



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WILLIKAT BEZERRA DE MELO

**Sobre a relação entre a vorticidade e a velocidade microrrotacional: um argumento
heurístico**

Recife

2022

WILLIKAT BEZERRA DE MELO

Sobre a relação entre a vorticidade e a velocidade microrrotacional: um argumento heurístico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Cilon Valdez Ferreira Perusato

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

M528s Melo, Willikat Bezerra de
 Sobre a relação entre vorticidade e velocidade microrrotacional: um
 argumento heurístico / Willikat Bezerra de Melo. – 2022.
 74 f.:

 Orientador: Cilon Valdez Ferreira Perusato.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2022.
 Inclui referências e apêndices.

 1. Análise. 2. Fluido micropolar. 3. Comportamento assintótico. 4. Efeito de
 sincronização. I. Perusato, Cilon Valdez Ferreira (orientador). II. Título.

 515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2024 - 24

WILLIKAT BEZERRA DE MELO

***SOBRE A RELAÇÃO ENTRE VORTICIDADE E VELOCIDADE MICRORROTACIONAL: UM
ARGUMENTO HEURÍSTICO***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 30/09/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família, Luciana e Marina, que sempre estiveram ao meu lado durante toda a trajetória. Em particular, minha esposa, Luciana, que a amo muito, teve um papel demasiadamente importante, uma vez que seu apoio foi imprescindível para que eu conclua esta etapa de minha vida.

Não poderia deixar de agradecer ao meu orientador, Cilon Perusato, por ter me orientado de forma inenarrável. Uma pessoa simples, simpática, paciente, com um verdadeiro espírito perquiridor e que ama de paixão seu trabalho, e o faz de forma exímia.

Agradeço também a todos os meus professores do programa de mestrado, em particular a Cilon Perusato, pelas suas excelentes aulas e listas de exercícios, e ao professor Felipe Wergete, que foi meu orientador acadêmico e lecionou com maestria a disciplina de Introdução às EDPs.

Gostaria de agradecer os professores Wilberclay Melo (UFS) e Felipe Wergete (UFPE) por se disponibilizarem a ler e contribuir com minha dissertação.

Também agradeço aos meus amigos Daniel, Rafael Cavalcanti e Hugo que estavam ao meu lado resolvendo as listas de exercícios.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro dado ao longo deste mestrado.

RESUMO

Nesta dissertação propomos uma derivação alternativa de um efeito físico espontâneo envolvendo as soluções do sistema micropolar. Tal efeito, obtido recentemente por R. Guterres, W. Melo, C. Perusato e P. Zingano (GUTERRES et al.,), expressa uma forte sincronia (para tempo grande) entre a vorticidade de fluido e sua velocidade de microrrotação. Daremos um argumento heurístico para a obtenção desta propriedade. Além disso, vários resultados auxiliares de interesse são mostrados em detalhe nos capítulos iniciais do presente trabalho: por exemplo, varias propriedades fundamentais para a equação do calor são provadas em rigor. A partir daí, o sistema de equações diferenciais parciais que modela fluidos micropolares é estabelecido e discutido em profundidade. Aplicações práticas deste efeito são apresentadas, incluindo sua utilização na análise das soluções de fluxos de fluidos micropolares. Foram obtidas estimativas L^2 para as soluções do problema e para suas derivadas, o que fornece estimativas $\dot{H}^s$. Concluimos com uma discussão sobre possíveis desenvolvimentos futuros e áreas de pesquisa relacionadas.

Palavras-chave: fluido micropolar; comportamento assintótico; efeito de sincronização.

ABSTRACT

In this dissertation, we propose an alternative derivation of a spontaneous physical effect involving the solutions of the micropolar system. This effect, recently obtained by R. Guterres, W. Melo, C. Perusato, and P. Zingano (GUTERRES et al.,), expresses a strong synchrony (for a long time) between the vorticity of the fluid and its microrotation velocity. We will provide a heuristic argument to obtain this property. Additionally, several auxiliary results of interest are shown in detail in the initial chapters of this work: for example, several fundamental properties for the heat equation are given in detail. So, the system of PDEs which models the micropolar system is established and discussed. Practical applications of this effect are presented, including its use in the analysis of the micropolar flows. We also obtained L^2 estimates for solutions to the problem and their derivatives, which gives us some estimates on the $\dot{H}^s$ norm. We conclude with a discussion on possible future developments and related research areas.

Keywords: micropolar flows; asymptotic behavior; Synchronization effect.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES	12
2.1	TRANSFORMADA DE FOURIER	12
2.2	DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER EM L^2	17
2.3	DECAIMENTO EM L^2 PARA A EQUAÇÃO DO CALOR	20
3	SISTEMA MICROPOLAR	30
3.1	INTRODUÇÃO AO SISTEMA MICROPOLAR E RESULTADOS PRELIMINARES	30
3.2	DECAIMENTO DAS VELOCIDADES	44
3.3	DECAIMENTO DAS DERIVADAS DAS VELOCIDADES	50
4	VORTICIDADE VS MICRORROTAÇÃO	62
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A – APÊNDICE A - RESULTADOS DE ANÁLISE E TEORIA DA MEDIDA	67
	APÊNDICE B – APÊNDICE B - ESPAÇO DE SOBOLEV HOMOGENEO $\dot{H}^s$	73

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação vamos mostrar detalhadamente algumas propriedades assintóticas (para tempo grande) envolvendo as soluções das equações Micropolares em duas e três dimensões. Dessa forma, sejam $(\mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{w}(\cdot, t)) \in X$ soluções globais fracas do sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= (\mu + \chi) \Delta \mathbf{u} + 2\chi \nabla \times \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} &= \gamma \Delta \mathbf{w} + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\chi \nabla \times \mathbf{u} - 4\chi \mathbf{w} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\cdot, t) &= 0,\end{aligned}$$

com dados iniciais $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, sendo X denotado por

$$X = L^\infty((0, \infty), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0, \infty), \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^n)) \cap C_w^0([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^n))$$

Não deixemos de mencionar que $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ denota o campo de velocidade, $\mathbf{w}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ descreve a velocidade microrrotacional e $p(x, t) \in \mathbb{R}$ a pressão total do fluido no ponto (x, t) . Já as constantes $\mu > 0$, $\gamma > 0$, $\kappa > 0$ e $\chi > 0$ são a viscosidade cinemática, a viscosidade de giro, também de giro e a viscosidade de vórtice, respectivamente.

Este sistema modela alguns fenômenos físicos tais como escoamentos, como por exemplo circulação sanguínea, cristais líquidos, lubrificantes, etc. Veja por exemplo o Capítulo 3, Sistema Micropolar.

Para uma intuição Física vale observar que se o campo de velocidade de um fluido é $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, então seu rotacional é

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u} = (D_2 u_3 - D_3 u_2, D_3 u_1 - D_1 u_3, D_1 u_2 - D_2 u_1) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

é chamado de campo de vorticidade do fluxo. Seja o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, tomemos um ponto $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$ próximo de $\mathbf{x}$. Pelo Teorema de Taylor, temos

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^2).$$

O polinômio de grau 2 tem informação sobre $\mathbf{y}$, contudo, apenas a parte linear já será mais do que suficiente para o estudo em questão. Sendo assim, escrevamos

$$D = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \text{ e } S = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T]$$

então $\nabla \mathbf{u} = D + S$. O que acarreta em

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + D(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^2).$$

Disto tudo é fácil verificar que a expressão de S é

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

e que

$$S \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \xi \times \mathbf{h}.$$

E por fim, a solução da equação diferencial linear

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{1}{2} \xi \times \mathbf{h}$$

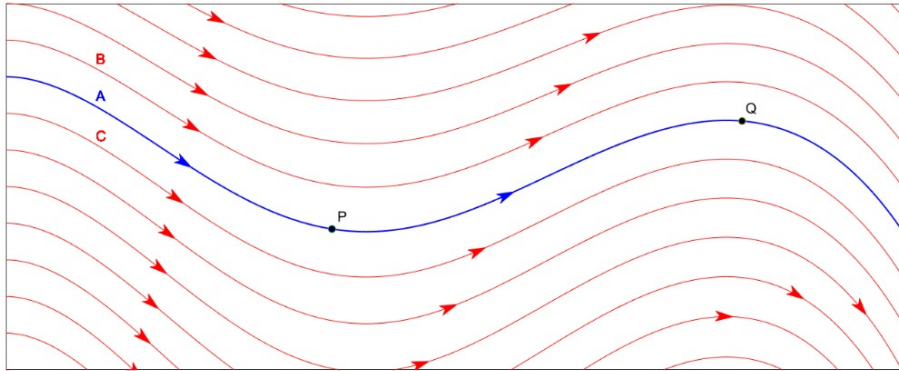
é dada por

$$\mathbf{h}(t) = R(t, \xi(x)) \mathbf{h}(0),$$

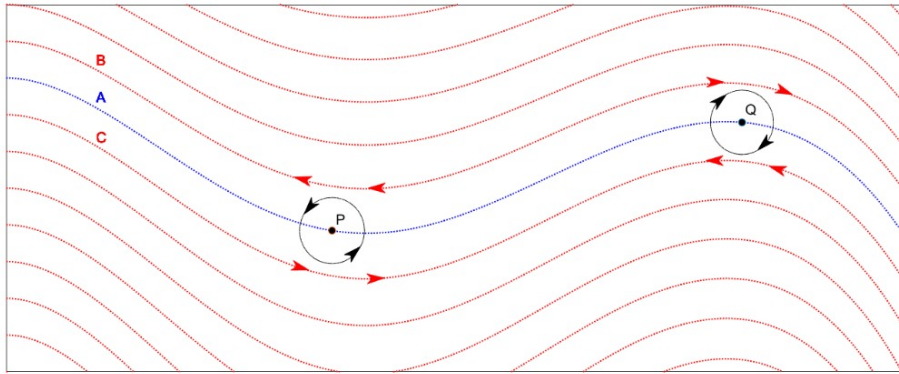
onde $R(t, \xi(x))$ é a matriz que representa uma rotação de um ângulo t em torno do eixo $\xi(\mathbf{x})$.

Veja (CHORIN; MARSDEN; MARSDEN, 1990) e (GUTERRES et al., 2022).

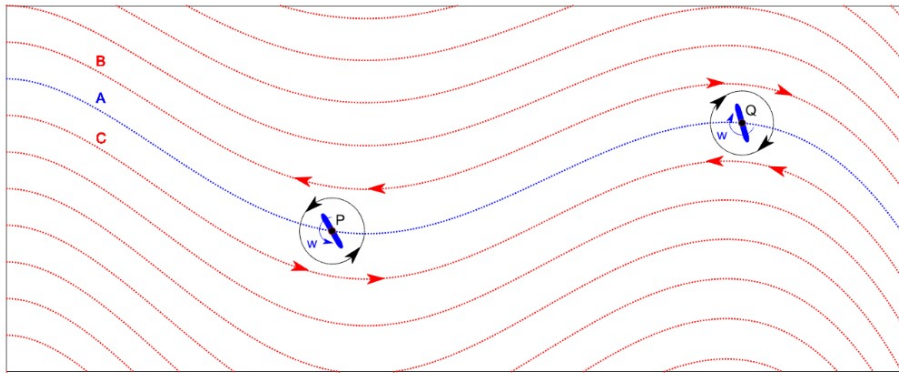
A figura abaixo descreve uma situação.



Um instante de tempo t de um determinado fluxo bidimensional, mostrando dois pontos, P e Q , com vorticidade positiva e negativa (linha de corrente azul).



Um observador sentado na partícula P veria partículas vizinhas circulando no sentido anti-horário (círculos pretos). Em Q , a circulação local parece ser no sentido horário.



Nos fluxos micropolares, a circulação local e a microrrotação tendem se sincronizar por causa da ação do vórtice de modo que $\mathbf{w} \approx \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$ para $t \gg 1$.

Um observador sentado na partícula P veria partículas vizinhas circulando no sentido anti-horário (círculos pretos). Em Q , a circulação local parece ser no sentido horário.

As principais propriedades assintóticas de tal sistema serão abordadas com mais detalhes e clareza no Capítulo 3, no espírito de (GUTERRES; NUNES; PERUSATO, 2019; PERUSATO, 2018). Para isto, vamos discorrer sobre alguns resultados prévios (envolvendo a equação do calor) no capítulo 3 que serão imprescindíveis para o entendimento final. Mais precisamente, no capítulo 3, provaremos em detalhe que:

$$t^{\frac{m}{2}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

e

$$t^{\frac{m+1}{2}} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

ao $t \rightarrow \infty$, para cada $m \geq 0$.

Após demonstrarmos estes resultados, propomos um argumento heurístico para a derivação de uma propriedade física importante, recentemente obtida em (GUTERRES et al.,). A saber:

Seja $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ solução clássica e suave globalmente do sistema acima, onde ϵ definido por

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} + \epsilon(x, t).$$

Então tem-se, quando $t \rightarrow \infty$,

$$(i) \quad \|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-3/2}), \text{ e}$$

$$(ii) \quad \|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-9/2}).$$

Ou seja, à medida que o tempo passa, tem-se $\mathbf{w} \approx \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$. O efeito de sincronia é ainda mais forte quando as viscosidades μ e γ são iguais, porém tal resultado não será abordado aqui, veja (GUTERRES et al., 2022). O argumento para a derivação das propriedades (i) e (ii) será heurístico, no sentido que, iremos supor que as EDP's dadas acima se comportam como EDO's e, a partir daí, forneceremos algumas estimativas clássicas da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias para obter as propriedades (i) e (ii). A prova rigorosa envolve estimativas finas de regularidade eventual para as soluções e vários resultados técnicos descritos envolvendo a monotonicidade das derivadas em L^2 . O argumento preciso encontra-se em (GUTERRES et al.,) e está submetido. Uma consequência deste resultado é que o ganho de $\frac{1}{2}$ na taxa de decaimento para o campo $\mathbf{w}$ é de fato optimal.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo iremos mostrar algumas propriedades qualitativas envolvendo as soluções da equação do Calor. Antes, precisaremos de alguns resultados (bem conhecidos) sobre a transformada de Fourier, que lembraremos abaixo.

