



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

ANA CECILIA DIAZ BACCA

Modelos de transmissão de informação em anéis k -regulares

Recife

2024

ANA CECILIA DIAZ BACCA

Modelos de transmissão de informação em anéis k -regulares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística.

Área de Concentração: Probabilidade

Orientador (a): Pablo Martin Rodriguez

Recife

2024

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

D542m Diaz Bacca, Ana Cecilia
Modelos de transmissão de informação em anéis k -regulares / Ana Cecilia Diaz Bacca. – 2024.
38 f.: il., fig.

Orientador: Pablo Martín Rodríguez.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2024.
Inclui referências.

1. Probabilidade. 2. Modelo de rumor. 3. Modelo de Maki-Thompson. 3. Grafos de anel k -regulares. I. Martín Rodríguez, Pablo (orientador). II. Título.

519.2

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2024 - 88

ANA CECILIA DIAZ BACCA

Modelos de transmissão de informação em anéis k-regulares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Estatística.

Aprovada em 15 de abril de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez
Presidente/Orientador, UFPE

Prof. Dr. Sandro Gallo
Examinador Externo, UFSCar

Prof. Dr. Fábio Lima Lopes
Examinador Externo, Universidad Tecnológica Metropolitana

Dedico este trabalho aos meus adorados pais, Ana Luisa Bacca e Alberto Díaz, aos meus queridos irmãos, Julian, Jersson e Dayana, e ao meu amado filho, Emanuel. Vocês são o motor da minha vida, a fonte da minha inspiração constante. Seu amor incondicional e apoio têm sido meu farol, guiando-me a cada passo do meu caminho. Através dos desafios e triunfos, vocês têm sido a minha razão para seguir em frente e alcançar novas alturas. Com gratidão eterna, Ana C.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar meu profundo agradecimento a Deus por permitir que eu chegasse até aqui e por proporcionar experiências que contribuíram para o meu crescimento pessoal, intelectual e espiritual. Seu amor e bênção se manifestaram através de pessoas maravilhosas que estiveram ao meu lado em todos os momentos, ensinando-me grandes lições e fornecendo o apoio necessário para seguir em frente.

Sou infinitamente grata à minha família pelo amor incondicional e pelo apoio constante. Eles são meu maior tesouro na vida. Aos meus pais, agradeço por me ensinarem a importância da força e da determinação, e por serem exemplos de perseverança diante das adversidades. Aos meus três irmãos, especialmente à Dayana, por ser minha companheira de vida e por compartilhar comigo projetos e sonhos.

Ao meu filho, Emanuel, agradeço por ser a luz que ilumina o meu caminho e por ser minha maior motivação para alcançar meus sonhos e metas. Todos os dias, ele me inspira a me esforçar mais e a ser uma pessoa melhor.

Quero agradecer especialmente ao meu orientador, Dr. Pablo Martín Rodríguez, que juntamente com sua esposa, mostrou todo o seu apoio, amizade e hospitalidade. Sua sabedoria, apoio e amizade enriqueceram enormemente minha experiência e foram fundamentais para o meu desenvolvimento.

Além disso, gostaria de reconhecer de forma especial o apoio e o impulso fornecidos pela Dra. Catalina Rua em momentos cruciais do meu caminho rumo à realização dos meus objetivos, transformando sonhos em realidade.

Agradeço a todas as pessoas que tive o privilégio de conhecer ao longo destes anos, especialmente aos meus colegas colombianos, com quem estabeleci laços que espero que perdurem ao longo do tempo. Obrigado por me permitirem compartilhar momentos significativos e por contribuir para tornar este processo ainda mais gratificante.

Por fim, quero agradecer à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), a entidade responsável pelo financiamento dos meus estudos de mestrado e que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho foca no estudo do modelo de rumor de Maki-Thompson em grafos de anel k -regulares. Este modelo, amplamente explorado na literatura, analisa a propagação de um boato em uma população fechada e mista, dividida em três grupos de indivíduos: ignorantes, informantes e neutros. A pesquisa concentra-se em representar a população por meio de grafos de anel k -regulares e busca abordar a influência do grau do grafo na propagação do boato. Dada a crescente complexidade dos cálculos com o aumento de k , o estudo é limitado a dois casos particulares: anéis 2 e 4 regulares. Para esses casos, a estratégia adotada envolve inicialmente o estudo do modelo em \mathbb{Z} . Posteriormente, por meio de métodos de acoplamento, relacionam-se os resultados obtidos em \mathbb{Z} com os dois grafos de interesse. Como resultado, foi possível calcular o valor esperado da quantidade de informados ao final do processo para ambos os casos. Especificamente, no grafo 2-regular, esse resultado se estende a situações em que os indivíduos têm um número determinado de tentativas frustradas de propagação e no caso do grafo 4-regular, foi utilizado o método da maioria para obter os resultados.

Palavras-chave: modelo de rumor; modelo de Maki-Thompson; grafos de anel k -regulares.

ABSTRACT

This work focuses on the study of the Maki-Thompson rumor model in k -regular ring graphs. Widely explored in the literature, this model analyzes the spread of a rumor in a closed and mixed population, divided into three groups of individuals: ignorants, informants, and neutrals. The research aims to represent the population through k -regular ring graphs and seeks to address the influence of the graph's degree on the rumor propagation. Given the increasing complexity of calculations with the rise of k , the study is limited to two specific cases: 2-regular and 4-regular rings. The adopted strategy involves initially studying the model in \mathbb{Z} . Subsequently, through coupling methods, the results obtained in \mathbb{Z} are related to the two graphs of interest. As a result, it was possible to calculate the expected value of the number of informed individuals at the end of the process for both cases. Specifically, in the 2-regular graph, this result extends to situations where individuals have a specified number of unsuccessful propagation attempts, and for the 4-regular graph, the majority rule was employed to obtain the results.

Keywords: rumor model; Maki-Thompson model; k -regular ring graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo anel k -regular com $n = 11$ vértices. Da esquerda para a direita, temos $k = 2$, $k = 6$ e $k = 10$, respectivamente.	14
Figura 2 – Evento $\{Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3\}$	18
Figura 3 – Propagação apenas para a direita.	21
Figura 4 – Conexões entre indivíduos	27
Figura 5 – Zoom k vs proporção final ignorantes	35
Figura 6 – Simulações k vs proporção final ignorantes	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	O MODELO DE RUMOR DE MAKI-THOMPSON	10
1.1.1	Resultados do modelo para diferentes grafos	11
1.2	DO GRAFO COMPLETO A GRAFOS DE ANEL k -REGULARES	13
2	MODELO MAKI-THOMPSON ASSIMÉTRICO COM k TENTATIVAS FRUSTRADAS NO ANEL 2-REGULAR	17
2.1	O MODELO EM \mathbb{Z}	17
2.2	MODELO COM k -TENTATIVAS EM \mathbb{Z}	19
2.3	O MODELO NO GRAFO ANEL 2-REGULAR	23
3	MODELO MAKI-THOMPSON SEGUINDO REGRA DA MAIORIA NO ANEL 4-REGULAR	26
3.1	O MODELO EM \mathbb{Z}	27
3.2	O MODELO NO ANEL 4-REGULAR	31
4	DISCUSSÃO	34
4.1	RESULTADOS DO TRABALHO REALIZADO	34
4.2	RESULTADOS DE SIMULAÇÕES	35
	REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

1.1 O MODELO DE RUMOR DE MAKI-THOMPSON

Os fenômenos de propagação de algo, como doenças, boatos ou tendências, dentro de uma sociedade são muito comuns, tornando-se evidente que haja cada vez mais interesse no estudo para compreensão e talvez controle desses eventos (veja, por exemplo, (KRÓL; FAY; GABRYŚ, 2015), (HELBING, 2012)). Um desses fenômenos sobre os quais estão surgindo cada vez mais estudos é o da propagação de boatos. Entre os primeiros autores a discutir sobre isso, encontramos Daley e Kendall, com trabalhos como (DALEY; KENDALL, 1964), onde eles propõem a importância de modelar a transmissão de informações de maneira diferente da transmissão de uma infecção, particularmente no tema da remoção dos indivíduos. O modelo elimina a necessidade de uma taxa separada para essa ação, o que representa uma característica distintiva em comparação com os modelos epidêmicos tradicionais. Em (DALEY; KENDALL, 1965), eles adotam uma abordagem mais determinista na análise do modelo ao optar por representá-lo de maneira simples e deixar generalizações para o futuro.

Neste trabalho, será estudado um modelo que surgiu como uma simplificação do modelo mencionado anteriormente, o Modelo de Maki-Thompson (MAKI; THOMPSON, 1973), que descreve o processo de disseminação de um boato em uma população fechada e mista, dividida em três grupos de indivíduos: aqueles que não conhecem o boato, aqueles que o conhecem e estão transmitindo ativamente, e aqueles que conhecem o boato, mas não têm mais interesse em propagá-lo, denominados ignorantes, informantes e neutros, respectivamente. O pressuposto essencial é que um indivíduo ciente do rumor continuará a propagá-lo até a primeira vez em que encontrar outra pessoa que também conheça o rumor. Nesse momento, esse indivíduo sente que não há mais emoção em passar o rumor adiante. Assim a disseminação do rumor na população ocorre por meio de interações entre duplas formadas por indivíduos que se encontram em estado de informante e o restante da população, resultando em dois casos de transição: o primeiro ocorre quando um indivíduo no estado de informante tem contato com um indivíduo no estado de ignorante, então o primeiro passa o boato para o segundo, resultando em um novo informado. O segundo ocorre quando um indivíduo informante encontra um indivíduo no mesmo estado ou em estado neutro, em ambos os casos o primeiro se torna neutro.

