UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ADSON PALMEIRA SERAFIM DA SILVA

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

Recife

2024

ADSON PALMEIRA SERAFIM DA SILVA

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

Dissertação ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): Hildeberto Eulálio Cabral

Recife

2024

Catalogação na fonte
Bibliotecária: Luiza de Oliveira/CRB 1316

S586e Silva, Adson Palmeira Serafim da.
Estabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares /Adson Palmeira Serafim da Silva.– 2024.
43 f.: il.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-graduação em Matemática, Recife, 2024.
Inclui referências.

1. Sistemas lineares. 2. Equação diferencial. 3. Sistemas hamiltonianos. 4. Estabilidade de equilibrios. I.Cabral, Hildeberto Eulálio. II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2024 –85

ADSON PALMEIRA SERAFIM DA SILVA

Estabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 28/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr.Thiago Dias de Oliveira Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dedicado aos meus pais.

Pai, ainda serei o seu Doutor

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer aos meus pais. A minha mãe, por me apoiar em minhas escolhas, e ao meu pai, que, por mais que hoje não esteja presente aqui, foi sempre meu maior incentivador. Ao meu orientador que me direcionou durante a reta final do mestrado.

Aos meus amigos que sempre me escutaram e sempre estiveram ao meu lado durante toda essa trajetória.

Agradecer especialmente a minha namorada Thamyres, que em todos os momentos de dificuldades, todos momentos em que quis desistir, segurou minha mão e me ajudou a seguir em frente. Ao meu grande amigo Gustavo, por todo companheirismo na hora de estudo.

RESUMO

Este trabalho trata de estabilidade de sistemas de equações diferenciais lineares e tem como ideia fundamentar os conceitos e provar teoremas em nele encontrados sem auxilio de outra bibliografia. Serão vistos conceitos fundamentais de álgebra linear, abordando temas como soluções de sistemas homogêneos e não homogêneos e o logaritmo de matrizes quadradas. Também veremos as definições de sistemas equações diferenciais ordinárias lineares, tais como, sistemas coeficientes constantes, Hamiltonianos, veremos a definição de matrizante e a equação de Euler-Lagrange. Em seguida, será examinada a estrutura das soluções de um sistema linear periódico homogêneo utilizando o Teorema de Floquet que permite reduzir a solução de um sistema periódico a um sistema com coeficientes constantes, e serão apresentadas as condições sob as quais um sistema linear periódico não homogêneo possui solução. Além disso, será abordada a questão de estabilidade em sistemas de equações diferenciais lineares. Por fim trataremos o tema de estabilidade forte de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos, apresentando o Teorema de Krein como também o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii.

Palavras-chaves:Sistemas lineares; equações diferenciais; sistemas Hamiltonianos; estabilidade de equilíbrios.

ABSTRACT

This work addresses the stability of linear differential equation systems and aims to establish the concepts and prove the theorems found within it without relying on additional bibliographic sources. Fundamental concepts of linear algebra will be explored, covering topics such as solutions to homogeneous and non-homogeneous systems and the logarithm of square matrices. Definitions of linear ordinary differential equation systems will also be reviewed, including systems with constant coefficients, Hamiltonian systems, the notion of a matrix pencil, and the Euler-Lagrange equation. Subsequently, the structure of the solutions to a homogeneous periodic linear system will be examined using Floquet's theorem, and the conditions under which a non-homogeneous periodic linear system has a solution will be presented. Additionally, the issue of stability in linear differential equation systems will be discussed. Finally, we will address the topic of strong stability in periodic Hamiltonian linear systems, presenting both the Krein theorem and the Krein-Gelfand-Lidskii theorem.

Keywords: Linear systems; differential equations; Hamiltonian systems; stability of equilibrium.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um sistema linear periódico estável pode perder sua estabilidade através de uma perturbação de parâmetro, resultando em um fenômeno conhecido como ressonância paramétrica. O presente estudo tem como objetivo investigar quais as condições necessárias para que esse sistema, após a perturbação, ainda se mantenha estável.

No segundo capítulo, será apresentado um resumo sucinto de conceitos e teoremas de álgebra linear (tais como logaritmo de uma matriz quadrada e um método para sistemas e equações lineares não homogêneos) e sistemas de equações lineares (definições de sistemas lineares de EDO de primeira ordem homogêneos, adjunto, não-homogêneo, Hamiltonianos). Este capítulo foi concebido com o propósito de fornecer as ferramentas necessárias para a compreensão da teoria desenvolvida ao longo do texto.

O terceiro capítulo abordará um estudo sobre as soluções de sistemas lineares periódicos, apresentando definições de produto interno e norma, teorema de Floquet para o matrizante do sistema periódico, a estrutura de suas soluções e dois lemas que estimam a existência e limitam as soluções periódicas do sistema não-homogêneo.

No último capítulo, será discutida a definição de estabilidade de sistemas lineares. Iremos estudar as condições necessárias para que um sistema Hamiltoniano, seja além de estável, tenha uma vizinhança que todo sistema Hamiltoniano seja estável. Para isso, será apresentado o produto escalar indeterminado, que iremos usar para separar os multiplicadores em três espécies, os teoremas de Krein e o de Krein-Gel'fand-Lidskii, que define as condições necessárias e suficientes para o sistema ser fortemente estável.

2 RELEMBRANDO CONCEITOS

Este trabalho tem como intuito ser autocontido, ou seja, foi elaborado de maneira que não seja necessário a busca de outras literaturas para o entendimento do conteúdo aqui abordado. Portanto, neste capítulo iremos estabelecer conceitos básicos sobre álgebra linear e sistemas de equações diferenciais, os quais serão de grande importância para a compreensão do conteúdo abordado ao longo do texto. Será visto conceitos de logaritmo de uma matriz inversível, soluções de sistemas lineares, definição de matrizante de um sistema de EDOs homogêneo e homogêneo adjunto, também algumas propriedades dos sistemas Hamiltonianos.

2.1 ÁLGEBRA LINEAR

Definição 2.1. Seja $S = \{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_d}\}$ um conjunto de vetores do espaço vetorial $\mathbf{V}$. Chamamos de *matriz de Gram* do conjunto S $(\mathbf{G})$ a matriz formada pelo produto interno de seus vetores, isto é

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1} \rangle \dots & \langle \mathbf{u_d}, \mathbf{u_1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_d} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_d} \rangle \dots & \langle \mathbf{u_d}, \mathbf{u_d} \rangle \end{pmatrix}$$

O determinante dessa matriz é chamado de *determinante de Gram* de S

Teorema 1. *Os vetores $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_d}\}$ são L.I. se, e só se, a sua gram matriz tem determinante diferente de zero*

Demonstração. Considere a igualdade

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d = 0 \tag{2.1}$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ são escalares. Ao tomarmos o produto interno com $\mathbf{u}_j,\ j = 1, \dots, d$ encontramos o seguinte sistema linear

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle + \alpha_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1\rangle + \cdots + \alpha_d\langle \mathbf{u}_d, \mathbf{u}_1\rangle &= 0,\\
\alpha_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle + \alpha_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle + \cdots + \alpha_d\langle \mathbf{u}_d, \mathbf{u}_2\rangle &= 0,\\
&\vdots\\
\alpha_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_d\rangle + \alpha_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_d\rangle + \cdots + \alpha_d\langle \mathbf{u}_d, \mathbf{u}_d\rangle &= 0.
\end{aligned}
$$

O sistema acima irá possuir solução não-trivial em α_j $j = 1, \ldots, d$ se, e somente se, a matriz de Gram possui determinate nulo. Portanto, se não existe α_j não nulo na equação (1.1), então a matriz de Gram tem determinante não nulo. $\square$

Vale aqui relembrar as seguintes propriedades, consideremos a matriz adjunta de A, isto é, a sua transposta conjugada $A^* = \overline{A}^t$, então

$$
\begin{aligned}
&i.\quad (A^*)^* = A\\
&ii.\quad \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y}\rangle,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

se a matriz A for real, $A^* = A^t$. Definimos como *matriz simplética padrão* a matriz anti-Hermitiana J de ordem $2n$ que é dada pela forma

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}
$$

As seguintes identidades aparecem com frequência ao longo deste texto

$$
J^t = J^{-1} = -J, \qquad J^2 = -I_{2n}, \qquad J^3 = -J, \qquad J^4 = I_{2n}. \tag{2.4}
$$

Seja $\mathbf{V}$ o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$, onde $\mathbb{K}$ representa $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, com um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sendo $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n),\ \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ dois vetores de $\mathbb{K}^n$, esse produto é dado por

$$
\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}.
$$

Podemos reescrever o produto interno de maneira matricial, ou seja, $\mathbf{b}^*\mathbf{a}$ onde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são matrizes coluna. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ é o produto euclidiano, e podemos reescrever como $b^t a$.