2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Aqui vamos apresentar o conceito da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente vamos perceber que tal conceito é imprescindível para achar soluções de EDP's.

Consideraremos neste momento funções complexas, e $\bar{z}$ denota o conjugado do número complexo z .

Definição 1. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, defina a transformada de Fourier $\mathcal{F}u = \hat{u}$ por

$$\hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

e sua transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}u = \check{u}$ por

$$\check{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} u(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Onde $|e^{\pm ix \cdot y}| = 1$, $i = \sqrt{-1}$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Neste momento é de razoável interesse considerarmos a função Φ definida¹ da seguinte forma

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 1. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Então valem as seguintes afirmações:

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}.$$

¹ A função Φ é conhecida como a *solução fundamental da equação do calor* ou simplesmente como *núcleo do calor*. Tal equação será explorada com mais detalhes nas páginas subsequentes.

Demonstração. (i) Temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $z = x/\sqrt{4t}$ e aplicando o Teorema de Fubini², Teorema A 2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-z_1^2} \cdot \dots \cdot e^{-z_n^2}) dz \\ &= \pi^{-n/2} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i \\ &= \pi^{-n/2} \prod_{i=1}^n (\pi^{1/2}) \\ &= \pi^{-n/2} \cdot \pi^{n/2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} e^{-t|x|^2} dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1 y_1} e^{-tx_1^2} dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_n y_n} e^{-tx_n^2} dx_n \right). \quad (2.3) \end{aligned}$$

Portanto, precisamos calcular a seguinte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_k y_k} e^{-tx_k^2} dx_k,$$

com $1 \leq k \leq n$.

Agora façamos um complemento de quadrados na expressão $-tx_k^2 + ix_k y_k$, e temos

$$\begin{aligned} -tx_k^2 + ix_k y_k &= -t \left[x_k^2 - \frac{ix_k y_k}{t} + \left(\frac{iy_k}{2t} \right)^2 - \left(\frac{iy_k}{2t} \right)^2 \right] \\ &= -t \left[x_k - \left(\frac{iy_k}{2t} \right) \right]^2 + t \left(\frac{iy_k}{2t} \right)^2. \end{aligned}$$

Destarte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_k y_k} e^{-tx_k^2} dx_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t[x_k - (iy_k/2t)]^2} e^{-y_k^2/4t} dx_k.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $z = x_k - \left(\frac{iy_k}{2t} \right)$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t[x_k - (iy_k/2t)]^2} e^{-y_k^2/4t} dx_k = e^{-y_k^2/4t} \int_{\Gamma} e^{-tz^2} dz,$$

² Veja no apêndice o enunciado do Teorema de Fubini

onde Γ é a reta no plano complexo dada por

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}; y = x_k - \frac{iy_k}{2t}, x_k \in \mathbb{R}\}.$$

Sem perda de generalidade, assumamos $y_k < 0$. De forma similar também poderíamos assumir $y_k > 0$. Assim,

$$\int_{\Gamma} e^{-tz^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{-tz^2} dz$$

onde Γ_R é o segmento de reta no plano complexo dado por

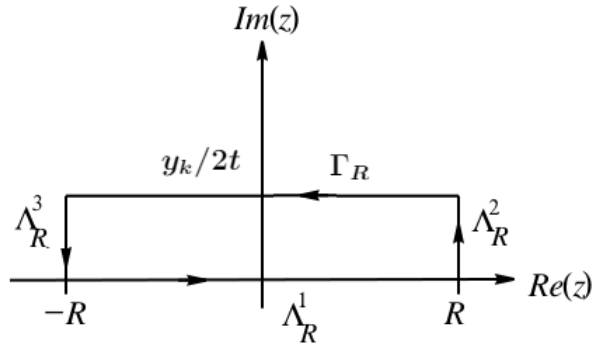
$$\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C}; z = x_k - \frac{iy_k}{2t}, |x_k| \leq R\}.$$

Agora definamos Λ_R^1 , Λ_R^2 e Λ_R^3 , como mostra a figura abaixo, da seguinte forma, respectivamente:

$$\Lambda_R^1 := \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq R\},$$

$$\Lambda_R^2 := \{z \in \mathbb{C}; z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, x = R, 0 \leq y \leq -\frac{y_k}{2t}\} \text{ e}$$

$$\Lambda_R^3 := \{z \in \mathbb{C}; z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, x = -R, 0 \leq y \leq -\frac{y_k}{2t}\}$$



Assim, pelo Corolário A 1 do Teorema A 1 de Cauchy-Goursat, sabemos que

$$\int_C e^{-tz^2} dz = 0,$$

onde C é a curva fechada dada por $C = \Gamma_R \cup \Lambda_R^1 \cup \Lambda_R^2 \cup \Lambda_R^3$ com orientação no sentido anti-horário. Portanto, temos

$$\int_{\Gamma_R} e^{-tz^2} dz = \int_{\Lambda_R} e^{-tz^2} dz,$$

onde a integral do lado direito da igualdade é a integral de linha sobre a curva dada por $\Lambda_R = \Lambda_R^3 \cup \Lambda_R^1 \cup \Lambda_R^2$ com a orientação indicada acima. Portanto,

$$\int_{\Gamma} e^{-tz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_R} e^{-tz^2} dz.$$

Contudo, para $R \rightarrow +\infty$ temos

$$\int_{\Lambda_R^2} e^{-tz^2} dz = 0, \quad \int_{\Lambda_R^3} e^{-tz^2} dz = 0$$

e

$$\int_{\Lambda_R^1} e^{-tz^2} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx.$$

Logo, temos

$$\int_{\Gamma} e^{-tz^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx.$$

Consequentemente, por mudança de variável, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_k y_k} e^{-tx_k^2} dx_k &= e^{-y_k^2/4t} \int_{\Gamma} e^{-tz^2} dz \\ &= e^{-y_k^2/4t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx \\ &= e^{-y_k^2/4t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} \frac{dm}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{e^{-y_k^2/4t}}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por fim, de (2.3) e (2.4) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx &= \left(\frac{e^{-y_1^2/4t}}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi} \right) \dots \left(\frac{e^{-y_n^2/4t}}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi} \right) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{t^{n/2}} e^{-(y_1^2 + \dots + y_n^2)/4t} \\ &= \left(\frac{\pi}{t} \right)^{t/2} e^{-|y|^2/4t}. \end{aligned}$$

□

Vamos agora estender as definições (2.1) e (2.2) para as funções $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1 (Teorema de Plancherel). Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.5)$$

Demonstração. Primeiro notemos que se $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned} |v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} v(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix \cdot y}| \cdot |v(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)| dx \\ &= \|v\|_{L^1} < \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim, se $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) \hat{w}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y) w(y) dy. \quad (2.7)$$

Uma vez que ambas expressões equivalem a

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} v(x) w(y) dx dy.$$

Como visto no Lema 1 parte (ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

Dessa forma, se definirmos $v_\varepsilon := e^{-\varepsilon|x|^2}$, para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned} \hat{v}_\varepsilon(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} e^{-\varepsilon|x|^2} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y - \varepsilon|x|^2} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Assim, temos, para $\varepsilon > 0$, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y) e^{-\varepsilon|y|^2} dy = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx. \quad (2.8)$$

Agora, seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $v(x) := \bar{u}(-x)$, onde $\bar{u}$ é o conjugado complexo de u . Defina também $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ por

$$w := (u * v)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(y - x) dx.$$

Observe, por Fubini e mudança de variável, que

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(y) &= (\widehat{u * v})(y) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} (u * v)(x) dx \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z+(x-z) \cdot y)} \int_{\mathbb{R}^n} u(z) v(x-z) dz dx \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot y} u(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z) \cdot y} v(x-z) dx \right) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot y} u(z) dz \hat{v}(y) \\
 &= (2\pi)^{n/2} \hat{u}(y) \hat{v}(y) \in L^\infty(\mathbb{R}^n).
 \end{aligned}$$

Mas

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} \bar{u}(-x) dx = \bar{\hat{u}}(y),$$

Já que w é contínua e pela parte (i) do Lema 1, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx = (2\pi)^{n/2} w(0).$$

Além disso, uma vez que $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} |\hat{u}|^2 \geq 0$, deduz-se tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ em (2.8) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y) dy = (2\pi)^{n/2} w(0).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx.$$

Já a demonstração para $\check{v}$ é demasiadamente similar.

□

2.2 DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER EM L^2

Tendo em vista as igualdades (2.4), podemos definir as transformadas de Fourier de uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como segue: escolha uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ com $u_k \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sendo assim, conforme as igualdades (2.4),

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_k - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

e assim $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Estas sequências consequentemente convergem para um limite que definimos ser $\mathcal{F}u = \hat{u}$:

$$\hat{u}_k \rightarrow \hat{u} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

A definição de $\hat{u}$ não depende da aproximação da sequência $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Evidente que de forma análoga podemos definir $\check{u}$.

Baseado no que foi apresentado, vamos agora ver um teorema, que algumas propriedades da transformada de Fourier, útil que vamos utilizar em alguns exemplos aqui explorado.

Teorema 2. Sejam $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então

$$(i) \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} dy.$$

$$(ii) \widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u} \text{ para cada multi-índice } \alpha \text{ tal que } D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$(iii) \text{ Se } u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n), \text{ então } \widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \hat{v}.$$

$$(iv) u = \check{w}, \text{ onde } w = \hat{u}.$$

Demonstração. (i) Sejam $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então

$$\|u + \alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\widehat{u + \alpha v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{u} + \alpha \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

A partir daí podemos expandir e deduzir que

$$\begin{aligned} \|u + \alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\hat{u} + \alpha \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \implies \int_{\mathbb{R}^n} |u + \alpha v|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} + \alpha \hat{v}|^2 dy \\ \implies \int_{\mathbb{R}^n} (u + \alpha v)(\overline{u + \alpha v}) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u} + \alpha \hat{v})(\overline{\hat{u} + \alpha \hat{v}}) dx \\ \implies \int_{\mathbb{R}^n} (u + \alpha v)(\bar{u} + \bar{\alpha} \bar{v}) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u} + \alpha \hat{v})(\bar{\hat{u}} + \bar{\alpha} \bar{\hat{v}}) dx. \end{aligned}$$

O que implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + |\alpha v|^2 + \bar{\alpha} u \bar{v} + \alpha \bar{u} v) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{u}|^2 + |\alpha \hat{v}|^2 + \bar{\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}} + \alpha \bar{\hat{u}} \hat{v}) dy,$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{\alpha} u \bar{v} + \alpha \bar{u} v) dx = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\alpha \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{\hat{u}} \hat{v} + \bar{\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}}) dy,$$

obtendo assim, pelo Teorema de Plancherel 1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{u} v + \bar{\alpha} u \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{\hat{u}} \hat{v} + \bar{\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}}) dy.$$

Agora, tomando $\alpha = 1$ e $\alpha = i$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\bar{u} v + u \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{\hat{u}} \hat{v} + \hat{u} \bar{\hat{v}}) dy \quad (2.9)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (i\bar{u}v - iu\bar{v})dx = \int_{\mathbb{R}^n} (i\hat{\bar{u}}\hat{v} - i\hat{u}\hat{\bar{v}})dy, \quad (2.10)$$

onde (2.10) implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\bar{u}v - u\bar{v})dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{\bar{u}}\hat{v} - \hat{u}\hat{\bar{v}})dy. \quad (2.11)$$

Assim, tomando a diferença de (2.9) e (2.11), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\hat{\bar{v}}dy.$$

(ii) Se u é suave e tem suporte compacto, calculemos

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha u}(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} D^\alpha u(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ix \cdot y}) (iy)^\alpha u(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} (iy)^\alpha u(x) dx \\ &= (iy)^\alpha \hat{u}(y). \end{aligned}$$

(iii) Tal propriedade foi comentada e demonstrada no Teorema de Plancherel 1.

(iv) Agora, observemos que se $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{u}v dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\check{v} dx,$$

já que para $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, ambos os lados da equação são

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} u(y) v(x) dx dy.$$

Devemos notar também que

$$\check{v} = \overline{\widehat{\bar{v}}}.$$

Por conseguinte, podemos aplicar a afirmação (i) para calcular

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\hat{u}})v dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\check{v} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\overline{\widehat{\bar{v}}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v} dx. \end{aligned}$$

Isto vale para todo $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e assim segue a afirmação (iv).

□

2.3 DECAIMENTO EM L^2 PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

A transformada de Fourier é uma técnica especialmente poderosa para estudos de equações diferenciais parciais lineares com coeficiente constantes.

A equação do calor descreve a evolução no tempo da densidade u de alguma substância em uma região $\mathcal{U}$ (ou temperatura, que pode ser vista como densidade de calor ou energia térmica).

Nesta seção vamos discutir algumas propriedades importantes e interessantes para a equação do calor. Então consideremos o seguinte problema de Cauchy para a equação do calor,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (2.12)$$

Sabemos que este problema de Cauchy tem solução única, veja abaixo a equação (2.16), solução deste problema.

Vamos enunciar alguns resultados a respeito desta solução.

