



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MATHEUS HENRIQUE SEVERINO DA SILVA

**Boa colocação e comportamento assintótico de soluções para o sistema fracionário
de Keller-Segel em espaços tipo Besov-Herz**

Recife

2023

MATHEUS HENRIQUE SEVERINO DA SILVA

**Boa colocação e comportamento assintótico de soluções para o sistema fracionário
de Keller-Segel em espaços tipo Besov-Herz**

Dissertação apresentada ao Programa de Pro-
grama de Pós-graduação do Departamento de
Matemática da Universidade Federal de Pernam-
buco como requisito parcial para obtenção do
grau de Mestre em Matemática
Área de Concentração: Análise

Orientador: Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez

Coorientador: Clessius Silva

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Mônica Uchôa, CRB4-1010

- S586b Silva, Matheus Henrique Severino da.
Boa colocação e comportamento assintótico de soluções para o sistema fracionário de Keller-Segel em espaços tipo Besov-Herz / Matheus Henrique Severino da Silva.– 2023.
77 f.: il., fig.
- Orientador: Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-graduação em Matemática. Recife, 2023.
Inclui referências.
1. Modelo de Keller-Segel fracionário. 2. Espaços de Besov-Herz. 3. Boa colocação. 4. Comportamento assintótico. I. Henriquez, Claudio Rodrigo Cuevas (orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE - CCEN 2024 – 72

MATHEUS HENRIQUE SEVERINO DA SILVA

*Boa colocação e comportamento assintótico de soluções para o sistema
fracionário de Keller-Segel em espaços tipo Besov-Herz*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 31/07/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Clessius Silva (Co-orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico a minha amada esposa Rafaela e aos meus pais, por todo amor, incentivo, apoio e compreensão. Nada disso seria possível se vocês não existissem na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que com sua benevolência e misericórdia divina, permitiu que eu prosseguisse em meus estudos. Toda honra e glória somente à ELe.

Agradeço aos meus orientadores, Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez e Dr. Clesius Silva, pela significativa contribuição em minha formação acadêmica, pela confiança, paciência, incentivo, amizade e excelente orientação. Também agradeço ao Dr. Mario Bezerra e ao Mestre Masterson, pelas incontáveis contribuições que garantiram um melhor entendimento do assunto. Sou grato ao Dr. Arlucio por participar das bancas e por suas contribuições.

A todos professores do Departamento de Matemática da UFPE, em especial, aos professores: Felipe Wergete, Miguel, Manoel Lemos, Miguel Loayza, Victor Hugo, Cesar Castilho, Andre Meirelles, Ricardo Bortolotti, os quais contribuíram diretamente para minha formação durante o mestrado.

Agradeço a toda minha família. Aos meus pais Genivaldo e Eldinice pelos conselhos e apoio.

Aos meus amigos de curso: Túlio, Rafael, Hugo, Neurandir, Igor, Erick, Lucas.

A minha amada esposa Rafaela, por tomar para si meu objetivo e sempre incentivar sem medir esforços para alcança-los.

Um agradecimento especial a CAPES e a CNPQ, pelo auxílio financeiro, e ao Programa de Pós-graduação de Matemática da UFPE pela confiança na concessão de minha bolsa de estudos.

"O Senhor é bom, uma fortaleza no dia da angústia, e conhece os que confiam nele."

Naum 1:7(SAGRADA; BÍBLIA, 1995)

RESUMO

Neste trabalho, fazendo o uso de ferramentas da Análise Funcional e Topologia, estudamos o modelo fracionário de Keller-Segel para quimiotaxia, de ordem $\alpha \in (0, 1)$ em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Considerando dados iniciais suficientemente pequenos, provamos a boa colocação do problema em espaços homogêneos de Besov-Herz fraco, bem como a continuidade fraca da solução quando $t \rightarrow 0^+$. Verificamos também o comportamento assintótico da solução, ou seja, o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$. A base da presente dissertação é o artigo de: Azevedo J, Bezerra M, Cuevas C, Soto H. Well-posedness and asymptotic behavior for the fractional Keller-Segel system in critical Besov-Herz-type spaces. Math Meth Appl Sci. 2022;1-20.

Palavras-chave: Modelo de Keller-Segel fracionário; Espaços de Besov-Herz. Boa colocação; Comportamento Assintótico.

ABSTRACT

In this work, making use of Functional Analysis and Topology tools, we study the Keller-Segel fractional model for chemotaxis, of order $\alpha \in (0, 1)$ in $\mathbb{R}^n$, with $n \geq 2$. Considering sufficiently small initial data, we prove well-posedness of the problem in homogeneous weak Besov-Herz spaces, as well as the weak continuity of the solution in $t \rightarrow 0^+$. We also check the asymptotic behavior of the solution, that is, the behavior of the solution when $t \rightarrow \infty$. This dissertation is based on the article by: Azevedo J, Bezerra M, Cuevas C, Soto H. Well-posedness and asymptotic behavior for the fractional Keller-Segel system in critical Besov-Herz-type spaces. Math Meth Appl Sci. 2022;1-20.

Keywords: Fractional Keller-Segel Model; Besov-Herz Spaces; Well-Posedness; Asymptotic Behavior.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	16
2.1	OPERADORES SETORIAIS	16
2.2	ESPAÇOS HOMOGÊNEOS	21
2.3	FUNÇÕES ESPECIAIS	27
2.4	OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER	31
2.5	MÉTODOS TOPOLÓGICOS	34
3	CONTEXTO FRACIONÁRIO DO MODELO DE KELLER-SEGEL .	36
3.1	DERIVADA FRACIONÁRIA	37
3.2	ESPAÇO FUNCIONAL DE TIPO FUJITA-KATO	39
3.3	PRINCÍPIO DE DUHAMEL	44
3.4	ESTIMATIVAS ESTRUTURAIS PARA OS OPERADORES DE MITTAG- LEFFLER	46
4	BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL EM ESPA- ÇOS DE BESOV-HERZ	52
4.1	SOLUÇÃO GLOBAL DO MODELO DE KELLER-SEGEL	52
4.2	ESTIMATIVAS PARA O MAPA BILINEAR $\mathcal{B}$	52
4.3	ESTIMATIVAS PARA O MAPA LINEAR τ	54
4.4	BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL FRACIONÁRIO . .	57
4.5	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO	61
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

A motilidade dos organismos é essencial para a sobrevivência em ambiente complexo. Esse movimento geralmente é feito através da interpretação de vários sinais externos e reações a eles. Como por exemplo a migração de células cancerígenas, neste processo, as células cancerígenas podem se mover em direção a tecidos distantes, guiadas por gradientes químicos específicos, durante a metástase. Essas células podem responder a sinais químicos liberados por células do tecido circuncidante, permitindo que se infiltrem em outros órgãos e formem novos tumores. Outro exemplo são as espécies migratórias, como aves, peixes e insetos, que realizam migrações em longas distâncias durante certas épocas do ano, para isso, os animais utilizam sinais químicos para se encontrar e encontrar seu caminho, aves migratórias por exemplo, podem detectar os sinais químicos emitidos pela vegetação ou pelo campo magnético da Terra para se guiar durante suas rotas migratórias. Quando o movimento direcionado é dado em resposta a estímulos químicos, é chamado de quimiotaxia. Os gradientes químicos envolvidos no processo, podem atrair o organismo (quimiotaxia positiva), e neste caso dizemos que é um quimioatraente, ou podem repelir (quimiotaxia negativa), e então dar-se o nome de quimiorepelente (Ver (MURRAY, 2002)).

Neste trabalho, consideramos o modelo Keller-Segel (KS) fracionário no tempo para a quimiotaxia, que consiste em sistemas acoplados de equações diferenciais parciais (EDP's) em R^n :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u &= \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\alpha v &= \Delta v - \gamma v + \kappa u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que ${}^c D_t^\alpha$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (Ver (CAPUTO, 1967)). Aqui $u(x, t)$ representa a densidade celular, enquanto $v(x, t)$ é a concentração do quimioatraente. Os termos da primeira equação incluem a tendência das células se difundirem sob seu próprio movimento browniano e movimento quimiotático. Os termos da segunda equação expressam a difusão e a produção de atrativo ao longo do tempo. O parâmetro γ denota a taxa de decaimento do atraente. A importância física de usar a derivada fracionária é dada por todas as evidências empíricas de que ela apareceu. Acredita-se que substituir a difusão clássica por uma fracionária pode ser útil para modelar estratégias de alimentação de uma ampla classe de organismos. Notamos que no nível macroscó-

pico, a subdivisão anômala pode ser modelada como movimento browniano fracionário ou Montroll-Weiss passeios aleatórios de tempo contínuo com densidade de tempo de espera de cauda longa. Assim, podemos modificar a equação de difusão usando um operador fracionário na variável temporal (ver, por exemplo, (LANGLANDS; HENRY, 2010)). A literatura recente tem investigado a influência da heterogeneidade de substratos na dinâmica do modelo KS por meio do cálculo fracionário (ver (NAGHIBOLHOSSEINI, 2015)). Deve-se notar que a configuração fracionária para o modelo KS é marcadamente diferente daquela do modelo KS padrão. Na verdade, observamos que esta abordagem não pode ser feita por uma tradução direta das provas da derivada de tempo clássica para a fração derivada no tempo. Por exemplo, deve-se esperar que soluções de equações diferenciais fracionárias convirjam para soluções das equações diferenciais clássicas quando α tende a 1. Este é um problema difícil, e não há respostas em geral. o leitor interessado pode consultar os artigos (LANGLANDS; HENRY, 2010; BARTUMEUS et al., 2003; LEVANDOWSKY; WHITE; SCHUSTER, 1997; BOURNAVEAS; CALVEZ, 2010; BURCZAK; GRANERO-BELINCHÓN, 2016; ESCUDERO, 2006).

Antes de seu aparecimento na biologia matemática, o sistema KS foi introduzido por Patlak no contexto da química e da física (PATLAK, 1953); portanto, seu nome às vezes não é usado no contexto da biologia. O modelo KS e suas variações têm sido objeto de extensa investigação (ver, por exemplo, estudos anteriores (MURRAY, 2002), (OSTER; MURRAY, 1989)). As equações para densidade bacteriana e concentração de atrativos têm soluções colapsantes, para as quais a densidade vai ao infinito em tempo finito. Recordemos um fato fenomenológico conhecido como lei KS referente ao sistema (1.1): para $\alpha = 1$ e $N = 3$, é possível o colapso da célula para densidade de linhas e pontos infinitos; no entanto, a concentração em uma folha não pode ocorrer. Entretanto, células que se movem dentro de um plano podem se agregar em pontos, mas não em linhas (ver estudos anteriores (BETTERTON; BRENNER, 2001; FERREIRA; PRECIOSO, 2011)). O modelo KS duplamente parabólico (padrão) pode ser obtido de (1.1) tomando $\alpha = 1$. Assumindo que a concentração do quimioatrativo é independente do tempo, obtém-se o sistema KS parabólico-elíptico, que apresenta um comportamento muito rico. Em duas dimensões, o sistema KS duplamente parabólico compartilha muitas propriedades com o primeiro. Em particular, as soluções existem globalmente em ambos os casos, desde que sua massa seja menor que 8π . No entanto, esse limiar não é claro no caso duplamente parabólico como no caso parabólico-elíptico, em que soluções com massa acima de 8π sempre explodem

(ver estudos anteriores (BILER; CORRIAS; DOLBEAULT, 2011),(HORSTMANN; WINKLER, 2005)).