Consideremos para todo $t \geq 0$, as variáveis aleatórias:

$X(t)$ = número de ignorantes no instante t ,

$Y(t)$ = número de informantes no instante t ,

$Z(t)$ = número de neutros no instante t .

Suponha que $X(t) + Y(t) + Z(t) = n$ para todo $t \geq 0$. O Modelo Maki Thompson é a cadeia de Markov a tempo contínuo $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ que ocorre de acordo com o seguinte esquema de transição:

$$\begin{array}{ll}
 \text{transição} & \text{taxa} \\
 (-1, 1) & YX, \\
 (0, -1) & Y(n - X).
 \end{array} \tag{1.1}$$

A primeira transição corresponde a um informante que conta o rumor a um ignorante, que se torna um informante. A segunda transição corresponde ao fato de um informante encontrar outro informante ou um neutro e, nesse caso, ele perde o interesse em propagar o rumor e se torna em neutro.

Para obter mais detalhes sobre a modelagem matemática de boatos, consulte (DALEY; GANI, 1999, Chap. 5).

1.1.1 Resultados do modelo para diferentes grafos

Primeiro, supomos que a população pode ser representada por um grafo no sentido de que os vértices representam indivíduos e as arestas possíveis interações. Os principais resultados existentes na literatura estão relacionados ao comportamento assintótico da proporção de ignorantes no final do processo, no caso de grafos finitos, ou à disseminação ou não do rumor em um determinado sentido, no caso de grafos com infinitos vértices. Há diferentes abordagens para lidar com esse modelo de acordo com o grafo considerado. O modelo foi primeiramente estabelecido em grafos completos, considerando a suposição de uma população homogênea e totalmente mista, ou seja, cada par de vértices no grafo é ligado por uma aresta. Nesse caso, a abordagem comumente usada é analisar um sistema limite de equações diferenciais, o que simplifica o estudo do modelo e permite obter resultados para algumas generalizações interessantes para um modelo de rumor estocástico geral definido em termos de parâmetros que determinam as taxas nas quais ocorrem diferentes interações entre indivíduos. Esse sistema

pode ser obtido com a aplicação de técnicas conhecidas de cadeias de Markov dependentes de densidade. Veja, por exemplo (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011a; RADA et al., 2021).

Encontramos uma abordagem de um modelo estocástico espacial de transmissão de rumor em (COLETTI; RODRÍGUEZ; SCHINAZI, 2012), onde os autores definem um modelo de rumor em uma rede hipercúbica d -dimensional e mediante acoplamento entre o modelo original e um modelo de percolação guiada, juntamente com a aplicação de resultados provenientes do processo de contato, obtêm condições, em taxas de contato, sob as quais há sobrevivência do rumor com probabilidade positiva ou extinção quase certa.

Em (JUNIOR; RODRIGUEZ; SPEROTO, 2020) Os autores realizam uma análise detalhada do modelo em árvores regulares infinitamente conectadas usando ferramentas da teoria de processos estocásticos e da teoria de ramificação. Por meio de cálculos e simulações, eles investigam a dinâmica da propagação de boatos, a extinção de boatos e as características críticas do processo em termos de parâmetros-chave, como a taxa de transmissão de boatos e a taxa de remoção de boatos. Alguns de seus resultados foram posteriormente estendidos para árvores aleatórias em (JUNIOR; RODRIGUEZ; SPEROTO, 2021). Essa situação se torna interessante quando se observa que muitos grafos aleatórios, que são mais adequados para representar populações, exibem um comportamento semelhante ao de uma árvore em nível local. A abordagem adotada neste estudo é fazer uma comparação do modelo com um processo de ramificação claramente definido a fim de abordar essa questão adequadamente.

Para grafos gerais ou redes heterogêneas, a abordagem usual é analisar as aproximações do modelo por meio de simulações de computador e argumentos de campo médio. Por exemplo, o artigo (MORENO; NEKOVEE; PACHECO, 2004) analisa o processo de propagação de boatos em redes complexas e examina como fatores como a estrutura da rede e as interações entre os nós influenciam esse processo. Por outro lado, em (NEKOVEE et al., 2007) apresentam uma teoria que explica como os boatos se espalham em redes sociais complexas, considerando a estrutura da rede, as interações sociais e a dinâmica temporal. Além disso, (ZANETTE, 2001; ZANETTE, 2002) investiga o comportamento crítico da propagação de boatos em redes de mundo pequeno. Essa pesquisa é fundamental para a compreensão dos processos de propagação de boatos em vários contextos e sua relevância em áreas como comunicação, sociologia e gerenciamento de informações em redes sociais.

1.2 DO GRAFO COMPLETO A GRAFOS DE ANEL k -REGULARES

Para o modelo no grafo completo, o comportamento da proporção restante de ignorantes é conhecido. Para apresentar os principais resultados da literatura, é importante definir o tempo de absorção do processo como a variável

$$\tau^{(n)} := \inf\{t \geq 0 : Y(t) = 0\}.$$

Observe que essa variável aleatória conta o tempo em que não há mais propagadores na população. Agora, a proporção restante de ignorantes é dada por $X(\tau^{(n)})/n$ e, é claro, a proporção restante de neutros é $Z(\tau^{(n)})/n = 1 - X(\tau^{(n)})/n$. A seguir, apresentamos os principais resultados da literatura relacionados a essas quantidades.

Os primeiros teoremas estabelecidos para o modelo Maki-Thompson tratam do comportamento assintótico da proporção de indivíduos originalmente ignorantes que permanecem ignorantes no final do processo. Dentre os trabalhos rigorosos temos a (SUDBURY, 1985), no qual provou que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(\tau^{(n)})}{n} = x_\infty \approx 0.2032 \text{ em probabilidade.}$$

A proporção limite de ignorantes x_∞ pode ser expressa como:

$$x_\infty = -\left(\frac{1}{2}\right) W(-2e^{-2}),$$

em que W representa a função W de Lambert, que é o inverso da função $x \mapsto xe^x$ (consulte (CORLESS et al., 1996) para mais detalhes). Posteriormente (WATSON, 1987) provou o Teorema do Limite Central correspondente, no qual afirma que:

$$\sqrt{n} \left(\frac{X(\tau^{(n)})}{n} - x_\infty \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

aquí $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denota convergência na distribuição, e $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ é a distribuição gaussiana com média zero e variância dada por:

$$\sigma^2 = \frac{x_\infty(1 - x_\infty)(1 - 2x_\infty)}{(1 - 2x_\infty)^2}.$$

Um estudo mais recente, um dos resultados de (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011b) com relação ao número médio de transições realizadas pelo processo é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^{(n)}}{n} = \tau_\infty,$$

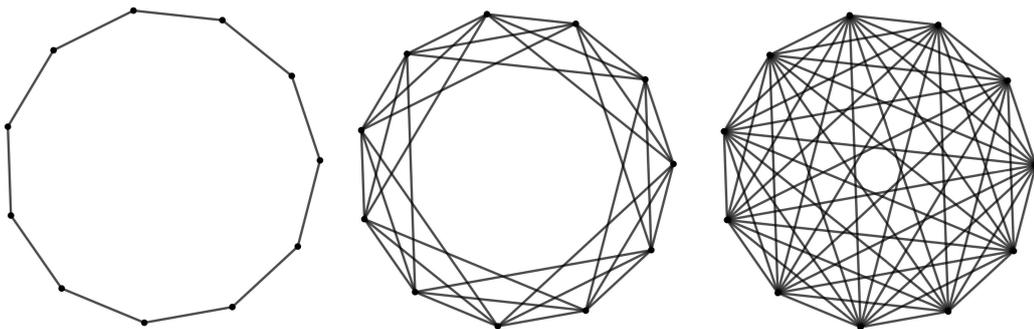
onde $m^{(n)}$ é o número médio de iterações do processo para uma população de tamanho n e $\tau_\infty = 2(1 - x_\infty)$.

A representação da população por meio de um grafo completo tem sido fundamental para compreender a propagação de informações, considerando a interconexão total entre os indivíduos. Neste trabalho se introduz uma perspectiva intrigante ao representar a população por meio de grafos anel k -regulares, dos quais o grafo completo emerge como um caso especial dentro dessa categoria mais ampla de grafos. Ao estudar especificamente os anéis k -regulares, exploramos uma estrutura mais ampla que incorpora a noção de vizinhanças limitadas, o que poderia oferecer uma compreensão mais detalhada da dinâmica de propagação.