Teorema 3. Seja $u(x, t)$ solução de (2.12), então $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. A ideia aqui é aplicar a transformada de Fourier, (2.1) a saber, nas duas equações do problema (2.12). Note que para $\widehat{u_{x_j x_j}}$ temos, pelo Teorema 2 parte (ii), que $\widehat{u_{x_j x_j}} = -y_j^2 \hat{u}$, consequentemente $\widehat{\Delta u} = \sum_{j=1}^n \widehat{u_{x_j x_j}} = \sum_{j=1}^n \widehat{u_{x_j x_j}} = \sum_{j=1}^n (-y_j^2 \hat{u}) = -|y|^2 \hat{u}$. Assim, para as duas equações de (2.12) ficamos com

$$\begin{cases} \widehat{u_t}(y, t) = -|y|^2 \hat{u}(y, t) \\ \hat{u}(y, 0) = \widehat{u_0}(y), \end{cases}$$

o que nos dá

$$\hat{u}(y, t) = e^{-|y|^2 t} \widehat{u_0}(y).$$

Sabemos, pelo Teorema de Plancherel, que $\|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$. Por conse-

guinte,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y, t)|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|y|^2 t} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy \\
&= \int_{|y| \leq \delta} e^{-2|y|^2 t} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy + \int_{|y| > \delta} e^{-2|y|^2 t} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Aqui dividimos a região de integração $\mathbb{R}^n$ em duas regiões, uma bola fechada $|y| \leq \delta$, para um certo $\delta > 0$ a ser escolhido, e o complementar da bola fechada. Para a primeira integral podemos garantir, pelo Lema A 1, que existe um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_{|y| \leq \delta} e^{-2|y|^2 t} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.14)$$

uma vez que $e^{-2|y|^2 t} |\widehat{u_0}(y)|^2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Já para a segunda região, $|y| > \delta$ é fácil estimar tal integração, pois a função $e^{-2|y|^2 t}$ é decrescente. Assim, também novamente pelo Teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|y| > \delta} e^{-2|y|^2 t} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy &\leq e^{-2\delta^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy \\
&= e^{-2\delta^2 t} \|\widehat{u_0}(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= e^{-2\delta^2 t} \|u_0(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Sendo assim, (2.13), através de (2.14) e (2.15), fica

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \frac{\varepsilon}{2} + e^{-2\delta^2 t} \|u_0(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Portanto, para finalizar, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ pequeno e $t_0 \geq 0$, suficientemente grande, nas condições aqui propostas, tal que para todo $t \geq t_0$, tem-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que mostra o resultado. □

Seria interessante se conseguíssemos explicitar a solução u da equação do calor (2.12). Mas aplicando a transformada de Fourier fica fácil, como já feito na parte inicial do Teorema 3. Assim, obtemos

$$\begin{cases} \widehat{u_t} = -|y|^2 \hat{u}(y, t) \\ \hat{u}(y, 0) = \widehat{u_0}(y), \end{cases}$$

o que nos dá

$$\hat{u}(y, t) = e^{-|y|^2 t} \hat{u}_0(y).$$

Consequentemente, por (iii) e (iv) do Teorema 2

$$\hat{u} = e^{-t|y|^2} \hat{u}_0,$$

e por conseguinte,

$$u = \frac{u_0 * F}{(2\pi)^{n/2}},$$

onde $\hat{F}(y, t) = e^{-t|y|^2}$. Dessa forma, também usando o Lema 1 parte (ii), temos

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \left(e^{-t|y|^2} \right)^\vee \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} e^{-t|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\pi}{t} \right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo F em $u = \frac{u_0 * F}{(2\pi)^{n/2}}$ obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0 * F}{(2\pi)^{n/2}}(x, t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) F(x - y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \end{aligned} \tag{2.16}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Sendo assim, acabamos de obter a solução para o Problema de Cauchy (2.12).

Teorema 4 (Igualdade de Energia para a Equação do Calor). Seja $u(x, t)$ a solução de (2.12), então para cada $t_0 \geq 0$ tem-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

para todo $t \in [t_0, \infty)$.

Demonstração. Inicialmente precisaremos definir uma função auxiliar de corte

$$\zeta_R := \begin{cases} e^{\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{\epsilon\sqrt{1+R^2}}, & \text{se } |x| < R, \\ 0, & \text{se } |x| \geq R \end{cases}$$

para $R > 0$ e $\epsilon > 0$.

Uma vez definido ζ_R , vamos multiplicar a equação do calor (2.12) por $2u\zeta_R$ e obteremos

$$2uu_t\zeta_R = 2u\Delta u\zeta_R.$$

Integrando agora de t_0 a t e em $\mathbb{R}^n$, e usando o fato $2uu_t = \frac{\partial}{\partial t}(u^2)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e Pelo Teorema de Fubini, Teorema A 2, obteremos

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot, \tau)u_t(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot, \tau)\Delta u(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau. \quad (2.17)$$

Para a integral do primeiro membro da equação acima temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot, \tau)u_t(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u(\cdot, \tau)u_t(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{|x|\geq R} 2u(\cdot, \tau)u_t(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u(\cdot, \tau)u_t(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau \\ &= \int_{|x|<R} \int_{t_0}^t 2u(\cdot, \tau)u_t(\cdot, \tau)\zeta_R d\tau dx \\ &= \int_{|x|<R} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau}(u^2(\cdot, \tau))u_t(\cdot, \tau)\zeta_R d\tau dx \\ &= \int_{|x|<R} \zeta_R(u^2(\cdot, t) - u^2(\cdot, t_0))dx \end{aligned} \quad (2.18)$$

Já para a integral do segundo membro de (2.17), usando a Segunda Identidade de Green, Teorema A 3, temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot, \tau)\Delta u(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u(\cdot, \tau)\Delta u(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau \\ &= 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{|x|=R} u(\cdot, \tau)\zeta_R \nabla \cdot u(\cdot, \tau) dS(x) \right. \\ &\quad \left. - \int_{|x|<R} \nabla u(\cdot, \tau) \nabla [u(\cdot, \tau)\zeta_R] d\tau \right) \\ &= -2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u(\cdot, \tau) \nabla [u(\cdot, \tau)\zeta_R] dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Notemos agora que $\nabla[u(x)v(x)] = \nabla u(x)v(x) + u(x)\nabla v(x)$. Assim, (2.19) fica

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u(\cdot, \tau)\Delta(\cdot, \tau)\zeta_R dx d\tau = -2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u(\cdot, \tau)[\nabla u(\cdot, \tau)\zeta_R + u(\cdot, \tau)\nabla \zeta_R] dx d\tau. \quad (2.20)$$

Destes fatos, a equação (2.17) se expressa por

$$\int_{|x|<R} \zeta_R(u^2(\cdot, t) - u^2(\cdot, t_0))dx = -2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u [\nabla u \zeta_R + u \nabla \zeta_R] dx d\tau \quad (2.21)$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t) \zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \zeta_R dx d\tau \\ &= \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \langle 2u \nabla u, \nabla u \zeta_R \rangle dx d\tau \end{aligned}$$

acarretando em

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t) \zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R dx d\tau \\ &= \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \langle \nabla u^2, \nabla u \zeta_R \rangle dx d\tau \end{aligned}$$

o que implica pela Identidade de Green, Teorema A 3,

$$\begin{aligned} \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t) \zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R dx d\tau &= \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx + \int_{t_0}^t \left(\int_{|x|<R} u^2 \Delta \zeta_R dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{|x|=R} u^2 \langle \nabla \zeta_R, \eta \rangle dS(x) \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.22)$$

acarretando em

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t) \zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R dx d\tau \\ &= \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx + \int_{t_0}^t \left(\int_{|x|<R} u^2 \Delta \zeta_R dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{|x|=R} u^2 \langle -\epsilon e^{-\epsilon \sqrt{1+R^2}} \frac{x}{1+R^2}, \eta \rangle dS(x) \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

o que implica, pois $\eta = x/R$,

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t) \zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R dx d\tau \\ &= \int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx + \int_{t_0}^t \left(\int_{|x|<R} u^2 \Delta \zeta_R dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{|x|=R} u^2 \left(-\epsilon e^{-\epsilon \sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} dS(x) \right) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Neste momento nos resta tomar $R \rightarrow \infty$, com o devido cuidado com o termo da fronteira.

Note também que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ acarreta $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Tal consequência vem do Lema A

4. Assim,

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx d\tau < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema de Fubini 2 e escrevendo em coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx d\tau &= \int_{t_0}^t \int_0^\infty \int_{|x|=r} u^2 dS(x) dr d\tau \\
 &= \int_0^\infty \int_{t_0}^t \int_{|x|=r} u^2 dS(x) d\tau dr \\
 &< \infty.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Logo, pelo Lema A 5, temos

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t \int_{|x|=R_k} u^2 dS(x) d\tau \right] = 0.$$

Então, existe uma subsequência R_k tal que

$$\lim_{R_k \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t \int_{|x|=R_k} u^2 dS(x) d\tau \right] = 0. \tag{2.26}$$

Ademais, como

$$\epsilon \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} e^{\epsilon\sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} u^2(\cdot, \tau) dS d\tau \leq \epsilon \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} u^2(\cdot, \tau) dS d\tau, \tag{2.27}$$

uma vez que $e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} \leq 1$ e $\sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} \leq 1$, temos, tomando $R_k \rightarrow \infty$ em (2.22), usando o Teorema da Convergência Dominada nos termos $\int_{|x|<R} u^2(\cdot, t) \zeta_R dx$ e $\int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx$ de (2.22), e usando o fato de (2.26) e (2.27) no termo de fronteira de (2.22) e, por fim, usando o Teorema da Convergência Monótona em $\int_{|x|<R} u^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx$ e $\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} u^2 \langle \nabla \zeta_R, \eta \rangle dx d\tau$ de (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} u^2(\cdot, t) dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} |\nabla u|^2 dx d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}) u^2(\cdot, \tau) dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} u^2(\cdot, t_0) dx.
 \end{aligned}$$

Todavia,

$$|u^2 \Delta(e^{\epsilon\sqrt{1+|x|^2}})| \leq \epsilon u^2,$$

e supondo $0 \leq \epsilon \leq 1$, sem perda de generalidade, temos então, tomando $\epsilon \rightarrow 0$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no termo que contém o laplaciano da igualdade acima, e também usando o Teorema da Convergência Monótona nos temos restantes, obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para todo $t \in [t_0, \infty)$. □

Corolário 1. Vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^m \|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^m \|D^{m+1} u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ &= \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{m-1} \|D^m u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \end{aligned}$$

para todo inteiro $m \geq 1$.

Demonstração. Aqui precisaremos de uma função de corte. Seja $\zeta \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\zeta(x) := \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ \Phi(x), & 1 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2, \end{cases}$$

onde $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 qualquer. Agora, definamos

$$\zeta_R = \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right),$$

para $R > 0$. Sendo assim, devemos derivar a equação do problema de Cauchy (2.12) com relação a x_i e em seguida multiplicarmos por $2(t - t_0)\zeta_R D_i u$, obtendo

$$2(t - t_0)\zeta_R D_i u (D_i u)_t = 2(t - t_0)\zeta_R D_i u \Delta(D_i u).$$

Integrando em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \zeta_R (D_i u)_\tau^2 d\tau = \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t 2(\tau - t_0) \zeta_R D_i u \Delta(D_i u) d\tau dx.$$

No lado esquerdo, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i u(x, t))^2 dx &= \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t 2(\tau - t_0) \zeta_R D_i u \Delta(D_i u) d\tau dx \\ &\quad + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i u(x, t))^2 d\tau dx. \end{aligned}$$

Já para o primeiro termo do lado direito, devemos integrar por partes, acarretando em

$$\begin{aligned} (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i u(x, t))^2 dx &= - \int_{|x| < 2R} \langle \nabla \zeta_R, \nabla (D_i u)^2 \rangle dx \\ &\quad - \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R |\nabla(D_i u)|^2 dx \\ &\quad + \int_{|x|=2R} 2\zeta_R D_i u \nabla(D_i u) d\sigma(x) \\ &\quad + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i u(x, t))^2 d\tau dx, \end{aligned}$$

onde $\int_{|x|=2R} 2\zeta_R D_i u \nabla(D_i u) d\sigma(x) = 0$.

Novamente, integrando por partes em $\mathbb{R}^n$ no primeiro termo do lado direito da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i u(x, t))^2 dx + \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R |\nabla(D_i u)|^2 dx \\ &= \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R (D_i u)^2 dx - \int_{|x| < 2R} \langle \nabla \zeta_R, \eta \rangle (D_i u)^2 d\sigma(x) \\ &+ \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i u(x, \tau))^2 d\tau dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Observe que, $\nabla \zeta_R = 0$, para todo $|x| > 2R$. Sabemos também que, em particular, $\zeta_R \in C^1$, logo,

$$\nabla \zeta_R \Big|_{|x|=2R} = \lim_{|x| \rightarrow 2R^+} \nabla \zeta_R = 0,$$

portanto, a equação (2.28) fica

$$\begin{aligned} & (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i u(x, t))^2 dx + \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R |\nabla(D_i u)|^2 dx \\ &= \int_{|x| < 2R} \Delta \zeta_R (D_i u)^2 dx + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i u(x, \tau))^2 d\tau dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Observe ainda que o laplaciano de ζ atinge o máximo em $|x| < 2R$, uma vez que $\zeta \in C^2$. Por conseguinte,

$$|\Delta \zeta_R (D_i u)^2| < \frac{M}{R^2} |D_i u|^2,$$

em $|x| < 2R$, onde $M > 0$ é o máximo de $\Delta \zeta$. Ademais, pelo Teorema 4,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|^2 dx < \infty.$$

Logo, quando $R \rightarrow \infty$, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada no primeiro termo direito da equação (2.29) no primeiro termo do lado esquerdo e no último termo do lado direito, usando o Teorema (4), e o Teorema da Convergência Monótona no termo restante, a equação vira, somando em i ,

$$(t - t_0) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t) \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Assim, para constatar as igualdades seguintes, basta aplicarmos o operador $2\zeta_R(t - t_0^2 D_i D_j u D_i D_j)$ em ambos os membros da equação do calor definido no problema (2.12) e usar o mesmo tipo de argumento anterior. Dessa forma, pela indução, isto é, aplicando o operador

$$2\zeta_R(t - t_0)^m D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_m} u D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_m}$$

em ambos os membros da equação do calor definido no problema (2.12) e repetindo os argumentos anteriores, segue o corolário, para $m \in \mathbb{Z}_+^*$. $\square$

Teorema 5. Seja $u(x, t)$ a solução de (2.12), então

$$t^{\frac{m}{2}} \|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \longrightarrow 0$$

quando $t \longrightarrow \infty$, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Vimos no Teorema 3 que $u(x, t)$ sendo solução de (2.12), então $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$, então, ou seja, dado $\epsilon > 0$, então existe $N > 0$ tal que $t > N$ implica $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$. O que acarreta, pela Igualdade de Energia, Teorema 4,

