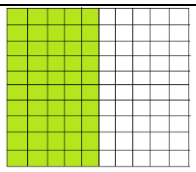
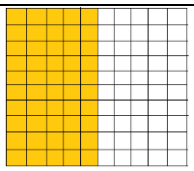
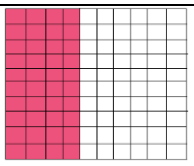
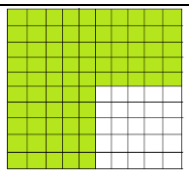
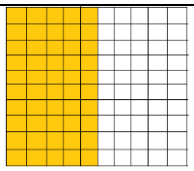
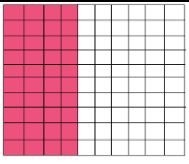
Figura 53 - Atividade 2 – experimento piloto.

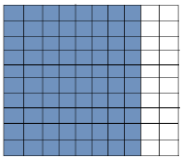


Fonte: Elaborada pelo autor.

O quadro 8 apresenta as conversões escolhidas para as duas atividades utilizadas no experimento em relação aos dois primeiros critérios citados anteriormente:

Quadro 8 - Conversões escolhidas para o experimento e possíveis representações figurativas com o manipulável.

	Representação de partida	Representação de chegada	Representação figurativa formada a partir de dobradura e sobreposição no manipulável
Atividade 1	$\frac{1}{4}$	Numérica percentual	
	$\frac{1}{5}$	Numérica percentual	
	$\frac{3}{5}$	Numérica percentual	
	$\frac{2}{4}$	Numérica percentual	
	$\frac{1}{2}$	Numérica percentual	
	$\frac{4}{10}$	Numérica percentual	
Atividade 2	75%	Numérica fracionária	
	50%	Numérica fracionária	
	40%	Numérica fracionária	

	80%	Numérica fracionária	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez verificada a possibilidade de representação das frações e percentuais com o material manipulável e a exploração de ambos os sentidos da conversão nas atividades, resta-nos a análise relacionada aos fenômenos de congruência e não-congruência dos registros envolvidos.

6.1.1 Variação de não-congruência nas atividades 1 e 2

No que concerne à variação de congruência e não congruência semântica entre as representações envolvidas, realizamos a análise das conversões propostas em ambas as atividades. Tal análise foi fundamental para que pudéssemos, posteriormente, avaliar se existiam e quais eram as vantagens resultantes da experiência da estudante com o material manipulável frente às dificuldades causadas por esse fenômeno.

A partir do que já havíamos discutido ao final do capítulo “Os números racionais”, pudemos caracterizar, quanto ao atendimento ou não dos critérios de congruência e não-congruência semântica estabelecidos por Duval (2011), as seis conversões propostas na atividade 1, conforme apresentado no quadro 9, a seguir.

Quadro 9 - Análise das conversões propostas na atividade 1 a partir dos critérios de congruência.

Representação de partida	Representação de chegada	Critérios de congruência	Atende?
$\frac{1}{4}$	25%	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
$\frac{1}{5}$	20%	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
$\frac{3}{5}$	60%	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
$\frac{2}{4}$	50%	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
$\frac{1}{2}$	50%	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
$\frac{4}{10}$	40%	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vemos que apenas o critério 3 é atendido nas conversões que foram propostas na atividade 1, o que indica um grau de não congruência semântica bastante considerável entre os registros envolvidos.

A conversão 4/10 → 40%, contudo, é a única a oferecer a possibilidade de relacionar semanticamente alguns elementos simbólicos que as constituem, ou seja, os algarismos 4 e 0 em ambas as representações. Isso pode, em algumas situações, favorecer o correto reconhecimento do mesmo objeto matemático em ambos os registros e, em outras, provocar equívocos, como já exemplificamos no caso das representações 2/3 e 23%, em que há uma aparente transparência entre os registros sem que haja, no entanto, a equivalência referencial. Tais situações podem ocorrer pois, segundo Duval (2012b), o nosso pensamento funciona espontaneamente no

sentido de manter a congruência semântica e essa tendência natural determina, para alguns indivíduos, a prevalência dos aspectos visuais em detrimento dos aspectos lógico-matemáticos.

Também consideramos todas as conversões propostas na atividade 2 como transformações envolvendo registros semanticamente não congruentes, pois, assim como ocorreu na atividade 1, apenas o critério que preconiza a mesma ordem linear das unidades de sentido foi observado. O quadro 10 apresenta a análise das conversões propostas na atividade 2 quanto ao atendimento ou não dos critérios estabelecidos por Duval (2011). A coluna das representações de chegada apresenta as frações que poderiam ser indicadas para responder a atividade 2.

Quadro 10 - Análise das conversões propostas na atividade 2 a partir dos critérios de congruência.

Representação de partida	Representação de chegada	Critérios de congruência	Atende?
75%	$\frac{3}{4}$	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
50%	$\frac{1}{2}$	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
40%	$\frac{2}{5}$	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim
80%	$\frac{8}{10}$	1-correspondência uma a uma	não
		2-univocidade semântica terminal	não
		3-mesma ordem das unidades de sentido	sim

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que a mudança no sentido da conversão, de *fração → percentual* para *percentual →fração*, no que concerne à análise a partir dos critérios de congruência semântica, não implicou alterações. Isto não significa que os custos cognitivos demandados para a resolução das conversões nas duas atividades sejam equivalentes, pois “para uma dupla de registros dado, os alunos poderão ter sucesso

nas conversões em um sentido e fracassarem sistematicamente para a conversão inversa" (Duval, 2015 p. 107).

Observa-se, na conversão 80% → 8/10, a coincidência de dois algarismos, 8 e 0, no interior das representações envolvidas, o que pode sugerir, como dissemos anteriormente, uma aparente transparência e, por consequência, a identificação do mesmo objeto representado.

Todo o processo realizado no experimento piloto pôde ser dividido em sete etapas: sondagem, apresentação do manipulável, atividade 1 com o manipulável, atividade 1 sem o manipulável, entrevista, atividade 2 sem o manipulável e entrevista final.

6.2 Sondagem

Nesta etapa, procuramos identificar qual era o conhecimento da estudante participante com relação às conversões propostas.

A partir de algumas perguntas preliminares e observações dos volumes 1 e 2 da coleção de livros didáticos[12] adotada pela escola e utilizados até o momento da realização do experimento, pudemos concluir que a aluna havia estudado frações no sentido parte-todo, sobretudo, as representações figurativas de quantidades contínuas, sua conversão para as representações simbólico numéricas e vice-versa. Havia também atividades realizadas e que envolviam conversões de representações figurativas de décimos e centésimos para a linguagem natural e para as suas respectivas representações numéricas fracionárias e decimais.

Observamos que o sentido operador foi trabalhado em exercícios envolvendo o cálculo de frações de quantidades discretas. O caminho resolutivo apresentado pelo livro didático, nesses casos, consistia em dividir o total de elementos considerados pelo denominador da fração e, em seguida, multiplicar este quociente pelo numerador.

Verificamos, ainda, que houve um trabalho de abordagem dos números decimais com atividades envolvendo a sua leitura, sua localização na reta numérica e sua organização no quadro valor de lugar.

[12] Observamos a coleção do Sistema Positivo de Ensino, cujos volumes 1 e 3 foram desenvolvidos por Angela Cordi et al. (2021) e os volumes 2 e 4 por Luciana Bononi Ricardo et al. (2021), para o 5° ano do ensino fundamental.

Portanto, até aquele momento, as conversões entre registros de representações semióticas pertencentes às escritas simbólicas não haviam sido propostas como atividade para a estudante.

Aplicamos o primeiro instrumento (atividade 1) e o resultado foi a total ausência de respostas. A estudante alegou que não sabia como resolver aquela atividade. Seu desconhecimento pode ser justificado pelo fato de que as representações percentuais, bem como as conversões que as envolviam, ainda não haviam sido trabalhadas em sala de aula, como parecem sugerir as observações que realizamos anteriormente.

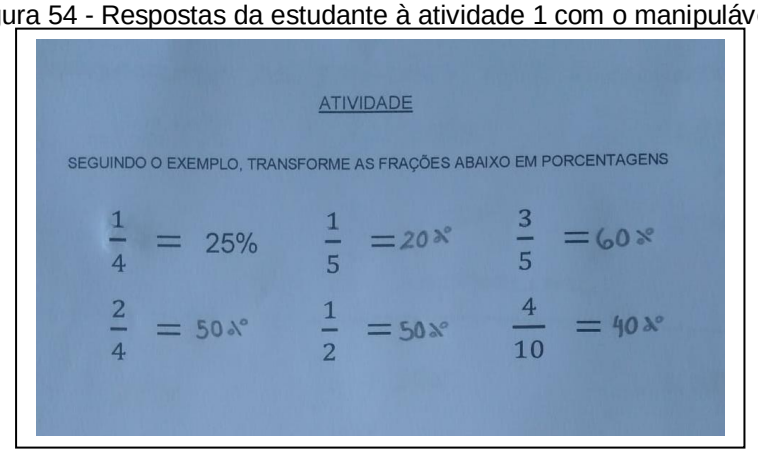
6.3 Apresentação do manipulável

A apresentação do manipulável, feita em seguida, foi acompanhada de uma breve exposição do modo como esse material poderia ser utilizado para auxiliar na resolução das conversões propostas. Para tanto, aproveitamos o exemplo 1/4 = 25%, apresentado na atividade 1, e explicamos o passo-a-passo, como já descrevemos anteriormente (figura 48).

6.4 Atividade 1 com o manipulável

Na etapa seguinte, pedimos que a estudante tentasse resolver as mesmas conversões propostas na sondagem (atividade 1) e que, dessa vez, utilizasse o manipulável como apoio. A figura 54 apresenta as suas resoluções.

Figura 54 - Respostas da estudante à atividade 1 com o manipulável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A participante adotou o caminho resolutivo apresentado com o material e, como vimos, obteve êxito em todas as suas respostas.

6.5 Atividade 1 sem o manipulável e entrevista

A parte final do experimento foi realizada sem a utilização do manipulável, pois, uma vez observada a sua utilidade para os acertos da estudante, cumpria-nos investigar, agora, se havia internalizações relacionadas à prática anterior com o material que pudessem auxiliar na resolução das conversões. Mais uma vez, a atividade 1 foi totalmente respondida de forma correta.

Na entrevista feita em seguida, a estudante descreve para o pesquisador como pensou para resolver as conversões sem a utilização do manipulável. O quadro 11 apresenta um trecho desse diálogo.

Quadro 11 - Trecho da entrevista relativo à conversão 2/4 → registro percentual.

Pesquisador: Para resolver esse probleminha aqui: dois quartos para transformar em porcentagem, você pensou primeiro em quê?

Estudante: No material. Eu estava tentando lembrar como era o material pra eu poder ter mais ou menos uma ideia pra eu conseguir responder.

Pesquisador: Tenta lembrar e conta pra mim como foi que você fez, desde o início, pra chegar nesse resultado de cinquenta por cento.

Estudante: Primeiro eu lembrei do papel verde que era um quadrado dividindo as quatro partes. Aí depois, eu tentei lembrar do acetato **(referindo-se à malha transparente)** dividindo as cem partes e imaginei como se eu tivesse colocando o acetato em cima do papel e fazendo ali que nem a gente fez no primeiro **(referindo-se à aplicação da atividade com utilização do manipulável)**.

Pesquisador: E quando você imaginou colocar ele **(referindo-se à malha transparente)** em cima do papel qual foi a conta que você fez?

Estudante: Eu somei **(Referindo-se aos quadradinhos da malha)**.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se, a partir das várias citações feitas ao manipulável, a forte influência da experiência anterior com esse material na formulação da estratégia resolutiva adotada pela estudante.

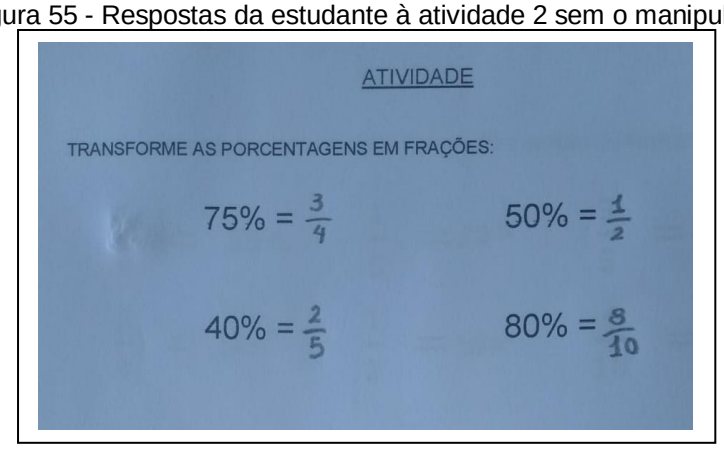
6.6 Atividade 2 sem o manipulável e entrevista final

Aplicamos a atividade 2 com o objetivo de verificar eventuais apreensões que pudessem sugerir sucessos do ponto de vista cognitivo. Para tanto, optamos, ao escolher as conversões propostas, pelo sentido de conversão não explorado na atividade 1, ou seja, o sentido *percentual* → *fração*, e também por valores até então não utilizados.

Esperávamos que o desempenho da estudante frente a essa nova situação, bem como a entrevista que faríamos na sequência, pudessem indicar a existência ou não de internalizações importantes para resolução destas conversões. Também buscávamos responder se a vivência anterior com o material contribuiria para a superação de uma eventual dependência do próprio manipulável e da regra de correspondência a ele associada. Ainda queríamos aferir uma possível atenuação das dificuldades provocadas pelos fenômenos de heterogeneidade dos sentidos e variação de não-congruência semântica.

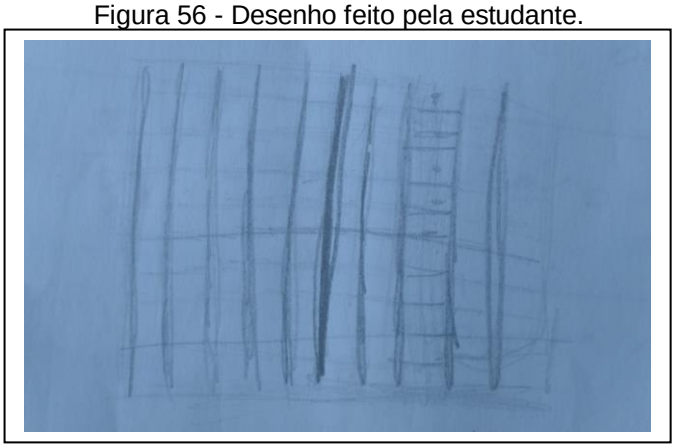
Depois de pensar um pouco, a estudante perguntou se poderia fazer um desenho e foi informada pelo pesquisador que sim. A estudante, então, desenhou o que parecia ser uma representação da malha quadriculada transparente utilizada na terceira etapa do experimento e respondeu corretamente a todas as conversões, como vemos nas figuras 55 e 56:

Figura 55 - Respostas da estudante à atividade 2 sem o manipulável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 - Desenho feito pela estudante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste trecho da entrevista final, apresentado no quadro 12, a estudante explica como pensou a resolução para a conversão 75% → registro numérico fracionário:

Quadro 12 - Trecho da entrevista relativo à conversão 75% → registro fracionário.

Pesquisador: Por que você chegou à conclusão de que 75% é o mesmo que 3/4?
Estudante: Eu comecei fazendo como se fosse o acetato com os cem quadradinhos e aí fui repartindo como se estivesse lá no papel **(referindo-se ao manipulável)**.
Pesquisador: Certo.
Estudante: E aí eu fui chegando na conclusão de três quartos, porque ocupa três quadrados... no caso são quatro partes e ocupa três quadrados.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que a estudante, ainda que sem o manipulável, usou como referência a malha quadriculada para concluir que 75 de seus quadradinhos ocupariam três partes se a dividíssemos em quatro partes iguais.

Em seguida, o pesquisador indagou a estudante sobre o desenho produzido durante a resolução da atividade 2, como mostra o quadro 13:

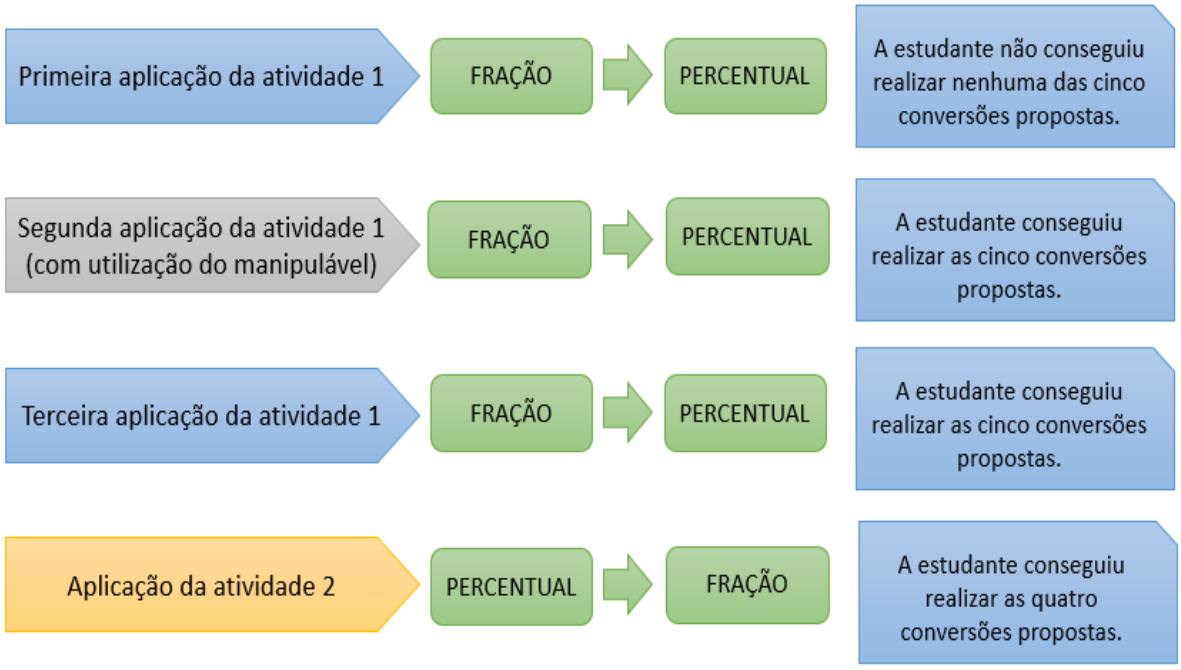
Quadro 13 - Trecho da entrevista - desenho feito pela estudante.

Pesquisador: Explique o desenho que você fez. Por que você pediu pra fazer o desenho? **Estudante:** Porque eu acho que ficaria melhor pra eu fazer. Entenderia melhor do que na mente. **Pesquisador:** Entendi. Você quis fazer o desenho igual ao material foi? **Estudante:** Foi. **Pesquisador:** Aí você desenhou o quê? **Estudante:** Eu só desenhei o acetato com os cem quadrados.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No esquema mostrado na figura 57, apresentamos uma síntese do que foi feito e observado no experimento piloto com destaque para as performances da estudante, o sentido das conversões propostas entre os registros numéricos fracionário e percentual em cada uma das quatro aplicações de atividade, bem como o momento em que foi utilizado o material manipulável.

Figura 57 - Esquema com a síntese dos resultados do experimento piloto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A atividade 1 propôs cinco conversões, todas elas no sentido *fração* → *percentual* e, como vimos, tivemos a utilização do material manipulável na segunda das três aplicações realizadas. A atividade 2 trouxe quatro conversões a realizar e, desta vez, o sentido explorado foi *percentual* → *fração*.

Portanto, a mudança do sentido das conversões, bem como a não utilização do material manipulável nas resoluções caracterizaram a distinção da atividade 2 e seu modo de aplicação em relação à atividade 1.

6.7 Discutindo os resultados do Experimento Piloto

Discutiremos a seguir, a partir dos resultados do experimento piloto[13], a ocorrência de elementos identificáveis no desempenho da estudante participante, frente às duas atividades utilizadas, que podem sugerir sucessos, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo. Nesta análise, buscaremos considerar as dificuldades relacionadas aos fenômenos de variação de congruência e não-congruência semântica e à heterogeneidade dos sentidos nas conversões e refletir sobre o papel do material manipulável nesse processo.

6.7.1 Análise do desempenho da estudante do ponto de vista matemático

Para Duval (2013), obter um sucesso matemático é responder de forma matematicamente correta uma atividade, ou seja, do ponto de vista matemático, um estudante que acerta a resposta de uma atividade, pergunta ou problema demonstra ter alcançado o êxito. A avaliação, nesse sentido, é feita de forma pontual e rápida, normalmente, logo após a aplicação dos exercícios relacionados ao conteúdo que se pretendia ensinar.

---

[13] Tais resultados foram discutidos preliminarmente em dois artigos:
MELO, W. J. A. Contribuições de um material manipulável para conversões entre representações fracionárias e percentuais do número racional. *In*: VIII EPEM – Encontro Pernambucano de Educação Matemática, 2022, Caruaru. Disponível em: https://www.even3.com.br/anais/viiiepem/459733-contribuicoes-de-um-material-manipulavel-para--conversoes-entre-as-representacoes-fracionarias-e-percentuais-do-n/
MELO, W. J. A. Contribuições do uso de material manipulável para conversões entre registros do número racional. *In*: XXVI EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2022, São Paulo. Disponível em: https://www.even3.com.br/anais/ebrapem2022/553956-contribuicoes-do-uso-de-material-manipulavel-para-conversoes-entre-registros-do-numero-racional/

No quadro 14, apresentamos uma síntese do desempenho da estudante no que concerne às três aplicações da atividade 1 no experimento piloto:

Quadro 14 - Desempenho da estudante com a atividade 1.

Aplicação	Condição	Desempenho
1ª	Sem o manipulável	Não houve respostas
2ª	Com o manipulável	Acertou todas
3ª	Sem o manipulável	Acertou todas

Fonte: Elaborado pelo autor.

A primeira aplicação da atividade 1 revelou uma grande dificuldade da estudante diante das conversões propostas que se refletiu na ausência de respostas dadas. Tal dificuldade pode ser justificada, sobretudo, quando consideramos que a estudante ainda não havia trabalhado porcentagem em sala de aula e, nesse caso, a apresentação do manipulável e do procedimento resolutivo a partir desse material assumiu, para ela, um caráter de ensino.

Outro aspecto a ser considerado, quando os estudantes não conseguem resolver quaisquer conversões, é o elevado grau de não congruência semântica das representações e, portanto, a inexistência de regras de correspondência que pudessem ser usadas para relacionar os diferentes registros, bem como a impossibilidade de perceber, facilmente, quais tratamentos deveriam ser realizados no registro de partida de modo a viabilizar a conversão.

Segundo Duval (2011, p.102), diante de conversões assim “os alunos ficam sem argumentos” e, dessa forma, “tudo se passa como se os alunos não tivessem nenhuma possibilidade de reconhecer o que é representado, nem as primeiras transformações que eles poderiam efetuar”.

A estudante obteve, contudo, na segunda aplicação da atividade 1, o total de acertos nas conversões utilizando o material manipulável e o caminho resolutivo a ele associado. Tal resultado pode ser atribuído apenas a sua capacidade de reproduzir o caminho apresentado pelo pesquisador sem que, necessariamente, tenha havido aprendizagens significativas nesse processo, pois, segundo Duval (2009, p.46), “a produção de representações semióticas pode ser satisfatória do ponto de vista da expressão, e não corresponder a nenhuma objetivação para o sujeito que as reproduz mais por imitação do que a reproduz por objetivação”. Assim, era fundamental,

considerando o objetivo dessa pesquisa, tentar demonstrar, ao final de todo o estudo realizado, se houve objetivação ou simples imitação a partir da utilização do manipulável pelos participantes.

Nesse sentido, ainda que a reprodução do caminho resolutivo com o manipulável apresentado pelo pesquisador tenha, no experimento piloto, resultado em acerto nas conversões realizadas pela estudante e que as dificuldades relativas aos fenômenos de não-congruência semântica pareçam ter sido contornadas, nada se poderia dizer, naquele momento, em termos de apreensões conceituais relacionadas ao objeto representado.

Os resultados da terceira aplicação da atividade 1 demonstraram que o aproveitamento total da estudante nas respostas foi mantido mesmo com a retirada do material manipulável. O relato da estudante durante a entrevista apontou a importância de sua experiência anterior com o manipulável, muito embora as resoluções parecessem ainda atreladas à imitação da apresentação realizada pelo pesquisador e não a uma construção própria.

Observou-se, portanto, uma acentuada variação de desempenho entre a primeira e a terceira aplicação, ambas sem a utilização do manipulável. Isso pareceu sugerir que a experiência com o material serviu para, a partir da segunda aplicação da atividade 1, auxiliar a estudante na resolução correta de todas as conversões propostas e garantir o sucesso, ao menos, do ponto de vista matemático.

A aplicação da atividade 2 demonstrou que esse sucesso matemático permaneceu mesmo com a mudança no sentido da conversão, até então, trabalhado no experimento.

Assim, pode-se dizer que, do ponto de vista matemático, a experiência com o manipulável foi importante não apenas para auxiliar a estudante na realização das conversões *fração* → *percentual*, como também para, na ausência desse recurso, favorecer a resolução das conversões *percentual* → *fração* a partir das representações mentais que ajudou a fomentar.

6.7.2 Análise do desempenho da estudante do ponto de vista cognitivo

O sucesso cognitivo é obtido pelo indivíduo “capaz de realizar com êxito a transferência de um conhecimento aprendido em situações totalmente diferentes e sem jamais tê-las visto antes”. Diferente do que ocorre com o sucesso do ponto de

vista matemático, o sucesso cognitivo não pode ser aferido de modo simples, pois sua avaliação demanda uma “outra escala de tempo muito maior, ou seja, com o decorrer dos anos e para além do término dos estudos” (Duval, 2013, p.21).

Podemos concluir, a partir do autor, que atestar definitivamente um sucesso cognitivo, requereria um tempo de observação não previsto no percurso metodológico deste trabalho. Entendemos, contudo, que se a compreensão, do ponto de vista cognitivo, implica a apreensão conceitual do objeto em estudo e que tal apreensão, segundo Duval (2011), resulta da habilidade demonstrada pelo estudante em coordenar, espontaneamente, os seus diferentes registros de representação, podemos, ao observar como o aluno realiza tal coordenação, identificar habilidades apreendidas que apontem no sentido de um sucesso cognitivo para além de um sucesso matemático.

Assim, para a análise da repercussão ou não da utilização do material manipulável no desempenho da estudante frente às conversões propostas no experimento e, ainda, se tal desempenho poderia ser revelador de apreensões significativas do ponto de vista cognitivo, concentramos nossa atenção em duas situações vividas no experimento piloto: as conversões realizadas após a experiência com o material manipulável e as conversões no sentido, até então, não trabalhado.

A primeira entrevista realizada com a estudante parece apontar no sentido de que a vivência com o material produziu representações mentais que lhe foram úteis na resolução das atividades, como podemos perceber no trecho em que a estudante responde sobre a conversão de 2/4 para a sua representação percentual feita sem o manipulável (quadro 11). Ao relatar que, para responder a atividade, tentava lembrar de como era o material, a estudante deixa claro a importância referencial que a representação figurativa concreta teve para si.

Também, as respostas da estudante aos questionamentos do pesquisador na entrevista final, após a aplicação da atividade 2, parecem indicar que o manipulável foi importante para estabelecer referências que se mostraram cruciais para a resolução das conversões. A fala da participante no experimento, inclusive, corrobora com a sua decisão de elaborar e utilizar, para a resolução, uma representação figurativa auxiliar que, claramente, buscava reproduzir o material usado por ela anteriormente, o que consideramos um forte indicativo da relação entre a experiência manipulativa e o seu bom desempenho.

Vimos que as representações semióticas são externas e conscientes, ou seja, são produzidas pelos indivíduos a partir dos sistemas semióticos (Duval, 2009). Assim, quando falamos de registros de representação semiótica, nos termos da TRRS, estamos nos referindo às representações produzidas a partir da linguagem natural, dos sistemas de escritas, das figuras geométricas, dos gráficos cartesianos.

Para Duval (2003), há, contudo, uma relação muito importante entre as representações semióticas e as representações mentais que são, por sua vez, representações conscientes e internas. Para o autor,

> Muitas vezes, as representações "mentais" não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas (Duval, 2003, p.31).

Assim, pudemos perceber que as respostas dadas pela estudante parecem apontar para o que foi expresso nas palavras de Duval (2003, p.31), sugerindo que o "tratamento de produção externa de representações semióticas" realizado no caminho resolutivo com o manipulável produziram representações mentais capazes de guiá-la exitosamente à resolução da conversão, agora, sem o material. A fala da estudante também sugere que o caminho resolutivo baseado nas representações oferecidas pelo material foi reproduzido, dessa vez, com representações mentais, o que parece reforçar a ideia de que tais representações, nas palavras do autor, "não passam de representações semióticas interiorizadas" (Duval, 2003, p. 31).

O relato da estudante ratifica a importância de sua experiência anterior com o manipulável. Isso ficou evidente, também, na escolha da estratégia resolutiva, que coincidia com a base do procedimento de conversão associado ao manipulável, ou seja, a sobreposição de representações figurativas, e também na ação de produzir uma representação auxiliar (desenho da malha quadriculada) a partir do material.

Segundo Duval (2009, p.45), "as representações *mentais* são todas as que permitem uma visão do objeto na ausência de todo significante perceptível". Nesse sentido, tanto a fala da participante ao descrever o procedimento adotado quanto a representação figurativa produzida por ela para a resolução das conversões, quando já não dispunha do material manipulável, corroboram a ocorrência de tais representações, pois, para o autor, "uma propriedade comum a dois tipos de

representação (as representações mentais e as representações semióticas) é a da evocação do modelo representado em sua ausência" (Duval, 2009, p. 48).

Os resultados do experimento serviram para demonstrar que, diante de conversões envolvendo registros com elevados graus de não-congruência semântica e para as quais, segundo Duval (2012), quase não existem regras, a utilização do material manipulável pôde colocar e estudante em movimento, oferecendo-lhe uma alternativa resolutiva e favorecendo o seu bom desempenho, pelo menos, do ponto de vista matemático.

Por outro lado, a atividade 2 proposta à estudante demandava a realização de conversões no sentido *percentual* → *fração*, ou seja, tínhamos um sentido de conversão até então não trabalhado no experimento e para o qual não havia sido feita nenhuma apresentação de resolução com o manipulável. Havia, ainda, conversões envolvendo dois racionais não explorados na primeira atividade, 75% e 80%.

Assim, no que concerniu à aplicação da atividade 2, o bom desempenho da estudante sem o uso do material e a partir da adoção de uma estratégia resolutiva própria, indicou a possibilidade da ocorrência de apreensões conceituais relacionadas ao objeto matemático em questão, ou seja, um sucesso cognitivo para além do sucesso matemático.

Essa possibilidade de que o caminho de conversão com o material manipulável pudesse produzir êxitos também do ponto de vista cognitivo seria, contudo, discutida com maior profundidade a partir dos resultados obtidos ao final dessa pesquisa.

Outra conclusão pendente dizia respeito a avaliação dos efeitos da inclusão do manipulável no que concernia às dificuldades de aprendizagem relacionadas às conversões envolvendo os registros numéricos fracionários e percentuais, já que a estudante ainda não havia trabalhado tal conteúdo em sala de aula. Assim, embora a sua utilidade enquanto material de ensino pareça ter sido demonstrada, ainda restavam muitas dúvidas relacionadas à sua importância para o fomento de aprendizagens não realizadas durante a abordagem desse objeto nas aulas de matemática.

No entanto, a partir da realização desse experimento, pudemos concluir, principalmente, que a utilização do manipulável poderia auxiliar na resolução das conversões semanticamente não-congruentes. Os resultados demonstraram, nesse sentido, que as representações auxiliares produzidas a partir do material foram importantes para proporcionar uma maior transparência entre as representações

envolvidas nas conversões e, desse modo, atenuar as dificuldades causadas por esse fenômeno. Houve também a sugestão de que a experiência anterior com o material poderia favorecer a dedução de um caminho para a conversão no sentido oposto. Em suma, tais achados indicaram que as representações produzidas com o material manipulável parecem ter cumprido uma importante função de transição na passagem do registro de partida para o registro de chegada nessas conversões.

No capítulo a seguir, descrevemos toda a implementação do percurso metodológico planejado para esse trabalho, apresentamos e analisamos os resultados do Instrumento Diagnóstico, aplicado para a seleção dos participantes, e do Teste de Sondagem, aplicado, após a intervenção realizada, para a redefinição dos grupos.