Seja A uma matriz pertencente ao espaço das matrizes quadradas em $\mathbb{K}$, denotado por $\mathcal{M}_n\mathbb{K}$, definiremos a norma de A como

$$|A| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2} \tag{2.5}$$

2.1.1 Logaritmo de uma matriz quadrada

Definição 2.2. Seja A pertencente a $\mathcal{M}_n\mathbb{K}$. Dizemos que a matriz A tem um logaritmo se existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_n\mathbb{K}$ tal que $\mathrm{e}^B = A$. Onde o operador linear e^B é definido por

$$\mathrm{e}^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k. \tag{2.6}$$

Proposição 2.1. *Considere o bloco de Jordan elementar $D = \lambda I + N$, onde $\lambda \neq 0$ e N uma matriz nilpotente de ordem n. Então D possui um logaritmo.*

Demonstração. Como $\lambda \neq 0$, podemos escrever D como $D = \lambda(I+R)$ onde $R = N/\lambda$. Sabemos que $\log(1+z)$ pode ser expandido em série de potência como $\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{z^j}{j}$. Ora, como $R^n = 0$ (por n ser a ordem de nilpotência de N), a série $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{R^j}{j} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}\frac{R^j}{j}$ será convergente, portanto, podemos afirmar que existe uma matriz S tal que

$$S = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}\frac{R^j}{j} = \log(I+R).$$

Seja $B = \log(\lambda)I + S$ para um *ramo de logaritmo* de λ definido, pela comutatividade de I e S, então

$$\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{\log(\lambda)I+S} = \mathrm{e}^{\log(\lambda)I} \cdot \mathrm{e}^S = \lambda I \cdot \mathrm{e}^{\log(I+R)}.$$

Assim como $\mathrm{e}^{\log(1+z)} = 1 + z$ é possível verificar por expansão em série de potência que $\mathrm{e}^{\log(1+R)} = 1 + R$, essa verificação é demaseadamente trabalhosa e será omitida aqui. Assim $\mathrm{e}^B = \lambda(I+R) = D$ $\square$

Proposição 2.2. *Qualquer matriz inversível $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{K}$ possui um logaritmo.*

Demonstração. Seja A uma matriz inversível, portante existe uma matriz inversível P tal que $PAP^{-1} = A_d$ onde A_d é

$$\begin{pmatrix} D_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & D_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

e cada um D_{λ_i} é um bloco de Jordam referente ao autovalor λ_i. Portanto, pela proposição (2.2), cada um dos blocos de Jordam da matriz A_d possui um logaritmo, $D_{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\tilde{B}_i}$, e assim a matriz $\tilde{B} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\tilde{B}_1}, \dots, \mathrm{e}^{\tilde{B}_k}]$ é um logaritmo de A_d. Como $A_d = PAP^{-1}$ então $A = \mathrm{e}^B$ onde $B = P^{-1}\tilde{B}P$ □

2.1.2 Solução de sistemas não homogêneos

Considere um sistema *homogêneo* de equações lineares

$$A\mathbf{x} = 0,$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n no corpo $\mathbb{K}$.

Sendo r o posto de A (a dimensão da imagem ou a quantidade de colunas L.I. da matriz A), o conjunto das soluções desse sistema forma um subespaço vetorial de $V = \mathbb{K}^n$ cujo a dimensão é a nulidade $d = n - r$ de A.

Para o sistema *não homogêneo*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde A é uma matriz quadrada com n linhas e $\mathbf{b}$ são vetores de dimensão n, pode não haver solução. Para que o sistema não homogêneo tenha solução é necessário que $\mathbf{b}$ esteja na *imagem* do operador linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

No caso não-singular a solução é dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, porém, no caso em que A é *singular* $(\det A = 0)$, precisamos do seguinte lema.

Lema 1. *Seja $r < n$ a dimensão da imagem de A, e seja $d = n - r$ sua nulidade. Sejam $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ uma base para a solução do sistema homogêneo $A\mathbf{y} = 0$ e $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_d$ uma base para a solução do sistema homogêneo adjunto $A^*\mathbf{z} = 0$*

i. A equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução se, e somente se

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{z}_\delta \rangle = 0 \qquad \forall\ \delta = 1, \ldots, d \tag{2.7}$$

ii. A solução geral para a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{\delta=1}^{d} \gamma_\delta \mathbf{y}_\delta \tag{2.8}$$

onde $\mathbf{x}_0$ é uma solução particular e os γ_δ são valores complexos arbitrários

iii. Suponha a condição (2.7) e sejam $\mathbf{u}_j$ com $j = 1, \ldots, d$ vetores arbitrários tais que[1]

$$\det[\langle \mathbf{y}_\delta, \mathbf{u}_j \rangle]_1^d \neq 0, \tag{2.9}$$

então a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma única solução $\mathbf{x}_0$ que satisfaz a condição

$$\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \ com\ j = 1, \ldots, d, \tag{2.10}$$

e essa solução é determinada por

$$\mathbf{x}_0 = C^{-1}\mathbf{b} \ onde\ C = A - VU^*, \tag{2.11}$$

sendo as matrizes $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_d], V = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_d] \in M(\mathbb{K})_{n\times d}$ com $\mathbf{u}_\delta$ e $\mathbf{z}_\delta$ $\delta = 1, \ldots, d$ como colunas, respectivamente

Demonstração. i. Suponha que o sistema possui solução, então o produto interno

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{z}_\delta \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{z}_\delta \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{z}_\delta \rangle = 0\ \forall\ \delta = \{1, \ldots, d\}$$

por outro lado, temos que $\mathbb{K}^n = Im(A) \oplus Ker(A^*)$, e como $\mathbf{b}$ é ortogonal a todo vetor do núcleo de A^*, então $b \in Im(A)$, isto é existe um $\mathbf{x}_0$ tal que $A\mathbf{x}_0 = b$.

[1] $[\langle \mathbf{y}_\delta, \mathbf{u}_j \rangle]_1^d$ denota a matriz em que cada entrada é o produto interno dos vetores $\langle \mathbf{y}_\delta, \mathbf{u}_j \rangle$

ii. Por hipótese, $A\mathbf{x}_0 = b$, vamos supor que $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$, ou seja, $A(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1) = 0$, o que implica que $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 \in Ker(A)$, mais ainda, é combinação linear dos vetores $\{\mathbf{y}_\delta\}$ $\delta = 1, \ldots, d$. Portanto, a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é dada por (2.8).

iii. Tomando a solução geral dada em *ii* e aplicando em (2.10) vemos que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{\delta=1}^{d} \gamma_\delta \langle \mathbf{y}_\delta, \mathbf{u}_j \rangle = -\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_j \rangle \quad \forall\ j = 1, \ldots, d,$$

e como, por hipótese, $[\langle \mathbf{y}_\delta, u_j \rangle]_1^d$ é injetiva, temos que $\mathbf{x}_0$ é único.

Por outro lado, vejamos que se $C\mathbf{y} = 0$, onde C é dado por (2.11) e $\mathbf{y}$ um vetor qualquer em $\mathbb{K}^n$

$$C\mathbf{y} = A\mathbf{y} - VU^*\mathbf{y} = 0,$$

definindo $VU^*\mathbf{y} = \mathbf{v}$, temos $A\mathbf{y} = \mathbf{v}$ e assim $\langle \mathbf{v}, \mathbf{z}_\delta \rangle = \langle \mathbf{y}, A^*\mathbf{z}_\delta \rangle = 0$ para todo $\delta = 1, \ldots, d$. Ora, como $\mathbf{v} = VU^*\mathbf{y}$, podemos escrever essa igualdade em forma de produto interno, $\mathbf{v} = \sum_1^d \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_j \rangle z_j$. Se substituirmos esse valor de $\mathbf{v}$ no produto interno com z_δ vemos que

$$0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{z}_\delta \rangle = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j \langle \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_\delta \rangle, \quad \text{onde } \gamma_j = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_j \rangle$$

temos que $\det[\langle \mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_j \rangle]_1^d \neq 0$, por $[\langle \mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_j \rangle]_1^d$ ser a matriz de Gram e serem linearmente independentes, chegamos em $\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_j \rangle = 0\ \forall\ j = 1, \ldots, d$. O que implica que $\mathbf{v} = 0$ e assim $A\mathbf{y} = 0$, ou seja $\mathbf{y} = \sum_1^d \alpha_j \mathbf{y}_j$. Disso temos

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0,$$

e por (2.9) concluímos que $\alpha_i = 0\ \forall\ i = 1, \ldots, d$ e assim $\mathbf{y} = 0$, logo C é injetiva e $\mathbf{x}_0 = C^{-1}\mathbf{b}$. Agora vejamos que se $\mathbf{x}_0$ é solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e satisfazendo (2.10), então $U^*\mathbf{x}_0 = 0$ e portanto

$$C\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_0 - VU^*\mathbf{x}_0 = C\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 = C^{-1}\mathbf{b}$$

. □

OBS 2.1. De (2.11) concluímos que existe um $\upsilon = |C^{-1}| > 0$ o qual é independente de $\mathbf{b}$ e que nos dá

$$|\mathbf{x}_0| < \upsilon|\mathbf{b}|$$

2.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.2.1 Sistema homogêneo de equações diferenciais

Definimos como *sistema homogêneo de equações diferenciais*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)x_j(t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

onde os coeficientes $\alpha_{ij}(t)$ são funções contínuas em t no intervalo I. O ponto sobrescrito a uma letra significa a derivada em relação ao tempo. Podemos escrever em forma vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \tag{2.12}$$

onde $A(t)$ é a matriz quadrada de ordem n com entradas $\alpha_{ij}(t)$. Uma *solução* de (2.12) é uma função vetorial diferenciável $\mathbf{x} : I \to \mathbb{K}^n$ tal que $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, para todo $t \in I$.

Proposição 2.3. *(1) As soluções da equação (2.12) formam um espaço vetorial de dimensão* n.

(2) Sejam $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_k(t)$ *soluções do sistema homogêneo (2.12). Então, elas são linearmente independentes se, e somente se, os vetores* $\mathbf{x}_1(0), \ldots, \mathbf{x}_k(0)$ *são L.I.*

Demonstração. (1) Se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são soluções do sistema (2.12), então $\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$, $c\mathbf{x}(t)$ ($c \in \mathbb{K}$) e a função nula $0(t) = 0$ para todo $t \in I$ também são soluções de (2.12). Além disso, formam um subespaço vetorial das funções diferenciáveis $\mathbf{x} : I \to \mathbb{K}^n$. A dimensão do subespaço será dado após a prova do próximo item

(2) Se as soluções $S = \{\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_k(t)\}$ são linearmente dependentes, então existem escalares $c_1, \ldots, c_k$, não todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t) = 0, \quad \text{para todo } t,$$

portanto, é válida para $t = 0$, o que implica que os vetores $\mathbf{x}_1(0), \ldots, \mathbf{x}_k(0)$ são linearmente dependentes.