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ &= \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq \epsilon^2, \end{aligned} \tag{2.30}$$

ou seja,

$$\int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Pelo Corolário 1, temos

$$\begin{aligned} (t - t_0) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq (t - t_0) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde fica claro que

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2(t - t_0)},$$

implicando em

$$t \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2} \frac{t}{t - t_0}.$$

Agora note que $\frac{t}{t - t_0} \leq 2$ para $t \geq 2t_0$. Assim,

$$t^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \epsilon.$$

o que mostra o resultado para $m = 1$. Pelo fato $\int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \frac{\epsilon^2}{2}$ e novamente pelo Corolário 1, tem-se,

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \frac{\epsilon^2}{2}.$$

E ainda pelo mesmo Corolário 1, obtém-se

$$t^2 \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^2 \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = (t - t_0)^2 \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Por conseguinte, como $\left(\frac{t}{t - t_0} \right)^2 \leq 2$ para $t \geq \sqrt{2}t_0$, temos

$$t \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon.$$

Por conseguinte, como $\left(\frac{t}{t - t_0} \right)^2 \leq 2$ para $t \geq \sqrt{2}t_0$, temos

$$t \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon.$$

O que prova o Teorema para $m = 2$. Já para $m \geq 3$ inteiro, basta repetir o argumento de forma análoga. Para $m = 0$ foi demonstrado no Teorema 3. Portanto, segue o teorema para todo $m \in \mathbb{Z}_+$. □

3 SISTEMA MICROPOLAR

3.1 INTRODUÇÃO AO SISTEMA MICROPOLAR E RESULTADOS PRELIMINARES

Ao generalizar as equações de Navier-Stokes considerando as microestruturas das partículas do fluido, nos deparamos com o modelo para fluidos micropolares. Porém, a teoria inicial de existência de soluções para as equações de Navier-Stokes, ou seja, sem a rotação da microestrutura, foi desenvolvida pelo matemático francês J. Leray (LERAY, 1934). Como consequência dos resultados obtidos por Leray, pode-se obter a existência de $t_* > 0$, dependendo dos dados μ, ν, γ, χ e $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0)$, fornecidos tal que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_*, \infty))$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([t_*, \infty), H^m(\mathbb{R}^n))$$

para cada $m \geq 0$ inteiro. Ademais, o método de compacidade, apresentado por Leray, serve de modelo de soluções fracas globais para EDP's não lineares.

Vamos considerar então o sistema micropolar em duas e três dimensões. Dessa forma, sejam $(\mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{w}(\cdot, t)) \in X$ soluções globais fracas do sistema

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = (\mu + \chi) \Delta \mathbf{u} + 2\chi \nabla \times \mathbf{w} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} = \gamma \Delta \mathbf{w} + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\chi \nabla \times \mathbf{u} - 4\chi \mathbf{w} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\cdot, t) = 0, \quad (3.3)$$

com dados iniciais $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0) \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, sendo X denotado por

$$X = L^\infty((0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2((0, \infty), \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)) \cap C_w^0([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$$

Não deixemos de mencionar que $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ denota o campo de velocidade, $\mathbf{w}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ descreve a velocidade microrrotacional e $p(x, t) \in \mathbb{R}$ a pressão total do fluido no ponto (x, t) . Já as constantes $\mu > 0$, $\gamma > 0$, $\kappa > 0$ e $\chi > 0$ são a viscosidade cinemática, a viscosidade de giro, também de giro e a viscosidade de vórtice, respectivamente.

Vale comentar aqui algumas notações. Os espaços de campo em $L_\sigma^2(\mathbb{R}^n)$, denotam o espaço de campos em $\mathbb{R}^n$ em L^2 com divergentes nulos, isto é, para o nosso caso:

$$L_\sigma^2(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2); u_i \in L^2(\mathbb{R}^2), \text{ para } 1 \leq i \leq 2 \text{ com } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

ou

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^3) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3); u_i \in L^2(\mathbb{R}^3), \text{ para } 1 \leq i \leq 3 \text{ com } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

As letras em negrito usaremos para denotar grandezas vetoriais, em geral, $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$. Vamos denotar $|\cdot|$ a norma Euclideana em $\mathbb{R}^n$. Já $\nabla p \equiv \nabla p(\cdot, t)$ o gradiente espacial de $p(\cdot, t)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, e $\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n D_i u_i$ é o divergente espacial de $\mathbf{u}(\cdot, t)$; similarmente, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u}$. Para $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, com $1 \leq q \leq \infty$, denotaremos a norma tradicional do espaço de Lebesgue $\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)$, podo-se,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q}.$$

Neste mesmo contexto, temos para as derivadas de ordem m , com $m \geq 1$,

$$\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_{j_1} \cdots D_{j_m} u_i(x, t)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Denota-se por $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max \{ \|u_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; 1 \leq i \leq n \}$ o supremo essencial de $\mathbf{u}(\cdot, t)$. Similarmente para $\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, para $m \geq 1$. Temos também as normas $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}_i(\xi)|^2 d\xi,$$

onde $\hat{u}_i$ denota a transformada de Fourier de u_i . E de forma alternativa para a norma do sup de $\mathbf{u}(\cdot, t)$, temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty = \sup \text{ess} \{ |\mathbf{u}(x, t)|_2; x \in \mathbb{R}^n \}.$$

O estudo precursor da estrutura micropolar é feito pelo engenheiro turco-estadunidense, Eringen. Em seu trabalho intitulado "*Theory of micropolar fluids*", (ERINGEN, 1966), foi proposto um sistema que modela fluidos com propriedades especiais que não capturadas pelas equações de Navier-Stokes. As equações governantes desse sistema são dadas por (3.1), (3.2) e (3.3). Tais fluidos representam, fisicamente, escoamentos que contém partículas rígidas como uma certa estrutura suspensa em um meio viscoso.

Este determinado estudo modela muito bem vários fenômenos oriundos de fluidos complexos, como por exemplo, circulação sanguínea, cristais líquidos, lubrificantes, etc. A deformação destas partículas é ignorada. Em decorrência disto, existem diversas aplicações envolvendo problemas em engenharia para tais fluidos. Para mais informações detalhadas sobre o estudo e aplicações deste tipo de fluidos veja as seguintes referências: (LUKASZEWICZ, 1999), (MEKHEIMER; KOT, 2008) e (SHARMA, 2012).

Definamos inicialmente que

$$\|(\mathbf{p}, \mathbf{q})\|_{L^2(\Omega)}^2 := \|\mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.4)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 6. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ soluções de Leray do sistema Micropolar, então

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\mu \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ & + 2\kappa \int_{t_0}^t \|\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

para todo $t > t_0 > t_*$.

Demonstração. Faremos primeiro o *CASO 3D*, para isto, vamos inicialmente definir uma função de corte.

Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ não crescente tal que

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & \forall r \leq 0 \\ 0, & \forall r \geq 1. \end{cases}$$

Definamos também $\phi_R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_R(x) = \phi(|x| - R)$. De modo que $\phi_R(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, tal que $|x| \leq R$ e $\phi_R(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, tal que $|x| \geq R + 1$.

Escrevendo a equação (3.1) em coordenadas, temos que

$$u_{i,t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i + D_i p = (\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 D_j D_j u_i + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j w_k, \quad (3.5)$$

onde $\epsilon_{i,j,k}$ é o símbolo de Levi-Civita, isto é,

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ é permutação par;} \\ -1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ é permutação ímpar;} \\ 0, & \text{se } i = j, \text{ ou } j = k, \text{ ou } i = k. \end{cases}$$

Seja $t_0 > t_*$, multiplicando a equação (3.5) por $2\phi_R u_i$ e integrando em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\phi_R u_i u_{i,\tau} dx d\tau + \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\phi_R u_i u_j D_j u_i dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\phi_R u_i D_i p dx d\tau \\ & = (\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\phi_R u_i D_j D_j u_i dx d\tau + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\phi_R \epsilon_{ijk} u_i D_j w_k dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aplicando Fubini no primeiro termo, e o fato de que ϕ_R tem suporte compacto, podemos escrever (3.6) como

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R+1}} \phi_R \int_{t_0}^t (u_i^2)_\tau d\tau dx + \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R u_j D_j (u_i^2) dx d\tau + 2 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R u_i D_i p dx d\tau \\ &= 2(\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R u_i D_j D_j u_i dx d\tau + 4\chi \sum_{j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R \epsilon_{ijk} u_i D_j w_k dx d\tau. \end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo no primeiro termo, e integrando por partes as demais integrais, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R+1}} \phi_R (u_i^2(\cdot, t) - u_i^2(\cdot, t_0)) dx - \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} D_j \phi_R u_j (u_i^2) dx d\tau \\ & - \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R D_j u_j (u_i^2) dx d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} D_i \phi_R u_i p dx d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R D_i u_i p dx d\tau \\ &= -2(\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} D_j \phi_R u_i D_j u_i dx d\tau - 2(\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R D_j u_i D_j u_i dx d\tau \\ & - 4\chi \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} D_j \phi_R \epsilon_{ijk} u_i w_k dx d\tau - 4\chi \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{B_{R+1}} \phi_R D_j \epsilon_{ijk} u_i w_k dx d\tau \end{aligned}$$

É relevante observar que não há termos de fronteira, uma vez que $\phi_R(x) = 0$ para todo x tal que $|x| = R + 1$. Tomando $R \nearrow \infty$, todos os termos que envolvem as derivadas de ϕ_R vão a zero, pois $D_j \phi_R = 0$ para todo x tal que $|x| < R$ ou $|x| > R + 1$. Logo, quando $R \nearrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} & \|u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \|u_i(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_j u_j (u_i^2) dx d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_i u_i p dx d\tau \\ &= -2(\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_j u_i D_j u_i dx d\tau - 4\chi \sum_{j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{ijk} w_k D_j u_i dx d\tau. \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^3 D_j u_j = 0$, a equação torna-se

$$\begin{aligned} & \|u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (D_j u_i)^2 dx d\tau \\ &= \|u_i(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_i u_i p dx d\tau + 4\chi \sum_{j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{kji} w_k D_j u_i dx d\tau. \end{aligned}$$

Tomando o somatório em i , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \|u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j u_i)^2 dx d\tau \\ &= \sum_{i=1}^3 \|u_i(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^3 D_i u_i \right) p dx d\tau + 4\chi \sum_{i,j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{kji} w_k D_j u_i dx d\tau. \end{aligned}$$

Usando as definições de norma e o fato de que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &= \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\chi \sum_{i,j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Repetindo as contas de forma análoga para a equação (3.2) em coordenadas

$$w_{i,t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j w_i = \gamma \sum_{j=1}^3 D_j D_j w_i + D_i \sum_{j=1}^3 D_j w_j + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j u_k - 4\chi w_i,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &+ \kappa \int_{t_0}^t \|\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 8\chi \int_{t_0}^t \|\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &= \|\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\chi \sum_{i,j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k dx d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

Somando as equações (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &+ 2\gamma \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 2\kappa \int_{t_0}^t \|\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 8\chi \int_{t_0}^t \|(\mathbf{w} \cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &= \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 8\chi \sum_{i,j,k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k dx d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora vamos estimar o termo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k.$$

Fazemos isso usando a desigualdade de Cauchy com $\varepsilon = 1$, Teorema A 5, e a identidade

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} w_i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j u_k dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |w_i| \left| \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j u_k \right| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} w_i^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j u_k \right)^2 dx \\
&= \|\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j u_k \sum_{l,m}^3 \epsilon_{ilm} D_l u_m \right) dx \\
&= \|\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,k,l,m=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \right) D_j u_k D_l u_m dx \\
&= \|\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,k,l,m=1}^3 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) D_j u_k D_l u_m dx \\
&= \|\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j u_k)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k=1}^3 D_j u_k D_k u_j dx \\
&= \|\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2
\end{aligned}$$

Aplicando esta estimativa à equação (3.9) temos que

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&+ 2\gamma \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 2\kappa \int_{t_0}^t \|\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 8\chi \int_{t_0}^t \|\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&= \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 8\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k dx d\tau \\
&\leq \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 8\chi \left| \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} w_i D_j u_k dx d\tau \right| \\
&\leq \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 8\chi \int_{t_0}^t \left(\|\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right) d\tau \\
&= \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 8\chi \int_{t_0}^t \|\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 2\chi \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Por fim, juntando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\mu \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&+ 2\kappa \int_{t_0}^t \|\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,
\end{aligned}$$

para todo $t > t_0 > t_*$.

Para o CASO 2D, as contas não ficam tão diferentes assim, com o fato adicional de que em 2D, temos $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$, o que simplifica a desigualdade de energia. Assim, para todo $t > t_0 > t_*$, temos

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\mu \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \\ & \leq \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \end{aligned}$$

para todo $t > t_0 > 0$. □

Não deixemos de observar que tal resultado nos diz que $\|(\mathbf{u}, \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é não crescente a partir de t_* , e ademais $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$ é integrável no intervalo $[t_0, \infty)$.

Vale comentar também que argumentos como as de funções de cortes, usado para demonstrar este teorema, que é usado para formalizar as integrais por partes, deixaram de ser usados simplesmente para enxugar as cotas e não se tornar repetitivo em demasia.

Vejamos agora um resultado similar ao Teorema 6, contudo para as derivadas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$.

Teorema 7. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ soluções de Leray do sistema Navier-Stokes Micropolar, então existem $t_{**} > t_*$ e $\eta > 0$ tais que

$$\begin{aligned} & \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \eta \int_{t_0}^t \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ & + 2\kappa \int_{t_0}^t \|D\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ & + 2\chi \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau < \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \end{aligned}$$

para todo $t > t_0 > t_{**} > t_*$.

