



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado em Matemática

Élida Karine De Lira Ferreira

# Homologia em Fractais

Recife

2022

Élida Karine De Lira Ferreira

## Homologia em fractais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega Santos

**Recife**

**2022**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

F383h Ferreira, Élide Karine de Lira  
Homologia em Fractais / Élide Karine de Lira Ferreira. – 2022.  
54 f.: il., fig.

Orientador: Fernando Antônio Nóbrega Santos.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,  
Matemática, Recife, 2022.  
Inclui referências e apêndice.

1. Geometria. 2. Topologia. 3. Homologia persistente. 4. Invariantes  
topológicos. 5. Fractais. I. Santos, Fernando Antônio Nóbrega (orientador). II.  
Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2024 - 82

**Élida Karine De Lira Ferreira**

Homologia em Fractais

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 29/04/2022

**Banca Examinadora**

---

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio  
Nóbrega Santos  
Universidade Federal de Pernambuco -  
UFPE

---

Examinador Interno: Prof. Dr. Eduardo  
Shirlippe Goes Leandro  
Universidade Federal de Pernambuco -  
UFPE

---

Examinador Externo: Prof. Dr. Raydonal  
Ospina Martínez  
Universidade Federal De Pernambuco

**Recife**  
**Ano 2022**

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir chegar até aqui, aos meus pais Elizeu Macrino e Ilda de Lira, pelo incentivo e ajuda constante durante toda minha jornada, a minha vó Ivonete P. De Lira Ferreira, que sempre me apoiou nos estudos, e a todos meus familiares.

Agradecer ao meu orientador Fernando pelas ideias e suporte dado, ao professor Jones Albuquerque pelo apoio. A todo departamento de matemática da UFPE e aos professores cada um com sua parcela de contribuição para minha formação acadêmica, inclusive a Miguel Loayza, Antonio de Souza, Eduardo Leandro E Airton Temistocles.

A Augusto Evaristo e Joicy Priscila por me acompanharem, ao meu noivo Wagner Aristacles e a todos amigos e colegas.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.

# RESUMO

Os fractais podem ser encontrados em vários lugares, desde os gerados por computador até os vistos na natureza. Por outro lado, a topologia aplicada é comumente usada para descrever e entender dados complexos. Esta dissertação visa fundir esses dois tópicos distintos para investigar superfícies fractais usando métodos e conceitos de análise de dados topológicos (TDA). Para tanto, estudamos a homologia de alguns fractais gerados por computador, a saber: fractais de Mandelbrot, Julia e Newton. Em cada um deles, calculamos múltiplas métricas em homologia persistente em função de um parâmetro de filtragem, como seus diagramas de persistência, códigos de barras, curvas de Betti e características de Euler. Tentamos procurar uma assinatura para tais fractais em comparação com não-fractais usando a metodologia da TDA. Portanto, investigamos esses fractais para diferentes parâmetros de controle que podem ter influenciado sua homologia persistente, por exemplo, quantidade de pontos, qualidade da imagem, etc. Em particular, também investigamos a transição de fase topológica desses fractais estudando os locais dos zeros da curva da característica de Euler. Encontramos diferenças entre a transição de fase das superfícies fractais quando contrastadas com não fractais, isto é, superfícies sem características autossimilares. Mais especificamente, os zeros das características de Euler ocorrem em limiares mais altos para superfícies fractais investigadas nesta dissertação. Esperamos que este trabalho possa contribuir para uma compreensão adequada dos fractais na linguagem de homologia persistente.

**Palavras-chave:** topologia; homologia; homologia persistente; invariantes topológicos; fractais.

# ABSTRACT

Fractals can be found in many places, from computer-generated ones to those seen in nature. On the other hand, applied topology is commonly used to describe and understand complex data. This dissertation aims to merge these two distinct topics to investigate fractal surfaces using methods and concepts of topological data analysis (TDA). To this aim, we study the homology of some computer-generated fractals, namely: Mandelbrot, Julia and Newton fractals. In each of them, we calculated multiple metrics in persistent homology as a function of a filtration parameter, such as their persistence diagrams, barcodes, Betti curves and Euler characteristics. We attempt to look for a signature for such fractals in comparison to non-fractals using the TDA methodology. Therefore, we investigated those fractals for different control parameters that may have influenced its persistent homology, e.g. amount of points, quality of the image, etc. In particular, we also investigated the topological phase transition of those fractals by studying the loci of the zeros of the Euler characteristic curve. We found differences between the phase transition of the fractal surfaces when contrasted with non-fractals, that is, surfaces without self-similar characteristics. More specifically, The zeros of the Euler characteristics occurs at higher thresholds for fractal surfaces investigated in this work. We hope that this work may contribute to a proper understanding of fractals in the language of persistent homology.

**Keywords:** topology; homology; persistent homology; topological invariants; fractals.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>TOPOLOGIA</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>FRACTAL</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>HOMOLOGIA</b> . . . . .	<b>18</b>
4.1	<b>Grafo</b> . . . . .	<b>18</b>
4.2	<b>Complexos Simpliciais</b> . . . . .	<b>19</b>
4.3	<b>Grupo de homologia</b> . . . . .	<b>21</b>
4.4	<b>Homologia Persistente</b> . . . . .	<b>22</b>
4.5	<b>Invariantes Topológicos</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE TOPOLÓGICA DE SUPERFÍCIE FRACTAL</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>5.1</b>	<b>Invariantes topológicos nos fractais</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>5.2</b>	<b>Variando os parâmetros</b> . . . . .	<b>28</b>
5.2.1	Variando o número de pixels em superfícies fractais . . . . .	28
5.2.1.1	<i>Conjunto de Mandelbrot</i> . . . . .	28
5.2.1.2	<i>Conjunto de Julia</i> . . . . .	31
5.2.1.3	<i>Conjunto de Newton</i> . . . . .	33
5.2.2	Variando o número de ciclos em superfícies fractais . . . . .	35
5.2.2.1	<i>Conjunto de Mandelbrot</i> . . . . .	36
5.2.2.2	<i>Conjunto de Julia</i> . . . . .	39
5.2.2.3	<i>Conjunto de Newton</i> . . . . .	40
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>APÊNDICE A – PARTE COMPUTACIONAL</b> . . . . .	<b>48</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Fractais são padrões sem fim, dirigidos por recursão que não podem ser usadas para prever eventos significantes em sistemas caóticos. Eles estão presentes em muitas coisas na natureza e em outras áreas de nossa vida, sendo aplicada para facilitar nossos dias. O uso mais prático é na ciência da computação em compressão fractal de imagem. Arquivos como JPEG ou GIF e outras vantagens como pixelização, são usadas para censura em filmes. O termo fractal surgiu com Mandelbrot e Hudson (2006), que se referiam a ele como "rugosidades". Técnicas usando fractais para descrever os lucros e perdas do mercado de ações funcionaram bem e trouxeram o livro [Mandelbrot e Hudson 2006].

Outro estudo que utiliza, está relacionada ao pensamento complexo. Owen, et al. [Owen, Chang e Manning 2021] descobriu um novo jeito de observar redes de cérebros neurais usando fractais para comunicar padrões entre diferentes regiões do cérebro, quando as pessoas ouviam uma pequena história. O pesquisador mostrou que quando as pessoas ouviam uma gravação de áudio de dez minutos de história, as redes cerebrais se organizavam automaticamente. Assim que ouviram a versão alterada, esta organização foi interrompida. Se foi embaralhada, não mostrou nenhum padrão consistente.

Topologia é um ramo da matemática que estuda formas. Até recentemente, tem havido um crescimento constante da topologia com análise de dados geométricos, que é chamada de Análise de Dados Topológicos (TDA). É focada na extração de informações de conjuntos de dados de alta dimensão. [Amorim, Moreira e Santos 2019] descreveu a ideia de transições de fase topológica em sistemas complexos através de grupos de homologia como um limiar. Também foi analisada a aplicação em redes de câncer para modelagem de transições de fase, em redes cerebrais, utilizando a geometria.

O início se deu com o estudo de grafo aleatório, o modelo  $G(n,p)$  começou com Erdős e Rényi na década de 1960, onde cada grafo era constituído por nós aleatoriamente e esta pesquisa incitou mais descobertas. Assim, em 2016, [Linial e Peled 2016] provou que em  $p = \frac{1}{n}$  ocorre a transição de fase, e neste ponto o grafo aleatório adquire um componente gigante. Após isso, [Santos et al. 2019] demonstrou que transições de fase topológicas em uma rede complexa ocorrem quando a característica de Euler é nula. A entropia de Euler

---

é singular, observada em redes cerebrais e aplicada à neurociência. Essa transição pode ser vista como uma ‘impressão digital’ para diferenciar sistemas, sendo utilizada como biomarcadores topológicos.

[Bobrowski e Skraba 2020] descrevem a formação de ciclos gigantes na homologia persistente como um sinal topológico, e isso é percebido em códigos de barras na homologia persistente. A construção desses ciclos gigantes é chamada de percolação homológica. Na pesquisa de Paiva Neto [Neto 2022] esta afirmação obteve uma confirmação empírica para o bi-toro e a garrafa de Klein, variedades bidimensionais, sendo comprovada a inversão da relação de desigualdade entre o valor de percolação  $t^{perc}$  e o zero da curva característica de Euler  $t^{ce}$  (inicialmente sendo  $t^{perc} > t^{ce}$ , passando para  $t^{perc} < t^{ce}$ ) de um real valor  $N_0$  atribuído como o número de pontos distribuídos aleatoriamente pelo processo espacial de Poisson sobre as duas variedades mencionadas, o que se torna uma nova conjectura.

A relação entre fractais com análise de dados topológicos nunca foi explorada antes. A presente pesquisa visa compreender as métricas de TDA aplicadas a fractais com dados experimentais para reconhecer os comportamentos para encontrar uma assinatura para os fractais a serem investigados. Assim, serão analisados os grafos e complexos simpliciais e, por fim, serão reconhecidos os resultados obtidos a partir dos fractais de Mandelbrot, Julia e Newton. Barcodes, diagrama de persistência, curvas de Betti versus distância de filtragem e Curvatura de Euler das Características foram calculados para entender o comportamento de cada fractal.

Esta dissertação foi estruturada para permitir uma visão clara sobre as propriedades invariantes e aplicações nos fractais. Assim, foi dividido em sete capítulos.

O capítulo 2 apresentou alguns conceitos elementares sobre topologia que são úteis para a estrutura deste estudo como topologia, espaço topológico, espaço métrico e propriedades.

O capítulo 3 tratou do objeto de estudo, explicando o princípio matemático denominado autossimilaridade; apresentando os conceitos para a compreensão dos fractais, e a definição de cada um a ser utilizado.

O capítulo 4 mostra noções sobre grafos e complexos simpliciais para a compreensão e trabalho da teoria dos grafos.

O capítulo 5 apontou assuntos como grupo de homologia, homologia persistente e invariantes topológicos relacionados com a teoria da homologia. A homologia associa uma sequência de objetos algébricos com outros objetos matemáticos, como espaços topológicos.

O Capítulo 6 explorou todos os resultados obtidos a partir da análise da topologia na superfície fractal observando seu comportamento, propriedades e descrição.

O capítulo 7 apresentou as Conclusões e perspectivas para descobrir o que pode ser inferido dos cálculos obtidos durante esta pesquisa; além do que foi observado através de barcodes, diagramas de persistência, curvatura de Euler e curva de Betti.

Por fim, as Referências.

## 2 TOPOLOGIA

Neste capítulo, introduziremos os conceitos básicos para o entendimento da topologia e dos termos que serão utilizados nos capítulos posteriores, de acordo com [Zomorodian 2005] e [Munkres 2000].

**Definição (Topologia):** Uma topologia em um conjunto  $X$  é um subconjunto de  $2^X$ , onde  $2^X$  é conjunto das partes, tal que :

- (a)  $\emptyset, X \in T$ ;
- (b) Se  $S_1, S_2 \in T$ , então  $S_1 \cap S_2 \in T$ ;
- (c) Se  $\{S_j | j \in J\} \subseteq T$ , a  $\bigcup_{j \in J} S_j \in T$ .

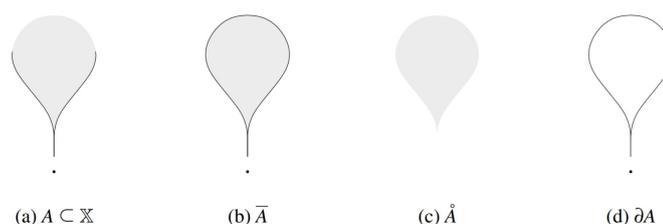
**Definição (Conjunto aberto, conjunto fechado):** Dado  $X$  um conjunto e  $T$  uma topologia. Se  $S \in T$ , então  $S$  é um *conjunto aberto*. Os *conjuntos fechado* são  $X \setminus S$ , onde  $S \in T$ .

**Definição (Espaço Topológico):** O par  $(X, T)$  de um conjunto  $X$  e uma topologia  $T$ , é um *espaço topológico*.

**Definição (interior, fecho, fronteira):** O *interior*,  $\text{int}(A)$  ou  $\overset{\circ}{A}$ , de um conjunto  $A \subseteq \mathbb{X}$  é a união de todos conjuntos abertos contidos em  $A$ . O *fecho*  $\bar{A}$  de um conjunto  $A \subseteq \mathbb{X}$  é a intersecção de todos os conjuntos fechados contendo  $A$ . A *fronteira* de um conjunto  $A$  é  $\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}(A)$ .

**Definição (Vizinhanças):** Uma *vizinhança* de  $x \in X$  é qualquer  $A \subseteq X$  tal que  $x \in \text{int}(A)$ . Uma base de vizinhanças em  $x \in X$  é uma coleção de vizinhanças de  $x$  tal que cada vizinhança de  $x$  contém uma das vizinhanças base.