7 DEFINIÇÃO DOS PARTICIPANTES, INTERVENÇÃO E APLICAÇÃO DO INSTRUMENTO AVALIATIVO

Nesse capítulo, apresentamos os resultados das aplicações do Instrumento Diagnóstico e do Teste de Sondagem que serviram, respectivamente, para a definição dos estudantes que iniciariam e que prosseguiriam nesse estudo. Fazemos uma breve análise desses dados e explicamos os critérios utilizados para, a partir de tais resultados, configurar e reconfigurar os dois grupos de participantes durante a pesquisa. Descrevemos a intervenção realizada e apresentamos os resultados da aplicação do Instrumento Avaliativo que serão discutidos no capítulo seguinte.

Definida a unidade educacional que seria o campo de nossa pesquisa, uma escola de Ensino Fundamental da rede pública da cidade do Recife, a etapa seguinte do nosso trabalho consistiu na definição dos participantes. Em princípio, tínhamos disponíveis para a aplicação do Instrumento Diagnóstico todos os matriculados nas turmas A e B do 6º ano do Ensino Fundamental, o que correspondia a um total de 59 estudantes.

7.1 Aplicação do Instrumento Diagnóstico

Do total de matriculados em ambas as turmas, tivemos, no dia da aplicação do Instrumento Diagnóstico, o comparecimento de 42 estudantes, sendo 22 da turma A e 20 da turma B. A aplicação do instrumento foi realizada pelo pesquisador e durou cerca de 40 minutos em cada uma das turmas, as atividades foram realizadas uma de cada vez e após a sua leitura feita, em voz alta, pelo pesquisador, os participantes responderam individualmente e não foi permitido conversar com os demais colegas. Optamos pela leitura em voz alta de todas as atividades, com exceção dos seus itens, no sentido de que a eventual dificuldade de leitura[14] dos textos por parte de alguns participantes não fosse um entrave para as suas resoluções.

Resultados do Instrumento Diagnóstico

[14] Nossa expectativa era de que a dificuldade de leitura e interpretação de texto por parte de alguns participantes pudesse ser um dos problemas agravados pela pandemia de Covid-19, que afetou sensivelmente o processo escolar dos estudantes, sobretudo, a partir do segundo trimestre de 2020, com o fechamento das escolas e a adoção das aulas não presenciais.

Nas tabelas 1 e 2, os participantes do 6º ano A e 6º ano B foram identificados, respectivamente, com as letras A e B seguidas de numeração conforme a ordem alfabética de cada turma. Para a discriminação das atividades propostas, utilizamos a letra Q seguida de numeração conforme a sua ordem no instrumento. Para a especificação dos itens de cada atividade, usamos letras minúsculas seguindo a ordem alfabética. As habilidades demandadas para a resolução de cada atividade e os índices de acertos por estudante estão apresentados. Os itens respondidos corretamente foram destacados com a cor verde, os itens respondidos incorretamente com a cor vermelha e aqueles não respondidos com a cor amarela.

A tabela 1 aponta os resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico no 6º ano A:

Tabela 1 - Resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico no 6º ano A.

Participantes \ Quesitos	Q1 – Converter no sentido fração → percentual.						Q2 – Converter no sentido percentual → fração.						Q3 – Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.		Q4 – Avaliar a magnitude ou tamanho do percentual em relação ao todo.			Q5 – Estimar a fração representada a partir de uma figura.			Q6 – Estimar o percentual representado a partir de uma figura.			Q7 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.								Q8 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre percentuais.				Q9 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.		Acertos
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	f	g	h	a	b	c	d	a	b	
A1																																							40%
A2																																							43%
A3																																							27%
A4																																							19%
A5																																							43%
A6																																							29%
A7																																							48%
A8																																							27%
A9																																							48%
A10																																							40%
A11																																							43%
A12																																							24%
A13																																							43%
A14																																							46%
A15																																							35%
A16																																							40%
A17																																							67%
A18																																							48%
A19																																							48%
A20																																							48%
A21																																							43%
A22																																							27%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A média de acertos na turma A ficou em cerca de 40%. Dos 22 participantes que responderam o instrumento, apenas o estudante A17 conseguiu obter um índice superior a 50%.

A tabela 2 apresenta os resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico no 6º ano B:

Tabela 2 - Resultados da aplicação do Instrumento Diagnóstico no 6º ano B.

Participantes \ Quesitos	Q1 – Converter no sentido fração → percentual.						Q2 – Converter no sentido percentual → fração.						Q3 – Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.		Q4 – Avaliar a magnitude ou tamanho do percentual em relação ao todo.			Q5 – Estimar a fração representada a partir de uma figura.			Q6 – Estimar o percentual representado a partir de uma figura.			Q7 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.								Q8 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre percentuais.				Q9 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.		Acertos
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	f	g	h	a	b	c	d	a	b	
B1																																						40%
B2																																						29%
B3																																						29%
B4																																						40%
B5																																						56%
B6																																						62%
B7																																						46%
B8																																						13%
B9																																						43%
B10																																						35%
B11																																						67%
B12																																						35%
B13																																						62%
B14																																						48%
B15																																						43%
B16																																						38%
B17																																						38%
B18																																						51%
B19																																						35%
B20																																						35%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A média de acertos na turma B ficou por volta de 42%. Dentre os 20 participantes que responderam o instrumento, tivemos B5, B6, B11, B13 e B18 com índices de acertos superiores a 50%.

7.1.1 Análise dos resultados do Instrumento Diagnóstico e definição dos grupos A e B

Os resultados da atividade 1, que propunha conversões no sentido *fração → percentual*, indicaram que não houve acertos registrados na turma A. Na turma B, observou-se apenas 10 acertos dentre as 120 conversões propostas, sendo 6 acertos

com a conversão 4/10 = 40%, 3 acertos com a conversão 1/10 = 10% e 1 acerto com a conversão 2/5 = 40%. Em razão de tais acertos ocorrerem, em sua absoluta maioria, nas duas únicas conversões cujos registros de partida eram frações decimais, deve-se considerar a possibilidade de que a congruência semântica entre as unidades de sentido nas representações 1/10 e 10%, bem como a transparência existente entre as representações 4/10 e 40% tenham favorecido tais êxitos. Isso porque, segundo Duval (2012b), o pensamento funciona, espontaneamente, privilegiando a congruência semântica em detrimento da equivalência referencial. Corrobora, nesse sentido, o fato de que não houve acertos registrados para as demais conversões (3/4 = 75%, 2/5 = 40% e 1/2 = 50%), em que não se observa o mesmo grau de transparência entre as representações.

Os resultados da atividade 2, que trouxe a proposta de conversão no sentido *percentual* → ***fração***, também não registraram acertos na turma A. A turma B obteve 18 acertos dentre as 120 conversões propostas, sendo 5 acertos com a conversão 90% = 9/10, 4 acertos com a conversão 50% = 5/10, 3 acertos com a conversão 60% = 6/10, 3 acertos com a conversão 20% = 2/10, 2 acertos com a conversão 40% = 4/10 e 1 acerto com a conversão 40% = 2/5. Percebe-se, a exemplo do que ocorreu com a atividade 1, a quase totalidade dos êxitos relacionados à utilização de frações decimais. As conversões realizadas corretamente sugerem que a estratégia adotada pelos participantes também foi definir como registro de chegada a representação que mais transpareceria no registro de partida.

Assim, os poucos acertos registrados nas duas primeiras atividades do Instrumento Diagnóstico parecem estar mais relacionados à maior transparência entre as representações envolvidas nessas conversões do que, propriamente, à observação de equivalência referencial entre elas. Portanto, no que concerne à conversão envolvendo os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional, é razoável afirmar que todos os participantes apresentaram, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, um desempenho muito abaixo do desejável para esse ano da escolaridade.

As atividades 3 e 4 propuseram a avaliação do tamanho ou magnitude da parte em relação ao todo. Os resultados demonstraram que os participantes apresentaram um elevado número de acertos na atividade 4, em que as partes do todo eram representadas por percentuais. No total, foram 106 acertos em 126, ou seja, 84% de respostas corretas.

Esses resultados corroboram a observação feita por Moss e Case (1999) de que as representações percentuais já fazem parte das experiências sociais dos alunos antes mesmo do seu ingresso na escola. Ainda segundo esses autores, há vasta literatura indicando que os alunos de 10 e 11 anos já apresentam uma noção bem desenvolvida para os números inteiros de 1 a 100. Desse modo, tais representações favorecem a relação, de forma intuitiva, com outras representações (MOSS e CASE, 1999).

Nesse sentido, Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018) apontam alguns aspectos relacionados ao registro percentual que nos ajudam a entender o bom desempenho dos participantes nas atividades que exploraram esse tipo de representação. Dentre eles, o fato de que tais registros estão presentes no quotidiano dos estudantes e que a expressão “por cento” é entendida intuitivamente “como por cada cem ou em cada cem, isto é, algo que se compara com cem”. Outro aspecto que favorece a apreensão dessas representações é que, segundo esses autores, a sua notação “apresenta-se mais próxima da notação dos números inteiros do que a fração ou o número decimal” (p.357).

Diante disso, é provável que os participantes tenham, a partir da noção de 100%, enquanto representação mais familiar do todo, conseguido deduzir a representação 50% como expressão de sua metade, e, desse modo, concluir quais percentuais representariam partes maiores ou menores que ela.

Isso, contudo, não pôde ser ratificado, já que não entrevistamos os participantes após essa aplicação do instrumento avaliativo. Por outro lado, os participantes não tiveram um bom desempenho na atividade 3, em que as partes do todo eram representações fracionárias. Foram apenas 11 respostas corretas num total de 84, ou seja, um índice de 13% de acertos. Observa-se, então, uma grande discrepância entre os desempenhos demonstrados em ambas as atividades com a clara indicação de sérias dificuldades no reconhecimento das frações enquanto representações de partes em relação ao todo.

Quanto às atividades 5 e 6, que propuseram estimativas intuitivas a partir de figuras, também se observou um bom desempenho dos participantes na atividade 6 (83% de acertos), em que as partes eram representadas percentualmente, mas que não se refletiu no desempenho obtido na atividade 5 (47% de acertos), em que as partes eram representadas por frações. A diferença significativa do número de acertos dos participantes com a mudança da representação fracionária para a representação

percentual, nesse tipo de atividade, parece sugerir, outra vez, uma maior familiaridade dos participantes com a ideia de parte a partir dos números percentuais e uma grande dificuldade de trabalhar com essa mesma ideia a partir das frações.

As atividades 7 e 8 abordaram a comparação de grandezas entre números racionais. Como ocorreu nas atividades anteriores, os participantes desempenharam bem nas comparações envolvendo representações percentuais, com um índice de 73% de acertos. Já nas comparações entre representações fracionárias, o índice foi de 48%.

Quanto ao desempenho dos participantes nas comparações entre representações fracionárias, atividade 7, há de se fazer algumas observações importantes a partir dos dados apresentados na tabela 3, com os índices de acertos item a item.

Tabela 3 - Itens e índices de acertos na atividade 7.

Q7 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações							
a	b	c	d	e	f	g	h
$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{10}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$
0%	0%	0%	23%	88%	90%	90%	88%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se uma clara discrepância entre os resultados a partir do item e. Os dados sugerem que boa parte dos participantes adotaram a estratégia de considerar como a maior fração aquela cujo denominador fosse o maior (itens a, b, c, d, e, f). É provável que também os numeradores tenham sido comparados (itens c, e, f, g, h). Ainda é possível que as adições dos numeradores com os denominadores tenham sido decisivas na comparação e escolha da maior fração (itens a, b, c, e, f, g, h). Nesse sentido, o item d parece ter causado muitas dúvidas (1/5 tem, em relação a 2/4, menor numerador e maior denominador, bem como ambas as frações apresentam numerador + denominador = 6), o que justifica a pequena variação para cima no índice de acertos.

Concluímos que os participantes podem ter usado várias estratégias que indicam uma comparação de grandeza entre as unidades de sentido ou mesmo entre

as somas das unidades de sentido em ambas as representações e não entre os números racionais representados.

Podemos relacionar tal dificuldade ao fato de que, segundo Lamon (2007), alguns estudantes não percebem que a grandeza de um número racional positivo é dada pela relação desse número com a unidade. Desse modo, como já visto em estudos anteriores como o de Monteiro e Pinto (2007), por exemplo, os estudantes acabam cometendo o equívoco de comparar frações unitárias e indicar a que tem o maior denominador como sendo a maior entre elas.

Assim, pode-se dizer que os sucessos, do ponto de vista matemático, obtidos pelos participantes não foram acompanhados por um êxito do ponto de vista cognitivo.

Os resultados da atividade 9 também apresentaram uma considerável diferença entre os índices de acertos para os seus dois itens: 90% para o item a e, apenas, 24% para o item b. Acreditamos que, a exemplo do que ocorreu com a atividade 7, a grande maioria dos participantes buscou estabelecer uma relação comparativa de grandeza entre as unidades de sentido numa e noutra representação, em detrimento da avaliação do tamanho ou magnitude das partes, ali representadas nos registros fracionário e percentual, em relação ao todo. Desse modo, considerou-se que 70% é mais que 1/2 e, também, mais que 3/4, pois 70 é maior que 1, 2, 3, 4, 1 + 2 e 3 + 4. Essa estratégia de resolução adotada, majoritariamente, pelos participantes é reveladora de uma concepção de fração enquanto um par de números separados por um traço e evidencia um pensar matemático ainda muito restrito ao conjunto dos números naturais.

Podemos dizer, portanto, que, do ponto de vista cognitivo, os resultados do Instrumento Diagnóstico ratificaram o que vários outros estudos realizados anteriormente já haviam demonstrado, ou seja, um desempenho muito fraco dos participantes no que tange ao reconhecimento do número racional em sua representação fracionária no sentido parte-todo, indicando grandes lacunas na aprendizagem desse objeto matemático.

Por outro lado, vimos que, conforme apresentado no quadro 15, os participantes, em ambas as turmas, responderam corretamente a maior parte dos itens em Q4, Q6 e Q8.

Quadro 15 - Índices totais de acertos por atividade/habilidade no Instrumento Diagnóstico.

Quesitos	Habilidades	Acertos
Q1	Converter no sentido fração → percentual.	4%
Q2	Converter no sentido percentual → fração.	7%
Q3	Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.	13%
Q4	Avaliar a magnitude ou tamanho do percentual em relação ao todo.	84%
Q5	Estimar a fração representada a partir de uma figura.	47%
Q6	Estimar o percentual representado a partir de uma figura.	83%
Q7	Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.	48%
Q8	Estabelecer relação comparativa de grandeza entre percentuais.	73%
Q9	Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.	57%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os altos índices de acertos em relação às demais atividades indicam que os participantes demonstraram razoável domínio das habilidades avaliadas em Q4, Q6 e Q8. Como discutimos anteriormente, o bom desempenho nessas atividades parece estar relacionado a uma maior familiaridade dos participantes com as representações numéricas percentuais, sobretudo, com as referências de todo, 100%, e metade, 50%. Há também o fato de que a comparação entre unidades de sentido se mostra eficaz para deduzir que 25% é maior que 20%, já que a unidade de sentido 25 é maior que a unidade de sentido 20, e, por outro lado, um entrave para a conclusão de que 1/4 é maior que 1/5, já que a unidade de sentido 4 não é maior que a unidade de sentido 5.

Desse modo, no que concerne a Q4, Q6 e Q8 não haveria margem significativa para uma melhora de desempenho que pudesse justificar, para essas mesmas habilidades, uma posterior avaliação e análise dos resultados. Assim, optamos por diminuir o número de atividades no Instrumento Avaliativo, que seria aplicado após a intervenção, privilegiando a avaliação das demais habilidades cujos índices de acertos foram bem menores.

Para as etapas seguintes da pesquisa, definimos os grupos A e B apenas com os participantes que não alcançaram o mínimo de 50% de acertos nos 37 itens distribuídos pelas 9 atividades propostas no Instrumento Diagnóstico. Desse modo, o grupo A, oriundo do 6º ano A, ficou com 21 participantes e o grupo B, oriundo do 6º ano B, com 15 participantes. Embora não mais considerados para efeito de análise nessa pesquisa, os demais estudantes permaneceram presentes em todas as etapas

da pesquisa, participando, inclusive, das aplicações do Teste de Sondagem e Instrumento Avaliativo.

7.2 Intervenção nos grupos A e B

Antes de passarmos à descrição da forma como foi realizada a intervenção em ambos os grupos, cumpre-nos uma observação importante. De modo algum, esperamos que essa etapa da pesquisa seja entendida como uma proposta de aula para abordagem de um objeto matemático tão complexo como os números racionais.

Há várias limitações que poderíamos apontar, tais como a exiguidade do tempo disponibilizado, a falta de aprofundamento quanto ao significado de cada uma das diferentes representações semióticas do objeto representado, a ênfase na apresentação de um caminho de conversão entre duas representações simbólico-numéricas e a restrição a um único sentido de conversão.

Portanto, não à toa, chamamos de intervenção o período em que o pesquisador esteve em sala com os participantes apresentando um diferente caminho de conversão para cada grupo. Entendemos que tal abordagem, por ter cumprido uma função muito específica dentro do nosso desenho metodológico, a saber, restringir-se à apresentação de uma forma de transformar a representação fracionária de um dado número racional em sua representação percentual, não poderia, absolutamente, ser tomada como aula.

Contudo, uma vez feito esse necessário esclarecimento, cumpre-nos reforçar que os limites da intervenção buscavam atender ao propósito de nosso trabalho de pesquisa, já que queríamos investigar quais aprendizagens em relação ao objeto representado poderiam derivar, tão somente, da prática de conversão no sentido *fração* → *percentual* e, ainda, se haveria diferentes apreensões a partir de diferentes caminhos empregados para realizar essa transformação.

A intervenção realizada pelo pesquisador em cada grupo teve duração de 120 minutos e foi dividida em três momentos: situações propostas para discussão coletiva, apresentação do caminho de conversão e exercícios.

No primeiro momento, o pesquisador desenhou dois copos iguais na lousa, usou as letras A e B para identifica-los e escreveu as representações 1/4 e 40% abaixo. Em seguida, propôs as seguintes situações:

Situação 1

Pesquisador: *Os copos têm quantidades diferentes de refrigerante: 1/4 no copo A e 40% no copo B. Qual copo você escolhe se quer beber mais refrigerante e por quê?*

Em ambos os grupos, os participantes escolheram, de forma majoritária, o copo B, pois, segundo algumas falas, 40 seria maior que 1 e também maior que 4. O pesquisador explica que 1/4 é o mesmo que 25%, pois essas expressões representam o mesmo número e, portanto, a mesma quantidade. A partir dessa informação, todos se convencem que, de fato, o copo B é aquele com a maior quantidade de refrigerante.

Situação 2

Pesquisador: *O copo A está agora com 2/4 de refrigerante, qual você escolhe?*

A maioria dos participantes, tanto no grupo A quanto no grupo B, escolheu o copo A, dessa vez. Alguns poucos participantes, em ambos os grupos, justificaram essa escolha afirmando que a quantidade de refrigerante no copo A corresponderia a 50%, pois seria 25% mais 25%, baseando-se na informação de que 1/4 seria igual a 25%, trazida, anteriormente, pelo pesquisador. O pesquisador confirma que 2/4, realmente, corresponde a 50% e que, portanto, o copo A tem, nessa situação, mais refrigerante que o copo B.

Situação 3

Pesquisador: *O copo A está agora com 2/5 de refrigerante, qual você escolhe?*

Em ambos os grupos, os participantes divergiram bastante. O número daqueles que escolheram o copo A foi um pouco maior. Não houve, contudo, a percepção de que, nesse caso, não haveria um copo com uma quantidade maior de refrigerante, já que 2/5 equivale a 40%.

No segundo momento, o pesquisador apresenta o objetivo da aula: aprender uma forma de transformar a representação fracionária em sua representação percentual equivalente. A partir daí, tem-se, para cada grupo, a apresentação de um caminho específico para a conversão no sentido *fração → percentual*:

7.2.1 Apresentação de caminho para conversão fração → percentual no Grupo A

O pesquisador escreve, na lousa, a fração 1/4 e faz a seguinte fala: *para transformar uma fração em um número percentual, basta encontrar a sua fração equivalente de denominador 100.*

Apontando para a fração escrita na lousa, continua: *1/4 significa que o total foi dividido em quatro partes iguais e essa expressão representa uma dessas partes. Agora, vamos transformar essa fração numa fração do mesmo tamanho, mas com denominador 100, ou seja, esse mesmo todo dividido em cem partes iguais. Então, em vez de uma parte em quatro, teremos algumas partes em cem.*

Nesse momento, o pesquisador escreve, ao lado da fração 1/4, uma fração de denominador 100, ainda sem o numerador. Então, explica que uma maneira de se chegar ao numerador da fração de denominador 100 equivalente à fração 1/4, ou seja, ao número de partes do todo dividido em 100 partes iguais que será equivalente a uma parte desse mesmo todo dividido em 4 partes iguais, é efetuando a divisão de 100 por 4 e, em seguida, a multiplicação desse quociente por 1.

O pesquisador conclui a sua apresentação explicando que, uma vez encontrada a fração equivalente de denominador 100, resta-nos transforma-la em representação percentual a partir da relação n /100 = n%. Desse modo, todo o caminho de conversão apresentado é realizado conforme a sequência de tratamentos apresentada na figura 58.

Figura 58 - Sequência de tratamentos em caminho de conversão apresentado no Grupo A.

$$\frac{1}{4} = \frac{k \cdot 1}{100} = \frac{25 \cdot 1}{100} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vemos que o processo de conversão trabalhado consiste, sobretudo, na identificação do fator de proporcionalidade k. Isso porque, para produzirmos qualquer fração equivalente, basta que multipliquemos o numerador e o denominador da fração original por um mesmo fator. Assim, para encontrarmos a fração centesimal equivalente à fração 1/4, precisamos determinar k, tal que 4k=100 ou, se usarmos a operação inversa, tal que k=100÷4.

7.2.2 Apresentação de caminho para conversão fração → percentual no Grupo B

O pesquisador escreve, na lousa, a fração 1/4 e faz a seguinte fala: *para transformar uma fração em um número percentual podemos usar, como apoio, esse material* (referindo-se ao manipulável usado na pesquisa).

Apontando para a fração escrita na lousa, continua: *1/4 significa que o total foi dividido em quatro partes iguais e essa expressão representa uma dessas partes. Agora, vamos pegar, no material, o quadrado que está dividido conforme a indicação do denominador, ou seja, em quatro partes iguais.*

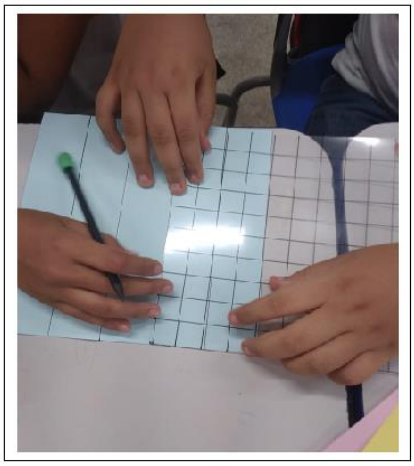
O passo seguinte, explica o pesquisador, consiste em sobrepor a malha quadriculada transparente e o quadrado selecionado para contar os quadradinhos que correspondem à parte ou às partes indicadas na fração. No caso da fração 1/4, conta-se o número de quadradinhos da malha que equivale a uma parte do quadrado subdividido em quatro partes iguais. Os participantes também foram orientados a usar dobraduras para uma melhor visualização da sobreposição.

Durante a apresentação, o pesquisador explica: *o todo que estava dividido em quatro partes iguais, agora foi dividido em cem partes iguais, ou seja, em vez de uma parte em quatro, teremos algumas partes em cem.*

O pesquisador conclui a sua apresentação explicando que, uma vez feita a contagem, resta-nos definir a representação percentual a partir da relação n quadradinhos contados na malha = n%.

No terceiro momento, o pesquisador propôs, em ambas as turmas, uma atividade que consistia na conversão de várias representações numéricas fracionárias em representações numéricas percentuais. Cada turma fez uso do caminho de conversão trabalhado e a atividade pôde ser realizada em duplas. Na turma B, foi entregue uma cópia do manipulável, por dupla, para que cada participante pudesse usar na resolução das conversões propostas, conforme apresentado na figura 59.

Figura 59 - Participantes do Grupo B utilizando o manipulável durante a intervenção.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos dois grupos, o pesquisador concluiu a intervenção com a socialização e correção, na lousa, das respostas dos participantes a partir das conversões propostas na atividade.

O quadro 16 apresenta uma síntese do que foi realizado durante todo esse período, destacando o que foi comum a ambos os grupos, assim como as abordagens específicas para A e para B.

Quadro 16 - Síntese da intervenção realizada nos grupos A e B.

<table>
<tr><th>Grupo A</th><th>Grupo B</th></tr>
<tr><td colspan="2">Discussão coletiva de situações propostas pelo pesquisador.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Apresentação do objetivo da intervenção</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observação de que a fração 1/4, escrita na lousa, representa uma parte do todo dividido em quatro partes iguais.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demonstração do caminho para a conversão de 1/4 em sua representação percentual.</td></tr>
<tr><td>Determinação da fração n/100 equivalente à fração 1/4.</td><td>Determinação do número de quadradinhos na malha correspondente à dobradura feita a partir da fração 1/4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observação de que estamos subdividindo o mesmo todo, dessa vez, em cem partes iguais, ou seja, em vez de uma parte em quatro, teremos algumas partes em cem.</td></tr>
<tr><td>Conclusão da conversão a partir da relação n /100 = n%.</td><td>Conclusão da conversão a partir da relação n quadradinhos contados = n%.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proposta de atividade em duplas explorando a conversão fração → percentual</td></tr>
<tr><td colspan="2">Correção e socialização, na lousa, das conversões realizadas.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Buscou-se fazer com que as intervenções realizadas em ambos os grupos seguissem o mesmo roteiro, privilegiando as mesmas abordagens e falas por parte do pesquisador, excetuando, apenas, o momento da apresentação do caminho de conversão.

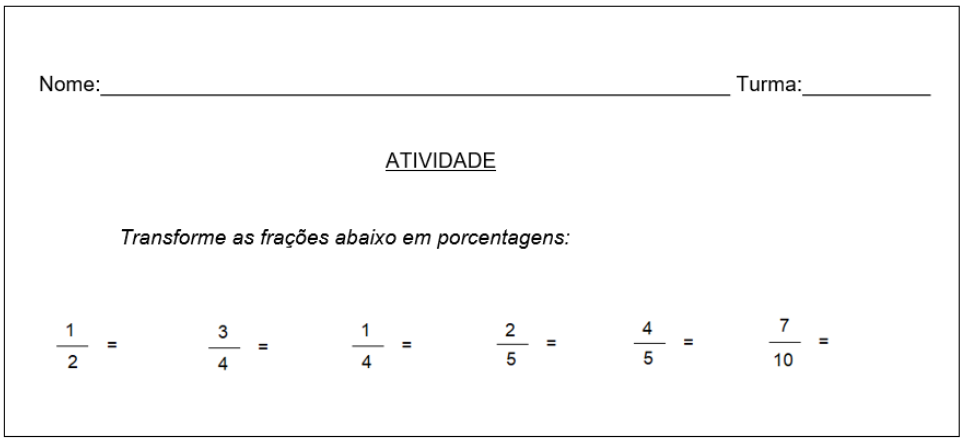
Nesse sentido, toda parte inicial, em que foram discutidas três diferentes situações envolvendo o significado parte-todo das representações numéricas fracionárias e numéricas percentuais de alguns números racionais, com destaque para as relações denominador - número total de partes do todo subdividido igualmente e numerador - número de partes consideradas, foi conduzida da mesma maneira em A e B.

A distribuição do tempo também foi equânime para os dois grupos: cerca de 25 minutos para o momento de discussão coletiva, 15 minutos para apresentação do caminho de conversão e 80 minutos para a realização das atividades em duplas, correções e socialização coletiva.

7.3 Aplicação do Teste de Sondagem

Enquanto a aplicação do Instrumento Diagnóstico permitiu que definíssemos os estudantes que, inicialmente, fariam parte da pesquisa, a aplicação do Teste de Sondagem foi posterior à intervenção e teve por objetivo identificar aqueles que permaneceriam integrando o estudo, ou seja, os participantes que conseguiriam realizar conversões no sentido *fração* → *percentual* a partir dos caminhos de conversão trabalhados em seus respectivos grupos. O teste propôs a conversão das frações 1/2, 3/4, 1/4, 2/5, 4/5 e 7/10 para as suas correspondentes representações numéricas percentuais conforme apresentado na figura 60.

Figura 60 - Teste de Sondagem aplicado aos grupos A e B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em ambos os grupos, os participantes realizaram a atividade individualmente e sem interação com os demais colegas. No grupo B, também não foi permitida a utilização, ou mesmo visualização, do material manipulável.

7.3.1 Análise dos resultados e redefinição dos grupos A e B

A tabela 4 apresenta os resultados do Teste de Sondagem com o número de acertos que cada participante obteve dentre as seis conversões propostas, destacando os cinco melhores desempenhos de cada grupo.

Tabela 4 - Resultados da aplicação do Teste de Sondagem.

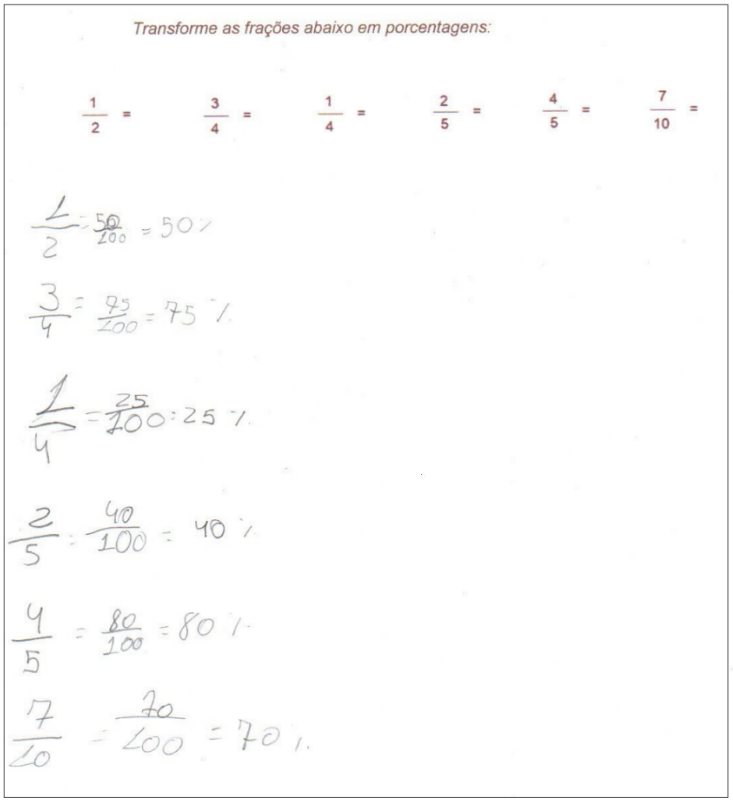
Grupo A		Grupo B	
Participante	Número de acertos	Participante	Número de acertos
A1	6	B4	6
A2	6	B7	6
A7	6	B15	6
A18	6	B17	6
A10	5	B3	4
A6	4	B8	3
A22	4	B10	3
A15	3	B12	3
A19	3	B1	2
A20	3	B2	2
A12	2	B14	2
A21	2	B19	1
A5	1	B9	0
A13	1		
A14	1		
A3	0		
A4	0		

Fonte: Elaborada pelo autor.

No grupo A, apenas 41% dos que fizeram o teste conseguiram realizar quatro ou mais das seis conversões propostas. Os participantes A1, A2, A7 e A18 obtiveram o número total de acertos, já A3 e A4 marcaram os piores desempenhos com zero acertos cada um.

O caminho com os tratamentos simbólico-numéricos, trabalhado anteriormente, foi adotado em boa parte das conversões exitosas como vemos, por exemplo, nas resoluções de A2 apresentadas na figura 61.

Figura 61 - Resoluções de A2 (Teste do Sondagem).

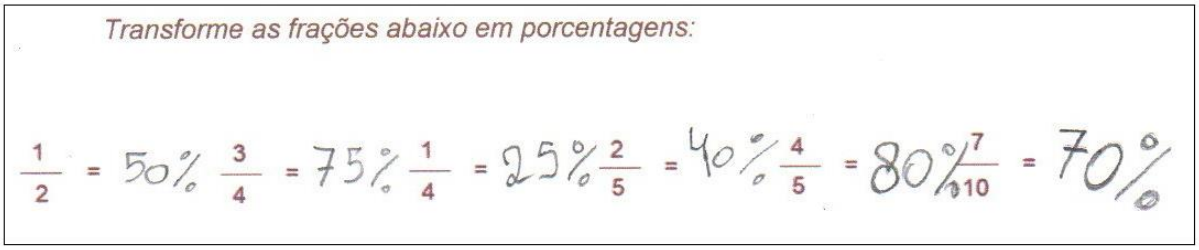


Fonte: Dados da pesquisa.