Agora, seja S o conjunto de soluções linearmente independentes de (2.12) e considere a igualdade

$$c_1\mathbf{x}_1(0) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(0) = 0$$

usando os mesmos coeficientes c_i $i = 1, \ldots, k$ tomemos a solução $c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}(t)$. Como $\mathbf{x}(0) = 0$, pela unicidade das soluções, então $\mathbf{x}(t) \equiv 0$. Ora, então temos a igualdade $c_1\mathbf{x}_1(t)+\cdots+c_k\mathbf{x}_k(t) = 0$. Como S é linearmente independente, $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Portanto, os vetores $\mathbf{x}_1(0)\cdots, \mathbf{x}_k(0)$ são linearmente independentes. □

Definição 2.3. Um conjunto $\mathcal{B} = \{x_i(t)\}$ de n soluções L.I. do sistema (2.12) é chamado *conjunto de soluções fundamentais*. A matriz $X(t)$ formada por esses vetores L.I. como suas colunas é chamada de *matriz fundamental*.

É claro que a matriz fundamental $X_1(t)$ satisfaz à seguinte equação matricial.

$$\dot{X}_1 = A(t)X_1(t).$$

Chamamos de *matrizante* da equação (2.12) a matriz fundamental $X(t)$ cujo valor em um instante inicial t_0 é a matriz identidade, $X(t_0) = I_n$.

Se $X(t)$ é o matrizante de (2.12) uma solução desta equação com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}_0. \tag{2.13}$$

Portanto, qualquer matriz fundamental $X(t)$ de (2.12) é dada por

$$X_k(t) = X(t)X_k(t_0). \tag{2.14}$$

Se a matriz A é constante, então pode-se obter todas as soluções do sistema autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{2.15}$$

as quais são dadas por

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(t_0), \tag{2.16}$$

Exemplo 2.1. Considere a matrix quadrada $A = \omega J$, onde J é a matriz simplética padrão de ordem $2n$. Achar as soluções (2.16) do sistema (2.15).

As potências sucessivas de J são dadas como em (2.4). Disso temos

$$tA = (\omega t)J, \quad (tA)^2 = -(\omega t)^2 I, \quad (tA)^3 = -(\omega t)^3 J, \quad (tA)^4 = (\omega t)^4 I, \quad (tA)^5 = (\omega t)^5 J, \ldots,$$

logo

$$\mathrm{e}^{tA} = \Big(1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \dots\Big) I + \Big(\frac{\omega t}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \dots\Big) J.$$

Assim, temos

$$\mathrm{e}^{tA} = \cos\omega t \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} + \sin\omega t \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t\, I & \sin\omega t\, I \\ -\sin\omega t\, I & \cos\omega t\, I \end{bmatrix}.$$

Portanto, com $\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$, obtemos a solução $\xi(t) = e^{tA}\xi(0)$ de $\dot{\xi} = A\xi$, com condição inicial $\xi(0)$, ou seja

$$\mathbf{x}(t) = \cos\omega t\, \mathbf{x}(0) + \sin\omega t\, \mathbf{y}(0), \quad \mathbf{y}(t) = -\sin\omega t\, \mathbf{x}(0) + \cos\omega t\, \mathbf{y}(0).$$

A dependência da matriz $A(t)$ no tempo t faz com que seja um problema difícil obter as soluções do sistema (2.12).

2.2.2 Sistema adjunto

Consideremos o sistema

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} -\overline{\alpha}_{ij}(t) y_j(t) \qquad \{i = 1, \dots, n\}$$

ou em forma vetorial

$$\dot{\mathbf{y}} = -A^*(t)\mathbf{y}, \tag{2.17}$$

o chamamos de *sistema adjunto* de (2.12). Afirmamos que se $X(t)$ é o matrizante do sistema (2.12), então o matrizante do sistema (2.17) é

$$Y(t) = [X(t)^*]^{-1}. \tag{2.18}$$

Ora, se aplicarmos o adjunto no sistema (2.12) com o matrizante, então $\dot{X}^* = X^* A^*(t)$, logo

$$\frac{d}{dt} X^*Y = \dot{X}^*Y + X^*\dot{Y} = (X^*A^*)Y + X^*(-A^*Y) = 0,$$

ou seja X^*Y é uma constante, como $X(t_0) = Y(t_0) = I_n$, então temos que $X^*Y = I_n$, provando nossa afirmação.

2.2.3 Sistema não homogêneo

Definimos como *sistema não homogêneo* o seguinte sistema de EDO

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z} + \mathbf{f}(t). \tag{2.19}$$

Onde $A(t)$ e uma matriz quadrada de ordem n e $\mathbf{f}(t) = (f_1(t) \ \ldots \ f_n(t))^t$ sendo as entradas de $\mathbf{f}$ funções contínuas em t.

O matrizante do sistema não homogêneo é dado pela *fórmula de variação de parâmetro*. Sabemos que a solução do sistema homogêneo $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ é dado por $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}_0$ onde $\mathbf{x}_0$ é um vetor constante, temos também que $\dot{X} = A(t)X$. Se tomarmos a variação de parâmetro onde agora no lugar de termos $\mathbf{x}_0$ constante temos $\mathbf{z}(t) = X(t)\mathbf{x}(t)$ com $\mathbf{x}(t)$ um vetor função no tempo t. Então $\frac{d}{dt}\mathbf{z}(t) = \dot{X}\mathbf{x}(t) + X(t)\dot{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{z}} = (AX)\mathbf{x}(t) + X\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{z}(t) + X\dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{f}(t) = X(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$$

Integrando de t_0 à t e multiplicando por $X(t)$ encontramos

$$\mathbf{z}(t) = X(t)\left(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right), \tag{2.20}$$

2.2.4 Sistemas Hamiltonianos

Chamamos de *sistema Hamiltoniano* o sistema de equações diferenciais complexo que pode ser escrito da seguinte forma

$$\dot{x}_j = \mathbf{H}_{x_{n+j}}, \qquad \dot{x}_{n+j} = -\mathbf{H}_{x_j}, \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{H}_{x_j}$ representa a derivada de $\mathbf{H}$ em relação a x_j, e

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2k} h_{ij}(t)x_i x_j. \tag{2.22}$$

Portanto podemos escrever o sistema da seguinte maneira

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_j = \sum_{i=1}^{2n} h_{i,n+j}(t)x_i \\ \\ \dot{x}_{n+j} = -\sum_{i=1}^{2n} h_{i,j}(t)x_i \end{array}\right. \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

A função (2.22) é chamada de *Hamiltoniano* do sistema. Se o sistema Hamiltoniano for independente do tempo t o chamaremos de *autônomo*. As variáveis $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ são as variáveis conjugadas de $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente, e o número n é o *grau de liberdade do* sistema Hamiltoniano. Também podemos escrever o sistema de forma matricial. Tomandos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

E sendo $H(t) = \nabla \mathbf{H}(t)^* = \nabla \mathbf{H}(t)$. Assim, o sistema Hamiltoniano pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = JH(t)\mathbf{x}. \tag{2.24}$$

Definição 2.4. Seja A uma matriz de ordem $2n$ em $\mathbb{K}$, dizemos que A é uma *matriz Hamiltoniana* se o sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ for Hamiltoniano.

As definições acima nos leva às seguintes proposições

Proposição 2.4. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma matriz quadrada complexa de ordem* $2n$

(a) A *é Hamiltoniana;*

(b) $A = JS$ *onde* $S^* = S$*;*

(c) $A^*J + JA = 0$*;*

(d) JA *é Hermetiana.*

Proposição 2.5. *A matriz* A *de ordem* $2n$ *é Hamiltoniana se, e somente se, for escrita na forma de blocos*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com $a^* + d = 0$ *e* b, c *Hermitianas*

As provas dessas proposições são obtidas de maneira direta a partir das definições de sistemas Hamiltonianos e de matrizes Hamiltonianas, também podemos encontra-las para o caso real dessas proposições no inicio do capito 2 livro (MEYER; OFFIN, 2017)

2.2.5 Equação de Euler-Lagrange

Seja L um *Lagrangiano* regular

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{T} - \mathbf{\Pi}, \tag{2.25}$$

onde $\mathbf{T}$, $\mathbf{\Pi}$ são as energias cinéticas e potencial do sistema, respectivamente, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $L : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O *problema variacional* é baseado em calcular o *caminho* no conjunto $\Omega = \{\mathbf{x} : [a, b] \to U\}$, que minimiza a *ação*

$$\mathcal{A}_L = \int_a^b L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt. \tag{2.26}$$

Uma *variação adequada* do caminho $\mathbf{x} : [a, b] \to U$ é uma família de caminhos de um parâmetro de classe C^2 em $[a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ tal que

$$\mathbf{x}(t, 0) = \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(a, \alpha) = \mathbf{x}(a), \quad \mathbf{x}(b, \alpha) = x(b), \;\; \forall\, \alpha.$$

O caminho $\mathbf{x}(t)$ é um ponto estacionário da ação (2.26) se, e somente se, é solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0. \tag{2.27}$$

A equação (2.27) é chamada de *equação de Euler-Lagrange* do problema variacional. A prova para essa equação pode ser encontrada na seção 2 do segundo capítulo do livro (CABRAL; DIAS, 2023).

2.2.6 Equação variacional

Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de *equilíbrio hiperbólico* do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t),$$

isto é

$$\frac{d}{dx}A\mathbf{x}(t)\bigg|_{x=x_0} \neq 0$$

A *Linearização* de um sistema é o estudo de soluções de uma da equação $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}(t)$ e uma vizinhança próxima do equilíbrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. Define-se desvios em torno do equilíbrio

$$X(t) = \mathbf{x}_0(t) + \xi(t),$$

e calcularemos a expansão da série de Taylor da função $A(t)$ em torno de $\mathbf{x}_0(t)$.

$$\dot{X} = A\mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}A\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n}A\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\xi_n + O(\xi^2) \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\xi} = A\mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}A\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n}A\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=x_0}\xi_n + O(\xi^2).$$

Como $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = A\mathbf{x}_0$, também podemos desprezar os termos de ordem maior e igual a 2, portanto ficamos com

$$\dot{\xi} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}A\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n}A\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\xi_n. \tag{2.28}$$

Chamaremos (2.28) de *equação variacional* do sistema.

3 SISTEMAS LINEARES PERIÓDICOS

3.1 INTRODUÇÃO

Considere o sistema não-homogêneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{3.1}$$

com a matriz $n \times n$ A e a função $\mathbf{f}$ sendo T-periódicas, isto é, $A(t+T) = A(t)$ e $\mathbf{f}(t+T) = \mathbf{f}(t)$.