**Figura 1** – Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{X}$  e seus fecho, interior e fronteira



Fonte: Zomorodian (2005)

**Definição (Ponto Limite):** Se  $A$  é um subconjunto do espaço topológico  $X$  e se  $x$  é um ponto de  $X$ , dizemos que  $x$  é um *ponto limite* de  $A$  se cada vizinhança de  $x$  intersecta  $A$  em algum ponto que não seja o próprio  $x$ .

**Definição (Convergência):** Em um espaço topológico arbitrário, diz-se que uma sequência de pontos  $x_1, x_2, \dots$  do espaço  $X$  converge para o ponto  $x$  de  $X$  desde que, correspondendo a cada vizinhança  $U$  de  $x$ , existe um inteiro positivo  $N$  tal que  $x_n \in U$  para todo  $n \geq N$ .

**Definição (Métrica):** Uma *métrica* ou função distância  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função satisfazendo os seguintes axiomas:

- (a) Para todos  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) \geq 0$  (positividade).
- (b) Se  $d(x, y) = 0$ , então  $x = y$  (não-degeneração).
- (c) Para todos  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetria).
- (d) Para todos  $x, y, z \in X$ ,  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  ( desigualdade triangular ).

**Definição (Espaço métrico):** Um conjunto  $X$  com uma função métrica é chamado um *espaço métrico*. Damos-lhe a topologia métrica de  $d$ , onde o conjunto de bolas abertas definido usando  $d$  serve como vizinhança base.

Um espaço métrico é um espaço topológico.

**Definição (Bola aberta):** Dado  $(X, d)$  espaço métrico, a *bola aberta*  $B(x, r)$  com centro  $x$  e raio  $r > 0$  com respeito a métrica  $d$  é definido para ser  $B(x, r) = \{y | d(x, y) < r\}$ .

**Definição (Diâmetro):** O diâmetro de um conjunto  $U$ , não-vazio, é definido como a menor cota superior das distâncias entre pares de pontos em  $U$ , isto é:

$$|U| = \sup\{ |x - y| : x, y \in U\}$$

**Definição (Espaço Euclidiano):** Dados  $u_i$  coordenadas cartesianas, o *produto Cartesiano* de  $n$  cópias de  $\mathbb{R}$  o conjunto de números reais, juntamente com a métrica euclidiana

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i(x) - u_i(y))^2},$$

é o espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição (homeomorfismo):** Um *homeomorfismo*  $f: X \rightarrow Y$  uma função bijetiva, tal que ambos  $f, f^{-1}$  são contínuas. Nós dizemos que  $X$  é homeomórfico a  $Y$ ,  $X \approx Y$  tem o mesmo tipo topológico.

**Definição (Gráfico):** Um *gráfico* em  $p \in X$  é uma função  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , onde  $U \subseteq \mathbb{X}$  é um

conjunto aberto contendo  $p$  and  $\phi$  é um homeomorfismo sobrejetivo em um subconjunto aberto  $\mathbb{R}^d$ . A dimensão do gráfico  $\phi$  é  $d$ . Dado  $u^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , as coordenadas padrão em  $\mathbb{R}^d$ , as funções de coordenadas do gráfico são  $x^i = u^i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definição (Hausdorff):** Um espaço topológico  $X$  é Hausdorff se, para todo  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , existem vizinhanças  $U, V$  de  $x, y$ , respectivamente, tais que  $U \cap V = \emptyset$ .

**Teorema:** Um espaço métrico é sempre Hausdorff.

**prova:** Sejam  $x \neq y$  pontos de um espaço métrico  $X$ . O  $r = d(x, y)$  é positivo e consideremos os conjuntos abertos

$$U = B(x, r/2), \quad V = B(y, r/2).$$

Como  $x \in U$  e  $y \in V$ , resta mostrar que  $U \cap V$  é vazio. Suponha que  $z \in U \cap V$ . Devemos ter

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r/2 + r/2,$$

uma contradição. Assim,  $U \cap V$  é vazio e  $X$  é Hausdorff.

**Definição (Separável):** Um espaço topológico  $X$  é separável se tiver uma base contável de vizinhanças.

**Definição (Variedade):** Um espaço Hausdorff separável  $X$  é chamado de  $d$ -variedade (topológica) se houver um gráfico  $d$ -dimensional em cada ponto  $x \in X$ , isto é, se  $x \in X$  tiver uma vizinhança homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Ela é chamada de variedade  $d$  com fronteira se  $x \in X$  tem uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{R}^d$  ou semi-espaço euclidiano  $\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^d | x_1 \leq 0\}$ . A fronteira de  $X$  é o conjunto de pontos com vizinhança homeomórfica a  $\mathbb{H}^d$ . A variedade tem dimensão  $d$ . A fronteira de uma  $d$ -variedade com fronteira é uma  $(d-1)$ -variedade sem fronteira. **Definição (Cobertura):** Uma cobertura de  $A \subseteq X$  é uma família  $\{C_j | j \in J\}$  no conjunto das partes, tal que  $A \subseteq \bigcup_j C_j$ . Uma cobertura aberta é uma cobertura que consiste em conjuntos abertos. Uma subcobertura de uma cobertura  $\{C_j | j \in J\}$  é uma cobertura  $\{C_k | k \in K\}$ , onde  $K \subseteq J$ .  $A \subseteq X$  é compacto se toda cobertura aberta de  $A$  tem uma subcobertura finita.

**Definição (Loop):** Dado  $X$  um espaço; Seja  $x_0$  um ponto de  $X$ . Um caminho em  $X$  que começa e termina em  $x_0$  é chamado um loop baseado em  $x_0$ .

## 3 FRACTAL

O que há em comum entre as linhas costeiras de uma ilha oceânica, as nuvens, sistemas nervosos ou montanhas? Mandelbrot em [Mandelbrot 2021] escreveu: "Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line".

Existe um princípio matemático chamado autossimilaridade que se refere a qualquer coisa cuja forma se repete sucessivamente em escalas cada vez menores, temos como exemplo os galhos de árvores. Mandelbrot percebeu isto que era um tipo novo de geometria e deu o nome de Fractal que também costumam chamar "a impressão digital de Deus".

**Figura 2** – A esquerda uma árvore e a direita a figura de Lichtenberg, que é uma descarga elétrica ramificada



Fonte: science photo library

O matemático Benoit Mandelbrot criou o termo fractal, derivado do latim, "fractus", que significa "vidro quebrado" uma alusão as linhas quebradas. Em 1980, Mandelbrot foi o pioneiro no mundo fractal, a partir daí foi usada por cientistas, analistas e teóricos de todas disciplinas - de astrofísica, economia a ciência natural, mídia social a medicina e climatologia a psicologia humana.

Armado com um supercomputador de última geração, Mandelbrot começou a estudar uma equação muito curiosa e estranhamente simples que poderia ser usada para desenhar uma forma muito incomum. Essa descoberta foi chamada de conjunto de Mandelbrot, e este será um dos nossos objetos de estudo.

Imagens do conjunto de Mandelbrot têm aparecido na cultura popular, e vemos em camisetas, nos créditos de abertura do programa de televisão 'QI' e menções em programa de televisão como o chamado de 'The Big Bang Theory'. Mesmo que a natureza dos fractais

seja complicada, eles têm algum uso em aplicações da vida real, como na arte com imagens interessantes, arquitetura. Jackson Pollock [Owen, Chang e Manning 2021] e Max Ernst [Taylor et al. 2005], Artistas, fizeram pinturas fractais. Outros exemplos estão em Star Trek e Star Wars [Peitgen et al. 2012], eles criaram paisagens que seriam impossíveis com a tecnologia convencional e são usados também para criar alguns gráficos de computador.

O uso mais útil dos fractais, na ciência da computação, é a compressão de imagem fractal, que reduz a quantidade de bits, essa compressão usa o fato de que alguns fenômenos no mundo real são bem descritos pela geometria fractal, para arquivos como JPEG ou GIF e outras vantagens sem ocorrer pixelização, isto é, sem perda de dados. Outro exemplo está nas antenas de telecomunicações com formato fractal que dependem do fractal aplicado e frequência de interesse onde se atinge alto desempenho, na medicina utilizado para interações de biossensores.

Características que descrevem os fractais:

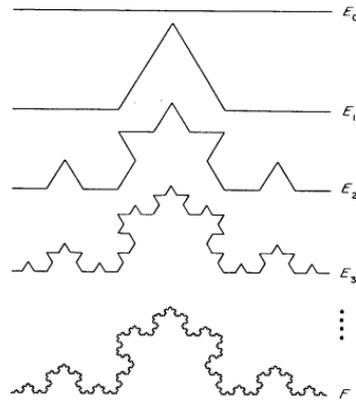
- Auto-similaridade: É a semelhança de uma parte com o todo. Podendo ser exata, aproximada ou estatística, independente da escala;
- Complexidade infinita: ampliação infinita, nunca teríamos uma imagem finalizada;
- Irregularidade: No sentido de rugosidade (não- suavidade) ou fragmentação;
- Dimensão não-inteira: A maioria dos fractais possuem dimensão não-inteira. A dimensão quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto.

Segundo [Pompilio 2019] Um fractal é um subconjunto de um espaço euclidiano cuja dimensão Hausdorff estritamente excede sua dimensão topológica.

A dimensão fractal pode ser calculada pelo método de Hausdorff-Besicovitch [Falconer 2004], pois permite o cálculo para conjuntos irregulares.

**Definição (Dimensão Hausdorff-Besicovich):** Para  $E$  um subconjunto limitado não-vazio de  $\mathbb{R}^n$ , e seja  $N_r(E)$  o menor número dos conjuntos de diâmetro  $r$  que podem cobrir  $E$ . A dimensão é definida pela expressão:

$$dimE = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r}$$

**Figura 3** – Construção da curva de Von Koch

Fonte: Falconer (2004)

Para a Curva de Koch  $N_r(E)=4$  e  $r=1/3$ , em outras palavras, cada linha se torna quatro cópias auto semelhantes com 3 para fator de escala, logo  $\dim E = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$ . Já os conjuntos de Mandelbrot e Julia possuem dimensão 2 [Shishikura 1992].

**Definição (Conjunto de Mandelbrot):** O conjunto de Mandelbrot é definido pelo conjunto de todos os pontos do plano complexo para o qual a iteração abaixo

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

permanece limitada (ie,  $|z_n|$  não diverge para o infinito). Um valor  $z_0$  é usado como valor de início para a equação iterativa. Por exemplo, para  $c=1$  as primeiras iterações do esquema são:

$$z_0 = 1 + 0i,$$

$$z_1 = (1 + 0i)^1 + 1_0i = 1 + 1 = 2,$$

$$z_2 = (2 + 0i)^2 + 1 + 0i = 4 + 1 = 5,$$

$$z_3 = (5 + 0i)^2 + 1 + 0i = 25 + 1 = 26...$$

Os valores de  $|z^n|$  estão claramente divergindo ao infinito, portanto  $c=1+0i$  não é um membro do conjunto de Mandelbrot. No entanto, para  $c=i$  as primeiras iterações são:

$$z_0 = 0 + i,$$

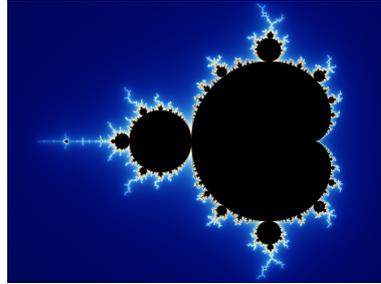
$$z_1 = (0 + i)^2 + 0 + i = -1 + i,$$

$$z_2 = (-1 + i)^2 + 0 + i = 1 - 2i - 1 + i = -i,$$

$$z_3 = (-i)^2 + 0 + i = -1 + i...$$

Aqui o esquema iterativo é cíclico entre  $z = -1 + i$  and  $z = -i$ , portanto  $|z| \leq \sqrt{2}$  e o esquema iterativo permanece limitado. Portanto,  $c=i$  é um membro do conjunto de Mandelbrot.

**Figura 4** – Um conjunto de Mandelbrot



Fonte: Wolfgang Beyer (2013)

Outro conjunto fractal é conhecido como conjunto de Julia nomeado por Gaston Julia um matemático francês que explorou suas propriedades; seu interesse se deu ao ler o artigo de 1879 de Sir Arthur Cayley chamado "O problema imaginário de Newton-Fourier" (Peitgen et al. 1992 p. 775). Cayley estava estudando a equação  $(z) = z^3 + c = 0$ , usando o método de Newton-Fourier para buscar as raízes.

**Definição (Conjunto de Julia):** Uma definição precisa do conjunto de Julia de um polinômio é: o limite da coleção de pontos cujas órbitas escapam ao infinito. Isso significa que pontos em um conjunto de Julia têm órbitas que não escapam ao infinito, mas arbitrariamente muito próximos há pontos cujas órbitas escapam [Devaney e Branner 1994].

Para um número complexo  $c$ , o conjunto de Julia de  $c$  é o conjunto de todos os  $z$  para os quais a iteração

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

não diverge ao infinito. Os fractais do conjunto de Julia são normalmente gerados pela inicialização de um número complexo  $z = x + iy$ ,  $z$  é atualizado repetidamente, onde  $c$  é outro número complexo que fornece um conjunto de Julia específico.

**Definição (Conjunto de Newton):** É caracterizado pelo método de Newton aplicado a um polinômio fixo  $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ . Definido por

$$z_{n+1} := z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$$

Neste trabalho foi utilizado  $z_n = z^4 + 1$  portanto  $z_{n+1} = z_n - \frac{(z^4+1)}{4z^3}$ .