Vamos revisar alguns trabalhos da literatura sobre o modelo KS fracionado no tempo. Zayernouri e Matzavinos (ver (ZAYERNOURI; MATZAVINOS, 2016)) desenvolveram um esquema de divisão de tempo para um modelo KS com o operador temporal fracionário dado em termos da derivada fracionária de Caputo. A análise numérica exibe a eficiência de tal esquema. El-Sayed e cols(ver (EL-SAYED; RIDA; ARAFA, 2009)) forneceram soluções para um modelo de quimiotaxia bacteriana fracionada no tempo em uma câmara de gradiente de difusão (CGD). Este modelo descreve o movimento de três espécies químicas, ou seja, a população de células, o quimioatraente e o nutriente. Detalhes sobre a construção do CGD e a descrição dos experimentos biológicos usando o CGD são fornecidos em (WIDMAN et al., 1997), (KUMAR; KUMAR; ARGYROS, 2017), que desenvolveram um método de transformação de análise de homotopia modificado (MTAHM) com um polinômio de homotopia para resolver o tempo unidimensional modelo KS fracionário. Eles forneceram uma análise de convergência do MTAHM, e a solução obtida é verificada por meio de diferentes representações gráficas. Atangana e Alkahtani((ATANGANA; ALKAHTANI, 2015)) estudaram a existência de soluções para um modelo KS fracionário de tempo usando a técnica de ponto fixo. Este modelo considera o efeito da memória e também o movimento das bactérias com diferentes camadas do meio. O artigo (AZEVEDO; CUEVAS; HENRIQUEZ, 2019) trata da existência global e do comportamento no tempo grande de (1.1) com dados iniciais pequenos em uma classe de espaços de Besov- Morrey. Ao mesmo tempo, soluções auto-similares também são obtidas. Em um estudo anterior (BEZERRA et al., 2021) os autores derivam alguns resultados refinados sobre o comportamento de tempo grande de (1.1) que são pressupostos para desfrutar de algumas propriedades de limitação uniforme. Além disso, a boa colocação e a estabilidade assintótica de soluções em espaços de Marcinkiewicz são estudadas. É bem conhecido que o grupo de simetria e a lei de conservação podem fornecer informações úteis em física matemática para estudar a existência, unicidade e estabilidade das soluções para EDP's não lineares. Recentemente, em uma pesquisa anterior (CHENG; WANG; HOU, 2022) os autores investigam as soluções e leis de conservação de equações de difusão fracionária de tempo do tipo KS. Reduções de similaridade são realizadas para construir a solução invariante de grupo e a solução em série de potências é deduzida com a ajuda do operador diferencial de Erdélyi-Kober. Em um estudo anterior (LI; LIU, 2018) os autores desenvolveram alguns critérios de com-

pacidade que são analogias do lema de Aubin-Lions para a existência de soluções fracas para EDP's fracionárias no tempo. A existência de soluções fracas para um caso especial de equações de Navier-Stokes (N-S) compressíveis fracionárias de tempo com densidade constante e equações KS fracionárias de tempo em $\mathbb{R}^n$ é então provada como problemas de modelo. Em uma pesquisa anterior, (ARUCHAMY; TYAGI, 2021) os autores estabeleceram a existência de soluções fracas não-negativas para sistemas KS fracionados no tempo com condição de contorno de Dirichlet em um domínio limitado com contorno suave. Sob suposições adequadas sobre o condições iniciais, eles estabelecem a existência de soluções para o sistema usando o método de aproximação de Galerkin. A convergência de soluções é comprovada por meio de critérios de compacidade para equações diferenciais parciais fracionárias.

Os espaços de funções têm sido amplamente utilizados em várias áreas de análise, como análise harmônica e EDPs. Observe que a boa colocação de equações N-S em espaços críticos atraiu o interesse de vários matemáticos. As equações N-S são sistemas de equações de evolução não linear que modelam o fluxo de fluido viscoso e incompressível. Indicamos ao leitor o livro de Lemarié-Rieusset ((LEMARIÉ-RIEUSSET, 2002)) para uma exposição independente de resultados recentes sobre as equações N-S. Mencionamos apenas as obras em espaços Besov homogêneos $\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{N}{p}-1}(\mathbb{R}^n)$ para $p > N$ (ver (CANNONE, 1997) espaços homogêneos de Fourier-Besov $F\dot{B}_{p,\infty}^{N-1-\frac{N}{p}}$ (ver (IWABUCHI; TAKADA, 2014; KONIECZNY; YONEDA, 2011)), espaços homogêneos de Herz fraco $W\dot{K}_{N,\infty}^0(\mathbb{R}^N)$ (ver (TSUTSUI, 2011)), espaços homogêneos de Fourier-Herz $F\dot{B}_{1,r}^{-1}$ com $r \in [1, 2]$ (ver (IWABUCHI; TAKADA, 2014; CANNONE; WU, 2012; GIGA; MIYAKAWA, 1989)), espaços homogêneos de Besov-Morrey $\mathcal{N}_{r,q,\infty}^{\frac{N}{r}-1}$ com $r > 1$ (ver (KOZONO; YAMAZAKI, 1994; MAZZUCATO, 2003)) e espaços homogêneos de Herz fraco (BWH) $\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\beta,\beta+\frac{N}{p}-1}$ (ver (FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)). Ao contrário das equações (N-S), a teoria das equações KS fracionárias no tempo não tem tantos resultados amplos, e muitos aspectos deste tipo de equações precisam ser desenvolvidas; por exemplo, existem alguns resultados na literatura sobre soluções especiais para modelo (1.1) (veja estudos anteriores (ARUCHAMY; TYAGI, 2021; IWABUCHI, 2011; IWABUCHI; NAKAMURA, 2013; ZHAO, 2021))

Neste trabalho, exploramos espaços BWH homogêneos que são um tipo de espaço de Besov baseado em Herz fraco homogêneo espaços (consulte a Seção 2.2). Herz ((HERZ, 1968)) generalizou as álgebras de Beurling ((BEURLING, 1964)) no estudo da transformação de Fourier absolutamente convergente. Esses espaços generalizados de funções

são apenas o protótipo dos espaços de Herz. Desde então, a teoria dos espaços de Herz desenvolveu-se significativamente e estes espaços revelaram-se muito úteis na análise. Em particular, os espaços de Herz têm um papel notável na caracterização das propriedades de funções e multiplicadores nos espaços clássicos de Hardy, Herz os espaços também aparecem na teoria da regularidade para equações elípticas (ver (II; SAWYER, 1985; FLETT, 1974; HERNÁNDEZ; YANG, 1998; HERNÁNDEZ; YANG, 1999)). Além disso, os espaços de Herz fracos têm interesse aplicações no estudo da limitação de muitos operadores e na teoria de equações diferenciais parciais (ver anterior estudos (TSUTSUI, 2011; FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018; HU; LU; YANG, 1997; LANZHE, 2002)). Para uma investigação mais aprofundada sobre espaços do tipo Herz, o leitor pode recorrer às referências citadas. O espaço $B_\sigma^v := \dot{B}W\dot{K}_{\sigma,\infty}^{v, \frac{N}{\sigma}-2}$, distribuições desaparecendo ao infinito, e o espaço de Besov $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ representam distribuições módulo constantes, terão um papel fundamental em nossa análise, pois ambos formam o par crítico para a existência de soluções por causa de sua propriedades de invariância de escala. Estudamos a boa-posição global no tempo e o comportamento assintótico de soluções para o problema de valor inicial (PVI) (1.1) no par crítico $(B_\sigma^v, \dot{B}_{\infty,\infty}^0)$ assumindo uma condição de pequenez nas normas de dados iniciais. Lembramos que a boa colocação envolve existência, singularidade, persistência e dependência contínua dos dados iniciais (ver (8)). Além disso, no espírito de (BILER et al., 2004), Teorema 3.1, provamos um resultado de comportamento de longo prazo que fornece um critério para dissipação de pequenas perturbações dos dados iniciais como $t \rightarrow \infty$ (ver Teorema (9)). Para o melhor conhecimento do autor, um resultado bem colocado para pequenas soluções globais no par crítico $(B_\sigma^v, \dot{B}_{\infty,\infty}^0)$ parece não estar disponível em uma literatura anterior. Em nossa abordagem, as soluções suaves para o modelo KS fracionário no tempo (1.1) envolvem a função de Mainardi e os operadores Mittag-Leffler. Usamos uma ideia interessante de que associa os operadores de Mittag-Leffler ao núcleo de calor clássico com a função de Mainardi, e temos boas estimativas de momento para o núcleo do calor e a função de Mainardi. O ponto de partida para construir soluções suaves globais no tempo é baseada no princípio de Duhamel (ver (3.10) e (3.11)) junto com o de Fujita-Kato estrutura que consiste na construção de um argumento de ponto fixo em um espaço dependente do tempo adequado. Precisamos escolher norma ponderada pelo tempo auxiliar cuidadosamente a fim de controlar estimativas em espaços de Herz fraco, Besov e BWH de alguns termos gerais que aparecem no termo bilinear $\mathcal{B}$ e no termo linear $\mathcal{T}$, ambos associados à formulação suave de (1.1) (ver (4.1) e (4.2)). Não obstante, a im-

plementação desta abordagem, não seja *a priori* trivial, como o leitor perceberá através deste trabalho. De fato, os resultados obtidos dependem fortemente dos operadores de Mittag-Leffler. A presença de tais operadores torna a análise muito mais técnica e difícil, pois eles não possuem a propriedade abeliana, que é fundamental no desenvolvimento da teoria dos semigrupos. Observe que para definir tais operadores, é essencial assumir $\alpha < 1$, pois a função de Mainardi entraria em colapso caso contrário. Tratamento bem sucedido do modelo KS fracionário no tempo depende de limites estruturais que controlam o comportamento dos operadores Mittag-Leffler.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. O capítulo 2, intitulado "Preliminares", visa tornar o texto o mais completo possível. Nele, serão lembradas algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho. Em particular, semigrupos, operadores setoriais, operadores Mittag-Leffler, área homogênea e estimativas do semigrupo do calor. Finalmente, identificamos resultados topológicos que justificam os resultados aqui apresentados.

Para o capítulo 3, intitulado "Contexto Fracionário do modelo de Keller-Segel", propomos uma abordagem as derivadas fracionárias e suas consequências no modelo KS recomendado. Nós usamos algumas ferramentas como o espaço funcional do tipo Fujita-Kato, o princípio de Duhamel e as estimativas estruturais necessárias, para controlar os operadores de Mittag-Leffler vinculados ao modelo.

No Capítulo 4, chamado "Boa colocação do modelo de Keller-Segel em espaços de Besov-Herz", provamos a existência, unicidade e dependência contínua da solução. Finalmente, mostramos o comportamento assintótico da solução, mostrando que quando $t \rightarrow \infty$, as soluções se aproximam a medida que as condições iniciais se aproximam.

2 PRELIMINARES

Este capítulo contém os pré-requisitos para o bom desenvolvimento do presente trabalho.

Ao longo de todo o texto, $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ representam espaços de Banach. A notação $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em Y , munido com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. Quando $X = Y$, abreviamos a notação para $\mathcal{L}(X)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ e imagem $\mathcal{R}(A)$ em X , representamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente do operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, isto é, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que, o operador $(\lambda - A)^{-1}$ pertence a $\mathcal{L}(X)$ e considere $\sigma(A)$ seu espectro, isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Para cada $\lambda \in \rho(A)$ escrevemos $R(\lambda; A) = (\lambda - A)^{-1}$ como sendo o operador resolvente de A .

2.1 OPERADORES SETORIAIS

Operadores setoriais e semigrupos analíticos são ferramentas básicas na teoria de problemas parabólicos abstratos e de equações diferenciais parciais e sistemas do tipo parabólico, uma vez que é possível verificar que se A é setorial então o mapa solução é um semigrupo analítico.

Definição 1 ((PAZY, 2012)). *Dizemos que uma família de operadores lineares $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo, se*

1. $T(0) = I_X$; (operador identidade em X)
2. $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall t, s \geq 0$.

Definição 2 ((PAZY, 2012)). *Um semigrupo fortemente contínuo (ou semigrupo de classe C_0 , ou C_0 -semigrupo) é um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, tal que, para cada $x \in X$,*

$$\|T(t)x - x\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \quad (2.1)$$

Lema 1 ((PAZY, 2012)). *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo, então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2)$$

Teorema 1 ((PAZY, 2012)). *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo em X . Então, para cada $x \in X$ a aplicação*

$$\begin{aligned} T(\cdot)x : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow T(t)x \end{aligned}$$

é contínua. Além disso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 1 ((PAZY, 2012)). *Para $A \in \mathcal{L}(X)$ a família de operadores*

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$$

é um C_0 -semigrupo.

