



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Bruno da Cunha Lima e Nascimento

Contagem e OBMEP: um exercício de matemática crítica

RECIFE
2023

BRUNO DA CUNHA LIMA E NASCIMENTO

Contagem e OBMEP: um exercício de matemática crítica

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática - CCEN da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de habilitação:

Orientador: Prof. Dr. Ailton Temístocles Gonçalves de Castro

RECIFE
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Nascimento, Bruno.

Contagem e OBMEP: um exercício de matemática crítica / Bruno
Nascimento. - Recife, 2023.
35 : il., tab.

Orientador(a): Airton Temístocles

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática -
Licenciatura, 2023.

Inclui referências.

1. Modelagem Matemática. 2. Ensino de Análise Combinatória. 3.
Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas.. I.
Temístocles, Airton . (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

BRUNO DA CUNHA LIMA E NASCIMENTO

Contagem e OBMEP: um exercício em matemática crítica

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática – CCEN, da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 02 de outubro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Airton Temistocles Gonçalves de Castro

Cleide Soares Martins

Paulo Roberto Câmara de Sousa

Cleide Soares Martins

Nome do professor da disciplina

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não seria possível sem minha família, meus amigos, os companheiros da UFPE e todos os professores que tive até aqui. Agradeço especialmente a minha avó, Francisca Gonçalves Aragão da Cunha Lima, professora que me passou a paixão por estudar e aprender. Vovó, hoje você vê do Céu o seu neto licenciado em matemática.

RESUMO

A Modelagem na Educação Matemática na perspectiva da Matemática Crítica, é uma abordagem pedagógica inspirada nas ideias de Ole Skovsmose (1994), e tem como pioneiros no Brasil Jonei Cerqueira Barbosa (2004) e Jussara de Loiola Araújo (2012). O presente trabalho se ancorou nestas ideias para apresentar uma proposta de intervenção no conteúdo de Análise Combinatória, previsto de maneira incipiente no ensino fundamental mas recorrente na prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP). Por meio de exemplos, pretendemos inspirar colegas professores a incentivarem seus alunos a enfrentarem os desafios da olimpíada sem necessariamente preparar aulas teóricas sobre análise combinatória, introduzindo os conceitos, nomenclaturas e fórmulas associadas.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática; Ensino de Análise Combinatória; Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas e Privadas.

ABSTRACT

Mathematical Modeling in the perspective of Critical Mathematics Education, is a pedagogical approach inspired by the ideas of Ole Skovsmose (1994), and was pioneered in Brazil by Jonei Cerqueira Barbosa (2004) and Jussara de Loiola Araújo (2012). The present work based itself in those ideas to present a possible intervention in the teaching of Combinatorics, still incipient in the first part of Brazil's basic education, although recurring in the Brazilian Mathematical Olympiad of Public and Private Schools (OBMEP, in portuguese). Through exemples, we intend to inspire fellow teachers to encourage students to take the Olympics without necessarily preparing theoretical classes on combinatorics, introducing concepts, names, and associated formulas.

KEYWORDS: Mathematical Modeling; Teaching of Combinatorics; Brazilian Mathematical Olympiad of Public and Private Schools.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 OBMEP 2018 - Nível 2 - Segunda Fase - Enunciados Questão 6.....	19
Figura 2 - OBMEP 2018 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 2.....	22
Figura 3: Resolução Oficial OBMEP 2018 - Questão 2, item b).....	23
Figura 4 - OBMEP 2011 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 5.....	24
Figura 5 - OBMEP 2017 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 5.....	26
Figura 6 - OBMEP 2016 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 5.....	28
Figura 7 - OBMEP 2021 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 2.....	29

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Distribuição das Questões de Análise Combinatória nas provas da OBMEP entre 2011 e 2021.....	19
---	----

SUMÁRIO

1.Introdução.....	11
2. Visitando a combinatória olímpica com olhares críticos.....	13
2.1. Considerações iniciais.....	13
2.1.1 Por que evitar fórmulas? Matemática Crítica.....	15
2.1.2 Análise combinatória no Nível 2 da OBMEP.....	18
2.2. Resolvendo questões em sala de aula.....	23
3. Conclusões.....	32
Referências.....	34

1 INTRODUÇÃO

A competição sempre foi uma das forças que movem a matemática. Uma das mais clássicas histórias é sobre o método de solução de equações cúbicas, devido a Tartaglia (e de certa forma, Cardano) (TORRENTE, REIS, 2022). Aquela que é considerada a primeira olimpíada moderna de matemática foi organizada em 1934, na união soviética. Depois de 25 anos foi fundada a *International Mathematics Olympiad* (IMO), que teve sua primeira edição na Romênia.

O Brasil começou um pouco depois com suas olimpíadas de matemática. Em 2022, comemoramos 45 anos que a primeira Olimpíada de Matemática foi elaborada no país, a Olimpíada Paulista de Matemática. A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) só foi surgir dois anos depois, por iniciativa da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP, vai surgir bem depois, em 2005.

A OBMEP surgiu de uma parceria entre o Ministério da Ciência e Tecnologia, o Ministério da Educação, a SBM e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). E tem como objetivos incentivar a população a participar de atividades acadêmicas e científicas, qualificar os professores das escolas públicas, aproximar as escolas da universidade e encontrar jovens talentos.

A prova da OBMEP, desde 2005, é dividida em três níveis, cada um dividido em duas fases. No nível 1 participam os alunos que estudam no 6º e 7º anos do ensino fundamental, no nível 2 os alunos dos 8º e 9º anos e no nível 3, todo o ensino médio. A primeira fase é uma prova de múltipla escolha e a segunda fase é uma prova aberta, onde a justificativa utilizada deverá ser apresentada. Porém, em 2021 se realizou a OBMEP nível A, para os alunos do 4º e 5º anos do ensino fundamental. O sucesso desta etapa fez surgir, em 2022, a OBMEP Mirim, voltada para os alunos do fundamental 1.

Cabe salientar também que, entre 2005 e 2016, as provas eram voltadas especificamente para alunos da rede pública. A partir de 2017, a OBMEP passou também a ser aplicada nas escolas da rede privada de ensino.

Outra observação pertinente é que desde sua criação, apenas em 2020, a prova da olimpíada não foi aplicada, em virtude da pandemia de COVID-19, que levou a vida de 700.000 brasileiros segundo dados da Organização Mundial da Saúde (2023).