## 4 HOMOLOGIA

Neste capítulo, introduziremos conceitos para nosso entendimento e trabalho na teoria de grafos. Antes de partirmos para a definição de complexo simplicial, falaremos sobre grafos pois são os exemplos mais simples de complexos simpliciais. Assim como também falaremos da homologia, que em geral, associa uma sequência de objetos algébricos com outros objetos matemáticos como espaços topológicos. O principal objetivo da topologia é classificar os espaços de acordo com sua conectividade, vista em [Lima 2009] e [Zomorodian 2005].

### 4.1 Grafo

**Definição (Grafo):** é um par  $G = (V, E)$ , consistindo de um conjunto  $V(G)$  de *vértices* ou *nós* e um conjunto  $E(G)$ , forma disjunta  $V$ , de *arestas* ou *links*.

**Definição (Subgrafo):**  $H = (V', E') \subseteq G$  é *subgrafo* de  $G$  se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ . Quando  $H \subseteq G$  mas  $H \neq G$ , escrevemos  $H \subset G$  e chamamos  $H$  de um *subgrafo próprio* de  $G$ .

Dado  $x \in V$ . Dizemos que  $y$  é vizinho de  $x$  quando existe uma aresta que liga  $x$  a  $y$ , e denotaremos por  $x \sim y$ . Então o *conjunto de vizinhos* de  $x$  é

$$\text{neigh}(x) = \{y \in V, x \sim y\}.$$

O grau de  $x$  é definido como:

$$\text{deg}(x) = \#\text{neigh}(x)$$

**Definição (Caminho):** Um *caminho* em  $G$  é uma sequência finita não-nula  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ , cujos termos são alternadamente vértices e arestas, tal que, para  $1 \leq i \leq k$ , as extremidades de  $e_i$  são  $v_{i-1}$  e  $v_i$ .

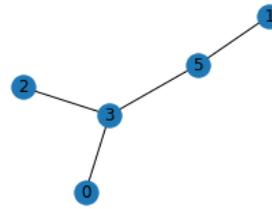
**Definição (Vértices Conexos):** Dizemos que dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são *conexos* se existe um  $(u, v)$ -caminho em  $G$ . A conexão é uma relação de equivalência no conjunto de vértices  $V$ . Assim, há uma partição de  $V$  em subconjuntos não vazios  $V_1, V_2, \dots, V_\omega$  tal que dois vértices  $u$  e  $v$  são conexos se e somente se ambos  $u$  e  $v$  pertencem ao mesmo conjunto  $V_i$ .

**Figura 5** – Tabela com o grau de cada nó da Figura 6

Nó	Grau
0	1
1	1
2	1
3	3
4	0
5	2

Fonte: A autora (2022)

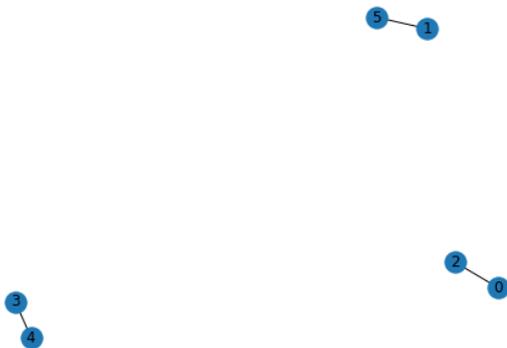
**Figura 6** – Exemplo de grafo com 6 nós e 4 arestas.



Fonte: A autora (2022)

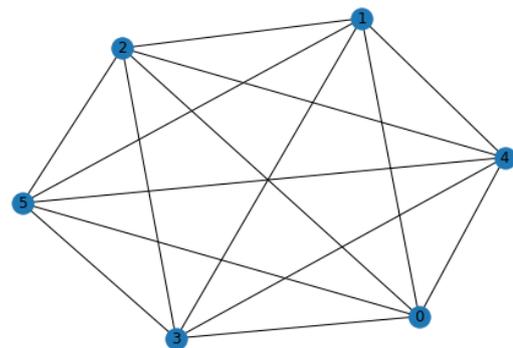
**Definição (Componentes):** Os subgrafos  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$  são chamados as *componentes* de  $G$ . Se  $G$  tem exatamente uma componente,  $G$  é *conexo*; caso contrário  $G$  é *desconexo*.

**Figura 7** – Grafo com 3 componentes conexas



Fonte: A autora (2022)

**Figura 8** – Grafo completo



Fonte: A autora (2022)

Um caminho é *fechado* se ele tem um comprimento positivo e sua origem e término são os mesmos. Um caminho fechado cuja origem e vértices internos são distintos é um *ciclo*.

## 4.2 Complexos Simpliciais

Dado  $S = \{ p_0, p_1, \dots, p_k \} \subseteq \mathbb{R}^d$ .

**Definição (Combinação linear):** uma *combinação linear* é  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i$ , para algum  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

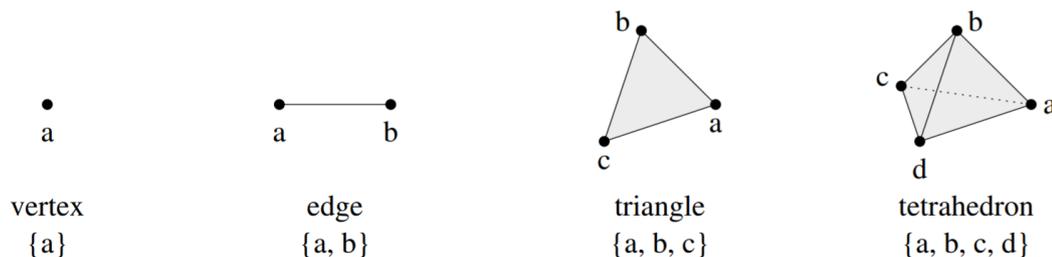
**Definição (Combinação afim):** uma *combinação afim* é uma combinação linear com  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ .

**Definição (Combinação convexa):** Uma *combinação convexa* é uma combinação afim com  $\lambda \geq 0$ , para todo  $i$ . O conjunto de todas combinações convexas é a *casca convexa*.

**Definição (Linearmente independente):** Um conjunto  $S$  é *linearmente independente (afim)* se nenhum ponto em  $S$  é uma combinação linear (afim) dos outros pontos em  $S$ .

**Definição (K-Simplexo):** Um  $k$ -simplexo pela definição geométrica é o casco convexo de  $k+1$  pontos independentes afim  $S = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Os pontos em  $S$  são os *vértices* do simplexo.

Figura 9 –  $k$ -símplices, para cada  $0 \leq k \leq 3$



Fonte: Zomorodian (2005)

No  $k$ -simplexo,  $\sigma$ , definido por  $S = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Um simplexo  $\tau$  definido por  $T \subseteq S$  é uma *face* de  $\sigma$  e tem  $\sigma$  como uma *coface*. A relação é denotada com  $\sigma \geq \tau$  e  $\tau \leq \sigma$ . Podemos notar que  $\sigma \leq \sigma$  e  $\sigma \geq \sigma$ . E o  $k$ -simplex tem  $\binom{k+1}{l+1}$  faces de dimensão  $l$ .  $\sum_{l=-1}^k \binom{k+1}{l+1} = 2^{k+1}$  faces no total, e também é um objeto combinatório muito uniforme e simples.

**Definição (Complexo Simplicial):** Um *complexo simplicial*  $K$  é um conjunto finito de símplices tal que:

- (a)  $\sigma \in K, \tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$ ;
- (b)  $\sigma, \sigma' \in K \Rightarrow \sigma \cap \sigma' \leq \sigma, \sigma'$ .

A *dimensão* de  $K$  é  $\dim K = \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in K\}$ . Os vértices de  $K$  são as 0-símplices ou simplexos, as arestas são os 1-símplices, os triângulos são os 2-símplices,

os 3-simplexos são o tetraedro, os 4-simplexos são as 5-células e assim por diante.

É possível ver uma definição de complexos simpliciais sem geometria, é chamado *Complexo abstrato simplicial*.

**Definição (Complexo Simplicial Abstrato):** É um conjunto  $K$ , junto com uma coleção  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $K$  chamados (abstratos) simplices tais que:

- (a) Para todo  $v \in K$ ,  $\{v\} \in \mathcal{S}$ . Chamamos os conjuntos de  $\{v\}$  o *vértices* de  $K$ .
- (b) Se  $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ , então  $\tau \in \mathcal{S}$ .

Dizemos que  $\sigma$  é um  $k$ -simplexo de dimensão  $k$  se  $|\sigma|=k+1$ . Se  $\tau \subseteq \sigma$ ,  $\tau$  é uma *face* de  $\sigma$  and  $\sigma$  é a *coface* de  $\tau$ . Note que  $\emptyset$  é como um  $(-1)$ -simplexo. Um *subcomplexo* é um complex simplicial  $L \subseteq K$ .

**Definição (complexo Vietoris-Rips):** Seja  $(X, d_1)$  um espaço métrico finito. O complexo Vietoris-Rips de  $(X, d_1)$  em um parâmetro real  $r \geq 0$  é o complexo simplicial

$$Rips_r(X, d_1) := \{ \sigma \subseteq X : \forall x, y \in \sigma, d_1(x, y) \leq r \} .$$

### 4.3 Grupo de homologia

Dado  $A$  um anel comutativo com unidade. Um complexo de cadeias com coeficientes em  $A$  é uma sequência  $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$  de  $A$ -módulos  $C_p$ ,  $p \geq 0$ , inteiro, e homomorfismos  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  tal que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ . Nós escrevemos

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Cada elemento  $x \in C_p$  é chamado  $p$ -cadeia ou uma *cadeia com dimensão  $p$* . Se  $\partial_p x = 0$ , dizemos que  $x$  é um  $p$ -ciclo ou apenas um ciclo, ou seja, o conjunto de todos os  $p$ -ciclos é o núcleo do homomorfismo  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ , que é denotado por  $Z_p$ .

**Definição (Orientação):** Uma orientação de um  $k$ -simplex é dada por uma ordenação dos vértices e é denotada por  $[v_1, \dots, v_{k+1}]$

**Definição (Operador Fronteira):** Seja  $K$  um complexo simplicial e  $\sigma \in K$ ,  $[\sigma] =$

$[v_1, \dots, v_{k+1}]$ , um  $k$ -simplex orientado. O operador fronteira de  $\partial_k$  é

$$\partial_k([v_1, \dots, v_{k+1}]) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} [v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]$$

onde  $\hat{v}_i$  denota a variável omitida. Se  $y = \partial_{p+1}x$ , com  $x \in C_{p+1}$ , então também definimos  $y$  é o *operador de fronteira* de  $(p+1)$ -cadeia  $x$ . Como exemplo, tomemos a fronteira dos simplices na Figura 7, com orientação no sentido anti-horário, de modo que

- $\partial_1[a, b] = b - a$ .
- $\partial_2[a, b, c] = [b, c] - [a, c] + [a, b]$ .
- $\partial_3[a, b, c, d] = [b, c, d] - [a, c, d] + [a, b, d] - [a, b, c]$ .

$B_p$  é o conjunto de  $p$ -cadeias que são o limite da  $(p+1)$ -cadeia, onde  $B_p = \text{Im}(\partial_{p+1})$ .

Como  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$  isso significa que toda fronteira é ciclo, ou seja  $B_p \subset Z_p$ .

**Definição (grupo de homologia):** o módulo quociente  $H_p = H_p(\mathcal{C}) = Z_p/B_p = \ker \partial_p / \text{im} \partial_{p+1}$  é o grupo de homologia  $p$ -dimensional do complexo  $\mathcal{C}$ .

Seus elementos são a classe de homologia

$$[z] = z + B_p = \{ z + \partial x; x \in C_{p+1} \}$$

do ciclo  $z \in Z_p$ .

## 4.4 Homologia Persistente

Chamamos persistência porque classifica seus atributos por sua vida útil na filtragem: sua persistência diante do crescimento.

**Definição (Filtração):** Uma coleção  $\{X_t\}_{t \in \Lambda}$  de subcomplexos de  $X$ , de tal modo que

$$\emptyset = X_{t_0} \subseteq X_{t_1} \subseteq \dots \subseteq X_{t_m} = X$$

é chamado de filtragem de  $X$ , e  $X$  é um complexo de filtragem. O conjunto de índices  $\Lambda$  de um processo de filtragem do complexo simplicial pode ser definido de acordo com a distância entre os pontos onde  $\Lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definição (Homologia Persistente):**

*Formulação algébrica.* Seja  $X_l$  uma filtração. O  $k$ -ésimo grupo de homologia  $p$ -persistente de  $X_l$  é

$$H_k^{l+p} = Z_k^l / (B_k^{l+p} \cap Z_k^l)$$

Este grupo está bem definido porque  $(B_k^{l+p} \cap Z_k^l)$  é a interseção de dois subgrupos de  $C_k^{l+p}$  que é o conjunto de todas as  $k$ -cadeias.

*Homologia intuitiva* Nos dá mais informações sobre uma forma, como a existência de regiões de baixa ou alta curvatura.

**Definição (Barcode):** É uma representação gráfica dos grupos de homologia como uma coleção de segmentos de retas horizontais. Intuitivamente denota o tempo de vida (persistência) de ciclos não-triviais em um complexo em crescimento. A extremidade esquerda significa o nascimento de um novo atributo topológico e a extremidade direita sua morte. Se um  $\sigma_s$  cria uma classe de homologia no tempo  $s$  (índice na filtração) que é destruído no tempo  $t$ ,  $0 \leq s < t \leq m$  (onde  $m$  é o índice da filtração), então o intervalo  $[s, t)$  é adicionado ao barcode de persistência correspondente, já se o simplexo cria uma classe de homologia no tempo  $s$  que sobrevive ao longo do processo, então o intervalo  $[s, \infty)$  é adicionado ao barcode [Chintakunta et al. 2015]. O intervalo mais longo é o mais importante porque persiste em ser uma característica do complexo.