Demonstração. Colocando a equação (3.1) em coordenadas derivando em relação a x_l e multiplicando por $2D_l u_i$, obtemos

$$\begin{aligned} & 2D_l u_i D_l u_{i,t} + 2 \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) + 2D_l u_i D_l u_{i,t} \\ & = 2(\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l D_j D_j u_i + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k. \end{aligned}$$

Integrando em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} [(D_l u_i)^2]_t dx d\tau + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l u_j D_j u_i dx d\tau \\
& + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 u_j D_j (D_l u_i)^2 dx d\tau + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_l u_i D_l D_i p dx d\tau \\
& = 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l D_j D_j u_i dx d\tau + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Fubini e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|D_l u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \|D_l u_i(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 u_i D_l D_j u_i D_l u_j dx d\tau - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t u_i D_l u_i D_l \sum_{j=1}^3 D_j u_j dx d\tau \\
& - \sum_{l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (D_l u_i)^2 \sum_{j=1}^3 D_j u_j dx d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_l D_i u_i D_l p dx d\tau \\
& = -2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_j D_l u_i D_j D_l u_i dx d\tau - 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_k D_l D_j u_i dx d\tau.
\end{aligned}$$

Somando em i e l , e usando o fato que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 u_i D_l D_j u_i D_l u_j dx d\tau - 2 \sum_{i,j,l}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_l p D_l \sum_{j=1}^3 D_i u_i dx d\tau \\
& = -2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j D_l u_i)^2 dx d\tau + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l,k=1}^3 \epsilon_{kji} D_l w_k D_l D_j u_i dx d\tau.
\end{aligned}$$

A relação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 u_i D_l D_j u_i D_l u_j dx d\tau + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_k D_l D_j u_i dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora vamos trabalhar com a equação 3.2. Para isto, coloquemos a mesma em coordenadas, derivemos em relação a x_l e multipliquemos por $2D_l w_i$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
& 2D_l w_i D_l w_{i,t} + 2 \sum_{j=1}^3 D_l w_i D_l (u_j D_j w_i) \\
& = 2\gamma \sum_{j=1}^3 D_l w_i D_l D_j D_j w_i + 2 \sum_{j=1}^3 D_l w_i D_l D_i D_l w_j \\
& + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k - 4\chi D_l w_i D_l w_i.
\end{aligned}$$

Integrando em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} [(D_l w_i)^2]_\tau dx d\tau + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l w_i D_l u_j D_j w_j dx d\tau \\
& + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 u_j D_j [(D_l w_i)^2] dx d\tau = 2\gamma \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l w_i D_l D_j D_j dx d\tau \\
& + 2\kappa \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l w_i D_l D_i D_j w_j dx d\tau + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k dx d\tau \\
& - 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (D_l w_i)^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Fubini e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
& \|D_l w_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \|D_l w_i(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 w_i D_l D_j w_i D_l u_j dx d\tau \\
& - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 w_i D_l w_i D_l \sum_{j=1}^3 D_j u_j dx d\tau - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_j u_j (D_l w_i)^2 dx d\tau \\
& = -2\gamma \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j D_l w_i)^2 dx d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l D_i w_i D_l D_j w_j dx d\tau \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k dx d\tau - 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (D_l w_i)^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Somando em i e l , e usando o fato de que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \|D\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 w_i D_l u_j D_l D_j w_i dx d\tau \\
& = -2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^3 D_l \left(\sum_{i=1}^3 D_i w_i \right) D_l \left(\sum_{j=1}^3 D_j w_j \right) dx d\tau \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k dx d\tau - 4\chi \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Reescrevendo tal igualdade, temos

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& + 2 \int_{t_0}^t \|D\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau - 4\chi \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& = \|D\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 w_i D_l u_j D_l D_j w_i dx d\tau \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k dx d\tau
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Somando as equações (3.10) e (3.11)

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|D\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 2\kappa \int_{t_0}^t \|D\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 4\chi \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& = \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|D\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 u_i D_l u_j D_l D_j u_i dx d\tau \\
& + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 w_i D_l u_j D_l D_j w_i dx d\tau + 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k dx d\tau. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Note aqui, por Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 u_i D_l u_j D_l D_j u_i dx d\tau \right| \\
& \leq C \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 |D_l u_j| |D_l D_j u_i| dx d\tau \\
& \leq C \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \\
& \leq C \int_{t_0}^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau.
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Similarmente, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 w_i D_l u_j D_l D_j w_i dx d\tau \right| \\
& \leq C \int_{t_0}^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau.
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Ademais, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l w_i D_l D_j u_k dx \right| \\
&= \left| \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_l w_i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l D_j u_k dx \right| \\
&\leq \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |D_l w_i| \left| \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l D_j u_k \right| dx \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left((D_l w_i)^2 + \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l D_j u_k \right)^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_l w_i)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l D_j u_k \sum_{p,q=1}^3 \epsilon_{ipq} D_l D_p u_q \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,j,k,p,q=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} \right) D_l D_j u_k D_l D_p u_q dx \\
&= \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,j,k,p,q=1}^3 (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) D_l D_j u_k D_l D_p u_q dx \\
&= \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{l,j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_l D_j u_k)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,j,k=1}^3 D_l D_j u_k D_l D_k u_j dx \\
&= \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \|D^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Aplicando as estimativas (3.13), (3.14) e (3.15) na equação (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}
& \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\mu \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&+ 2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + 2\kappa \int_{t_0}^t \|D\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&\leq \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&+ C \int_{t_0}^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| (D^2 \mathbf{u}, D^2 \mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Agora, estimemos o seguinte termo

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{w})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| (D^2 \mathbf{u}, D^2 \mathbf{w}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.17}$$

Fazendo $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$ e utilizando as desigualdade de Sobolev (B.1) e (B.2), do Apêndice B,

temos que para todo $t > t_0 > t_*$,

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^\infty} \| D\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D^2\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& \leq \| \mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \| D^2\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \| D\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D^2\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& \leq \| D^2\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\| \mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \| D\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| D\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \| D^2\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{-1/4} \right) \\
& = \| \mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| D\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| D^2\mathbf{z}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.
\end{aligned}$$

Tomemos neste momento tal *afirmação*:

Existe $t_{**} > t_*$ tal que para todo $t > t_0 > t_{**}$ vale

$$\| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} < \frac{1}{CK} \min(\mu, \gamma).$$

Demonstração da afirmação: Pelo Teorema 6 temos que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$

Logo, existe t_1 tal que

$$\| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} < \frac{1}{CK} \min(\mu, \gamma).$$

Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe $t_2 > t_1$, e consideraremos $t_0 > t_1$, tal que para todo $t \in [t_1, t_2)$

$$\| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} < \frac{1}{CK} \min(\mu, \gamma)$$

e

$$\| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_2) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} = \frac{1}{CK} \min(\mu, \gamma).$$

Então, por (3.16)

$$\begin{aligned}
& \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_2) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \min(\mu, \gamma) \int_{t_0}^t \| (D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& \leq \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& \quad + C \int_{t_0}^t \| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^\infty} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| (D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \\
& \leq \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& \quad + CK \int_{t_0}^t \| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^\infty}^{1/2} \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| (D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& \leq \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \min(\mu, \gamma) \int_{t_0}^t \| (D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

E portanto,

$$\| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_2) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \| (D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

consequentemente,

$$\frac{1}{CK} \min(\mu, \gamma) = \|(\mathbf{u}(\cdot, t_0), \mathbf{w}(\cdot, t_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{CK} \min(\mu, \gamma).$$

Absurdo! Assim, substituindo em (3.16), obtemos para todo $t > t_0 > t_{**} > t_*$,

$$\begin{aligned} & \|D(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \eta \int_{t_0}^t \|(D^2 \mathbf{u}, D^2 \mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ & + 2\kappa \int_{t_0}^t \|D\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ & + 2\chi \int_{t_0}^t \|D\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau < \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \end{aligned}$$

onde $\eta > 0$. □

O resultado seguinte trata-se de uma estimativa assintótica.

Teorema 8. É válido que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para todo $t > t_0 > t_*$.

Demonstração. No CASO 3D, devemos considerar, pelo Teorema 6, que

$$\int_{t_0}^t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau < \infty,$$

para todo $t > t_0 > t_*$. Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t/2}^t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = 0.$$

Ademais, pelo Teorema 7, temos que $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente para $t > t_{**}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t/2}^t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &\leq 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t/2}^t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por conseguinte,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para todo $t > t_0 > t_*$.

Já para o *CASO 2D* façamos da seguinte maneira: derivando as equações (3.1), (3.2) e (3.3) e tomando o produto interno de $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ com (3.1) e (3.2), respectivamente, integrando por partes em $\mathbb{R}^2$ e somando tudo, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\chi \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \leq -2 \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \quad + \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

para todo $t > t_*$.

Usando a desigualdade de Sobolev (B.2), Apêndice B, e o Teorema 6, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\chi \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \leq -2 \min(\mu, \gamma) \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \quad + \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{3/2} \\ & \leq -2 \min(\mu, \gamma) \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \quad + \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{3/2} \\ & \leq -2 \min(\mu, \gamma) \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \quad + C \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{3/2}, \end{aligned}$$

para algum $C > 0$.

Usando os expoentes $p = 4$ e $q = 4/3$, satisfazendo $p^{-1} + q^{-1} = 1$, temos pela desigualdade de Young com ε , Teorema A 7, que

$$\begin{aligned} & \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{3/2} \\ & \leq C_\varepsilon \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 + \varepsilon \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4.$$

como, pelo Teorema 6, $\int_0^\infty \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds < \infty$, temos, pelo Lema de Grönwall, ver Apêndice A,

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

para todo $0 \leq s \leq t$, ou equivalentemente, tomando $\eta = 1/C > 0$,

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq \eta \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

para todo $0 \leq s \leq t$. Agora, supondo que o Teorema 8, aqui afirmado, seja falso. Então existe $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tais que

$$t_n \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq \delta > 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e podemos assumir que $t_{n+1} \geq 2t_n$. Assim, pelo Teorema 7,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds &\geq \eta \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \\ &\geq \eta(t_{n+1} - t_n) \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\geq \eta\delta(t_{n+1} - t_n)/t_{n+1} \\ &\geq \eta\delta(1 - t_n/t_{n+1}) \\ &\geq \frac{\eta\delta}{2}. \end{aligned}$$

Isto contradiz o fato de

$$\int_0^\infty \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds < \infty,$$

o que conclui o Teorema 8. □

3.2 DECAIMENTO DAS VELOCIDADES

Nesta seção estaremos interessados em saber como é o decaimento em $L^2(\mathbb{R}^n)$ das velocidades de translação e de rotação.

Teorema 9. Seja $\mathbf{w}$ solução de Leray do sistema (3.1), (3.2) e (3.3). Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. Faremos para o primeiro limite, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, para o CASO 3D. Sendo assim, vamos reescrever a equação (3.2) como

$$\mathbf{w}_t = \gamma \Delta \mathbf{w} + Q - 4\chi \mathbf{w}, \tag{3.20}$$

onde

$$Q = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\chi \nabla \times \mathbf{u}.$$

Agora, façamos a seguinte mudança de variável $\mathbf{W} = e^{4\chi t} \mathbf{w}$ e multipliquemos a equação (3.20) por $e^{4\chi t}$, para obter

$$\mathbf{W}_t = \gamma \Delta \mathbf{W} + e^{4\chi t} Q.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, temos, pelo Teorema 8, que existe t_0 suficientemente grande tal que para todo $t > t_0$ vale

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \epsilon t^{-1/2}.$$

Pelo princípio de Duhamel, temos que

$$\mathbf{W}(\cdot, t) = e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{W}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\gamma\Delta(t-s)}e^{2\chi s}Q(\cdot, s)ds.$$

Reescrevendo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\cdot, t) &= e^{-2\chi(t-t_0)}e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot, t_0) - \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}e^{\gamma\Delta(t-s)}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} ds \\ &\quad + \kappa \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}e^{\gamma\Delta(t-s)}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})ds + 2\chi \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}e^{\gamma\Delta(t-s)}(\nabla \times \mathbf{u})ds \end{aligned}$$

Multiplicando esta equação por $t^{1/2}$, aplicando a norma L^2 e usando a Desigualdade de Minkowski, Teorema A 8, temos que

$$\begin{aligned} t^{1/2}\|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq t^{1/2}e^{-2\chi(t-t_0)}\|e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}\|e^{\gamma\Delta(t-s)}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ &\quad + \kappa t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}\|e^{\gamma\Delta(t-s)}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ &\quad + 2\chi t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}\|e^{\gamma\Delta(t-s)}(\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

Chegando nesta parte, devemos então analisar cada termo da desigualdade separadamente.

O termo

$$e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot, t_0)$$

representa a solução da equação do calor, com condição inicial $\mathbf{w}(\cdot, t_0)$ e, pelo Teorema 3, temos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Dessa forma, temos também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2}e^{-2\chi(t-t_0)}\|e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.22)$$

Vamos agora analisar o termo

$$2t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)}\|e^{\gamma\Delta(t-s)}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds.$$

Pelo Teorema A 9, temos

$$\begin{aligned}
& 2t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K\gamma^{-3/4} t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K\gamma^{-3/4} t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K\gamma^{-3/4} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K\gamma^{-3/4} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \\
& = t^{1/2} \int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds + t^{1/2} \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \\
& \leq t^{1/2} e^{-\chi t} \left(\frac{t}{2}\right)^{-3/4} \int_{t_0}^{t/2} s^{-1/2} ds + t^{1/2} t^{-1/2} \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-3/4} ds \\
& \leq C e^{-\chi t} t^{1/4} + (2\chi)^{-1/4} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-3/4} d\tau \\
& \leq C e^{-\chi t} t^{1/4} + (2\chi)^{-1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& 2t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K\epsilon\gamma^{-3/4} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[e^{-\chi t} t^{1/4} + (2\chi)^{-1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right].
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.23)$$

Agora vamos analisar o termo

$$\kappa t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Novamente pelo Teorema A 9, temos

$$\begin{aligned}
& \kappa t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq \kappa K\gamma^{-1/2} t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-1/2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq \kappa K\epsilon\gamma^{-1/2} t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\
& \leq t^{1/2} \int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds + t^{1/2} \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\
& \leq t^{1/2} \left(\frac{t}{2}\right)^{-1/2} e^{-\chi t} \int_{t_0}^t s^{-1/2} ds + t^{1/2} t^{-1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} (t-s)^{-1/2} ds \\
& \leq C e^{-\chi t} t^{1/2} + (2\chi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-1/2} d\tau \\
& \leq C e^{-\chi t} t^{1/2} + (2\chi)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
& = C e^{-\chi t} t^{1/2} + (2\chi)^{-1/2} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\kappa t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \kappa K \epsilon \gamma^{-1/2} \left[e^{-\chi t} t^{1/2} + (2\chi)^{-1/2} \sqrt{\pi} \right].$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.24)$$

Por fim, vamos analisar o último termo,

$$2\chi t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Para isto, usando o argumento similar do Teorema A 9, temos

$$\begin{aligned}
& 2\chi t^{1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2\chi t^{1/2} \int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \quad + 2\chi t^{1/2} \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K \chi \gamma^{-1/2} t^{1/2} e^{-\chi t} \int_{t_0}^{t/2} (t-s)^{-1/2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds + 2\chi \epsilon t^{1/2} \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} s^{-1/2} ds \\
& \leq 2K \left[\chi \gamma^{-1/2} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{1/2} e^{-\chi t} \int_{t_0}^{t/2} (t-s)^{-1/2} ds + \chi \epsilon t^{1/2} t^{-1/2} \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} ds \right].
\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
& 2\chi t^{1/2} \int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq 2K \left[\chi \gamma^{-1/2} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} e^{-\chi t} + \chi \epsilon \frac{1 - e^{-\chi t}}{2\chi} \right].
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2\chi t^{1/2} \int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.25)$$

Portando, juntando as equações (3.22), (3.23), (3.24) e (3.25) com (3.21), temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Já para o *CASO 2D*, basta notar que as diferenças entre os *CASOS 2D* e *3D* são as estimativas do Apêndice C que são utilizadas mediante a dimensão apresenta. No entanto, tais mudanças não afetam a demonstração, que segue de forma similar ao *CASO 3D*.