Em um grafo de anel com n vértices, os vértices podem ser dispostos em um círculo com cada vértice conectado aos k vizinhos mais próximos veja a Figura 1. Ou seja consideramos G como um grafo de anel k -regular com n vértices e se o conjunto de vértices for $V = \{1, \dots, n\}$, então o conjunto de arestas é dado por aqueles (i, j) de modo que:

$$E = \left\{ (i, j) : 0 < |i - j| \bmod \left(n - \frac{k}{2} \right) \leq \frac{k}{2} \right\}.$$

Figura 1 – Grafo anel k -regular com $n = 11$ vértices. Da esquerda para a direita, temos $k = 2$, $k = 6$ e $k = 10$, respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O modelo de rumor de Maki-Thompson em um grafo $G = (V, E)$, em que V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas, pode ser definido formalmente como um processo de Markov em tempo contínuo $(\eta_t)_{t \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}^V$; ou seja, no momento t o estado do processo é uma função $\eta_t : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Supõe-se que cada vértice $v \in V$ represente um indivíduo, que é considerado ignorante se $\eta_t(v) = 0$, informante se $\eta_t(v) = 1$ e neutro se $\eta_t(v) = 2$. Então, se o sistema estiver na configuração $\eta \in \mathcal{S}$, o estado do vértice v muda de acordo com as seguintes taxas de transição:

$$\begin{array}{rcl}
& \text{transição} & \text{taxa} \\
0 & \rightarrow & 1, \quad n_1(v, \eta_t), \\
1 & \rightarrow & 2, \quad n_1(v, \eta_t) + n_2(v, \eta_t),
\end{array} \tag{1.2}$$

onde

$$n_i(v, \eta_t) = \sum_{u \sim v} \mathbb{1}\{\eta_t(u) = i\}$$

é o número de vizinhos de v no estado i para a configuração η_t , para $i \in \{1, 2\}$. Formalmente, (1.2) significa que se o vértice v estiver no estado, digamos, 0 no momento t , então a probabilidade de que ele esteja no estado 1 no momento $t + h$, para h pequeno, é $n_1(v, \eta_t)h + o(h)$, e se o vértice v estiver no estado 1 no tempo t então a probabilidade de que ele estará no estado 2 no tempo $t + h$, para h pequeno, é $(n_1(v, \eta_t) + n_2(v, \eta_t))h + o(h)$, em que $o(h)$ representa uma função tal que $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$.

Nesse caso, as variáveis aleatórias de interesse são as quantidades de ignorantes, espalhadores e neutros em qualquer momento $t \geq 0$ podem ser escritas como:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{\eta_t(i)=0\}}, \quad Y(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{\eta_t(i)=1\}}, \quad \text{and} \quad Z(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{\eta_t(i)=2\}},$$

onde \mathbb{I}_A denota a variável aleatória indicadora do evento A . Portanto, nesse caso, a Maki-Thompson é a cadeia de Markov de tempo contínuo $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$.

Um estudo interessante sobre a modelagem matemática de boatos é o trabalho de (AGLIARI et al., 2017), onde é considerado o modelo Maki-Thompson para a propagação estocástica de um boato em uma população, na qual a população é modelada a partir de um grafo anel k -regular e, ao inserir ligações adicionais, obtém-se uma rede de mundo pequeno. Os resultados mostram uma transição entre regimes de localização e propagação, fornecendo uma perspectiva valiosa sobre os efeitos da estrutura de rede na dinâmica dos boatos.

Os próximos capítulos deste trabalho serão organizados da seguinte maneira: O Capítulo 2 abordará o modelo inicialmente em \mathbb{Z} , onde cada indivíduo tem apenas dois vizinhos. Será investigado até onde a informação pode se propagar, resultando no valor esperado da quantidade de informados ao final do processo, considerando também k tentativas frustradas de propagação e qualquer $p \in (0, 1)$, onde p é a probabilidade de afastamento do boato do local de origem. Em seguida, esse resultado será associado ao grafo anel 2-regular, pois, através de

acoplamento, será demonstrada uma relação entre as variáveis do anel e de \mathbb{Z} . No Capítulo 3, mais uma vez, o modelo será estudado inicialmente em \mathbb{Z} , desta vez com cada indivíduo tendo quatro vizinhos e a probabilidade de passar o boato sendo a mesma para todos eles. Neste caso, para facilitar a obtenção do valor esperado dos informados ao final do processo, será utilizada a regra da maioria, e a condição inicial do modelo base será alterada para começar com cinco informantes consecutivos. De maneira semelhante ao capítulo descrito anteriormente, os resultados de \mathbb{Z} serão associados ao anel 4-regular por meio de processos de acoplamento entre as variáveis. Finalmente, no Capítulo 4, será feita uma breve discussão sobre o trabalho desenvolvido, suas descobertas e também questões em aberto para futuros estudos.

2 MODELO MAKI-THOMPSON ASSIMÉTRICO COM k TENTATIVAS FRUSTRADAS NO ANEL 2-REGULAR

2.1 O MODELO EM \mathbb{Z}

Para o modelo Maki-Thompson em \mathbb{Z} , supomos que o vértice 0 é o inicial no estado informante, e a informação pode se propagar em ambas as direções, direita e esquerda. Nosso interesse está em determinar até onde o rumor pode se propagar. Para isso, definimos:

$$\tau^{(\infty)} := \inf\{t \geq 0 : Y(t) = 0\}.$$

Observe que:

$$Z(\tau^{(\infty)}) = 1 + Z^+(\tau^{(\infty)}) + Z^-(\tau^{(\infty)}),$$

em que, dado $\eta_t(1) \neq 0$ para algum $t \geq 0$,

$$Z^+(\tau^{(\infty)}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{\eta_t(i) \neq 0 \text{ para algum } t \geq 0\}},$$

denota o número de neutros à direita de 0 ao final do processo. E dado $\eta_t(-1) \neq 0$ para algum $t \geq 0$

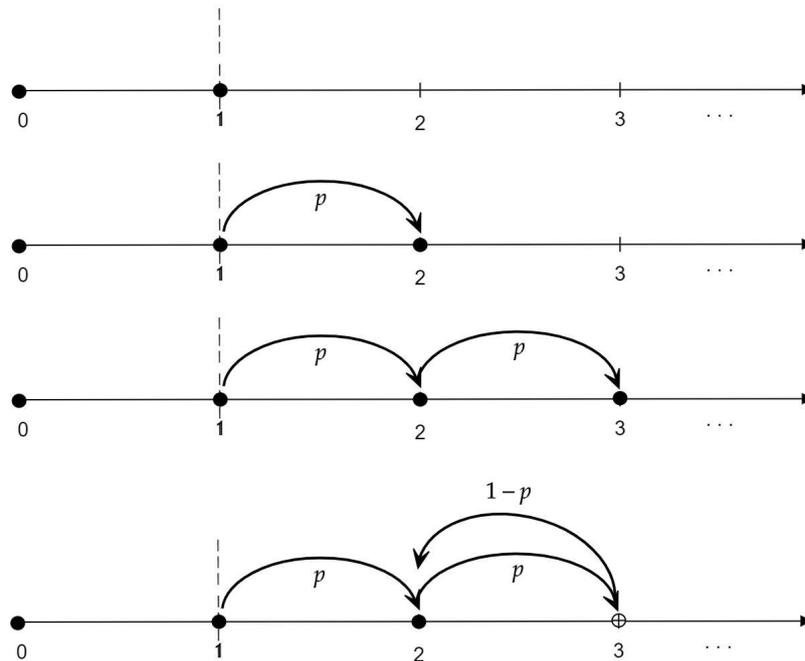
$$Z^-(\tau^{(\infty)}) = \sum_{i=1}^{-\infty} \mathbb{I}_{\{\eta_t(i) \neq 0 \text{ para algum } t \geq 0\}},$$

denota o número de neutros à esquerda de 0 ao final do processo.

Para simplificar os cálculos, e sem perda de generalidade, estudamos Z^+ , uma vez que, por simetria, podemos depois fazer o mesmo para Z^- . Começaremos atribuindo a variável aleatória W_0 ao evento $\{\eta_t(1) \neq 0, \text{ para algum } t \geq 0\}$ da seguinte forma

$$W_0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta_t(1) \neq 0 \text{ para algún } t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Denotamos por p a probabilidade de o boato se afastar da origem e $(1 - p)$ a probabilidade de ele retornar à origem. Então, para cada vértice v , podemos associar variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) Y_1^v, Y_2^v, \dots de tal forma que $P(Y_i^v = 1) = p$ e $P(Y_i^v = -1) = 1 - p$. A variável Y_i^v indica que a i -ésima vez que o vértice v tentar transmitir a informação, ele terá duas possibilidades: tentar passar para seu vizinho à direita com probabilidade p ou para seu vizinho à esquerda com probabilidade $(1 - p)$. Por exemplo, se $W_0 = 1$

Figura 2 – Evento $\{Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3\}$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

para que $Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3$, deve ocorrer o seguinte (veja a Figura 2.1).

Isso pode ser expresso como a interseção dos eventos:

$$\{Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3 | W_0 = 1\} = \{Y_1^1 = 1\} \cap \{Y_1^2 = 1\} \cap \{Y_1^3 = -1\}.$$

A interpretação é que, começando com o vértice 1 no estado informante, na primeira tentativa de passar a informação, ele o faz para seu vizinho se a direita, resultando em que o vértice 2 também se torne informante. Agora, o vértice 2, em sua primeira tentativa de passar a informação, também é para seu vizinho a direita, informando o vértice 3. Finalmente, este último, em sua primeira tentativa de passar a informação, o faz para seu vizinho a esquerda, tornando-se neutro, o que implica que não há mais informantes à direita da origem. Assim,

$$\begin{aligned} P(Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3 | W_0 = 1) &= P(Y_1^1 = 1, Y_1^2 = 1, Y_1^3 = -1 | W_0 = 1) \\ &= p \cdot p \cdot (1 - p) \\ &= p^2 \cdot (1 - p). \end{aligned}$$

Isso pode ser entendido como o número de tentativas até que haja sucesso. Neste caso, as tentativas de passar informação continuam à direita até que haja uma tentativa à esquerda. Nesse momento, não haverá mais propagação à direita. Portanto, $Z^+(\tau^{(\infty)}) \sim Geom(1 - p)$

e, conseqüentemente, $\mathbb{E}(Z^+(\tau^{(\infty)})|W_0 = 1) = 1/(1 - p)$.