Consideremos também o sistema homogêneo a ele relacionado

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}, \tag{3.2}$$

e o correspondente sistema adjunto

$$\dot{\mathbf{z}} = -A(t)^*\mathbf{z}. \tag{3.3}$$

No espaço vetorial das funções vetoriais contínuas $\mathbf{u} : [0, T] \to \mathbb{K}^n$ definimos o produto interno de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pela expressão [1]

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{1}{T}\int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)\rangle dt \tag{3.4}$$

e com a respeciva norma

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{((\mathbf{u}, \mathbf{u}))} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |\mathbf{u}(t)|^2 dt}. \tag{3.5}$$

As desigualdades *triangular* e *Cauch-Shwarz* ($|((\mathbf{u}, \mathbf{v}))| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$) são verificadas facilmente por (3.4). Definamos $\mathcal{L}_2$ como o espaço vetorial das funções vetoriais $\mathbf{u}(t)$ T-periódicos, com $0 \leq t \leq T$, tal que a norma (3.5) é finita.

Seja $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{L}_2$ e seja $Q(t)$ um operador T-periódico contínuo em $[0, T]$, portanto $Q(t)$ é limitado nesse compacto, então $Q(t)\mathbf{y}(t) \in \mathcal{L}_2$, pois

$$\|Q(t)\mathbf{y}(t)\|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |Q(t)|^2 |\mathbf{y}(t)|^2 dt \leq \max_{[0,T]} |Q(t)|^2 \|\mathbf{y}(t)\|^2.$$

---

[1] Também utilizaremos o seguinte produto interno para funções escalares contínuas $u, v : [0, T] \to \mathbb{K}$,

$$\langle u, v\rangle = \int_0^T u(t)v(t)dt$$

e a correspondente norma $|u| = \sqrt{\int_0^T u(t)^2 dt}$.

então

$$\|Q(t)\mathbf{y}(t)\| \leq \sqrt{\underset{[0,T]}{max}|Q(t)|^2}\ \|\mathbf{y}(t) \tag{3.6}$$

Teorema 2 (**Floquet**). *O matrizante do sistema homogêneo T-periódico (3.2) é dado por*

$$Y(t) = Q(t)\mathrm{e}^{tB}, \tag{3.7}$$

onde $Q(t)$ é uma matrix T-periódica e B é constante.

Demonstração. Se $\mathbf{y}(t)$ é solução do sistema (3.2), então transladando por T, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t+T)$, também é solução, assim como $Y(t+T)$ é uma matriz fundamental, pois é a combinação linear das colunas de $Y(t)$. Isso implica que existe uma matriz C tal que $Y(t+T) = Y(t)C$. Como Y é o matrizante, então $Y(0) = I_n$, ou seja, podemos reescrever $Y(t+T) = Y(t)C$ como

$$Y(t+T) = Y(t)Y(T).$$

Pelo fato de $Y(t)$ ser inversível, pela proposição (2.2), existe um B tal que $Y(T) = \mathrm{e}^{TB}$.

Cosidere agora a matriz $Q(t) = Y(t)\mathrm{e}^{-tB}$, então $Y(t) = Q(t)e^{tB}$, para concluir o teorema basta provar que Q é T-periódico. Vejamos

$$Q(t+T) = Y(t+T)\mathrm{e}^{-(t+T)B} = Y(t)Y(T)\mathrm{e}^{-TB}\mathrm{e}^{-tB}.$$

Ora, $Y(t) = Q(t)e^{TB}$, portanto $Q(t+T) = Q(t)$. $\square$

Agora, a mudança de coordenadas $\mathbf{y} = Q(t)\xi$ transforma o sistema periódico (3.2) no sistema constante

$$\dot{\xi} = B\xi. \tag{3.8}$$

De fato, derivando (3.7) em relação a t, obtemos $\dot{Y}\mathrm{e}^{-tB} = \dot{Q} + QB$. Como $\dot{Y} = AY$ e $Y\mathrm{e}^{-tB} = Q$, segue-se que $AQ = \dot{Q} + QB$. Derivando $\mathbf{y} = Q(t)\xi$ e substituindo $\dot{Q} = AQ - QB$ na igualdade $\dot{\mathbf{y}} = \dot{Q}\xi + Q\dot{\xi}$, obtemos $\dot{\mathbf{y}} = AQ\xi - QB\xi + Q\dot{\xi}$, donde

$$\dot{\mathbf{y}} - A\mathbf{y} = Q\big(\dot{\xi} - B\xi\big).$$

Vemos daí que $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ se, e somente se, $\dot{\xi} = B\xi$.

No entanto, nem sempre podemos conhecer a representação de Floquet (3.7), pela dificuldade de se obter as soluções de um sistema periódico, e sem o conhecimento desta a solução do sistema linear periódico pode não ser um problema simples.

Seja $Y(t)$ o matrizante do sistema (3.2), chamamos de *monodromia* o matrizante no momento T, isto é, $Y(T)$. Como Q é T-periódico e $T(0) = I_n$, então $Y(T) = \mathrm{e}^{BT}$.
Os autovalores da monodromia $Y(T)$ são chamados de *multiplicadores* e são dados por $\rho = \mathrm{e}^{\alpha T}$, onde α e um autovalor de da matriz constante B. O conjunto de multiplicadores é denominado *espectro*.

3.1.1 Soluções de sistemas periódicos homogêneos

Tomemos o sistema homogêneo (3.2), fazendo uma mudança de coordenadas $\mathbf{x} = Q(t)\xi$, chegaremos ao sistema

$$\dot{\xi} = B\xi \tag{3.9}$$

Sejam os autovalores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de B todos distintos, e sejam $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ os seus autovetores relacionados. Portanto existem n soluções L.I. do sistema (3.2) da forma

$$\mathbf{y}_i = \mathrm{e}^{\alpha_i t}\mathbf{q}_i(t), \tag{3.10}$$

onde $\mathbf{q}_i(t) = Q(t)\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{q}(t+T) = \mathbf{q}(t)$. Consecutivamente, os vetores $\mathbf{y}_i$ formam uma matriz fundamental. De fato, como $\dot{Y} = Q(t)\mathrm{e}^{Bt}$, então para $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{a}_i$ temos

$$\mathbf{y}_i(t) = Q(t)\mathrm{e}^{Bt}\mathbf{a}_i = Q(t)\mathrm{e}^{\alpha_i t}\mathbf{a}_i = \mathrm{e}^{\alpha_i t}\mathbf{q}_i(t). \tag{3.11}$$

Por outro lado, se o sistema (3.2) possui solução da forma (3.10), então, como $\mathbf{y}(t)$ é T-periódico, $\mathbf{y}(T) = \mathrm{e}^{\alpha_i T}\mathbf{y}(0)$. Com isso o número $\rho_i = \mathrm{e}^{\alpha_i T}$ é um multiplicador da equação (3.2), isto é, ρ_i é um autovalor da matriz $Y(T)$. Como $Y(t)$ é não-singular para todo t, pela proposição (2.2) existe uma matriz B tal que $Y(T) = \mathrm{e}^{TB}$ com o autovalor $\alpha_i = \frac{1}{T}\log\rho_i$.

No caso geral. Fazendo a mudança de coordenadas no sistema (3.2) chegando ao sistema (3.9). Seja $(\alpha - \alpha_i)^{m_i}$ $\{i = 1, \ldots, s; 1 \leq s \leq n\}$ divisores do polinômio característico de B, então cada $(\alpha - \alpha_i)^{m_i}$ possui um conjunto de m_i soluções L.I. $\{\xi_j^{(i)}\}$ da forma

$$\xi_1^{(i)} = \mathrm{e}^{\alpha_i t}\mathbf{a}_1^{(i)};\ \xi_2^{(i)} = \mathrm{e}^{\alpha_i t}(t\mathbf{a}_1^{(i)} + \mathbf{a}_2^{(i)});\ \ldots;\ \xi_{m_i}^{(i)} = \mathrm{e}^{\alpha_i t}\left(\frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}\mathbf{a}_1^{(i)} + \cdots + \mathbf{a}_{m_i-1}^{(i)}\right), \tag{3.12}$$

onde os $\mathbf{a}_j^{(i)}$ são vetores linearmente independentes. Portanto, do fato de $\det Q(t) \neq 0$ para todo t, o conjunto da união das soluções

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{s}\{\mathbf{y}^{(i)}\},$$

do sistema (3.2), definido por $\mathbf{y}_j^{(i)}(t) = Q(t)\xi_j^{(i)}(t)$, é um conjunto de soluções fundamentais. Dessa forma, definindo $\mathbf{q}_j^{(i)}(t) = Q(t)\mathbf{a}_j^{(i)}$, concluimos que a *estrutura das soluções* de (3.2) é

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1^{(i)}(t) = \mathrm{e}^{\alpha_i t}\mathbf{q}_1^{(i)}; \\ \mathbf{y}_2^{(i)}(t) = \mathrm{e}^{\alpha_i t}(t\mathbf{q}_1^{(i)} + \mathbf{q}_2^{(i)}); \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{m_i}^{(i)}(t) = \mathrm{e}^{\alpha_i t}\left(\frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}\mathbf{q}_1^{(i)} + \cdots + \mathbf{q}_{m_i-1}^{(i)}\right) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, s; m_1 + \cdots + m_s = n). \tag{3.13}$$

Definição 3.1. Sejam todos os α_i distintos (ou a multiplicidade de α_i for igual a dimensão de seu auto-espaço), então diremos que α_i é um autovalor de *tipo simples*, caso contrario será um autovalor do tipo *não-simples*.