Definição 3 ((PAZY, 2012)). *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Chamamos de gerador infinitesimal ao operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por*

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \text{onde } \mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

Teorema 2 ((PAZY, 2012)). *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X , então A é linear, fechado e densamente definido, isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Proposição 1 ((PAZY, 2012)). *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dois C_0 -semigrupos que possuem o mesmo gerador infinitesimal A . Então, para cada $x \in X$, teremos*

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 4 ((ENGEL; NAGEL; BRENDLE, 2000)). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador densamente definido e fechado. A é chamado operador setorial se existem constantes $a \in \mathbb{R}$, $C \geq 1$ e $\phi \in (0, \pi/2)$, tais que, o setor*

$$S_{a,\phi} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi \right\} \subset \rho(A),$$

e vale a estimativa

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi} \setminus \{a\}.$$

Se $a = 0$ chamaremos A de operador setorial positivo, e para facilitar a notação, denotaremos $S_{0,\phi}$ apenas por S_ϕ .

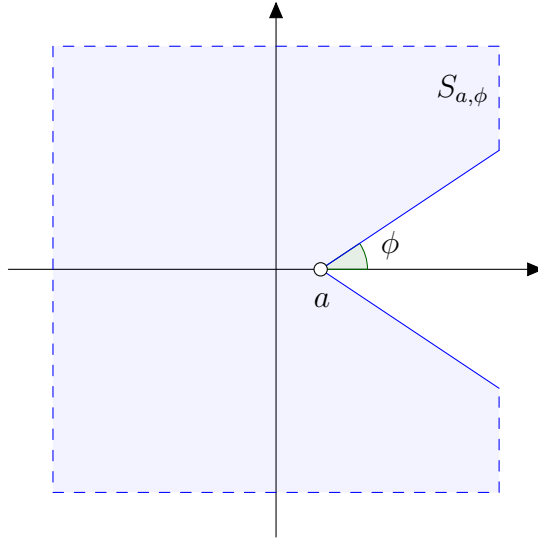


Figura 1 – Setor $S_{a,\phi}$

Definição 5 ((ENGEL; NAGEL; BRENDLE, 2000)). Dizemos que Ha é um caminho de Hankel, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, onde:

$$\begin{aligned} Ha_1 &= \{te^{i\theta} ; t \in [r, +\infty)\}, \\ Ha_2 &= \{re^{it} ; t \in [-\theta, \theta)\}, \\ Ha_3 &= \{te^{-i\theta} ; t \in [r, +\infty)\}. \end{aligned}$$

Também escrevemos $Ha = Ha(r, \theta)$ para mostrar a dependência do ângulo e do raio.

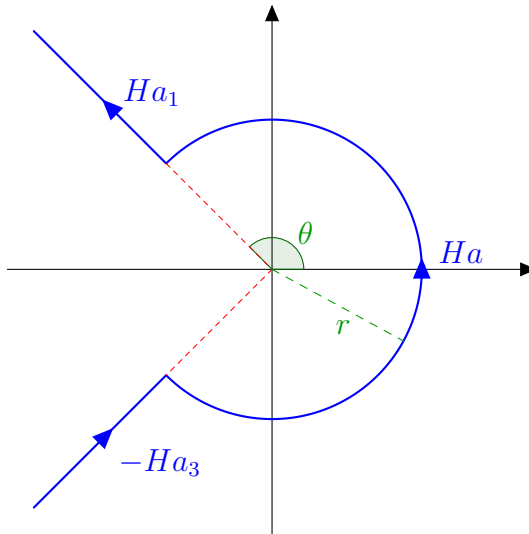


Figura 2 – Caminho de Hankel $Ha = Ha(r, \theta)$

Definição 6 ((OLIVEIRA, 2019)). Diz-se que uma função $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é analítica numa região R se ela é derivável em cada ponto de R ; f é analítica num ponto z_0 se f é analítica numa região contendo z_0 , por exemplo, numa vizinhança $V_\delta(z_0)$.

Definição 7 ((ENGEL; NAGEL; BRENDLE, 2000)). Sejam $\phi_1 < 0 < \phi_2$ e defina o setor $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg(z) < \phi_2\}$. Para $z \in \Lambda$, seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z) : z \in \Lambda\}$ é dita um semigrupo analítico em Λ se

1. A função $\Lambda \ni z \rightarrow T(z)$ é analítica;
2. $T(0) = I_X$, e $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Lambda} T(z)x = x$, para cada $x \in X$, com $T(z) \in \mathcal{L}(X)$;
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todos $z_1, z_2 \in \Lambda$.

Um semigrupo $\{T(t) : t > 0\}$ é dito analítico se ele possui uma extensão a um semigrupo analítico em algum setor Λ , contendo o eixo real positivo. Claramente, a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real é um C_0 -semigrupo.

Proposição 2 ((ENGEL; NAGEL; BRENDLE, 2000)). Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $T(t)$, considerando o Lema 1, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\lambda) > w$, teremos que $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (2.3)$$

Apresentaremos agora o teorema principal desta seção, que nos diz que se A é setorial, então $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. É possível ainda provar que a recíproca é verdadeira, isto pode ser visto em (FRIEDMAN, 2008).

Teorema 3 ((ENGEL; NAGEL; BRENDLE, 2000)). Se $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial, então $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dado por

$$T(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{a,\theta}} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad \forall t > 0. \quad (2.4)$$

Para $t = 0$, temos $T(0) = I_X$, onde I_X é o operador identidade, considere $S_{a,\theta}$ o contorno em $\rho(-A)$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$.

Além disso, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é analítico no setor $\{t \neq 0 : |\arg(t)| < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$. Para todo $t > 0$, temos as estimativas

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-at} \quad e \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M t^{-1} e^{-at},$$

para alguma constante $M > 0$. Por fim, para cada $x \in X$, vale

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x, \quad \forall t > 0. \quad (2.5)$$

Observação 1. Daremos duas afirmações simples, que serão úteis ao longo deste texto (ver (RENARDY; ROGERS, 2006)).

- Se $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial positivo, então existem $\delta > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que $S_{\delta, \theta} \subset \rho(-A)$ e ainda

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\delta e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

para alguma constante $M_\delta > 0$.

- Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo analítico e o operador linear $-A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é seu gerador infinitesimal, então A é setorial.

Proposição 3 ((LORENZI et al., 2004)). Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, tal que, $\rho(A)$ está contido no semi-plano $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) \geq w\}$ e

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad (2.6)$$

com $w \geq 0$, $M \geq 1$. Então A é setorial.

Antes disso, vamos considerar a equação do calor

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.7)$$

cuja a solução é dada por;

$$u(x, t) = g(\cdot, t) * u_0(x), \quad \text{com} \quad g(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}. \quad (2.8)$$

A solução (2.8) gera um semigrupo $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, chamado semigrupo do calor, via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (2.8) (ver (LORENZI et al., 2004)), isto é,

$$(G(t)u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (2.9)$$

com dado inicial $(G(0)u_0)(x) = u_0(x)$.

Proposição 4 ((LORENZI et al., 2004)). O operador Laplaciano Δ é um operador setorial em $L^p(\mathbb{R}^N)$.



Figura 3 – Carl Samuel Herz. Fonte: (HERZ, 1996)

2.2 ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

- Carl Samuel Herz (1930 - 1995) foi um matemático americano-canadense, especializado em análise harmônica.
- Herz generalizou a álgebra de Beurling (álgebra introduzida por Arne Beurling (1949), geralmente é uma álgebra de funções periódicas com séries de Fourier).
- Essas generalizações são protótipos de espaços de Herz.

Definição 8 ((TSUTSUI, 2011)). Denotaremos a norma de f em $L^{p,\infty}(E)$, $p > 1$ por

$$\|f\|_{p,\infty,E} = \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

Definição 9 (Espaço homogêneo de Herz Fraco). Sejam $1 < p$, $1 \leq q \leq \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Herz fraco $W\dot{K}_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ como o espaço das funções mensuráveis tais que

$$\|f\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\|_{p,\infty,A_k}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

com a modificação usual no caso $q = \infty$, ou seja,

$$\|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \|f\|_{p,\infty,A_k} < \infty,$$

com a convenção $L^{\infty,\infty} = L^\infty$ com $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\}$.

O par $(W\dot{K}_{p,q}^\alpha, \|\cdot\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha})$ é um espaço de Banach (ver (TSUTSUI, 2011; HERNÁNDEZ; YANG, 1999)).

Exemplo 2 ((TSUTSUI, 2011)). Um exemplo de função que está em $W\dot{K}_{p,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ é

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{-k\alpha}}{|x - x_k|^{\frac{n}{p}}} \mathcal{X}_k(x)$$

onde $x_k = (\frac{3}{2}2^{k-1}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{X}_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_k \\ 0, & \text{se } x \notin A_k \end{cases}$$

AFIRMAÇÃO: $A_j \cap B(x_j, 2^{\frac{-j\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}}) = \{x \in A_j : |f(x)| > \lambda\}$.

De fato, note que:

Para $\lambda > 0$, $j \in \mathbb{Z}$, se $x \in A_j \cap B(x_j, 2^{\frac{-j\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}})$, então

$$\begin{aligned} |x - x_j| < 2^{\frac{-j\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}} &\Leftrightarrow |x - x_j|^{\frac{n}{p}} < 2^{-j\alpha} \lambda^{-1} \\ &\Leftrightarrow |x - x_j|^{\frac{-n}{p}} > 2^{j\alpha} \lambda \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2^{-j\alpha}}{|x - x_j|^{\frac{n}{p}}} > \lambda$$

Logo, $A \cap B(x_j, 2^{\frac{-j\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}}) = \{x \in A_j : |f(x)| > \lambda\}$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\infty,A_k} &= \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda |A_k \cap B(x_k, 2^{\frac{-k\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}})|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\lambda>0} \lambda |B(x_k, 2^{\frac{-k\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}})|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda \left(\int_{B(x_k, 2^{\frac{-k\alpha p}{n}} \lambda^{\frac{-p}{n}})} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda \left(\int_{B(0,1)} 2^{-k\alpha p} \lambda^{-p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{-k\alpha} |B_1|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Então

$$\|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^\alpha} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \|f\|_{p,\infty,A_k} \leq |B_1|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Portanto $f \in W\dot{K}_{p,\infty}^\alpha$.

Observação 2. Note que

$$\|f\|_{W\dot{K}_{\infty,\infty}^0} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k \cdot 0} \|f\|_{\infty,\infty} = \|f\|_{L^\infty}$$

Definição 10 ((EVANS, 2022)). *Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, definimos a transformada de Fourier de u , denotada por $\mathcal{F}(u)$, como sendo a função $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, dada por*

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

e a transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}(u)$ é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

Definição 11 ((BREZIS, 2011)). *Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e uma função $u : U \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ sendo um corpo igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Chamamos o conjunto $C_c^\infty(U) = \{u \in C^\infty : \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$, onde $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in U : u(x) \neq 0\}}$, de conjunto das funções teste.*

Definição 12 ((FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)). *Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, radialmente simétrica tal que, $\text{supp}(\phi) \subseteq \{x; \frac{3}{4} \leq |x| \leq \frac{8}{3}\}$ e*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0$$

onde $\phi_j(\xi) := \phi(2^{-j}\xi)$.

*Definimos o operador localização Δ_j por $\Delta_j f = (\mathcal{F}^{-1}\phi_j) * f$.*

Definição 13 ((SAWANO et al., 2018)). *[Espaço de Schwartz] Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ possui decrescimento rápido quando é de classe C^∞ e para todos naturais k, l maiores ou iguais a zero, tem-se*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty$$

onde $f^{(l)}$ denota a derivada de ordem l , com a convenção $f^{(0)} = f$. O espaço de Schwartz, denotado por $S(\mathbb{R})$, é o conjunto de todas as funções de decrescimento rápido.