Podemos seguir o mesmo raciocínio para a variável $Z^-(\tau^{(\infty)})$, mas neste caso a probabilidade p , ou seja, a probabilidade de se distanciar da origem é quando ele vai para a esquerda e a probabilidade de retornar $(1 - p)$ quando ele vai para a direita. Aqui atribuímos a variável aleatória W_0 ao evento $\{\eta_t(-1) \neq 0, \text{ para algum } t \geq 0\}$, em que

$$W_0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta_t(-1) \neq 0 \text{ para algún } t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Nesse caso as tentativas de passar a informação continuam à esquerda até que haja uma tentativa à direita, que será o que chamamos de sucesso, pois nesse momento, não haverá mais propagação à esquerda. Portanto, $Z^-(\tau^{(\infty)}) \sim \text{Geom}(1 - p)$ e $\mathbb{E}(Z^-(\tau^{(\infty)})|W_0 = 1) = 1/(1 - p)$.

2.2 MODELO COM k -TENTATIVAS EM \mathbb{Z}

Agora, o que acontece se o número de tentativas fracassadas para que um informante se torne neutro for maior que um? Novamente, para simplificar cálculos vamos nos concentrar na parte direita \mathbb{Z}^{k+} . Podemos designar k como o número de tentativas que um informante tem antes de se tornar neutro. Nesse caso, estamos interessados em saber se a informação passa para o próximo vértice ou não. Ou seja, se estamos no vértice v , nosso interesse está em ver se a informação em algum momento é passada para a direita ao vértice seguinte $v + 1$, ou se o processo é detido quando o contato é só a esquerda. Por exemplo, para $k = 2$, as possibilidades de propagação ou não da informação são:

$$\begin{aligned} \{v \rightarrow v + 1\} &= \{Y_1^v = 1\} \cup \{Y_1^v = -1, Y_2^v = 1\}, \\ \{v \rightarrow v + 1\}^c &= \{Y_1^v = -1\} \cap \{Y_2^v = -1\}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos definir uma variável aleatória que nos indica quando a informação é transmitida a direita ou não da seguinte maneira:

$$W_v = \begin{cases} 1 & \text{se } v \rightarrow v + 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, $W_v \sim \text{Bernoulli}(1 - (1 - p)^2)$. Portanto, a quantidade final de informantes ao final do processo é determinado pela interseção de eventos relacionados às variáveis W_v . Por exemplo, dado que $W_0 = 1$ teríamos:

$$\{Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3\} = \{W_1 = 1\} \cap \{W_2 = 1\} \cap \{W_3 = 0\}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(Z^+(\tau^{(\infty)}) = 3 | W_0 = 1) &= P(W_1 = 1, W_2 = 1, W_3 = 0 | W_0 = 1) \\ &= (1 - (1 - p)^2) \cdot (1 - (1 - p)^2) \cdot (1 - p)^2 \\ &= \left(1 - (1 - p)^2\right)^2 \cdot (1 - p)^2. \end{aligned}$$

Concluimos que $Z^+(\tau^{(\infty)}) \sim \text{Geom}((1 - p)^2)$ para $k = 2$.

Em geral, para qualquer k , podemos definir uma variável aleatória $W_v \sim \text{Bernoulli}(1 - (1 - p)^k)$ de modo que:

$$W_v = \begin{cases} 1 & \text{se } v \rightarrow v + 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

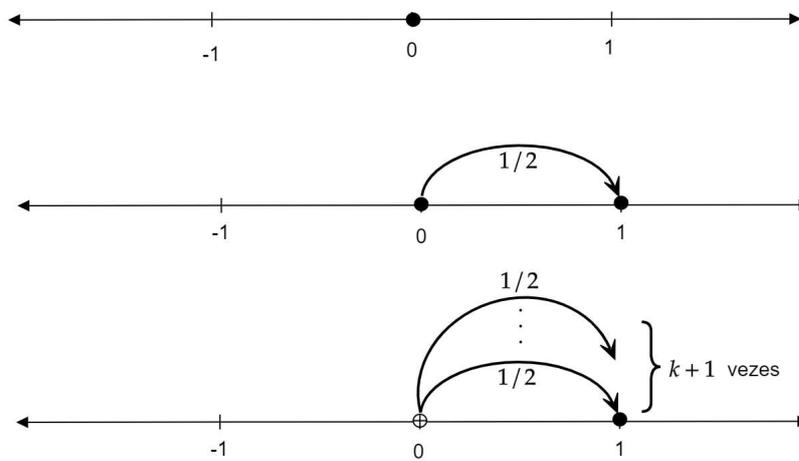
Portanto, $Z^{k+}(\tau^{(\infty)}) \sim \text{Geom}((1 - p)^k)$. É possível fazer um raciocínio semelhante para $Z^{k-}(\tau^{(\infty)})$, onde p é a probabilidade de o rumor se afastar da origem e $(1 - p)$ de que ele retorne a ele. Além disso, para que um vértice informante se torne neutro, ele precisará de k tentativas fracassadas de transmissão de informação, então $Z^{k-}(\tau^{(\infty)}) \sim \text{Geom}((1 - p)^k)$.

Agora, para determinar até onde a informação pode se propagar com k tentativas frustradas em \mathbb{Z} , devemos considerar o seguinte. No início, começamos com um único vértice no estado informante, neste caso, será o vértice 0, e o restante dos indivíduos que se estendem à sua direita e esquerda estarão no estado ignorante. Agora, observe que os vizinhos diretos deste são -1 e 1, para os quais a informação pode ser transmitida. Em cada caso, a probabilidade de fazê-lo é $1/2$, ou seja, a probabilidade de que a informação seja transmitida para a direita é $1/2$, e a probabilidade de ser transmitida para a esquerda também é $1/2$. No entanto, isso é válido apenas no início do processo; para os demais, a probabilidade de afastar-se da origem continuará sendo p , enquanto a probabilidade de retornar a ela será $(1 - p)$.

Tendo em vista o exposto acima, o processo de propagação pode ocorrer de três maneiras: a primeira é quando o rumor se divulga apenas para a direita. Para que isso aconteça, o vértice

0, em sua primeira tentativa de informar, deve fazê-lo para a direita, resultando no vértice 1 tornando-se informante. A partir desse ponto, as próximas k tentativas do vértice 0 também serão para a direita e resultarão nele se tornando neutro, o que significa que o rumor não se espalhará para esquerda (veja a Figura 3). A segunda maneira é quando o rumor se propaga apenas para a esquerda, o que pode ser explicado da mesma forma que o caso anterior, mas com os tentos de propagação só para a esquerda. Finalmente, a terceira opção é quando o rumor se propaga nas duas direções.

Figura 3 – Propagação apenas para a direita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Para representar esses eventos, podemos definir Y como a variável aleatória que assume valores de $-1, 1, 2$, dependendo se apenas -1 está informado, apenas 1 está informado ou ambos -1 e 1 estão informados em algum momento, de acordo com as seguintes probabilidades:

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2^{k+1}} \\ 1 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2^{k+1}} \\ 2 & \text{com probabilidade } 1 - \frac{1}{2^k}. \end{cases}$$

Lemma 2.2.1. *Considere o modelo Maki-Thompson com k tentativas fracassadas definido em \mathbb{Z} . Então*

$$Z^k(\tau^{(\infty)}) = 1 + Z^{k^+} \cdot \mathbb{I}_{\{Y \neq -1\}} + Z^{k^-} \cdot \mathbb{I}_{\{Y \neq 1\}},$$

onde Z^{k+} e Z^{k-} são independentes e seguem uma distribuição geométrica com parâmetro $((1-p)^k)$.

Demonstração. Consideremos o modelo Maki-Thompson com k tentativas fracassadas nos inteiros. Temos que Z^{k+} e Z^{k-} são variáveis independentes que contam a quantidade de indivíduos informados à direita e à esquerda do zero ao final do processo, respectivamente. Ambas seguem uma distribuição geométrica com parâmetro $((1-p)^k)$.

Agora, para determinar até onde o boato pode se espalhar, vamos analisar as possibilidades que ele tem dependendo da variável aleatória Y , que indica a direção em que ele pode se propagar.

Para saber quantos foram informados à direita de zero, temos Z^{k+} , mas para que isso ocorra, Y deve primeiro ser igual a 1 ou 2, indicando que o rumor se propagou nessa direção. Então podemos escrever que a quantidade de informados no final do processo à direita está determinado por $Z^{k+} \cdot \mathbb{I}_{\{Y \neq -1\}}$. Da mesma forma com os informados à esquerda de zero, temos Z^{k-} mas para que isso ocorra, Y deve primeiro ser igual a -1 ou 2, indicando que o rumor se propagou nessa direção. Então podemos escrever que a quantidade de informados no final do processo esta à esquerda determinado por $Z^{k+} \cdot \mathbb{I}_{\{Y \neq 1\}}$.

Portanto, a quantidade final de informados no processo, vai ser a soma dos informados à direita mais os informados à esquerda e o zero. Ou seja

$$Z^k(\tau^{(\infty)}) = 1 + Z^{k+} \cdot \mathbb{I}_{\{Y \neq -1\}} + Z^{k-} \cdot \mathbb{I}_{\{Y \neq 1\}}.$$

□

Teorema 2.2.2. *Considere o modelo Maki-Thompson com p fixo e k tentativas fracassadas definido em \mathbb{Z} . Então*

$$\mathbb{E}(Z^k(\tau^{(\infty)})) = 1 + \frac{1}{(1-p)^k} \left(\frac{2^{k+1} - 1}{2^k} \right).$$

Demonstração. Suponha que o processo comece com o vértice 0 no estado informante e o restante no estado ignorante. A probabilidade p representa a probabilidade de o rumor se afastar da origem e $(1-p)$ de que ele retorne a ela. Além disso, para que um vértice informante se torne neutro, deve haver k tentativas fracassadas de propagação, ou seja, encontros com outros vértices que estão cientes do rumor. E, finalmente, o processo de propagação ocorre de acordo com a variável aleatória Y , que descreve se a propagação ocorre apenas para a direita, apenas para a esquerda ou em ambas as direções.