Na prova da OBMEP, os conteúdos não são trabalhados de forma compartimentada. Muitas vezes vários assuntos estão envolvidos em uma única

questão, ou uma questão pode ser resolvida com diferentes abordagens. De toda maneira, é possível identificar problemas típicos de geometria, proporcionalidade, probabilidade, etc. Claro que muitas vezes o aluno não consegue indicar claramente os assuntos envolvidos, o que aumenta o desafio e contribui para o caráter lúdico da olimpíada. O aluno se vê numa situação em que precisa mobilizar conhecimentos de forma inédita e sem nenhuma espécie de aviso prévio, de maneira bem diferente do SAEB, do ENEM ou das provas da escola. Muitas vezes o assunto foi abordado de maneira superficial para o nível do aluno, às vezes o aluno ainda não teve contato com o assunto em sala de aula e tudo isso contribui para despertar o interesse na matéria, desafiando o aluno a criar suas próprias estratégias de solução.

Um exemplo perfeito para esse caso, também a preocupação central deste trabalho, é a presença de problemas típicos de Análise Combinatória na segunda fase do nível 2, da OBMEP. A observação que a presente pesquisa realiza é que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a análise combinatória é um conteúdo incipiente no ensino fundamental, se limitando a explorar o princípio multiplicativo (habilidade EF08MA03). Esta habilidade é descrita como: “resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo” (Brasil, 2018, s/n). E, colocando de maneira crítica, para além do que preveem os documentos oficiais, “a realidade é que grande parte das escolas brasileiras só abordam esse conteúdo a partir da 2ª série do ensino médio” (FARIAS, BARBOSA, 2022, p. 15).

Observa-se neste contexto apresentado, uma oportunidade para o presente trabalho, que pretende contribuir com ideias de estratégias de solução de problemas para que o professor possa incentivar soluções criativas dos problemas em sala de aula, fugindo de uma concepção conteudista e compartimentada da matemática. Inspirado pelos preceitos da matemática crítica de Skovsmose (SKOVSMOSE, 1994) e pelas ideias recentes de Modelagem em Educação Matemática Crítica e Resolução de Problemas, objetiva-se criar um exercício de descoberta acessível para os alunos do ensino fundamental.

Bastos e Rosa (2020, p. 35) notam que “uma das maiores dificuldades dos alunos com relação à Análise Combinatória está relacionada com a identificação das fórmulas que devem ser utilizadas” (BASTOS, ROSA, 2020, p. 35), isso acontece especialmente porque existe uma tendência de explorar-se a fórmula logo nos primeiros encontros. Às vezes, o professor passa uma sensação de que aquelas equações “são” a matemática, e isso prejudica as alunas e alunos. Como observam is

autores que “a abordagem metodológica do professor é de extrema relevância para a ascensão escolar do discente” (FARIAS, BARBOSA, 2022, p. 32), com isso, busca-se elaborar um trabalho que tenta evitar as expressões matemáticas, tornando as ideias combinatórias intuitivas.

De maneira específica, nosso objetivo é tipificar as questões de contagem e análise combinatória e oferecer soluções que sejam compreensíveis aos alunos, com o intuito de ajudar também o professor a abordar determinados conteúdos de maneira natural e sem adiantar tópicos das turmas subsequentes. É uma contribuição modesta, que se acredita ser interessante, especialmente para professores com pouca experiência.

2 VISITANDO A COMBINATÓRIA OLÍMPICA COM OLHARES CRÍTICOS

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para esboçar algumas possibilidades de solução, bem como tentar classificar os problemas de contagem e análise combinatória no nível 2, precisamos fazer algumas considerações.

A primeira é o conceito compreendido na presente pesquisa por contagem e análise combinatória. Todo problema que envolva saber *a quantidade de algo* [como posições, números, etapas, etc.] e possa ser resolvido com auxílio dos princípios multiplicativo e aditivo será considerado aqui. É importante também ressaltar que considera-se apenas aquelas que são resolvidas através destas operações ou listagens. As questões que podem ser resolvidas contando em uma figura da prova não serão consideradas, como por exemplo, a questão 5 da prova de 2015, que propõe contar regiões coloridas e entrega um suporte em branco. Embora seja uma questão clara, para nós, de permutação, é uma situação simples de resolver sem nenhuma menção à ferramentas matemáticas de contagem.

A segunda é que classificar como positivo ou negativo o aparecimento desse tipo de problema na OBMEP, nível 2, foge ao escopo do trabalho. Aqui, pretende-se lidar com a realidade que se coloca, mas para isso precisamos levar em conta que a maioria dos alunos do ensino fundamental não tem familiaridade com esse campo matemático, o que é natural pois toma parte bastante pequena da BNCC e de parte dos livros didáticos. Inclusive, a forma como análise combinatória figura nos livros didáticos foi objeto de uma excelente revisão crítica de José Cícero Gomes Farias e

Isnaldo Issac Barbosa (FARIAS, BARBOSA, 2022) e, também, de uma magistral revisão comparada por parte de Ricardo Sabo, (SABO, 2007).

Os estudos de Sabo verificam que os livros didáticos limitam-se a abordar de maneira tímida o princípio multiplicativo no contexto de probabilidades, especialmente ligado ao conectivo lógico de conjunção (“e”). O uso de esquemas e experimentos são recorrentes, inclusive porque bastante didáticos. Porém, de maneira geral, a exposição é mecanizada e repetitiva, como coloca Sabo,

As técnicas apresentadas nos exercícios exigem apenas a aplicabilidade de fórmulas algébricas expostas, em grande parte das vezes, nos exemplos prontos e exibidos no texto do livro didático. Esses exemplos assumem, então, o papel de “receitas prontas”, pois, apresentam esquemas e estratégias de resoluções a serem seguidas (SABO, 2007).

É importante destacar, mais uma vez, que a BNCC menciona “contagem” ou “princípio multiplicativo” apenas duas vezes no ensino fundamental, dentro da unidade temática de Números e, também, em Probabilidade e Estatística.

Dentro da unidade temática de Números temos a já citada EF08MA03. Já na parte de probabilidade, temos o objeto de conhecimento: “princípio multiplicativo da contagem e soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral”. Esse objeto possui uma única habilidade, a EF08MA22, que se trata de “calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1” (Brasil, 2018, s/n).

Esta habilidade em probabilidade trata de medir o tamanho de um conjunto e de relacionar probabilidades de cada evento nesse conjunto. A própria BNCC sugere complementar esse momento com consultas a sites, pesquisas empíricas e experimentos em sala de aula. Embora seja um uso fundamental do princípio multiplicativo, ainda é insuficiente (do ponto de vista estritamente teórico) para as situações que pretendemos observar aqui.

O que a presente pesquisa pretende apresentar é que, independente da BNCC e dos conteúdos em sala de aula, os problemas de contagem e análise combinatória na OBMEP podem se valer apenas do básico do princípio multiplicativo (e em alguns casos prescindir dele completamente), quando a formação se preocupa com desenvolver autonomia e criatividade na solução de problemas.