Seguindo o que foi apresentado durante a intervenção realizada pelo pesquisador, os participantes iniciaram as conversões determinando as frações de denominador 100 equivalentes às frações iniciais. O numerador da fração centesimal equivalente é calculado mediante a divisão de 100 pelo denominador da representação de partida e posterior multiplicação desse quociente pelo seu numerador.

Já a resolução de A7, conforme destaca a figura 62, dispensa a representação semiótica simbólico-numérica da fração centesimal equivalente, ou seja, não utiliza a representação auxiliar de forma externa, sugerindo que tais tratamentos aconteceram de modo ainda mais econômico e, sobretudo, a partir de cálculo mental.

Figura 62 - Resoluções de A7 (Teste do Sondagem).

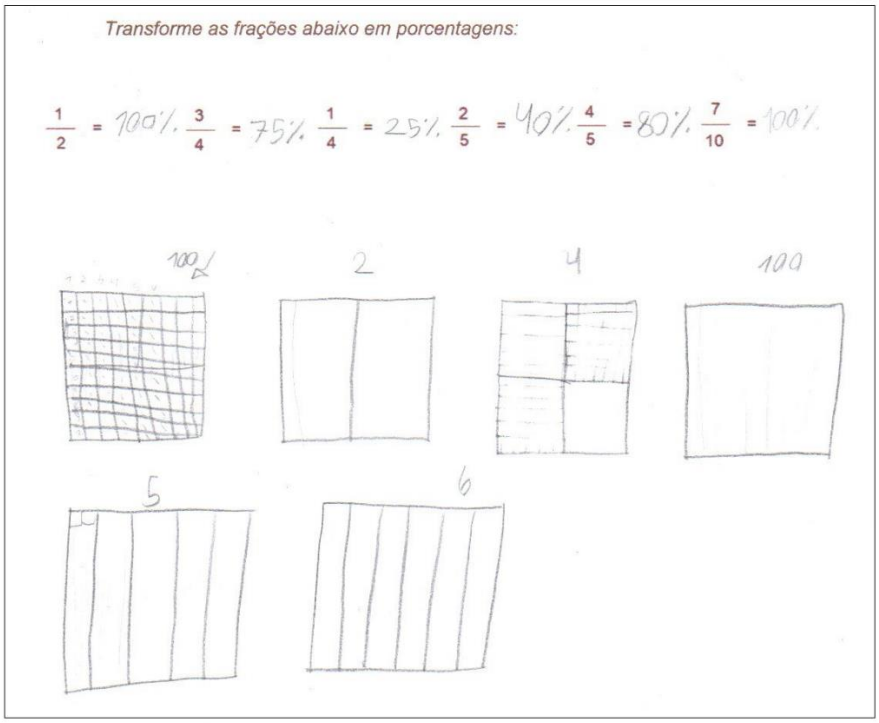


Fonte: Dados da pesquisa.

No grupo B, somente 38% dos participantes alcançaram quatro ou mais acertos dentre as conversões propostas. Assim como ocorreu com o grupo A, quatro participantes, B4, B7, B15 e B17, acertaram todas as conversões. Um participante, B9, não conseguiu realizar nenhuma das seis conversões.

Diante da falta do manipulável para auxiliar nas conversões, os participantes B3, B7 e B17 refizeram o caminho de conversão trabalhado na aula utilizando, como referência, desenhos que buscavam reproduzir características do material. A figura 63 apresenta as resoluções de B3.

Figura 63 - Resoluções de B3 (Teste do Sondagem).



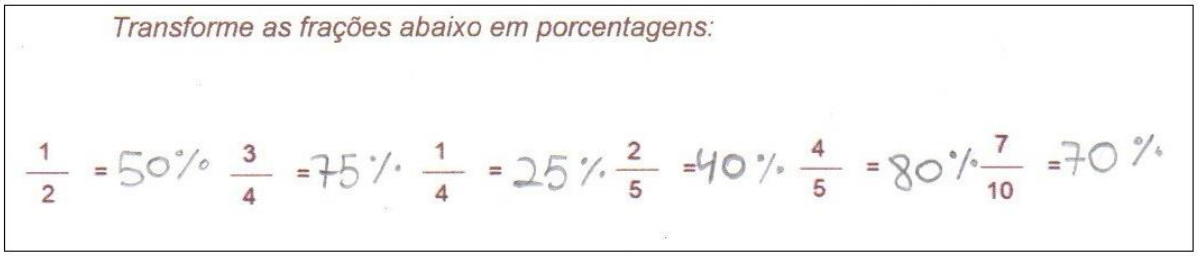
Fonte: Dados da pesquisa.

As resoluções de B3 sugerem uma importante influência da experiência vivenciada, anteriormente, com o manipulável. Percebe-se que, na ausência do material, o participante recorreu às lembranças de sua utilização para elaborar as representações figurativas que lhes serviriam de representações auxiliares nas conversões. Para tanto, desenhou a malha quadriculada transparente e os quadrados subdivididos em duas, quatro, cinco e seis partes iguais. Sua produção sugere**,** também, a utilização de tratamentos figurais como a reconfiguração intermediária (Duval, 2012c) para concluir, por exemplo, que cada parte do todo dividido em cinco

partes iguais corresponderia a vinte partes desse mesmo todo dividido em cem partes iguais.

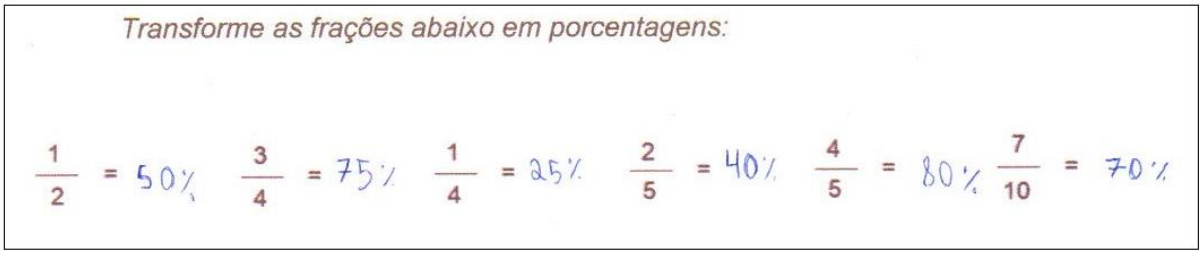
Já os participantes B4 e B15 realizaram as conversões propostas sem produzirem quaisquer tipos de representações semióticas auxiliares. Suas resoluções trazem apenas a escrita das representações numéricas percentuais correspondentes a cada fração como apresentam as figuras 64 e 65.

Figura 64 - Resoluções de B4 (Teste do Sondagem).



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 65 - Resoluções de B15 (Teste do Sondagem).



Fonte: Dados da pesquisa.

A exemplo do que acontecera no Experimento Piloto, esses participantes conseguiram realizar as conversões, dessa vez, sem o auxílio do material manipulável.

A partir dos resultados do Teste de Sondagem, redefinimos os grupos A e B de modo que pudéssemos dispor do maior número possível de participantes para a continuidade da pesquisa. Nessa configuração final, contudo, os grupos deveriam ter apenas participantes com razoável domínio do caminho de conversão trabalhado anteriormente (4 ou mais acertos no Teste de Sondagem) e o mesmo número de integrantes, o que, ao nosso ver, seria melhor para as análises quantitativas dos dados.

Assim, prosseguimos o trabalho com cinco participantes em cada grupo: A1, A2, A7, A10 e A18 no grupo A e B3, B4, B7, B15 e B17 no grupo B. Não houve

referência aos participantes A8, A9, A11, A16, B16 e B20 porque estes não compareceram à aplicação do Teste de Sondagem.

7.4 Aplicação do Instrumento Avaliativo

A aplicação do Instrumento Avaliativo, conduzida pelo pesquisador, foi realizada nove dias após a aplicação do Instrumento Diagnóstico e quatro dias após a intervenção. Sua duração foi de 40 minutos em cada um dos grupos. Assim como aconteceu na aplicação do Instrumento Diagnóstico, o pesquisador leu, em voz alta, as cinco atividades propostas, uma de cada vez, intervalando as leituras até que todos concluíssem suas resoluções. O instrumento foi respondido individualmente e não houve interações entre os participantes.

Os participantes do Grupo A não puderam consultar as anotações de seus cadernos com o caminho de conversão simbólico-numérico, assim como os participantes do Grupo B não puderam utilizar, ou mesmo visualizar, o material manipulável.

7.4.1 Resultados do Instrumento Avaliativo e realização das entrevistas

As tabelas 5 e 6 apresentam os resultados da aplicação do Instrumento Avaliativo nos grupos A e B. As atividades propostas estão identificadas com a letra Q seguida de numeração, conforme a ordem em que aparecem no instrumento, e da habilidade trabalhada. As letras minúsculas indicam os itens de cada atividade. Os índices de acertos por atividade/habilidade, bem como os índices de acertos por participante estão apresentados. A cor verde sinaliza os itens respondidos corretamente, a cor vermelha marca as respostas incorretas e a cor amarela os itens não respondidos.

Tabela 5 - Resultados da aplicação do Instrumento Avaliativo no Grupo A.

Participantes \ Quesitos	Q1 – Converter no sentido percentual → fração.						Q2 – Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.		Q3 – Estimar a fração representada a partir de uma figura.			Q4 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.				Q5 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.		Acertos
	a	b	c	d	e	f	a	b	a	b	c	a	b	c	d	a	b	
A1																		11%
A2																		70%
A7																		41%
A10																		17%
A18																		47%
Acertos	26%						20%		40%			45%				70%		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 - Resultados da aplicação do Instrumento Avaliativo no Grupo B.

Participantes \ Quesitos	Q1 – Converter no sentido percentual → fração.						Q2 – Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.		Q3 – Estimar a fração representada a partir de uma figura.			Q4 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.				Q5 – Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.		Acertos
	a	b	c	d	e	f	a	b	a	b	c	a	b	c	d	a	b	
B3																		47%
B4																		41%
B7																		100%
B15																		100%
B17																		59%
Acertos	86%						50%		86%			40%				70%		

Fonte: Elaborada pelo autor.

As médias de acertos nos grupos A e B foram 37% e 69%, respectivamente. Dentre os dez participantes, apenas quatro obtiveram índices superiores a 50%: A2 (70%), B7 (100%), B15 (100%) e B17 (59%).

Quanto às atividades/habilidades, o Grupo A desempenhou melhor em Q5 (Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual), com 70% de acertos, e teve seus piores índices em Q1 (Converter no sentido percentual → fração) e em Q2 (Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo), com 26% e 20%, respectivamente.

Na tabela 7, temos a comparação entre os desempenhos individuais dos participantes do Grupo A, no que concerne a cada uma das habilidades exploradas, nos Instrumentos Diagnóstico e Avaliativo, indicados pelas siglas ID e IA, respectivamente.

Tabela 7 - Índices individuais de acertos no Instrumento Diagnóstico (ID) e Instrumento Avaliativo (IA) – Grupo A.

	A1		A2		A7		A10		A18	
	ID	IA	ID	IA	ID	IA	ID	IA	ID	IA
Converter no sentido percentual → fração.	0%	0%	0%	33%	0%	33%	0%	0%	0%	66%
Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.	50%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Estimar a fração representada a partir de uma figura.	0%	33%	33%	66%	66%	33%	66%	33%	100%	33%
Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.	50%	0%	50%	100%	62%	100%	50%	0%	62%	25%
Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.	50%	50%	50%	100%	50%	0%	50%	100%	50%	100%
Total de Acertos no instrumento	28%	11%	28%	70%	38%	41%	33%	17%	43%	47%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que apenas o participante A2 obteve, no Instrumento Avaliativo, índices de acertos melhores que os alcançados no Instrumento Diagnóstico para todas as habilidades. O participante A1, por sua vez, não conseguiu melhorar, no Instrumento Avaliativo, nenhum dos índices conseguidos no Instrumento Diagnóstico. Já os participantes A7, A10 e A18 apresentaram desempenhos inconsistentes, com melhoras nos índices de algumas habilidades e decréscimos nos índices de outras.

O Grupo B registrou seus melhores desempenhos em Q1 (Converter no sentido percentual → fração) e Q3 (Estimar a fração representada a partir de uma figura), ambos com 86% de acertos, e teve seu pior desempenho em Q4 (Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações) com 40% de acertos.

A tabela 8 apresenta a comparação entre os desempenhos individuais dos participantes do Grupo B, no que concerne a cada uma das habilidades exploradas, nos Instrumentos Diagnóstico e Avaliativo, indicados pelas siglas ID e IA, respectivamente.

Tabela 8 - Índices individuais de acertos no Instrumento Diagnóstico (ID) e Instrumento Avaliativo (IA) – Grupo B.

	B3		B4		B7		B15		B17	
	ID	IA	ID	IA	ID	IA	ID	IA	ID	IA
Converter no sentido percentual → fração.	16%	83%	0%	66%	16%	100%	0%	100%	0%	83%
Avaliar a magnitude ou tamanho da fração em relação ao todo.	0%	50%	0%	0%	0%	100%	0%	100%	0%	0%
Estimar a fração representada a partir de uma figura.	100%	66%	33%	66%	33%	100%	33%	100%	100%	100%
Estabelecer relação comparativa de grandeza entre frações.	25%	0%	50%	0%	37%	100%	50%	100%	50%	0%
Estabelecer relação comparativa de grandeza entre fração e percentual.	50%	0%	50%	50%	100%	100%	50%	100%	50%	100%
Total de Acertos no instrumento	33%	47%	28%	41%	33%	100%	28%	100%	38%	59%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os participantes B7 e B15 obtiveram, no Instrumento Avaliativo, índices de acertos melhores que os alcançados no Instrumento Diagnóstico para todas as habilidades. Os participantes B3, B4 e B17, por sua vez, apresentaram desempenhos inconsistentes, com melhoras nos índices de algumas habilidades e decréscimos nos índices de outras.

As entrevistas foram realizadas três dias após a aplicação do Instrumento Avaliativo. Todos os participantes, de ambos os grupos, responderam, ao pesquisador, como pensaram para desenvolver cada uma de suas resoluções a partir das cinco atividades propostas no instrumento. Também foram feitas questões relacionadas ao Teste de Sondagem, realizado cinco dias antes.

Cada participante pôde rever suas resoluções no Teste de Sondagem e no Instrumento Avaliativo para apoiar suas explicações, sem, contudo, saber se tais itens haviam sido respondidos corretamente ou não. As entrevistas aconteceram individualmente e todas as falas foram gravadas.

No capítulo a seguir, buscamos responder nosso problema de pesquisa: Diferentes caminhos adotados na resolução das conversões entre os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional implicam diferentes apreensões, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, relacionadas ao objeto representado? Para tanto, discutimos os resultados

do Instrumento Avaliativo, analisando as resoluções das atividades propostas e as falas dos participantes ao justificarem as estratégias utilizadas.

8 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO INSTRUMENTO AVALIATIVO

Neste capítulo, procuramos atender ao objetivo dessa pesquisa e, portanto, analisamos apreensões de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental relacionadas ao objeto matemático número racional, em seu significado parte-todo, oriundas de conversões realizadas, tendo a representação numérica fracionária como registro de partida e a representação numérica percentual como registro de chegada, a partir de dois caminhos resolutivos distintos. Em suma, buscamos concluir quais as implicações desses diferentes caminhos de conversão quanto às possíveis apreensões acerca do objeto representado. Os dados analisados foram coletados a partir da aplicação de instrumentos escritos e entrevistas, já descritos anteriormente, e que seguiram o cronograma apresentado no quadro 17.

Quadro 17 - Cronograma das atividades de intervenção e coleta de dados.

Atividade	Participantes	Data	Duração
Aplicação do Instrumento Diagnóstico.	6º ano A	31/05/2023	40min
	6º ano B	31/05/2023	40min
Intervenção realizada nos grupos.	Grupo A	05/06/2023	120min
	Grupo B	05/06/2023	120min
Aplicação do Teste de Sondagem.	Grupo A	07/06/2023	40min
	Grupo B	07/06/2023	40min
Aplicação do Instrumento Avaliativo.	Grupo A	09/06/2023	40min
	Grupo B	09/06/2023	40min
Realização das entrevistas.	Grupo A	12/06/2023	80min
	Grupo B	12/06/2023	80min

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando os limites das intervenções realizadas no grupo A e no grupo B, sobretudo, a restrição à conversão no sentido *fração → percentual* utilizando os tratamentos em escritas simbólico-numéricas num grupo e o material manipulável no outro, entendemos que um eventual bom desempenho dos participantes, frente a outras atividades não exploradas nessa etapa da pesquisa, somente poderia ser atribuído às percepções e apreensões que cada um desses caminhos de conversão acabou favorecendo.

Por isso, o Instrumento Avaliativo propunha atividades que exploravam a conversão no sentido oposto, *percentual → fração*, a percepção da parte em relação ao todo na representação e a comparação de tamanhos entre partes representadas, ou seja, habilidades não trabalhadas diretamente durante a intervenção.

As resoluções dos participantes frente a tais atividades e, principalmente, suas falas colhidas durante as entrevistas, permitiram-nos identificar e caracterizar as estratégias resolutivas utilizadas. A partir da análise dessas estratégias, pudemos verificar a ocorrência de eventuais representações mentais e sua relação com os caminhos de conversão trabalhados em ambos os grupos, discutir o papel que tais interiorizações desempenharam no desenvolvimento dessas resoluções e ver como os participantes lidaram com as dificuldades relacionadas aos fenômenos de heterogeneidade dos sentidos e variação de congruência e não-congruência semântica entre as representações.

Em síntese, o que fizemos foi analisar o modo como os participantes resolveram cada atividade proposta no Instrumento Avaliativo, buscando identificar o que isso nos dizia, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, sobre sua apreensão do objeto ali representado.

8.1 A conversão no sentido oposto

Durante a intervenção, os participantes trabalharam a conversão entre os registros numéricos fracionários e numéricos percentuais do número racional em um único sentido, a saber, a fração como representação de partida e o percentual como representação de chegada. Os resultados do Teste de Sondagem demonstraram que os grupos tiveram desempenhos parecidos, no que concerne à realização de conversões nesse sentido. No Grupo A, 41% dos participantes conseguiram realizar, ao menos, quatro das seis conversões propostas, enquanto que, no Grupo B, esse

índice foi de 38%. Outro dado que denota um certo equilíbrio é que houve, em cada grupo, quatro participantes que acertaram todas as conversões.

As entrevistas realizadas confirmaram a adoção do caminho de conversão trabalhado, no grupo, durante a intervenção. Assim, para realizar as conversões no sentido *fração → percentual* propostas no Teste de Sondagem, os participantes do Grupo A usaram tratamentos nas representações simbólico-numéricas, enquanto que os do Grupo B buscaram refazer o mesmo caminho associado ao material manipulável.

O quadro 18 apresenta as falas dos participantes do Grupo A ao serem questionados sobre a forma como pensaram para realizar as conversões.

Quadro 18 - Falas dos participantes do Grupo A referentes às conversões *fração → percentual* realizadas.

Como você pensou para transformar as frações em porcentagens?	
A1	*Eu pensei assim do jeito que o senhor ensinou. Eu vi quando o senhor fez e tentei fazer também.*
A2	*Eu prestei atenção na sua aula. Aí, o senhor tinha explicado que sempre era cem embaixo. Aí, eu fiz cem dividido pra dois, aí vezes um, aí eu dei a resposta* (referindo-se à conversão 1/2 = 50%).
A7	*Quando o senhor estava ensinando eu fiquei prestando atenção e, num instante, eu descobri como era. Aí, quando eu cheguei em casa, eu fui estudar.*
A10	*...aqui, por quatro dá vinte e cinco. Vinte e cinco vezes três dá setenta e cinco. Setenta e cinco por cento...*
A18	*Quando o senhor faz no quadro, aí o senhor coloca o cem embaixo. Aí eu fiz isso na mente. Aí eu consegui chegar no cinquenta... dividi pra dois... multipliquei por um* (referindo-se à conversão 1/2 = 50%).

Fonte: Elaborado pelo autor.

A utilização do caminho de conversão trabalhado na intervenção e que demandava a definição do numerador da fração centesimal equivalente à fração inicial por via das operações de divisão e multiplicação ficou evidente, sobretudo, nas falas de A2, A10 e A18.

O quadro 19 apresenta as respostas dos participantes do Grupo B para essa mesma questão.

Quadro 19 - Falas dos participantes do Grupo B referentes às conversões *fração → percentual* realizadas.

Como você pensou para transformar as frações em porcentagens?	
B3	*Eu peguei o de quatro e fiquei contando os quadradinhos em três* (referindo-se ao desenho que produziu). *Aí, eu fiz e deu setenta e cinco quadradinhos* (referindo-se à conversão 3/4 = 75%).
B4	*Eu pensei que no material tinha um de dois. Aí, cada um era cinquenta. Aí, eu peguei e botei cinquenta aqui* (referindo-se à conversão 1/2 = 50%). *Aí, três de quatro, cada um era vinte e cinco, aí eu lembrei que era setenta e cinco por cento* (referindo-se à conversão 3/4 = 75%). *Aí, um de quatro era vinte e cinco que eu lembrei. Aqui, sete de dez, que cada um era dez, deu setenta* (referindo-se à conversão 7/10 = 70%).
B7	*Eu fiz na banca o material* (referindo-se ao desenho que fez na mesa). *Eu coloquei um todo, parti a metade e coloquei cinquenta e cinquenta* (referindo-se à conversão 1/2 = 50%). *Esse daí eu dividi em quatro e coloquei vinte e cinco em cada lado* (referindo-se à conversão 3/4 = 75%).
B15	*Eu lembrei do material e vi que, de duas partes, uma tinha cinquenta e a outra tinha cinquenta, as duas ficava cem, mas uma de dois era cinquenta, aí eu lembrei* (referindo-se à conversão 1/2 = 50%). *Eu fiquei na mente que tinha quatro negócio. Aí, um de cada tinha vinte e cinco. Aí, eu somei, vinte e cinco mais vinte e cinco dava cinquenta, mais vinte e cinco dava setenta e cinco que era três quartos* (referindo-se à conversão 3/4 = 75%). *Eu lembrei na mente* (referindo-se à conversão 7/10 = 70%), *porque um décimo, uma fileira de dez era dez, porque uma (fileira) tinha dez, né? Aí, eu fiquei na mente cada um... tipo se fosse um aqui* (referindo-se ao numerador da fração 7/10) *ia ser dez, um de dez ia ser dez.*
B17	*Na folha em branco que o senhor deu pra gente, aí, em fiz um quadrado com a quantia de quadradinhos, aí, eu fui contando.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como ocorreu com o Grupo A, as entrevistas feitas com os participantes do Grupo B demonstraram que as conversões no sentido *fração → percentual* foram realizadas com base no trabalho vivenciado durante a intervenção. Como sugerem as falas dos participantes, buscou-se refazer o caminho de conversão relacionado ao material manipulável utilizado anteriormente.

Uma particularidade referente ao Grupo B é que seus participantes só puderam dispor do manipulável durante a intervenção realizada pelo pesquisador. Assim, para a realização do Teste de Sondagem e do Instrumento Avaliativo, era necessário a criação de estratégias que pudessem suprir a falta desse material.

Os participantes B3, B7 e B17 buscaram reproduzir, através de desenhos, o manipulável utilizado anteriormente. Em suas falas, percebe-se que tais produções serviram de referenciais para as conversões realizadas. A estratégia consistiu em desenhar vários quadrados, sendo cada um deles uma representação de 100, e dividi-

los em duas, quatro, cinco e dez partes iguais, ou seja, as subdivisões com as quais haviam trabalhado a partir do material. Com isso, tinha-se várias representações figurativas para auxiliar no cálculo dos números percentuais correspondentes às frações apresentadas no Teste de Sondagem.

Tais representações figurativas exerceram uma função auxiliar em relação às representações numéricas fracionárias de partida nas conversões realizadas. Nesse sentido, a lembrança da experiência anterior com o material manipulável foi importante para que o mesmo caminho de conversão fosse reproduzido, dessa vez, sem a sua utilização.

Já os participantes B4 e B15, embora também tenham deixado clara a adoção do caminho com o manipulável trabalhado na aula, conseguiram realizar as conversões sem a produção desses desenhos.

Percebe-se que B4 faz referência apenas às imagens mentais que estão baseando a execução de seu caminho de conversão. No trecho “...três quartos, cada um era vinte e cinco...”, o participante relaciona a representação 3/4 à imagem do todo dividido em quatro partes iguais, em que cada uma delas equivale a 25. Assim, é capaz de deduzir o valor percentual de qualquer fração de denominador 4 a partir da relação n / 4 = n . 25%, como evidencia o trecho seguinte de sua fala: “aí, eu lembrei que era setenta e cinco por cento”.

O caminho resolutivo foi mantido mesmo com a variação de congruência e não-congruência semântica entre as representações envolvidas na conversão, como pode ser percebido no trecho em que o participante se refere à conversão 7/10 = 70%: “Aqui, sete de dez, que cada um era dez, deu setenta”. As representações 7/10 e 70% têm um grau de transparência maior que as representações 3/4 e 75%, ainda assim o participante não parece ter partido de uma observação da congruência semântica, mas sim de uma análise baseada na equivalência referencial.

Em sua fala, B15 demonstra que as representações mentais produzidas a partir de sua experiência com o material manipulável serviram de base para cada uma das conversões realizadas. A descrição de seu caminho resolutivo revela que as correspondências entre as partes de cada inteiro e o número de quadradinhos na malha quadriculada do material foram internalizadas, de modo que, para aquele momento, a utilização do manipulável ou mesmo a produção de desenhos que buscassem representa-lo já não eram necessárias para realizar tais conversões.

Assim, pode-se dizer que, seja com o suporte de desenhos, como fizeram B3,

B7 e B17, ou não, como foram os casos de B4 e B15, os participantes adotaram o caminho de conversão, trabalhado anteriormente durante a intervenção, com base em imagens e representações mentais produzidas a partir dessa experiência.

No que concerne aos participantes dos grupos A e B, portanto, o caminho de conversão trabalhado foi utilizado e bem sucedido na transformação das representações numéricas fracionárias em representações numéricas percentuais.

Contudo, a mudança desse sentido de conversão, proposta pelo Instrumento Avaliativo, resultou numa significativa mudança também no desempenho dos grupos. Isso porque, segundo Duval (2009, p.61), "as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada" e, portanto, era necessário que os participantes desenvolvessem, a partir das possíveis percepções e aprendizagens ocorridas com as conversões realizadas num sentido, caminhos viáveis para as conversões, dessa vez, no sentido oposto.

Assim, os caminhos de conversão apresentados em ambos os grupos, durante a intervenção, já não poderiam mais ser aplicados, pois, como observa o autor, "cada vez que se liberam regras de conversão, a aplicação dessas regras é de sentido único" (Duval, 2009, p. 61). Nesse caso, os resultados apresentaram uma grande diferença entre os grupos quanto aos percentuais de conversões realizadas corretamente, conforme apresentado na tabela 9.

Tabela 9 - Índices de acertos dos grupos A e B nas conversões em ambos os sentidos.

Grupos	Conversão ***fração*** → ***percentual*** (Teste de sondagem)	Conversão ***percentual*** → ***fração*** (Instrumento Avaliativo)
A	96%	26%
B	93%	86%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os participantes do Grupo A obtiveram apenas 26% de acertos nas conversões, enquanto que os participantes de B alcançaram 86%.

Os resultados da conversão no sentido *percentual* → *fração* sugerem que os participantes do grupo B conseguiram deduzir estratégias, a partir da experiência vivenciada com o manipulável, que possibilitaram a conversão sem esse material e num sentido, até então, não trabalhado.

Já, no Grupo A, a inversão de sentido produziu o que Duval (2012, p.284) afirmou que poderia acontecer no caso de representações semanticamente não-congruentes, ou seja, “criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente”. Assim, as dificuldades relacionadas ao fenômeno da heterogeneidade dos sentidos mostraram-se bem mais evidentes nos índices desse grupo.

8.1.1 Estratégias utilizadas para a conversão percentual → fração

As entrevistas revelaram que, para realizar conversões num sentido oposto ao que fora exercitado, os participantes do Grupo A adotaram estratégias equivocadas ou pouco eficientes. O quadro 20 apresenta as falas dos participantes desse grupo ao descreverem a forma como pensaram para fazer as transformações no sentido *percentual → fração*.

Quadro 20 - Falas dos participantes do Grupo A referentes às conversões *percentual → fração* realizadas.

Como você pensou para transformar as porcentagens em frações?	
A1	*Assim, eu pensei em pegar os números da frente e botar em cima e o zero* (referindo-se ao segundo algarismo) *botar embaixo.*
A2	*Eu fui mudando os números* (referindo-se às frações) *pra ver qual dava a porcentagem que estava aqui.*
A7	*Então, eu fiz a fração, botei o cem embaixo e dividi para ver se dava cinquenta por cento mesmo* (referindo-se à conversão 50% = 1/2).
A10	*Eu fiz assim: a metade de cinquenta é vinte e cinco* (referindo-se à representação 50%), *aí eu peguei o primeiro número e coloquei em cima.*
A18	*Fiz igual a outra* (referindo-se à conversão fração → percentual), *mas sendo que transformando nisso* (referindo-se à representação fracionária). *Fui tentando um monte de vezes até conseguir. Coloquei cem dividido pra dois igual a cinquenta. Aí, cinquenta multiplicados por um é igual a cinquenta. Aí, eu fui e coloquei* (referindo-se à conversão 50% = 1/2).

Fonte: Elaborado pelo autor.

O participante A1 baseou sua estratégia de conversão no que chamaremos de *conservação de transparência*, ou seja, a ideia de que a transformação será bem sucedida se mantivermos um elevado nível de transparência entre a representação

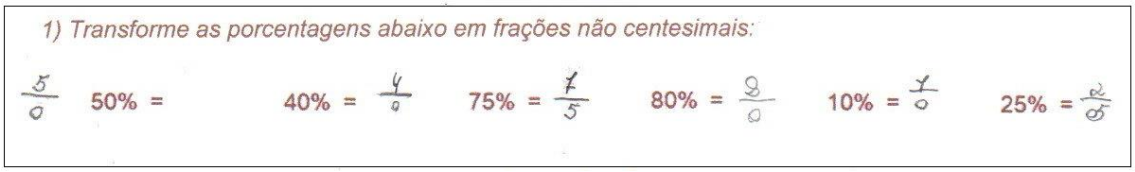
de partida e a representação de chegada. Sobre tal equívoco, Duval (2012b, p.100) observa:

> Um aluno que não se dá conta do esforço intelectual exigido em matemática faz, espontaneamente da congruência semântica, a condição necessária e às vezes suficiente da equivalência referencial. Ele encontrará e ficará satisfeito com as substituições que são semanticamente congruentes; por outro lado, ele irá resistir às substituições que não são semanticamente congruentes, mas referencialmente equivalentes.

Com base nessa compreensão errônea, conclui-se que se duas representações contêm os mesmos signos, então, representam o mesmo objeto. Nesse sentido, as escritas simbólico-numéricas de 25% e 2/5, por exemplo, podem ser percebidas equivocadamente como referencialmente equivalentes e, portanto, representações do mesmo número racional.

A figura 66 apresenta as conversões *percentual → fração* realizadas por A1, no Instrumento Avaliativo.

Figura 66 - Resoluções de A1 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Como revela a sua fala, “eu pensei em pegar os números da frente e botar em cima e o zero botar embaixo”, o caminho de conversão adotado por A1 consistiu em tomar o primeiro algarismo da representação percentual como sendo o numerador da representação fracionária correspondente e o segundo como sendo o seu denominador.

Desse modo, A1 produz a representação fracionária a partir dos signos percebidos na representação percentual e, portanto, privilegia a conservação de uma certa transparência em detrimento da conservação do objeto representado. Essa, de acordo com Duval (2012b), constitui-se uma das dificuldades na aprendizagem matemática encontrada por muitos estudantes e está ligada ao fato de que “a equivalência referencial se destaca da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência

semântica" (p.101).

Assim, diante da ausência de um caminho para realizar a conversão num sentido heterogêneo, é natural que A1 tenha pensado em produzir representações fracionárias que, ao seu ver, pudessem transparecer nas representações percentuais.

Há, nesse caso, uma evidente dificuldade no discernimento das unidades de sentido que compõem os registros. Em outras palavras, A1 demonstra desconhecer a pertinência matemática dos dados expressos por cada signo no interior das representações numéricas fracionárias e percentuais envolvidas na conversão.