## 4.5 Invariantes Topológicos

Uma ferramenta muito utilizada é um *invariante topológico*, um mapa que atribui o mesmo objeto a espaços do mesmo tipo topológico. Ou pensando na contrapositiva, se dois espaços são atribuídos a objetos diferentes, eles têm tipos topológicos diferentes.

**Definição (k-ésimo número de Betti):** O  $k$ -ésimo número de Betti  $\beta_k$  do complexo simplicial  $K$  é  $\beta(H_k)$ , o posto de  $H_k$ .

$$\beta_k(X) = \text{rank}(H_k(X))$$

ou podemos escrever como

$$\beta_k(X) = \dim \ker \partial_k - \dim \text{im} \partial_{k+1}$$

Os números de Betti têm significado intuitivo,  $\beta_0$  mede o número de componentes do complexo, enquanto  $\beta_1$  calcula os túneis, loops que não podem ser deformados a um ponto, já  $\beta_2$  conta o número de vazios.

**Definição (Característica de Euler):** Seja  $K$  um complexo simplicial e  $s_i = \text{card}\{\sigma \in K \mid \dim\sigma = i\}$ . A *característica de Euler*  $\mathcal{X}(K)$  is

$$\mathcal{X}(K) = \sum_{i=0}^{\dim K} (-1)^i s_i = \sum_{\sigma \in K - \{\emptyset\}} (-1)^{\dim\sigma}$$

Existem muitas maneiras de calcular, outra é:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \beta_i(X).$$

# 5 ANÁLISE TOPOLÓGICA DE SUPERFÍCIE FRACTAL

Com o objetivo de observar as propriedades invariantes de um fractal como a Característica de Euler descrevendo a forma ou estrutura do espaço topológico independente da forma que é dobrada. Além disso, os barcodes com os grupos de homologia que passam a saber o que é um fractal pelo seu comportamento e propriedades, dados fornecidos em vez de apenas por sua fórmula, sua descrição algébrica.

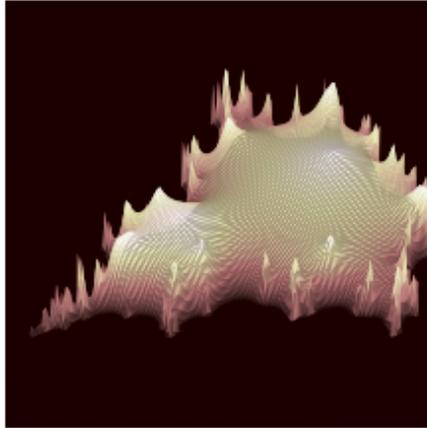
## 5.1 Invariantes topológicos nos fractais

Na topologia, está interessado em estudar propriedades de formas que não mudam quando se deforma continuamente a forma, por exemplo, quando a aperta ou dobra. Essas propriedades são chamadas *invariantes topológicos* que muitas vezes não dependem da escolha de coordenadas, parametrização ou dimensão.

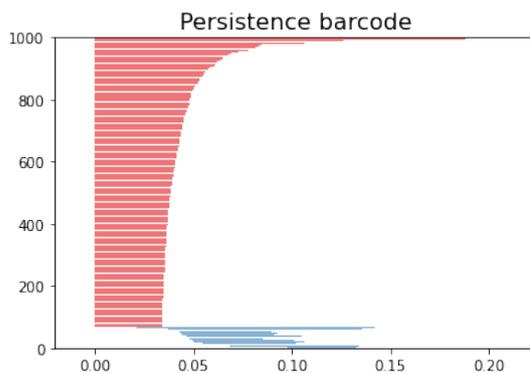
Na figura 7 abaixo temos a montanha Mandelbrot construída a partir da iteração

$$z_n = z^2 + C$$

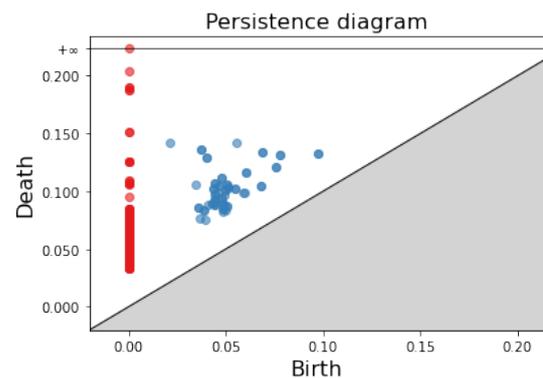
com o número de iteração  $n=8$  e começando em  $z = 0$  com seus barcodes e diagrama de persistência de homologia.

**Figura 10** – Paisagens de Mandelbrot o molde como montanha

Fonte: A autora (2022)

**Figura 11** – Barcode de Mandelbrot to  $n=8$ 

Fonte: A autora (2022)

**Figura 12** – Diagrama de persistência para  $n=8$ 

Fonte: A autora (2022)

O ponto principal e o foco da homologia persistente  $0d$  aqui são componentes conectados – à medida que as bolas ao redor dos pontos se expandem, a homologia persistente  $0d$  nota quando as bolas se tocam. A homologia persistente  $0d$  está rastreando quando essas bolas se cruzam. O primeiro valor limite interessante no nosso caso é  $0$  porque nasce uma componente conectada para cada ponto, cada uma é representada por uma bola sem interseção. O parâmetro comprimento máximo da borda determina o limite máximo de distância a ser considerado na filtragem. Deixe que essa distância máxima entre quaisquer dois pontos no conjunto de dados garanta que a filtragem termine com um único componente conectado nas Figuras 8 e 9, usamos  $\text{max\_edge\_length}=0,25$  para todos os conjuntos de dados.

O barcode é um invariante topológico que resume como as propriedades topológicas

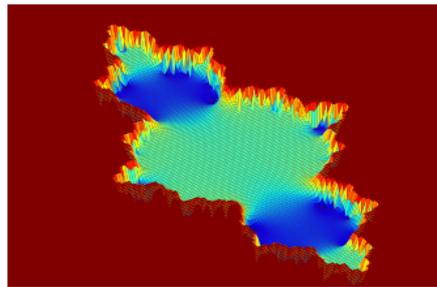
evoluem ao longo da filtração, a cor vermelha descreve a persistência do componente na filtração enquanto o azul é a persistência de furos ou loops. No nosso caso, no barcode, nas barras vermelhas temos nosso ponto com distância zero de filtragem, a maioria dos pontos se cruzam antes de 0,05 e quando a barra termina as bolas se cruzam até finalmente, termos um componente único. Da mesma forma que temos o nascimento e a morte no diagrama de persistência.

Na figura 10 abaixo, temos a montanha de Julia construída a partir da iteração

$$z_n = z^2 + C$$

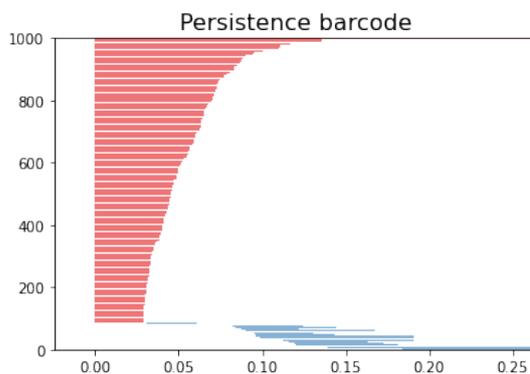
com o número de iteração  $n=8$ , onde  $C$  é outro número complexo que dá um conjunto específico de Julia e com ele seus barcodes e diagrama de persistência de homologia.

**Figura 13** – Paisagem do vale de Julia



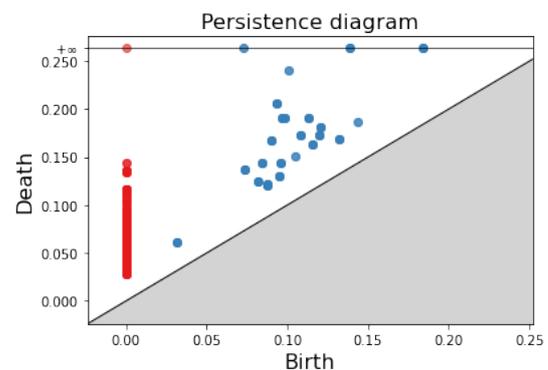
Fonte: A autora (2022)

**Figura 14** – Barcode para  $n=9$



Fonte: A autora (2022)

**Figura 15** – Diagrama de persistência para  $n=9$



Fonte: A autora (2022)

## 5.2 Variando os parâmetros

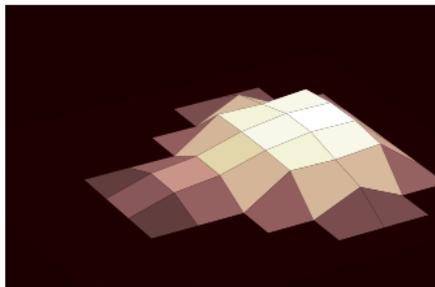
Existem alguns parâmetros que podemos variar e ver o que aconteceu, para construir esses fractais temos o número de iteração e também o número de pixels que nos dão uma qualidade maior na imagem, ambos influenciam no fractal, vamos ver o que acontece em cada caso:

### 5.2.1 Variando o número de pixels em superfícies fractais

#### 5.2.1.1 *Conjunto de Mandelbrot*

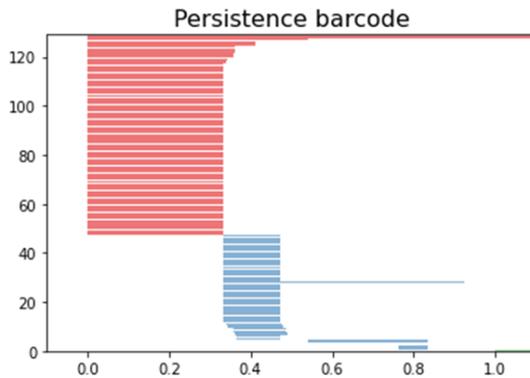
Se variarmos o número do pixel podemos ver um fractal bem diferente, por exemplo, pegue  $m$  o pixel como  $m=10$ , temos:

**Figura 16** – Mandelbrot para  $m=10$

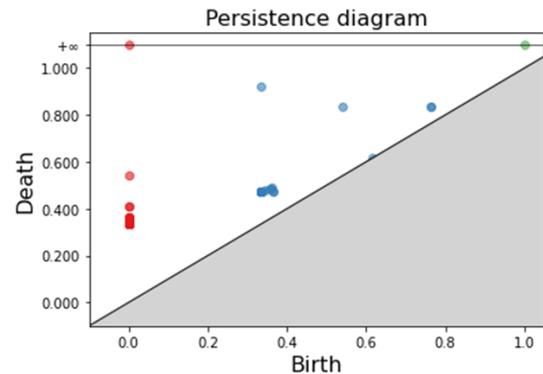


Fonte: A autora (2022)

Podemos ver que altera a imagem, e com isso, temos seu barcode e diagrama de persistência:

**Figura 17** – Barcode para  $m=10$ 

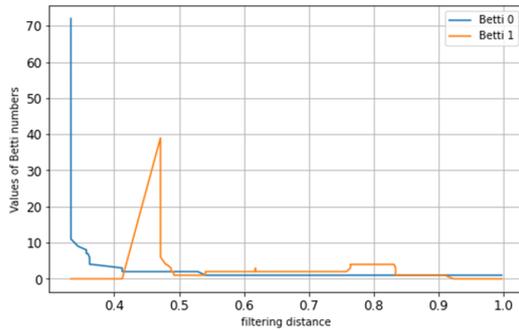
Fonte: A autora (2022)

**Figura 18** – Diagrama de persistência para  $m=10$ 

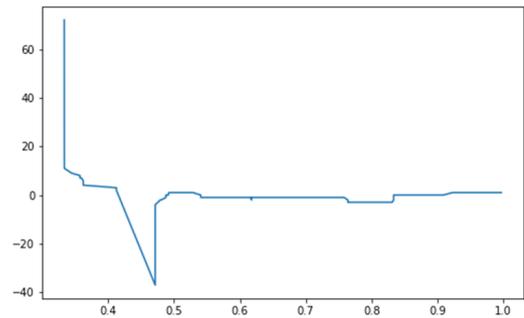
Fonte: A autora (2022)

Podemos observar que no eixo horizontal a partir do zero se iniciam as componentes quando está entre 0.2 e 0.4 vemos que elas pararam, mas por quê? Como falado anteriormente a extremidade direita representa a morte e no caso das barras vermelhas que representam os grupos de homologia 0 dimensional, que fala dos números de componentes, então aqui vemos que a maioria dos pontos se conectam ao mesmo tempo neste intervalo, e lá em cima vemos uma barra única representando nossa componentes conexa da figura de Mandelbrot. Já as barrinhas azuis iniciam bem quando a maioria das vermelhas encerram, o que faz sentido pois é como se essas que se encerraram formam buracos de dimensão 1 e tem uma barra azul mais persistente que as outras que pode ser interpretada como a parte inferior da figura, já que é como se fosse oca. O mesmo vale para o diagrama de persistência já que eles nos trazem a mesma informação e neste conseguimos ver em um dos pontos que fica na em cima da reta diagonal que significa que é um loop ou buraco de dimensão 1 que se inicia e encerra quase no mesmo momento.