De certa forma, estamos em concordância com Nílson José Machado e sua compreensão de metáfora. Para o autor, que aproxima matemática da língua materna,

uma forma de aprender (e apreender) a matemática que também por meio de analogias. “Analogias, modelos e soluções de problemas exemplares também desempenham algumas vezes funções muito similares a da metáfora” (PETRIE, *apud*. MACHADO, 2012, p. 33). Objetiva-se contar histórias de como resolver problemas, para que, na hora em que confrontado com um problema, o aluno possa escrever a sua própria história.

2.1.1 Por que evitar as fórmulas? Matemática Crítica

Dentro da educação matemática, a maneira com a qual os assuntos devem ser ensinados sempre foi alvo de polêmica. Inclusive, é na década de 20 que no Brasil vai surgir uma disciplina escolar chamada Matemática, que é a união das disciplinas já existentes de Álgebra, Aritmética e Geometria. Nesse momento, já existe uma previsão do que viria a se tornar o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que ganha corpo nos anos 40 e se torna extremamente influente entre 1950 e 1970. O movimento, de escopo internacional, toma inspiração em grandes matemáticos como Félix Kline e o Grupo Bourbaki. O MMM foi peça chave da estruturação da educação matemática na República Brasileira. O preceito essencial da matemática moderna é “valorizar a formalidade e o rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra” (BONFADA, 2018, p. 22).

A herança que a matemática moderna nos deixou foi a preocupação exacerbada com a abstração, generalização e demonstração. Embora a matemática não possa passar sem estes fatores, o resultado didático da matemática moderna nas crianças e adolescentes brasileiros foi controverso. Na década de 1970, críticas ao MMM surgem em todo o mundo. Vários educadores advogam em favor de uma abordagem com “ênfase na compreensão dos conceitos, levando-se em conta o desenvolvimento dos alunos [...] e a eliminação do destaque conferido aos conjuntos, a linguagem simbólica e ao rigor e a precisão na linguagem matemática” (MAGALHÃES GOMES, 2012, p. 19).

É esse tipo de trabalho que pretende-se elaborar na presente pesquisa. Trabalhar a matemática como uma ferramenta intuitiva, que pode ser descoberta e construída de maneira social. A forma como trabalha-se cada questão, longe de ser um “gabarito comentado”, deve ser entendida como uma analogia, uma fábula, para nos

inspirar a resolver problemas sem consultar o livro didático, sem buscar teoremas, lemas, fórmulas, transformações, etc.

Jussara Loiola Araújo atribui a Ole Skovsmose o pioneirismo no termo Matemática Crítica, almejando uma disciplina que abrangesse a matemática bem como a sociedade. Essa disciplina ele batizou de *matemacia* (SKOVSMOSE *apud*. ARAÚJO, 2012). A *matemacia* foge do escopo da presente pesquisa, mas podemos aqui exercitar um pouco de matemática crítica, ancorada ao estudo de análise combinatória.

Observa-se que é frequente, nos livros didáticos e na realidade das escolas, as fórmulas de análise combinatória serem apresentadas, “demonstradas” utilizando exemplos fracos para finalmente aparecerem problemas que motivariam o aprendizado deste conteúdo (BASTOS, ROSA, 2020).

Bastos e Rosa notam que “uma das maiores dificuldades dos alunos com relação à Análise Combinatória está relacionada com a identificação das fórmulas que devem ser utilizadas” (BASTOS, ROSA, 2020, p. 32). Por isso mesmo precisamos pensar o porque de ensinarmos as fórmulas de combinação, arranjo, permutação circular, entre outros. Se a dificuldade reside em entender qual fórmula usar, essa fórmula não está cumprindo seu papel de facilitar a resolução do problema. Os autores ainda observam que um dos motivos é que, frequentemente, as fórmulas aparecem antes do entendimento pleno de problemas combinatórios. O resultado é uma aplicação mecânica e sem sentido, cega. “O ensino de combinatória torna-se válido quando utilizamos o raciocínio e entendimento das fórmulas e métodos” (FARIAS, BARBOSA, 2022, p. 44). Compreende-se que a fórmula, o teorema ou qualquer construção matemática deve ser questionada, refletida. “Esse questionamento é desejável em uma abordagem de modelagem segundo a educação matemática crítica” (ARAÚJO, 2012, p. 33).

O papel da modelagem na educação matemática, segundo Barbosa, possui cinco boas razões: “motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática” (BARBOSA, 2004, p. 44). Todos aqui são de grande valia para nós. Numa dimensão imediata, os 3 primeiros objetivos parecem bastante óbvios. Os dois últimos precisam de uma discussão mais aprofundada.

A modelagem permite com que um estudante manipule suas ideias, reflita sobre os mecanismos que ou lhe parecem obscuros ou que parecem tão evidentes que não

possuem explicação. O sentimento de certa absoluta, muitas vezes reservada aos “gênios” permeia a aprendizagem da matemática e é esse sentimento que estamos tentando dissipar. Ainda segundo Barbosa, o design das atividades de modelagem, isto é, a forma como a modelagem aparece contextualizada em sala de aula, é o grande responsável pelo seu sucesso. Em outras palavras, ao fazer bom uso da modelagem matemática, o professor consegue induzir seus alunos a refletir sobre o que significam aqueles objetos “abstratos”, o que justifica o uso de determinadas operações, a quem serve nossa maneira de pensar e onde podemos chegar refletindo sobre nossas próprias ideias, tudo isso usando como base um problema dado (ou encontrado).

É oportuno, portanto, conceituar problema, atividade escolar e modelagem matemática. Para professores de matemática, problema tem um significado muito específico. Como colocam Allevato e Onuchic:

Para que uma atividade se constitua, de fato, como um problema, o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução. Desse modo, um problema se configura na relação com o resolvidor, de tal modo que se ele já conhece ou tem memorizado tais métodos de resolução, ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014).

A atividade escolar é um momento em que o estudante é convidado a atuar, criando ou apresentando algo revelante ao contexto pedagógico. Já uma atividade de modelagem está vinculada a problematizar e investigar situações, dados ou problemas do mundo real, a fim de transformar nossa compreensão dos diversos mecanismos relacionados. Barbosa ressalta que estas ações não estão separadas, são momentos que se intercalam durante toda atividade (BARBOSA, 2004). Desta maneira, “a Modelagem Matemática pode ser considerada como um ambiente de aprendizagem que utiliza exemplos da vida cotidiana para facilitar o trabalho pedagógico em sala de aula” (BASTOS, ROSA, 2020, p. 34). Outra forma de entender a modelagem matemática, que dialoga diretamente com a preocupação deste trabalho é “deixa-se de privilegiar o uso de modelos prontos e passa-se a enfatizar o processo de tradução de fenômenos ou de construção de modelo” (TORTOLA, 2012, p. 25).