3.2 SOLUÇÃO DE SISTEMAS PERIÓDICOS NÃO-HOMOGÊNEO

3.2.1 Soluções periódicas

Seja $Z(t)$ o matrizante do sistema adjunto (3.3), como $\mathbf{z}(t) = Z(t)\mathbf{z}(0)$, se tivermos $\mathbf{z}(t)$ T-periódico concluimos que

$$\mathbf{z}(T) = Z(T)\mathbf{z}(0) \Rightarrow [Z(T) - I_n]\mathbf{z}(0) = 0.$$

Seja d a nulidade de $Z(T) - I_n$, então a equação (3.3) possui d soluções linearmente independentes T-periódicas $\mathbf{z}_\delta(t) = Z(t)c_\delta$ onde $c_\delta = \mathbf{z}_\delta(0)$ é solução de $[Z(T) - I_n]c_\delta = 0$. A *solução geral* de (3.3) é dada por $\mathbf{z}(t) = \sum_1^d \gamma_\delta \mathbf{z}_\delta$.

Sejam $\mathbf{x}(t),\ \mathbf{z}(t)$ soluções para o sistema (3.1) e (3.3) respectivamente, então

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle = \langle A\mathbf{x} + \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{x}, -A^*\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle,$$

e, integrando de 0 à T temos

$$\langle \mathbf{x}(T), \mathbf{z}(T)\rangle - \langle \mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)\rangle = \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{z}(t)\rangle dt = T((\mathbf{f}, \mathbf{v})) \tag{3.14}$$

Lema 2. *Assuma que o sistema (3.2) possui d soluções L.I. T-periódicas $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_d$. Então*

i. O sistema adjunto (3.3) também possui d soluções L.I. T-periódicas $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_d$;

ii. O sistema não homogêneo (3.1) possui solução T-periódeca se, e somente se,

$$((\mathbf{f}, \mathbf{z}_\delta)) = 0\ \forall\ \delta = 1, \ldots, d \tag{3.15}$$

iii. Se (3.15) é satisfeito, então qualquer solução T-periódica do sistema não-homogêneo é dado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + \sum_{\delta=1}^{d} \gamma_\delta \mathbf{y}_\delta(t) \tag{3.16}$$

Demonstração. i. Seja $Y(T)$ o matrizante do sistema (3.2) e $Z(T)$ o matrizante do sistema (3.3). De (2.18) sabemos que $Z(t) = [Y(t)^*]^{-1}$, logo

$$[Z(T) - I_n] = (-Y(T)^*)^{-1}[Y(t) - I_n]$$

por hipótese a nulidade do sistema $[Y(T) - I_n]\mathbf{y} = 0$ é igual a d. Portanto a nulidade do sistema $[Z(T) - I_n]\mathbf{z} = 0$ também é d, logo o sistema (3.3) possui d soluções $\mathbf{z}_1(t), \ldots, \mathbf{z}_d(t)$ linearmente independentes, onde $\mathbf{z}_\delta(t) = Z(t)\mathbf{z}_\delta$.

ii. Considerando o sistema adjunto (3.3), pela proposição (2.3) esse sistema possui n soluções linearmente independente, portanto podemos completar o conjunto solução definido no item acima tomando as soluções $\{\mathbf{z}_{d+1}(t), \ldots, \mathbf{z}_n(t)\}$ do sistema (3.3). Seja

$$Z_1 = [\mathbf{z}_1(t)\ \ldots\ \mathbf{z}_n(t)], \tag{3.17}$$

a matriz fundamental formada por essas soluçoes.

Primeiramente iremos provar que $\mathbf{x}(t)$ é T-periódico se, e somente se

$$\langle \mathbf{x}(0), \mathbf{z}_j(T) - \mathbf{z}_j(0)\rangle = T((\mathbf{f}, \mathbf{z}_j)) \quad \forall\ j = 1, \ldots, n \tag{3.18}$$

Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução T-periódica, isto é, $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$, por (3.14) segue imediatamente. Reciprocamente, se (3.18) é verdadeiro, fazendo a diferença (3.14) menos (3.18)

$$\langle \mathbf{x}(T)-\mathbf{x}(0), \mathbf{z}_\delta(T)\rangle = 0 \ \forall \ \delta = 1,\ldots,n,$$

Como $\mathbf{z}_1(T),\ldots,\mathbf{z}_n(T)$ é uma base de $\mathbb{K}^n$, então $x(T)-x(0)=0$.
Portanto o nosso problema agora está resumido em provar que $x(0)$ é solução do sistema de equações 3.18 se, e somente se, (3.15) é verdadeiro.
Podemos reescrever o sistema (3.18) de forma matricial. Assim, nós buscamos a solução do sistema

$$P^*\mathbf{x}_0 = [Z_1(T)-Z_1(0)]^*\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}. \tag{3.19}$$

Tal que $\mathbf{b}=(T((\mathbf{f},\mathbf{z}_1)),\ldots,T((\mathbf{f},\mathbf{z}_n)))$ e, pelo fato de $[Z_1(T)-Z_1(0)]$ ter nulidade igual a d, então $[Z_1(T)-Z_1(0)]^*$ possui nulidade igual a d. Pelo *Lema* 1, o sistema (3.19) possui solução se, e somente se

$$\langle \mathbf{b}, \xi_i\rangle = 0. \quad \forall i = 1,\ldots,d,$$

onde $\xi_1,\ldots,\xi_d$ são soluções do sistema $(P^*)^*\xi = P\xi = 0$. O que é verdadeiro pois

$$\langle P^*\mathbf{x}(0), \xi_i\rangle = \langle \mathbf{x}(0), P\xi_i\rangle = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,d,$$

o que conclui o item *ii.*

iii. Sejam $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ soluções T-periodicas do sistema (3.1) em que $\xi_1=\mathbf{x}_1(0),\ \xi_2=\mathbf{x}_2(0)$. Pela fórmula de variação de parâmetro (2.20) estas soluções são dadas por

$$\mathbf{x}_1(t) = Y(t)\xi_1 + Y(t)\int_0^t Y(\tau)^{-1}\mathbf{f}(\tau)d\tau,$$
$$\mathbf{x}_2(t) = Y(t)\xi_2 + Y(t)\int_0^t Y(\tau)^{-1}\mathbf{f}(\tau)d\tau,$$

onde $Y(t)$ é o matrizante do sistêma homogêmeo. Se tomarmos a subtração dessas duas soluções teremos uma solução do sistema homogêmeo $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2=Y(t)(\xi_1-\xi_2)$. Como $\{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_d\}$ é uma base para as soluções do sistêma homogêneo, teremos então que uma solução geral T-periódica do sistema (3.1) é dada por $y(t)=x_0+\sum_{\delta=1}^{d}\gamma_\delta y_\delta$ $\square$

Lema 3. *Nas condições do lema anterior, seja (3.15) verdadeiro. Sejam* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ *e* $\{\mathbf{v}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_d(t)\}$ *vetores arbitrários tais que,* $\det[(\mathbf{y}_j(0), \mathbf{u}_k)]_1^d \neq 0$ *e* $\det[(\mathbf{y}_j(t), \mathbf{v}_k(t))]_1^d \neq 0$*, sendo* $\mathbf{u}_k \in \mathbb{K}^n$ *e* $\mathbf{v}_k$ *são funções vetoriais. As soluções* T*-periódicas do sistema (3.1) são unicamente determinadas por uma das seguintes condições*

$$\langle \mathbf{x}(0), \mathbf{y}_\delta(0) \rangle = 0; \tag{3.20}$$

$$\langle \mathbf{x}(0), \mathbf{u}_\delta \rangle = 0; \tag{3.21}$$

$$((\mathbf{x}, \mathbf{y}_\delta)) = 0; \tag{3.22}$$

$$((\mathbf{x}, \mathbf{v}_\delta)) = 0 \quad \text{com } \delta = 1, \ldots, d. \tag{3.23}$$

Em cada uma dessas condições existe uma constante $\kappa > 0$ *independente de* $\mathbf{f}(t)$ *tal que*

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \kappa |\mathbf{f}|. \tag{3.24}$$

Demonstração. Observe que se tomarmos $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{y}_\delta(0)$ a condição $\det[(\mathbf{y}_j(0), \mathbf{u}_k)]_1^d$ se tornará a matriz de Gram, como os vetores $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_d(t)$ são linearmente independentes, então $\det[(\mathbf{y}_j(0), \mathbf{y}_k(0))]_1^d \neq 0$, o mesmo acontece se tomarmos $\mathbf{v}_\delta = \mathbf{y}_\delta$. Portanto basta provar (3.20) e (3.22).

Caso (3.20): Tomemos o sistema (3.19) em que b é um vetor como definido na prova do lema 2. Como definido no lema anterior, $Z_1(t)$ é uma matriz fundamental do sistema adjunto (3.3), então por (2.14) e (2.18) chegamos a $Z_1(T) = [Y(T)^*]^{-1} Z_1(0)$, onde $Y(T)$ é o matrizante do sistema homogêneo (3.2). Desse forma podemos reescrever nosso operador P como

$$P^* = [Z_1(0)^*][Y(T)^{-1} - I_n]$$

e assim podemos reescrever o sistema (3.19) como

$$[Y(T) - I_n]\mathbf{x}(0) = [-Y(T)][Z_1(0)^*]^{-1}\mathbf{b}$$

Ora, como foi demostrado no lema 2, $\mathbf{x}(t)$ é uma solução T-periódica do sistema (3.1) se, e só se, $\mathbf{x}(0)$ é solução do sistema $[Z_1(T) - Z_1(0)]^* x(0) = b$. Como, por hipótese, a nulidade de $[Y(T) - I_n]$ é igual a d e $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_d(t)$ são uma base para as soluções T-periódicas do sistema homogêneo (3.2), temos que $[Y(T) - I_n]\mathbf{y}_\delta(0) = 0$. Pelo lema (1) parte *iii*, o sistema possui solução única determinada por $\langle \mathbf{x}(0), \mathbf{u}_\delta \rangle$. Ademais, pela observação do lema 1, existe um υ tal que

$$|\mathbf{x}(0)| \leq \upsilon| - Y(T)Z_1(0)^{*-1}||\mathbf{b}|,$$

onde υ é independente de $| - Y(T)Z_1(0)^{*-1}|$

$$|\mathbf{x}(0)| \leq \kappa_1 |\mathbf{b}| \tag{3.25}$$

em que κ_1 é independente de $\mathbf{b}$. Vejamos agora $\mathbf{b}$, seja $\zeta = max\{\|\mathbf{z}_1\|, \dots, \|\mathbf{z}_n\|\}$

$$|\mathbf{b}|^2 = T^2 \sum_{\delta=1}^{n} |((\mathbf{f}, \mathbf{z}_\delta))|^2 \leq \left(T^2 \sum_{\delta=1}^{n} \|\mathbf{z}_\delta\|^2 \right) \|\mathbf{f}\|^2 \leq nT^2\zeta^2 \|\mathbf{f}\|^2,$$

chamando $nT^2\zeta^2 = \kappa_2^2$ chegamos a desigualdade $|x(0)| \leq \kappa_1\kappa_2\|f\|$, onde κ_1, κ_2 são independente de $\mathbf{f}(t)$. Por variação de parâmetro (2.20) no intervalo $[0, T]$