Agora vamos mostrar a segunda parte deste teorema, que é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Consideraremos primeiro o *CASO 3D*. Para isto, vamos reescrever a equação (3.1) como

$$\mathbf{u}_t = (\mu + \chi)\Delta \mathbf{u} + R,$$

onde

$$R = 2\chi \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p.$$

Usando o Lema (Projetor de Helmholtz), ver o Apêndice D da Tese de Cilon Perusato, (PERUSATO, 2018), podemos escrever R como

$$R = \mathbb{P}_h [2\chi \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}].$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, temos, pelo Teorema 8, que existe t_0 suficientemente grande tal que para todo $t > t_0$ vale

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \epsilon t^{-1/2}.$$

Pelo princípio de Duhamel, temos que

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{(\mu+\chi)\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)} R(\cdot, s) ds. \quad (3.26)$$

Usando a definição de R e o Teorema D.5. da Tese de Cilon Perusato, (PERUSATO, 2018), a equação (3.26) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\cdot, t) &= e^{(\mu+\chi)\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{P}_h [e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] ds \\ &\quad + 2\chi \int_{t_0}^t \mathbb{P}_h [e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)} \nabla \times \mathbf{w}] ds. \end{aligned}$$

Aplicando a norma L^2 e usando a Desigualdade de Minkowski, Teorema A 8, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\quad + 2\chi \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)} \nabla \times \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para esta desigualdade vamos analisar cada termo separadamente.

O termo

$$e^{(\mu+\chi)\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$$

representa a solução da equação do calor, com condição inicial $\mathbf{u}(\cdot, t_0)$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.28)$$

que decorre pelo Teorema 3.

Agora vamos analisar o termo

$$\int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Para isto, vamos utilizar o Teorema A 9, do Apêndice A, e a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq K(\mu + \chi)^{-3/4} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq K(\mu + \chi)^{-3/4} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq K(\mu + \chi)^{-3/4} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & < K\epsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \\ & \leq K\epsilon t^{-1/4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.29)$$

Por fim, para o termo

$$2\chi \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)}\nabla \times \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds$$

devemos utilizar a primeira parte do Teorema 9 e assumir que t_0 é também grande suficiente para que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, valha, para todo $t > t_0$, que

$$\|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \epsilon t^{-1/2}.$$

De modo que, pela desigualdade do Teorema A 9, obtemos

$$\begin{aligned} 2\chi \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)}\nabla \times \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds & \leq 2K\chi(\mu + \chi)^{-1/2} \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq 2K\chi\epsilon(\mu + \chi)^{-1/2} \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\ & \leq 2K\chi\epsilon(\mu + \chi)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2\chi \int_{t_0}^t \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)} \nabla \times \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.30)$$

Juntando (3.28), (3.29) e (3.30) com (3.27), temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Já para o CASO 2D, basta notar que as diferenças entre os CASOS 2D e 3D são as estimativas do Apêndice C que são utilizadas mediante a dimensão apresenta. No entanto, tais mudanças não afetam a demonstração, que segue de forma similar ao CASO 3D. $\square$

3.3 DECAIMENTO DAS DERIVADAS DAS VELOCIDADES

A seção anterior nos motiva a perguntar sobre o decaimento das derivadas em L^2 para o caso micropolar. Não obstante, precisaremos de antemão do seguinte resultado:

Teorema 10. Dado m um inteiro positivo, sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ soluções de Leray do sistema (3.1), (3.2) e (3.3), então existe t_0 suficientemente grande tal que

(i)

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^m \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ & + \min(\mu, \gamma) \int_{t_0}^t \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & 2 \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & 2\chi \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq m \int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds, \end{aligned} \quad (3.31)$$

para todo $t > t_0$, com t_0 suficientemente grande.

(ii)

$$\int_{t_0}^{\infty} (s - t_0)^m \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds < \infty. \quad (3.32)$$

(iii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.33)$$

Demonstração. Faremos a prova por indução. Primeiramente mostraremos para o caso $m = 1$. Os Teoremas 6 e 8 garantem que existe $t_0 > t_*$ suficientemente grande tal que para todo $t \geq t_0$

$$C \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} < \min(\mu, \gamma), \quad (3.34)$$

onde $C > 0$ é a constante que aparece posteriormente em (3.42). Note que

$$u_{i,t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i + D_i p = (\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 D_j D_j u_i + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j w_k, \quad (3.35)$$

onde $\epsilon_{i,j,k}$ é o símbolo de Levi-Civita, isto é,

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ é permutação par;} \\ -1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ é permutação ímpar;} \\ 0, & \text{se } i = j, \text{ ou } j = k, \text{ ou } i = k. \end{cases}$$

Derivando (3.45) em relação a x_l , multiplicando por $2(s - t_0)D_l u_i$ e integrando em $\mathbb{R}^3 \times (t_0, t)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (s - t_0) [(D_l u_i)^2]_t ds dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l u_j D_j u_i dx ds \\ & + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j=1}^3 u_j D_j [(D_l u_i)^2] dx ds + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l D_j p dx ds \\ = & 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l D_j D_j u_i dx ds \\ & + 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k dx ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes e somando em i , temos que

$$\begin{aligned} & (t - t_0) \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ \leq & \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{i,j,l=1}^3 u_i D_l u_j D_l D_j u_i dx ds \\ & + 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k dx ds \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 u_i D_l u_j D_l D_j u_i dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 u_i \sum_{l=1}^3 D_l u_j D_l D_j u_i dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j} u_i \left(\sum_{l=1}^3 (D_l u_j)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^3 (D_l D_j u_j)^2 \right)^{1/2} dx \\
&\leq \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \sum_{i,j=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^3 (D_l u_j)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^3 (D_l D_j u_j)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,l=1}^3 (D_l u_j)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,l=1}^3 (D_l D_j u_j)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \| D \mathbf{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D^2 \mathbf{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C \| (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \| (D \mathbf{u}, D \mathbf{w}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| (D^2 \mathbf{u}, D^2 \mathbf{w}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

O que faz a equação (3.36) se tornar em

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \| D \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t (s - t_0) \| D^2 \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \| D \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k dx ds \\
&\quad + C \int_{t_0}^t (s - t_0) \| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \| (D \mathbf{u}, D \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| (D^2 \mathbf{u}, D^2 \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos fazer as mesmas contas para a equação (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \| D \mathbf{w}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t (s - t_0) \| D^2 \mathbf{w}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
&\quad + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0) \| D(\nabla \cdot \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 4\chi \int_{t_0}^t (s - t_0) \| D \mathbf{w}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \| D \mathbf{w}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k dx ds \\
&\quad + C \int_{t_0}^t (s - t_0) \| (\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \| (D \mathbf{u}, D \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| (D^2 \mathbf{u}, D^2 \mathbf{w})(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Assim, somando as equações (3.38) e (3.39), ficamos com

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\gamma \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D^2\mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D(\nabla \cdot \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 4\chi \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D\mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
\leq & \int_{t_0}^t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0) \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l u_i D_l D_j w_k dx ds \\
& + C \int_{t_0}^t (s - t_0) \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Usando agora a desigualdade (B.3) do Apêndice B e o fato de que o termo

$$4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{kji} D_l u_i D_l D_j w_k dx ds$$

pode ser estimado por, uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{kji} D_l u_i D_l D_j w_k dx \right| \\
= & \left| \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_l w_i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{kji} D_l D_j w_k dx \right| \\
\leq & \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |D_l w_i| \left| \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{kji} D_l D_j w_k \right| dx \\
\leq & \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_l w_i)^2 + \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l D_j u_k \right)^2 dx \\
= & \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_l w_i)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_l D_j u_k \sum_{p,q=1}^3 \epsilon_{ipq} D_l D_p u_q \right) dx \\
= & \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,j,k,p,q=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} \right) D_l D_j u_k D_l D_p u_q dx \\
= & \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,j,k,p,q=1}^3 (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) D_l D_j u_k D_l D_p u_q dx \\
= & \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{l,j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_l D_j u_k)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,j,k=1}^3 D_l D_j u_k D_l D_k u_j dx \\
= & \frac{1}{2} \|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\mu \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& 2\gamma \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D^2\mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D(\nabla \cdot \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D\mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \leq 2 \int_{t_0}^t (s - t_0) \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + C \int_{t_0}^t (s - t_0) \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Sendo assim, aplicando (3.34) obtemos a parte (i) para $m = 1$:

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \min(\mu, \gamma) \int_{t_0}^t \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\chi \int_{t_0}^t (s - t_0) \|D\mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \leq \int_{t_0}^t (\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Já o item (ii) é uma consequência imediata do item (i), uma vez que pelo Teorema 6 sabemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds < \infty.$$

E o item (iii) para $m = 1$ é o resultado do Teorema 8.

Agora, vamos supor que o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < m$. E em seguida provar que o resultado é verdadeiro para m , onde $m \geq 2$.

Dado $\epsilon > 0$, existe, pelo caso $m - 1$, t_0 suficientemente grande tal que

$$\int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|(D^m\mathbf{u}, D^m\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2 L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds < \frac{\epsilon^2}{m}.$$

Ademais, podemos admitir que t_0 é suficientemente grande tal que, pela hipótese indutiva,

$$\sum_{l=0}^{[m]/2} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2 L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{l+3/2}{l+2}} \|(D^{l+2}\mathbf{u}, D^{l+2}\mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2 L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1/2}{l+2}} < \frac{\min(\mu, \gamma)}{C}, \tag{3.44}$$

onde $C > 0$ é a constante que aparece na desigualdade (3.49), mais adiante.

Escrevendo a equação (3.1) em coordenada, temos

$$u_{i,t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i + D_i p = (\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 D_j D_j u_i + 2\chi \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_j w_k.$$

Derivando tal equação m vezes em relação a $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_m}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m [(D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_i)^2]_s ds dx \\
& + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i dx ds \\
& + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} D_i p dx ds \\
& = 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m \sum_{j,k=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} D_j D_j u_i dx ds \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} D_j w_k dx ds. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Integrando por partes e somando em $i, l_1, l_2, \dots, l_m$ temos

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^m \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \leq m \int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + C \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \quad \times \sum_{l=0}^{[m]/2} \|(D^l \mathbf{u}, D^l \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|(D^{l-1} \mathbf{u}, D^{l-1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m \sum_{j,k,l_1,l_2,\dots,l_m}^3 \epsilon_{ijk} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} w_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} D_j u_k dx ds. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

De forma análoga, a equação (3.2) fica

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^m \|D^m \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^{m+1} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m (\nabla \cdot \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 4\chi \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \leq m \int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|D^m \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m \sum_{j,k,l_1,l_2,\dots,l_m=1}^3 \epsilon_{ijk} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} w_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_k dx ds \\
& + C \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \quad \times \sum_{l=0}^{[m]/2} \|(D^l \mathbf{u}, D^l \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|(D^{m-l} \mathbf{u}, D^{m-l} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Somando as equações (3.46) e (3.47), resulta em

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^m \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2(\mu + \chi) \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\gamma \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^{m+1} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m (\nabla \cdot \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 4\chi \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
\leq & m \int_{t_0}^t \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})^m(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 4\chi \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (s - t_0)^m \sum_{j,k,l_1,l_2,\dots,l_m=1}^3 \epsilon_{ijk} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} w_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_k dx ds \\
& + C \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|(D^{m+1} \mathbf{u}, \mathbf{w})(D^{m+1} \cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\
& \quad \times \sum_{l=0}^{[m]/2} \|(D^l \mathbf{u}, D^l \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|(D^{m-l} \mathbf{u}, D^{m-l} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

O termo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k,l_1,l_2,\dots,l_m=1}^3 \epsilon_{ijk} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} w_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_k dx$$

pode ser estimado de forma similar a desigualdade (3.41) na prova da parte (i) para o caso em que $m = 1$, obtendo assim que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k,l_1,l_2,\dots,l_m=1}^3 \epsilon_{ijk} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} w_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_m} u_k dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \|D^m \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \|D^{m+1} \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Já o termo

$$\sum_{l=0}^{[m]/2} \|(D^l \mathbf{u}, D^l \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|(D^{m-l} \mathbf{u}, D^{m-l} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds$$

pode ser estimado pela desigualdade de Sobolev (A.12) na dissertação de Cilon Perusato, ver (PERUSATO, 2018):

$$\begin{aligned}
& \|(D^l \mathbf{u}, D^l \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|(D^{m-l} \mathbf{u}, D^{m-l} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& \leq C \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{l+3/2}{l+2}} \|(D^{l+2} \mathbf{u}, D^{l+2} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{l/2}{l+2}} \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

onde $0 \leq l \leq m - 1$, obtemos então que

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^m \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\
& 2 \min\{\mu, \gamma\} \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m(\nabla \cdot \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds + 2\chi \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
\leq & m \int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& + C \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& \times \sum_{l=0}^{[m]/2} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{l+3/2}{l+2}} \|(D^{l+2} \mathbf{u}, D^{l+2} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1/2}{l+2}} ds
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Agora não deixemos que aplicar 3.44 para obtermos o item (1):

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^m \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& + \min(\mu, \gamma) \int_{t_0}^t \|(D^{m+1} \mathbf{u}, D^{m+1} \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& 2\kappa \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
& 2\chi \int_{t_0}^t (s - t_0)^m \|D^m \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
\leq & m \int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds.
\end{aligned}$$

Já o item (ii) é uma consequência direta do item (i), uma vez que pela hipótese indutiva aplicada ao caso $m - 1$ temos que

$$\int_{t_0}^t (s - t_0)^{m-1} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds < \infty,$$

para todo $t > t_0$ suficientemente grande.