Utilizando como plano de fundo a análise combinatória, a presente pesquisa pretende criar uma atividade bastante simples: resolver alguns problemas da Olimpíada de Matemática das escolas públicas e privadas. Porém, o assunto abordado nas questões não foi visto (ou não foi visto profundamente) em sala de aula. De toda forma, os alunos podem se aproveitar das estruturas das questões para, de um grau de complexidade menor ao maior, resolver de maneira satisfatória os problemas.

Para nós, as questões da OBMEP serão esse desafio. Os problemas da olimpíada possuem uma estrutura característica, que vai aumentando o grau de abstração matemática com o decorrer do problema. Aproveita-se esta estrutura pois observa-se que “uma situação problema pode proporcionar a construção de conceitos do saber matemático envolvido como pode evidenciar estratégias para uma nova situação” (SILVA, ANDRADE, 2011, p. 11).

Compreende-se que, na presente pesquisa, observa-se as várias ideias de resolução de problemas. E, assim, entende que “a resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente” (ROMANATTO, 2012, p. 26). Também, identifica o papel de professor de matemática como instigador de criação e descoberta. “O professor deve propor questões que levem o aluno a um pensamento reflexivo sobre o que está sendo investigado” (FERNANDES, 2018, p. 14). O educador precisa de certa maneira ajudar os estudantes a impregnar a realidade de matemática. Dessa forma, aquelas expressões matemáticas típicas irão parecer muito mais uma forma abreviada de acessar uma ideia que as alunas e alunos tiveram sozinhos ou em diálogo com o professor. Dessa forma, a fórmula vai cumprir o seu papel de nos auxiliar, quando ela surgir depois da ideia e, conseqüentemente, depois do problema. A fórmula não deve ditar nossa solução e, sim, ser uma facilitadora.

2.1.2 Análise combinatória na segunda fase do nível 2 da OBMEP

Observando de maneira atenta as edições de 2011 até 2021 (no ano de 2020 a olimpíada não aconteceu, devido à pandemia de COVID-19) percebe-se que problemas envolvendo contagem apareceram 11 vezes, uma média de mais de uma questão por ano. Só não identificamos questões nos nossos padrões nos anos de 2013, 2015 e 2019, mas em compensação em 2018 e 2021 contamos com surpreendentes 3 aparições, o que significa que os conhecimentos de contagem figuraram em pelo menos metade da prova. A relação entre o ano e a questão encontra-se na tabela 1.

Veremos que a forma com que os problemas aparecem são mais ou menos as mesmas, que classificamos em “com suporte” e “sem suporte”. O primeiro tipo são as questões que oferecem subsídios para o aluno generalizar aos poucos o problema, utilizando operações matemáticas desde o começo. O segundo são questões mais secas de análise combinatória pura em que o aluno pode resolver primeiros itens

fazendo manualmente todos os casos mas fica impossibilitado de resolver os últimos desta forma.

Tabela 1 - Distribuição das Questões de Análise Combinatória nas provas da OBMEP entre 2011 e 2021

Ano	Questão	Tipo
2011	5	Com Suporte
2012	5	Com Suporte
2014	2	Com Suporte
2016	5	Sem Suporte
2017	4	Com Suporte
2018	1, 2 e 6	Sem suporte (1 e 2) com suporte (6)
2021	2, 4 e 6	Sem suporte (2), com suporte (4 e 6)

Fonte: Autoria própria

Para exemplificar, a questão 6 da prova de 2018 (Figura 1) nos oferece um bom exemplo de questão, para ilustrar nossos objetivos. Além da figura, a questão vai se generalizando ao longo do problema. É com uso dessa figura que a matemática pode “colonizar uma parte da realidade e reordená-la” (SKOVSMOSE, 1994, p. 23). É também com a abstração item a item, proporcionada pela questão, que o professor pode imiscuir de matemática o pensamento dos estudantes.

Figura 1 - OBMEP 2018 - Nível 2 - Segunda Fase - Enunciados Questão 6

6. Um enfeite é formado por um dado encaixado em uma cavidade quadrada sobre uma base, como mostra a figura. As faces do dado estão numeradas de 1 a 6.

a) De quantas maneiras o dado pode ser encaixado na base com a face 1 para cima?



Correção Regional
Correção Nacional

b) De quantas maneiras o dado pode ser encaixado na base?

Correção Regional
Correção Nacional

Fonte:

O primeiro item permite que o aluno faça uma solução contando todos os casos manualmente. Levando em consideração que este seja um dado convencional, podemos ter o número 3 para frente, o número 5, o número 4, o número 2. O item b), embora possa ser contado manualmente também, envolve muito mais casos. Nesse momento, o aluno pode perceber que, escolhida a face voltada para cima, temos 4 maneiras de escolher a posição do dado. Como o dado tem 6 faces para ficar em cima, a resposta deve ser $6 \times 4 = 24$.

As questões com suporte, de maneira geral, favorecem um trabalho interdisciplinar e, também, são ótimas para introduzir o assunto. Em uma questão como essa, o professor pode montar o dado em sala de aula, com cartolina ou outro material, e inclusive incorporar esta questão em uma aula centrada neste objeto, abordando tópicos de geometria, probabilidade ou até mesmo desenho. Embora não pertença ao escopo do presente trabalho, vale a pena a leitura de *Jogos com Sucata na Educação Matemática* (GITIRANA, *et al.* 2013).

Em outras situações, o aluno encontra um suporte menos explícito e precisa pensar um pouco mais sobre o que está contando, como nesse exemplo também da prova de 2018 (Figura 2).

Figura 2 - OBMEP 2018 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 2

2. Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são interessantes, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 = 0$.

a) Qual deve ser o valor do algarismo A para que o número 14A8 seja interessante?

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

b) Quantos números interessantes de quatro algarismos terminam com o algarismo 6?

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

c) Quantos números interessantes de cinco algarismos terminam com o algarismo 0?

Fonte: OBMEP, 2018, p. 3

Nessa questão, o item (b) é um simples problema de permutação, pode-se definir dois conjuntos $A = \{1,1,6\}$ e $B = \{1,2,3\}$ e encontra-se a resposta permutando os elementos desses conjuntos. Mas, claramente essa abordagem não é familiar aos alunos do ensino fundamental. Aqui, o aluno certamente conseguirá encontrar os conjuntos A e B, e pode listar todas as permutações no espaço em branco, o que é fácil pois são apenas 9.

Porém, ao chegar no item (c), a possibilidade de listar se torna mais penosa: se tratam de 2.439 números! Por mais determinado e atencioso que seja o estudante, o número de itens que ele teria que analisar individualmente é muito grande. A variedade de erros que podem aparecer (isso considerando que ele encare a tarefa) torna a solução por listagem extremamente ineficiente e desmotivadora. A solução aqui parece não ser outra além de usar alguns recursos matemáticos para contar.

Vamos apresentar uma solução mais longa e outra mais curta, ambas mobilizando a mesma estrutura geral, mas com diferentes abordagens.