Mas também podemos calcular seu gráfico sobre distância de filtragem versus valores do número betti, à esquerda, e as características de filtragem versus euler:

**Figura 19** – Distância de filtragem versus número de Betti

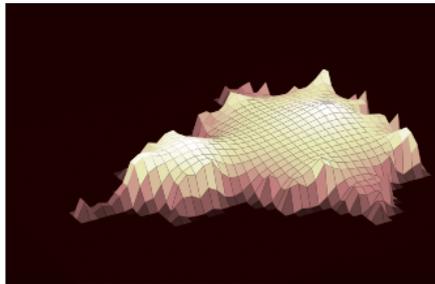
Fonte: A autora (2022)

**Figura 20** – Distância de filtragem versus característica de Euler

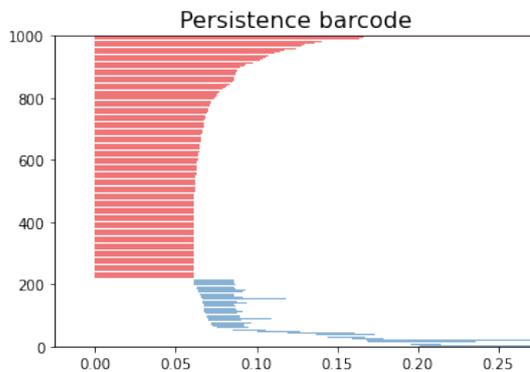
Fonte: A autora (2022)

No gráfico da distância de filtragem versus os números de Betti, o segmento em azul é o Betti 0

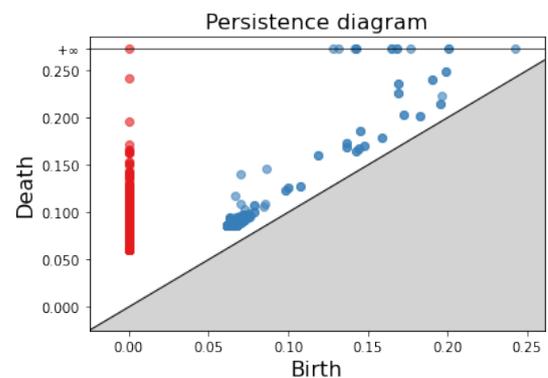
Se temos  $m=50$ , segue abaixo:

**Figura 21** – Mandelbrot para  $m=50$ 

Fonte: A autora (2022)

**Figura 22** – Barcode para  $m=50$ 

Fonte: A autora (2022)

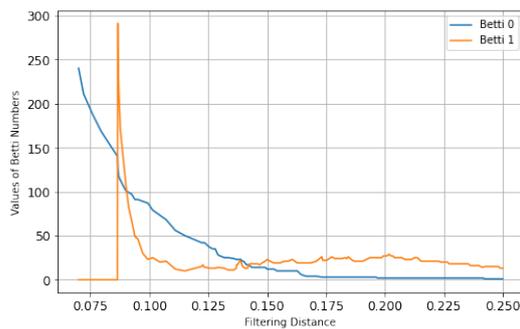
**Figura 23** – Diagrama de persistência para  $m=50$ 

Fonte: A autora (2022)

Após o aumento de pixel no conjunto de Mandelbrot conseguimos ver que vão se

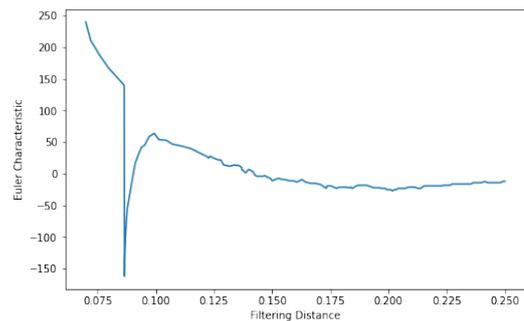
tornando uma única componente conexa aos poucos e isto é nítido no diagrama já que vamos tendo uma sequência de pontos vermelhos, por isso também foi utilizado o diagrama de persistência é outro método de visualização que se torna bem representado quando a quantidade de barras é grande e descreve bem a homologia persistente [Virk 2022]. E para esse valor de filtragem o diagrama de persistência mostra vários loops unidimensionais formados.

**Figura 24** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

**Figura 25** – Distância de filtragem versus característica de Euler

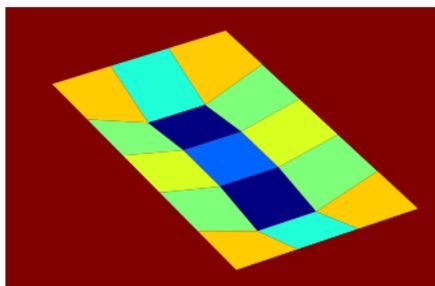


Fonte: A autora (2022)

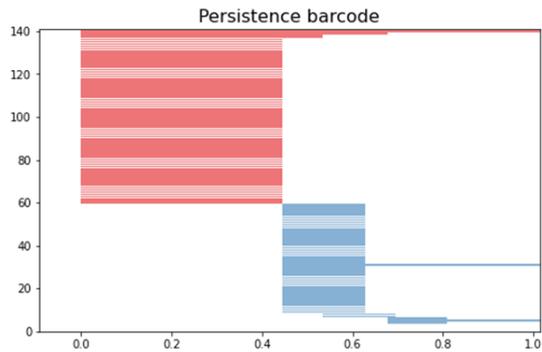
### 5.2.1.2 Conjunto de Julia

Vamos pegar o número do pixel,  $m=10$ , teremos:

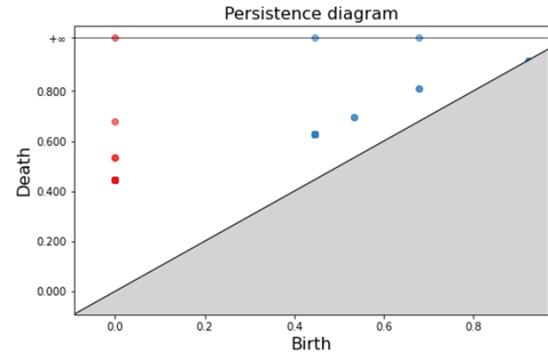
**Figura 26** – Julia para  $m=10$



Fonte: A autora (2022)

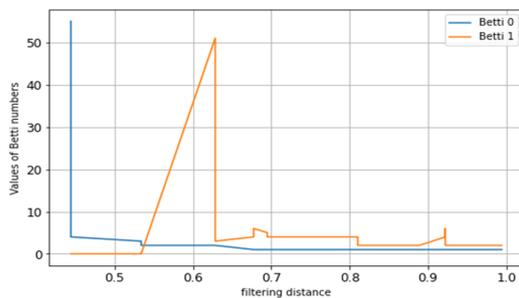
**Figura 27** – Barcode para  $m=10$ 

Fonte: A autora (2022)

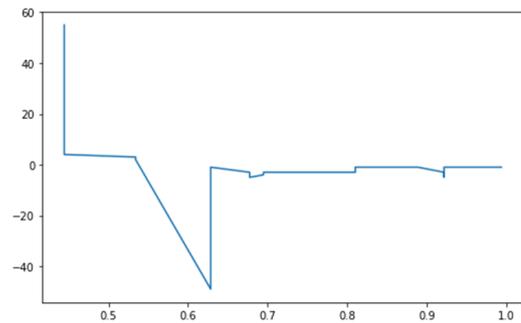
**Figura 28** – Persistence diagram to  $m=10$ 

Fonte: A autora (2022)

Mais uma vez podemos ver a maioria dos pontos se conectando ao mesmo tempo logo após o 0.4 e rapidamente temos o início de vários loops (indicados pelas barras azuis) e tanto no barcode quanto no diagrama de persistência podemos ver dois loops persistentes e quando todos pontos se conectam temos nossa única componente conexa.

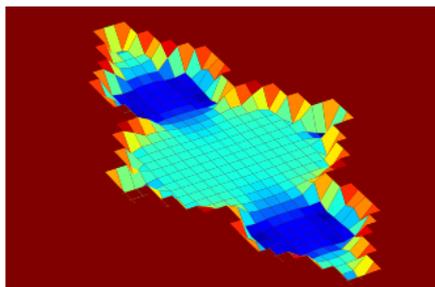
**Figura 29** – Distância de filtragem versus número de Betti

Fonte: A autora (2022)

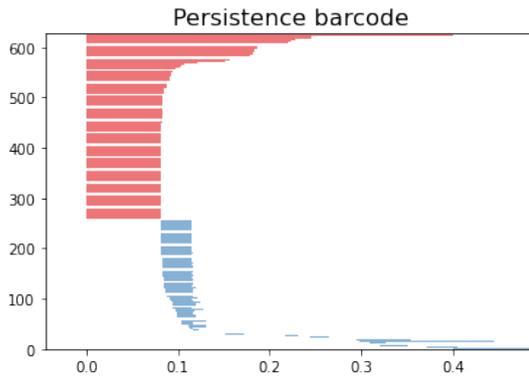
**Figura 30** – Distância de filtragem versus característica de Euler

Fonte: A autora (2022)

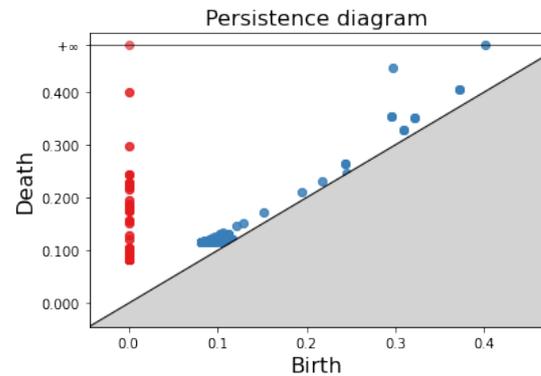
Se temos  $m=50$ , segue abaixo:

**Figura 31** – Julia para  $m=50$ 

Fonte: A autora (2022)

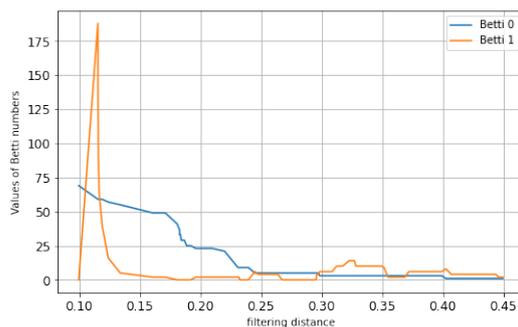
**Figura 32** – Barcode para  $m=50$ 

Fonte: A autora (2022)

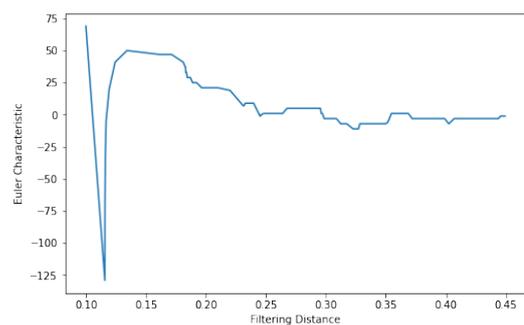
**Figura 33** – Diagrama de persistência para  $m=50$ 

Fonte: A autora (2022)

Pelo barcode e diagrama com relação as quantidades de componentes podemos ver que por ter aumentado o número de pixels já deu uma suavizada para a formação da única componente, e podemos dizer que já temos mais pontos com distâncias não tão próximos para terem a mesma distância, e logo que a maioria desses pontos são conectados temos a formação dos loops mostrado pelas barras e pontos azuis, e com este valor de filtração nos mostra a única componente depois de um certo valor de filtração, assim como também é possível ver o momento em que o loop mais persistente de dimensão 1 o que pode ser levado como o vale do conjunto de Julia.

**Figura 34** – Distância de filtração versus número de Betti

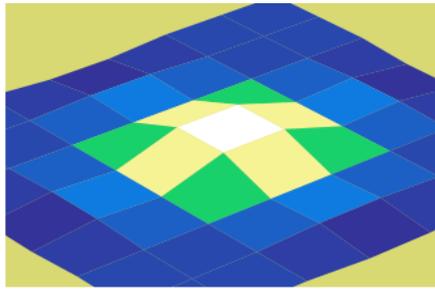
Fonte: A autora (2022)

**Figura 35** – Distância de filtração versus característica de Euler

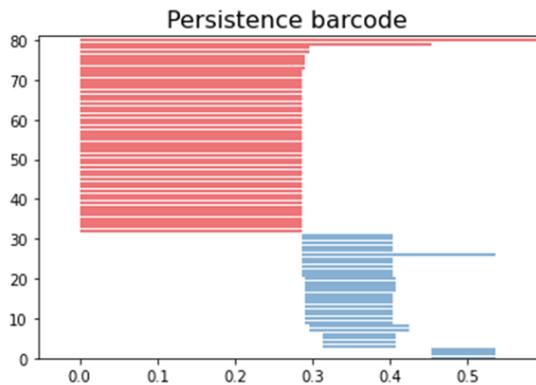
Fonte: A autora (2022)

### 5.2.1.3 Conjunto de Newton

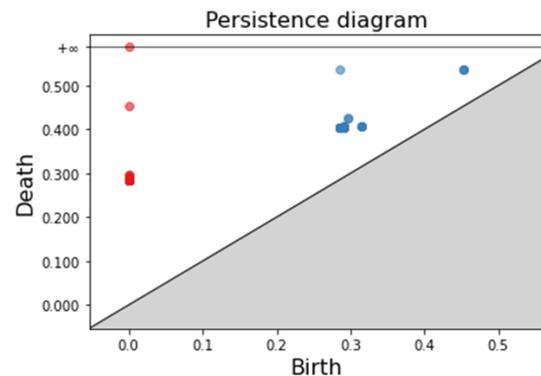
O fractal de Newton é caracterizado pelo método de Newton aplicado a um polinômio  $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ , no nosso caso, usaremos  $p(Z) = Z^4 + 1$ , então temos, para  $m=8$ :

**Figura 36** – Newton para  $m=8$ 

Fonte: A autora (2022)

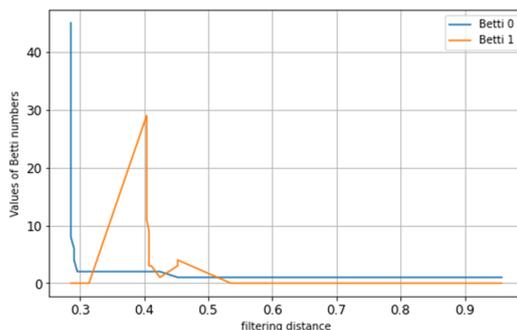
**Figura 37** – Barcode para  $m=8$ 

Fonte: A autora (2022)

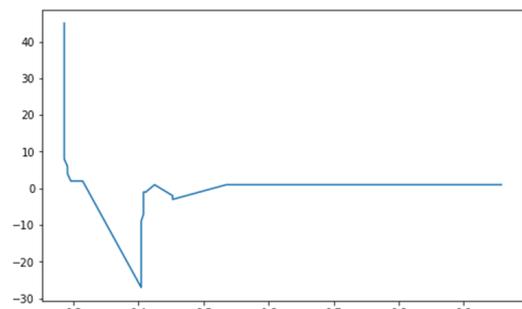
**Figura 38** – Diagrama de persistência para  $m=8$ 

Fonte: A autora (2022)

Para o conjunto de Newton também é observado o mesmo comportamento onde a maioria dos pontos se intersectam em filtração iguais, além disso podemos ver uma similaridade enorme entre os barcodes com a quantidade de pixel pequena, já que temos a conexão da maioria ao mesmo tempo, e logo em seguida começando os loops de dimensão um e pode ser visto um bem mais persistente que a maioria.