E por fim, para mostrar o item (iii) devemos notar que

$$\begin{aligned}
t^m \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^m \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= (t - t_0)^m \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\leq m \int_{t_0}^\infty (s - t_0)^{m-1} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\
&< \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Portanto,

$$t^{m/2} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 < \left(\frac{t}{t - t_0} \right)^{m/2} \epsilon.$$

Sendo assim, é fácil observar que $\frac{t}{t-t_0} \leq 2$ para todo $t \geq 2t_0$. Por conseguinte, como $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2} \|(D^m \mathbf{u}, D^m \mathbf{w})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = 0.$$

□

Teorema 11. Seja m inteiro positivo. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2+1/2} \|D^m \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. Para o CASO 3D vamos precisar reescrever a equação (3.2) como

$$\mathbf{w}_t = \gamma \Delta \mathbf{w} + Q - 4\chi \mathbf{w}, \quad (3.51)$$

onde

$$Q = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\chi \nabla \times \mathbf{u}.$$

Agora, façamos a seguinte mudança de variável

$$\mathbf{W} = e^{4\chi t} \mathbf{w}$$

e multiplicando a equação (3.51) por $e^{4\chi t}$, obtemos que

$$\mathbf{W}_t = \gamma \Delta \mathbf{W} + e^{2\chi t} Q.$$

Pelo que já vimos até aqui e pelo Teorema 10, dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 > t_*$ suficientemente grande tal que para todo $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq m+2$ vale que

$$\|(D^l \mathbf{u}, D^l \mathbf{w})(\cdot, t)\| < \epsilon t^{-1/2},$$

para todo $t > t_0$. Assim, pelo princípio de Duhamel, temos que

$$\mathbf{W}(\cdot, t) = e^{\gamma \Delta(t-t_0)} \mathbf{W}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\gamma \Delta(t-s)} e^{2\chi s} Q(\cdot, s) ds.$$

Tal equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\cdot, t) &= e^{-2\chi(t-t_0)} e^{\gamma \Delta(t-t_0)} \mathbf{w}(\cdot, t_0) - \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} e^{\gamma \Delta(t-s)} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} ds \\ &\quad + \kappa \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} e^{\gamma \Delta(t-s)} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) ds + 2\chi \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} e^{\gamma \Delta(t-s)} (\nabla \times \mathbf{u}) ds. \end{aligned}$$

Multiplicando $\mathbf{w}(\cdot, t)$ por $t^{m/2+1/2}$, derivando m vezes em relação a x , aplicando a norma L^2 e usando a desigualdade de Minkowski, Teorema A 8, temos que

$$\begin{aligned}
 t^{m/2+1/2} \|D^m \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq K t^{m/2+1/2} e^{-2\chi(t-t_0)} \|D^m e^{\gamma\Delta(t-t_0)} \mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\quad + K t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^m (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
 &\quad + K \kappa t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+2} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
 &\quad + 2K \chi t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

E a ideia é analisar cada termo de (3.52) separadamente.

O termo $t^{m/2+1/2} e^{-2\chi(t-t_0)} \|D^m e^{\gamma\Delta(t-t_0)} \mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ representa a solução da equação do calor, com condição inicial $\mathbf{w}(\cdot, t_0)$ e, pelo Teorema 3, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|D^m e^{\gamma\Delta(t-t_0)} \mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Consequentemente, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2+1/2} e^{-2\chi(t-t_0)} \|D^m e^{\gamma\Delta(t-t_0)} \mathbf{w}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3.53}$$

Para analisarmos os demais termos, vamos utilizar a desigualdade representada no Teorema A 9. Assim, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, ver Apêndice A da tese de Perusato, (PERUSATO, 2018), no termo $t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^m (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds$, obtemos

$$\begin{aligned}
 &t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^m (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
 &\leq K t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \sum_{l=0}^m \|D^l \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^{m-l+1} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
 &\leq K t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \sum_{l=0}^m \|D^l \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|D^{l+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \\
 &\quad \times \|D^{m-l+1} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|D^{m-l+2} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} ds \\
 &\leq K t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \sum_{l=0}^m \epsilon^{\frac{1}{4}} s^{-\frac{l}{8}} \epsilon^{\frac{3}{4}} s^{-\frac{-3(l+1)}{8}} \epsilon^{\frac{1}{4}} s^{-\frac{m-l+1}{8}} \epsilon^{\frac{3}{4}} s^{-\frac{3(m-l+2)}{8}} ds \\
 &\leq K t^{m/2+1/2} \epsilon^2 \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{2m+5}{4}} ds \\
 &\leq K t^{m/2+1/2} \epsilon^2 \left[\int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{2m+5}{4}} ds + \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{2m+5}{4}} ds \right] \\
 &\leq K \epsilon^2 \left(t^{m/2+1/2} e^{-\chi t} \frac{t_0^{-\frac{2m+1}{4}}}{2m+1} + t^{m/2+1/2} t^{-2m/4+5/4} \chi^{-1} \right) \\
 &\leq K \epsilon^2 \left(t^{m/2+1/2} e^{-\chi t} + t^{-3/4} \chi^{-1} \right).
 \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^m(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w})(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.54)$$

Empregando o mesmo raciocínio para o termo

$$\kappa t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+2} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

temos

$$\begin{aligned} & \kappa t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+2} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq \kappa t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|D^{m+2} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq \kappa t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \epsilon s^{-\frac{m+2}{2}} ds \\ & \leq \kappa t^{m/2+1/2} \epsilon \left[\int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{m+2}{2}} ds + \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{m+2}{2}} ds \right] \\ & \leq \kappa K \epsilon \left(t^{\frac{m+1}{2}} e^{-\chi t} \frac{t_0^{-\frac{m}{2}}}{m} + t^{\frac{m+1}{2}} t^{-\frac{m+2}{2}} \chi^{-1} \right) \\ & \leq \kappa K \epsilon \left(t^{\frac{m+1}{2}} e^{-\chi t + t^{-\frac{1}{2}}} \chi^{-1} \right). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+2} \mathbf{w}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.55)$$

Por fim, para o termo

$$t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

temos

$$\begin{aligned} & t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq K t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq K t^{\frac{m+1}{2}} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \epsilon s^{-\frac{m+1}{2}} ds \\ & \leq K t^{\frac{m+1}{2}} \epsilon \left[\int_{t_0}^{t/2} e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{m+1}{2}} ds + \int_{t/2}^t e^{-2\chi(t-s)} s^{-\frac{m+1}{2}} ds \right] \\ & \leq K \epsilon \left(t^{m/2+1/2} e^{-\chi t} \frac{t_0^{-\frac{m}{2}}}{m-1} + t^{m/2+1/2} t^{-m/2+1/2} \chi^{-1} \right) \\ & \leq K \epsilon \left(t^{m/2+1/2} e^{-\chi t} + \chi^{-1} \right). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2K\chi t^{m/2+1/2} \int_{t_0}^t e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = 0. \quad (3.56)$$

Por conseguinte, pela equações (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2+1/2} \|D^m \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Já para o *CASO 2D*, basta notar que as diferenças entre os *CASOS 2D* e *3D* são as estimativas do Apêndice C que são utilizadas mediante a dimensão apresenta. No entanto, tais mudanças não afetam a demonstração, que segue de forma similar ao *CASO 3D*. $\square$

O resultado abaixo segue como corolário do Teorema 11. Para a demonstra de tal corolário, basta fazer um argumento semelhante ao apresentado no Teorema 11.

Corolário 2. Se $t^\alpha \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < C_0$, com $t > t_0$, então $t^{\alpha+1/2} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < C_1$, para algum $t_0 > 0$ e algum $\alpha > 0$.

O resultado abaixo decorre simplesmente da parte (iii) do Teorema 10, do Teorema 11 e da definição de norma, equação (3.4).

Teorema 12. Seja m inteiro positivo. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m/2} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

4 VORTICIDADE VS MICRORROTAÇÃO

Neste capítulo vamos considerar o sistema micropolar em dimensão 3, definido no Capítulo 3, ou seja, as equações (3.1), (3.2) e (3.3), com $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Sendo assim, consideremos $\mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, e seja $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ uma solução de Leray qualquer de (3.1) e (3.2) tendo $\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{w}_0$ como suas condições iniciais.

Lema 2. Se $g \in L^\infty(0, \infty)$ satisfaz $g(t) = o(t^{-\gamma})$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $\gamma \geq 0$, então dado $a > 0$ tem-se

$$\int_0^t e^{a(t-s)} |g(s)| ds = o(t^{-\gamma}) \quad (4.1)$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Escreva

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{a(t-s)} |g(s)| ds &= \int_0^{t/2} e^{a(t-s)} |g(s)| ds + \int_{t/2}^t e^{a(t-s)} |g(s)| ds. \\ &\leq e^{-at} \int_0^{t/2} |g(s)| ds + \int_{t/2}^t e^{-a(t-s)} s^{-\gamma} \epsilon ds \\ &\leq e^{-\frac{at}{2}} \|g\|_{L^1} + t^{-\gamma} \epsilon \cdot 2^\gamma \int_{t/2}^t e^{-a(t-s)} ds \\ &= o(t^{-\gamma}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

□

Lema 3. Se $f \in C^1(0, \infty)$ tal que $f'(t) = o(t^{-\Gamma})$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $\Gamma \geq 0$, então, dado $a > 0$, tem-se

$$\int_0^t e^{a(t-s)} ds = \frac{1}{a} f(t) + o(t^{-\Gamma})$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Temos que, por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{as} f(s) ds &= \int_0^t \left(\frac{e^{as}}{a} \right)' f(s) ds \\ &= \frac{1}{a} (e^{at} f(t) - f(0)) - \frac{1}{a} \int_0^t e^{as} f'(s) ds. \end{aligned}$$

Assim, obtemos, usando o Lema 2, quando $t \rightarrow \infty$ que

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-a(t-s)} f(s) ds &= \frac{1}{a} f(t) - \frac{1}{a} f(0) e^{-at} - \frac{1}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)} f'(s) ds \\ &= \frac{1}{a} f(t) + o(t^{-\Gamma}). \end{aligned}$$

□

Vale comentar que, em particular, a solução de

$$\begin{cases} x_t(t) + ax(t) = f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é dada por

$$x(t) = x_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} f(s) ds,$$

e satisfaz

$$x(t) = \frac{1}{a} f(t) + \left(x_0 + \frac{1}{a} f(0) \right) e^{-at} - \frac{1}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)} f'(s) ds, \quad (4.3)$$

isto é,

$$x(t) = \frac{1}{a} f(t) + v(t),$$

onde

$$v(t) = \left(x_0 + \frac{1}{a} f(0) \right) e^{-at} - \frac{1}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)} f'(s) ds.$$

Teorema 13. Seja $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ solução clássica, suave globalmente do sistema (3.1), (3.2) e (3.3), onde ϵ definido por

$$\epsilon(x, t) = \mathbf{w}(x, t) - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}.$$

Então tem-se, quando $t \rightarrow \infty$,

$$(i) \quad \|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-3/2}), \text{ e}$$

$$(ii) \quad \|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-9/2}).$$

Demonstração. Da equação (3.2) temos para cada $x \in \mathbb{R}^3$ e para cada $t \geq t_0$ que

$$\mathbf{w}_t + 2\chi \mathbf{w}(x, t) = \chi \mathbf{f}(x, t) + \mathbf{g}(x, t),$$

onde $\mathbf{w}(x, t)$ é a soma da solução de

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t + 4\chi \mathbf{z} = \mathbf{g} \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{w}(x, t_0) \end{cases}$$

com a solução de

$$\begin{cases} \zeta_t + 2\chi \zeta = \chi \mathbf{f} \\ \zeta(t_0) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$$

onde $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ é o vetor nulo do $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f}(x, t) = \nabla \times \mathbf{u}(x, t) \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{g}(x, t) = \gamma \Delta \mathbf{w} + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}(x, t)) - \sum_{j=1}^3 u_j D_j \mathbf{w}(x, t). \quad (4.5)$$

Do Teorema 11, obtemos que

$$\|\mathbf{g}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-9/4}) \quad (4.6)$$

quando $t \rightarrow \infty$. De modo que

$$|\mathbf{g}(x, t)| \leq \eta(t) \cdot (1 + t)^{-9/4}.$$

para todo $t \geq t_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e para algum $\eta \in C^0([t_0, +\infty))$ com $\eta(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Ademais, $\mathbf{f}'(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(x, t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{u}) \\ &= \nabla \times \mathbf{u}_t \\ &= (\mu + \chi) \Delta (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\chi \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}) - \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq t_0$.