Talvez, o aluno possa fazer alguns esquemas, atribuir valores e, sozinho,

perceber o que significa permutação (mesmo sem conhecer essa palavra!). Ele poderia escrever o número em forma de esquema:

----0

Observando essa figura, ele percebe que os múltiplos de 10.000 menores que 100.000 podem ser escritos nos espaços em branco. Com isso, já se contam 9 números. Esses 9 números também correspondem aos números com 4 zeros, isto é, os números na forma:

X0000

Agora podemos pensar em quantos números com 3 zeros são possíveis. Mais uma vez escrever um esquema (ou vários) facilita muito, são 3 esquemas possíveis

XY000 X0Y00 X00Y0

Para cada X, posso escolher 9 valores diferentes para Y. Como posso escolher 9 valores para X, tenho ao todo $9 \times 9 = 81$ números em cada esquema, totalizando 243 números com 3 zeros apenas.

O último caso, com 2 zeros. Os esquemas são três também:

XYZ00 XY0Z0 X0YZ0

Analogamente ao anterior, para cada escolha de X temos 9 escolhas para Y e para cada escolha de Y, 9 escolhas para Z. Totalizam $9 \times 9 \times 9 = 729$ casos para cada esquema. Como são 3 esquemas, temos 2.187 números!

Finalmente, junta-se todos os casos, pois não corremos o risco de termos contado duas vezes o mesmo número. São, portanto, $9 + 243 + 2.187 = 2439$ números.

Outra opção seria pensar que, todos os números de 5 algarismos terminados em 0 são justamente 9.000. Mais uma vez utilizando um esquema:

----0

Temos 9 possibilidades para o primeiro número (que precisa ser diferente de zero) e 10 para os outros, 9.000 números. Mas, como precisamos ter ao menos um número zero para o produtor ser zero, basta excluir destes 9.000 os números sem 0. Temos o mesmo esquema anterior, com 9 possibilidades para os 4 primeiros dígitos, totalizando 6561 números. $9.000 - 6561 = 2.439$.

No gabarito oficial da OBMEP a resolução, que também é bem sintética, seria excelente para um aluno do ensino médio. Porém, nomenclaturas como “permutação” não são típicas do ensino fundamental. Observa-se por exemplo, a solução para o item b):

- O número 6 é obtido pelo produto de 1, 2, e 3. Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ números interessantes distintos (permutações de três elementos). É fácil encontrá-los: 1236, 1326, 2136, 2316, 3126 e 3216.
- O número 6 obtido pelo produto de 1, 1 e 6. Temos 3 números interessantes (basta escolher a posição do 6); são eles: 1166, 1616 e 6116.

Fonte: OBMEP, 2018, p.1

Naturalmente, entende-se que muitas vezes estes gabaritos são elaborados para dar suporte a uma explicação do professor. É, por isso, que este trabalho se dirige aos docentes. Se trata de oferecer aos estudantes uma explicação que mesmo que seja mais longa, seja mais próxima do entendimento do aluno.

Estes exemplos ilustram que, mesmo longa, a solução se apresenta possível e relativamente simples para os alunos de 8º e 9º anos. Pretendo com esse esboço mostrar que o professor de matemática pode resolver problemas sem atribuir a um conteúdo e sem utilizar ferramentas clássicas. Isso não significa que o problema não irá crescer em grau de abstração, significa apenas que essa abstração será antecipada e construída mediante a necessidade. A capacidade de improvisar e criar uma nova e necessária ferramenta também estão em jogo nas olimpíadas de conhecimento.

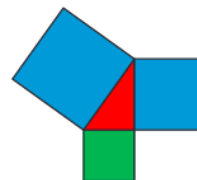
2.2 RESOLVENDO AS QUESTÕES EM SALA DE AULA

Agora, a presente pesquisa irá comentar mais 4 das 11 questões do levantamento, em ordem cronológica, indicando possíveis soluções que o professor poderia sugerir aos alunos, evitando sempre generalizar conceitos típicos de permutação, combinação e arranjo. O objetivo é apontar linhas gerais de como abordar essas questões em sala de aula.

Aqui, observa-se um estilo de “contação de história”. Machado estuda a relação entre contação de histórias e resolução de problemas e ressalta que “os professores costumam subestimar a força inspiradora do roteiro, da narrativa e logo querem nos contar a moral da história” (MACHADO, 2012, p. 16). É fácil perceber que a própria estrutura da questão da OBMEP permite (e até incentiva) esse tipo de abordagem.

Figura 4 - OBMEP 2011 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 5

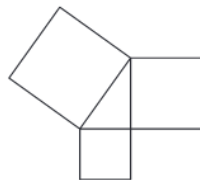
5. João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Em cada um dos itens abaixo, determine de quantas maneiras João pode pintar a figura correspondente.



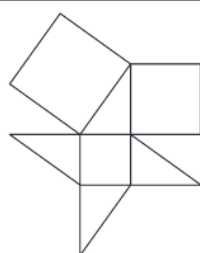
a)



b)



c)



Fonte: OBMEP, 2011, p.6

A questão 5 da prova de 2011 (figura 4) começa com um suporte, o aluno pode resolver o item (a) sem recorrer às expressões numéricas. Inclusive, ele pode copiar o desenho e pintar cada um deles. Outra maneira, seria de perceber que, se o triângulo for pintado de amarelo, o quadrado pode assumir 3 cores. Se o triângulo for pintado de azul ou vermelho, o quadrado só pode assumir 2 cores. Assim, existem $3 + 2 + 2 = 7$ formas. Aqui, o professor pode fazer um parêntese, pensando já no item (c), chamando a atenção para que, ao fixar a cor do triângulo, conta-se facilmente as formas de colorir cada quadrado como 3 (a quantidade de cores disponíveis). É a mesma coisa que dizer se o triângulo só tiver 1 cor possível (amarela) de quantas formas é possível colorir a figura? $3 \times 1 = 3$. Em breve, observa-se a utilidade desse parêntese.

O item (b) aumenta o desafio. Primeiro, é preciso pensar em um ponto de partida. Existirão bons e maus pontos de partida aqui. Um mau ponto de partida é escolher um dos quadrados. Embora a solução seja possível, vai se tornar mais trabalhosa. Escolhendo o triângulo, como primeiro lugar, à reflexão: se o triângulo for amarelo, cada quadrado pode ter 3 cores. Pode-se ter todos os quadrados azuis, 2 quadrados

vermelhos e 1 verde... Listar os casos é possível, mas mais uma vez muito trabalhoso. Trata-se de perceber que, para cada cor que pinto o quadrado maior, tenho 3 formas de pintar o médio. E, para cada cor que pinto o médio, três formas de pintar o menor. Ou seja, tenho $3 \times 3 \times 3 = 27$ formas de pintar a figura, considerando o triângulo amarelo.