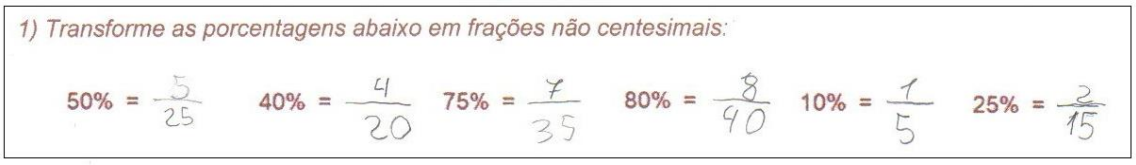
Isso constitui um entrave para a realização de tratamentos e conversões já que, para Duval (2011), o reconhecimento das unidades de sentido é uma das **"**condições preliminares e absolutamente indispensáveis para que alguém possa compreender e fazer qualquer coisa em matemática" (Duval, 2011, p.103).

Ao tomar os algarismos 2 e 5, na representação 25%, para formar a fração 2/5, A1 parece ignorar completamente o que tais signos representam em ambos registros e, consequentemente, não percebe que essa nova representação implica, também, um novo objeto representado.

Em suma, a estratégia de conversão baseada na *conservação de transparência*, utilizada pelo participante A1, ao passo que privilegia a reprodução do signo, negligencia a sua importância como dado matematicamente pertinente no interior da representação semiótica.

A ideia de manter a congruência semântica em detrimento da equivalência referencial ao realizar as conversões *percentual → fração* também foi utilizada pelo participante A10. A figura 67 apresenta as representações fracionárias que o estudante produziu a partir das representações percentuais propostas na atividade 1 do Instrumento Avaliativo.

Figura 67 - Resoluções de A10 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Sua estratégia de conversão, como bem revelou a entrevista, consistiu na aplicação de uma regra de correspondência, criada por ele mesmo, entre os signos de ambas as representações. Assim, a transformação da representação percentual

na representação fracionária baseou-se na seguinte relação: o denominador da fração corresponderia à metade do número expresso na representação percentual e o numerador corresponderia ao primeiro algarismo desse mesmo número.

Desse modo, A10 indicou, de forma equivocada, que as frações 5/25, 4/20, 8/40 e 1/5 seriam, respectivamente, referencialmente equivalentes aos percentuais 50%, 40%, 80% e 10%.

Nota-se, contudo, que, para os percentuais 75% e 25%, em que a divisão por 2 dos números expressos nessas representações não resultaria em quocientes inteiros, A10 escreve as frações 7/35 e 2/15 como sendo suas respectivas correspondentes. Dessa forma, A10 parece tentar contornar o entrave surgido para a aplicação de sua estratégia recorrendo, mais uma vez, à conservação de transparência. Para tanto, decide utilizar mais um signo da representação percentual, o algarismo 5, na produção da representação fracionária correspondente.

Segundo Duval (2011), os estudantes ficam sem argumentos diante de algumas conversões. Nesses casos, para o autor, tudo ocorre "como se os alunos não tivessem nenhuma possibilidade de reconhecer o que é representado, nem as primeiras transformações que eles poderiam efetuar" (Duval, 2011, p.102).

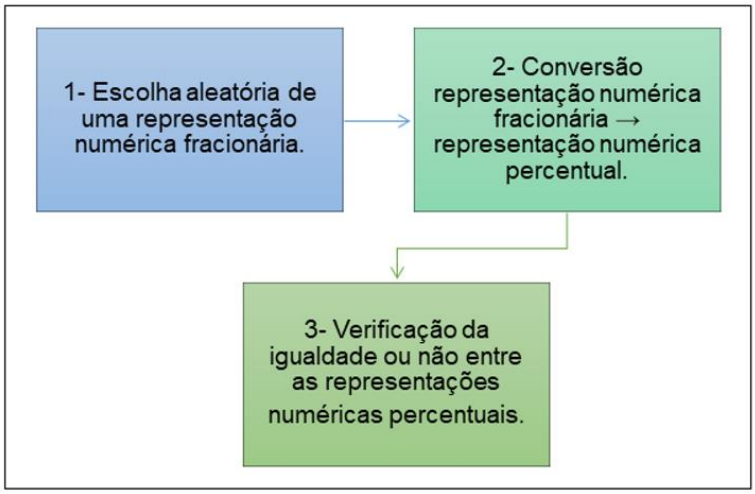
Nesse sentido, tanto A1 quanto A10, por não conseguirem deduzir, a partir do caminho trabalhado com as representações simbólicas, uma maneira eficaz para realizar a conversão no sentido oposto, acabaram recorrendo a estratégias próprias e ineficientes, privilegiando, sobretudo, a conservação da transparência sem considerar a equivalência referencial entre os registros envolvidos.

Já os participantes A2, A7 e A18, como revelaram as suas falas, adotaram uma estratégia baseada no que chamaremos de *validação da representação de chegada*, ou seja, a suposta representação fracionária de chegada era escolhida de forma aleatória e, em seguida, convertida em representação percentual para que fosse ou não confirmada como tal.

Desse modo, para a realização de cada conversão proposta na atividade 1 do Instrumento avaliativo, ou seja, cada conversão no sentido *percentual → fração*, os participantes fizeram sucessivas conversões no sentido *fração → percentual* utilizando o caminho trabalhado anteriormente. Uma vez encontrada a representação numérica percentual que coincidisse com aquela a ser convertida, estava determinada a representação numérica fracionária correspondente. O caminho de conversão adotado pode ser dividido em três passos, conforme o esquema apresentado na figura

68.

Figura 68 - Caminho resolutivo adotado para a conversão percentual → fração no grupo A.



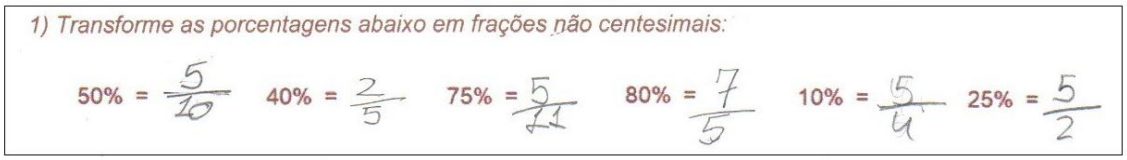
Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro passo era escolher ao acaso, ou seja, sem um critério definido, uma representação fracionária para ser convertida numa representação percentual. A conversão *fração → percentual* ocorreria no passo seguinte e era realizada através do caminho resolutivo trabalhado no grupo, ou seja, via representações simbólico-numéricas.

Por fim, a representação numérica percentual resultante da conversão realizada era comparada com a representação numérica percentual proposta para conversão. Assim, caso houvesse correspondência entre as representações percentuais, chegava-se à fração referencialmente equivalente e a atividade de conversão proposta estava concluída. Por outro lado, se o percentual encontrado após a conversão fosse outro, o processo era retomado desde o primeiro passo.

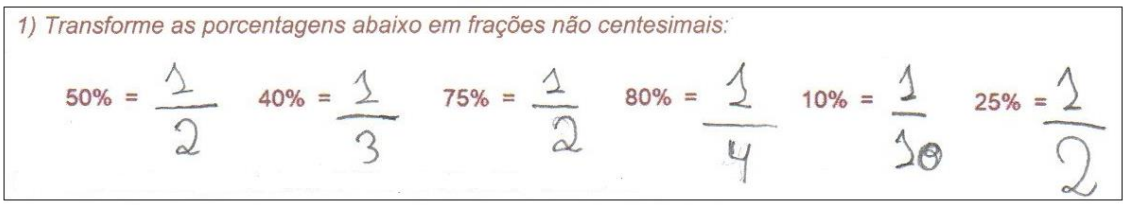
No entanto, as resoluções de A2 e A7, como apresentam as figuras 69 e 70, demonstram que a estratégia aplicada não foi suficiente para que os participantes obtivessem mais do que dois acertos, dentre as seis conversões propostas, nessa atividade.

Figura 69 - Resoluções de A2 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

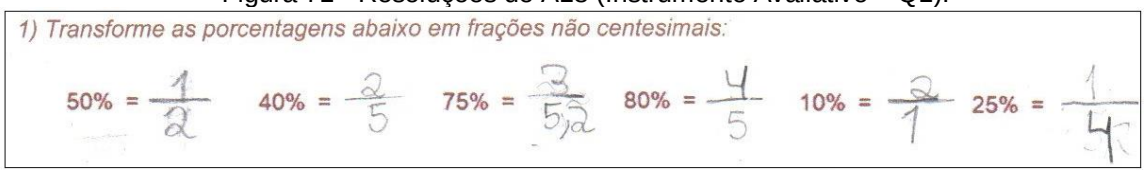
Figura 70 - Resoluções de A7 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante A18, contudo, obteve êxito em quatro das seis conversões propostas, demonstrando um desempenho razoável na atividade, conforme apresentado na figura 71.

Figura 71 - Resoluções de A18 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao falar da forma como realizou a atividade, A18 parece revelar o que talvez seja um dos grandes problemas associados ao processo de conversão adotado. Segundo o participante, ele foi “tentando um monte de vezes até conseguir”. Percebe-se que a estratégia escolhida não é econômica em termos de custo de tempo, já que, para algumas conversões, será necessário “testar” muitas frações até encontrar a representação percentual pretendida. Isso exigia, sobretudo, que os participantes fossem persistentes, mas, em alguns casos, poderia acabar resultando em desistência ou abandono da estratégia e, por consequência, na produção de representações sem equivalência referencial, como ocorreu com a maior parte das resoluções de A2 e A7.

Não houve, portanto, a partir da apreensão do caminho de conversão que foi exercitado durante a intervenção realizada pelo pesquisador, no Grupo A, a dedução de tratamentos simbólico-numéricos que pudessem viabilizar a conversão no sentido oposto, de uma forma mais rápida e mais simples.

Assim, no que concerne às conversões no sentido *percentual → fração*, propostas na atividade 1 do Instrumento Avaliativo, as estratégias baseadas na *conservação de transparência* entre os registros de partida e de chegada mostraram-

se totalmente ineficientes, resultando em 0% de acertos para os participantes que as utilizaram. Já a *validação da representação de chegada* a partir de sucessivas conversões de frações escolhidas aleatoriamente, embora tenha sido responsável pelo total de acertos registrados no grupo (26%), revelou-se uma estratégia inviável do ponto de vista econômico, já que demandava bastante tempo até que se encontrasse o número percentual pretendido.

A maior parte dos participantes do Grupo B, por sua vez, conseguiu desenvolver caminhos para realizar as conversões no sentido oposto, sobretudo, como revelaram as entrevistas, a partir de lembranças da experiência com o material manipulável vivenciada anteriormente. O quadro 21 traz as falas dos participantes desse grupo ao descreverem a forma como pensaram para fazer as transformações no sentido *percentual → fração*.

Quadro 21 - Falas dos participantes do Grupo B referentes às conversões *percentual → fração* realizadas.

Como você pensou para transformar as porcentagens em frações?	
B3	*Aqui* (referindo-se à conversão 75% = 3/4), *lembrei do que tinha quatro* (referindo-se ao todo dividido em quatro partes iguais que compunha o manipulável).
B4	*Eu pensei que era pra botar com a fração o número que dava certo. Aí, esse que era setenta e cinco, que cada um era vinte e cinco, eu coloquei três de quatro* (referindo-se à conversão 75% = 3/4). *Aqui, eu coloquei oito de dez, porque era oito e, aí, cada linha era dez, aí, eu coloquei oitenta, oito de dez* (referindo-se à conversão 80% = 8/10). *Aqui, um de dez, porque uma linha só de dez era dez, aí, deu dez* (referindo- se à conversão 10% = 1/10). *Um de quatro, porque o quadrinho era vinte e cinco e, aí, deu vinte e cinco* (referindo-se à conversão 25% = 1/4).
B7	*Eu lembrei do material, desenhei e fiz. Aqui tem cinquenta e cinquenta* (referindo-se ao desenho que produziu para realizar a conversão 50% = 1/2).
B15	*Eu calculei na mente e deu o resultado. Aí, eu tinha várias outras opções. Aqui eu podia botar outra opção que seria dois quartos* (referindo-se à conversão 50% = 1/2). *Aqui eu botei na mente né? Lembrei do material.*
B17	*Eu lembrei um pouco do material e pra mim não teve muita dificuldade não, porque eu só peguei o número cinquenta aqui* (referindo-se à conversão 50% = 5/10), *aí, eu peguei o número cinco e botei o dez embaixo.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

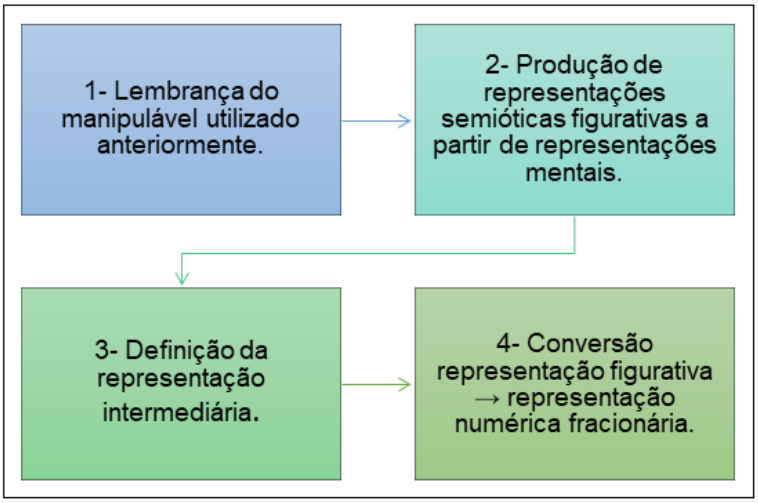
De modo geral, as falas dos participantes revelaram que as dificuldades relacionadas à mudança no sentido da conversão parecem ter sido atenuadas frente à criação de uma estratégia resolutiva própria, deduzida a partir do caminho de

conversão trabalhado, anteriormente, no grupo.

Dessa forma, a importância das lembranças oriundas da experiência com o material manipulável na viabilização da conversão num sentido heterogêneo ficou evidente, sobretudo, na maneira como quatro dos cinco participantes descreveram seus caminhos resolutivos.

A produção do participante B7 revela que, entre a identificação da representação de partida e a escrita da representação de chegada, houve um caminho resolutivo que se baseou no que chamaremos de *intermediação figurativa externa* e que pode ser dividido em quatro passos, conforme o esquema apresentado na figura 72.

Figura 72 - Caminho resolutivo adotado para a conversão percentual → fração.



Fonte: Elaborada pelo autor.

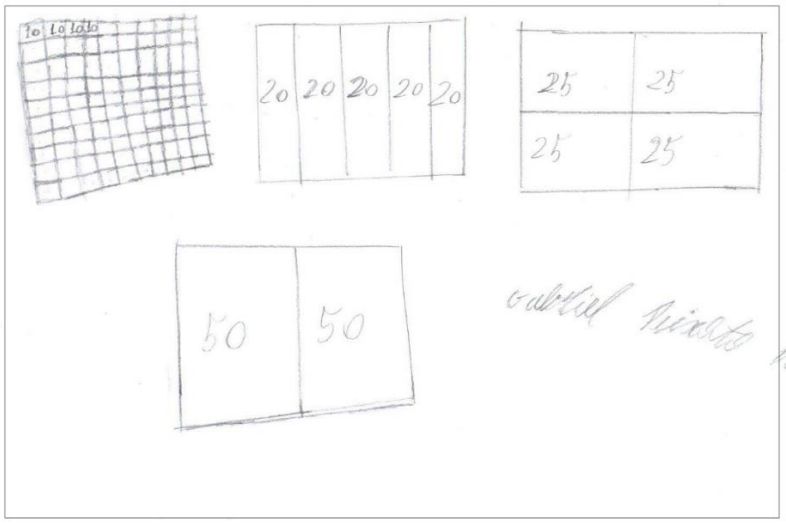
Com a afirmação “aí, eu lembrei do material”, B7 começa a explicar como pensou para realizar as conversões no sentido *percentual → fração*. A lembrança da experiência vivenciada, anteriormente, com o manipulável foi, segundo a sua fala, o primeiro passo para produzir um caminho para um sentido de conversão, até então, não trabalhado.

Nesse momento, a afirmação do estudante evidenciava nada mais que a existência de imagens mentais que, segundo Duval (2009), não podem ser confundidas com representações mentais. Para o autor, as imagens mentais são entidades psicológicas relacionadas à percepção, já as representações mentais “recobrem um domínio mais amplo que o das imagens” (Duval, 2009, p. 45). Nesse sentido, não bastaria que a experiência com o manipulável tivesse ajudado a criar tão somente imagens mentais, era essencial que a sua utilização tivesse fomentado o

surgimento de representações mentais, ou seja, produções internas que cumprissem a função de objetivação para o indivíduo e que lhe fossem úteis para realizar tais conversões.

O segundo passo foi reproduzir, através de desenhos, os inteiros que compunham o manipulável, com as suas diferentes subdivisões, conforme apresentado na figura 73.

Figura 73 - Desenhos produzidos pelo participante B7.



Fonte: Dados da pesquisa.

A importância dessas produções figurais na estratégia resolutiva do participante fica ainda mais evidente neste trecho da entrevista:

Pesquisador: *E para fazer esse aqui?* (referindo-se à conversão 40% = 2/5)

Participante: *Porque eu olhei aqui* (referindo-se ao desenho do todo dividido em cinco partes com o número vinte escrito em cada uma delas).

Pesquisador: *Aqui do mesmo jeito?* (referindo-se à conversão 75% = 3/4).

Participante: *Tudo.*

Pesquisador: *Fez tudo pelo desenho?*

Participante: *Sim.*

Os desenhos buscam representar quatro retângulos subdivididos em duas, quatro, cinco e cem partes. Para cada parte, o participante atribuiu um valor numérico, de modo que cada retângulo inteiro pudesse representar 100. Os retângulos estavam, portanto, subdivididos em duas partes de 50, quatro partes de 25 e cinco partes de 20. A representação subdividida em cem partes tinha o número 10 no topo das primeiras colunas com dez quadradinhos.

Tal capacidade de elaboração por parte do estudante sugeria, agora, a existência de representações mentais criadas a partir de sua experiência com as representações semióticas produzidas com o material.

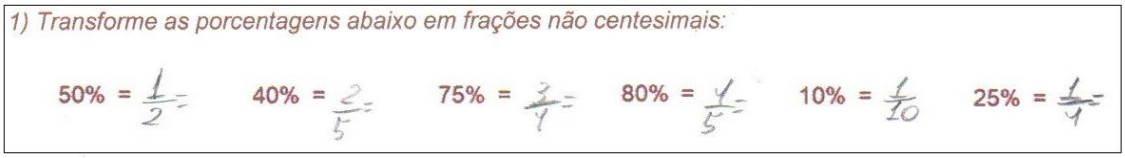
O passo seguinte consistia na verificação de qual destas subdivisões geraria partes que, consideradas unicamente ou somadas a outras partes, corresponderiam ao número percentual a ser convertido. Assim, para a conversão de 40%, por exemplo, tem-se que 40 corresponde a duas partes de 20. Logo, o inteiro subdividido em cinco partes de 20 seria adequado.

Nota-se que as figuras são utilizadas como representações intermediárias no caminho de conversão adotado. Pode-se dizer que, aqui, essas representações figurativas produzidas por B7 cumprem, ao menos, duas funções auxiliares em relação à representação numérica percentual de partida: a Interpretação Heurística e a Interpretação Explicativa (Duval, 1999b).

A função de Interpretação Heurística se caracteriza à medida que as figuras oferecem para o participante a possibilidade de “tratamentos visuais que contribuem para a escolha de um caminho na resolução de um dado problema” (Moretti e Baerle, 2022, p. 588). Já, a Interpretação Explicativa é proporcionada por representações que apresentam, de outra forma, “as informações contidas de modo explícito ou implícito na representação principal” (Moretti e Baerle, 2022, p. 589). Nesse sentido, é certo que as representações figurativas produzidas têm papel fundamental nesse caminho de conversão, e isso ocorre, sobretudo, a partir das informações relativas ao objeto representado que tais figuras ajudam a evidenciar.

Por fim, realizava-se a conversão dessa representação figurativa para a representação numérica fracionária, relacionando o número de partes consideradas na figura com o numerador e o número total de partes da figura com o denominador. Com isso, o participante conseguiu realizar todas as conversões propostas na atividade 1 do Instrumento Diagnóstico, conforme apresentado na figura 74.

Figura 74 - Resoluções de B7 (Instrumento Avaliativo – Q1).



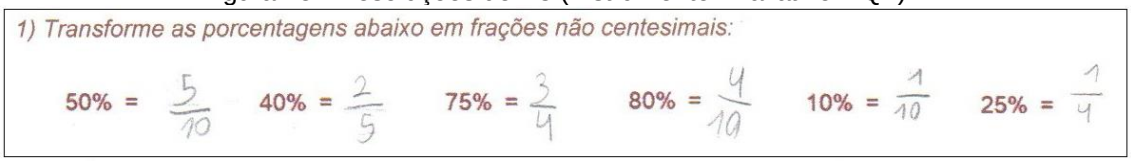
Fonte: Dados da pesquisa.

Tal estratégia já havia sido identificada no experimento piloto, em que a

participante também produzira desenhos que remetiam ao material utilizado anteriormente. Ao ser indagada a esse respeito pelo pesquisador, a estudante respondeu que tinha resolvido fazer os desenhos porque, em suas palavras, “entenderia melhor do que na mente” (quadro 13).

O participante B3 também sugere, ao explicar como fez para realizar a conversão 75% = 3/4, que a lembrança de sua experiência anterior com o manipulável foi importante para transformar cinco das seis representações percentuais apresentadas no instrumento em suas representações fracionárias correspondentes, conforme vemos na figura 75.

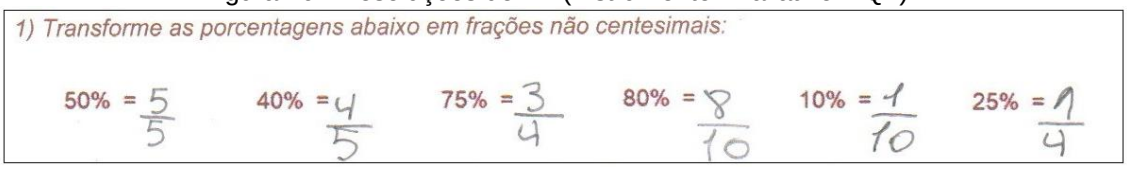
Figura 75 - Resoluções de B3 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Já o participante B4, como apresenta a figura 76, não acertou as duas primeiras conversões propostas na atividade. Porém, a partir dos dados obtidos com a entrevista, percebe-se que, para obter êxito nas quatro conversões seguintes, o participante utilizou imagens referenciais elaboradas a partir da experiência anterior com o material manipulável, como revelam vários trechos de sua fala: “cada um era vinte e cinco”, “cada linha era dez”, “uma linha só de dez era dez”, “o quadrinho era vinte e cinco”.

Figura 76 - Resoluções de B4 (Instrumento Avaliativo – Q1).



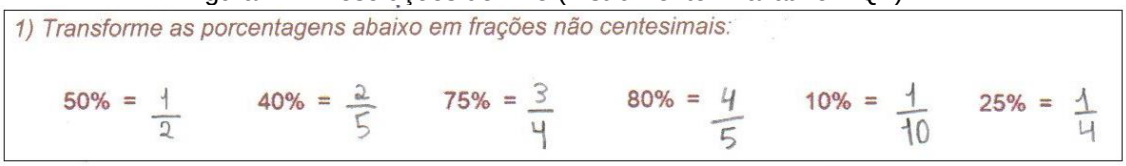
Fonte: Dados da pesquisa.

A sua fala revela uma estratégia que consistia em lembrar de partes do todo que adicionadas ou consideradas unicamente pudessem corresponder ao número percentual proposto para a conversão. Nesse sentido, as imagens mentais que dispunha foram fundamentais para realizar as conversões no sentido *percentual → fração*, sobretudo, aquelas relacionadas a ideia de 10% como 1/10 e 25% como 1/4.

O participante B15 afirmou que lembrou do material e fez questão de dizer que

“tinha várias outras opções” para as respostas que deu, demonstrando, além de muita segurança, a percepção de equivalências referenciais entre algumas frações. Ao explicar, por exemplo, que poderia “botar outra opção que seria dois quartos”, referindo-se à conversão 50% = 1/2, o participante demonstrou reconhecer o mesmo objeto representado em duas diferentes representações fracionárias. Desse modo, conforme apresentado na figura 77, realizou com êxito todas as conversões propostas.

Figura 77 - Resoluções de B15 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que os caminhos de conversão descritos por B3, B4, B7 e B15 parecem possuir algo em comum, a saber, têm como ponto de partida as lembranças da experiência anterior com o material manipulável. No entanto, no caso dos participantes B3, B4 e B15, não houve a necessidade da reprodução de elementos do material manipulável através de desenhos, ou seja, a *intermediação figurativa* não se manifestou de modo semiótico e externo. Contudo, suas falas sugerem que, assim como B7, os participantes também se valeram da mediação de referências figurais, utilizando, inclusive, o mesmo caminho de conversão, só que por meio de tratamentos internos.

Nesse sentido, podemos dizer que esses participantes realizaram suas conversões baseados no que chamaremos de *intermediação figurativa interna*, ou seja, a identificação da subdivisão adequada, a verificação de quantas partes, dado o valor de cada uma delas, corresponderiam ao número percentual a ser convertido e, por fim, a passagem para a representação numérica fracionária parecem ter ocorrido totalmente a partir de imagens e representações mentais. A adoção dessa estratégia corrobora a afirmação de que “os tratamentos figurais são operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica, para obter uma modificação configural desta figura” (Duval, 2012, p.287).

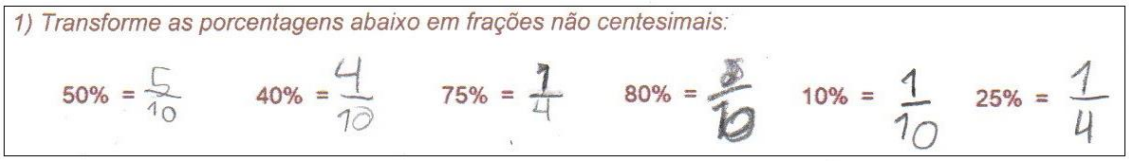
A relação entre as representações mentais, que serviram de base para os tratamentos internos feitos pelos participantes, e as representações intermediárias produzidas, com o material manipulável, no caminho de conversão trabalhado durante

a intervenção ficou explícita também em trechos de falas, tais como “lembrei do que tinha quatro”, “uma linha só de dez era dez”, “porque o quadradinho era vinte e cinco”, entre outros. Essa relação se justifica porque, segundo Duval (2009, p.46), “as representações mentais não se prestam a tratamentos a não ser por meio da mobilização de um registro semiótico e da prática “mental” desse registro” (Duval, 2009, p. 46).

A estratégia demonstrou boa efetividade com 83% de acertos nas conversões propostas.

Já, a resposta dada por B17 não nos permitiu concluir, a partir de sua fala, como o participante, de fato, realizou cinco das seis conversões propostas, conforme apresentado na figura 78.

Figura 78 - Resoluções de B17 (Instrumento Avaliativo – Q1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Há, em sua descrição, uma discreta menção ao material manipulável utilizado anteriormente, mas, sobretudo, a sugestão de que a congruência semântica foi importante para alguns acertos, como parece indicar a sua explicação para a conversão de 50%: “eu peguei o número cinco e botei o dez embaixo”.

Temos que a experiência com o material manipulável, utilizado como representação intermediária no caminho de conversão *fração → percentual*, trabalhado no Grupo B, parece ter fomentado a produção de representações mentais que, conforme percebemos nas falas dos participantes, foram importantes para a criação de uma estratégia viável de transformação no sentido oposto.

Segundo Duval (2003, p.31), isso ocorre porque, ao realizar tratamentos em representações semióticas produzidas externamente, o indivíduo as interioriza, transformando-as em “representações mentais úteis ou pertinentes em matemática”. Corrobora nesse sentido, o fato de que alguns participantes produziram figuras relacionadas ao caminho de conversão trabalhado na intervenção, indicando o papel significativo que as representações interiorizadas, durante aquela experiência, tiveram na intermediação entre a representação percentual de partida e a representação fracionária de chegada.

Assim, no que concerne à conversão no sentido oposto, o quadro 22 apresenta uma síntese das estratégias utilizadas em ambos os grupos, bem como dos elementos que as caracterizam.

_Quadro 22 - Estratégias utilizadas pelos grupos A e B na resolução da atividade 1.

Grupos	Estratégias utilizadas	Principais elementos característicos
A	Conservação de transparência	- Realização de substituições semanticamente congruentes. - Inobservância da equivalência referencial. - Reconhecimento de signos e não de unidades de sentido. - Utilização de regras de correspondência próprias e equivocadas.
	Validação da representação de chegada	- Sucessivas conversões fração → percentual. - Alto custo em tempo de execução (abandono da estratégia). - Baixa efetividade (26% de acertos).
B	Intermediação figurativa externa	- Referência ao material manipulável utilizado anteriormente. - Produção de figuras como representações intermediárias. - Observação de equivalências referenciais. - Boa efetividade (100% de acertos).
	Intermediação figurativa interna	- Referência ao material manipulável utilizado anteriormente. - Prevalência de tratamentos internos. - Observação de equivalências referenciais. - Boa efetividade (83% de acertos).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com exceção da *conservação de transparência*, todas as demais estratégias estavam relacionadas ao caminho de conversão trabalhado, em cada grupo, durante a intervenção. Essa estratégia também foi a única com efetividade nula, ou seja, 0% de acertos nas conversões propostas.

A *validação da representação de chegada* consistiu na reprodução do caminho de conversão aprendido anteriormente. Nesse sentido, os participantes, embora tenham demonstrado boa efetividade na realização da conversão *fração → percentual*, não conseguiram, a partir do processo de conversão por meio das escritas simbólicas que foi trabalhado durante a aula, produzir um caminho para a conversão no sentido oposto. A estratégia também se mostrou pouco efetiva (44% de acertos),

uma vez que os participantes tendiam à desmobilização e abandono da estratégia frente às muitas tentativas que precisavam ser feitas até determinar a representação de chegada na conversão.

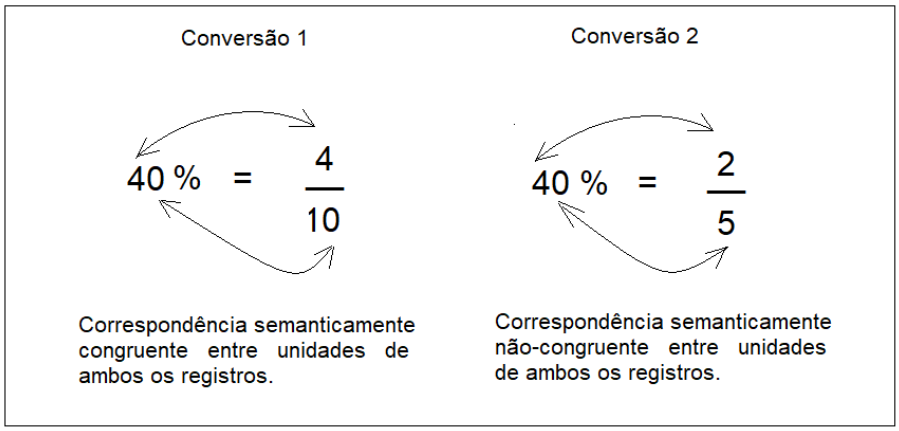
A utilização da *intermediação figurativa externa* e da *intermediação figurativa interna* demonstrou, por sua vez, a importante influência que o processo de conversão por meio do material manipulável, antes trabalhado, teve na produção e execução de um caminho viável para a conversão no sentido oposto. Tais estratégias apresentaram boa efetividade, resultando em 100% de acertos para o participante que partiu das lembranças de sua experiência anterior para produzir representações figurativas intermediárias e 83% de acertos para os participantes que seguiram o mesmo caminho, mas de modo totalmente interno.

8.1.2 As estratégias utilizadas e a variação de não-congruência semântica

No capítulo “Os números racionais”, em que analisamos, a partir de Duval (2011), o fenômeno de congruência e não-congruência semântica entre os registros numéricos fracionários e percentuais, vimos que, comumente, tais representações apresentam elevado grau de não-congruência semântica. Isso ocorre porque, quando a fração envolvida na conversão não é centesimal, ou seja, de denominador 100, os critérios de correspondência semântica uma a uma entre as unidades de sentido e de univocidade semântica terminal não são atendidos. Nesses casos, a coordenação de diferentes representações não é realizada de forma rápida e espontânea, como se os obstáculos relacionados ao fenômeno de não congruência não existissem (Duval, 2012).

Ne entanto, pode-se dizer que, em ambos os grupos, houve a realização de conversões com maior e menor nível de transparência entre os registros de partida e chegada. Desse modo, os acertos observados, tanto em A quanto em B, contemplaram diferentes graus de não-congruência semântica, como os exemplificados no esquema apresentado na figura 79.

Figura 79 - Exemplo de não-congruência semântica em diferentes graus.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vê-se que, na conversão 1, há uma correspondência semanticamente congruente entre as unidades elementares de sentido expressas pelos signos 4 e 0 em ambos os registros, o que não ocorre para a conversão 2, proporcionando maior transparência entre as representações.