Definição 14 ((SAWANO et al., 2018)). *Denotamos por $S'(\mathbb{R}^N)$ o conjunto de todos os mapas contínuos de $S(\mathbb{R}^N)$ em $\mathbb{C}$. Isto é,*

$$S'(\mathbb{R}^N) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(S(\mathbb{R}^N), \mathbb{C}) : f \text{ é contínua}\}.$$

Definição 15 ((LEMARIÉ-RIEUSSET, 2002)). *Denotamos por S_∞ o subconjunto de $S(\mathbb{R}^N)$ e definido por*

$$S_\infty = \{f \in S(\mathbb{R}^N); \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \int x^\alpha f(x) dx = 0\}.$$

Proposição 5 ((LEMARIÉ-RIEUSSET, 2002)). *O espaço S_∞ é fechado em S .*

Definição 16 ((FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)Espaços de Besov Homogêneos). *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$. Definimos o valor $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ de tal forma que, considerando $f \in S'$, quando $q < \infty$*

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\Delta_j f\|_{L^p}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

já quando $q = \infty$

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} = \sup\{2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p}\}.$$

Definimos os espaços de Besov Homogêneos como sendo

$$\dot{B}_{p,q}^s = \{f \in S'; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < +\infty\}. \quad (2.10)$$

Definição 17 ((KOZONO; YAMAZAKI, 1994)). *Sejam $1 \leq q < \infty$ e $0 \leq r < n$. O espaço de Morrey homogêneo $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}^N)$ é definido por*

$$\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}^N) = \{f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{q,r} < \infty\}$$

com a norma dada por

$$\|f\|_{q,r} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N; R > 0} R^{-\frac{r}{q}} \|f\|_{q,x_0;R},$$

em que $\|f\|_{q,x_0;R}$ denota a norma $L^q(B_R(x_0))$ de f , isto é,

$$\|f\|_{q,x_0;R} = \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Lema 2 ((AZEVEDO; CUEVAS; HENRIQUEZ, 2019)). *Para cada desigualdade abaixo, existe uma constante positiva C , tal que,*

$$\|G(t)f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (2.11)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{L^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}. \quad (2.12)$$

Lema 3 ((CANNONE, 1997)). *Seja p fixo com $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha > 0$. Para qualquer distribuição temperada $v \in S'(\mathbb{R}^3)$, as seguintes normas são equivalentes*

- $\sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \|\Delta_j v\|_{L^p}$
- $\sup_{t \geq 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)v\|_{L^p}$

- $\sup_{t \geq 0} \|G(t)v\|_{B_p^{-\dot{\alpha}, \infty}}$

e será mencionado por $\|v\|_{B_p^{-\dot{\alpha}, \infty}}$

Lema 4 ((KOZONO; YAMAZAKI, 1994)). *Para todo número real s e toda $u(x) \in B_{\infty, \infty}^s$, [resp. $\dot{B}_{\infty, \infty}^s$], temos $G(t)u \rightarrow u$ na topologia fraca- * de $B_{\infty, \infty}^s$ [resp. $\dot{B}_{\infty, \infty}^s$] quando $t \rightarrow 0^+$.*

Lema 5 (Dualidade do espaço de Besov homogêneo (LEMARIÉ-RIEUSSET, 2002)). *Para $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq \infty$, sejam p', q' os expoentes conjugados de p e q e seja $\bar{B}_{p'}^{-\sigma, q'}$ o fecho de S_∞ em $\dot{B}_{p'}^{-\sigma, q'}$. Então $\dot{B}_p^{-\sigma, q}$ é o espaço dual de $\bar{B}_{p'}^{-\sigma, q'}$.*

Lema 6 ((YAMADA, 2007)). *Seja $1 \leq q \leq \infty$ e $\alpha \in (\mathbb{N} \cup 0)^N$. Então, para $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|\partial_x^\alpha G(t)f\|_{L^p} \leq Ct^{-N(1/q-1/p)/2-|\alpha|/2} \|f\|_{L^q},$$

Onde C é uma constante positiva que depende de α , N , p , q .

Lema 7 ((FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)). *Seja $1 < p < \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty - \frac{N}{p} < \alpha < N(1 - \frac{1}{p})$ e $m, s \in \mathbb{R}$. Seja $P \in C^n(\mathbb{R}^N \setminus 0)$ uma função tal que $|\partial_\xi^\beta P(\xi)| \leq C|\xi|^{(m-|\beta|)}$ para todo multi-índice β satisfazendo $|\beta| \leq N$. Então*

$$\|P(D)f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha, s-m}} \leq C\|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha, s}}.$$

A próxima observação contém relação entre os espaços L^p -fraco, Herz-fraco, Morrey e Besov (ver (TSUTSUI, 2011; FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018))

Observação 3.

1. Para $1 < p < \infty$, temos a inclusão contínua $L^p \subsetneq L^{p, \infty} \subsetneq W\dot{K}_{p, \infty}^0$.
2. Se $1 \leq q \leq r < \infty$, $q < p$, e $N/r \neq v + N/p$, então $W\dot{K}_{p, \infty}^v \not\subseteq \mathcal{M}_q^r$.
3. Se $1 < p < \sigma < \infty$ e $0 < v < N(1 - 1/p)$, temos $W\dot{K}_{p, \infty}^v \hookrightarrow \dot{B}_{\sigma, \infty}^{-(v+N(1/p-1/\sigma))}$ e $W\dot{K}_{p, \sigma}^0 \hookrightarrow \dot{B}_{\sigma, \infty}^{-N(1/p-1/\sigma)}$.
4. Para $1 < p < \infty$ e $0 \leq v < N(1 - 1/p)$, temos $W\dot{K}_{p, \infty}^v \hookrightarrow \dot{B}_{\infty, \infty}^{-v+N/p}$.
5. Para $1 < p \leq \infty$ e $0 \leq v \leq N(1 - 1/p)$, tem-se $W\dot{K}_{p, 1}^v \hookrightarrow \dot{B}_{\infty, \infty}^{-v+N/p}$.
6. Para $1 < p < \sigma < \infty$ e $-N(1/p - 1/\sigma) < v \leq 0$ não vale a inclusão $W\dot{K}_{p, \infty}^v \hookrightarrow \dot{B}_{\sigma, \infty}^{-(v+N(1/p-1/\sigma))}$.

7. Para $1 < p < \infty$ e $-N/p < v < 0$ não vale a inclusão $W\dot{K}_{p,\infty}^v \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v+N/p)}$.

Iremos agora definir o Espaço homogêneo fraco de Besov-Herz, para tanto considere $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ o conjunto de todos os polinômios com N variáveis.

Definição 18 ((FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)). *Seja $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty$ e $v, s \in \mathbb{R}$. O espaço homogêneo fraco de Besov-Herz(BWH), $\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s} = \dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s}(\mathbb{R}^N)$ é definido como*

$$\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s} = \{f \in S'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s}} < \infty\}$$

$$\|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s}} = \begin{cases} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsr} \|\Delta_j f\|_{W\dot{K}_{p,q}^v}^r \right)^{\frac{1}{r}}, & \text{se } r < \infty \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{W\dot{K}_{p,q}^v}, & \text{se } r = \infty. \end{cases}$$

O par $(\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s}, \|\cdot\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s}})$ é um espaço de Banach (ver (FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)).

Lema 8 (Desigualdade de Holder (FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)). *Se $1 < p, p_1, p_2 \leq \infty$, $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$, e $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ são tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ e $\beta = \beta_1 + \beta_2$, então*

$$\|fg\|_{W\dot{K}_{p,q}^\beta} \leq C \|f\|_{W\dot{K}_{p_1,q_1}^{\beta_1}} \|g\|_{W\dot{K}_{p_2,q_2}^{\beta_2}},$$

em que $C > 0$ é uma constante universal.

Observação 4. *Em particular quando $(\beta_2, p_2, q_2) = (0, \infty, \infty)$, temos*

$$\|fg\|_{W\dot{K}_{p,q}^\beta} \leq C \|f\|_{W\dot{K}_{p,q}^\beta} \|g\|_{L^\infty} \quad (2.13)$$

Lema 9 ((TSUTSUI, 2011)). *Para $1 < p < \infty$, $-\frac{N}{p} \leq \beta \leq v < N(1 - \frac{1}{p})$, temos as desigualdades:*

$$\|G(t)f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^\beta} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(v-\beta)} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^v}, \quad (2.14)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^\beta} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+v-\beta)} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^v}. \quad (2.15)$$

Lema 10. *Para $1 < p < \sigma \leq \infty$, $-\frac{N}{\sigma} \leq \beta \leq v < N(1 - \frac{1}{p})$, temos as desigualdades:*

$$\|G(t)f\|_{W\dot{K}_{\sigma,\infty}^\beta} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(v-\beta+N(\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}))} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^v}, \quad (2.16)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{W\dot{K}_{\sigma,\infty}^\beta} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+v-\beta+N(\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}))} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^v}. \quad (2.17)$$

A próxima observação, apresenta algumas inclusões envolvendo espaços de BWH que podem ser encontradas em Ferreira e Pérez-López (ver (FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018))

Observação 5.

1. Para $1 < p < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ e $0 \leq v < N(1 - 1/p)$, obtemos $\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{v,s} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,r}^{s-(v+\frac{N}{p})}$.
2. Para $1 < p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, tem-se $\dot{B}_{p,q}^s \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{0,s}$.
3. A inclusão $\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,s} \hookrightarrow \dot{B}_{\sigma,\infty}^{s-N(1/p-1/\sigma)}$ não vale para nenhum $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, e $1 \leq \sigma < \infty$.
4. Para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $-\frac{N}{p} < v < N(1 - \frac{1}{p})$, tem-se as seguintes inclusões contínuas

$$\dot{B}W\dot{K}_{p,q,1}^{v,0} \subset W\dot{K}_{p,q}^v \subset \dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{v,0}.$$

Lema 11. [(FERREIRA; PÉREZ-LÓPEZ, 2018)] Seja $s, \sigma \in \mathbb{R}$, $s \leq \sigma$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty$, e $-\frac{N}{p} < v < N(1 - \frac{1}{p})$. Então existe $C > 0$ (que independe de f) tal que

$$\|G(t)f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,\sigma}} \leq Ct^{\frac{1}{2}(s-\sigma)} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{v,s}}, \quad (2.18)$$

para todo $t > 0$. Ainda mais, se $s < \sigma$, então obtemos

$$\|G(t)f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,1}^{v,\sigma}} \leq Ct^{\frac{1}{2}(s-\sigma)} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{v,s}}, \quad (2.19)$$

para todo $t > 0$.

2.3 FUNÇÕES ESPECIAIS

Definição 19 ((MAINARDI, 2010)). Se $\alpha \in (0, 1)$, a função de Mainardi $M_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$M_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha - \alpha n)}.$$

Definição 20. [(MAINARDI, 2010)] Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ estritamente positivos. Então, $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função de Mittag-Leffler, dada por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.20)$$

onde se $\beta = 1$, a denotamos por $E_\alpha(z)$.

Proposição 6 ((MAINARDI, 2010)). *Seja $\alpha, \beta > 0$, $z \in \mathbb{C}$, escolhemos $Ha_z = Ha(\epsilon_z, \theta)$ com $\epsilon_z > |z|^{1/\alpha}$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ então*

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \frac{\mu^{\alpha-\beta} e^\mu}{\mu^\alpha - z} d\mu.$$

Definição 21 ((SCHIFF, 1999)). *Considere a função $f : [0, +\infty) \rightarrow X$. Dizemos que f é de tipo exponencial, se existem constantes positivas t_0 , M e $\gamma \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\|f(t)\|_X \leq M e^{\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Proposição 7 ((SCHIFF, 1999)). *Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow X$, uma função localmente integrável e de tipo exponencial. Então existe $\gamma > 0$, tal que,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

é convergente se $\operatorname{Re}(\lambda) > \gamma$.