Portanto,

$$\mathbb{E}(Z^k(\tau^{(\infty)})) = \sum_{i \in \{-1, 1, 2\}} \mathbb{E}(Z(\tau^{(\infty)})|Y = i)\mathbb{P}(Y = i), \quad (2.1)$$

mas aplicando o Lema 2.2.1 temos

$$\mathbb{E}(Z^k(\tau^{(\infty)})|Y = i) = 1 + \mathbb{E}(Z^{k^+}(\tau^{(\infty)})|Y = i) + \mathbb{E}(Z^{k^-}(\tau^{(\infty)})|Y = i)$$

Agora, observe que

$$\mathbb{E}(Z^{k^-}(\tau^{(\infty)})|Y = 1) = \mathbb{E}(Z^{k^+}(\tau^{(\infty)})|Y = -1) = 0, \quad (2.2)$$

enquanto que

$$\mathbb{E}(Z^{k^+}(\tau^{(\infty)})|Y = 1) = \mathbb{E}(Z^{k^+}(\tau^{(\infty)})|Y = 2) = \frac{1}{(1-p)^k} \quad (2.3)$$

e, por simetria,

$$\mathbb{E}(Z^{k^-}(\tau^{(\infty)})|Y = -1) = \mathbb{E}(Z^{k^-}(\tau^{(\infty)})|Y = 2) = \frac{1}{(1-p)^k}. \quad (2.4)$$

Em seguida, aplicando (2.2), (2.3) y (2.4) em (2.1) , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(\tau^{(\infty)})) &= \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{(1-p)^k}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \left(1 + \frac{2}{(1-p)^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{(1-p)^k} \left(\frac{2^{k+1} - 1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

□

2.3 O MODELO NO GRAFO ANEL 2-REGULAR

Teorema 2.3.1. *Considere o modelo Maki-Thompson no anel 2-regular com n vértices e também k tentativas e p fixos. Então,*

$$Z_n^k(\tau^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z^k(\tau^{(\infty)}).$$

Onde $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.}$ denota convergência quase certa quando n tende ao infinito.

Demonstração. Para esta demonstração, realizaremos inicialmente acoplamento do anel 2-regular para \mathbb{Z} e depois se prova a convergência quase certa. Para isso, considere $Z_n^k(\tau^{(n)})$ como a sequência de variáveis aleatórias que denota a quantidade de vértices neutros no final do processo em cada anel 2-regular com n vértices, k tentativas de informar fracassadas e

p como a probabilidade de se afastar da origem. Observe que, assim como em \mathbb{Z} , podemos dividir cada grafo em dois lados a partir do vértice informante inicial. Consideremos então as variáveis

$$Z_n^{k^+} := \max \left\{ i \in \left\{ 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} : \eta_t(i) = 2 \text{ para algum } t \geq 0 \right\}$$

e

$$Z_n^{k^-} := \min \left\{ i \in \left\{ -1, -2, \dots, -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} : \eta_t(i) = 2 \text{ para algum } t \geq 0 \right\}.$$

Da mesma forma que nos inteiros e tendo p como a probabilidade de se afastar da origem e $(1-p)$ de retornar a ela, com k tentativas de transmissão de informação, podemos descrever o processo de dispersão à direita e à esquerda do vértice inicial como uma sequência de variáveis aleatórias Bernoulli W_v com parâmetro $(1 - (1-p)^k)$, que descreverão a passagem ou não de informação de um vértice para outro até a metade do grafo ou seja $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ para a direita e $-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ a esquerda. Em seguida, podemos reescrever as variáveis $Z_n^{k^+}(\tau^{(n)})$ e $Z_n^{k^-}(\tau^{(n)})$ em termos das variáveis $Z^{k^+}(\tau^{(\infty)})$ e $Z^{k^-}(\tau^{(\infty)})$ descritas no modelo em \mathbb{Z} da seguinte forma:

$$Z_n^{k^-}(\tau^{(n)}) = \begin{cases} Z^{k^+}(\tau^{(\infty)}) & \text{se } Z^{k^+}(\tau^{(\infty)}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{se } Z^{k^+}(\tau^{(\infty)}) > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

e

$$Z_n^{k^+}(\tau^{(n)}) = \begin{cases} Z^{k^-}(\tau^{(\infty)}) & \text{se } Z^{k^-}(\tau^{(\infty)}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{se } Z^{k^-}(\tau^{(\infty)}) > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, mostraremos a convergência entre as sequências $Z_n^{k^+}(\tau^{(n)})$ e $Z^{k^+}(\tau^{(\infty)})$, que para simplicidade denotaremos como $Z_n^{k^+}(\tau^{(n)}) = Z_n^{k^+}$ e $Z^{k^+}(\tau^{(\infty)}) = Z^{k^+}$.

Para provar a convergência quase certa da sequência de variáveis aleatórias $Z_n^{k^+}$ para a variável aleatória Z^{k^+} , devemos demonstrar que vale a seguinte afirmação:

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^{k^+} = Z^{k^+} \right) = 1.$$

Como $Z^{k^+} \sim \text{Geom}((1-p)^k)$, temos $P(Z^{k^+} < \infty) = 1$. Para cada $\omega \in \{Z^{k^+} < \infty\}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Z^{k^+} < n_0$. Note que $\frac{n}{2} > n_0$, logo $Z^{k^+}(\omega) < \frac{n}{2}$. E, por definição, $Z_n^{k^+}(\omega) = Z^{k^+}(\omega)$. Portanto, para cada $\omega \in \{Z^{k^+} < \infty\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^{k^+}(\omega) = Z^{k^+}(\omega)$$

Logo, podemos afirmar que $Z_n^{k^+}$ converge quase certamente a Z^{k^+} . Da mesma forma, podemos realizar a convergência entre $Z_n^{k^-}(\tau^{(n)})$ e $Z^{k^-}(\tau^{(\infty)})$.

Agora, pelo Teorema de Convergência Quase Certa da Soma de Variáveis Aleatórias, que afirma que se duas sequências de variáveis aleatórias convergem quase certamente para duas variáveis aleatórias, então a sequência da soma dessas variáveis aleatórias também converge quase certamente para a soma das variáveis aleatórias. Temos que

$$Z_n^{k^+} + Z_n^{k^-} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z^{k^+} + Z^{k^-}$$

Mas, como

$$Z_n^k = 1 + Z_n^{k^+} + Z_n^{k^-} \text{ e } Z^k = 1 + Z^{k^+} + Z^{k^-},$$

então,

$$Z_n^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z^k.$$

□

Um resultado direto deste teorema é o seguinte corolário.

Corolário 2.3.2. *Considere o modelo Maki-Thompson no anel 2-regular com n vértices, k e p fixos. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(Z_n^k(\tau^{(n)}) \right) = 1 + \frac{1}{(1-p)^k} \left(\frac{2^{k+1} - 1}{2^k} \right).$$

Demonstração. Aplicando o teorema 2.3.1 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(Z_n^k(\tau^{(n)}) \right) = \mathbb{E} \left(Z_n^k(\tau^{(\infty)}) \right) = 1 + \frac{1}{(1-p)^k} \left(\frac{2^{k+1} - 1}{2^k} \right).$$

□

3 MODELO MAKI-THOMPSON SEGUINDO REGRA DA MAIORIA NO ANEL 4-REGULAR

Na seção anterior, aplicamos inicialmente o modelo em \mathbb{Z} e posteriormente no grafo anel 2-regular. Nesta seção, abordaremos o grafo de maneira semelhante; no entanto, devido à complexidade dos cálculos, utilizaremos a regra da maioria, que é uma ferramenta útil neste contexto, pois pode influenciar a difusão de informações; geralmente acontece que as pessoas tendem a seguir as opiniões e comportamentos da maioria. Ela tem sido explorada em diversos contextos, desde a propagação de opiniões em redes sociais até a modelagem de dinâmicas de decisão coletiva. (SOBRIE; MOUSSEAU; PIRLOT, 2013) abordaram a aplicabilidade prática, investigando a aprendizagem de modelos a partir de amplos conjuntos de exemplos. Trabalhos como (WENG; MENCZER; AHN, 2013) e (BESSI et al., 2015), exploram a influência da regra da maioria na previsão de viralidade e a estrutura da comunidade em redes sociais e o entendimento das narrativas coletivas na era da desinformação, especialmente no confronto entre ciência e teorias de conspiração. Por outro lado, também existem trabalhos que se concentram em estudar características mais específicas desta regra, por exemplo (CHEN; REDNER, 2005) investigam a dinâmica da regra da maioria em dimensões finitas, fornecendo uma compreensão mais profunda de como essa dinâmica afeta a disseminação de informações em contextos específicos. (CROKIDAKIS; OLIVEIRA, 2015) abordam as transições de fase no modelo de regra da maioria, oferecendo uma perspectiva sobre as mudanças na dinâmica da regra da maioria em diferentes cenários.