Agora, se o triângulo for vermelho, seguindo o mesmo raciocínio, terão $2 \times 2 \times 2 = 8$ formas de pintar a figura. O mesmo vale para o triângulo azul. Um total de $27 + 8 + 8 = 43$ casos.

O Item (c) oferece mais um desafio de escolha de ponto de partida. Começando pelo quadrado menor, observa-se que ao pintá-lo de vermelho, é possível pintar cada triângulo de 2 cores diferentes. Só que, caso o triângulo de cima seja pintado de azul, os quadrados maiores só poderão ser pintados de 2 maneiras diferentes, ao passo que, se fosse pintado de amarelo, teríamos 3 formas.

Então, aqui entra em cena um pensamento típico da análise combinatória: a separação em casos. Agora, é possível retomar o parêntese do item (a)! Fingindo que já foi colorido o quadrado e o triângulo com as cores ditas, como é possível pintar a figura? Se o quadrado menor for pintado de verde, pode-se pintar cada triângulo com as 3 cores. Supondo que o triângulo de cima de amarelo seja pintado, cada quadrado também pode ter 3 cores. Totalizando $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ maneiras. Perceba que a “separação em casos” é algo que foi realizado desde o primeiro momento, acontece que agora a situação está mais complexa, com mais fatores envolvidos. A continha $3 \times 1 = 3$ se tornou maior em tamanho, mas não mudamos o conceito, o raciocínio. Continuando considerando que ao pintarmos o triângulo de cima de azul ou vermelho, só poderemos pintar os quadrados de 2 formas. Ou seja, 3 maneiras para os triângulos sozinhos, 2 para cada quadrado maior. Como isso, vale para pintar o triângulo de cima de azul ou vermelho, temos $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 216$ maneiras.

O próximo é onde o quadro menor é pintado de vermelho e o triângulo de cima de azul (que é equivalente ao caso com o quadrado azul e o triângulo vermelho). Nesse caso, é possível pintar os outros três triângulos e os dois quadrados de 2 cores cada. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Como este caso é numericamente idêntico ao indicado anteriormente, temos 64 formas de pintar assim. Finalmente, pode-se pintar o quadrado menor de azul e o triângulo de cima de amarelo, permitindo aos quadrados assumirem 3 cores distintas. Agora, existem $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ maneiras. O caso com o quadrado vermelho e o triângulo amarelo também tem 72 maneiras. Somando tudo, obtemos $243 + 216 + 64 + 72 + 72 = 667$ maneiras de colorir a figura!

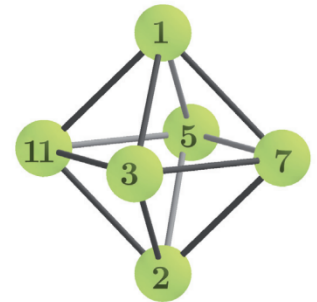
Esse foi um exemplo de questão com suporte. O raciocínio desenvolvido aqui pode ser conduzido de maneira análoga nas questões com suporte (ver tabela 1). Por exemplo, agora vamos observar a quinta questão da prova de 2017 (figura 5).

Figura 5 - OBMEP 2017 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 5

5. Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura. Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 1$$

ela obtém $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 11 \times 1 = 594$.



a) Descreva um passeio no qual a formiguinha obtém, ao final, o número 45.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter, ao final, o número 30?

Fonte: OBMEP 2017, p. 6

Nessa questão, o suporte é o octaedro, “o objeto construído com doze varetas”. O item a) pede para descrever um passeio que termine em 45. É suficiente perceber que a formiga precisa passar pelo 3 e pelo 5, os divisores não-triviais presentes no suporte. Porém, para fazer isso, a formiga precisa passar pelo 1. Agora, é preciso pensar em como organizar o caminho. A formiga precisa passar duas vezes pelo 3 e

uma vez pelo 5. O aluno pode descobrir manualmente um dos caminhos. As respostas 12 possíveis são 3-1-3-1-5, 3-1-3-1-5-1, 3-1-5-1-3, 3-1-5-1-3-1, 5-1-3-1-3, 5-1-3-1-3-1, 1-3-1-3-5, 1-3-1-3-1-5, 1-5-1-3-1-3, 1-5-1-3-1-3-1, 1-3-1-5-1-3, e 1-3-1-5-1-3-1.

O item b) não exige conhecimento de contagem, aqui é necessário saber fatoração apenas. $52 = 2 \times 2 \times 13$ e não existe bolinha com o número 13. O item c) também versa apenas da relação entre fatoração e o suporte da figura. Temos $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$, todos os fatores estão presentes no suporte. Porém, não há como passar pelo número 2 três vezes sem passar em algum outro fator além do 5, ou passar duas vezes pelo fator 5.

O item d) sim irá mobilizar conhecimentos de contagem. Primeiro, deve-se fatorar também o número 30. $30 = 2 \times 3 \times 5$. Agora, o aluno precisa pensar de quantas formas a formiga pode passar pelos fatores uma única vez. Aqui, é preciso estar atento ao número 1, que pode fazer parte do trajeto. Existem caminhos que não passam pelo número 1, são apenas dois: 3-2-5 e 5-2-3. Mas, passando pelo número 1, fica mais difícil de contar caso a caso. O aluno pode ainda perceber que é possível passar uma ou duas vezes por essa bolinha. Na situação em que a formiguinha passa uma única vez pelo número 1, há simplesmente uma “volta” no quadrilátero representado pela secção do octaedro. Se trata de escolher uma das 4 bolinhas para ser a primeira e depois o sentido da caminhada. Pode-se começar da bolinha 5 e fazer 5-1-3-2 ou 5-2-1-3. Portanto, são 4 bolinhas para escolher o ponto de partida e 2 sentidos possíveis para a trajetória, totalizando 8 caminhos possíveis.

O caso em que a formiga passa duas vezes pelo número 1 requer mais cuidado. Aqui, também existem duas possibilidades. Existe o caso semelhante ao anterior, da “volta” no quadrilátero representado pela secção octaedro, porém começando e terminando no 1. São duas maneiras de fazer isso, uma em cada sentido. E, por fim, existe a possibilidade de um “retorno”. Por exemplo, 1-3-1-5-2. Aqui, o retorno só pode acontecer se for um retorno ao número 1. Só podemos fazer o retorno, portanto, ao passar pelo 3 ou pelo 5. E como só é possível passar uma vez nestes fatores, eles não podem ser nosso ponto de partida. Porém, não há restrições para partir do 2, e é fácil ver que isso significa terminar no 1. Então, a formiga parte do 2 e termina no 1 ou parte do 1 e termina no 2. Escolhido o ponto de partida existem 2 caminhos a seguir. São 4 opções com “retorno”.

Então, $4 + 2 + 8 + 2 = 16$ maneiras de obter o número 30 em um passeio.