Temos também pelo Teorema 11 que

$$\|\mathbf{f}'(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-9/4}) \quad (4.8)$$

Agora, temos, lembrando a equação (4.3), que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x, t) &= \left(\mathbf{w}(x, t_0) - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(x, t_0) \right) e^{-2\chi(t-t_0)} + \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(x, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{2\chi(t-s)} \mathbf{f}'(x, s) ds + \int_{t_0}^t e^{2\chi(t-s)} \mathbf{g}'(x, s) ds \end{aligned}$$

com $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq t_0$, uma vez que

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(x, t) + \epsilon(x, t),$$

segue que

$$\begin{aligned} \epsilon(x, t) &= \left(\mathbf{w}(x, t_0) - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(x, t_0) \right) e^{-2\chi(t-t_0)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{2\chi(t-s)} \mathbf{f}'(x, s) ds + \int_{t_0}^t e^{2\chi(t-s)} \mathbf{g}'(x, s) ds. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por conseguinte, de (4.1), (4.6) e (4.8), temos

$$\|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq o(t^{-9/4})$$

quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \eta(t) \cdot (1+t)^{-9/4}$$

para todo $t \geq t_0$ e algum $\eta \in C^0([t_0, +\infty))$ com $\eta \rightarrow 0^+$ quando $t \rightarrow \infty$.

O que mostra a estimativa da parte (ii) do Teorema 13.

Também de (4.9) temos

$$\begin{aligned} \|\epsilon(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \|\mathbf{w}(x, t_0) - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(x, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} e^{-2\chi(t-t_0)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{2\chi(t-s)} \|\mathbf{f}'(x, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds + \int_{t_0}^t e^{2\chi(t-s)} \|\mathbf{g}'(x, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sendo assim, de (4.5) e do Teorema 11, temos

$$\|\mathbf{g}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-3/2}) \quad (4.11)$$

quando $t \rightarrow \infty$, e de (4.7) e do Teorema 11, obtemos

$$\|\mathbf{f}'(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-3/2}) \quad (4.12)$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Por fim, obtemos do Lema 2, de (4.10), (4.11) e (4.12) que

$$\|\epsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-3/2})$$

quando $t \rightarrow \infty$. □

REFERÊNCIAS

- BRAZ E SILVA, P.; ZINGANO, J.; ZINGANO, P. A note on the regularity time of leray solutions to the navier–stokes equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 21, n. 1, p. 1–7, 2019.
- CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E.; MARSDEN, J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3.
- ERINGEN, A. C. Theory of micropolar fluids. *Journal of Mathematics and Mechanics*, JSTOR, p. 1–18, 1966.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 19.
- GUTERRES, R.; MELO, W.; PERUSATO, C.; ZINGANO, P. On the spontaneous synchronization between micro-rotation and vorticity in micropolar flows. *submitted*.
- GUTERRES, R.; MELO, W.; PERUSATO, C.; ZINGANO, P. On the spontaneous synchronization between micro-rotation and vorticity in micropolar flows. *arXiv preprint arXiv:2209.13747*, 2022.
- GUTERRES, R. H.; NUNES, J. R.; PERUSATO, C. F. On the large time decay of global solutions for the micropolar dynamics in $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, v. 45, p. 789–798, 2019. ISSN 1468-1218. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.08.002>>.
- LERAY, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica*, Springer, v. 63, n. 1, p. 193–248, 1934.
- LUKASZEWICZ, G. *Micropolar fluids: theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.
- MEKHEIMER, K. S.; KOT, M. E. The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis. *Acta Mechanica Sinica*, Springer, v. 24, n. 6, p. 637–644, 2008.
- PERUSATO, C. V. F. Contribuições à teoria matemática de escoamentos magneto-micropolares. 2018.
- SHARMA, S. Effect of micropolar parameters on elastohydrodynamic analysis of circular bearing. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, v. 3, n. 5, p. 1–8, 2012.
- STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. *Complex analysis*. [S.l.]: Princeton University Press, 2010. v. 2.
- TAYLOR, M. *Partial differential equations II: Qualitative studies of linear equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 116.
- TAYLOR, S. J. *Introduction to measure and integration*. [S.l.]: CUP Archive, 1973.

APÊNDICE A – APÊNDICE A - RESULTADOS DE ANÁLISE E TEORIA DA MEDIDA

Definição A 1. Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e f uma função complexa em Ω . A função f é holomorfa no ponto $z_0 \in \Omega$ se o quociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge para um limite quando $h \rightarrow 0$.

Aqui $h \in \mathbb{C}$ e $h \neq 0$ com $z_0 + h \in \Omega$ para que o quociente seja bem definido. O limite do quociente, quando existe, é denotado por $f'(z_0)$, e é chamado a derivada de f em z_0 :

Definição A 2. A função f é dita holomorfa em Ω se f é holomorfa em todos pontos de Ω .

Teorema A 1 (Cauchy-Goursat). Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e $T \subset \Omega$ um triângulo, cujo interior está contido em Ω . Então

$$\int_T f(z) dz = 0,$$

onde f é uma função holomorfa em Ω .

Demonstração. Ver capítulo 2 da referência (STEIN; SHAKARCHI, 2010). □

Corolário A 1. Se f é uma função holomorfa no conjunto aberto Ω que contém um retângulo R no seu interior, então

$$\int_R f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Ver capítulo 2 da referência (STEIN; SHAKARCHI, 2010). □

Teorema A 2 (Teorema de Fubini). Seja $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, temos

$$(i) \quad F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ e } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1);$$

$$(ii) \quad F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ e } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2);$$

Ademais,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx.$$

Demonstração. Ver capítulo 6 da referência (TAYLOR, 1973). □

Teorema A 3 (Fórmulas de Green). Sejam $u, v \in C^2(\overline{\mathcal{U}})$. Então

$$(i) \int_{\mathcal{U}} \Delta u dx = \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

$$(ii) \int_{\mathcal{U}} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\mathcal{U}} u \nabla v dx + \int_{\partial \mathcal{U}} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

$$(iii) \int_{\mathcal{U}} (u \nabla v - v \nabla u) dx = \int_{\partial \mathcal{U}} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Onde $\frac{\partial w}{\partial \nu} := \nabla w \cdot \nu$ é a derivada normal de w , ou seja, derivada direcional de w na direção de ν .

Demonstração. Ver apêndice C da referência (EVANS, 2010). □

Teorema A 4 (Desigualdade de Cauchy). Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Demonstração. $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. □

Teorema A 5 (Desigualdade de Cauchy com ε). Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $\varepsilon > 0$. Então

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Note que

$$ab = ((2\varepsilon)^{1/2}a) \left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{1/2}} \right).$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy, temos

$$ab = ((2\varepsilon)^{1/2}a) \left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{1/2}} \right) \leq \frac{1}{2}((2\varepsilon)^{1/2}a)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{1/2}} \right)^2 = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

□

Definição A 3. A função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada convexa quando

$$f(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau f(x) + (1 - \tau)f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para cada $\tau \in [0, 1]$.

Teorema A 6 (Desigualdade de Young). Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $1 < p, q < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$.

Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. A função $f(x) = e^x$ é convexa, assim

$$ab = e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)} \leq \frac{1}{p}e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Teorema A 7 (Desigualdade de Young com ε). Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ e $\varepsilon > 0$. Então

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q,$$

para $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Demonstração. Basta aplicar a desigualdade de Young em

$$ab = ((\varepsilon p)^{1/p} a) \left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right).$$

□

Lema A 1. Se $f \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, com $\Omega \in \mathbb{R}^n$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $H \subset \Omega$ e

$$\mu(H) < \delta \implies \int_H |f|^p d\mu < \epsilon.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma sequência de conjuntos encaixados tal que $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E$, com

$$\mu(E_n) < \frac{q}{2^n} \text{ e } \int_{E_n} |f|^p d\mu \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, logo $F_{n+1} \subset F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(F_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ com $\int_{F_n} |f|^p d\mu \geq \epsilon$. Por conseguinte, temos

$$\mu\left(\bigcap_n F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = 0,$$

e como a integral é uma medida, podemos fazer a seguinte manipulação

$$\epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} |f|^p d\mu = \int_{\bigcap_n F_n} |f|^p d\mu = 0.$$

□

O lema de Grönwall estabelece uma importante estimativa aplicável à desigualdade envolvendo derivadas ou integrais. Existem duas versões do lema, a integral e a diferencial.

Lema A 2 (Grönwall - Versão Integral). Se, para todo $t_0 \leq t \leq t_1$, $\phi(t) \geq 0$ e $\psi(t) \geq 0$ são funções tais que a desigualdade

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds$$

se mantenha em $t_0 \leq t \leq t_1$, com K e L constantes reais positivas, então

$$\phi(t) \leq Ke^{L \int_{t_0}^t \psi(s)ds}$$

sendo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Demonstração. É fácil ver que

$$\frac{\phi(t)}{K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq 1.$$

Definindo $u(t) := K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds$, temos

$$\frac{u'}{u} \leq L\psi(s).$$

Integrando entre t_0 e t , obtemos

$$\ln(u) - \ln(u(t_0)) \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds$$

o que implica

$$u(t) \leq u(t_0)e^{L \int_{t_0}^t \psi(s)ds}.$$

Portanto, como $u(t_0) = K$ e $\phi(t) \leq u(t)$ vale

$$\phi(t) \leq Ke^{L \int_{t_0}^t \psi(s)ds}.$$

□

Lema A 3 (Grönwall - Versão Diferencial). (i) Seja $u(t)$ uma função não negativa e diferenciável em $[0, T]$, que satisfaz

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t),$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções integráveis em $[0, T]$. Então

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} + \int_0^t g(s)e^{\int_s^t f(\tau)d\tau}ds,$$

para todo $t \in [0, T]$.

(ii) Se $f(t)$ e $g(t)$ forem não negativas, então a expressão se simplifica a

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau) d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) ds \right],$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Multiplicando a expressão pelo fator integrante $e^{-\int_0^t f(\tau) d\tau}$ e rearranjando, obtemos

$$\left(u(t) e^{-\int_0^t f(\tau) d\tau} \right)' \leq g(t) e^{-\int_0^t f(\tau) d\tau}.$$

Assim, integrando de 0 a t , temos

$$u(t) e^{-\int_0^t f(\tau) d\tau} - u(0) \leq \int_0^t g(s) e^{-\int_0^s f(\tau) d\tau} ds,$$

e portanto,

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau) d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) ds \right].$$

□

Lema A 4. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Lema A 5. Se uma função $f(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > t_*$ e $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, t) ds < +\infty$, então

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, t) ds = 0.$$

Demonstração. Suponhamos por contradição que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq \tau$, para $\tau > 0$ constante. Assim, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \geq \int_{t_0}^{+\infty} \tau ds = +\infty.$$

O que contradiz a finitude da integral. Logo,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, t) ds = 0.$$

□

Teorema A 8 (Desigualdade de Minkowski). Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p dx \\
&\leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}) .
\end{aligned}$$

□

Lema A 6. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para cada $p \leq q \leq \infty$, e, ainda,

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p/q} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-p/q}.$$

Teorema A 9. Dada $u(\cdot, t)$ solução do problema de Cauchy para a equação do calor (2.12), com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p \leq \infty$, então

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_n(p) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

Demonstração. O resultado é imediato para $p = 1$, basta usar o Lema A 4. Já para $p = \infty$, note que

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Logo,

$$|u(x, t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4\pi^{n/2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Por conseguinte, o resultado segue, para isto, basta usar uma simples interpolação, Lema A 6. □

APÊNDICE B – APÊNDICE B - ESPAÇO DE SOBOLEV HOMOGÊNEO $\dot{H}^s$

Será abordado aqui uma noção dos espaços que serão considerados ao longo do texto, iniciando pelo espaço de Lebesgue L^p que corresponde ao espaço “trivial” de Sobolev. O espaço de Lebesgue L^p é o espaço das funções f tal que $\int |f|^p dx < \infty$, para $p \in [1, \infty)$. No caso em que $p = \infty$, é usada a norma do supremo, isto é, $\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ : |f| < C\}$ e o conjunto $\{x : |f(x)| > C\}$ é nula.

Deste modo, podemos introduzir os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, que também denotamos por $H^m(\Omega)$ quando $p = 2$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, o que significa que a função que pertence a esse espaço e todas as suas derivadas espaciais fracas de ordem até m pertencem a L^p , onde $m \geq 1$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Com isso, vamos definir o espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^m$.

Definição B 1. Os espaços homogêneos de Sobolev $\dot{W}^{m,p}$, similarmente $\dot{H}^m$, é o espaço das funções m vezes fracamente diferenciáveis f tal que $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$, em outras palavras,

$$\|f\|_{\dot{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^m \int_{\Omega} |D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_n} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Podemos generalizar esse conceito por transformada de Fourier.

Definição B 2. Dado $s > 0$, denotaremos por $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções f tais que

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

em que $\hat{f}(\xi)$ é a seguinte transformada de Fourier

$$\mathbf{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \mathbf{u}(x) dx.$$

Uma boa motivação para estudar tais espaços homogêneos, é que eles preservam boas propriedades de escala. Adiante apresentaremos uma série de resultados que nos auxiliarão para uma melhor compreensão do texto.

Inicialmente, precisaremos das seguintes desigualdades elementares de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (GNS) para funções $\mathbf{u} \in H^2(\mathbb{R}^3)$ quaisquer:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad (\text{B.1})$$

para a demonstração dessa desigualdade veja (TAYLOR, 2013), e

$$\|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.2})$$

que é obtida usando a transformada de Fourier. Por (B.1) e (B.2), obtém-se

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (\text{B.3})$$

Para demonstrarmos (B.3), note que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Nosso objetivo é derivar desigualdades do tipo (B.3). Com isso, vamos apresentar um resultado mais geral obtido em (BRAZ E SILVA; ZINGANO; ZINGANO, 2019).

Lema B 1. Sejam $m, l \in \mathbb{N}$ tais que $0 < l < m - 1$ e $m \geq 1$, então vale a seguinte desigualdade

$$\|D^l\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (\text{B.4})$$

para todo $\mathbf{u} \in H^{m+1}$.

Demonstração. Ver o referente artigo (BRAZ E SILVA; ZINGANO; ZINGANO, 2019). □