Observou-se, portanto, que, dentre todas as conversões realizadas corretamente, houve diferentes níveis de transparência entre as representações, indicando que o fenômeno de não-congruência semântica não foi um limitador importante para as estratégias bem sucedidas.

8.1.3 Apreensões observadas a partir das resoluções da atividade 1

A partir das resoluções dos participantes e, sobretudo, das suas descrições sobre a forma como pensaram para realizar as conversões propostas na atividade 1, pudemos, além de estabelecer uma classificação para essas estratégias empregadas, identificar o que elas sugerem a cerca de apreensões, realizadas e não realizadas, em relação ao objeto representado.

Nesse sentido, pode-se afirmar que o grupo A demonstrou, a partir da aprendizagem do caminho de conversão baseado nas escritas simbólico-numéricas:

- Domínio sobre tratamentos simbólicos para transformar uma dada fração em sua fração centesimal equivalente.

- Dificuldade na dedução de um caminho de conversão que partisse da representação numérica percentual do objeto representado e chegasse a sua representação numérica fracionária.

A dificuldade de, a partir do caminho de conversão num sentido, pensar um caminho viável para a conversão no sentido oposto pode estar relacionada à economia de tratamento existente no processo de conversão apresentado. Como vimos, o caminho de conversão trabalhado no Grupo A passava, sobretudo, pela determinação da fração centesimal equivalente à fração a ser convertida. No entanto, o processo apresentado não demonstrava quais tratamentos seriam necessários para o caminho de volta, ou seja, a determinação de qualquer fração equivalente a partir de uma fração centesimal. Se, por um lado, essa economia de tratamento favorecia a conversão num sentido de forma prática e rápida, por outro, demandava dos participantes a capacidade de deduzir os tratamentos necessários para a conversão no sentido oposto, o que não ocorreu.

Com relação ao Grupo B, pode-se dizer que, a partir da aprendizagem do caminho de conversão com o material manipulável, os participantes conseguiram:

- Reconhecer equivalências referenciais entre diferentes representações fracionárias.

- Deduzir um caminho de conversão tendo a representação numérica percentual do objeto como registro de partida e a sua representação numérica fracionária como registro de chegada.

As resoluções e falas dos participantes indicaram a importância que as conversões realizadas durante a intervenção tiveram na percepção dessas equivalências e, principalmente, na realização de um tipo de conversão, até então, não proposto. Nesse sentido, destacaram-se, sobretudo, as representações figurativas produzidas a partir das lembranças que os participantes tiveram da experiência com o material manipulável utilizado.

Portanto, considerando a análise quantitativa e qualitativa dos resultados da atividade 1 do Instrumento Avaliativo, pode-se dizer que o caminho de conversão trabalhado em B foi, do ponto de vista cognitivo, mais profícuo que o caminho de conversão trabalhado em A, pois fomentou entre os participantes daquele grupo a apropriação de habilidades não observadas entre os participantes deste outro.

A análise das resoluções e das falas colhidas na entrevista parece conferir aos participantes do grupo B o que Duval (2013) chama de *gestos intelectuais*, ou seja, ações próprias da atividade matemática, tais como conversões e tratamentos, que não resultam da aquisição dos conceitos, pois são, pelo contrário, a condição necessária para tal aquisição (Duval, 2013).

Concluímos, desse modo, que, para uma mesma conversão, a exploração de diferentes tratamentos e de diferentes representações intermediárias também resultou em diferentes apreensões acerca do objeto matemático em questão.

8.2 A percepção da parte em relação ao todo na representação

Analisamos a percepção dos participantes no que concernia ao tamanho da parte em relação ao respectivo todo a partir das resoluções dadas às atividades 2 e 3 do Instrumento Avaliativo.

8.2.1 Estratégias utilizadas para indicar a fração maior e a menor que a metade do todo

A atividade 2, composta pelos itens “a” e “b”, propunha a identificação das frações que representariam mais que a metade e menos que a metade do todo, respectivamente. O quadro 23 apresenta as falas dos participantes do Grupo A ao descreverem a forma como pensaram para determinar tais frações.

Quadro 23 - Falas dos participantes do Grupo A referentes à identificação das frações representantes de partes maiores e menores que a metade.

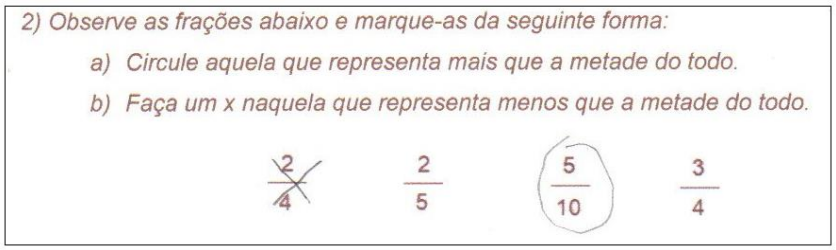
Como você pensou para descobrir que fração era maior e menor que a metade?	
A1	*A maior eu pensei que os números maiores que tivessem em cima e os números maiores que tivessem embaixo.*
A2	*Eu fui botando cada uma* (convertendo cada fração em porcentagem) *e vendo qual era a maior e a menor. Eu fiz todas e vi qual dava a maior e a menor.*
A7	*Do mesmo jeito que eu fiz essa* (referindo-se ao quesito 1). *Aí eu fiz, se desse cinquenta por cento, eu via que era a metade e, aí, eu circulava.*
A10	*A mais que a metade é o quê? Dez* (apontando para a fração 5/10). *Aqui é a metade* (apontando para a fração 2/5). *Aí, menos que a metade é dois quartos de dois* (apontando para a fração 2/4).
A18	Sem resposta.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A fala do participante A1 revela que sua estratégia resolutiva esteve baseada

no que chamaremos de *redução da representação ao signo numérico*, ou seja, a não apreensão da representação semiótica e a consideração, tão somente, dos signos numéricos em seu interior. Dessa forma, para atender ao que propunha a atividade 2 do Instrumento Avaliativo, A1 estabeleceu o seguinte critério: a fração que representaria mais que a metade seria aquela cujo número “em cima” (numerador) e o número “embaixo” (denominador) fossem os maiores, dentre as frações apresentadas. Portanto, seguindo tal compreensão, a fração menor que a metade seria, por sua vez, aquela com os menores números “em cima” e “embaixo”. Desse modo, A1 indicou como resolução para a atividade as frações 5/10 e 2/4, conforme apresentado na figura 80.

Figura 80 - Resoluções de A1 (Instrumento Avaliativo – Q2).



Fonte: Dados da pesquisa.

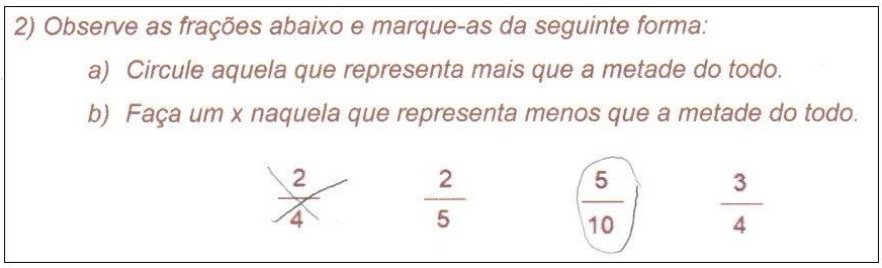
Ao comparar os números “em cima” e os números “embaixo”, nas frações apresentadas, A1 ignora a pertinência matemática do signo “/” (traço da fração) nessas representações, ou seja, não percebe a relação existente entre o numerador e o denominador e, por conseguinte, a relação parte-todo do objeto representado.

A *redução da representação ao signo numérico*, praticada pelo participante, também evidencia o não reconhecimento das unidades de sentido no interior das representações. Ao considerar, de forma equivocada, a fração 5/10 maior que a fração 3/4, já que o signo “5” tem maior valor numérico que o signo “3” e “10” também é maior “4”, o estudante demonstra não compreender o que significa tais signos em suas respectivas representações.

Tal equívoco também pôde ser percebido na maneira como A10 descreveu a sua resolução. Ao apontar para a fração 5/10 e dizer que dez é “a mais que a metade”, o participante restringe sua atenção ao signo “10” no interior da representação, atribuindo-lhe um sentido que nada tem a ver com o objeto representado. Esse sentido atribuído, de forma arbitrária, pelo estudante ao signo passa a ser, também, o sentido de toda a representação fracionária.

Nesse caso, A10 considerou a fração com denominador 10 como uma representação de algo maior que a metade e, portanto, mais próxima da representação do todo que as demais frações ali dispostas. Assim, partindo dessa referência, o participante indica, em sua fala, a fração 2/5 como sendo a metade, já que 5 é a metade de 10, e deduz que a fração 2/4 é menor que a metade, já que 4 é menor que 5. A figura 81 apresenta as resoluções de A10.

Figura 81 - Resoluções de A10 (Instrumento Avaliativo – Q2).



Fonte: Dados da pesquisa.

A estratégia usada por A10 privilegia a comparação entre signos e não entre representações e, por essa razão, observa-se o emprego de mais um caminho resolutivo ineficaz para estabelecer a magnitude da parte representada em função do seu respectivo todo.

Tem-se, nesses casos, a atenção restrita apenas aos signos numéricos que, alienados dos demais elementos que compõem a representação semiótica, podem ser comparados com os signos numéricos de outras representações. Em outras palavras, busca-se privilegiar a comparação entre os valores numéricos visualizados, isoladamente, no interior das representações em detrimento da comparação entre as magnitudes ou tamanhos dos objetos matemáticos ali representados.

Nesse contexto, a representação fracionária é percebida, tão somente, como dois números independentes e separados por um traço. Corroboram nesse sentido pesquisas como a de Santos (2011), que investigou as resoluções de alunos do 9ª ano do Ensino Fundamental em avaliações externas, na Rede Municipal do Recife, mostrando que parte dos estudantes interpretam a representação fracionária como dois números distintos. Desse modo, ao observar a fração, distingue-se dois números inteiros em vez de um número racional.

Assim, os estudantes não compreendem que, como bem observa Lamon (2007), enquanto a grandeza de um número inteiro é dada pelo conjunto de unidades que nomeia, a grandeza de um número racional positivo é, por sua vez, determinada

por sua relação com a unidade.

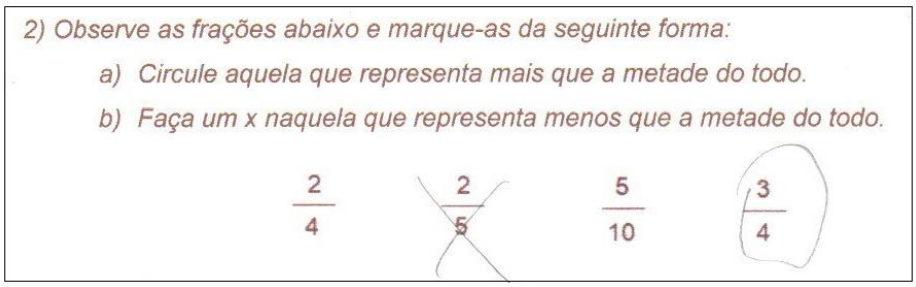
Tal dificuldade também já havia sido destacada por Behr e Post (1992) que propuseram um cuidadoso pensar sobre o que faz a criança compreender a representação numérica fracionária como uma só entidade e, ainda, que essa entidade tem um tamanho e que esse tamanho pode ser mensurado.

Já, as falas de A2 e A7 revelaram que a estratégia resolutiva adotada por esses participantes foi recorrer à conversão *fração → percentual* para, então, concluir sobre o tamanho das partes em relação ao todo.

Nota-se que o tamanho da parte em relação ao todo não é percebido nas representações apresentadas na atividade 2 e, portanto, a conversão para a representação percentual, em que as referências de metade (50%) e todo (100%) são mais conhecidas, surge como necessária.

Embora tal estratégia tenha resultado em alguns acertos, como vemos nas resoluções do participante A2 apresentadas na figura 82, percebe-se a existência de grandes lacunas na apreensão das representações numéricas fracionárias que impedem, sobretudo, no que concerne ao seu significado parte-todo, o reconhecimento dos objetos matemáticos ali representados.

Figura 82 - Resoluções de A2 (Instrumento Avaliativo – Q2).

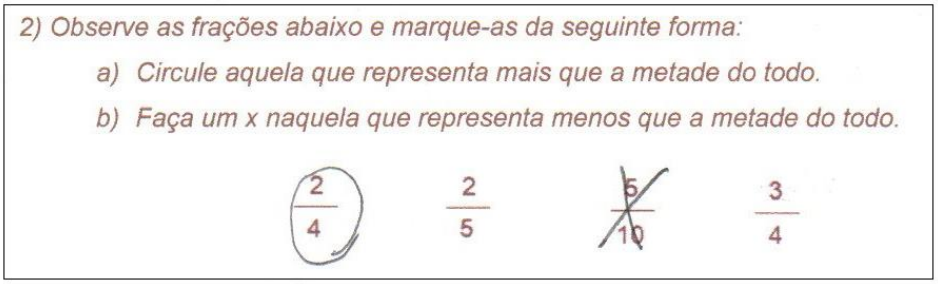


Fonte: Dados da pesquisa.

Essa dificuldade levou o participante a fundamentar seu processo de resolução no que chamaremos de *mudança para representação reconhecível*, ou seja, a troca da representação ainda não apreendida por uma que lhe fosse mais familiar.

Nota-se que o participante A7 não entendeu o comando da atividade e achou que deveria marcar as frações que representavam a metade do todo, como fica claro no trecho de sua fala: “se desse cinquenta por cento, eu via que era a metade e, aí, eu circulava”. Nesse sentido, o estudante fez suas marcações conforme apresentado na figura 83.

Figura 83 - Resoluções de A7 (Instrumento Avaliativo – Q2).



Fonte: Dados da pesquisa.

Por reconhecer o sentido da representação 50% (cinquenta por cento), o participante decidiu converter as frações em representações percentuais, ou seja, fazer, a exemplo do que ocorreu com A2, a *mudança para representação reconhecível*, e concluir quais das partes representadas corresponderiam a tal percentual, ou seja, à metade do todo.

No quadro 24 temos, dessa vez, as falas dos participantes do Grupo B com as explicações relativas às resoluções atribuídas por esses participantes à atividade 2.

Quadro 24 - Falas dos participantes do Grupo B referentes à identificação das frações representantes de partes maiores e menores que a metade.

Como você pensou para descobrir que fração era maior e menor que a metade?	
B3	*Esse aqui. Circule aquele que representa... que é a metade do todo. Aí, eu lembrei desse* (referindo-se à fração 5/10)*, porque o cinco é a metade de dez.*
B4	*O número é alto. Aí, perguntava qual era o mais alto, aí, eu coloquei cinco de dez e o que era menor eu coloquei dois de quatro.*
B7	*Eu botei o número do todo nos dedos e contei.*
B15	*Aqui eu somei: dois quartos que daria cinquenta por cento, é a metade, dois quintos seria quarenta, cinco décimos seria a metade que é cinquenta e três quartos seria mais que a metade do todo que seria setenta e cinco por cento. Aí, aqui* (referindo-se à fração 2/5) *eu botei menos que a metade. Esses dois aqui* (referindo-se às frações 2/4 e 5/10) *são iguais, são cinquenta e cinquenta.*
B17	*Eu pensei porque, na conta anterior* (referindo-se ao primeiro item do quesito anterior)*, eu já sabia que era cinquenta por cento, aí, eu circulei. A minoria, eu só marquei o "x".*

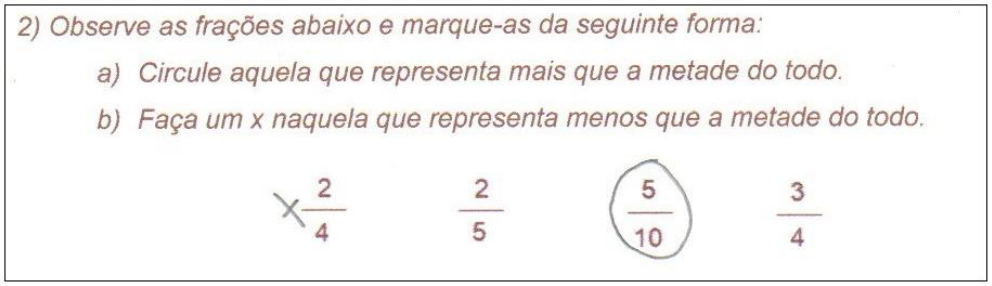
Fonte: Elaborado pelo autor.

As falas dos participantes B4 e B17, além de revelarem a não compreensão do que se estava pedindo na atividade, também evidenciaram os equívocos cometidos em suas resoluções. O participante B4 considerou que deveria circular a maior fração

e fazer um “x” naquela que seria a menor. Por sua vez, B17 entendeu que precisaria identificar a representação de cinquenta por cento e, ainda, indicar a “minoria”, ou seja, a menor fração dentre as opções. Para tanto, os participantes observaram e compararam os valores numéricos dos signos constituintes das representações fracionárias.

Desse modo, as estratégias resolutivas usadas em ambos os casos também estiveram baseadas na *redução da representação ao signo numérico* e, assim como ocorreu com os participantes A1 e A10, no Grupo A, as frações indicadas foram 5/10 e 2/4, conforme apresenta a figura 84.

Figura 84 - Resoluções de B4 (Instrumento Avaliativo – Q2).



Fonte: Dados da pesquisa.

Diferente da fala em que explicava como realizou as conversões no sentido *percentual → fração*, o participante B4 não fez, dessa vez, menção alguma à experiência anterior com o material manipulável. A opção equivocada pela comparação de valores numéricos visualizados no interior das representações fracionárias para se chegar à resolução da atividade 2 parece indicar que, nesse caso, as referências mentais produzidas a partir da utilização do material, e que o ajudaram na dedução de um caminho para as conversões propostas na atividade 1, foram totalmente ignoradas.

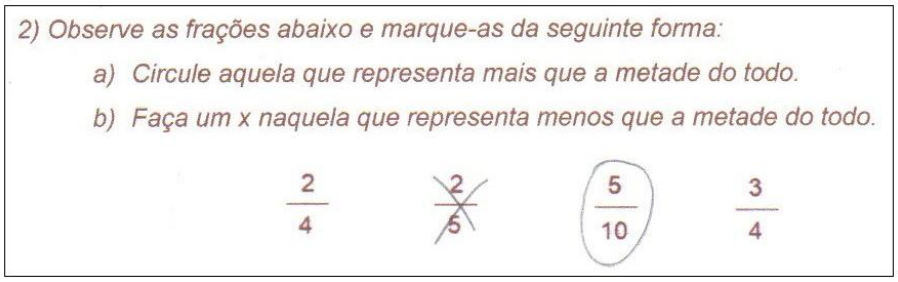
A estratégia escolhida indica que o participante manteve sua atenção restrita aos signos numéricos percebidos nas representações e não considerou as possíveis interiorizações oriundas de sua experiência tátil-visual com o material manipulável.

Por outro lado, os participantes B3, B7 e B15 desenvolveram estratégias de resolução que partiram do *reconhecimento da relação parte-todo na representação*. Nesse sentido, pode-se afirmar que, diferente do que ocorrera no Grupo A com os participantes A2 e A7, que precisaram realizar conversões para a representação percentual, o tamanho da parte em relação ao todo foi percebido na própria

representação fracionária.

Em sua fala, B3 demonstra que também se enganou quanto ao comando do item “a” da atividade e, por esta razão, circulou a fração que representaria a metade, e não a que representaria mais que a metade do todo. Não houve uma referência clara à utilização anterior do manipulável. A sua justificativa para a marcação da fração 5/10 como representação da metade do todo, “porque cinco é a metade de dez”, sugere o reconhecimento do numerador e denominador da fração como parte e todo, respectivamente. Já, a indicação da fração que representaria menos que a metade do todo foi feita corretamente como apresenta a figura 85.

Figura 85 - Resoluções de B3 (Instrumento Avaliativo – Q2).



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante B7, por sua vez, fez referência à utilização do próprio corpo como forma de pensar as frações propostas na atividade. Depois da afirmação “eu botei o número do todo nos dedos e contei”, o estudante continua explicando como desenvolveu suas resoluções, conforme vemos neste trecho da entrevista:

Pesquisador: *Por que esse daqui é menor que a metade* (referindo-se à fração 2/5)?

Participante: *Porque sobra três. Se fosse três, sobrava dois.*

Pesquisador: *Por que esse daqui é maior que a metade* (referindo-se à fração 3/4)?

Participante: *Porque sobra um.*

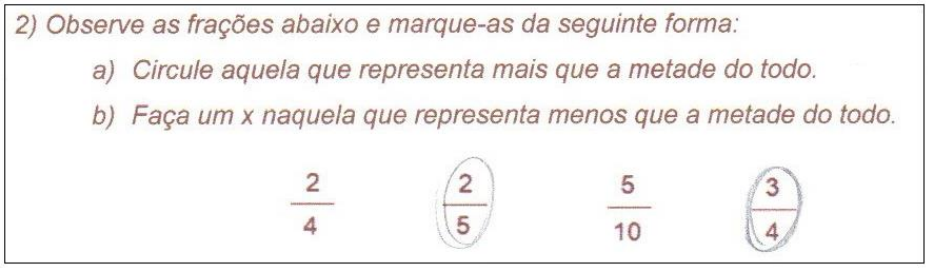
Em sua estratégia, o numerador da fração determinava o número de dedos a ser considerado num todo cujo número total de dedos era indicado pelo seu denominador. Assim, como a fração 2/5 representa dois dentre cinco dedos é, portanto, menor que a metade.

Sua fala revela a compreensão da representação fracionária como uma expressão da magnitude ou tamanho da parte em relação ao todo representado, pois,

ao afirmar que 2/5 é menor que a metade porque “sobra três” e que “se fosse três, sobrava dois”, o participante parece ter a clareza de que tal representação refere-se a um todo dividido em cinco partes e que duas e três dessas partes representam, respectivamente, menos e mais que a sua metade. Sua explicação sobre o porquê de considerar 3/4 maior que a metade corrobora com tal percepção: “porque sobra um”.

Embora tenha usado o mesmo tipo de marcação para indicar as representações, como demonstra a figura 86, não há dúvidas, a partir da entrevista, que B7 conseguiu identificar corretamente as frações que respondiam à atividade.

Figura 86 - Resoluções de B7 (Instrumento Avaliativo – Q2).

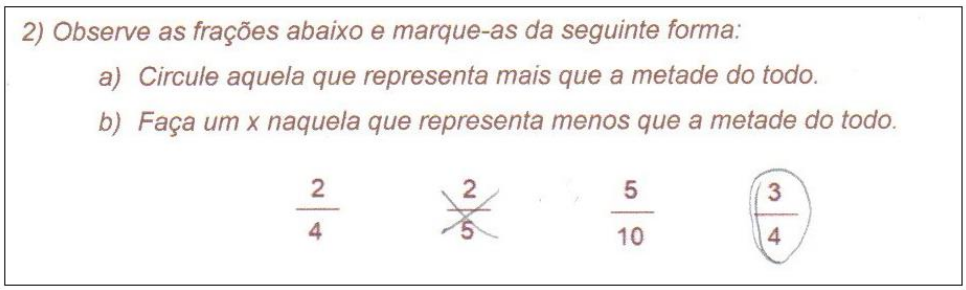


Fonte: Dados da pesquisa.

O participante B15 também demonstrou a compreensão do significado parte-todo atribuído à fração. Em sua fala, percebe-se a clareza de que tal representação exprime a relação entre o número de partes iguais consideradas e o número total de partes no todo subdividido.

Contudo, ao descrever com muita riqueza a maneira como pensou para responder a atividade conforme apresentado na figura 87, B15 evidencia outras importantes apreensões, tais como a identificação de equivalências entre representações fracionárias distintas e o reconhecimento do mesmo objeto representado a partir de suas diferentes formas de representação.

Figura 87 - Resoluções de B15 (Instrumento Avaliativo – Q2).

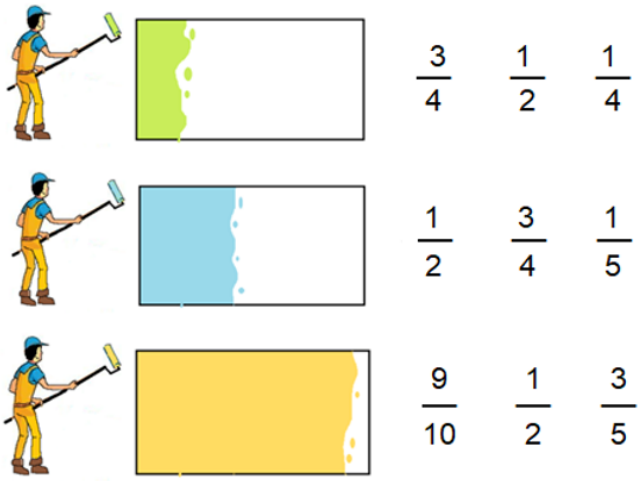
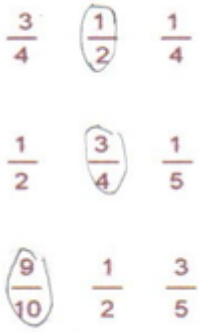


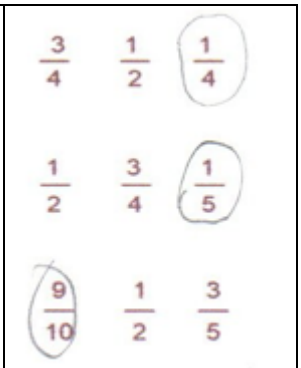
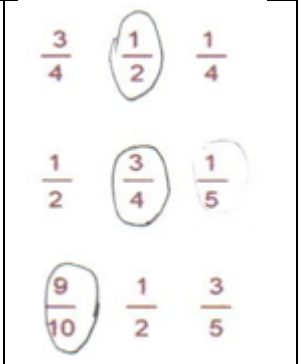
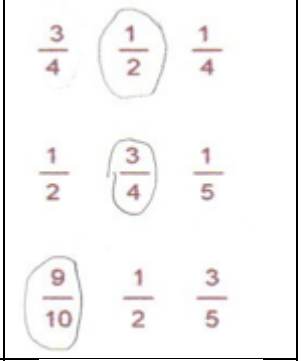
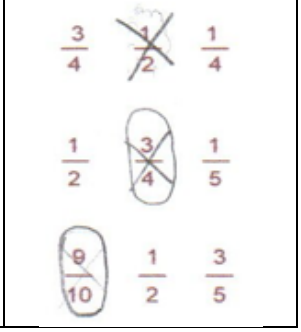
Fonte: Dados da pesquisa.

8.2.2 Estratégias utilizadas para associar a fração à ilustração apresentada

A atividade 3 propunha que os participantes associassem a cada uma das três ilustrações, e por meio de estimativas intuitivas, a fração que julgassem estar mais próxima de representar a relação parte-todo ilustrada. O quadro 25 apresenta as falas dos participantes do Grupo A ao descreverem a forma como pensaram para escolher tais frações e também as suas resoluções no Instrumento Avaliativo.

Quadro 25 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo A referentes à identificação das frações mais próximas das partes representadas figurativamente.

<table>
<tr><td colspan="3">Como você pensou para escolher as frações mais próximas das partes representadas nas figuras?
 
</td></tr>
<tr><td>A1</td><td>Eu pensei assim, porque aqui tá muito pouco (referindo-se à primeira ilustração). Aí, como tá pouco, eu escolhi o número menor. Os que faltavam mais ou menos eu escolhi os números que tinham a mais. O que faltava pouco escolhi o número que já estava muito mais pra frente.</td><td> 
</td></tr>
</table>

A2	*Do mesmo jeito que eu fiz a outra* (referindo-se à atividade 2). *Eu copiei pra ver qual dava vinte e cinco por cento* (referindo-se à primeira ilustração).	
A7	*Eu fui vendo qual era os "porcento" daqui. Chutei uma aqui e fiz.*	
A10	*Aqui é só pensar mesmo. Como foi pouquinho, aí foi um de dois* (referindo-se à primeira ilustração). *Aqui foi mais ou menos a metade, aí é três de quatro* (referindo-se à segunda ilustração). *Aqui foi quase a parede toda, então é nove de dez* (referindo-se à terceira ilustração).	
A18	*Eu fiz como se eu tivesse fazendo porcentagem, contei e marquei.*	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os participantes A1 e A10 usaram como estratégia relacionar o tamanho da parte representada na ilustração com os valores numéricos dos signos no interior das representações fracionárias, o que pressupõe, outra vez, a ideia de *redução da representação ao signo numérico*.

Assim, nas resoluções de A1, a menor parte pintada no muro foi relacionada à

fração com menor denominador e a maior parte à fração com maior denominador. Para a figura cuja parte aproximava-se da metade do todo, o estudante escolheu a fração, dentre as alternativas, cujo valor numérico do denominador estaria entre o maior e o menor. A opção pelo denominador como referencial para as comparações entre as frações fica evidente quando o participante responde sobre a atividade seguinte: “pensei nos números maiores que tivessem embaixo”. O participante A10 também seguiu o mesmo caminho resolutivo, estabelecendo relações entre os valores numéricos expressos pelos signos constituintes das representações fracionárias e as partes dos todos representadas nas figuras. Não à toa, ambos os participantes indicaram as mesmas frações em suas resoluções.

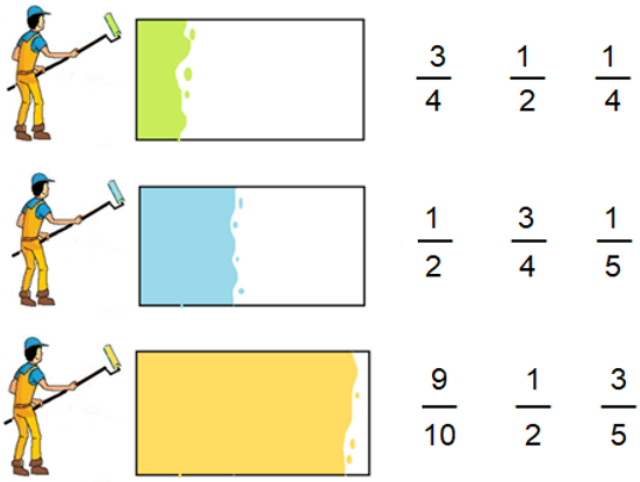
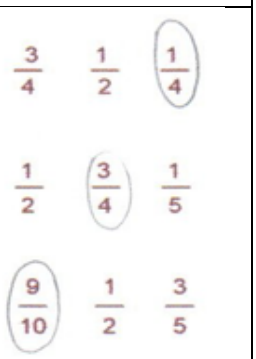
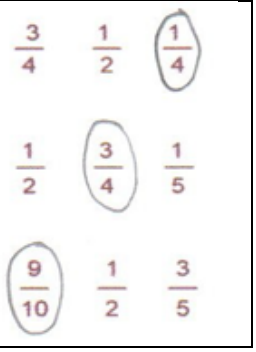
É importante observar que o participante A10 utiliza, em sua fala, as expressões “um de dois”, “três de quatro” e “nove de dez” referindo-se às frações 1/2, 3/4 e 9/10, respectivamente. Ao menos no que tange ao dimensionamento da parte em relação ao todo, o uso de tais expressões poderia indicar uma certa compreensão sobre o objeto representado, já que essas formas de representação parecem ser, nesse caso, mais intuitivas do que as representações “três quartos” e “nove décimos”, por exemplo. No entanto, nota-se que a ideia da relação parte-todo presente, tanto nessas expressões informais da linguagem natural usadas por A10, quanto nas representações numéricas fracionárias, ainda não foi devidamente percebida pelo participante.

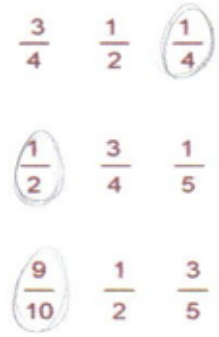
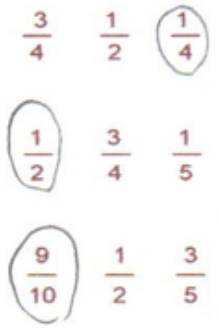
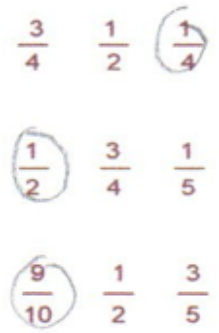
O participante A2, por sua vez, afirmou que manteve, para a atividade 3, a mesma estratégia utilizada para a atividade 2, ou seja, sua forma de resolução consistiu na *mudança para representação reconhecível*. Parece que o estudante não teve dificuldade para reconhecer a proximidade, em termos de equivalência referencial, entre a parte representada na primeira ilustração e 25%. Desse modo, concluímos que a representação numérica percentual é para A2 uma forma viável de acesso ao objeto representado e que, por outro lado, a representação numérica fracionária não lhe é reconhecível.