Para dar mais exemplos de questão sem suporte, embora sejam menos frequentes, vamos resolver a questão 5, da OBMEP de 2016 bem como a questão 2 da OBMEP de 2021.

Na prova de 2016, a última questão (figura 6) foi particularmente diferente das questões de provas anteriores, sendo esta a primeira aparição de uma questão de contagem sem suporte, embora a questão dê dois exemplos de um procedimento correto e incorreto.

Figura 6 - OBMEP 2016 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 5

5. Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1.^a posição seja maior do que 1, o da 2.^a posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2.

a) Se a senha de Fernanda começar com 9467, qual deve ser o algarismo da 5.^a posição?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Se Fernanda começar a formar sua senha escolhendo o algarismo 7 para a 5.^a posição, quantas são as possibilidades de escolha para a 4.^a posição?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Quantas senhas Fernanda poderá formar?

O item a) pode ser resolvido tranquilamente sem uso de ferramentas de contagem. Afinal, apenas o algarismo 8 é possível, por ser maior do que 5 e ainda não ter sido utilizado. No item b) o pensamento é parecido e aqui o aluno só precisa dar um exemplo, as possibilidades são 5, 6, 8 e 9. No item c), um estudante do ensino médio reconhece uma questão clássica, extremamente recorrente quando está aprendendo contagem. Talvez, o aluno de ensino fundamental consiga pensar de maneira análoga à segunda questão de 2018, tendo cinco dígitos para escolher, é possível colocar oito números distintos no primeiro dígito, sete no segundo, seis no terceiro, cinco no quarto e quatro no quinto. Porém, essa solução estaria equivocada! Como?

Vamos nos ater ao primeiro e ao último dígito. Para o primeiro, pode-se escolher 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Para o último, é possível ter 6, 7, 8 e 9. E agora? Se a senha começar com 6, não possuiremos mais quatro opções para o último dígito. Como poderemos contornar esse problema?

O mais fácil é montar o número de trás para frente, como foi sugerido levemente no item b). Fazendo quatro opções para o quinto dígito, existem quatro opções também para o quarto dígito. Isso acontece pois um dos números maiores do que 4 já foi utilizado. É a situação do item b). Continuando, de maneira análoga, temos quatro opções para o terceiro dígito, quatro para o segundo e, também, quatro para o primeiro. Sem necessariamente mencionar princípio multiplicativo, instigando um raciocínio análogo ao utilizado na segunda questão de 2018, fazemos $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ senhas possíveis!

Na segunda questão da prova de 2021 (figura 7), encontra-se um outro exemplo de questão sem suporte e com um estilo bem mais “algébrico”, esta questão envolve, além de contagem, o conhecimento de frações e requer o entendimento de número racional.

Figura 7 - OBMEP 2021 - Nível 2 - Segunda Fase - Questão 2

2. Joãozinho fez todas as divisões possíveis com dois números diferentes pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Por exemplo, com os números 2 e 5, ele fez as seguintes divisões: $\frac{2}{5}$ (obteve como resultado 0,4) e $\frac{5}{2}$ (obteve como resultado 2,5).

a) Em quantas divisões Joãozinho obteve como resultado um número inteiro?

CR	CN
----	----

b) Em quantas divisões Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5?

CR	CN
----	----

c) Quantos resultados diferentes foram obtidos por Joãozinho?

Fonte: OBMEP 2021, p. 3

Essa questão pode aparecer em discussões sobre números, no lugar de uma discussão sobre contagem. Também, é utilizado no problema a compreensão de que um número racional qualquer pode ser escrito como diferentes frações, que simbolizam divisões, como é explorado durante o estudo das frações equivalentes. $4/2 = 8/4 = 2$, por exemplo.

No item a) é preciso encontrar quantas divisões com quociente inteiro (ou resto 0) são possíveis. O número 1 não podemos obter pois o enunciado coloca a condição de serem distintos os números da fração. Com isso em mente, fica claro que, uma vez escolhido o numerador (ou denominador) teremos que encontrar um divisor dele para o denominador (ou múltiplo para o numerador). Dito isso, o denominador 1, qualquer numerador é possível. São 8 possibilidades. Com denominador 2, só é possível escolher o 4, 6 e o 8. Com denominador 3, pode-se usar o 6 e o 9. Com denominador 4, apenas o 8. Desta forma, totalizando 14 divisões possíveis.

O item b) pode ser abordado da mesma forma. Como é preciso um resultado maior do que 0,5, nesse caso, a divisão precisa ter o divisor (ou numerador) igual ou menor ao dobro do dividendo (ou denominador). Aqui, é possível pensar de maneira parecida com a questão 5, da prova de 2011. Escolhe-se um divisor (como foi escolhida

uma cor) e verifica-se de quantas formas é possível preencher o dividendo. Para o divisor igual a 1, todos os outros números satisfazem. Existem então 8 possibilidades. Para o divisor igual a 2, todos os outros números maiores que 2 satisfazem. São 7 possibilidades. Se o divisor for 3, somente números iguais ou maiores que 2 (exceto o 3) poderão ser usados na divisão. Logo, são 7 possibilidades também. Se o divisor for 4 ou 5, precisa-se ter números iguais ou maiores do que 3, sendo 12 possibilidades para esse par. Para 6 ou 7, os numeradores precisam ser iguais ou maiores do que 4. Logo, existem 10 possibilidades neste par. Com divisor 8 ou 9 só é possível utilizar números iguais ou maiores do que 5, 8 casos para esse par. O total de casos é 52.

O item c) mistura a ideia de frações equivalentes, explorada no primeiro item, com a sofisticação de ferramentas de contagem exploradas no item anterior. Começando pelas frações com denominador 1. São 8 ao todo. Com denominador 2, não é possível repetir nenhuma das frações com denominador 1. Ou seja, o resultado não pode ser um inteiro. Para isso, é suficiente que não tenhamos um numerador par. São 5 possibilidades, portanto. Para o denominador 3, precisa-se evitar também as frações equivalente a inteiros. Isso significa evitar numeradores múltiplos de 3, existindo então 6 possibilidades. Com o denominador 4, precisa-se evitar os de 2. Afinal, $6/4 = 3/2$, que já foi contado. Temos então 5 possibilidades. Para o denominador 5, evita-se apenas os múltiplos de 5, só que não temos nenhum, nos dando 8 frações possíveis. Com denominador 6, evita-se os múltiplos de 3 e de 2. Ou seja, existem apenas 3 frações. Com denominador 7 é a mesma situação do denominador 5. Logo, são também 8 frações. Com denominador 8, evita-se múltiplos de 2, nos dando 5 possibilidades. Com denominador 9, evita-se múltiplos de 3, totalizando 6 frações assim.

Finalmente, somamos todas as frações possíveis, tendo um universo de $8 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 8 + 5 + 6 = 54$ frações possíveis.