**Figura 39** – Distância de filtragem versus número de Betti

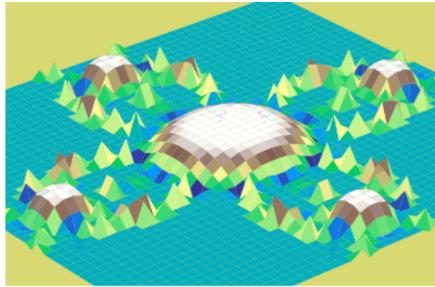
Fonte: A autora (2022)

**Figura 40** – Distância de filtragem versus característica de Euler

Fonte: A autora (2022)

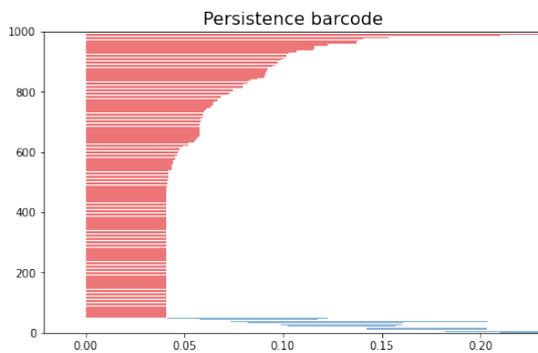
Se temos  $m=50$ , segue abaixo:

**Figura 41** – Newton para  $m=50$



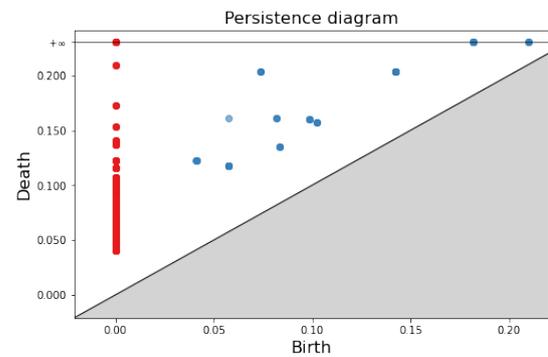
Fonte: A autora (2022)

**Figura 42** – Barcode para  $m=50$



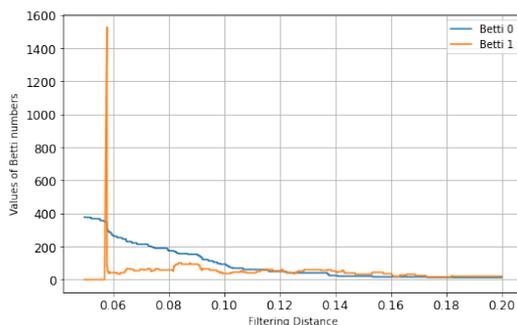
Fonte: A autora (2022)

**Figura 43** – Diagrama de persistência para  $m=50$



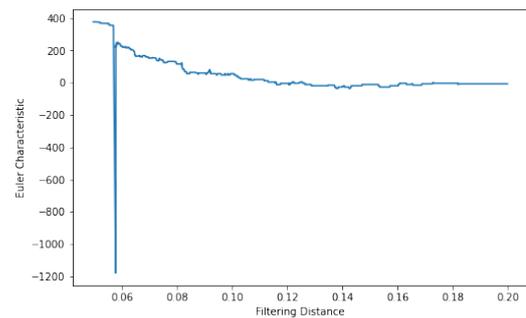
Fonte: A autora (2022)

**Figura 44** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

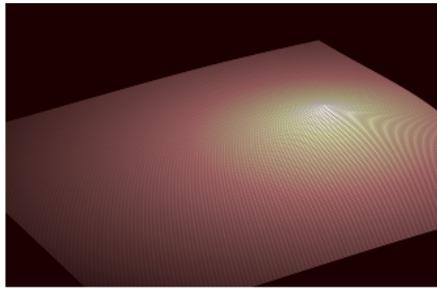
**Figura 45** – Distância de filtragem versus característica de Euler



Fonte: A autora (2022)

### 5.2.2 Variando o número de ciclos em superfícies fractais

Chamaremos o número de cada ciclo de  $n$  e analisaremos. Para  $n$  baixo, não vemos muito, por exemplo,  $n=1$ , temos:

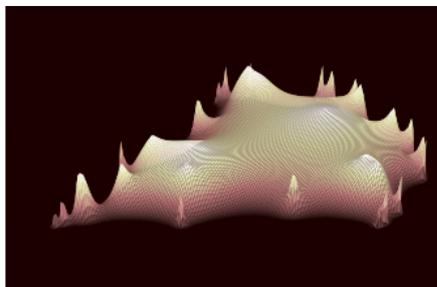
**Figura 46** – Mandelbrot para  $n=1$ 

Fonte: A autora (2022)

Então, para o nosso estudo não é muito interessante.

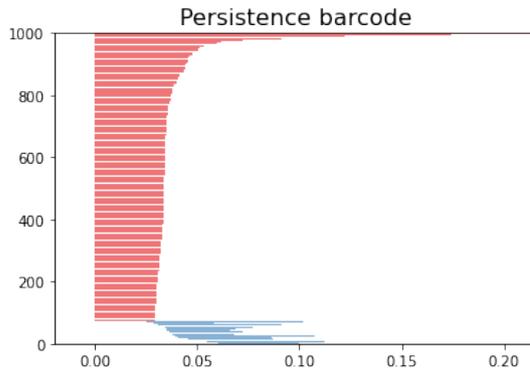
#### 5.2.2.1 *Conjunto de Mandelbrot*

Vamos ver para  $n=6$  e a distância de filtragem = 0.20, temos um fractal mais suave:

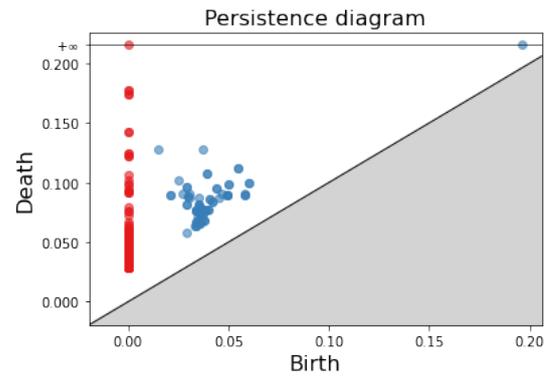
**Figura 47** – Mandelbrot para  $n=6$ 

Fonte: A autora (2022)

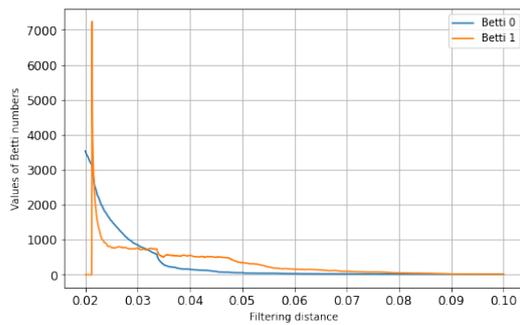
E vamos analisar em relação a  $n=8$  que é o original do artigo estudado. Abaixo vemos o barcode e o diagrama de persistência para  $n=6$ :

**Figura 48** – Barcode para  $n=6$ 

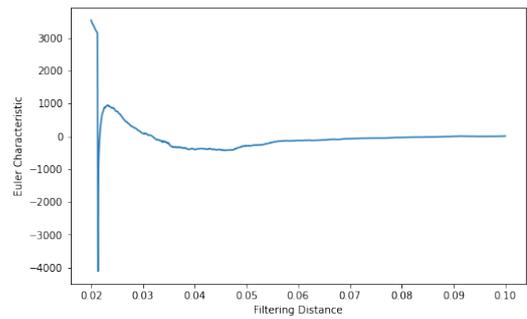
Fonte: A autora (2022)

**Figura 49** – Diagrama de persistência para  $n=6$ 

Fonte: A autora (2022)

**Figura 50** – Distância de filtragem versus número de Betti

Fonte: A autora (2022)

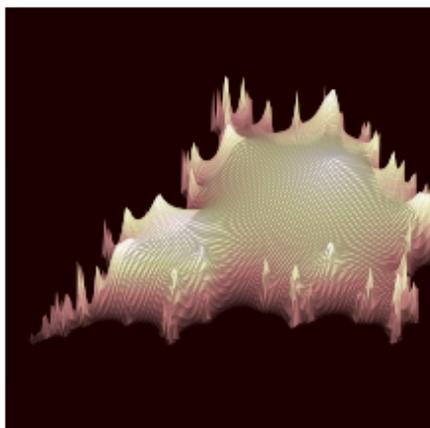
**Figura 51** – Distância de filtragem versus característica de Euler

Fonte: A autora (2022)

Aqui foi apresentado o gráfico que mostra os números de Betti zero a curva em azul, como ele nos diz o número de componentes conexas ao decorrer do valor de filtração no eixo x, podemos ver que é uma curva decrescente até termos a nossa única componente conexa, que é nossa superfície. Já os Betti um, que nos dizem sobre os números de furos unidimensionais, e temos um pico alto que é mostrando que um pouco depois de 0.02 temos vários furos, uma diminuição brusca. E a característica de Euler por ser a soma alternada da característica de Euler possui certa semelhança a dos números de Betti.

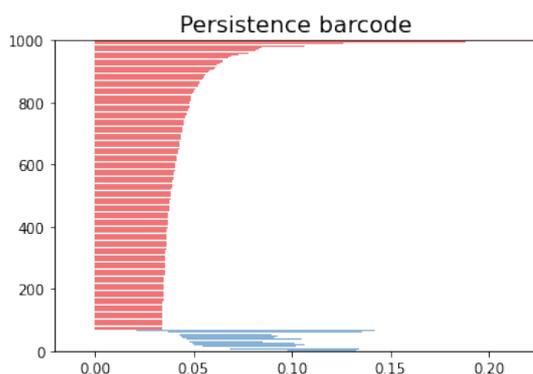
Para Mandelbrot com  $n=8$ , temos:

**Figura 52** – Mandelbrot para  $n=8$



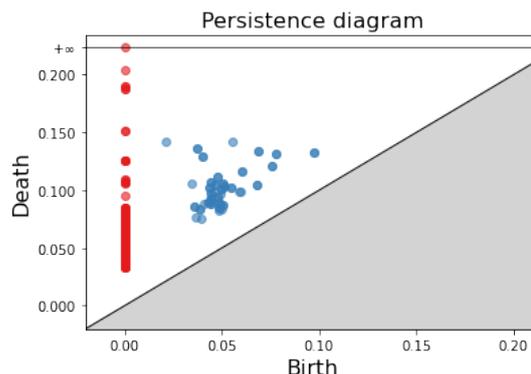
Fonte: A autora (2022)

**Figura 53** – Barcode de Mandelbrot para  $n=8$



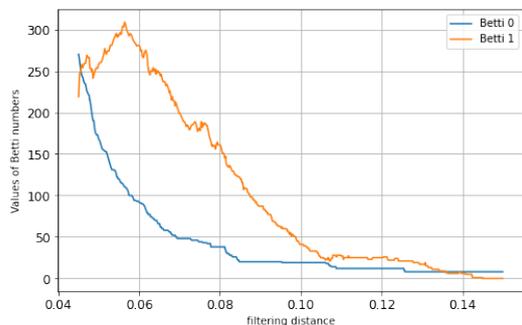
Fonte: A autora (2022)

**Figura 54** – Diagrama de persistência para  $n=8$



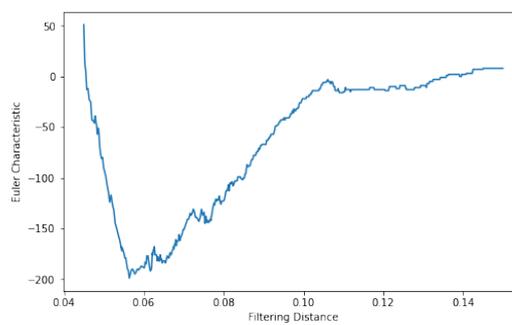
Fonte: A autora (2022)