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |Y(t)| \left(|\mathbf{x}(0)| + \left| \int_0^T Y(t)^{-1} \mathbf{f}(t) dt \right| \right).$$

Sabendo que a norma da integral é menor ou igual a integral das normas, podemos estimar a parte contendo a integral esta desigualdade

$$\int_0^T |Y(t)^{-1}||\mathbf{f}(t)| dt \leq \kappa_3 \|\mathbf{f}\|.$$

denominando $\kappa_4 = \sup\{|Y(t)|; 0 \leq t \leq T\}$ podemos unir as desigualdades encontradas e chegando à

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \kappa \|\mathbf{f}\| \quad \text{onde } \kappa = (\kappa_1\kappa_2 + \kappa_3)\kappa_4. \tag{3.26}$$

O caso (3.22) segue a mesma linha de raciocínio e pode ser vista nas páginas 107-109 do livro (IAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975) $\square$

4 ESTABILIDADE EM UM SISTEMA PERIÓDICO

Veremos nesse capítulo sobre estabilidade em um sistema linear periódico. Também utilizaremos a estrutura dos sistemas Hamiltonianos para fortalecer o conceito de estabilidade para além do sistema ser por si só estável. Queremos desenvolver o conceito que com uma pertubação suficientemente pequena esse sistema continue sendo estavel, isto é, o sistema é estável e todo sistema hamiltoniano em uma específica vizinhança sua também seja estável.

Finalizaremos este capítulo com a prova do teorema de *Krein* e a apresentação do teorema de *Krein-Gel'fand-Lidskii*, que mostra a condição necessária, e suficiente, para um sistema ser fortemente estável.

4.1 SISTEMA ESTÁVEL

Consideremos o sistema homogêneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{4.1}$$

Definição 4.1. Nós dizemos que um sistema linear (4.1) é estável se a origem é um equilíbrio estável em ambas as direções do tempo, isto é, dado um $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$, a solução $\mathbf{y}(t)$ (tal que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$) está contido na bola aberta $B_\epsilon(\mathbf{y_0})$, para todo tempo t.

Proposição 4.1. *A origem e um equilíbrio estável do sistema linear (4.1) se, e somente se, todas suas soluções são limitadas*

Demonstração. Suponha que a origem é um equilíbrio estável. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda solução $\mathbf{x}(t)$ com $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ tem-se $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$, para todo t.

Agora, seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução qualquer do sistema. Fixe um número posivivo b tal que $b\|\mathbf{y}(0)\| < \delta$. Então, $b\mathbf{y}(t)$ é uma solução do sistema linear (4.1) tal que $\|b\mathbf{y}(0)\| < \delta$, logo $\|b\mathbf{y}(t)\| < \epsilon$, para todo t. Por conseguinte, $\|\mathbf{y}(t)\| < \epsilon/b$, para todo t, logo, $\mathbf{y}(t)$ é limitada.

Reciprocamente, suponha que todas as soluções do sistema são limitadas. Seja n a ordem da matriz A. Então as soluções $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ com condições iniciais $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{e}_j$ são limitadas; aqui, $\mathbf{e}_j$ é o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).

Sejam $b_1, \ldots, b_n$ tais que $\|\mathbf{x}_j(t)\| \leq b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Seja $b = \max\{b_1, \ldots, b_n\}$ e então, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon/nb$.

Agora, seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ com $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$. Vamos porvar que $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$, para todo t, o que provará a estabilidade de $\mathbf{x}(t)$.

Seja $\mathbf{x}(0) = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$ e considere a solução $\mathbf{y}(t) = a_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + a_n\mathbf{x}_n(t)$. Como $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0)$, temos que $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, por unicidade das soluções. Logo,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq |a_1|\,\|\mathbf{x}_1(t)\| + \ldots + |a_n|\,\|\mathbf{x}_n(t)\| \leq |a_1|b_1 + \ldots |a_n|b_n \leq (|a_1| + \ldots + |a_n|)b.$$

Como $|a_j| \leq \|\mathbf{x}(0)\|$, segue-se que $\|\mathbf{x}(t)\| \leq nb\|\mathbf{x}(0)\| < nb\delta = \epsilon$. $\square$

Vejamos agora para o caso em que $A(t)$ é T-periódica. Tomando a mudança de coordenadas $\mathbf{y}(t) = Q(t)\xi$ no sistema (4.1), onde $Q(t)$ é uma matriz contínua T-periódica, chegaremos ao sistema $\dot{\xi} = B\xi$. Pela estrutura das soluções do sistema (4.1) vemos que $\mathbf{y}(t)$ é limitada se os autovalores forem simples, pois se não forem simples teremos conjuntos de soluções linearmente independentes determinado como em (3.13), que serão ilimitados.

Seja λ um autovalor complexo da matriz B, então tomando $\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}$, disso é possível ver que se o valor de α for diferente de zero teremos que $\mathrm{e}^{\lambda t}$ tenderá ao infinito quando t tender ao infinito.

Por outro lado, como foi visto em (3.6), o vetor $\mathbf{q}(t)$ é limitado, já que o operador $Q(t)$ é limitado por ser contínuo no compacto $[0, T]$. Portanto, concluimos que para que uma solução do sistema (4.1) seja limitada os autovalores da matriz B devem ser imaginário puro, incluindo o zero, e, além disso, as suas soluções são da forma $\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{i\beta t}\mathbf{q}(t)$, e como $\|\mathbf{y}(t)\| = |\mathrm{e}^{i\beta t}|\|\mathbf{q}(t)\| = \|\mathbf{q}(t)\|$ teremos $\mathbf{y}(t)$ limitado. Concluimos aqui que as soluções sistema (4.1) são limitadas se, e somente se, as soluções de sua redução ao sistema constante (4.1) são limitadas.

Com isso chegamos as seguintes proposições:

Proposição 4.2. *Seja A uma matriz constante, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ é estável, se e somente se, todos seus autovalores são simples e imaginário puro, incluindo o 0.*

Proposição 4.3. *Tomemos a mudança de coordenadas $\mathbf{y}(t) = Q(t)\xi$ no sistema T-periódico $\dot{\mathbf{y}}(t) = A(t)\mathbf{y}$ para chegar no sistema $\dot{\xi} = B\xi$. Então o sistema $\dot{\mathbf{y}}(t) = A(t)\mathbf{y}$ é estável se, e somente se, o sistema $\dot{\xi} = B\xi$ também é.*

4.2 SISTEMAS FORTEMENTE ESTÁVEIS

No caso geral de sistema linear, constante ou T-periódico, estável, em qualquer vizinhança sua existirá um sistema linear instável. De fato, seja $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ um sistema constante estável. Para qualquer $\epsilon > 0$ dado, podemos definir a matriz $\tilde{A} = A + \epsilon I$ tal que o sistema $\dot{\mathbf{y}} = \tilde{A}\mathbf{y}$ é instável, pois seus autovalores possuem parte real ϵ diferente de zero.

Agora tomemos o sistema linear periódico estável $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, todas as suas soluções são limitadas. Pelo teorema de Floquet 2, seja $Y(t) = Q(t)\mathrm{e}^{tB}$ o seu matrizante, pela proposição (4.3) o sistema $\dot{\xi} = B\xi$ é estável. Seja B_ϵ uma matriz constante não estável ϵ-próxima de de B. Definindo $Y_\epsilon = Q(t)\mathrm{e}^{tB_\epsilon}$ e $A_\epsilon(t) = \dot{Y}_\epsilon Y_\epsilon^{-1}$, então Y_ϵ é o matrizante do sistema $\dot{\mathbf{y}} = A_\epsilon(t)\mathbf{y}$.

Temos os seguintes sistemas $\dot{Y} = A(t)Y$ e $\dot{Y}_\epsilon = A_\epsilon(t)Y_\epsilon$, derivando em relação ao tempo os matrizantes de cada um dos sistemas e substituindo os valores de $Y, \dot{Y}, Y_\epsilon, \dot{Y}_\epsilon$ chegamos as seguintes igualdades.

$$\dot{Q}\mathrm{e}^{tB} + BQ\mathrm{e}^{tB} = AQ\mathrm{e}^{tB} \quad \text{e} \quad \dot{Q}\mathrm{e}^{tB_\epsilon} + B_\epsilon Q\mathrm{e}^{tB_\epsilon} = A_\epsilon Q\mathrm{e}^{tB_\epsilon}$$

Multiplicando à direita a primeira equação por $(Qe^{tB})^{-1}$ e a segunda por $(Qe^{tB_\epsilon})^{-1}$ chegamos as equações

$$\dot{Q}Q^{-1} + B = A \quad \text{e} \quad \dot{Q}Q^{-1} + B_\epsilon = A_\epsilon.$$

Subtraindo ambas as igualdades chegamos a $B - B_\epsilon = A - A_\epsilon$, ou seja, A_ϵ é ϵ-próximo a A. Pela proposição 4.3 o sistema $\dot{\mathbf{y}} = A_\epsilon(t)\mathbf{y}$ é instável.

Porém, para sistemas Hamiltonianos estáveis, é possível estabelecer condições nessecessarias e suficientes tais que, para um determinado δ, qualquer sistema Hamiltoniano δ-próximo será estável. Para que o conceito de estabilidade seja estendido devemos aqui trabalhar algumas definições em álgebra linear.