Segundo as afirmações dos próprios participantes, a *mudança para representação reconhecível* também baseou os processos resolutivos adotados por A7 e A18. O final da fala de A7, contudo, sugere que o participante pode ter indicado suas frações de modo aleatório. Ainda assim, no que concerne à atividade 3, o fraco desempenho demonstrado por ambos indica que a opção por transformar as representações fracionárias em representações percentuais não foi proficiente.

O quadro 26 apresenta, por sua vez, as falas e resoluções dos participantes do Grupo B relativas a essa atividade do Instrumento Avaliativo.

Quadro 26 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo B referentes à identificação das frações mais próximas das partes representadas figurativamente.

<table>
<tr><td colspan="3">Como você pensou para escolher as frações mais próximas das partes representadas nas figuras?
 
</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>Porque tá menos aqui (referindo-se à primeira ilustração). Aí, eu marquei um de quatro. E esse aqui (referindo-se à terceira ilustração), porque tem nove por cento aqui e o total é dez.</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>B4</td><td>Eu pensei, porque alguns eram menores e os outros eram maiores. Esse aqui (referindo-se à primeira ilustração) era um de quatro. Esse daqui (referindo-se à segunda ilustração) era um pouquinho mais, então eu acho que é três de quatro. Esse daqui que ele pintou mais (referindo-se à terceira ilustração) eu acho que é nove de décimo.</td><td> 
</td></tr>
</table>

B7	*Eu vi os desenhos e pensei: aqui tem muito pouco* (referindo-se à primeira ilustração). *Aí, eu marquei o que eu achava, porque se fosse um de dois* (referindo-se à fração 1/2*) ia ser a metade e três de quatro* (referindo-se à fração 3/4) *não ia ser a metade. E esse daqui* (referindo-se à segunda ilustração), a *mesma coisa que eu falei do de cima* (referindo-se à primeira ilustração). *E esse* (referindo-se ao terceiro item) p*orque estava quase todo cheio.*	
B15	*Aqui, três quartos seria setenta e cinco por cento, então, deveria estar aqui* (apontando para o local do muro que corresponderia a aproximadamente 75%). *Um meio seria a metade e um quarto seria vinte e cinco por cento, então, estava mais perto desse, aí, eu marquei esse* (referindo-se à fração 1/4). *Aqui* (referindo-se à segunda ilustração), *um meio seria cinquenta, três quartos seria setenta e cinco por cento e um quinto seria vinte, então, estava mais perto desse* (referindo-se à fração 1/2) *que era meio, estava quase na metade.* *E, aqui* (referindo-se à terceira ilustração), *um meio seria cinquenta, três quintos seria sessenta e nove décimos seria noventa, aí, estava mais perto de finalizar, aí, eu botei esse aqui* (referindo-se à fração 9/10*).*	
B17	*Esse aqui* (referindo-se à terceira ilustração)*, eu não fiz conta matemática. Eu só fui vendo pelo excesso de pintura que o pintor fez a pintura dele. Porque só falta um para chegar em dez.*	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os participantes B4 e B17, cujo número de acertos foi nulo na atividade 2, obtiveram bom desempenho na atividade 3. Suas falas, contudo, não demonstraram, com clareza, a apreensão da relação parte-todo das representações fracionárias frente ao equívoco da *redução da representação ao signo numérico* utilizado para basear suas resoluções na atividade anterior.

Já a fala do participante B3 sugere a percepção da relação numerador/denominador como sendo a relação entre o número de partes consideradas num todo subdividido e o número total de partes desse todo. As falas “um de quatro”, para associar a representação 1/4 a uma pequena parte do todo representado na figura, e “aqui tem nove por cento e o total é dez”, para indicar a

fração 9/10 como representação da quase totalidade, parecem demonstrar, apesar da utilização equivocada da expressão “por cento” para designar o numerador 9, a apreensão da relação parte-todo expressa na representação fracionária.

Tal apreensão parece mais evidente a partir das falas dos participantes B7 e B15 que foram capazes de identificar, e de justificar de forma consistente, as frações que mais se aproximavam das partes representadas figurativamente. Percebe-se, sobretudo no relato de B15, a segurança e a propriedade com que o participante explica suas escolhas, estabelecendo diversas relações entre as representações fracionárias e as figuras apresentadas na atividade, evocando, inclusive, as representações percentuais correspondentes através da linguagem natural.

Nesse sentido, as resoluções e explicações de B3, B7 e B15 para a atividade 3 do Instrumento Avaliativo reafirmam o *reconhecimento da relação parte-todo na representação*, já evidenciado na atividade 2.

Assim, no que concerne às resoluções das atividades 2 e 3 do Instrumento Avaliativo, que exploraram a percepção da parte em relação ao todo na representação, o quadro 27 apresenta uma síntese das estratégias utilizadas em ambos os grupos, bem como dos elementos que as caracterizam.

Quadro 27 - Estratégias utilizadas pelos grupos A e B na resolução das atividades 2 e 3.

Estratégias utilizadas nas resoluções dos quesitos 2 e 3		
Grupos	Estratégias utilizadas	Principais elementos característicos
A	Redução da representação ao signo numérico	- Consideração restrita aos signos numéricos no interior das representações. - Inobservância da pertinência matemática dos signos não numéricos. - Não reconhecimento das unidades de sentido. - Utilização de critérios próprios e equivocados para comparação com outras representações.
	Mudança para representação reconhecível	- Não reconhecimento do objeto na representação apresentada. - Necessidade de conversão para representação percentual. - Utilização das referências de metade (50%) e todo (100%). - Baixa efetividade (40% de acertos).
B	Redução da representação ao signo numérico	- Consideração restrita aos signos numéricos no interior das representações. - Inobservância da pertinência matemática dos signos não numéricos. - Não reconhecimento das unidades de sentido. - Utilização de critérios próprios e equivocados para comparação com outras representações.
	Reconhecimento da relação parte-todo na representação	- Propriedade e clareza explicativa. - Observação de equivalências referenciais. - Boa efetividade (86% de acertos).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vê-se que, em cada um dos grupos, houve a adoção de uma estratégia resolutiva válida. No Grupo A, os participantes A2, A7 e A18 utilizaram a *mudança para representação reconhecível*, enquanto que, no Grupo B, os participantes B3, B7 e B15 se valeram do *reconhecimento da relação parte-todo na representação*.

O emprego da *redução da representação ao signo numérico* indicou, no entanto, que os participantes A1, A10, B4 e B17 não conseguiram desenvolver uma estratégia que fosse matematicamente viável para as resoluções das atividades 2 e 3.

No que tange à efetividade das estratégias válidas, temos que as resoluções das atividades 2 e 3 que se basearam no *reconhecimento da relação parte-todo na representação* resultaram em mais acertos (86%) que aquelas realizadas por meio da

mudança para representação reconhecível (40%).

8.2.3 Apreensões observadas a partir das resoluções das atividades 2 e 3

Quanto às possíveis apreensões em relação ao objeto representado, pode-se dizer que houve, entre os participantes do Grupo B:

- Compreensão da representação numérica fracionária em seu significado parte-todo.

- Reconhecimento de equivalências referenciais entre diferentes representações fracionárias.

- Reconhecimento de equivalências referenciais entre representações fracionárias e representações percentuais.

Assim, pode-se dizer que as conversões realizadas com o material manipulável, durante a intervenção nesse grupo, parecem ter sido importantes para tais aprendizagens.

Por outro lado, a adoção da *mudança para representação reconhecível*, ainda que válida enquanto estratégia de resolução, demonstrou que os participantes do Grupo A não conseguiram, a partir das conversões por meio dos tratamentos simbólico-numéricos trabalhadas durante a intervenção, perceber a relação parte-todo expressa na representação fracionária.

Por fim, a análise dos resultados das atividades 2 e 3 do Instrumento Avaliativo indicou que, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, os participantes do Grupo B apresentaram melhor desempenho que os participantes do Grupo A. Nesse sentido, podemos considerar que o caminho de conversão trabalhado em B resultou em aprendizagens e percepções acerca do objeto representado que não foram reproduzidas a partir do caminho de conversão trabalhado em A.

Desse modo, a utilização de processos de conversão distintos permitiu que cada grupo dispusesse de um tipo de representação auxiliar usada como representação intermediária na transformação e, nesse caso, as representações figurativas associadas ao material manipulável parecem ter contribuído mais que as representações simbólico-numéricas para a percepção de alguns aspectos conceituais do objeto representado.

8.3 A comparação de tamanho entre partes representadas

As atividades 4 e 5 do Instrumento Avaliativo propuseram comparações de tamanho entre números racionais. Na atividade 4, as comparações foram realizadas entre representações fracionárias e, na atividade 5, entre representações fracionárias e representações percentuais.

A partir das resoluções apresentadas e, sobretudo, das falas explicativas na entrevista, pudemos verificar se os participantes foram capazes de estabelecer relações de magnitude entre as diferentes partes em relação ao todo ali representadas.

8.3.1 Estratégias utilizadas para comparar frações

A atividade 4 apresentava quatro pares de frações e propunha a identificação, em cada par, da fração que representaria a maior parte do todo. O quadro 28 apresenta as falas dos participantes do Grupo A ao descreverem a forma como pensaram para determinar tais frações.

Quadro 28 - Falas dos participantes do Grupo A referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias.

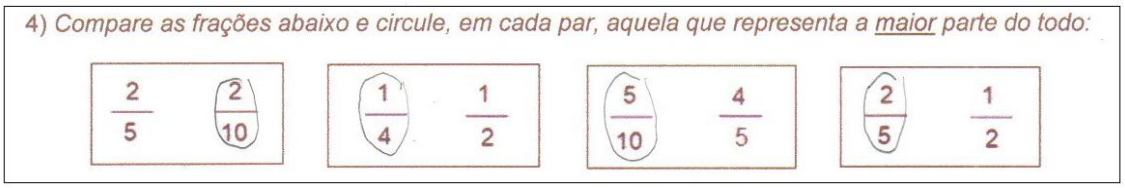
Como você pensou para comparar o tamanho dessas frações?	
A1	*Pensei nos números maiores que tivessem embaixo.*
A2	*Eu copie cada uma* (transformei em porcentagem) *e vi qual que dava maior e circulei.*
A7	*Do mesmo jeito que aqui* (referindo-se ao quesito anterior).
A10	*Aqui olha, dois de dez, um do quatro, cinco de dez, dois do cinco. São as maiores quantidades das frações.*
A18	*Eu fiz como se eu tivesse fazendo porcentagem. Aí, eu fiz cem dividido pra dez? Dez. Dez multiplicado por dois? Vinte. Então, esse daqui é mais do que esse* (referindo-se ao primeiro par de frações)*, aí, eu fui lá e marquei.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vemos que os participantes A1 e A10 mantiveram sua estratégia resolutiva baseada na *redução da representação ao signo numérico.* Em sua fala, A1 revelou que pensou em circular as frações cujos “números que tivessem embaixo”, ou seja, os denominadores, fossem os maiores. A10, por sua vez, parece ter incluído, também, os numeradores nessa comparação.

As resoluções de A1 e A10 confirmam que, de fato, os participantes circularam todas as frações em que os valores numéricos dos signos que compunham essas representações eram os maiores e, por essa razão, não obtiveram acerto algum nas comparações realizadas, como vemos na figura 88.

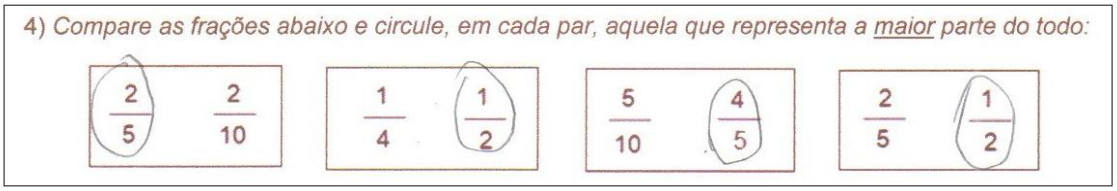
Figura 88 - Resoluções de A1 (Instrumento Avaliativo – Q4).



Fonte: Dados da pesquisa.

Os participantes A2 e A7 também repetiram a estratégia usada anteriormente e, desse modo, a *mudança para representação reconhecível* fez com que os participantes obtivessem o total de acertos na atividade 4, conforme apresentado na figura 89.

Figura 89 - Resoluções de A2 (Instrumento Avaliativo – Q4).



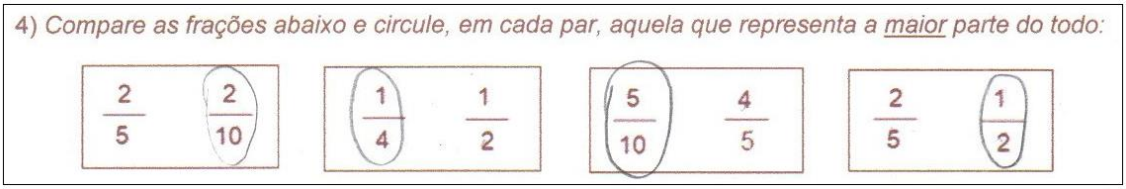
Fonte: Dados da pesquisa.

O sucesso do ponto de vista matemático de A2 e A7, no entanto, contrapõe-se à impossibilidade demonstrada pelos participantes de realizar tais comparações entre as representações fracionárias apresentadas sem que se recorresse à mudança para as representações percentuais, o que, do ponto de vista cognitivo, significa um insucesso.

O participante A18 demonstra que também recorreu à conversão *fração* →

percentual para realizar as comparações entre as representações. Contudo, sua fala sugere que, ao menos no primeiro par de frações, apenas uma delas foi convertida em percentual e, depois, comparada à outra sem um critério definido. Dessa forma, embora tenha mencionado a utilização de uma estratégia válida, suas resoluções indicaram apenas um acerto dentre as quatro comparações realizadas na atividade, como apresentado na figura 90.

Figura 90 - Resoluções de A18 (Instrumento Avaliativo – Q4).



Fonte: Dados da pesquisa.

No quadro 29, temos as falas dos participantes do Grupo B explicando a maneira como pensaram e desenvolveram suas resoluções para essa atividade.

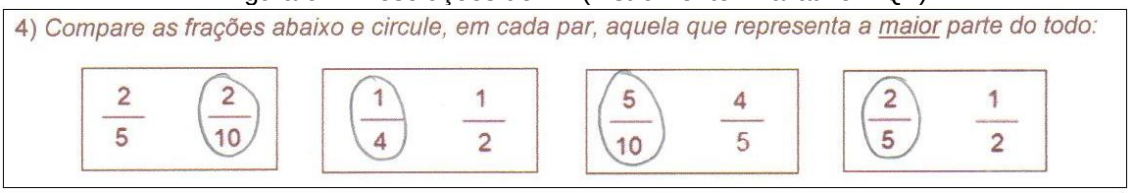
Quadro 29 - Falas dos participantes do Grupo B referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias.

Como você pensou para comparar o tamanho dessas frações?	
B3	*Porque a parte maior é a dez* (referindo-se ao primeiro par), *porque quatro é maior* (referindo-se ao segundo par), *porque dez é maior* (referindo-se ao terceiro par), *porque cinco é maior* (referindo-se ao quarto par).
B4	*Aqui é maior por causa do décimo* (referindo-se ao primeiro e terceiro par). *Aqui é maior por causa do quarto e aqui é maior por causa do quinto* (referindo-se ao segundo e quarto par, respectivamente).
B7	*Porque aqui ia sobrar oito* (referindo-se à fração 2/10) *e aqui só ia sobrar três* (referindo-se à fração 2/5). *Porque aqui* (referindo-se à fração 1/2) *só ia sobrar um e aqui* (referindo-se à fração 1/4) *ia sobrar três.*
B15	*Dois décimos seria vinte e dois quintos seria quarenta, então, essa daqui* (referindo-se à fração 2/5) *é a maior. Um quarto seria vinte e cinco por cento e um de dois seria cinquenta. Cinco décimos seria cinquenta e quatro quintos seria oitenta. Aqui* (referindo-se ao quarto item), *dois quintos seria quarenta e um de dois seria cinquenta.*
B17	*Eu só fui contando pelos números de baixo, que são os maiores, e os de cima, que são os menores.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os participantes B4 e B17 não obtiveram acerto algum nas comparações propostas na atividade 4, conforme apresentado na figura 91. O motivo desse desempenho foi, a exemplo do que ocorreu nas atividades 2 e 3, a *redução da representação ao signo numérico*.

Figura 91 - Resoluções de B4 (Instrumento Avaliativo – Q4).



Fonte: Dados da pesquisa.

A fala do participante B4 revela que indicou como as maiores frações aquelas cujos denominadores tinham os maiores valores numéricos, um erro clássico já discutido anteriormente em estudos como o de Monteiro e Pinto (2007). Do mesmo modo, o participante B17 explica que adotou a estratégia de comparar os valores numéricos entre os "números de baixo" e também entre "os de cima", revelando que os numeradores também foram considerados em sua observação.

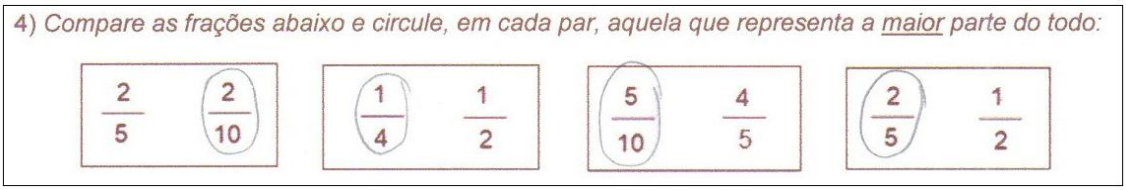
Tem-se, nesses casos, comparações entre unidades elementares percebidas no interior das representações, sem a devida compreensão do sentido expresso por esses signos. Tal equívoco leva, portanto, os participantes a estabelecerem comparações entre os elementos constituintes da representação e não entre os números racionais ali representados.

Ainda em sua fala, B17 demonstra a percepção de que aquelas representações têm algo em comum: o número de cima é menor que o número de baixo. O que é uma observação correta, já que todas as frações exploradas durante a pesquisa foram as chamadas frações próprias[15]. Há, portanto, uma atenção que privilegia os valores numéricos evidentes na representação em detrimento da relação parte-todo existente entre eles.

A *redução da representação ao signo numérico* também é clara na fala do participante B3. O seu desempenho na atividade 4, conforme apresenta a figura 92, suscita incertezas quanto a sua compreensão, de fato, da representação fracionária em seu significado parte-todo, como sugeriram as resoluções e falas das atividades 2 e 3.

[15] Representações **a/b** em que **a** e **b** são inteiros, $\mathbf{b \neq 0}$ e $\mathbf{a < b}$.

Figura 92 - Resoluções de B3 (Instrumento Avaliativo – Q4).

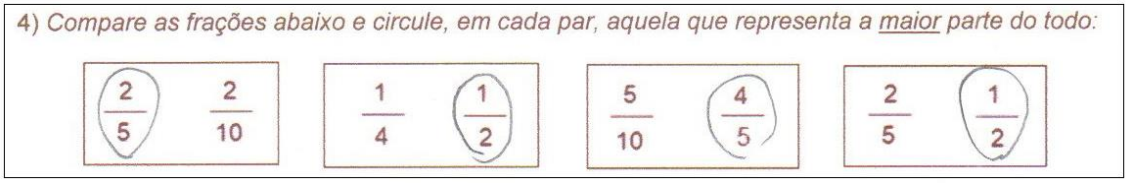


Fonte: Dados da pesquisa.

Ao comparar as frações a partir dos valores numéricos de seus denominadores, B3 utiliza uma estratégia não coerente com os processos resolutivos adotados nas atividades anteriores, revelando inconsistências relacionadas ao reconhecimento do objeto matemático a partir da sua representação numérica fracionária.

Por outro lado, os participantes B7 e B15 parecem ratificar a sua compreensão da representação fracionária enquanto expressão da relação parte-todo do objeto representado e, portanto, seu processo resolutivo deriva do *reconhecimento da relação parte-todo na representação*. A figura 93 ilustra uma dessas resoluções.

Figura 93 - Resoluções de B15 (Instrumento Avaliativo – Q4).



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao dizer que ia sobrar três na fração 2/5, B7 estabelece a relação do numerador com o denominador (ia sobrar três porque o todo é cinco). Desse modo, o estudante consegue ver a fração como uma relação e não como números independentes posicionados em cima e embaixo de um tracinho.

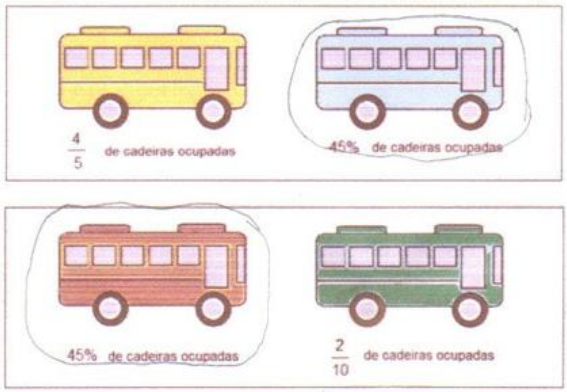
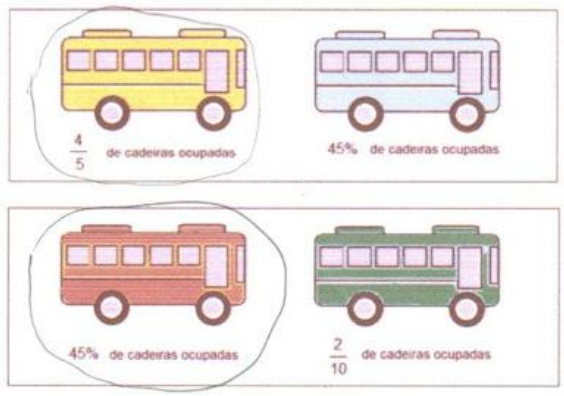
Contudo, ainda não é possível dizer se, ao afirmar que 2/5 é maior que 2/10, pois sobra menos partes do todo na primeira fração que na segunda, o participante estaria considerando a diferença de tamanho das partes numa e noutra fração. Tal critério, sem essa devida consideração, é suficiente para comparar quaisquer frações com denominadores iguais, mas não dá conta de comparações envolvendo frações tais como 1/4 e 6/10, por exemplo. Nesse caso, embora a percepção da relação existente entre o numerador e o denominador seja um avanço na compreensão da representação fracionária, é essencial perceber que a mudança de denominador implica, também, mudança do tamanho das partes em relação ao todo.

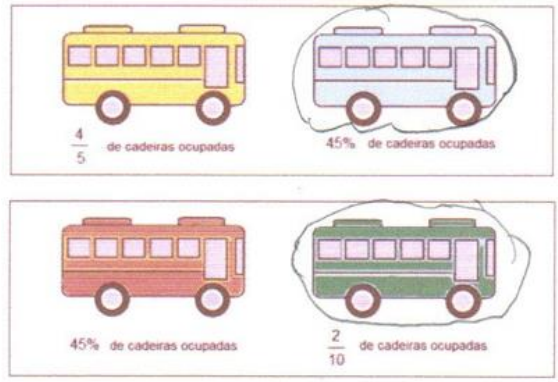
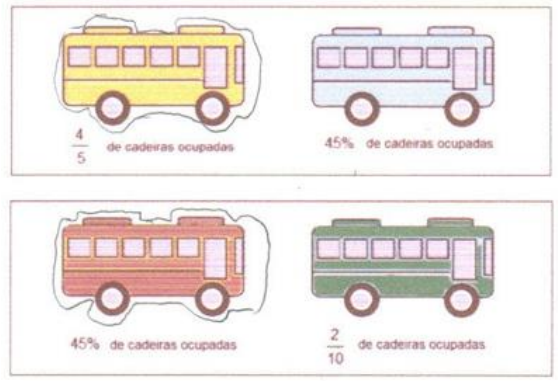
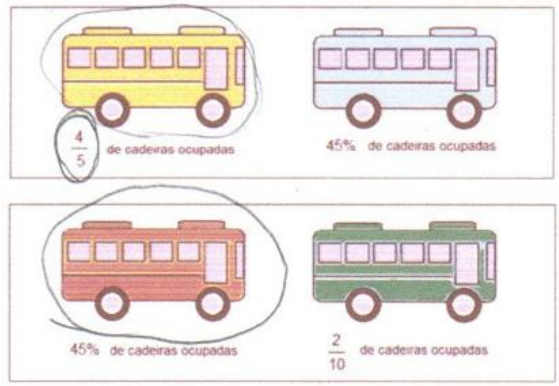
Já B15, citou as representações percentuais equivalentes às frações em cada par para justificar a indicação daquela que considerou a maior. Nesse caso, o estudante parece realizar as conversões presentes em sua fala por considerar a representação numérica percentual mais conveniente ao seu intuito explicativo.

8.3.2 Estratégias utilizadas para comparar representações fracionárias e percentuais

A atividade 5 demandava que a comparação fosse feita, dessa vez, entre representações fracionárias e representações percentuais. Aos participantes foi proposto que indicassem qual dos ônibus estava mais cheio considerando as representações indicativas do número de cadeiras ocupadas em cada um deles. Desse modo, no primeiro item da atividade, foram comparadas as representações 4/5 e 45%, e, no segundo, as representações 45% e 2/10. O quadro 30 apresenta as resoluções e falas dos participantes do Grupo A descrevendo a forma como pensaram.

Quadro 30 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo A referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias e representações percentuais.

Como você pensou para escolher o ônibus mais cheio em cada par?		
A1	*Eu pensei no número que tivesse em 45%, porque eu acho que ele vai ter mais.*	
A2	*Eu vi o número que tinha aqui em porcentagem. Aí eu fiz a coisa* (referindo-se à transformação em porcentagem) *desse daqui* (apontando para 4/5). A*í, vi o que dava maior e circulei. A mesma coisa eu fiz nesse aqui também* (apontando para o outro par).	

A7	*Ah, esse daqui eu chutei.*	
A10	*Eu transformei a fração em porcentagem, aí, deu oitenta* (referindo-se à fração 4/*5). Aí oitenta é maior do que quarenta e cinco por cento.*	
A18	*Eu contei, cem dividido pra cinco é igual a vinte, vinte vezes quatro é igual a sessenta. Aí, eu marquei* (referindo-se ao primeiro par).	

Fonte: Elaborado pelo autor.

As falas demonstram que os participantes do Grupo A permaneceram aplicando as estratégias já utilizadas nas atividades anteriores.

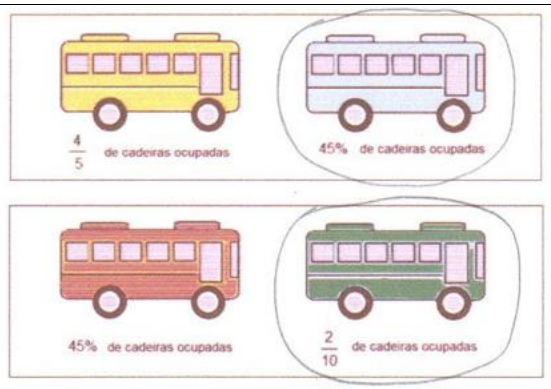
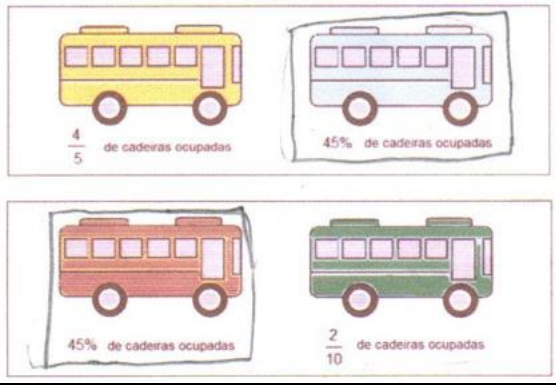
Novamente, alguns participantes recorreram à conversão ***fração → percentual*** para que pudessem comparar dois números percentuais e escolher o maior deles. Desse modo, a *mudança para representação reconhecível* se apresentou, mais uma vez, como um caminho resolutivo eficiente do ponto de vista matemático, resultando no total de acertos para os participantes A2, A10 e A18. É interessante destacar que, dessa vez, A10 não reteve sua atenção nos signos numéricos do interior das representações e adotou a *mudança para representação reconhecível* como estratégia de resolução para a atividade.

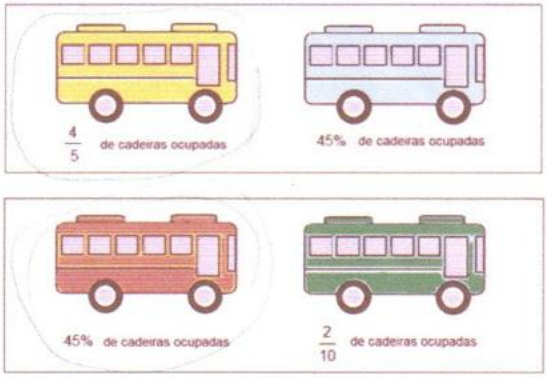
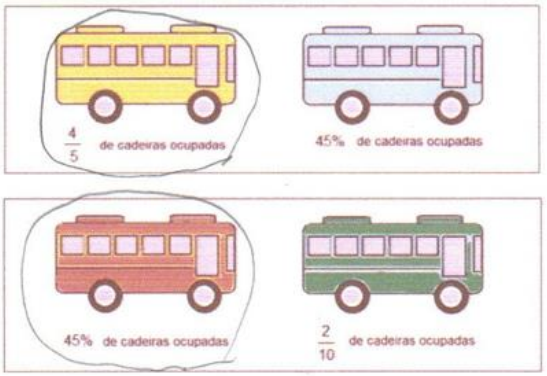
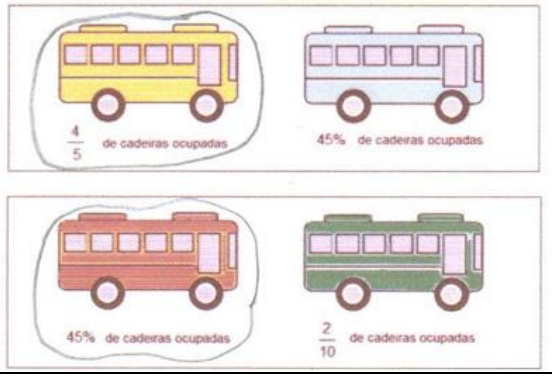
Enquanto A10 fazia uma boa escolha, migrando de um equívoco para uma estratégia válida, A7 optava pelo abandono da *mudança para representação reconhecível* e, segundo sua própria fala, indicava as representações de modo aleatório, ou seja, sem ter um critério estabelecido. Essas descontinuidades no que concerne às estratégias adotadas revelam a insegurança dos participantes frente a tais atividades e que resulta das inconsistências relacionadas à apreensão dessas representações, sobretudo, as numéricas fracionárias.

A fala do participante A1, por sua vez, sugere a *redução da representação ao signo numérico* como base para sua resolução, pois, ao considerar a representação 45% uma expressão daquele que “vai ter mais”, o estudante parece estabelecer uma comparação entre os valores numéricos dos signos percebidos em todas as representações apresentadas na atividade, ou seja, 2, 4, 5, 10 e 45.

Já o quadro 31 apresenta as resoluções, também referentes à atividade 5, e as falas dos participantes do Grupo B.

Quadro 31 - Falas e resoluções dos participantes do Grupo B referentes à comparação de tamanho entre representações fracionárias e representações percentuais.