**Figura 55** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

**Figura 56** – Distância de filtragem versus característica de Euler

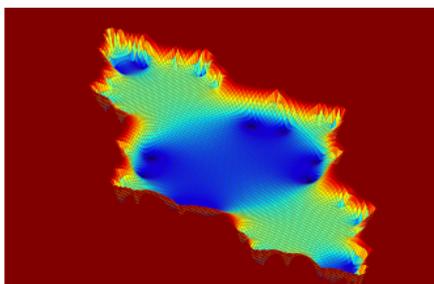


Fonte: A autora (2022)

5.2.2.2 Conjunto de Julia

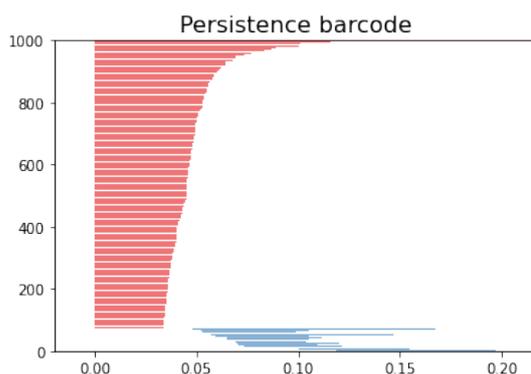
Vamos ver para  $n=6$ , em Julia Fractal:

**Figura 57** – Julia para  $n=6$



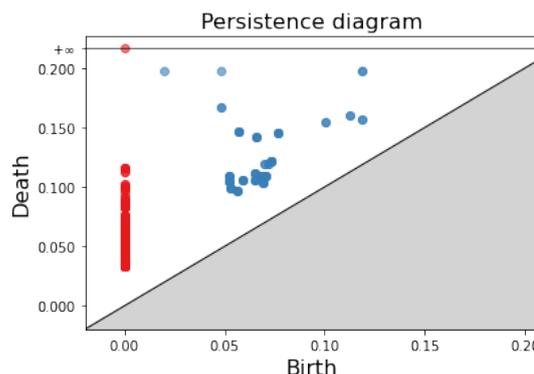
Fonte: A autora (2022)

**Figura 58** – Barcode de Julia para  $n=6$



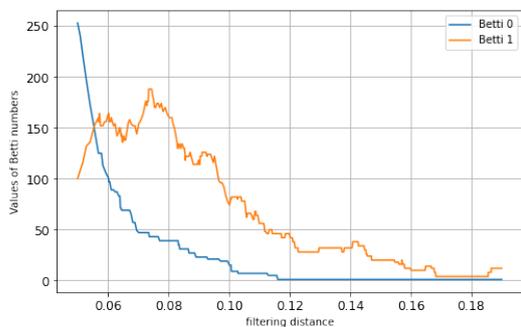
Fonte: A autora (2022)

**Figura 59** – Persistence diagram to  $n=6$



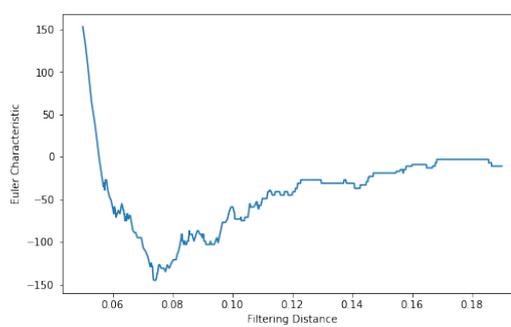
Fonte: A autora (2022)

**Figura 60** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

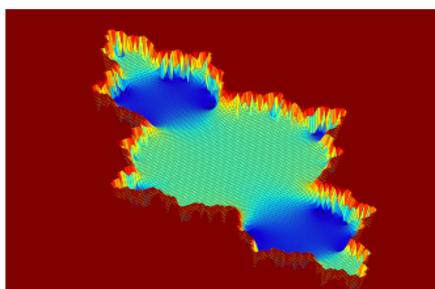
**Figura 61** – Distância de filtragem versus característica de Euler



Fonte: A autora (2022)

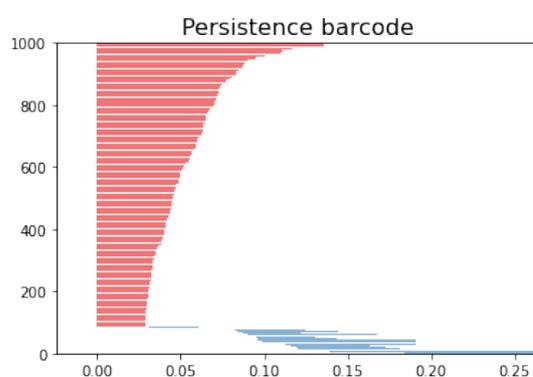
Se  $n=8$ , nós temos

**Figura 62** – Julia para  $n=8$



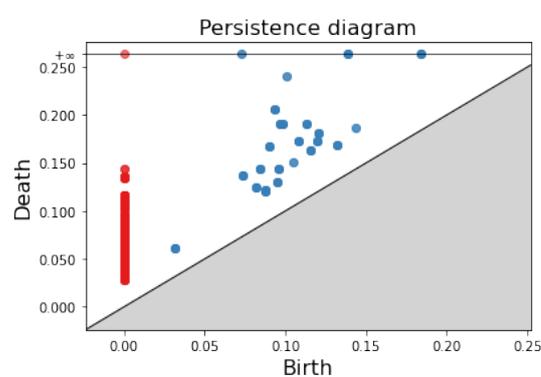
Fonte: A autora (2022)

**Figura 63** – Barcode de Julia para  $n=8$



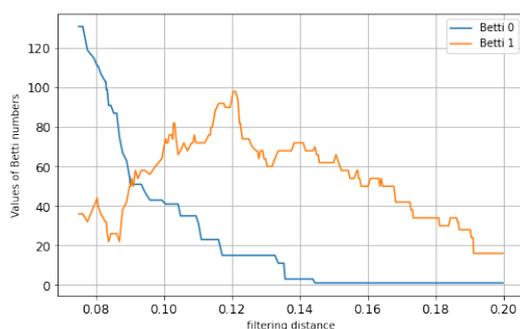
Fonte: A autora (2022)

**Figura 64** – Persistence diagram to  $n=8$



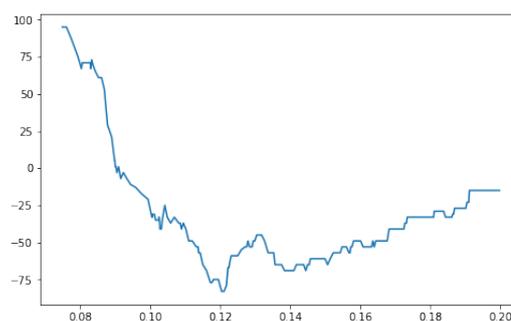
Fonte: A autora (2022)

**Figura 65** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

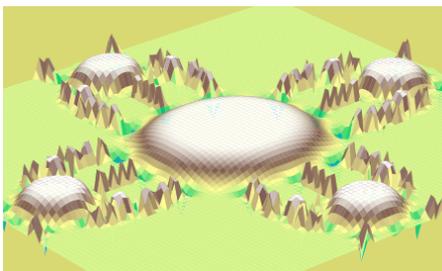
**Figura 66** – Distância de filtragem versus característica de Euler



Fonte: A autora (2022)

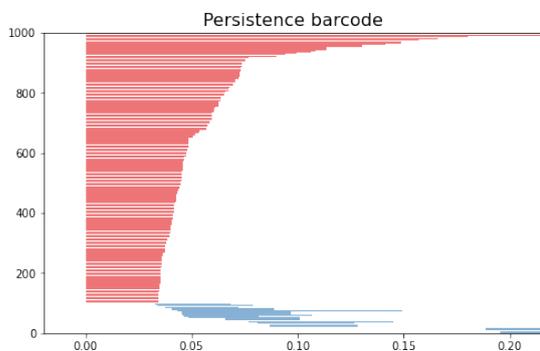
### 5.2.2.3 Conjunto de Newton

**Figura 67** – Newton para  $n=6$



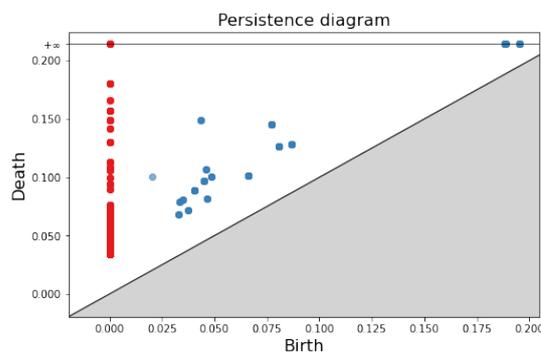
Fonte: A autora (2022)

**Figura 68** – Barcode de Newton para  $n=6$



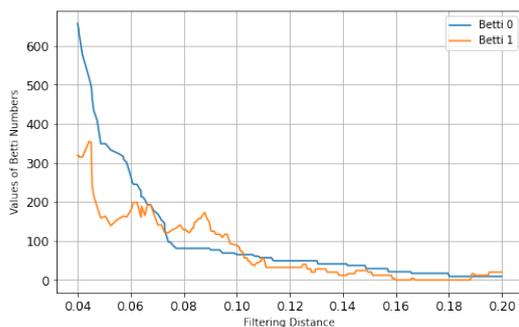
Fonte: A autora (2022)

**Figura 69** – Diagrama de persistência para  $n=6$



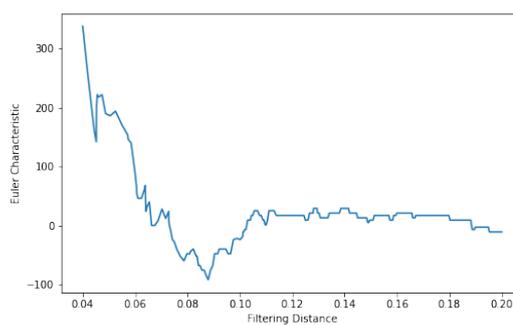
Fonte: A autora (2022)

**Figura 70** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

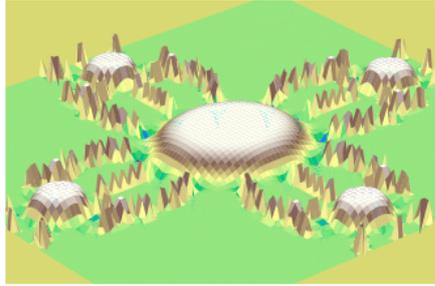
**Figura 71** – Distância de filtragem versus característica de Euler



Fonte: A autora (2022)

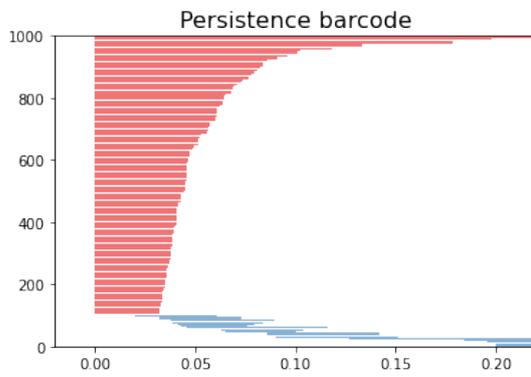
Para  $n=8$ ,

**Figura 72** – Newton para  $n=8$  e  $m=100$



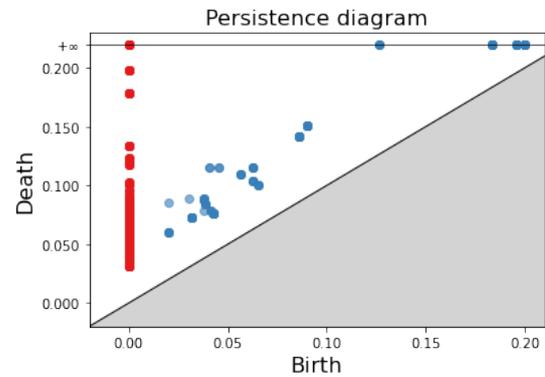
Fonte: A autora (2022)

**Figura 73** – Barcode de Newton para  $n=8$



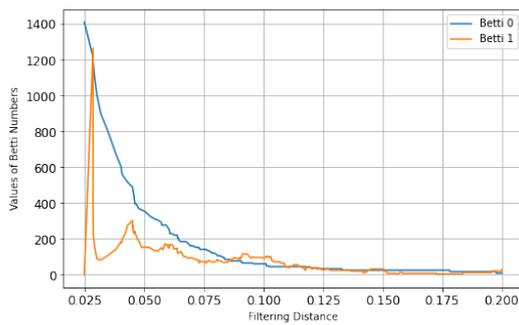
Fonte: A autora (2022)

**Figura 74** – Diagrama de persistência para  $n=6$



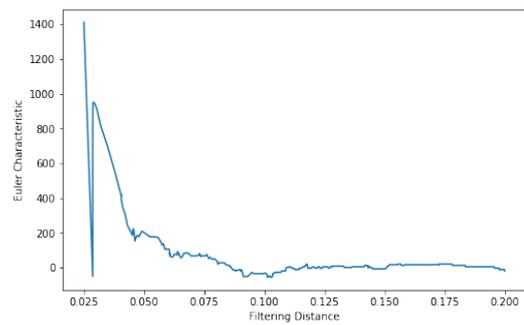
Fonte: A autora (2022)

**Figura 75** – Distância de filtragem versus número de Betti



Fonte: A autora (2022)

**Figura 76** – Distância de filtragem versus característica de Euler



Fonte: A autora (2022)

Desta forma foi possível observar o comportamento para cada conjunto de acordo com o número de ciclos e pontos.