Lema 12 ((SCHIFF, 1999)). *Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ são funções de tipo exponencial, então $f * g : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é de tipo exponencial.*

Definição 22 ((SCHIFF, 1999)). *Tomando f como na Proposição 7, podemos considerar uma função $\hat{f} : \mathcal{D}(\hat{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow X$, dada por:*

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

onde $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > \gamma\} \subset \mathcal{D}(\hat{f})$, e γ é dado pela Proposição 7. Dizemos que $\hat{f}(\lambda)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$. Em outras palavras, podemos definir o mapa linear $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}, X)$, onde $\mathcal{D}(\mathcal{L}) := \{f \in L_{loc}^1([0, +\infty), X); f \text{ é de tipo exponencial}\}$ e $\mathcal{F}(\mathbb{C}, X)$ é o conjunto das funções definidas no subconjunto dos números complexos, com imagem contida em X . Denotamos por $\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) := \hat{f}(\lambda)$ o operador de transformada de Laplace.

Proposição 8. [(MAINARDI, 2010)] *Seja $\alpha \in (0, 1)$, $-1 < r < \infty$, $\lambda > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. A função de Mainardi M_α satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $M_\alpha(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$;
- (ii) $\int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}$;
- (iii) $\mathcal{L}\{\alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha})\}(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}$;

$$(iv) \mathcal{L}\{\alpha t M_\alpha(t)\}(z) = E_{\alpha,\alpha}(-z);$$

$$(v) \mathcal{L}\{M_\alpha(t)\}(z) = E_\alpha(-z).$$

Proposição 9 ((SCHIFF, 1999)). *Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : [0, +\infty) \rightarrow X$, funções localmente integráveis e de tipo exponencial, suponha que $\mathcal{L}$ é o operador transformada de Laplace. Então a função $f * g : [0, +\infty) \rightarrow X$ é localmente integrável, de tipo exponencial e*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(\lambda) = \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda)\mathcal{L}\{g(t)\}(\lambda), \quad (2.21)$$

onde λ está na região de convergência adequada de ambas as funções.

Definição 23 ((SCHIFF, 1999)). *Seja $\hat{f} : \mathcal{D}(\hat{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, uma função integrável. Então*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda, \quad \text{onde } c > c_0, \quad (2.22)$$

com c_0 no semi-plano direito da convergência absoluta da integral da transformada de Laplace. Para denotar a Transformada de Laplace inversa escrevemos $\mathcal{L}^{-1}$. A integração é realizada ao longo da reta vertical $\operatorname{Re}(\lambda) = c > c_0$ no plano complexo de modo que c fique à direita de todas as singularidades da função $\hat{f}$.

Observação 6. *Usando as mesmas notações da Proposição 9, podemos reescrever a igualdade (2.21) de outra maneira. Suponha que $\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$, então*

$$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}(t-s) \mathcal{L}^{-1}\{\hat{g}(\lambda)\}(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\}(t).$$

Definição 24 ((SCHIFF, 1999)). *[Função Gama] Seja $\operatorname{Re}(t) > 0$. Definimos a função Gama pela seguinte integral imprópria*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx;$$

esta função é conhecida como extensão da função fatorial. De forma mais explícita, temos:

Propriedade 1 ((SCHIFF, 1999)). *[Equação funcional da função Gama] Se $\operatorname{Re}(t) > 0$ então*

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

Consequentemente

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

Definição 25 ((MAINARDI, 2010)). *Considere $\mathcal{D}(B) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \text{ e } \operatorname{Re}(\beta) > 0\}$. A função definida por*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} ds,$$

é chamada de função Beta.

Observação 7. *Utilizaremos durante o trabalho a seguinte identidade;*

$$\int_0^t \tau^{a-1} (t-\tau)^{b-1} d\tau = t^{a+b-1} B(a, b),$$

com $a, b > 0$.

Demonstração. Perceba que se $t = 0$ a igualdade já é satisfeita, então para $t > 0$, fazendo a mudança de variável $s = \frac{\tau}{t}$ temos;

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^{a-1} (t-\tau)^{b-1} d\tau &= \int_0^1 (st)^{a-1} (t-st)^{b-1} t ds \\ &= t^{a+b-1} B(a, b) \end{aligned}$$

□

Lema 13 ((MAINARDI, 2010)). *Podemos relacionar as funções gama e beta, da seguinte maneira*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

Definição 26 ((MAINARDI, 2010)). *Seja $\alpha > 0$. A função $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por*

$$g_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

é chamada função de Gel'fand-Shilov.

Lema 14 ((MAINARDI, 2010)). *Dados $\alpha, \beta > 0$, então $g_\alpha * g_\beta(t) = g_{\alpha+\beta}(t)$ para $t > 0$.*

Definição 27 ((LANDAU, 1909)). *Se $f(x)$ e $g(x)$ são definidos a partir de um certo x_0 e $g(x)$ é positivo para todo $x \geq x_0$, escrevemos $f(x) = o(g(x))$ se*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Lema 15 ((Lema de Fatou Generalizado)(TESCHL, 1998)). *Se f_n é uma sequência de funções de valores reais mensurável e g uma função integrável. Então*

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

se $g \leq f_n$ e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \leq \int_A \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

se $f_n \leq g$.

2.4 OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER

Os operadores de Mittag-Leffler são uma classe de operadores integrais generalizados que desempenham um papel importante em várias áreas da matemática, física e engenharia. Eles são denominados em homenagem aos matemáticos Gustav Mittag-Leffler e Magnus Gustaf Mittag-Leffler, que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da teoria desses operadores. Esses operadores são usados para definir soluções de equações diferenciais fracionárias lineares de ordem α .

Definição 28. (NETO, 2013) *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo. Então, as funções fortemente contínuas*

$$E_\alpha(-t^\alpha A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) := \frac{t^{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

com $Ha \subset \rho(-A)$ dado pelo caminho de Hankel, (ver Definição 5) são chamados de operadores de Mittag-Leffler.

Teorema 4. [(NETO, 2013)] *Sejam X um espaço de Banach e $-A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Para cada $\alpha \in (0, 1)$ podemos reescrever as famílias de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(-t^\alpha A)\}_{t \geq 0}$ e $\{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)\}_{t \geq 0}$ por*

$$E_\alpha(-t^\alpha A) = \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds \quad (2.23)$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) = \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad (2.24)$$

onde $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o C_0 -semigrupo analítico gerado por $-A$.

Observação 8. *Os operadores de Mittag-Leffler não apresentam a propriedade abeliana, a qual, desempenha papel crucial na teoria de semigrupos, uma vez que, para qualquer $\alpha \in (0, 1)$, existem $t, s \in [0, +\infty)$, tal que, $E_\alpha((t+s)^\alpha) \neq E_\alpha(t^\alpha A)E_\alpha(s^\alpha A)$.*

Teorema 5 ((CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015)). *Os operadores $E_\alpha(-t^\alpha A)$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)$ estão bem definidos de X em X . Mais ainda, para $x \in X$ seguem as afirmações:*

- (i) $E_\alpha(-t^\alpha A)x \Big|_{t=0} = x$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x \Big|_{t=0} = x$;
- (ii) *As funções vetoriais $t \rightarrow E_\alpha(-t^\alpha A)x$ e $t \rightarrow E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x$, são analíticas em $[0, +\infty)$.*

Proposição 10. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, e $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador setorial positivo. Então para $x \in X$, temos:*

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x \quad (2.25)$$

e

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = (\lambda^\alpha + A)^{-1}x. \quad (2.26)$$

Demonstração. Dados $x \in X$, $\alpha \in (0, 1)$ e $\lambda^\alpha \in \rho(-A)$ pela Proposição (2), temos

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x = \lambda^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^\alpha t} T(t)x dt.$$

Fazendo $t = w^\alpha$, segue-se

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= \int_0^{+\infty} \alpha(\lambda w)^{\alpha-1} e^{-(\lambda w)^\alpha} T(w^\alpha)x dw \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{-(\lambda w)^\alpha} \right) T(w^\alpha)x dw. \end{aligned}$$

Do item (iii) da Proposição (8) e da Regra de Leibniz para integrais temos

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda w t} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}) dt \right) T(w^\alpha)x dw \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda w t} \alpha t^{-\alpha} M_\alpha(t^{-\alpha}) T(w^\alpha)x dt dw. \end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variável $s = wt$, concluimos que

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}) T\left(\frac{s^\alpha}{t^\alpha}\right) x dt ds.$$

Finalmente, tomando $t^{-\alpha} = \mu$, e usando o Teorema (4) encontramos

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \left(\int_{+\infty}^0 M_\alpha(\mu) T(\mu s^\alpha) x d\mu \right) ds,$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(\mu) T(s^\alpha \mu) x \, d\mu \right) ds, \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_\alpha(-t^\alpha A) x \, dt \\
&= \mathcal{L}\{E_\alpha(-t^\alpha A)x\}(\lambda),
\end{aligned}$$

como desejado.

Tomando novamente $x \in X$ e usando o Teorema (4), notemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \left(\int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) x \, ds \right) dt.
\end{aligned}$$

Para $s = \omega t^{-\alpha}$, segue do teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \left(\int_0^{+\infty} \alpha \omega t^{-\alpha} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) T(\omega) x t^{-\alpha} \, d\omega \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \omega \left(\int_0^{+\infty} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) e^{-\lambda t} \, dt \right) T(\omega) x \, d\omega. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Tomando agora $t = \xi \omega^{1/\alpha}$ ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) e^{-\lambda t} \, dt &= \int_0^{+\infty} \alpha (\xi \omega^{1/\alpha})^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega (\xi \omega^{1/\alpha})^{-\alpha}) \\
&\quad \times e^{-\lambda (\xi \omega^{1/\alpha})} \omega^{1/\alpha} \, d\xi \quad (2.28) \\
&= \omega^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda \omega^{1/\alpha}) \xi} (\alpha \xi^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\xi^{-\alpha})) \, d\xi \\
&= \omega^{-1} \mathcal{L}\{\alpha \xi^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\xi^{-\alpha})\}(\lambda \omega^{1/\alpha}) \\
&= \omega^{-1} e^{-\lambda^\alpha \omega}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

onde (2.29) é resultado da Proposição (8), item (iii). Substituindo agora a igualdade (2.29) em (2.27), teremos

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^\alpha \omega} T(\omega) x \, d\omega \quad (2.30)$$

$$= (\lambda^\alpha + A)^{-1} x, \quad (2.31)$$

onde a igualdade (2.31) é resultado da Proposição (2). $\square$

2.5 MÉTODOS TOPOLÓGICOS

Apresentaremos agora ferramentas topológicas que serão úteis para nosso trabalho, como o princípio da contração de Banach e o teorema de existência e unicidade que utilizaremos para encontrar a solução do Problema (1.1).

Definição 29 ((RUDIN et al., 1976)). *Seja $(X; d)$ um espaço métrico. O mapa $F : X \rightarrow X$ é dito de contração se existe $k \in [0; 1)$, tal que,*

$$d(F(x); F(y)) \leq kd(x; y); \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema 6 ((SAHNI, 2012), 2003, Princípio de contração de Banach). *Sejam $(M; d)$ um espaço métrico completo não-vazio e $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Enunciaremos o resultado topológico que traz a garantia de boa colocação, no sentido de Hadamard, para as soluções do modelo de Keller-Segel (1.1). Um argumento de ponto fixo é apresentado no teorema abaixo.

Teorema 7 ((FERREIRA; PRECIOSO, 2011)). *Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$ e $T : X \rightarrow Y$ um mapa linear contínuo com norma τ . Suponha que $\mathcal{B} : X \times Y \rightarrow X$ é um mapa bilinear contínuo, isto é, existe $K > 0$, tal que,*

$$\|\mathcal{B}(x, y)\|_X \leq K\|x\|_X\|y\|_Y, \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2K(1+2\tau)}$ e $B_{2\epsilon} = \{x \in X; \|x\|_X \leq 2\epsilon\}$. Se $\|y\|_X \leq \epsilon$ e $\|\tilde{y}\|_Y \leq \epsilon$, então existe uma única solução $x \in B_{2\epsilon}$ para a equação $x = y + \mathcal{B}(x, H(x))$, onde $H(x) = \tilde{y} + T(x)$.