Seja G uma matriz *Hermitiana*, isto é $\langle G\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, G\mathbf{y}\rangle$. Definimos o *produto escalar indeterminado*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G = \langle G\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \tag{4.2}$$

que também pode ser escrita como $\mathbf{y}^* G\mathbf{x}$.

Sendo G *não singular* $(\det[G] \neq 0)$, então o produto (4.2) é *não-degenerado*, isto é, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G = 0$ para todo $\mathbf{x}$ implica que $\mathbf{y} = 0$. Note que as demais propriedades do produto interno são herdadas ao produto escalar indeterminado.

Sejam dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$, então dizemos que $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ são *G-ortogonais* se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G = 0$.

Seja A uma matriz $n \times n$. Definamos a matriz G-adjunta de A, denotada por A^+, pela identidade

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^+\mathbf{y}\rangle_G.$$

A matriz G-adjunta de A é dada pela expressão $A^+ = G^{-1}A^*G$. De fato, como G é Hermitiana, temos

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G = \langle GA\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle GAG^{-1}G\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle G\mathbf{x}, G^{-1}A^*G\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, G^{-1}A^*G\mathbf{y}\rangle_G. \tag{4.3}$$

Assim, dizemos que uma matriz é G-Hermitiana se

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle_G,$$

e W é G-antiHermitiana ou G-Hamiltoniana, se

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = -\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle_G.$$

Portanto, como $\langle W\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, W^+\mathbf{y}\rangle_G$, segue que:

Uma matriz W é G-Hermitiana se $W^+ = W$ e W é G-Hamiltoniana se $W^+ = -W$.

Definição 4.2. Seja A uma matriz quadrada complexa de ordem n, dizemos que A é *G-unitária* se

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle_G = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Ou ainda $A^+A = I$, onde I representa a matriz identidade de ordem n.

Segue de G ser Hermitiana e de (4.2) que se A é uma matriz G-unitária, então

$$A^*GA = G. \tag{4.4}$$

Lema 4. *Sejam ρ_1, ρ_2 autovalores de uma matriz G-unitária A de ordem n (o caso $\rho_1 = \rho_2$ não é excluído) e $\eta^\dagger(\rho_1),\ \eta^\dagger(\rho_2)$ representem seus subespaços raiz respectivos. Se*

$$\rho_1\overline{\rho_2} \neq 1. \tag{4.5}$$

Então os espaços $\eta^\dagger(\rho_1)$ e $\eta^\dagger(\rho_2)$ são G-ortogonais, isto é, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \eta^\dagger(\rho_1)$ e $\mathbf{y} \in \eta^\dagger(\rho_2)$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ autovetores de A tais que $\mathbf{a} \in \eta^\dagger(\rho_1)$ e $\mathbf{b} \in \eta^\dagger(\rho_2)$, isto é

$$(A - \rho_1 I_n)^{m_1}\mathbf{a} = 0, \qquad (A - \rho_2 I_n)^{m_2}\mathbf{b} = 0,$$

para algum m_1, m_2 natural.

Iremos provar por indução. Para $m_1 + m_2 = 2$ temos $m_1 = m_2 = 1$. Como A é G-unitária, pela definição $\langle A\mathbf{a}, A\mathbf{b}\rangle_G = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G$, portanto

$$\rho_1\overline{\rho_2}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G,$$

logo $(1 - \rho_1\overline{\rho_2})\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G = 0$. Por hipótese $\rho_1\overline{\rho_2} \neq 1$, o que significa que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G = 0$. Agora para $m_1 + m_2 \geq 3$. Assumindo que para $m_1 + m_2 < M$ é verdadeiro, vamos provar para $m_1 + m_2 = M$. Tomemos $(A - \rho_1 I)\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ e $(A - \rho_2 I)\mathbf{b} = \mathbf{b}'$, então por hipótese do lema

$$(A - \rho_1 I)^{m_1 - 1}\mathbf{a}' = 0, \qquad (A - \rho_2 I)^{m_2 - 1}\mathbf{b}' = 0.$$

E por hipótese indutiva temos $\langle \mathbf{a}', \mathbf{b}'\rangle_G = 0$, $\langle \mathbf{a}', \mathbf{b}\rangle_G = 0$ e $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}'\rangle_G = 0$, substituindo os valores de $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$ temos

$$0 = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}'\rangle_G = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G - \rho_1\langle \mathbf{a}, A\mathbf{b}\rangle_G - \overline{\rho_2}\langle A\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G + \rho_1\overline{\rho_2}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G; \tag{4.6}$$

$$0 = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}\rangle_G = \langle A\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G - \rho_1\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G; \tag{4.7}$$

$$0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}'\rangle_G = \langle \mathbf{a}, A\mathbf{b}\rangle_G - \overline{\rho_2}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G. \tag{4.8}$$

Logo, aplicando os valores de $\langle A\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G,\ \langle \mathbf{a}, A\mathbf{b}\rangle_G$ encontrados nas equações (4.7) e (4.8), respectivamente, na equação (4.6) chegamos à equação $(1 - \rho_1\overline{\rho_2})\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G = 0$ o que implica $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G = 0$. Concluindo nossa prova. $\square$

OBS 4.1. No caso de A ser G-Hamiltoniana, temos $\langle A\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_G = -\langle \mathbf{a}, A\mathbf{b}\rangle_G$. Portanto, com as mesmas condições do lema 4, apenas mudando o fato $\rho_1\overline{\rho_2} \neq 1$ por $\rho_1 + \overline{\rho_2} \neq 1$ terermos $\eta^\dagger(\rho_1)$ G-ortogonal ao $\eta^\dagger(\rho_2)$. A prova segue o mesmo raciocínio da prova do lema 4.

Lema 5. *Seja A uma matriz G-unitária. Então*

i. Se $\rho \in S^1$ é um autovalor não simples de A, então existe um vetor $\mathbf{v}$ tal que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

ii. Se $\rho \notin S^1$ e um autovalor da matriz A, então existe um autovetor $\mathbf{v}$ a ele relacionado tal que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

Demonstração. i. Como ρ não é simples, então o subespaço $\mathcal{B}_\rho$ relacionado a ele é não diagonalizável, portanto existe uma base cíclica de $\mathcal{B}_\rho$ com dimensão maior ou igual a 2. Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{B}_\rho$ vetores os quais $A\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$ e $A\mathbf{w} = \rho\mathbf{w} + \mathbf{v}$. Como A é G-unitária, então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_G = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle_G = \rho\bar{\rho}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_G + \rho\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G.$$

Ora, como ρ está contido na esfera unitária temos $|\rho| = 1$, então $0 = (1 - |\rho|^2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_G = \rho\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G$.

ii. Sendo $\mathbf{v}$ é um autovetor de A, temos

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v}\rangle_G = |\rho|^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G.$$

Portanto $(1-|\rho|^2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G = 0$, como ρ não está contiddo na esfera unitária, então $(1-|\rho|^2) \neq 0$, logo $\rho\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G = 0$ $\square$

Definição 4.3. Seja $\rho \in S^1$ um autovalor da matriz G-unitária A. Nós dizemos que ρ é um autovalor de *primeira espécie* se, para todos seus autovetores temos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G > 0$. Se para todos os autovetors relacionados a ρ tivermos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G < 0$, então dizemos que ρ é um autovalor de *segunda espécie*.

Os autovalores de primeira e segunda espécies é dito que são *definidos*. Já se existe pelos menos um vetor $\mathbf{v}$ tal que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_G = 0$ então ρ é chamado de *indefinido*, ou de *tipo misto*

4.2.1 Estabilidade forte

Definição 4.4. Dizemos que um sistema Hamiltoniano T-periódico $\dot{\mathbf{y}}(t) = X(t)\mathbf{y}$ é *fortemente estável* se existe um $\epsilon > 0$ tal que para qualquer sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{y}} = \tilde{X}(t)\mathbf{y}$ T-periódico, com $\|X(t) - \tilde{X}(t)\| < \epsilon$, é estável.

Tomemos a matriz simplética padrão $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Como J é anti-Hermetiana podemos multiplica-la por $-i$ de modo que $G = -iJ$ seja uma matriz hermetiana não singular, portanto podemos definir o nosso produto escalar indeterminado como

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = -i\langle J\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle. \tag{4.9}$$

Dessa maneira vemos que a matriz Hamiltoniana é G-*Hamiltoniana*, isto é, seja $\dot{\mathbf{z}} = H(t)\mathbf{z}$ um sistema Hamiltoniano, a matriz Hamiltoniana $H(t) = JS(t), S(t)^* = S(t)$, sendo $G = -iJ$, podemos reescrever o sistema Hamiltoniano como $\dot{\mathbf{z}} = W(t)\mathbf{z}$, onde $W = iGS$.

Lema 6. *O matrizante $Z(t)$ do sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{z}} = W(t)\mathbf{z}$ é uma matriz G-unitária para todo t.*

Demonstração. Seja $Z^+(t)$ matriz G-adjunta do matrizante $Z(t)$. Vamos derivar o produto Z^+Z. Como $\dot{Z} = W(t)Z$, então $\dot{Z}^+ = -Z^+W$

$$\frac{d}{dt}(Z^+Z) = (\dot{Z}^+Z) + (Z^+\dot{Z}) = (-Z^+W)Z + Z^+(WZ) = 0. \tag{4.10}$$

Portanto Z^+Z é uma constante, e como $Z(0) = I_n$, logo $Z(t)$ é G-unitária. □

Proposição 4.4. *Dado um $\gamma > 0$ existe um $\eta > 0$ tal que se $\|A(t) - A_0(t)\| < \eta$, então $\|Z(t) - Z_0(t)\| < \gamma$ para todo $t \in [0, T]$. Onde $Z(t)$ e $Z_0(t)$ são os matrizantes dos sistemas T-periódicos $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = A_0(t)\mathbf{x}$, respectivamente.*

A prova pode ser encontrada nas páginas 85-87 do livro (IAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975)

Proposição 4.5. *Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores da matriz quadrada complexa A com multiplicidades $p_1, \ldots, p_k$, respectivamente. Seja $r > 0$ tal que todos as bolas fechadas*

$\overline{B_r(\lambda_j)}, j = 1, \ldots, k$ *sejam dois a dois disjuntas. Então existe um número* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que qualquer matriz complexa* B *de mesma ordem de* A *com* $\|B - A\| < \delta$ *possui* p_j *autovalores nas bolas abertas* $B_r(\lambda_j), j = 1, \ldots, k$.