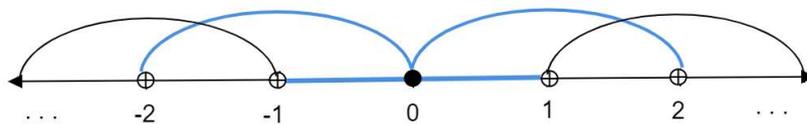
Neste caso, aplicaremos a regra da maioria da seguinte forma: dado que estamos lidando com um grafo 4-regular, cada indivíduo tem exatamente 4 vizinhos. Portanto, para aqueles indivíduos no estado ignorante que tenham pelo menos dois vizinhos no estado informante e pelo menos um no estado neutro, passarão a um estado informante. Isso reflete a ideia de que se a maioria de seus vizinhos conhece o rumor, então ele também o conhecerá. Esta abordagem é uma modificação do processo original de transmissão de informações, onde a regra da maioria é adaptada para refletir a estrutura específica do grafo 4-regular. Ao introduzir a regra da maioria, estamos considerando um mecanismo mais realista e frequentemente observado em sistemas sociais, onde a pressão social e a conformidade desempenham um papel crucial na disseminação de informações. Esta modificação não só simplifica os cálculos, mas também oferece uma perspectiva mais prática sobre como as informações podem se propagar em redes,

onde as conexões e influências dos indivíduos variam significativamente.

3.1 O MODELO EM \mathbb{Z}

Como mencionado anteriormente, começaremos abordando a questão nos \mathbb{Z} . Para isso, cada indivíduo localizado na reta numérica terá como vizinhos os dois números consecutivos anteriores a ele e os dois seguintes, como mostra a figura 4. Além disso, a probabilidade de querer passar o rumor para qualquer de seus vizinhos é $1/4$.

Figura 4 – Conexões entre indivíduos



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Neste caso, nosso foco está em determinar até onde o rumor pode se espalhar em termos de posição. Além disso, para tornar o processo mais simples de resolver, nos concentraremos apenas na parte positiva dos \mathbb{Z} . Para garantir isso, assumiremos como condição inicial que $\eta_0(-2) = 2$, $\eta_0(-1) = 2$ e $\eta_0(0) = 1$, o que significa que os vizinhos à esquerda de zero estão no estado neutro e zero está no estado informante, e o restante dos indivíduos assumiremos que está no estado ignorante. Podemos definir então $Z^+ = \max\{n \in \mathbb{Z} : \eta_t(n) \neq 0 \text{ para algum } t\}$. No processo de cálculo da esperança de nossa variável aleatória, optamos por utilizar uma estratégia recursiva na identificação da configuração dos estados de determinados vértices, a fim de simplificar um problema complexo e chegar a uma solução elegante e eficiente.

Daqui em diante, usaremos a seguinte notação para mostrar o estado dos indivíduos que nos interessam. Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ tem se que:

$$\circ := \{\eta_t(n) = 0\}, \bullet := \{\eta_t(n) = 1\}, \text{ e } \diamond := \{\eta_t(n) = 2\}.$$

Assim, a condição inicial dada por $\{\eta_0(-2) = 2 \cap \eta_0(-1) = 2 \cap \eta_0(0) = 1\}$ é representada por $\{\diamond \diamond \bullet\}$. Para calcular a esperança de Z^+ com a condição inicial, vamos empregar a variável aleatória $Y^v = i$, em que $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, para denotar a posição relativa do vizinho de contato em relação ao vértice escolhido v . Cada vértice possui quatro vizinhos, então, por

exemplo, se $Y^0 = -2$, isso significa que o vértice zero tentará transmitir as informações ao seu segundo vizinho à esquerda. Da mesma forma, os outros valores de i indicarão a tentativa de transmissão de informações para os demais vizinhos, de acordo com as seguintes probabilidades

$$Y^v = \begin{cases} -2 & \text{com probabilidade } 1/4 \\ -1 & \text{com probabilidade } 1/4 \\ 1 & \text{com probabilidade } 1/4 \\ 2 & \text{com probabilidade } 1/4. \end{cases}$$

Então, $\mathbb{E}[Z^+ | \eta_0(-2) = 2, \eta_0(-1) = 2, \eta_0(0) = 1]$ será determinada por:

$$\sum_{i \in \{-2, -1, 1, 2\}} \mathbb{E}[Z^+ | \eta_0(-2) = 2, \eta_0(-1) = 2, \eta_0(0) = 1, Y^v = i] P(Y^v = i)$$

que é igual a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 2, Y^0 = -2] P(Y^0 = -2) + \\ & \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 2, Y^0 = -1] P(Y^0 = -1) + \\ & \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 1, \eta_1(1) = 1, Y^0 = 1] P(Y^0 = 1) + \\ & \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 1, \eta_1(1) = 0, \eta_1(2) = 1, Y^0 = 2] P(Y^0 = 2). \end{aligned}$$

Simplificando temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 2] + \\ & \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 1, \eta_1(1) = 1] + \\ & \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \eta_1(-2) = 2, \eta_1(-1) = 2, \eta_1(0) = 1, \eta_1(1) = 0, \eta_1(2) = 1]. \end{aligned}$$

Isso pode ser reescrito como

$$\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\diamond}] + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\diamond} \overset{2}{\bullet}]. \quad (3.1)$$

Observe que, $\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\diamond}] = 0$, aplicando a regra da maioria em $\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\diamond} \overset{2}{\bullet}]$ temos

$$\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\diamond} \overset{2}{\bullet}] = \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] = 1 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}], \quad (3.2)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\diamond} \overset{1}{\bullet}] + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] \right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\diamond}] + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\diamond} \overset{2}{\diamond} \overset{3}{\bullet}] \right). \end{aligned}$$

Agora

$$\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] = 1 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}], \quad (3.3)$$

$$\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] = 1 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}], \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] &= \frac{3}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] \\ &= \frac{3}{4}(1) + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(2 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] \right) \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}], \end{aligned} \quad (3.5)$$

e em $\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{3}{\bullet}]$ aplicando a regra da maioria temos

$$\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{3}{\bullet}] = \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{3}{\bullet}] = 2 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}]. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) em $\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}]$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] &= \frac{3}{8} \left(1 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] \right) + \\ &\quad \frac{5}{16} + \frac{1}{16} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] + \frac{1}{8} (2 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}]) \\ &= \frac{21}{16} + \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] + \frac{3}{8} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Portanto de 3.2 e 3.7 em 3.1 obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] &= \frac{1}{4} \left(\frac{21}{16} + \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] + \frac{3}{8} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}] \right) \\ &= \frac{37}{64} + \frac{1}{8} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet}] + \frac{11}{32} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Um raciocínio semelhante pode ser realizado em \mathbb{Z}^- no qual vamos definir a variável Z^- como $Z^- := \min\{n \in \mathbb{Z} : \eta_t(n) \neq 0 \text{ para algum } t\}$ e então

$$\mathbb{E}[Z^- | \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] = \frac{37}{64} + \frac{1}{8} \mathbb{E}[Z^+ | \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] + \frac{11}{32} \mathbb{E}[Z^+ | \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond].$$

Teorema 3.1.1. *Considere o modelo Maki-Thompson modificado com a regra da maioria definido em \mathbb{Z} com configuração inicial $\{\eta_0(-2) = 1, \eta_0(-1) = 1, \eta_0(0) = 1, \eta_0(1) = 1, \eta_0(2) = 1\}$. Então*

$$\mathbb{E}^{\{-2, -1, 0, 1, 2\}}[Z(\tau^{(\infty)})] = \frac{32}{3} \approx 10,66,$$

em que $\mathbb{E}^A[Z(\tau^{(\infty)})]$ indica $\mathbb{E}[Z(\tau^{(\infty)})|A]$ e $A = \{n \in \mathbb{Z} : \eta_0(n) = 1\}$.

Demonstração. A prova será dividida em duas partes: inicialmente, uma identidade será obtida por recursão, em que o valor esperado será em termos de dois valores esperados. Em seguida, ao resolver um sistema de duas equações, o valor concreto será obtido.

Vamos começar com a primeira parte. Observe que $\mathbb{E} \left[Z(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right]$ é

$$1 + \mathbb{E}[Z^+(\tau^{(\infty)}) \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] + \mathbb{E}[Z^-(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -2 & -1 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \diamond \diamond].$$

e, por sua vez

$$\mathbb{E}[Z^+(\tau^{(\infty)}) \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] = 1 + \mathbb{E}[Z^+(\tau^{(\infty)}) \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}]$$

e

$$\mathbb{E}[Z^-(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -2 & -1 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \diamond \diamond] = 1 + \mathbb{E}[Z^-(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \diamond \diamond].$$

Então

$$\mathbb{E}[Z(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] = 3 + \mathbb{E}[Z^+(\tau^{(\infty)}) \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] + \mathbb{E}[Z^-(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \diamond \diamond]. \quad (3.5)$$

Note que

$$\mathbb{E}[Z^-(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \diamond \diamond] = \mathbb{E}[Z^+(\tau^{(\infty)}) \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] \text{ e } \mathbb{E}[Z^-(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix} \diamond \diamond] = \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] \quad (3.6)$$

Em seguida, aplicando (3.6) em (3.5), temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z(\tau^{(\infty)}) \mid \begin{smallmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right] &= 3 + 2 \left(\frac{21}{16} + \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] + \frac{3}{8} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] \right) + \\ &= 3 + \frac{21}{8} + \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] + \frac{3}{4} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] \\ &= \frac{45}{8} + \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] + \frac{3}{4} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}]. \end{aligned}$$