Demonstração. Considere o mapa $F : X \rightarrow X$ dado por $F(x) = y + \mathcal{B}(x, H(x))$. Para $x \in B_{2\epsilon}$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(x)\|_X &\leq \|y\|_X + \|\mathcal{B}(x, H(x))\|_X \\ &\leq \|y\|_X + K\|x\|_X\|H(x)\|_Y \\ &\leq \|y\|_X + K\|x\|_X(\|\tilde{y}\|_Y + \|T(x)\|_Y) \\ &\leq \|y\|_X + K\|x\|_X(\epsilon + \tau\|x\|_X) \\ &\leq \epsilon + 2K\epsilon(\epsilon + 2\tau\epsilon) \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$< 2\epsilon,$$

onde usamos em (2.32), que

$$2K\epsilon(\epsilon + 2\tau\epsilon) < \epsilon,$$

logo

$$\epsilon < \frac{1}{2K(1 + 2\tau)}, \quad (2.33)$$

pela escolha de ϵ , temos $F(B_{2\epsilon}) \subset B_{2\epsilon}$. Em seguida, tomamos $x, z \in B_{2\epsilon}$ e estimamos

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(z)\|_X &= \|\mathcal{B}(x, H(x)) - \mathcal{B}(z, H(z))\|_X \\ &= \|\mathcal{B}((x - z), H(x)) + \mathcal{B}(z, H(x) - H(z))\|_X \\ &\leq \|\mathcal{B}((x - z), H(x))\|_X + \|\mathcal{B}(z, H(x) - H(z))\|_X \\ &\leq K\|x - z\|_X\|H(x)\|_Y + K\|z\|_X\|H(x) - H(z)\|_Y \\ &\leq K\|x - z\|_X(\|\tilde{y}\|_Y + \tau\|x\|_X) + K\|z\|_X(\tau\|x - z\|_X) \\ &= K(\|\tilde{y}\|_Y + \tau\|x\|_X + \tau\|z\|_X)\|x - z\|_X \\ &\leq K(\epsilon + 4\tau\epsilon)\|x - z\|_X, \end{aligned}$$

e segue de (2.33) que $K(\epsilon + 4\tau\epsilon) < 2K(1 + 2\tau)\epsilon < 1$, então, pela Definição 29, F é uma contração em $B_{2\epsilon}$, logo, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, dado pelo Teorema 6, concluimos a demonstração. $\square$

3 CONTEXTO FRACIONÁRIO DO MODELO DE KELLER-SEGEL

O cálculo fracionário, ou cálculo de ordem não inteira, é a generalização do cálculo diferencial integral clássico. Este cálculo tem sido bastante utilizado nos últimos anos na formulação de equações diferenciais de ordem fracionária, para caracterizar com maior precisão fenômenos naturais que os de ordem inteira (ver (TAVARES; LAZO, 2021)).

O cálculo de ordem fracionária surgiu com a finalidade de generalizar o de ordem inteira, existem relatos do ponto de partida ter sido uma correspondência trocada entre Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) e l'Hôpital (Guillaume François Antoine l'Hôpital, 1661-1704), possivelmente por uma manipulação de símbolos levou l'Hôpital a perguntar a Leibniz quanto a possibilidade do expoente da derivada ser uma fração, dada a notação de Leibniz. O grande questionamento se deu inicialmente em entender o que significava derivar a função $f(x)$ meia vez? ou até mesmo qual o significado geométrico? Leibniz respondeu que a possibilidade de existir o conceito de tal derivada poderia cair num paradoxo e que, algum dia, consequências frutíferas seriam geradas (ver (ROSS, 2006)).

Em 1812, Laplace (Pierre Simon Laplace, 1749-1827) expressou uma derivada fracionária a partir de uma integral, porém o primeiro a publicar um livro a esse respeito foi Lacroix (Silvestre François Lacroix) em 1819, e em 1822, Fourier (Jean Baptista Joseph Fourier, 1768-1830) obteve uma versão generalizada de uma derivada de ordem arbitrária.

A primeira aplicação do cálculo fracionário é datada de 1823, por Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829), utilizando o fato que a derivada fracionária de uma função constante não é sempre nula, diferentemente das derivadas de ordem inteira. Posteriormente muitos matemáticos publicaram trabalhos utilizando-se dessas derivadas, nomes como Liouville (Joseph Liouville, 1809-1882), Letnikov (Aleksey Vasilievich Letnikov, 1837-1888) e outros, isso chamou a atenção mundial para a temática.

Neste Capítulo, definimos a derivada fracionária de Caputo, através da derivada fracionária de Riemann-Liouville, faremos a construção do espaço funcional de tipo Fujita-Kato e através do princípio de Duhamel, mostraremos como obter soluções para o modelo fracionário de Keller-Segel (1.1). Por fim, estimaremos via semigrupo do calor, os operadores de Mittag-Leffler em espaços de Morrey e Besov-Morrey. Tais resultados serão essenciais à obtenção dos resultados estabelecidos e provados no Capítulo 4.

3.1 DERIVADA FRACIONÁRIA

Definição 30 ((NETO, 2013)). Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in L^1(0, b; X)$. O operador $J_t^\alpha f$, definido por

$$J_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = g_\alpha * f(t), \quad (3.1)$$

para $t \in [0, b]$, é chamado de integral de ordem α de Riemann-Liouville de f .

Lema 16 ((NETO, 2013)). Seja $f \in L^1(0, b; X)$. Então para todo $t \in [0, b]$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J_t^\alpha f(t) = f(t).$$

Observação 9 ((NETO, 2013)). Através do Lema 16 podemos estender a Definição 30 para $\alpha = 0$. Neste caso J_a^0 passa a ser: $J_t^0 f(t) := f(t)$, isto é, o operador identidade.

Exemplo 3. A transformada de Laplace da integral de ordem α de f , dada pela Definição 30, é igual a

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\}(\lambda) = \lambda^{-\alpha} \hat{f}(\lambda).$$

Demonstração. Dada a função g_α , da Definição 26. Então

$$\mathcal{L}\{g_\alpha(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt,$$

Fazendo $\tau = \lambda t$, temos $d\tau = \lambda dt$, e segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g_\alpha(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} \Gamma(\alpha) \\ &= \lambda^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Usando a Definição 30 e a Proposição 9, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{g_\alpha * f(t)\}(\lambda) \\ &= \mathcal{L}\{g_\alpha(t)\} \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) \\ &= \lambda^{-\alpha} \hat{f}(\lambda) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Definição 31 ((NETO, 2013)). *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1(0, b; X)$, com $f * g_{1-\alpha} \in \mathcal{W}^{1,1}(0, b; X)$. Definimos a derivada de Riemann-Liouville de ordem α , $D_t^\alpha f(t)$, por*

$$D_t^\alpha f(t) := D_t^1 J_t^{1-\alpha} f(t) = D_t^1 (g_{1-\alpha} * f)(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b],$$

onde $D_t^1 = \left(\frac{d}{dt}\right)$. Explicitamente, obtemos

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right\}, \quad q.t.p. \text{ em } [0, b].$$

Observação 10 ((NETO, 2013)). *[Um problema na Derivada de Riemann-Liouville] Para $\beta > 0$, $\alpha > 0$, temos*

$$D^\alpha (s^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}.$$

Em particular,

$$D_t^\alpha c = c \frac{t^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \text{com } \alpha \in (0, 1)$$

Esse ponto não é interessante, pois quando derivamos a função constante a derivada é diferente de zero, com $\alpha \in (0, 1)$, mas gostaríamos que isso fosse uma generalização.

A derivada de Caputo foi proposta pelo matemático italiano Michele Caputo, em 1969, inspirado na derivada fracionária de Riemann-Liouville, que em resumo trata-se da deriva de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária, enquanto a sugerida por Caputo é a integral arbitrária da derivada de ordem inteira. Essa derivada (de Caputo), foi bastante aceita por vários autores, principalmente por simplificar problemas com dependência temporal e pela dependência de condições iniciais.

Definição 32 ((NETO, 2013)). *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1(0, b; X)$, com $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}(0, b; X)$, onde $W^{1,1}(0, b; X)$ denota o espaço de funções $L^1(0, b; X)$ que possuem as derivadas fracas de ordem menor ou igual que 1 em $L^1(0, b; X)$. A derivada de Caputo de ordem α , denotada por ${}^c D_t^\alpha f(t)$, é definida da seguinte forma*

$${}^c D_t^\alpha f(t) := J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b],$$

onde, D_t^α é a derivada de Riemann-Liouville.

Observação 11 ((NETO, 2013)). *A derivada de Caputo de uma constante é zero e*

$$J_t^{\alpha_1} {}^c D_t^{\alpha_1} h(t) = h(t) - h(0).$$

Proposição 11 ((NETO, 2013)). *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e suponha que $f \in C^1([0, b], X)$, então ${}^c D_t^\alpha \in C([0, b], X)$. e*

$${}^c D_t^\alpha f(t) = J_t^{1-\alpha} f'(t) \quad \text{para todo } t \in [0, b].$$

Proposição 12 ((NETO, 2013)). *As seguintes propriedades são válidas em relação à integrais e derivadas fracionárias: Dados $\alpha_1, \alpha_2, b \geq 0$ com $f \in L^1(0, b; X)$ e $h \in C(0, b; X)$.*

$$I. \quad J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t) = J_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t);$$

$$II. \quad D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) = f(t);$$

$$III. \quad \text{Se } g_{1-\alpha_1} * f \in W^{1,1}(0, b; X), \text{ então};$$

$$J_t^{\alpha_1} {}^c D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0}.$$

Além disso, se existe uma função integrável ϕ , tal que, $f = J_t^{\alpha_1} \phi(t)$, então

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t);$$

$$IV. \quad {}^c D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = h(t);$$

$$V. \quad \text{Se } g_{1-\alpha_1} * h \in W^{1,1}(0, b; X), \text{ então } J_t^{\alpha_1} {}^c D_t^{\alpha_1} h(t) = h(t) - h(0).$$

Observação 12 ((NETO, 2013)). *A Derivada de Caputo da função de Mittag-Leffler (Definição 20) nos dá a própria função. Especificamente,*

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha E_\alpha(t^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}^c D_t^\alpha (t^{\alpha k})}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1) \Gamma(\alpha k + 1)} \frac{t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \text{tome } m = k - 1, \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m + 1)} \\ &= E_\alpha(t^\alpha). \end{aligned}$$

3.2 ESPAÇO FUNCIONAL DE TIPO FUJITA-KATO

Hiroshi Fujita e Tosio Kato, foram dois renomados matemáticos, que contribuíram significativamente para a teoria das equações diferenciais parciais ao introduzir a ideia de espaços de soluções invariantes por escala. Sua pesquisa se concentrou em compreender as soluções de equações que exibem invariância quando escaladas apropriadamente.

A chave para essa abordagem é o reconhecimento de que muitos fenômenos físicos, como a difusão de calor, a propagação de ondas e a dissipação de energia, exibem propriedades de escala. Isso significa que, se você tiver uma solução válida, ela pode ser multiplicada por uma constante apropriada, resultando em outra solução válida. Essa invariância por escala tem implicações profundas para a análise desses sistemas.

Para investigar essa invariância por escala, Fujita e Kato utilizaram a análise funcional e a teoria dos semigrupos. Essas ferramentas matemáticas poderosas permitiram-lhes estudar a estrutura dos espaços de soluções que preservam a invariância sob as transformações de escala.

Um dos resultados mais notáveis de Fujita e Kato foi o desenvolvimento de teoremas de existência de soluções. Esses teoremas são fundamentais para a resolução de problemas práticos em física e engenharia, nos quais a compreensão do comportamento em diferentes escalas é crucial. Eles permitiram a formulação de soluções para uma ampla variedade de equações diferenciais parciais que exibem invariância por escala, tornando-se uma ferramenta valiosa para a modelagem e análise de sistemas físicos complexos.