Sendo $p(\lambda),\ q(\lambda)$ os polinômios característicos de A e B, respectivamente, podemos com algumas manipulações para chegar na seguinte desigualdade $|q(\lambda) - p(\lambda)| \leq |p(\lambda)|$. Então segue do teorema de Rouché que $q(\lambda) = (q(\lambda) - p(\lambda)) + p(\lambda)$ possui o mesmo número de zeros em $B_r(\lambda_j)$. A prova dessa proposição é feita em detalhes em (ALEXANDERIAN, 2013)

Seja A uma matriz G-unitária e seja $\{\rho_i\}$ o espectro da matriz A. Consecutivamente, o espectro de A^* é $\{\overline{\rho_i}\}$ e o espectro de A^{-1} é $\{\rho_i^{-1}\}$. Por (4.4) temos que como A é uma matriz G-unitária, então $A^*GA = G$, fazendo algumas manipulações encontramos as igualdades

$$A = G^{-1}A^{*-1}G \quad \text{e} \quad A^* = GA^{-1}G^{-1}.$$

Logo, ao calcular os seus respectivos espectros,iremos perceber que o conjunto $\{\overline{\rho_i}\}$ coincide com o conjunto $\{\rho_i^{-1}\}$. Consequentimente, o conjunto $\{\rho_i\}$ coincide com o conjunto $\{\overline{\rho_i}^{-1}\}$, isto é, se ρ é um autovalor da matriz A, então $\overline{\rho}^{-1}$ também será. Se $|\rho_i| \neq 1$ então ρ_i e $\overline{\rho_i}^{-1}$ são simétricos (no sentido de inversão) em relação ao círculo unitário. Dessa forma concluimos com a seguinte afirmação: *O espectro de uma matriz* G*-unitária é simétrico em relação ao círculo unitário.*

Teorema 3 (Krein). *Seja* X_0 *uma matriz* G*-unitária de ordem* $2n$. *Seja* ρ_0 *um autovalor de* X_0 *definido e de multiplicidade* r. *Então existe constantes positivas* ϵ *e* δ *tal que, qualquer matriz* G*-unitária* X *com* $\|X - X_0\| < \delta$, *todos os autovalores de* X *com* $\|\rho - \rho_0\| < \epsilon$ *estão contidos em* S^1 *e são simples.*

Demonstração. Por absurdo vamos assumir que ρ_0 é um autovalor multiplo de X_0 tal que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_G \neq 0$ para todo $\mathbf{v}$ em seu auto-espaço, e que a sequência $\{X_n\}$ de matrizes G-unitárias tende à X_0 com autovaores ρ_n tendendo a ρ_0 de modo que ou $|\rho_n| \neq 1$ ou $|\rho_n| = 1$ e não simples.

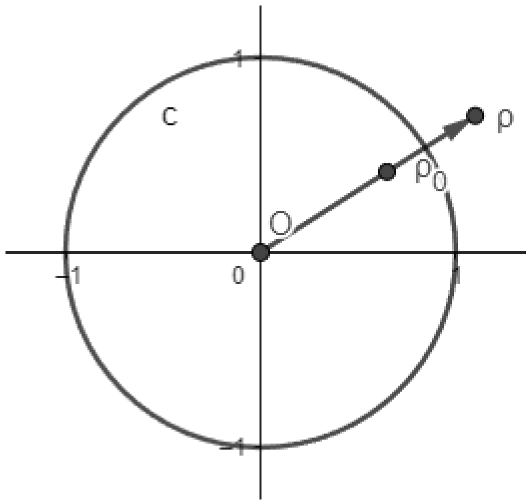
Pelo lema 5 se algumas das hipóteses citadas acima for verdadeira, então existe um autovetor normatizado $\mathbf{v}_n$ relacionado a ρ_n tal que $\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle_G = 0$ e $\|\mathbf{v}_n\| = 1$. Pela compaticidade de S^1, existe uma sequência $\{\mathbf{v}_n\}$ com uma subsequência $\{\mathbf{v}_{nj}\}$ convergindo a $\mathbf{v}$ quando $j \to \infty$. Portanto, quando j tende ao infinito teremos $X_{nj} \to X_0,\ \rho_{nj} \to \rho_0,\ \mathbf{v}_{nj} \to \mathbf{v}$ e $\langle \mathbf{v}_{nj}, \mathbf{v}_{nj} \rangle_G = 0$, ou seja,

$$X_0\mathbf{v} = \rho_0\mathbf{v}, \quad \|\mathbf{v}\| = 1 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_G = 0.$$

Contradizendo nossa hipótese que ρ_0 é definido, portanto ρ_n é definido e seu auto-espaço é diagonalizável. □

Façamos agora algumas observações sobre os multiplicadores do sistema Hamiltoniano (4.1). Como já vimos, os autovalores de uma matriz G-unitária é simétrico ao círculo unitário.

Figura 1 – ρ e $\rho_0 = \overline{\rho}^{-1}$ simétricos



Pelo lema 6 a monodromia do sistema hamiltoniano (4.1) é G-unitária, portanto os multiplicadores do sistema (4.1) satisfazem a definição 4.3, ou seja, seus multiplicadores são de primeira espécie, segunda espécie ou de tipo misto.

Os multiplicadores ρ e $\overline{\rho}^{-1}$ de um sistema G-unitário estão em simetria em relação ao círculo unitário. Ou seja, estão localizados em S^1 ou em diferentes lados do círculo unitário, um na parte externa e outro na parte interna do círculo. No primeiro caso teriamos um sistema estável, no segundo o sistema seria instável.

Se o sistema (4.1) possui multiplicadores, ρ e $\overline{\rho}^{-1}$, que coincidem em ρ_0 no círculo unitário, ambos multiplicadores possuem as mesmas multiplicidade e a mesma dimensão de seus autoespaços. De fato, se $(\lambda-\rho)^m$ é um divisor do polinômio

$$p(\lambda)=\lambda^{2n}+a_1\lambda^{2n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

então $(\lambda-\overline{\rho}^{-1})^m$ também será.

Seja (4.1) um sistema Hamiltoniano periódico estável. É possível, em alguns casos, que através de uma pequena deformação os multiplicadores ρ e $\overline{\rho}^{-1}$, que estão contidos em S^1, se movam para fora do sistema sem violar a simetria em torno de S^1 do espectro de (4.1). Porém tal deformação não é sempre possível, apenas será no caso em que sistema não for fortemente estável.

Sejam $\{\rho_1,\ldots,\rho_k\}$ multiplicadores de multiplicidade $p_1,\ldots,p_k$, distintos, definidos e pertencentes a S^1, do sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{x}}=A_0(t)\mathbf{x}$ com monodromia $Z_0(T)$. Seja $A(t)$ uma matriz próxima de $A_0(t)$ no sentido da norma e seja $Z(T)$ sua monodromia.

Do fato de todos os multiplicadores ρ_j serem definidos e em S^1, então todos são simples, pois se não forem simples pelo lema 5 existiria um autovetor $\mathbf{v}$ tal que $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=0$, o que violaria a condição de ser definido. Portanto o sistema é estável.

Pela proposição 4.5, dado um $\epsilon>0$ tal que as bolas fechadas de raio ϵ centradas nos multiplicadores de $A_0(t)$ sejam dois a dois disjuntas, então existe um $\delta=\delta(\epsilon)>0$ tal que todos os matrizantes $Z(t)$ δ-próximos e de mesma ordem de $Z_0(t)$, possuiem multiplicadores na bola aberta de raio ϵ centrado nos multiplicadores de $Z(T)$. Já pela proposição 4.4, ao fazemos $\|A(t)-A_0(t)\|$ tender a zero teremos teremos $\|Z(t)-Z_0(t)\|$ tendendo a zero.

Então, dado um $\epsilon>0$ tal que as bolas fechadas $\overline{B_\epsilon(\lambda_j)}$ sejam disjuntas dois a dois, podemos aproximar $A(t)$ de $A_0(t)$ de tal forma que os seus matrizantes sejam δ-próximos, e consequentemente os os autovalores de $Z(T)$ estejam contidos em $B_\epsilon(\rho_j)$. Pelo teorema de Krein 3, como os multiplicadores do sistema $\dot{\mathbf{x}}=A_0(t)\mathbf{x}$ são definidos, então os autovalores de $Z(T)$ são simples e estão contidos em S^1. Ou seja, o sistema $\dot{\mathbf{x}}=A(t)\mathbf{x}$ é estável. A afirmação acima implica na seguinte proposição de autoria de Krein

Proposição 4.6. *Se todos os multiplicadores da equação (4.1) são definidos e estão contidos no círculo unitário, então o sistema é fortemente estável.*

Essa condição não é só necessária como também é suficiente, que foi provada posteriormente por *Gel'fand-Lidskii*.

Teorema 4 (**Krein-Gel'fand-Lidskii**). *Um sistema Hamiltoniano T-periódico contínuo é fortemente estável se, e somente se, todos seus multiplicadores e são definidos e estão contidos no círculo unitário.*

A prova desse teorema pode ser vista no livro (IAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975), ou para o caso real no livro (CABRAL; DIAS, 2023).

REFERÊNCIAS

ALEXANDERIAN, A. On continuous dependence of roots of polynomials on coefficients. In: . [s.n.], 2013. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:1224936>.

CABRAL, H. E.; DIAS, L. B. *Normal Forms and Stability of Hamiltonian Systems*. [S.l.]: Springer, 2023.

IAKUBOVICH, V.; STARZHINSKII. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. [S.l.]: Halstead press, 1975. (Linear Differential Equations with Periodic Coefficients, v. 1). ISBN 9780706514803.

MEYER, K.; OFFIN, D. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 9783319536910.