Agora, na segunda parte, para obter um resultado mais concreto para a esperança, vamos obter os valores de $\mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}]$ e $\mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}]$. Para isso, lembremos que:

$$\mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] = \frac{37}{64} + \frac{1}{8} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] + \frac{11}{32} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}]$$

e

$$\mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] = \frac{21}{16} + \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] + \frac{3}{8} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}].$$

Disso, podemos obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{7}{8} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] - \frac{11}{32} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] = \frac{37}{64} \\ -\frac{1}{2} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 \\ \bullet \end{smallmatrix}] + \frac{5}{8} \mathbb{E}[Z^+ \mid \diamond \diamond \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}] = \frac{21}{16} \end{cases}$$

Ao resolver este sistema de equações através de operações por linha, obtemos:

$$\mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \bullet^0] = \frac{13}{6} \text{ e } \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \bullet^0 \bullet^1] = \frac{23}{6}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z(\tau^{(\infty)}) | \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} \right] &= \frac{45}{8} + \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \bullet^0] + \frac{3}{4} \mathbb{E}[Z^+ | \diamond \diamond \bullet^0 \bullet^1] \\ &= \frac{45}{8} + \frac{13}{6} + \frac{3}{4} \left(\frac{23}{6} \right) \\ &= \frac{32}{3} \approx 10,66. \end{aligned}$$

□

3.2 O MODELO NO ANEL 4-REGULAR

Teorema 3.2.1. *Considere o modelo Maki-Thompson modificado com a regra da maioria no anel 4-regular com n vértices. Então*

$$Z_n(\tau^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z(\tau^{(\infty)}).$$

em que $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.}$ denota convergência quase certa quando n tende ao infinito.

Demonstração. Para esta demonstração, realizaremos acoplamento do anel 4-regular que começa com cinco vértices consecutivos no estado informante, usando o teorema de convergência quase certa para os \mathbb{Z} . Para isso, considere $[Z_n(\tau^{(n)})]$ como a sequência de variáveis aleatórias que denota a quantidade de neutros no final do processo em cada anel 4-regular com n vértices. Novamente, assim como no anel 2-regular, vamos dividir o grafo em dois lados a partir do vértice informante inicial, neste caso, dado que são cinco os vértices informantes iniciais, podemos escolher o do meio de todos e denotá-lo com 0 assim $\{\eta_0(-2) = 1, \eta_0(-1) = 1, \eta_0(0) = 1, \eta_0(1) = 1, \eta_0(2) = 1\}$, desta forma, podemos contar com dois informantes à direita e também à esquerda.

Considere então

$$[Z_n^+(\tau^{(n)}) | \diamond \diamond \bullet^0 \bullet^1 \bullet^2] := \max \left\{ i \in \left\{ 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\} : \eta_t(i) = 2 \text{ para algum } t \geq 0 \right\}$$

e

$$[Z_n^-(\tau^{(n)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] := \min \left\{ i \in \left\{ -2, \dots, -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} : \eta_t(i) = 2 \text{ para algum } t \geq 0 \right\}$$

Podemos descrever o processo de transmissão de informações por meio de uma sequência de variáveis aleatórias $Y^v = i$ para $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, em que $P(Y^v = i) = 1/4$, que descrevem a interação entre um vértice específico e seus vizinhos. Dependendo da direção da dispersão da informação e aplicando a regra da maioria, o rumor pode se propagar até a metade do grafo de cada lado, isto é, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ para a direita e $-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ a esquerda.

Com o que foi mencionado anteriormente, podemos reescrever $[Z_n^+(\tau^{(n)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}]$ e $[Z_n^-(\tau^{(n)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond]$ em termos de $[Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}]$ e $[Z^-(\tau^{(\infty)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond]$ descritas no modelo \mathbb{Z} da seguinte forma:

$$[Z_n^+(\tau^{(n)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] = \begin{cases} [Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] & \text{se } [Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{se } [Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

e

$$[Z_n^-(\tau^{(n)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] = \begin{cases} [Z^-(\tau^{(\infty)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] & \text{se } [Z^-(\tau^{(\infty)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{se } [Z^-(\tau^{(\infty)}) | \overset{-2}{\bullet} \overset{-1}{\bullet} \overset{0}{\bullet} \diamond \diamond] > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Da mesma forma que antes, mostremos a convergência no lado direito do grafo, pois por simetria, podemos fazer o mesmo no lado esquerdo. Então, mostremos a convergência entre a sequência $[Z_n^+(\tau^{(n)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}]$ e $[Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}]$, que para fins de simplicidade, denotaremos como $[Z_n^+(\tau^{(n)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] = Z_n^+$ e $[Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] = Z^+$.

Para provar a convergência, precisamos mostrar que, vale:

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^+ = Z^+ \right) = 1.$$

Na seção 3.1, vimos que $\mathbb{E}[Z^+(\tau^{(\infty)}) | \diamond \diamond \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}] < \infty$, então $P(Z^+ < \infty) = 1$. Logo, para cada $\omega \in \{Z^+ < \infty\}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n < 2n_0$. Note que $\frac{n}{2} > n_0$, então $Z^+(\omega) < \frac{n}{2}$. E, por definição, $Z_n^+(\omega) = Z^+(\omega)$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^+(\omega) = Z^+(\omega)$$

Assim, podemos dizer que $Z_n^+ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z^+$.

De forma similar, podemos realizar a convergência entre Z_n^- e Z^- . Agora, pelo Teorema de Convergência Quase Certa da Soma de Variáveis Aleatórias, que afirma que se duas sequências de variáveis aleatórias convergem quase certamente para duas variáveis aleatórias, então a sequência da soma dessas variáveis aleatórias também converge quase certamente para a soma das variáveis aleatórias. Temos que

$$Z_n^+ + Z_n^- \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z^+ + Z^-$$

Mas, como

$$Z_n = 1 + Z_n^+ + Z_n^- \text{ e } Z = 1 + Z^+ + Z^-,$$

então,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} Z.$$

□

Corolário 3.2.2. *Considere o modelo Maki-Thompson no anel 4-regular com n vértices. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(Z_n(\tau^{(n)}) \right) = \frac{32}{3} \approx 10,66.$$

Demonstração. Aplicando o teorema 3.2.1 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(Z_n(\tau^{(n)}) \right) = \mathbb{E} \left(Z_n(\tau^{(\infty)}) \right) = \frac{32}{3} \approx 10,66.$$

□

4 DISCUSSÃO

4.1 RESULTADOS DO TRABALHO REALIZADO

Neste trabalho, estudamos o modelo de transmissão de informações proposto por Maki-Thompson em dois casos específicos de grafos de anel k -regulares. O objetivo principal foi determinar até onde o rumor poderia se propagar nesse tipo de grafos.

Para o desenvolvimento do trabalho, antes de entrar no estudo do processo nos grafos, inicialmente, estudamos o modelo em \mathbb{Z} , considerando as conexões entre indivíduos semelhantes às dos grafos. Definimos $\tau^{(\infty)}$ como o tempo de absorção do processo e $Z(\tau^{(\infty)})$ como a variável aleatória que conta a quantidade de pessoas em estado neutro no final do processo em \mathbb{Z} , ou seja, pessoas que em algum momento do processo se informaram. Determinamos que essa variável era igual ao informante inicial começando em 0 mais os informados à direita e à esquerda deste.

Para o primeiro caso, em que cada indivíduo tem apenas dois vizinhos, o processo começa com um informante, neste caso, o zero, e determinamos que as variáveis que contam a quantidade de informados à direita e à esquerda de zero seguem uma distribuição geométrica com parâmetro $(1 - p)$, onde p é a probabilidade de se afastar da origem. Esse parâmetro muda para $(1 - p)^k$ quando o informante tem k tentativas frustradas de transmissão de informações. Com isso, pudemos obter o valor esperado dos informados ao final do processo em \mathbb{Z} . Finalmente, para estudar o modelo no grafo anel 2-regular, usamos o método de acoplamento entre as variáveis no anel e as variáveis em \mathbb{Z} , demonstrando que as primeiras convergem quase certamente para as segundas, obtendo como resultado direto que o limite do valor esperado da quantidade de informados ao final do processo no anel 2-regular é igual ao encontrado em \mathbb{Z} .

Para o segundo caso, trabalhamos de maneira semelhante estudando primeiro o modelo em \mathbb{Z} . Agora, cada indivíduo tem quatro vizinhos e igual probabilidade de passar a informação para cada um deles. Neste caso, devido a muitos casos em que a transmissão da informação poderia ocorrer, utilizamos a regra da maioria e também uma estratégia recursiva na identificação de certas configurações dos estados dos vértices para obter de forma mais simples os resultados desejados. Aqui, também alteramos a condição inicial de um informante para 5 informantes iniciais, dispostos em ordem consecutiva, e determinamos que a quantidade de informados ao final do processo é aproximadamente 10,66. Da mesma forma que no caso anterior, por meio

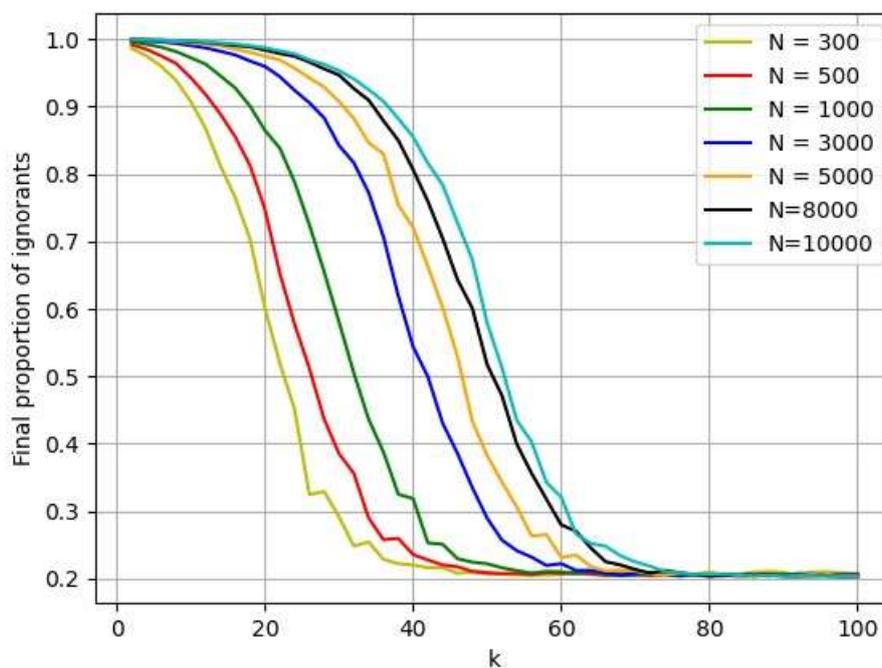
do acoplamento entre as variáveis no anel 4-regular e \mathbb{Z} , demonstramos convergência quase certa e também temos como resultado adicional que o limite do valor esperado dos informados no anel 4-regular é igual ao de \mathbb{Z} .