Afim de garantirmos a existência de de soluções para o problema (1.1), apresentaremos nessa seção o espaço funcional de Fujita-Kato. O qual atuará como base dos resultados.

Lema 17. *Considerando $u_\sigma(x, t) = \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$ e $v_\sigma(x, t) = v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$, se o par $[u, v]$ é uma solução do Problema (1.1) suficientemente regular com $\gamma = 0$, então $[u_\sigma, v_\sigma]$ é solução.*

Demonstração. De fato, note que, sendo $[u, v]$ uma solução do Problema (1.1) com $\gamma = 0$, então $u_\sigma := \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$ e $v_\sigma := v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$ também satisfazem o problema com dado inicial $u_{0\sigma}(x) = \sigma^2 u_0(\sigma x)$ e $v_{0\sigma} = v_0(\sigma x)$.

Nosso problema é dado por:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) \\ {}^c D_t^\alpha v = \Delta v - \gamma v + u \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \end{cases}.$$

Substituindo $\gamma = 0$ temos:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) \\ {}^c D_t^\alpha v = \Delta v + u \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \end{cases}.$$

Em termos de u_σ e v_σ queremos mostrar que:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u_\sigma = \nabla \cdot (\nabla u_\sigma - u_\sigma \nabla v_\sigma) \\ {}^c D_t^\alpha v_\sigma = \Delta v_\sigma + u_\sigma \\ u_\sigma(x, 0) = u_{0\sigma}(x), \quad v_\sigma(x, 0) = v_{0\sigma}(x) \end{cases}.$$

Por um lado, usando a Proposição 11 temos

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha u_\sigma(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} D_s u_\sigma(x, s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} D_s (\sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s)) ds \end{aligned}$$

Fazendo $y(s) = \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s$ então $ds = \sigma^{-\frac{2}{\alpha}} dy(s)$. Quanto aos intervalos de integração tem-se que $s = 0$ implica em $y(0) = 0$, e $s = t$ implica em $y(s) = t\sigma^{\frac{2}{\alpha}}$. Portanto,

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha u_\sigma(x, t) &= \frac{\sigma^2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t\sigma^{\frac{2}{\alpha}}} (t - \sigma^{-\frac{2}{\alpha}} y(s))^{-\alpha} \sigma^{\frac{2}{\alpha}} D_{y(s)} u(\sigma x, y(s)) \sigma^{-\frac{2}{\alpha}} dy(s) \\ &= \frac{\sigma^2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t\sigma^{\frac{2}{\alpha}}} (t - \sigma^{-\frac{2}{\alpha}} y(s))^{-\alpha} D_{y(s)} u(\sigma x, y(s)) dy(s) \\ &= \frac{\sigma^2 \sigma^2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t\sigma^{\frac{2}{\alpha}}} (\sigma^{\frac{2}{\alpha}} t - y(s))^{-\alpha} D_{y(s)} u(\sigma u, y(s)) dy(s) \\ &= \sigma^4 \cdot {}^c D_t^\alpha (u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)). \end{aligned}$$

por outro lado temos,

$$\begin{aligned} \Delta u_\sigma &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\ &= \sigma^4 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} (\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\ &= \sigma^4 \Delta u(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $y = \sigma x$.

Note ainda que,

$$\Delta v_\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_\sigma}{\partial x_i^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&= \sigma^2 \Delta v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto usando (3.2) e (3.3), temos,

$$\begin{aligned}
\Delta u_\sigma - \nabla \cdot (u_\sigma \nabla v_\sigma) &= \sigma^4 \Delta u(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) - (\sigma^4 \nabla u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \cdot \nabla v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&\quad + \sigma^4 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \Delta v(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)) \\
&= \sigma^4 (\Delta u(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) - (\nabla u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \cdot \nabla v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&\quad + u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \Delta v(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)) \\
&= \sigma^4 (\Delta u(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) - \nabla \cdot (u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \nabla v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)) \\
&= \sigma^4 \nabla \cdot (\nabla u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) - u \nabla v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)) \\
&= \sigma^4 \cdot {}^c D_t^\alpha u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&= {}^c D_t^\alpha u_\sigma(x, t).
\end{aligned}$$

Analogamente temos,

$$\begin{aligned}
{}^c D_t^\alpha v_\sigma &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot D_s v_\sigma(x, s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot D_s v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \sigma^{\frac{2}{\alpha}} \cdot D_{y(s)} v(\sigma x, y(s)) ds.
\end{aligned}$$

Fazendo $y(s) = \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s$, temos $ds = \sigma^{-\frac{2}{\alpha}}$, quanto ao intervalo de integração tem-se $s = 0$ implica em $y(0) = 0$, e $s = t$ implica em $y(s) = t \sigma^{\frac{2}{\alpha}}$, então,

$$\begin{aligned}
{}^c D_t^\alpha v_\sigma &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t \sigma^{\frac{2}{\alpha}}} (t - \sigma^{-\frac{2}{\alpha}} y(s))^{-\alpha} D_{y(s)} v(\sigma x, y(s)) \sigma^{\frac{2}{\alpha}} \sigma^{-\frac{2}{\alpha}} dy(s) \\
&= \frac{\sigma^2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t \sigma^{\frac{2}{\alpha}}} (\sigma^{\frac{2}{\alpha}} t - y(s))^{-\alpha} D_{y(s)} v(\sigma x, y(s)) dy(s) \\
&= \frac{\sigma^2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t \sigma^{\frac{2}{\alpha}}} (\sigma^{\frac{2}{\alpha}} t - y(s))^{-\alpha} D_{y(s)} v(\sigma x, y(s)) dy(s) \\
&= \sigma^2 \cdot {}^c D_t^\alpha v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t).
\end{aligned}$$

Note agora que,

$$\Delta v_\sigma + u_\sigma = \sigma^2 \Delta v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) - \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2(\Delta v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) - u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)) \\
&= \sigma^2 \cdot {}^c D_t^\alpha v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&= {}^c D_t^\alpha v_\sigma(x, t).
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

O mapa $[u, v] \rightarrow [u_\sigma, v_\sigma]$ é chamado de escala, e as soluções invariantes por escala são chamadas auto-similares. Quando fazemos $t \rightarrow 0^+$ temos os candidatos a dado inicial são funções homogêneas

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} u_\sigma(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&= \sigma^2 u_0(\sigma x)
\end{aligned}$$

Analogamente temos,

$$v_{0_\sigma}(x) = v_0(\sigma x)$$

ou seja, os dados u_0, v_0 são funções homogêneas de graus -2 e 0 respectivamente. Diante disso somos motivados então a tomar os dados iniciais do Problema (1.1) no espaço $\dot{B}W\dot{K} \times \dot{B}$, o qual é invariante pela aplicação de escala.

Observação 13. Denotaremos por B_σ^v o espaço $\dot{B}W\dot{K}_{\sigma, \infty, \infty}^{v, v + \frac{N}{\sigma} - 2}$.

Buscaremos as soluções globais $[u(x, t), v(x, t)]$ pertencentes a classe de Fujita-Kato $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, em que

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 &= \left\{ u \in L^\infty\left((0, \infty); B_r^{v_1}\right) : t^{\frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right)} u \in L^\infty\left((0, \infty); W\dot{K}_{r, \infty}^{v_1}\right), \right. \\
&\quad \left. t^{\frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{N}{q} - v_2\right)} u \in L^\infty\left((0, \infty); W\dot{K}_{q, \infty}^{v_2}\right) \right\}. \\
\mathcal{X}_2 &= \left\{ v \in L^\infty\left((0, \infty); \dot{B}_{\infty, \infty}^0\right) : t^{\frac{\alpha}{2}} \nabla v \in L^\infty\left((0, \infty); L^\infty\right) \right\},
\end{aligned}$$

- $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são espaços de Banach com normas

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1} = \sup_{t>0} \|u(t)\|_{B_r^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right)} \|u\|_{W\dot{K}_{r, \infty}^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{N}{q} - v_2\right)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q, \infty}^{v_2}} \quad (3.4)$$

$$\|v\|_{\mathcal{X}_2} = \sup_{t>0} \|v(t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \quad (3.5)$$

3.3 PRINCÍPIO DE DUHAMEL

O Princípio de Duhamel é uma técnica na teoria de equações diferenciais parciais que permite resolver EDPs lineares com termos forçantes não homogêneos. Ele envolve a representação da solução da EDP não homogênea como uma integral que combina uma solução da EDP homogênea (chamada de "kernel" ou "núcleo") com o termo forçante não homogêneo. Essa técnica é útil para resolver problemas em física, engenharia e matemática aplicada, onde a EDP não homogênea não pode ser resolvida diretamente por outras técnicas analíticas. O Princípio de Duhamel é uma ferramenta valiosa para encontrar soluções de EDPs complexas. A representação geral da solução usando o princípio de Duhamel é a seguinte:

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t F(x, t-s) \cdot f(x, s) ds$$

onde:

$u(x, t)$ é a solução da EDP não homogênea;

$F(x, t-s)$ é o núcleo, que é a solução da EDP homogênea;

$f(x, s)$ é o termo forçante não homogêneo;

$u_0(x)$ é a condição inicial.

Suponha que o par $[u, v]$ satisfaça (1.1). Então aplicando J_t^α (Definição 30), em ambos os lados da primeira equação diferencial de (1.1), e usando a Proposição 12 item (V), obtemos

$$\begin{aligned} J_t^\alpha({}^c D_t^\alpha u(t)) &= J_t^\alpha(\Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v)(t)) \\ u(t) &= u_0 + \Delta J_t^\alpha u(t) - J_t^\alpha \nabla \cdot (u \nabla v)(t) \\ u(t) &= u_0 + \Delta(g_\alpha * u(t)) - g_\alpha * \nabla \cdot (u \nabla v)(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assumindo agora que o par $[u, v]$ é do tipo exponencial e localmente integrável, aplicamos a transformada de Laplace a ambos os lados de (3.6) e utilizando o Exemplo 3, ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{u}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} u_0 + \Delta \mathcal{L}\{(g_\alpha * u)(t)\}(\lambda) - \mathcal{L}\{g_\alpha * \nabla \cdot (u \nabla v)(t)\}(\lambda) \\ &= \lambda^{-1} u_0 + \lambda^{-\alpha} \Delta \hat{u}(\lambda) - \lambda^{-\alpha} \nabla \cdot (\widehat{u \nabla v})(\lambda). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Segue então de (3.7), que

$$(I - \lambda^{-\alpha} \Delta) \hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1} u_0 - \lambda^{-\alpha} \nabla \cdot (\widehat{u \nabla v})(\lambda).$$

Tomando $\lambda^\alpha \in \rho(\Delta)$ encontramos

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}u_0 - (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}\nabla(\widehat{u\nabla v})(\lambda). \quad (3.8)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, em (3.8) e utilizando a Definição 20, temos

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}u_0\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\{(\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}\nabla(\widehat{u\nabla v})\}(t) \\ &= E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 - \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{\Delta(\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}\}(t-s)\mathcal{L}^{-1}\{\widehat{u\nabla v}\}(s)ds \\ &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u\nabla v)(s)ds. \end{aligned}$$

Procedendo agora para a segunda equação de (1.1) de forma análoga à primeira, aplicamos o operador J_t^α e obtemos

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + J_t^\alpha(\Delta - \gamma)v(t) + J_t^\alpha u(t) \\ &= v_0 + (\Delta - \gamma)(g_\alpha * v)(t) + g_\alpha * u(t). \end{aligned}$$

tomando a transformada de Laplace de $v(t)$ e utilizando o Exemplo 3, passamos a ter

$$\hat{v}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}v_0 + (\Delta - \gamma)\lambda^{-\alpha}\hat{v}(\lambda) + \lambda^{-\alpha}\hat{u}(\lambda). \quad (3.9)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.9) por λ^α , obtemos

$$\lambda^\alpha \hat{v}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}v_0 + (\Delta - \gamma)\hat{v}(\lambda) + \hat{u}(\lambda)$$

e segue daí, para $\lambda^\alpha \in \rho(\Delta - \gamma)$, que

$$\hat{v}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}v_0 + (\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}\hat{u}(\lambda).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na igualdade acima e usando a Definição 20 temos

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}v_0\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}\hat{u}(\lambda)\}(t) \\ &= E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma)\}^{-1}(t-s)\mathcal{L}^{-1}\{\hat{u}(\lambda)\}(s)ds \\ &= E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s)ds. \end{aligned}$$

Definição 33. Um par $[u, v]$ satisfazendo

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u\nabla v)(s)ds, \quad (3.10)$$

$$v(t) = E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s)ds, \quad (3.11)$$

é chamado solução branda do Problema de valor inicial (1.1) em que a família $E_\alpha(\cdot)$, $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ são os operadores de Mittag-Leffler, definidas na seção (2.4) e que, pelo Teorema 4 obtemos

$$E_\alpha(t^\alpha \Delta) = \int_0^\infty M_\alpha(s)G(st^\alpha)ds, \quad (3.12)$$

$$E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)G(st^\alpha)ds, \quad (3.13)$$

$$E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma)) = \int_0^\infty M_\alpha(s)G_\gamma(st^\alpha)ds, \quad (3.14)$$

$$E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)G_\gamma(st^\alpha)ds, \quad (3.15)$$

em que $G(t)$ é o semigrupo do calor, $G_\gamma(t) = e^{-t\gamma}G(t)$ é o semigrupo do calor amortecido e M_α é a função de Mainardi.