<table>
<tr><td colspan="3">Como você pensou para escolher o ônibus mais cheio em cada par?</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>Porque esse aqui é quatro e cinco (referindo-se à fração 4/5). Aí, esse aqui é quarenta e cinco por cento. O por cento é maior (referindo-se ao primeiro item).</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>B4</td><td>Eu vi que os dois ônibus com quarenta e cinco eram os mais cheios, porque tinham mais pessoas que o de quatro de quinto e o dois de décimo.</td><td> 
</td></tr>
</table>

B7	*Porque aqui só tinha quarenta e cinco por cento e o total é cem. Se fosse a metade, ia ser cinquenta. Aqui só sobrou um* (referindo-se à fração 4/5)*., por isso que eu escolhi,* p*orque quatro quintos só ia sobrar um e quarenta e cinco por cento ia sobrar mais. A mesma coisa eu fiz aqui* (referindo-se ao segundo par do atividade).	
B15	*Esse daqui seria quarenta e cinco por cento e esse aqui* (referindo-se à fração 4/5) *seria oitenta. Eu fiquei com tudo na mente já, eu fiquei somando na minha mente, pelo material eu já estava lembrando. Aqui* (referindo-se à fração 4/5), *seria oitenta, né? Então, esse seria maior, aí, eu circulei esse.* *Aqui* (referindo-se ao segundo par), *seria quarenta e cinco por cento e, aqui* (referindo-se à fração 2/10), *seria vinte, aí, eu circulei esse aqui.*	
B17	*Eu fui vendo a quantidade e, aí, eu fui circulando. O quarenta e cinco por cento eu sei que é um número médio, aí, eu circulei.*	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os participantes B7 e B15 desenvolveram suas resoluções baseando-se, novamente, no *reconhecimento da relação parte-todo na representação.*

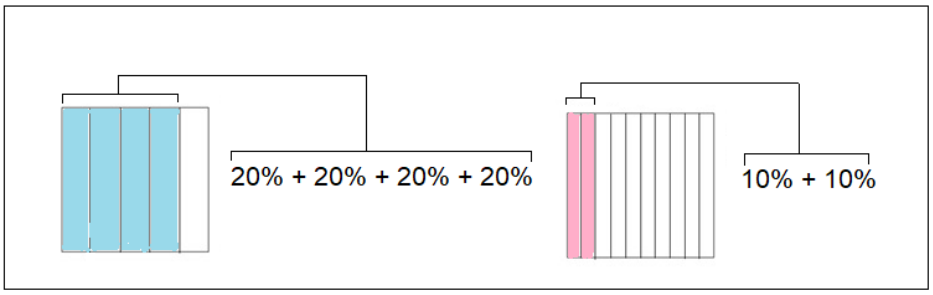
Ao explicar como pensou para resolver o primeiro item, B7 demonstra saber que 45% representa menos que a metade do todo e, portanto, deduz que 4/5 é mais que a metade do todo, pois “só sobrou um”. A explicação para a resolução do item indica a sua compreensão de que a representação 4/5 corresponde a quatro das cinco partes em que o todo foi dividido, o que significa mais que a sua metade.

Já para a resolução do segundo item, o estudante afirma que fez “a mesma coisa”. Então, seguindo sua linha de pensamento, conclui-se que 2/10 é bem menos

que a metade, pois corresponde a apenas duas das dez partes em que o todo foi dividido (sobram oito). Os trechos de sua fala “o total é cem” e “se fosse a metade, ia ser cinquenta” evidenciam dois referenciais importantes que podem ter auxiliado na comparação entre 2/10 (bem menos que a metade) e 45% (quase a metade). Esse trecho da entrevista corrobora com o que foi percebido a partir da atividade anterior, ou seja, o participante compreende a representação fracionária como a razão entre o número de partes consideradas e o número total de partes em que o todo foi dividido. Desse modo, consegue perceber a magnitude ou tamanho da parte representada em relação ao seu todo.

Assim como ocorreu na atividade anterior, B15 realiza mentalmente a conversão *fração → percentual* para que possa comparar, em termos percentuais, o tamanho dos números racionais representados. Percebe-se que o estudante usa representações mentais criadas a partir de sua experiência com o material manipulável e, ao afirmar “eu fiquei somando tudo na minha mente”, sugere que utilizou a adição dos valores percentuais correspondentes às partes dos todos particionados, conforme apresentado no esquema da figura 94.

Figura 94 - Adição de valores percentuais correspondentes às partes dos todos particionados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui, a reconfiguração intermediária da figura inicial feita com a sobreposição da malha quadriculada transparente e que a particionava em cem partes iguais não é mais necessária, já que o participante consegue estabelecer imediatamente a correspondência entre a parte do todo figural e o seu valor percentual.

Já os participantes B3 e B4 basearam suas resoluções na *redução da representação ao signo numérico.*

Como havia ocorrido com a atividade 4, B3 demonstrou inconsistências relativas ao reconhecimento do objeto número racional a partir da sua representação

fracionária. No primeiro item da atividade 5, o estudante utilizou a comparação de unidades de sentido em ambas as representações e escolheu aquela representação com a unidade de sentido de maior valor numérico, ou seja, 45%. Com relação ao segundo item, o participante não soube dizer qual foi a estratégia utilizada. Sua escolha para o maior número racional representado nesse item, no entanto, não é coerente com o argumento utilizado para justificar sua resposta no item anterior, já que, dessa vez, escolheu 2/10 em vez de 45%.

Assim, ao analisarmos o desempenho geral de B3, no que concerne às atividades propostas no Instrumento Avaliativo, podemos dizer que, embora as resoluções das atividades 2 e 3 e as falas colhidas com a entrevista sugiram a apreensão dos números racionais, ali representados na forma numérica fracionária, as resoluções das atividades 4 e 5 e as explicações dadas, por sua vez, indicam claras inconsistências relacionadas a essa aprendizagem.

B4, por sua vez, também considerou que 45% deveria representar o maior número em ambos os itens da atividade 5, já que o valor numérico da unidade de sentido 45 era maior que os valores numéricos das unidades de sentido 2, 3, 4 e 10 presentes nas representações 3/4 e 2/10. Tal equívoco, como vimos, já havia sido cometido pelo estudante nas resoluções das atividades 2, 3 e 4.

Num trecho de sua fala, o participante B17 revela que suas comparações partem de uma referência: “o quarenta e cinco por cento eu sei que é um número médio”. Não há clareza, contudo, quanto à forma de pensar para concluir que 4/5 e 2/10 são frações, respectivamente, maior e menor que esse tal “número médio”. Percebe-se, no entanto, um avanço em relação à resolução e à fala relacionadas à atividade anterior, já que, aqui, o estudante parece abandonar a comparação entre os valores numéricos observados no interior das representações.

Por fim, a partir da análise das resoluções das atividades 4 e 5 do Instrumento Avaliativo e das falas colhidas na entrevista, podemos apresentar no quadro 32 uma síntese das estratégias utilizadas pelos participantes, em ambos os grupos, para comparar tamanhos entre partes representadas.

Quadro 32 - Estratégias utilizadas pelos grupos A e B na resolução das atividades 4 e 5.

Estratégias utilizadas nas resoluções dos quesitos 4 e 5		
Grupos	Estratégias utilizadas	Principais elementos característicos
A	Redução da representação ao signo numérico	- Consideração restrita aos signos numéricos no interior das representações. - Inobservância da pertinência matemática dos signos não numéricos. - Não reconhecimento das unidades de sentido. - Utilização de critérios próprios e equivocados para comparação com outras representações.
	Mudança para representação reconhecível	- Não reconhecimento do objeto na representação apresentada. - Necessidade de conversão para representação percentual. - Utilização das referências de metade (50%) e todo (100%). - Boa efetividade (83% de acertos).
B	Redução da representação ao signo numérico	- Consideração restrita aos signos numéricos no interior das representações. - Inobservância da pertinência matemática dos signos não numéricos. - Não reconhecimento das unidades de sentido. - Utilização de critérios próprios e equivocados para comparação com outras representações.
	Reconhecimento da relação parte-todo na representação	- Propriedade e clareza explicativa. - Observação de equivalências referenciais. - Ótima efetividade (100% de acertos).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que as estratégias para a resolução das atividades 4 e 5 foram as mesmas anteriormente utilizadas para a resolução das atividades 2 e 3 do Instrumento Avaliativo. No grupo A, os participantes A2 e A18 continuaram realizando a *mudança para representação reconhecível* em suas resoluções. Essa estratégia também foi utilizada por A7 para a resolução da atividade 4 e por A10 para a resolução da atividade 5. No Grupo B, os participantes B7 e B15 continuaram desenvolvendo suas resoluções a partir do *reconhecimento da relação parte-todo na representação*.

Quanto à efetividade, ambas as estratégias apresentaram alto índice de acertos nas atividades: 83% em A e 100% em B.

Já a *redução da representação ao signo numérico* baseou resoluções equivocadas dos participantes A1, A10, B3, B4 e B17 em, pelo menos, uma das

atividades.

8.3.3 Apreensões observadas a partir das resoluções das atividades 4 e 5

No Grupo B, percebemos entre os participantes, a partir das estratégias resolutivas implementadas e das explicações colhidas com a entrevista, possíveis apreensões relacionadas ao número racional representado, tais como:

- Compreensão da representação numérica fracionária em seu significado parte-todo.

- Reconhecimento de equivalências referenciais entre representações fracionárias e representações percentuais.

Outra vez, houve referência ao material manipulável utilizado anteriormente, evidenciando a importância dessa experiência para tais aprendizagens e, consequentemente, para a criação de uma estratégia válida de resolução.

No Grupo A, alguns participantes prosseguiram adotando a *mudança para representação reconhecível* em suas resoluções. Quanto à efetividade, essa estratégia demonstrou ser, do ponto de vista matemático, uma boa escolha, já que sua aplicação resultou em 83% de acertos nas atividades 4 e 5 do Instrumento Avaliativo. No entanto, embora esses participantes tenham conseguido aplicar o caminho para a conversão *fração → percentual* por meio dos tratamentos simbólico-numéricos, não percebemos elementos indicativos de outras aprendizagens que pudéssemos relacionar a uma possível apreensão da representação numérica fracionária em seu significado parte-todo, o que, do ponto de vista cognitivo, caracteriza um insucesso.

Finalmente, a análise dos resultados das atividades 4 e 5 do Instrumento Avaliativo apontou diferenças entre os grupos no que concerne a aprendizagens relacionadas ao objeto matemático, sobretudo, em sua representação numérico-fracionária. As escolhas resolutivas e as falas dos participantes sugerem que os diferentes caminhos de conversão, trabalhados durante a intervenção nos grupos, também implicaram diferentes apreensões. Para tanto, mais uma vez, as representações figurativas, utilizadas como representações intermediárias no caminho para a conversão *fração → percentual* com material manipulável, parecem ter sido fundamentais.

8.4 Diferentes caminhos, diferentes apreensões

O quadro 33 apresenta as estratégias utilizadas por cada um dos participantes para a resolução das cinco atividades propostas no Instrumento Avaliativo. As estratégias matematicamente válidas foram destacadas na cor verde e as inválidas, ou seja, aquelas que caracterizaram equívocos dos participantes, na cor laranja.

Quadro 33 - Estratégias utilizadas pelos participantes nas resoluções do Instrumento Avaliativo.

	CONVERSÃO NO SENTIDO OPOSTO	PERCEPÇÃO DA PARTE EM RELAÇÃO AO TODO NA REPRESENTAÇÃO		COMPARAÇÃO DE TAMANHO ENTRE PARTES REPRESENTADAS	
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q4
A1	CONSERVAÇÃO DA TRANSPARÊNCIA	REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO		REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO	
A2	VALIDAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE CHEGADA	MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL		MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL	
A7	VALIDAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE CHEGADA	MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL		MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL	ESTRATÉGIA INDETERMINADA
A10	CONSERVAÇÃO DA TRANSPARÊNCIA	REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO		REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO	MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL
A18	VALIDAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE CHEGADA	MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL		MUDANÇA PARA REPRESENTAÇÃO RECONHECÍVEL	
B3	INTERMEDIAÇÃO FIGURATIVA INTERNA	RECONHECIMENTO DA RELAÇÃO PARTE-TODO NA REPRESENTAÇÃO		REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO	
B4	INTERMEDIAÇÃO FIGURATIVA INTERNA	REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO		REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO	
B7	INTERMEDIAÇÃO FIGURATIVA EXTERNA	RECONHECIMENTO DA RELAÇÃO PARTE-TODO NA REPRESENTAÇÃO		RECONHECIMENTO DA RELAÇÃO PARTE-TODO NA REPRESENTAÇÃO	
B15	INTERMEDIAÇÃO FIGURATIVA INTERNA	RECONHECIMENTO DA RELAÇÃO PARTE-TODO NA REPRESENTAÇÃO		RECONHECIMENTO DA RELAÇÃO PARTE-TODO NA REPRESENTAÇÃO	
B17	ESTRATÉGIA INDETERMINADA	REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO		REDUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO AO SIGNO NUMÉRICO	ESTRATÉGIA INDETERMINADA

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que participantes dos dois grupos utilizaram a mesma estratégia inválida, ou seja, a *redução da representação ao signo numérico*. No Grupo A, houve ainda a adoção de uma segunda estratégia inválida, a *conservação da transparência*. Ambas as estratégias, no entanto, emergem da prática resolutiva dos participantes

pela mesma razão, a saber, não houve a apreensão da representação semiótica do objeto matemático representado.

Nessa pesquisa, ficou evidente, sobretudo, a dificuldade dos participantes no que concerne à apreensão da representação numérica fracionária do número racional em seu significado parte-todo. Segundo Duval (2012, p. 285), “a apreensão das representações semióticas supõe a discriminação das unidades significantes no registro ou onde a representação é produzida”. Tal discriminação, como vimos anteriormente, somente pode ser feita via “observação, por um lado, das variações de representações sistematicamente efetuadas em um registro e, por outro lado, as variações concomitantes de representação em outro registro” (Duval, 2012, p. 285).

Assim, era necessário que os participantes, ao realizarem as conversões durante a intervenção, pudessem perceber, a partir dos diferentes caminhos e diferentes representações intermediárias utilizadas em cada grupo, a correspondência entre cada variação produzida na representação fracionária de partida e a variação resultante na representação percentual de chegada.

Nesse sentido, os resultados demonstraram que o caminho de conversão trabalhado no grupo B revelou-se mais favorável que o caminho de conversão trabalhado no Grupo A para tal observação por parte dos participantes. Portanto, é preciso considerar o papel que as representações figurativas associadas ao material manipulável desempenharam nesse processo.

Ainda que todos os participantes do Grupo B tenham trabalhado com as representações figurativas do material manipulável durante a intervenção, apenas B7 e B15 demonstraram resoluções e explicações consistentes para as cinco atividades propostas no Instrumento Avaliativo. O participante B3 apresentou inconsistências relacionadas à apreensão da representação numérica fracionária, enquanto as resoluções e falas dos participantes B4 e B17 indicaram o não reconhecimento do objeto a partir de tal representação.

Como vimos, o caminho de conversão com o material manipulável requeria dos participantes apenas a apreensão perceptiva das figuras ali utilizadas, ou seja, era suficiente a percepção espontânea e imediata do seu particionamento e do número de partes destacadas. Tal apreensão, segundo Duval (2012b), permite que o indivíduo reconheça automaticamente, por exemplo, uma figura como uma representação do mesmo objeto representado por uma fração, porém sem uma análise mais atenta dos seus elementos figurais.

Pudemos ver que B3, B4 e B17 conseguiram, até mesmo, deduzir um caminho para a conversão no sentido oposto. No entanto, apenas a apreensão perceptiva das figuras exploradas com o manipulável, durante a intervenção em seu grupo, não foi o bastante para lidar com atividades que demandavam, a partir de representações numéricas fracionárias, a percepção da parte em relação ao todo representado e a comparação de tamanho entre as partes representadas.

Assim, concluímos que a discriminação das unidades de sentido e a consequente apreensão das representações (Duval, 2012) demandaria, no caso dos participantes do Grupo B, a ocorrência de apreensões figurativas para além da apreensão perceptiva durante o trabalho com o material manipulável.

Nesse sentido, B7 e B15 demonstraram não apenas reconhecer os objetos matemáticos representados por frações nas representações figurativas, mas, sobretudo, observar e interpretar as propriedades dessas figuras como sendo propriedades dos números racionais ali representados, o que, segundo Duval (2012), caracterizaria a apreensão discursiva.

O desempenho desses participantes nas atividades propostas pelo Instrumento Avaliativo indicou, tanto do ponto de vista matemático, com os 100% de acertos obtidos, quanto do ponto de vista cognitivo, com as estratégias adotadas e a segurança nas explicações, que o caminho de conversão trabalhado em B poderia, a partir da apreensão discursiva das representações figurativas produzidas com o material manipulável e utilizadas como representações intermediárias, favorecer a discriminação das unidades de sentido das representações envolvidas e, portanto, a sua apreensão.

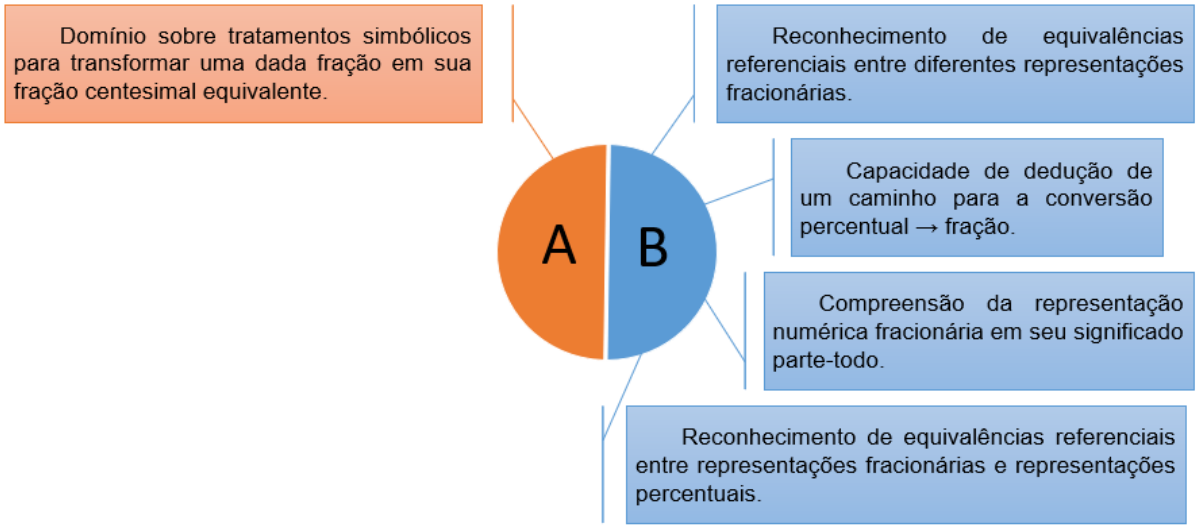
Por outro lado, o caminho de conversão trabalhado no Grupo A fez com que os participantes dominassem uma sequência de tratamentos simbólico-numéricos para a transformação de uma representação fracionária em sua equivalente percentual. Contudo, os participantes desse grupo não conseguiram deduzir um caminho para a conversão no sentido oposto, nem conseguiram perceber a parte em relação ao todo ou comparar partes representadas a partir de representações numérica fracionárias.

Assim, podemos afirmar que as representações intermediárias e os tratamentos utilizados nas conversões realizadas em A, durante a intervenção, não destacaram suficientemente as correspondências entre as unidades de sentido dos registros envolvidos. Desse modo, a não discriminação dessas unidades significantes resultou em não apreensão das representações, especialmente, as numérico-

fracionárias.

Na figura 95, temos as possíveis apreensões identificadas em ambos os grupos a partir da análise dos resultados do Instrumento Avaliativo e, principalmente, das falas dos participantes colhidas na entrevista.

Figura 95 - Possíveis apreensões observadas entre os participantes dos grupos A e B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, percebe-se que, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, os grupos apresentaram desempenhos distintos. Acreditamos que, embora todos os participantes tenham trabalhado o mesmo tipo de conversão, os diferentes caminhos utilizados para realizar as transformações foram cruciais no que concerniu à possibilidade de apreensão do objeto número racional, especificamente, da sua representação numérica fracionária com significado parte-todo. Nesse sentido, destacaram-se as representações figurativas produzidas com o material manipulável.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como professor dos anos iniciais, educador matemático e pesquisador, comprometido com a melhoria do ensino de matemática, concluo essa tese, cujo foco foi a investigação da apreensão do número racional a partir de dois diferentes caminhos de conversão, tendo a representação numérica fracionária como registro de partida e a representação numérica percentual como registro de chegada, apresentando, inicialmente, um encadeamento de pressupostos apontados pela TRRS, que nos permitem conjecturar que, embora seja inegável a centralidade da atividade de conversão para a apreensão do objeto representado, há de se observar a forma como, mesmo entre registros semanticamente não congruentes, essa transformação é realizada e quais percepções favorece.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica sinaliza que a representação não cumpre apenas o papel de comunicar o objeto matemático a outro(s) indivíduo(s), pois tal produção semiótica também permite tratamentos que, em muitas situações, seriam impossíveis de realizar mentalmente, além de proporcionar a objetivação, ou seja, a "descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado" (Duval, 2009, p.41).

Assim, ao utilizarmos representações em linguagem natural, escritas simbólico-numéricas, gráficos e figuras não estamos somente tornando visíveis ou acessíveis nossas representações mentais para outras pessoas, já que tais registros são imprescindíveis, sobretudo, para a apreensão dos próprios objetos ali representados. Isso porque "não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*" (Duval, 2009, p.17).

A atividade com as representações semióticas precede, portanto, a apreensão conceitual e é a sua geradora. Em outras palavras, pode-se dizer que "o aluno não aprende para representar, ele representa para aprender" (Melo, 2019, p.110).

Sob essa perspectiva teórica é, então, fundamental que a abordagem em sala da aula de objetos matemáticos como os números racionais, cujos conceitos associados estão entre os mais complexos e mais importantes com os quais as crianças lidarão ao longo dos oito primeiros anos de sua escolaridade (Behr et al, 1983), considere o papel fundamental que as representações semióticas cumprem na aprendizagem.

Cada representação é, no entanto, parcial, ou seja, nenhum registro evidencia, em seu conteúdo, todas as informações relacionadas ao objeto que representa (Duval, 2012). Tal aprendizagem requer, portanto, a coordenação de, pelo menos, duas representações do objeto em estudo e, para tanto, destacam-se as transformações por conversão.

As conversões não codificadas, por sua vez, demandam representações intermediárias que podem ser tão diversas quanto diversos forem os caminhos adotados para realizar tais transformações. Isso porque o que se tem em alguns casos é apenas “a ilusão de uma passagem direta” (Duval, 2012, p. 295).

Como dissemos acima, reafirmamos que, a partir de tais pressupostos teóricos, pudemos pensar que, para além da importância do ato de converter representações para a apreensão do objeto representado, era necessário considerar, também, o modo como tal atividade é realizada e a sua implicação nessa aprendizagem.

Nesse sentido, investigamos, como já dissemos, a apreensão do número racional a partir de dois diferentes caminhos de conversão, tendo a representação numérica fracionária como registro de partida e a representação numérica percentual como registro de chegada. Nossa hipótese era que diferentes caminhos para realizar uma mesma conversão implicariam diferentes apreensões, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, relacionadas ao objeto representado.

Para a produção de representações intermediárias nessas conversões, utilizamos as escritas simbólico-numéricas em um grupo de participantes e um material manipulável em outro. Com a escolha das escritas simbólicas quisemos contemplar o caminho de conversão apresentado no livro didático e que fora utilizado por aqueles estudantes no ano anterior, já a adoção do material manipulável buscou oferecer um caminho de conversão não tão comum, além de atender às várias pesquisas que recomendam esse tipo de recurso na abordagem dos objetos matemáticos.

Limitamo-nos à análise da aprendizagem do número racional em seu significado parte-todo e à observação do desempenho dos participantes frente a atividades envolvendo a conversão no sentido oposto, a percepção da parte em relação ao todo na representação e a comparação de tamanho entre partes representadas.

Os resultados do Instrumento Diagnóstico, que serviu para selecionarmos os participantes da pesquisa, demonstraram um bom desempenho dos estudantes nas

atividades que envolviam representações numéricas percentuais e que avaliavam, a partir desses registros, a percepção da parte em relação ao todo na representação, bem como a comparação de tamanho entre as partes representadas. Concluímos que, no que tange às atividades que demandavam a percepção da parte em relação ao todo na representação, os participantes partiram, sobretudo, das referências 100% e 50% como expressões mais socialmente reconhecidas de todo e metade, respectivamente. Da mesma forma, os registros numéricos percentuais também favoreceram a comparação de tamanho entre os números racionais assim representados, pois não demandavam nada mais que a comparação entre os valores numéricos das unidades de sentido subjacentes ao signo % nessas representações.

No entanto, no que concerniu às atividades de conversão entre as representações numéricas fracionárias e percentuais, em ambos os sentidos, e às demais atividades que envolviam, sobretudo, representações numéricas fracionárias, o desempenho dos participantes revelou grandes lacunas nessa aprendizagem. Mesmo os poucos acertos observados, tanto nas conversões quanto nas demais atividades propostas, estiveram relacionados, em boa parte, à presença de uma maior transparência entre os registros envolvidos e não ao reconhecimento do número racional em sua representação fracionária e com significado parte-todo.

As intervenções realizadas em ambos os grupos, limitadas à apresentação de um caminho para a conversão *fração* → *percentual*, foram suficientes para que dez participantes conseguissem reproduzi-lo, com êxito, no Teste de Sondagem respondido individualmente.

Contudo, os resultados do Instrumento Avaliativo, aplicado em seguida, revelaram diferenças significativas, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo, entre os participantes que trabalharam com o caminho de conversão a partir dos tratamentos simbólico-numéricos e aqueles que utilizaram o caminho com o material manipulável.

Quanto à conversão no sentido oposto, do ponto de vista matemático, o Grupo B, com 86% de acertos, demonstrou desempenho bem superior ao do Grupo A, com somente 26%, indicando que o fenômeno da heterogeneidade dos sentidos parece ter criado mais dificuldades entre os participantes desse último grupo. A variação de congruência e não-congruência semântica, por outro lado, não foi um fator limitante para o emprego das estratégias válidas em ambos os grupos, já que estas resultaram em conversões com diferentes níveis de transparência entre as representações

envolvidas. Ao entrevistarmos os participantes, vimos que alguns pertencentes ao Grupo A privilegiaram a congruência semântica em detrimento da equivalência referencial entre os registros de partida e de chegada, evidenciando, na ausência do conhecimento que lhes possibilitasse a realização dessas conversões no sentido oposto ao trabalhado anteriormente, um equívoco oriundo daquilo que Duval (2012b, p.101) chamou de “funcionamento espontâneo do pensamento”.

Do ponto de vista cognitivo, o Grupo B também se destacou com a adoção de estratégias matematicamente válidas que partiam, sobretudo, das representações mentais desenvolvidas pelos participantes. Corroborando com Duval (2003), as entrevistas demonstraram que tais representações foram interiorizações das representações figurativas produzidas com o material manipulável durante a intervenção. Com isso, alguns participantes foram capazes de deduzir um caminho para a conversão no sentido oposto e que foi desenvolvido, ora de modo totalmente interno, ora com o auxílio de figuras produzidas e utilizadas como representações intermediárias que cumpriam, ao menos, duas funções auxiliares em relação à representação de partida nessas conversões, a saber, a *interpretação heurística* e a *interpretação explicativa* (Duval, 1999b), permitindo que os participantes realizassem tratamentos visuais e também identificassem informações contidas explícita ou implicitamente na representação simbólico-numérica (Moretti e Baerle, 2022). Algumas das falas também evidenciaram a percepção de equivalências referenciais entre diferentes frações.

No Grupo A, por sua vez, a estratégia adotada, embora matematicamente válida, revelou-se, do ponto de vista cognitivo, um insucesso, já que seus participantes não conseguiram deduzir um caminho para a conversão percentual → fração.

Quanto à percepção da parte em relação ao todo na representação e à comparação de tamanho entre partes representadas, percebemos que participantes de ambos os grupos cometeram o mesmo equívoco, ou seja, tomar isoladamente cada um dos signos no interior das representações, atribuindo-lhes valores sem considerar sua pertinência matemática nesses registros. Tal dificuldade, segundo Duval (2011), revela o não discernimento das unidades de sentido no interior dessas representações, dificultando a compreensão e a realização de qualquer que seja a atividade em matemática. Nesse sentido, especificamente, a representação numérica fracionária é percebida, erroneamente, como dois números, distintos e independentes.

Por outro lado, observou-se, também em ambos os grupos, a aplicação de

estratégias resolutivas matematicamente válidas, porém com características que, do ponto de vista cognitivo, tornavam-nas bastante diferentes.

No Grupo A, os participantes optaram pela mudança da representação numérica fracionária para a representação numérica percentual durante as resoluções. Dessa forma, puderam realizar as atividades que demandavam a percepção da parte em relação ao todo na fração e a comparação de tamanho entre diferentes frações recorrendo às suas referencialmente equivalentes representações percentuais. Tal estratégia revelou sua dificuldade relacionada à apreensão do número racional em sua representação fracionária e com significado parte-todo.

No Grupo B, por sua vez, as resoluções e, sobretudo, as falas dos participantes indicaram o reconhecimento do número racional em seu significado parte-todo e a partir de sua representação fracionária. As estratégias utilizadas demonstraram, sobretudo, a importância que as representações figurativas, introduzidas com a utilização do material manipulável durante a intervenção, tiveram nessa apreensão.

Os relatos dos participantes ratificaram a influência dessas representações externas na formação de representações internas que se revelaram fundamentais para o bom desempenho de alguns deles. Nesse sentido, os resultados da pesquisa corroboraram a perspectiva da TRRS no que concerne à dependência das representações mentais em relação às representações semióticas (Duval, 2009).

Percebeu-se, especificamente com relação às atividades que propunham a comparação de tamanho entre partes representadas, um equilíbrio entre os índices de acertos de ambos os grupos (53% e 50%). Assim, embora cada grupo tenha desenvolvido estratégias distintas a partir de percepções também distintas do objeto representado, seus resultados foram bastante parecidos, indicando que, nesse caso, os diferentes desempenhos do ponto de vista cognitivo não, necessariamente, resultaram em diferentes desempenhos do ponto de vista matemático.

De modo geral, parece-nos razoável afirmar que o caminho para a conversão *fração → percentual* com a utilização do material manipulável foi mais favorável à apreensão do objeto, sobretudo, em sua representação numérica fracionária que o caminho de conversão a partir dos tratamentos simbólico-numéricos.

Os resultados da pesquisa indicaram que as representações figurativas produzidas a partir do manipulável, e utilizadas como representações intermediárias nas conversões, favoreceram a “discriminação das unidades significantes no registro”, tanto fracionário quanto percentual, e, portanto, a apreensão de tais representações

(Duval, 2012, p. 285). Nesse sentido, é correto dizer que esse caminho de conversão ajudou os participantes na visualização das variações produzidas numa representação e das covariações resultantes na outra, o que, segundo Duval (2012), seria fundamental para que essa discriminação acontecesse.

Por outro lado, o trabalho com os tratamentos simbólico-numéricos para encontrar as frações centesimais equivalentes às frações de partida não teve a mesma eficácia no sentido de favorecer tal visualização por parte dos participantes. Assim, os limites da intervenção realizada, sobretudo, a exiguidade do tempo utilizado e a restrição apenas à apresentação do caminho de conversão, embora tenham sido impostos a ambos os grupos, parecem ter sido mais desfavoráveis à aprendizagem desses participantes.

Por fim, a análise das resoluções e falas dos participantes indicou que a utilização de diferentes caminhos para a conversão *fração → percentual* resultou em diferentes percepções e, portanto, diferentes apreensões acerca do objeto matemático em questão. Verificou-se que o caminho de conversão trabalhado em um dos grupos acabou favorecendo mais a visualização e a coordenação das unidades de sentido em ambos os registros simbólico-numéricos envolvidos, condição indispensável para a apreensão do objeto ali representado (Duval, 2012).

Nesse sentido, a utilização de representações figurativas como representações intermediárias, associadas a um tipo simples de material manipulável, mostrou-se mais profícua, sobretudo, para a apreensão da representação numérica fracionária. Isso porque alguns participantes conseguiram avançar da *apreensão perceptiva*, suficiente para o emprego do caminho de conversão apresentado durante a intervenção, à *apreensão discursiva* dessas figuras, o que lhes permitiu reconhecer suas propriedades como sendo também propriedades do número racional representado (Duval, 2012).

Concluímos que o uso de materiais manipuláveis, principalmente quando associados a representações figurativas, pode ser uma alternativa promissora na abordagem das conversões entre representações simbólico-numéricas do número racional. Isso porque, segundo Duval (2011, p. 69), “para um mesmo objeto, as unidades de sentido que formam o conteúdo das representações semióticas mudam em função do sistema semiótico mobilizado” e, como vimos, os dados indicaram que as unidades visualizadas a partir das representações figurativas intermediárias produzidas com o material se mostraram mais reveladoras das propriedades

relacionadas ao objeto representado que aquelas percebidas a partir das representações simbólicas.

No entanto, como adverte Passos (2006), deve-se considerar que nenhum material traz em si mesmo conceitos matemáticos, pois é a ação interiorizada do aluno que os forma. Logo, a utilização do manipulável não é garantia de aprendizagem, pois nem sempre os alunos conseguem ver as relações matemáticas que os professores veem (Passos, 2006).

Outro ponto importante é que o planejamento para a utilização desses recursos deve prever, também, o seu abandono em seguida, já que é importante que os estudantes sejam capazes de utilizar as representações mentais que deverão surgir de tal experiência para criar seus próprios caminhos resolutivos.

Chegamos ao final desse estudo com alguns achados, mas, também, e, principalmente, com várias indagações que emergiram durante esse período de reflexões relacionadas à apreensão do número racional em suas representações simbólico-numéricas.