## 6 CONCLUSÃO

Esta pesquisa investigou as propriedades topológicas analisadas nos fractais de Mandelbrot, Julia e Newton. Em cada um, foram alterados os parâmetros nos números de pixels e números de ciclos, cálculo do diagrama de persistência, barcode, curva de números de Betti versus sua filtração e a curva característica de Euler.

Uma vez que os números dos pixels foram variados, foi possível observar que para os barcodes, em relação ao Betti zero, a maioria deles se conectavam com outros no mesmo momento, tornando-se parte do mesmo componente, até que depois de um tempo todos se transformavam em um único componente conectado. Aumentar os pixels até que se tornem um único componente é um processo mais suave. Em contraste, para não-fractais, o processo geralmente não é tão suave, com relação ao se conectarem as componentes.

Em relação ao diagrama de persistência, a partir do momento em que os pixels melhoraram, foi possível obter algumas informações adicionais. Na presença de componentes mais conectados uma maior quantidade de loops e uma maior quantidade de loops persistentes foram percebidos.

Com relação às curvas de distância de filtragem versus números de Betti, ambos realizam o pico nos Betti um e uma curva descendente em relação ao Betti zero. Isso ocorreu em todos os fractais descritos acima e se os pixels aumentam o pico é maior após essa adição.

Sobre a variação nos números de ciclos relacionados à iteração, percebe-se mais ciclos gigantes que, segundo Bobrowski (2020), serão aqueles que são ciclos não triviais (buracos) na estrutura. De acordo com Nathan Linial (2016) o modelo  $G(n,p)$  de Erdős e Rényi foi usado para mostrar que a transição de fase ocorreu em um ponto em  $p = \frac{1}{n}$  enquanto, em uma superfície fractal, observou-se mais de um ponto em que isso aconteceu.

Por fim, como este trabalho é baseado em análise topológica, que, para grupos de homologia de dimensões mais altas ou grandes complexos simpliciais, demanda muito tempo computacional e as superfícies fractais analisadas neste trabalho estavam no limite do nosso poder computacional, tanto para processamento quanto para Memória RAM.

Esperamos continuar essa pesquisa no futuro, e estreitar mais nossos resultados. Como os fractais estão em toda parte na natureza, a análise topológica de dados em fractais pode ser algo promissor para detecção de padrões, por exemplo, ao calcular barcode ou qualquer outra coisa para identificar padrões fractais. Em suma, nossa análise contribui para o entendimento de que a TDA tem potencial para muitas aplicações com dados, medicina, física e outras áreas da ciência.

# REFERÊNCIAS

- [Amorim, Moreira e Santos 2019]AMORIM, E.; MOREIRA, R. A.; SANTOS, F. A. N. The euler characteristic and topological phase transitions in complex systems. *bioRxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory, 2019. Disponível em: <<https://www.biorxiv.org/content/early/2019/12/11/871632>>.
- [Bobrowski e Skraba 2020]BOBROWSKI, O.; SKRABA, P. Homological percolation and the euler characteristic. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 3, Mar 2020. ISSN 2470-0053. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.101.032304>>.
- [Chintakunta et al. 2015]CHINTAKUNTA, H. et al. An entropy-based persistence barcode. *Pattern Recognition*, v. 48, n. 2, p. 391–401, 2015. ISSN 0031-3203. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320314002453>>.
- [Devaney e Branner 1994]DEVANEY, R.; BRANNER, B. *Complex Dynamical Systems: The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets*. American Mathematical Society, 1994. (AMS Short Course Lecture Notes). ISBN 9780821802908. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4XrHCQAAQBAJ>>.
- [Falconer 2004]FALCONER, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2004. ISBN 9780470871355. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JXnGzv7X6wcC>>.
- [Lima 2009]LIMA, E. *Homologia básica*. IMPA, 2009. (Projeto Euclides). ISBN 9788524402869. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hJVgQwAACAAJ>>.
- [Linial e Peled 2016]LINIAL, N.; PELED, Y. *On the phase transition in random simplicial complexes*. 2016.
- [Mandelbrot 2021]MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*. Echo Point Books & Media, LLC., 2021. ISBN 9781648370403. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=wk2PzgEACAAJ>>.

- [Mandelbrot e Hudson 2006]MANDELBROT, B.; HUDSON, R. *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*. Basic Books, 2006. ISBN 9780465043576. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=M0U5tAEACAAJ>>.
- [Munkres 2000]MUNKRES, J. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000. (Featured Titles for Topology). ISBN 9780131816299. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAIAAJ>>.
- [Neto 2022]NETO, A. E. de P. *Surgimento de Ciclos Gigantes e a Característica de Euler na Garrafa de Klein e no Bi-toro*. 82 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.
- [Owen, Chang e Manning 2021]OWEN, L.; CHANG, T.; MANNING, J. High-level cognition during story listening is reflected in high-order dynamic correlations in neural activity patterns. *Nature Communications*, v. 12, 09 2021.
- [Peitgen et al. 2012]PEITGEN, H. et al. *The Science of Fractal Images*. Springer New York, 2012. ISBN 9781461237846. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5xvSBwAAQBAJ>>.
- [Pompilio 2019]POMPILIO, A. *Topology of fractals*. Tese (Doutorado) — University of Dayton, 2019.
- [Santos et al. 2019]SANTOS, F. A. N. et al. Topological phase transitions in functional brain networks. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 100, p. 032414, Sep 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.100.032414>>.
- [Shishikura 1992]SHISHIKURA, M. *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*. arXiv, 1992. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/math/9201282>>.
- [Strumia 2020]STRUMIA, A. *From Fractals and Cellular Automata to Biology: Information as Order Hidden Within Chance*. [S.l.]: World Scientific, 2020.
- [Taylor et al. 2005]TAYLOR, R. et al. Fractals: A resonance between art and nature. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2005. p. 53–63. ISBN 3-540-21368-6.

[Virk 2022]VIRK, Ž. *Introduction to Persistent Homology*. Založba UL FRI, 2022. ISBN 9789617059106. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=rfUFzwEACAAJ>>.

[Zomorodian 2005]ZOMORODIAN, A. *Topology for Computing*. Cambridge University Press, 2005. (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). ISBN 9780521836661. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2IBRnwEACAAJ>>.

# APÊNDICE A – PARTE COMPUTACIONAL

## Renderização

Renderização é o processo de geração de uma imagem a partir de um modelo 2D ou 3D por meio de um programa de computador. Neste trabalho o método se deu ao adicionarmos um terceiro eixo cartesiano ( $z$ ) à abcissa ( $x$ ) e ordenada ( $y$ ), e este eixo é fornecido pela taxa de escape ( número de ciclos de recursão para atingir um valor limite). Para tal foi utilizado o Python 3 e plotagem 3D como malha, estes gráficos de malha geralmente são utilizados para renderizar superfícies definidas por equações paramétricas. A taxa de escape ou número de ciclos pode ser representado como elevação ou profundidade em relação ao plano  $xy$  para que as imagens possam ser semelhantes a montanhas ou vales. Porém este método não admite um número alto de ciclos pois pode ocorrer transbordamento [Strumia 2020]. Uma biblioteca muito útil para este processo de renderização é a matplotlib feita para a linguagem python e serve para criação de gráficos e visualizações de dados em geral.

## Códigos dos fractais

### Conjunto de Mandelbrot

```
1 # importar bibliotecas do python
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import scipy
5 from scipy import ndimage
6 import PIL
7 import pandas as pd
```

```
8 from persim import plot_diagrams
9 from ripser import ripser, lower_star_img
10 # definir ambiente de figura 3D
11 fig = plt.figure()
12 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
13 ax.view_init(azim=-120,elev=45)
14 ax.dist = 5.0
15 ax.set_facecolor([.1,0.0,0.0])
16 n = 8 # definir quantidade de ciclos
17 dx = -0.7
18 dy = 0.0
19 L = 1.5
20 M = 200 # definir o número de pixels
21 # definir de elevação
22 def f(Z):
23     return np.e**(-np.abs(Z))
24 x = np.linspace(-L+dx,L+dx,M)
25 y = np.linspace(-L+dy,L+dy,M)
26 X,Y = np.meshgrid(x,y)
27 Z = np.zeros(M) # área de pontos iniciais do plano complexo
28 W = np.zeros((M,M)) # matriz zero de valores de elevação
29 C = X + 1j*Y
30 # ciclo de recursão
31 for k in range(1,n+1):
32     ZZ = Z**2 + C
33     Z = ZZ
34     W = f(Z)
35 ax.set_xlim(dx-L,dx+L)
36 ax.set_zlim(dy-L,dy+L)
37 ax.set_zlim(-L,2*L)
38 ax.axis("off")
39 #plotar a superfície como um todo
40 ax.plot_surface(X, Y, W, rstride=1, cstride=1, cmap="pink")
41 plt.show()
```

## Conjunto de Julia

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
3 import matplotlib.figure as fg
4 from matplotlib import cm
5 import numpy as np
6 fig = plt.figure()
7 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
8 ax.view_init(azim=150,elev=60)
9 ax.dist = 3.5
10 ax.set_facecolor([0.5,0.0,0.0])
11 n = 6 # definir quantidade de ciclos
12 dx = 0.0
13 dy = 0.0
14 L = 2.0
15 M = 200 # Número de pixel
16 def f(Z):
17     return np.e**(-np.abs(Z))
18 x = np.linspace(-L+dx,L+dx,M)
19 y = np.linspace(-L+dy,L+dy,M)
20 X,Y = np.meshgrid(x,y)
21 cX = -0.7454294
22 cY = 0
23 C = cX + 1j*cY # matriz complexa
24 W = np.zeros((M,M)) # matriz de elevação
25 Z = X + 1j*Y
26 for k in range(1,n+1):
27     ZZ = Z**2 + C
28     Z = ZZ
29     W = f(Z)
30 ax.set_xlim(dx-L,dx+L)
31 ax.set_zlim(dy-L,dy+L)
```

```
32 ax.set_zlim(-2*L,2*L)
33 ax.axis("off")
34 ax.plot_surface(X, Y, -W, rstride=1, cstride=1, cmap="jet")
35 plt.show()
```

## Conjunto de Newton

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
3 import matplotlib.figure as fg
4 from matplotlib import cm
5 import numpy as np
6 fig = plt.figure()
7 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
8 ax.view_init(azim=-130,elev=45)
9 ax.dist = 4.3
10 ax.set_facecolor([.85,.85,.45])
11 n = 8
12 dx = 0.0
13 dy = 0.0
14 L = 1.0
15 M = 150
16
17 def f(Z):
18     return np.e**(-np.abs(Z))
19 x = np.linspace(-L+dx,L+dx,M)
20 y = np.linspace(-L+dy,L+dy,M)
21 X,Y = np.meshgrid(x,y)
22 Z = X + 1j*Y
23
24 for k in range(1,n+1):
25     ZZ = Z - (Z**4 + 1)/(4*Z**3)
26     Z = ZZ
```

```
27     W = f(Z)
28     ax.set_xlim(dx-L,dx+L)
29     ax.set_zlim(dy-L,dy+L)
30     ax.set_zlim(-2.5*L,2*L)
31     ax.axis("off")
32     ax.plot_surface(X, Y, -W, rstride=1, cstride=1, cmap="terrain")
33     plt.show()
```

## Biblioteca GUDHI e aplicação

A biblioteca GUDHI (Geometry Understanding in Higher Dimensions) é uma ferramenta para análise de dados topológicos e entendimento de geometria dimensional superior e oferece suporte para a construção de complexos simpliciais, cálculo da homologia persistente, diagramas de persistência, barcodes e também o cálculo dos números de Betti e assim encontrar as características de Euler. Para a construção do complexo de Rips o espaço métrico de entrada são fornecidos como uma nuvem de pontos (conjunto de pontos de dados no espaço, cada posição com sua coordenada cartesiana) no caso deste trabalho foi utilizada a matriz dos pontos, armazenados numa lista.

```
1 import gudhi as gd
2
3 rips_complex = gd.RipsComplex(points=list,max_edge_length=0.25)
4 simplex_tree = rips_complex.create_simplex_tree(max_dimension=2)
5
6 diag=simplex_tree.persistence(min_persistence=0)
7 #plotar o barcode de perstistência
8 gd.plot_persistence_barcode(diag)
9
10 diag=simplex_tree.persistence(min_persistence=0)
11 #plotar diagrama de persitência
12 gd.plot_persistence_diagram(diag)
```

## Números de Betti e característica de Euler

```
1 #A função que calcula os valores para a curva da CE e os números
  de Betti.
2 def euler_carac_curva(simplex_tree, min_val, max_val):
3
4     euler_carac = 0.0
5     dist_filt = 0.0
6     euler_carac_list = []
7     betti_num_list = []
8     dist_filt_list = []
9     st_aux = gd.SimplexTree()
10    st_gf = simplex_tree.get_filtration()
11    # simplexo a cada ponto no get_filtration, para visualização
12    for val in st_gf: #toma cada simplex de simplex_tree e seu
      valor de filtragem
13
14
15    if val[1] > max_val:
16        break
17    else:
18        if val[1] > min_val and dist_filt != val[1]:
19            st_aux.persistence()
20            betti_numbers = st_aux.betti_numbers()
21            betti_num_list.append(betti_numbers)
22            for j in range(len(betti_numbers)):
23                euler_carac += ((-1)**j)*betti_numbers[j]
24            euler_carac_list.append(euler_carac)
25            dist_filt_list.append(dist_filt)
26            euler_carac = 0
27
28    st_aux.insert(val[0], val[1])#insere o último val em st_aux
29    dist_filt = val[1]
```

30

31

```
return dist_filt_list, euler_carac_list, betti_num_list
```