Como é possível observar é uma questão muito rica: pode-se explorar fatoração em primos, perceber os padrões nas frações com denominador 2, 4 e 8 por exemplo. É típico da OBMEP mobilizar conhecimentos distintos e de maneiras não tão explícitas. Esta consideração nos leva ao importante reconhecimento de que é importante que o professor se sinta livre para modificar as questões propostas, para adequar o problema aos estudantes, seja aumentando ou diminuindo o grau de dificuldade ou quem sabe mesmo mobilizando conhecimentos diferentes. Nesta questão 2, de 2021, o professor poderia perguntar quantas frações equivalentes são possíveis, ou permitir que o

numerador e denominador fossem iguais. Perguntar quantas frações impróprias são possíveis também é uma modificação interessante.

3 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O que a presente pesquisa apresentou foram ideias que podem servir de inspiração para os colegas licenciados e professores em geral, não necessariamente de matemática. Afinal, o estilo de contação de histórias e analogias, que foi o fio condutor da proposta, vem proporcionando aprendizados muito antes do surgimento das escolas.

É claro que essas questões oferecem um leque pequeno para aplicação e investigação. Mas, ao mesmo tempo, sua simplicidade torna a implementação em sala de aula muito fácil. Basta elaborar uma ficha, uma apresentação de slides ou mesmo copiar os problemas na lousa e ir aos poucos incentivando os alunos, em grupos ou não, a resolvê-los.

Observa-se que propor uma atividade que utiliza modelagem e resolução de problemas pode ser mais simples do que elaborar um grande trabalho em grupo, um trabalho de campo ou em conexão com outras disciplinas. Com algumas questões pré-selecionadas e o tempo de duas a quatro aulas é possível abordar o assunto de contagem, contanto que essas questões propiciem uma estrutura adequada e os alunos sejam os atores principais da construção do conhecimento.

É preciso ter em mente também o que significa ensinar matemática. Na atividade docente, fazemos escolhas. Todas essas escolhas acabam por impactar nossos estudantes. Alguns professores podem estar convencidos de que se trata de um objeto distante, abstrato, frio e perpétuo. Nós desafiamos esta concepção. Acreditamos que é possível ensinar uma matemática encorajada em desenvolver autonomia. Por isso, escolhemos por uma abordagem crítica, perto da modelagem e da resolução de problemas. E esta escolha “não é apenas outra metodologia de ensino, mas sim uma filosofia de ensino” (ROMANATTO, 2012, p. 15). A beleza e o poder de persuasão da matemática residem em sua capacidade de ser contagiante, espontânea, plural, versátil e sobretudo maleável.

A ideia de modelagem está enraizada nesta maleabilidade. Uma operação de multiplicação, por exemplo, pode adquirir vários sentidos diferentes, ter várias utilidades diferentes. O aluno deve escolher a operação como um pintor escolhe cores

que irão traduzir o que ele pretende expressar. Além disso, “o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula exige dos estudantes uma atitude investigativa em relação à situação problema que lhes é proposta” (TORTOLA, 2012, p. 43). Moldando suas concepções almejando uma nova visão, uma nova interpretação para o mundo, o estudante cria autonomia de pensar criticamente.

Impregnar-se desta capacidade, ao nosso ver, constitui o objetivo da educação. Por isto, a abordagem de modelagem, por permitir experimentar a liberdade de criar para alcançar seus objetivos, acaba ensinando muito mais do que análise combinatória, muito mais do que matemática.

Enquanto os estudos de matemática crítica e modelagem contam com vasta literatura, o uso da modelagem matemática especificamente em análise combinatória, ainda é incipiente. Entre 2018 e 2019, apenas uma tese nessa linha figurava no banco da CAPES (BARBOSA, BASTOS, 2020). Não encontramos nenhuma publicada entre 2020 e 2021. São poucos os estudos de caso e a literatura desenvolvida sobre essa curiosa relação. O presente trabalho se colocou como uma contribuição modesta.

REFERÊNCIAS

Allevato, N. S. G., & ONUCHIC, L. D. L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. In: **Resolução de problemas: teoria e prática** (35). Jundiaí, Paco Editorial, (2014)

ARAÚJO, J. L. **Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática**. In: Bolema 26 (43). São Paulo, UNESP, 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?** Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASTOS, T. A., ROSA, M. **Modelagem na Educação Matemática para o desenvolvimento de conceitos de Análise Combinatória**. In: Educação Matemática Debate 4. Montes Claros, 2020.

BONFADA, E. M. **A Matemática na Formação de Professor Normalistas**: o Instituto de Educação General Flores da Cunha em Tempos de Matemática Moderna. Porto Alegre, UFRS, 2018.

DA SILVA, A. P., DE ANDRADE, S. **Ressignificando o Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória**. 2011.

FARIAS, J. C. G., BARBOSA, I. I. **Avaliação Crítica de Livros Didáticos Quanto a Abordagem de Análise Combinatória**. In: Saberes Docentes em Ação 6. Maceió, 2022.

FERNANDES, F. M. S. **Resolução de problemas e educação matemática crítica: uma proposta para o ensino de probabilidade**. 2018.

GITIRANA, Verônica et al. **Jogos com sucata na Educação Matemática**. Recife, Nemat, Ed. Universitária da UFPE, 2013.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação**: Alegorias, Tecnologias, Jogo, Poesia. São Paulo, Cortez, 2012.

MACIEL, M. V. M. e BASSO, M. V. A. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**: As origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. GT-03. Ijuí, 2009.

MAGALHÃES GOMES, M. L. **História do Ensino da Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em 18 de julho de 2023.

OBMEP - **Apresentação**. Disponível em <<http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>>. Acesso em 18 de julho de 2023.

OBMEP - **Provas Anteriores**. Disponível em <<https://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acesso em 18 de julho de 2023.

Organização Mundial da Saúde (OMS). **Coronavirus Disease Dashboard With Vaccination Data**. Disponível em: <https://covid19.who.int/>. Acesso em: 25 de julho de 2023.

ROMANATTO, M. C. **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA**. Revista Eletrônica de Educação, [S. l.], v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. DOI: 10.14244/19827199413. Disponível em: <https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413>. Acesso em: 18 set. 2023.

SABO, R. D. **Análise De Livros Didáticos Do Ensino Médio**: Um Estudo Dos Conteúdos Referentes À Combinatória. Monografia De Especialização Em Educação Matemática, Centro Universitario Fundação Santo André, SS. 2007.

SKOVSMOSE, O. **Towards a Philosophy of Critical Mathematical Education**. Springer, 1994.

TODESCHINI, I. L. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas**. Porto Alegre, UFRGS, 2012

TORRENTE, C. R.; REIS, F. DA S. Um passeio pelas Olimpíadas de Matemática: das origens aos atuais cenários no mundo e no Brasil. **Revemop**, v. 5, p. e202301, 23 dez. 2022.