Algumas dessas questões nascem, sobretudo, de limitações evidenciadas nesse processo de investigação, como, por exemplo, a duração e objetividade da intervenção realizada nos grupos de participantes. Nesse sentido, um dos questionamentos que podemos levantar é *qual seria a repercussão de cada um dos caminhos de conversão, no que concerne à apreensão do objeto representado, se houvesse mais tempo de trabalho com os participantes?*

Outras questões surgem a partir da análise dos resultados e, nesse sentido, podemos perguntar, com relação aos participantes do Grupo B, *qual a influência da experiência tátil e da experiência visual nas suas apreensões?* Em outras palavras, *o que se pode atribuir à manipulação do concreto e o que é mérito das representações figurativas nessas apreensões?*

Enfim, o trabalho empreendido nessa investigação foi para o pesquisador, enquanto professor do Ensino Fundamental, uma inestimável oportunidade de repensar sua própria prática, sobretudo, relacionada à abordagem dos números racionais em suas representações simbólico-numéricas. Esperamos que os resultados e análises apresentadas contribuam no campo da Educação Matemática, principalmente, no que concerne à compreensão da influência que os caminhos de conversão entre tais representações pode ter sobre a apreensão do objeto representado. De modo particular, nossa expectativa é que esse estudo possa, de

algum modo, auxiliar colegas docentes na desafiadora tarefa de favorecer, em sala de aula, a aprendizagem desse tão importante e complexo objeto matemático.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. A. F. **Aprender, atividade inteligente: e se esta inteligência for parcialmente artificial?** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 1999.

Aprova Brasil: matemática, ensino fundamental anos iniciais. (Org.) Editora Moderna. 2. Ed. - São Paulo: Moderna, 2016.

ARAÚJO, A. P. O fetichismo na metodologia do ensino da matemática. **Revista Educação em Questão**, v.1/2, n. 2/1, p.127 – 9, 1987/8.

AZEVEDO, T. C. **Uma análise da "tensão" entre o discreto e o contínuo no ensino de frações.** 2018. 77 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. **Rational-Number Concepts**. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. Florida: Academic Press, 1983. p.91-126.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. **Rational number, ratio, and proportion.** In: D. A. GROUWS (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York, NY: Macmillan, 1992. p. 296-333.

BEHR, M.; POST, T. **Teaching rational number and decimal concepts**. Sub-item: Learning about Rational Numbers: Special Problems. In: POST, T. (Ed.). Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods. 2 ed. Boston: Allyn and Bacon. 1992. p. 201-248.

BEZUK, N.; CRAMER, K. **Teaching about fractions: What, when, and how?** In: P. Trafton (Ed.). New directions for elementary school mathematics. Reston, VA: NCTM, 1989. p. 156-167.

BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensinoaprendizagem**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo, Edgard Blücher; Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais** - Matemática. 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.

BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática, 1º e 2º Ciclos. Brasília: SEF/MEC, 1997.

BRITO, M. R. F. **Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos**. In: BRITO, M. R. F. (Org.). Solução de problemas e a matemática escolar. Campinas: Alínea, 2006, p. 13-53.

BROUSSEAU, G. **Didáctica das Matemáticas** /Brun, J...[et al]; Direção: Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CAMPOS, T. M. M.; SILVA, A. F. G. Conhecimento profissional docente de professoras das séries iniciais da educação básica acerca da equivalência de números racionais na representação fracionária em um processo de formação continuada. **Revemat**, Florianópolis, v. 4, n. 1, p.114-127, 2009.

CARAÇA, B. de. (1989). **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 4 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

CARRAHER, W. D.; SCHLIEMANN, A.L. **A compreensão de frações como magnitude relativa**. Psicologia: Teoria e Pesquisa, v.8, N° 1, p. 67-78, 1992. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_issues&pid=0102-3772&lng=en&nrm=iso.

CASTELNUOVO, E. **Didatica de la Matemática Moderna**. México: Trillas, 1970.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional – Uma abordagem nos livros didáticos**. 2000. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. 2.ed. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2008.

COSTA, N. M. L.; POLONI, M. Y. Percepções de concluintes de pedagogia sobre a formação inicial do professor para a docência de matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1289-1314, dez. 2012.

CRAMER, K., HENRY, A. **Using Manipulative Models to Build Number Sense for Addition of Fractions**. National Council of Teachers of Mathematics 2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2002.

CRAMER, K., WYBERG, T., & LEAVITT, S. **Fraction Operations and Initial Decimal Ideas**. [Companion module to RNP: Fraction Lessons for the Middle Grades]. 2009.

DEMARTINI, I. T. **Refletindo sobre a formação do conceito de número racional na forma fracionária**. 2009. 104 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Fundação Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2009.

DUARTE, N. **A realização entre o 1ógico e o histórico no ensino da matemática elementar**. São Carlos: UFSCar. 1987, 185 p. (Dissertação de Mestrado)

DUVAL, R. **Representation, vision and visualization**: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1999.

_____**Conversion et articulation des représentations analogiques**. Seminaires de Recherche, IUFM Nord Pas de Calais, 1999b.

_____**Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus Editora, 2003, p.11-33.

_____**Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

_____**Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**/**organização Tânia M. M. Campos; (tradução Marlene Alves Dias) Raymond Duval. São Paulo: PROEM, 2011**.**

_____Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianópolis, v.6, n.2, p.96-112, 2011b.

_____ Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012.

_____Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianópolis, v.7, n.1, p.97- 117, 2012b.

_____ Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012c.

_____Entrevista: Raymound Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática** - RPEM, Campo Mourão, v.2, n.3, jul-dez. 2013. Entrevista concedida a FREITAS, J. L. M. de; REZENDE, V.

_____**Les théories cognitives en didactique des mathématiques**: lesquelles et pourquoi ? In: Isonomia— Epistemologica. 7. University of Urbino. 2015. Disponível em: http://isonomia.uniurb.it/.

_____Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianópolis, v.11, n.2, p.02-78, 2016.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC; Brasília, UnB, 1975.

FIORENTINI, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké** - Revista do Círculo de Estudo, Memória, e Pesquisa em Educação Matemática. Ano 3, n.4, mar, pp. 1-35.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa qualitativa**. 1º Ed. Porto Alegre, Artmed, 2006.

FREGE, G. (1892). **Sobre o sentido e a referência**. In: ALCOFORADO, PAULO (org. e trad.). Lógica e filosofia da linguagem. São Paulo, Cultrix/EDUSP, 1978.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
_____**Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GITIRANA, V; CARVALHO, J. **A matemática do contexto e o contexto na matemática**. In: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Coord.), Coleção Explorando o Ensino, Matemática, v.17, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010, p.69-90.

GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações**. 2010. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

GUERREIRO, H. G.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.26, n.2, mai./ago., 2018, 354-374

IMENES, L. M; LELLIS, M. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 18, n. 24, set. 2005.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. 4. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

KIEREN, T. E. **Personal Knowledge of rational numbers**: its intuitive and formal developmente. In: J. Hiebert and M. Behr (eds): Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1998.
_____.**On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**. In: LESH, Richard A.; BRADBARD, David A. **Number and mensurament:** papers from a research workshop. Georgia: ERIC, 1976.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Translation: Joan Teller. Chicago: University of Chicago Press, 1976.

LAMON, S.J. **Rational numbers and proportional reasoning**: Toward a theoretical framework for research. In: Lester, F. (Ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Reston: NCTM, 2007, v. 1, p. 629-667.

LAMON, S.J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3.ª ed. New York: Routledge, 2012, 254 p.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Temas e Problemas Elementares. **Coleção do Professor de Matemática**. 2. ed. RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LORENZATO, S. A. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didático manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

LOPES, A. J. O que os nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-22. 2008.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna – análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 1992.

MAIA, D. **Estado da arte de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no brasil (1997 – 2021)**: um olhar sobre materiais e tecnologias. 2022. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

MAMEDE, E. **Sobre o ensino e aprendizagem de fracções nos níveis elementares de ensino**. APM (Associação de Professores de Matemática), 2011.

MANDARINO, Mônica C. F. **Números e operações**, *in* João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Coord.), Coleção Explorando o Ensino, Matemática, v.17, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010, p. 97-134.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition**. 2. ed. New York: WH Freeman and Company, 1992.

MELO, W. J. A. **Conversões entre representações de números racionais**: limites e possibilidades no uso de material manipulável / Wellington José de Arruda Melo. – Recife, 2019.

MENEGAZZI, M. O estudo de frações: uma experiência no curso de pedagogia. **Revemat**, Florianóplois, v. 08, n. 1, p. 248-265, jan./jun. 2013.

MENEGHETTI, R. C. G.; BICUDO, I. O. Uma discussão sobre a constituição do saber matemático e seus reflexos na educação matemática. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, ano 16, n. 19, p. 58-72, 2003.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MINAYO, M. C. **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. 33 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.
_____**Pesquisa Social:** Teoria, método e criatividade. 21 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. **Desenvolvendo o sentido do número racional.** Lisboa: APM, 2007.

MORETTI, M. T.; BAERLE, L. D. M. O uso de Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática: um olhar semiocognitivo segundo Raymond Duval. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.24, n. 1, p. 582-610, 2022.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 122-147, mar.1999.

MOSS, J. (2002). Percents and Proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In Litwiller, B. e Bright, G. (eds): **Making sense of frations, ratios, and proportions**. NCTM, 2002 Yearbook, Reston, VA: NCTM.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar:** enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Coleção Tendências em Educação Matemática.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6. 2005. Disponível em: . Acesso em: 12 ago. 2010.

NÖTH, W. **A semiótica no século XX**. São Paulo: Anablume, 1996.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Tradução de: Sandra Costa.Porto Alegre: Artes medicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U. & HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June, 2003.

OHLSSON, S. **Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of fractions and Related Concepts**. In: HERBERT, J. e BEHR, M. Numbers concepts and operations in the middle grades. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 53-92, 1989.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. **Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório**: da prática à representação de uma prática. Práticas de Ensino da Matemática. 2012.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**, 2001. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf.

PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática**. In: LORENZATO, S. (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

PEIRCE, C. S. **De elementos de Lógica a divisão dos signos**. In: Semiótica. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005. p. 45-61.

PIAGET, J. **O Desenvolvimento do Pensamento**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1977.

PIRES, J. B. Vida e obra de Charles Sanders Peirce e as bases para o estudo da linguagem fotográfica. **Discursos fotográficos**, Londrina, v. 4, n. 4, p. 145-160, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONCE, A. **Educação e luta de classes***.* São Paulo: Cortez, 1985.

PONTE, J. P; QUARESMA, M. Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória**. Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1464-1484, dez. 2014.

PROENÇA, M. C. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 729-755, ago. 2015

REYS. R. Considerations for teaching using manipulative materials. In: **Teaching made aids for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1982.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional: Relações necessárias à sua compreensão**. 1997. 158 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

ROSSATO, S. L. da S. **Análise de erros na divisão de números decimais por alunos do 6º ano do ensino fundamental**. 2014. 111 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2014.

SALATIEL, J. R. **Estruturalismo**: Quais as origens desse método de análise? 2008. Disponível em < https://educacao.uol.com.br/disciplinas/filosofia/estruturalismo-quais-as-origens-desse-metodo-de-analise.htm>

SANTAELLA, L. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 2012.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. 2005. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, L. S. **Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma seqüência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional.** Dissertação. Universidade Federal Rural de Pernambuco - Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências. Recife, 2010.

SANTOS, R. S. **Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2011

SAUSSURE, F. **Curso de linguística geral**. Tradução de A. Chelini; J. P. Paes e I. Blikstein. 27. ed. São Paulo: Cultrix, 2006.

SERRAZINA, M. de L. M. Os materiais e o ensino da matemática. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, APM, n. 13, 1990.

SILVA, F. A. F. **Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio** – ENEM. 2013. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

SILVA, M. F. F. **Frações e grandezas geométricas:** um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos. Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco – Programa de Pós Graduação em Educação. Recife, 2004.

SILVA, F. A. F. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais** / Fernanda Andréa Fernandes Silva. – 2018. 258 f. : il.

SIMONI, T. C. C. **Contribuições do uso das TIC's e de materiais manipulativos na superação do erro no estudo de frações**. 2018. 222 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) –Universidade Federal da Fronteira Sul, Erechim, 2018.

SMITH, D. E**. History of Mathematics**. New York: Dover Publications, 1953. v.2.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANE, E. **Cadernos do Mathema:** jogos de matemática de 6º ao 9º ano. Porto Alegre: ATMED, 2007.

SOARES, K. M. **Fundamentos e história da matemática**. Indaial: Asselvi, 2007.

SOARES, T. V. **O que revelam as respostas dos estudantes do 4º ano do ensino fundamental sobre o conceito de fração quando apresentado através de um modelo que prioriza o subconstruto parte-todo**. 2013. 93 p. Dissertação (Mestrado

em Educação) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

STERNBERG, R. **Psicologia cognitiva**. Tradução de: Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo**. 2008. 194 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2008.

TIAN, J.; SIEGLER, R. S. Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First?. **Educational Psychology Review**, USA, p. 1-22, jul. 2017.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 2004.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. **Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores**. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 57-76.

VIGOTSKI, L. S. (1988). **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem** / Lev Semenovich, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leontiev; Tradução Maria da Penha Villalobos. – São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo.

YOUSSEF, A. N. GUELLI, O. A. **Meu Livro de matemática**, 5° ano, ensino fundamental. 1. Ed. - São Paulo: Editora AJS, 2017.

APÊNDICE A – Instrumento Diagnóstico

Nome:_____ Turma:_____

ATIVIDADE 1

1) Transforme as frações abaixo em porcentagens:

$\frac{2}{5}$ = $\frac{1}{10}$ = $\frac{3}{4}$ = $\frac{2}{5}$ = $\frac{4}{10}$ = $\frac{1}{2}$ =

2) Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:

20% = 60% = 50% = 75% = 90% = 40% =

3) Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa mais que a metade do todo.

b) Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{10}$

4) Observe as porcentagens abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa o todo ou total.

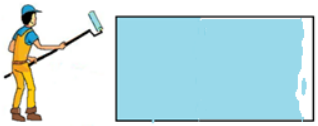
b) Faça um x naquela que representa mais que a metade do todo.

c) Risque aquela que representa menos que a metade do todo.

30% 100% 80% 50%

5) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$



$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

6) *Ligue cada garrafa à porcentagem que mais se aproxima de sua quantidade de água:*

60% 1% 20% 50% 80% 100%

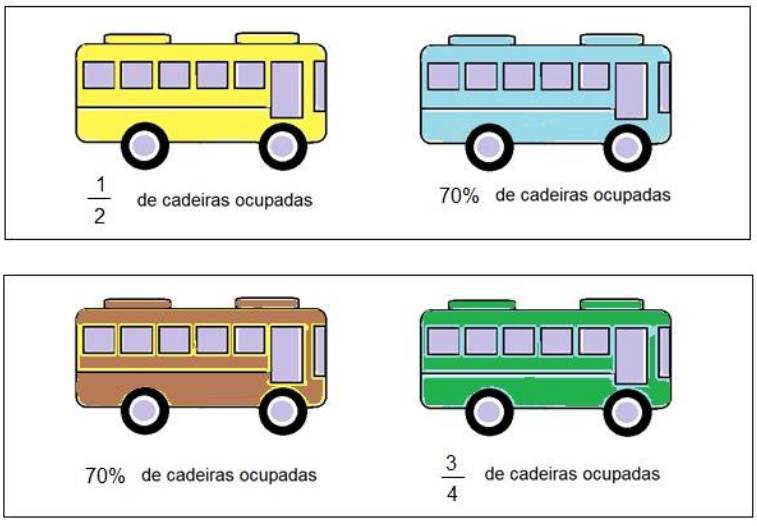
7) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$
$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{10}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$

8) Compare as porcentagens abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>menor</u> parte do todo:

10% 15%	49% 50%	75% 30%	100% 90%

9) Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:



APÊNDICE B – Teste de Sondagem

Nome:_____

Turma:_____

ATIVIDADE

Transforme as frações abaixo em porcentagens:

$\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{4}$ = $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{5}$ = $\frac{4}{5}$ = $\frac{7}{10}$ =

APÊNDICE C – Instrumento Avaliativo

Nome:_____ Turma:_____

ATIVIDADE 2

1) Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:

50% = 40% = 75% = 80% = 10% = 25% =

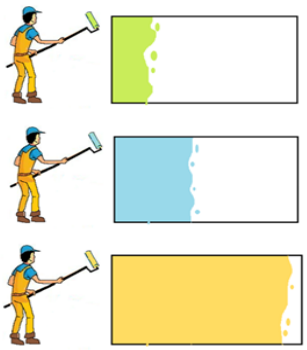
2) Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa mais que a metade do todo.

b) Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

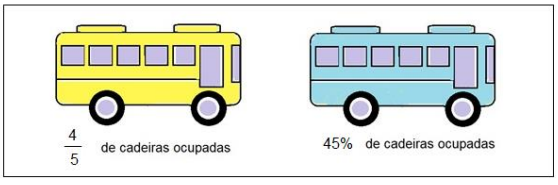
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:



APÊNDICE D – Instrumento Avaliativo respondido por A1

ATIVIDADE 2

1) Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:

50% = $\frac{5}{10}$ 40% = $\frac{4}{10}$ 75% = $\frac{7}{5}$ 80% = $\frac{8}{10}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{2}{8}$

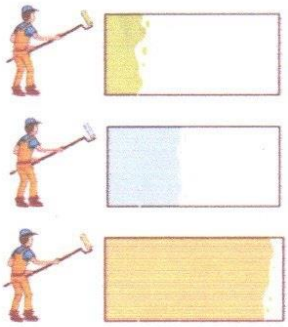
2) Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa mais que a metade do todo.

b) Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

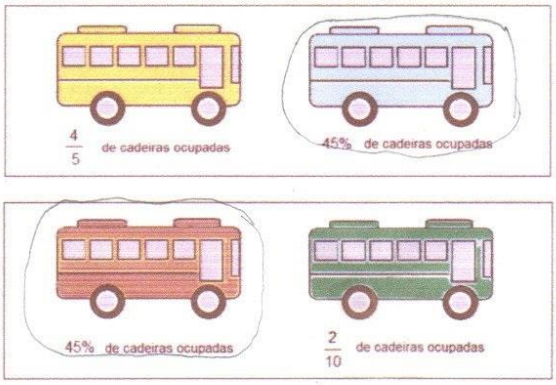
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:



APÊNDICE E – Instrumento Avaliativo respondido por A2

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{5}{10}$ 40% = $\frac{2}{5}$ 75% = $\frac{5}{11}$ 80% = $\frac{7}{5}$ 10% = $\frac{5}{4}$ 25% = $\frac{5}{2}$

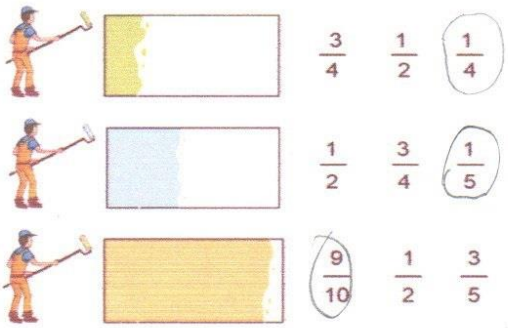
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

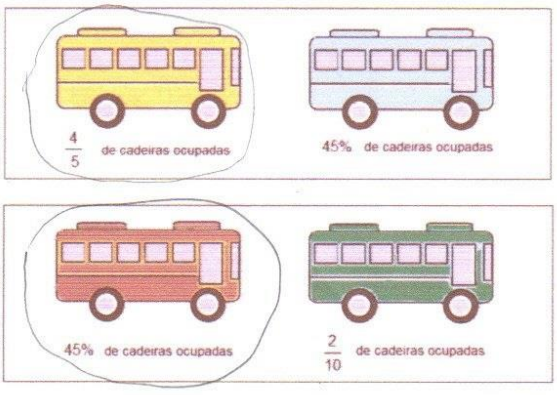
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*



APÊNDICE F – Instrumento Avaliativo respondido por A7

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{1}{2}$ 40% = $\frac{1}{3}$ 75% = $\frac{1}{2}$ 80% = $\frac{1}{4}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{1}{2}$

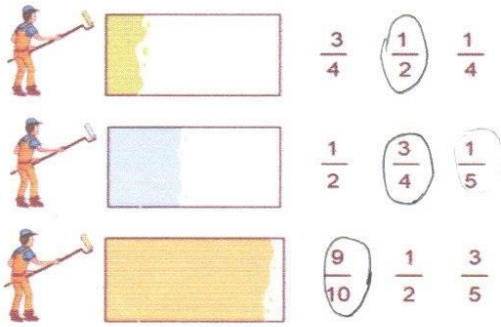
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

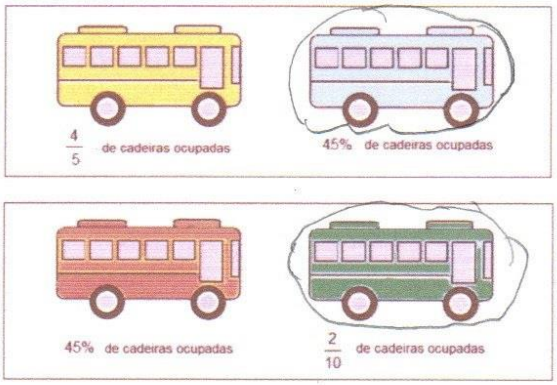
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*



APÊNDICE G – Instrumento Avaliativo respondido por A10

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{5}{25}$ 40% = $\frac{4}{20}$ 75% = $\frac{7}{35}$ 80% = $\frac{8}{40}$ 10% = $\frac{1}{5}$ 25% = $\frac{2}{15}$

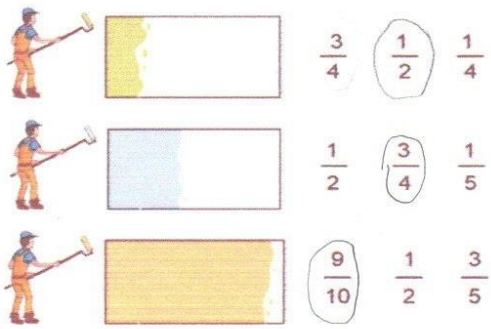
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

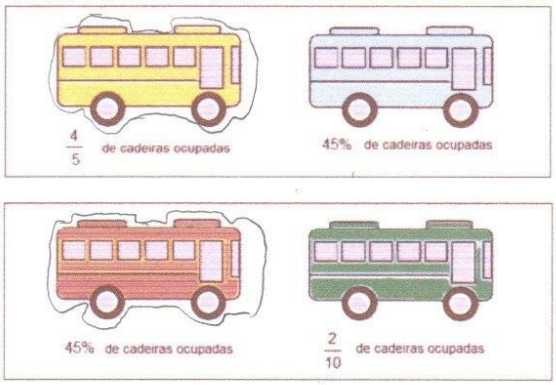
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*



APÊNDICE H – Instrumento Avaliativo respondido por A18

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{1}{2}$ 40% = $\frac{2}{5}$ 75% = $\frac{3}{5,2}$ 80% = $\frac{4}{5}$ 10% = $\frac{2}{1}$ 25% = $\frac{1}{4}$

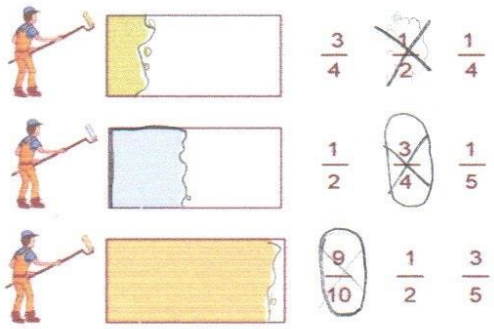
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

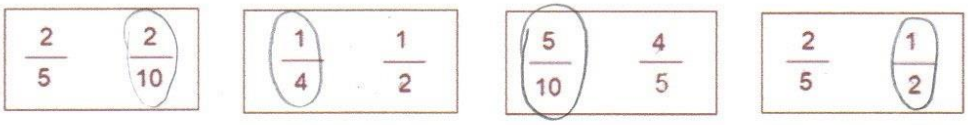
b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

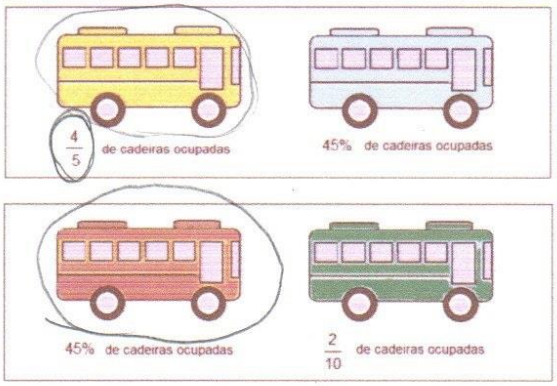
3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*



5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*



APÊNDICE I – Instrumento Avaliativo respondido por B3

ATIVIDADE 2

1) Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:

50% = $\frac{5}{10}$ 40% = $\frac{2}{5}$ 75% = $\frac{3}{4}$ 80% = $\frac{4}{10}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{1}{4}$

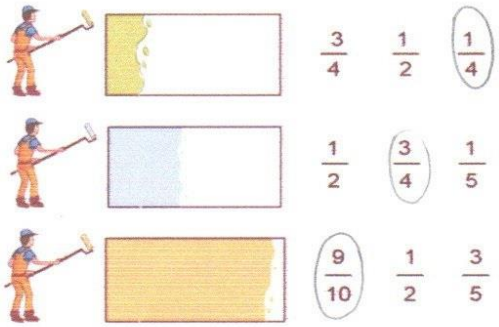
2) Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa mais que a metade do todo.

b) Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

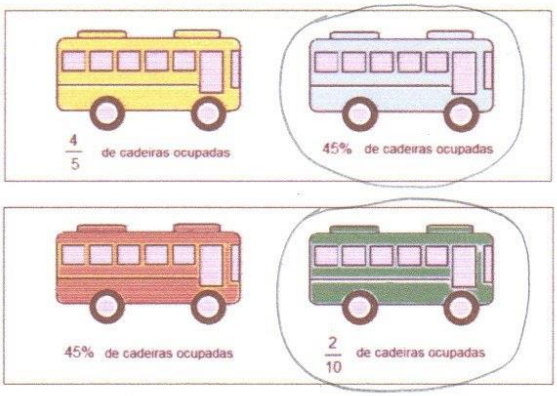
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:



APÊNDICE J – Instrumento Avaliativo respondido por B4

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{5}{5}$ 40% = $\frac{4}{5}$ 75% = $\frac{3}{4}$ 80% = $\frac{8}{10}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{1}{4}$

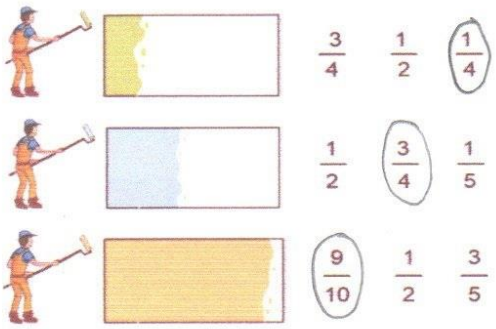
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

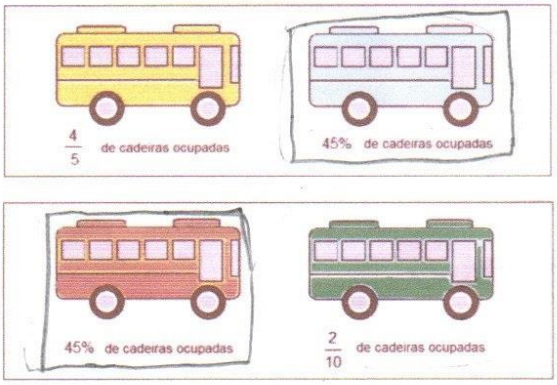
3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a maior parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*



APÊNDICE K – Instrumento Avaliativo respondido por B7

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{1}{2}$ 40% = $\frac{2}{5}$ 75% = $\frac{3}{4}$ 80% = $\frac{4}{5}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{1}{4}$

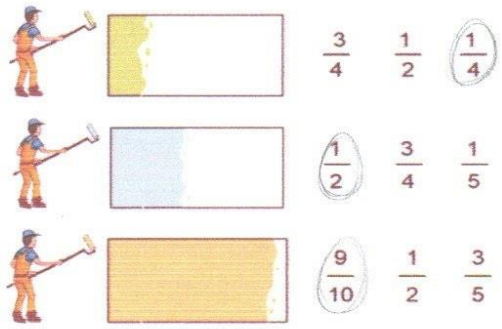
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

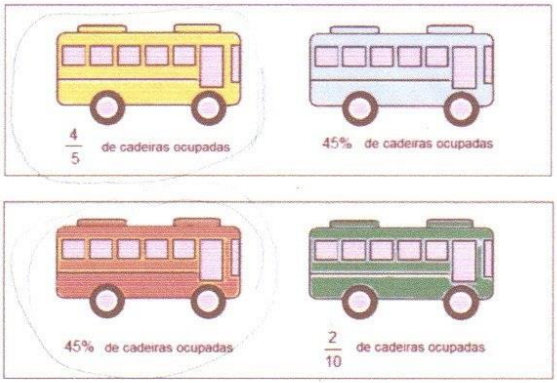
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*



APÊNDICE L – Instrumento Avaliativo respondido por B15

ATIVIDADE 2

1) Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:

50% = $\frac{1}{2}$ 40% = $\frac{2}{5}$ 75% = $\frac{3}{4}$ 80% = $\frac{4}{5}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{1}{4}$

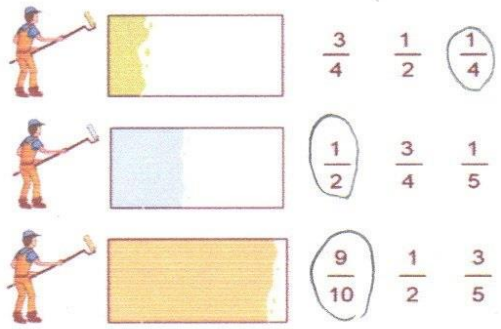
2) Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:

a) Circule aquela que representa mais que a metade do todo.

b) Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:



$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

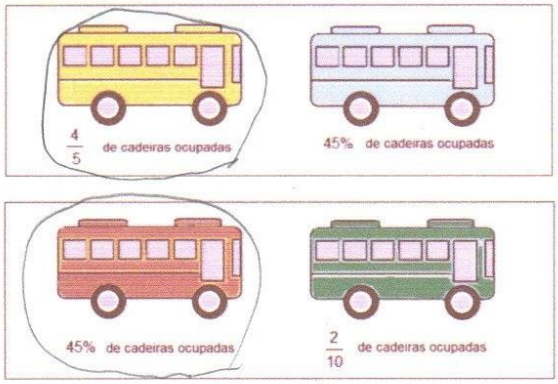
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:



APÊNDICE M – Instrumento Avaliativo respondido por B17

ATIVIDADE 2

1) *Transforme as porcentagens abaixo em frações não centesimais:*

50% = $\frac{5}{10}$ 40% = $\frac{4}{10}$ 75% = $\frac{3}{4}$ 80% = $\frac{8}{10}$ 10% = $\frac{1}{10}$ 25% = $\frac{1}{4}$

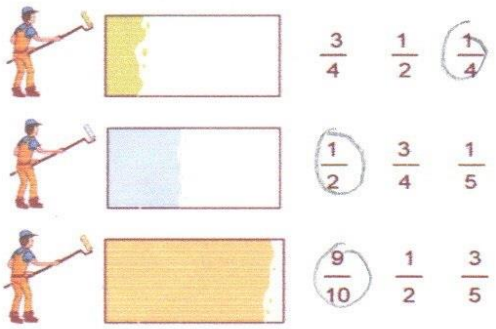
2) *Observe as frações abaixo e marque-as da seguinte forma:*

a) *Circule aquela que representa mais que a metade do todo.*

b) *Faça um x naquela que representa menos que a metade do todo.*

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

3) *Circule a fração que mais se aproxima da parte do muro que cada pintor já pintou:*

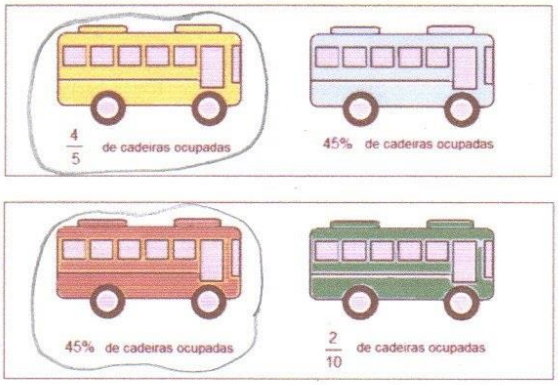


$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

4) *Compare as frações abaixo e circule, em cada par, aquela que representa a <u>maior</u> parte do todo:*

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

5) *Observe o número de cadeiras ocupadas em cada ônibus e circule, em cada par, aquele que está mais cheio:*