4.2 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

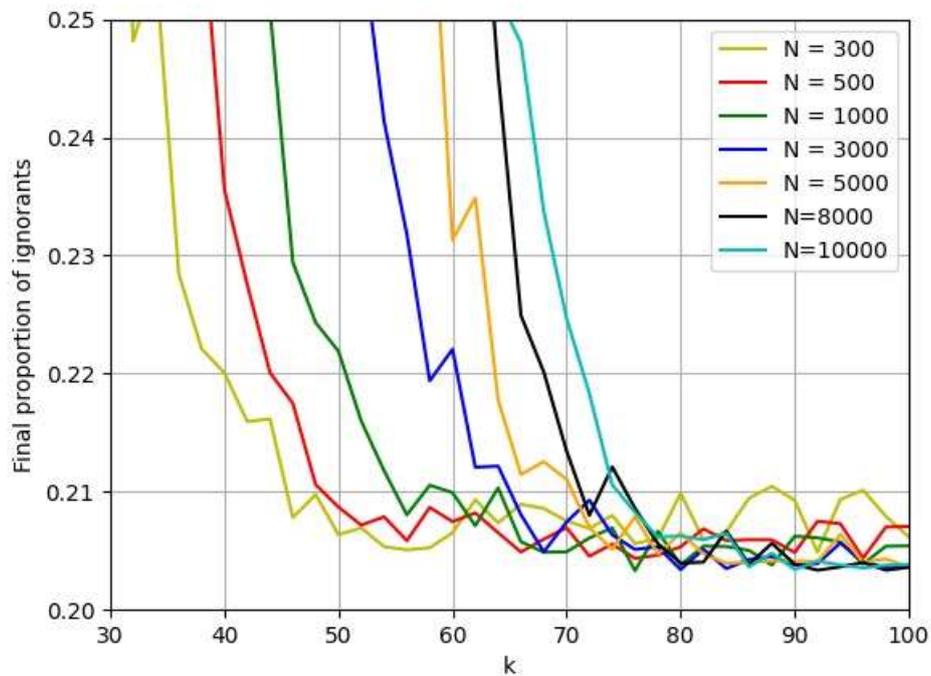
Durante o desenvolvimento do trabalho, foi possível evidenciar que a complexidade dos cálculos aumenta significativamente à medida que o grau do anel aumenta. No entanto, as simulações nos fornecem uma ideia sobre o comportamento que a transmissão de informações no anel assume à medida que o grau aumenta.

Para a realização dessas simulações, foi utilizado o linguagem de programação Python. Partiu-se de um grafo em forma de anel com N vértices (300, 500, 1000, 3000, 5000, 8000 e 10000). Em cada um desses casos, começamos com um grau 2, no qual n simulações foram realizadas para obter a proporção final de ignorantes em cada caso. A média desses valores é escolhida para as representações gráficas. O mesmo processo é repetido à medida que o grau k do grafo aumenta, resultando nos seguintes resultados.

Figura 5 – Zoom k vs proporção final ignorantes



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Figura 6 – Simulações k vs proporção final ignorantes

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Na figura 5 pode-se observar que à medida que k aumenta em um grafo com N vértices, existe um ponto crítico a partir do qual o comportamento do processo de propagação se assemelha ao de um grafo completo dos quais podem ser encontrados resultados na literatura que mostram que a proporção remanescente de ignorantes é muito próxima a 20%. A Figura 6 é uma aproximação dos resultados das simulações anteriores para observar de perto os resultados encontrados nelas. Confirma-se a proximidade com 20% quando o grau do grafo é grande, mas também é possível observar que os grafos com maior quantidade de vértices são mais estáveis em torno de 20%, enquanto aqueles com menos nós, embora tenham valores próximos a 20%, não são tão estáveis e oscilam um pouco. Essas observações não permitem concluir que ainda são necessárias pesquisas sobre a influência de k na propagação da informação e sugere estudos futuros para compreender melhor essa potencial transição de fase.

REFERÊNCIAS

- AGLIARI, E.; PACHON, A.; RODRIGUEZ, P. M.; TAVANI, F. Phase transition for the maki–thompson rumour model on a small-world network. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 169, p. 846–875, 2017.
- BESSI, A.; COLETTI, M.; DAVIDESCU, G. A.; SCALA, A.; CALDARELLI, G.; QUATTROCIOCCHI, W. Science vs conspiracy: Collective narratives in the age of misinformation. *PLoS one*, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 10, n. 2, p. e0118093, 2015.
- CHEN, P.; REDNER, S. Majority rule dynamics in finite dimensions. *Physical review E*, APS, v. 71, n. 3, p. 036101, 2005.
- COLETTI, C. F.; RODRÍGUEZ, P. M.; SCHINAZI, R. B. A spatial stochastic model for rumor transmission. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 147, p. 375–381, 2012.
- CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the lambert w function. *Advances in Computational mathematics*, Springer, v. 5, p. 329–359, 1996.
- CROKIDAKIS, N.; OLIVEIRA, P. M. C. de. Inflexibility and independence: Phase transitions in the majority-rule model. *Physical Review E*, APS, v. 92, n. 6, p. 062122, 2015.
- DALEY, D.; GANI, J. *Cambridge studies in mathematical biology*. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, NY, 1999.
- DALEY, D. J.; KENDALL, D. G. Epidemics and rumours. *Nature*, Springer, v. 204, p. 1118–1118, 1964.
- DALEY, D. J.; KENDALL, D. G. Stochastic rumours. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Oxford University Press, v. 1, n. 1, p. 42–55, 1965.
- HELBING, D. *Social self-organization: Agent-based simulations and experiments to study emergent social behavior*. [S.l.]: Springer, 2012.
- JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M.; SPEROTO, A. The maki-thompson rumor model on infinite cayley trees. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 181, p. 1204–1217, 2020.
- JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M.; SPEROTO, A. Stochastic rumors on random trees. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2021, n. 12, p. 123403, 2021.
- KRÓL, D.; FAY, D.; GABRYŚ, B. *Propagation phenomena in real world networks*. [S.l.]: Springer, 2015.
- LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F. P.; RODRÍGUEZ, P. M. Limit theorems for a general stochastic rumour model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 71, n. 4, p. 1476–1486, 2011.
- LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F. P.; RODRÍGUEZ, P. M. On the behaviour of a rumour process with random stifling. *Environmental Modelling & Software*, Elsevier, v. 26, n. 4, p. 517–522, 2011.

-
- MAKI, D. P.; THOMPSON, M. *Mathematical models and applications: with emphasis on the social life, and management sciences*. [S.I.], 1973.
- MORENO, Y.; NEKOVEE, M.; PACHECO, A. F. Dynamics of rumor spreading in complex networks. *Physical review E*, APS, v. 69, n. 6, p. 066130, 2004.
- NEKOVEE, M.; MORENO, Y.; BIANCONI, G.; MARSILI, M. Theory of rumour spreading in complex social networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 374, n. 1, p. 457–470, 2007.
- RADA, A.; COLETTI, C.; LEBENSZTAYN, E.; RODRIGUEZ, P. M. The role of multiple repetitions on the size of a rumor. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, SIAM, v. 20, n. 3, p. 1209–1231, 2021.
- SOBRIE, O.; MOUSSEAU, V.; PIRLOT, M. Learning a majority rule model from large sets of assignment examples. In: SPRINGER. *Algorithmic Decision Theory: Third International Conference, ADT 2013, Bruxelles, Belgium, November 12-14, 2013, Proceedings 3*. [S.I.], 2013. p. 336–350.
- SUDBURY, A. The proportion of the population never hearing a rumour. *Journal of applied probability*, Cambridge University Press, v. 22, n. 2, p. 443–446, 1985.
- WATSON, R. On the size of a rumour. *Stochastic processes and their applications*, Elsevier, v. 27, p. 141–149, 1987.
- WENG, L.; MENCZER, F.; AHN, Y.-Y. Virality prediction and community structure in social networks. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–6, 2013.
- ZANETTE, D. H. Critical behavior of propagation on small-world networks. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 5, p. 050901, 2001.
- ZANETTE, D. H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks. *Physical review E*, APS, v. 65, n. 4, p. 041908, 2002.