3.4 ESTIMATIVAS ESTRUTURAIS PARA OS OPERADORES DE MITTAG-LEFLER

Lema 18. *Assuma que $N \geq 2$, $\frac{N}{2} < r < N < q < \infty$, $0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r}$, $0 \leq v_2 < 1 - \frac{N}{q}$, $v_2 \leq v_1$ e suponha que $u_0 \in B_r^{v_1} \cap B_q^{v_2}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$; então existem k_1 e k_2 positivos tais que*

$$\sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{B_r^{v_1}} \leq k_1 \|u_0\|_{B_r^{v_1}}, \quad (3.16)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}\left(2-\frac{N}{r}-v_1\right)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \leq k_1 \|u_0\|_{B_r^{v_1}}, \quad (3.17)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}\left(2-\frac{N}{q}-v_2\right)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \leq k_1 \|u_0\|_{B_q^{v_2}}, \quad (3.18)$$

$$\sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq k_2 \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (3.19)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0\|_{L^\infty} \leq k_2 \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \quad (3.20)$$

Desigualdade (3.16). Pela igualdade (3.12) e Proposição 8 item (i), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{B_r^{v_1}} &= \sup_{t>0} \left\| \int_0^\infty M_\alpha(s)G(st^\alpha)u_0 ds \right\|_{B_r^{v_1}} \\ &\leq \sup_{t>0} \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)u_0\|_{B_r^{v_1}} ds. \end{aligned}$$

Note que $B_r^{v_1} = \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1, v_1+\frac{N}{2}-2}$, por hipótese temos $-\frac{N}{r} < 0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r} \leq N(1 - \frac{1}{r})$, pois $N \geq 2$ implica em $1 < r < \infty$ e $1 < p, q \leq \infty$, pelo Lema 11 (fazendo $s = \sigma$), e

Proposição 8 item (ii), existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{2}-2}} ds &\leq C_1 \|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{2}-2}} \\ &= C_1 \|u_0\|_{B_r^{v_1}}. \end{aligned}$$

com isso demonstramos que a desigualdade (3.16) é verdadeira. $\square$

Desigualdade (3.17). Pela Observação 5 item (4), temos $\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,1}^{v_1,0} \hookrightarrow W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}$ e por (3.12) com a Proposição 8 item (i), temos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq C \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,1}^{v_1,0}} \\ &\leq C \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,1}^{v_1,0}} ds \end{aligned}$$

Note agora que por hipótese $v_1 + \frac{N}{r} - 2 < 0$, então, pelo lema 11

$$\begin{aligned} &C \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,1}^{v_1,0}} ds \\ &\leq C \int_0^\infty M_\alpha(s) C'(st^\alpha)^{\frac{1}{2}(v_1+\frac{N}{r}-2)} \|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{r}-2}} ds \\ &= \tilde{C} t^{\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r}-2)} \int_0^\infty s^{v_1+\frac{N}{r}-2} M_\alpha(s) ds \|u_0\|_{B_r^{v_1}}. \end{aligned}$$

Como $0 < \frac{N}{r} < 2$ temos $-2 < \frac{N}{r} - 2 < 0$ o que implica em $-1 < \frac{\frac{N}{r}-2}{2} \leq \frac{v_1+\frac{N}{r}-2}{2}$ então, pela Proposição 8 item (ii), tem-se

$$\begin{aligned} &\tilde{C} t^{\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r}-2)} \int_0^\infty s^{v_1+\frac{N}{r}-2} M_\alpha(s) ds \|u_0\|_{B_r^{v_1}} \\ &= \tilde{C} t^{\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r}-2)} \frac{\Gamma(\frac{v_1+\frac{N}{r}-2}{2} + 1)}{\Gamma(\alpha \frac{v_1+\frac{N}{r}-2}{2} + 1)} \|u_0\|_{B_r^{v_1}} \\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \hat{C} \|u_0\|_{B_r^{v_1}} \end{aligned}$$

Portanto temos a desigualdade desejada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} &\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \hat{C} \|u_0\|_{B_r^{v_1}} \\ &= \hat{C} \|u_0\|_{B_r^{v_1}} \end{aligned}$$

isso conclui a demonstração de (3.17). $\square$

Desigualdade (3.18). Pela Observação 5 item (4), temos $\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,1}^{v_2,0} \hookrightarrow W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}$ e por (3.12) com a Proposição 8 item (i), temos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} &\leq C \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,1}^{v_2,0}} \\ &\leq C \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,1}^{v_2,0}} ds \end{aligned}$$

Note agora que por hipótese $v_2 + \frac{N}{q} - 2 < 0$, então, pelo lema 11

$$\begin{aligned} &C \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,1}^{v_2,0}} ds \\ &\leq C \int_0^\infty M_\alpha(s) C'(st^\alpha)^{\frac{1}{2}(v_2 + \frac{N}{q} - 2)} \|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{v_2, v_2 + \frac{N}{q} - 2}} ds \\ &= \tilde{C} t^{\frac{\alpha}{2}(v_2 + \frac{N}{q} - 2)} \int_0^\infty s^{v_2 + \frac{N}{q} - 2} M_\alpha(s) ds \|u_0\|_{B_q^{v_2}}. \end{aligned}$$

Como $0 < \frac{N}{q} < 2$ temos $-2 < \frac{N}{q} - 2 < 0$ o que implica em $-1 < \frac{\frac{N}{q} - 2}{2} \leq \frac{v_2 + \frac{N}{q} - 2}{2}$ então, pela Proposição 8 item (ii), tem-se

$$\begin{aligned} &\tilde{C} t^{\frac{\alpha}{2}(v_2 + \frac{N}{q} - 2)} \int_0^\infty s^{v_2 + \frac{N}{q} - 2} M_\alpha(s) ds \|u_0\|_{B_q^{v_2}} \\ &= \tilde{C} t^{\frac{\alpha}{2}(v_2 + \frac{N}{q} - 2)} \frac{\Gamma(\frac{v_2 + \frac{N}{q} - 2}{2} + 1)}{\Gamma(\alpha \frac{v_2 + \frac{N}{q} - 2}{2} + 1)} \|u_0\|_{B_q^{v_2}} \\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \hat{C} \|u_0\|_{B_q^{v_2}} \end{aligned}$$

Portanto temos a desigualdade desejada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} &\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\ &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} t^{-\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \hat{C} \|u_0\|_{B_q^{v_2}} \\ &= \hat{C} \|u_0\|_{B_q^{v_2}} \end{aligned}$$

isso conclui a demonstração de (3.18). $\square$

Desigualdade (3.19). Usando o Lema 2 equação (2.11) e Proposição 8 item (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) e^{-st^\alpha \gamma} \|G(st^\alpha)v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \\ &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) e^{-st^\alpha \gamma} k_2 \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \\ &\leq k_2 \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \int_0^\infty M_\alpha(s) ds \\ &= k_2 \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Portanto segue de (3.21) que

$$\sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq k_2 \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}.$$

$\square$

Desigualdade (3.20). Usando o Lema 2 equação (2.12) e Proposição 8 item (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma)v_0)\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)e^{-st^\alpha\gamma}\|\nabla G(st^\alpha)v_0\|_{L^\infty}ds \\
&\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)C(st^\alpha)^{-\frac{1}{2}}\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}ds \\
&\leq t^{-\frac{\alpha}{2}}\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}C\int_0^\infty M_\alpha(s)s^{-\frac{1}{2}}ds \\
&\leq t^{-\frac{\alpha}{2}}k_2\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Multiplicando (3.22) por $t^{\frac{\alpha}{2}}$ e calculando o sup temos a desigualdade desejada

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}t^{\frac{1}{2}}\|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma)v_0)\|_{L^\infty} &\leq \sup_{t>0}t^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{\alpha}{2}}k_2\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\
&= k_2\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}
\end{aligned}$$

□

Isto completa a demonstração do Lema 18.

Lema 19. *Assuma que $N \geq 2$, $\frac{N}{2} < r < N < q < \infty$, $0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r}$, $0 \leq v_2 < 1 - \frac{N}{q}$, $v_2 \leq v_1$. Temos as seguintes desigualdades:*

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0} \rightarrow \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{r}}} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r})} \tag{3.23}$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\Delta)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1} \rightarrow W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}v_1} \tag{3.24}$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_1+\frac{N}{r})} \rightarrow L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_1+\frac{N}{r})} \tag{3.25}$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_2+\frac{N}{q})} \rightarrow L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_2+\frac{N}{q})} \tag{3.26}$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\Delta)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0} \rightarrow B_r^{v_1}} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})} \tag{3.27}$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\Delta)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1} \rightarrow W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.28}$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\Delta)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2} \rightarrow W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.29}$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\Delta)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1} \rightarrow W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})} \tag{3.30}$$

Desigualdade 3.23. Note que, usando a equação (3.15), o Lema (11) e a Proposição 8 temos

$$\begin{aligned}
\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{r}}} &= \left\| \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) G_\gamma(st^\alpha) f ds \right\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{r}}} \\
&\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha\gamma} \|G(st^\alpha)f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+\frac{N}{r}}} ds \\
&\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha\gamma} C(st^\alpha)^{-\frac{1}{2}(v_1+\frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}} ds \\
&\leq \int_0^\infty s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha\gamma} s^{-\frac{1}{2}(v_1+\frac{N}{r})} ds \alpha C t^{-\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}(v_1 + \frac{N}{r} - 2)} M_\alpha(s) ds \alpha C t^{-\frac{\alpha}{2}(v_1 + \frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}} \\
&\leq \alpha C \frac{\Gamma(2 - \frac{\alpha}{2}(v_1 + \frac{N}{r}))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(2 - v_1 - \frac{N}{r}))} t^{-\frac{\alpha}{2}(v_1 + \frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}} \\
&\leq \bar{C} t^{-\frac{\alpha}{2}(v_1 + \frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}}.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração de (3.23). $\square$

Desigualdade (3.24). Note que (3.24) segue de (2.14) e da Proposição (8) itens (i) e (ii), pois

$$\begin{aligned}
\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} ds \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}v_1} \int_0^\infty s M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}v_1} ds \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\leq \hat{C} t^{-\frac{\alpha}{2}v_1} \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração de (3.24). $\square$

Desigualdade (3.25). Usando o Lema 3 de e o Lema 6, temos

$$\|\nabla G(t) f\|_{L^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\theta}}, \theta > 0. \quad (3.31)$$

Fazendo $\theta = v_1 + N/r$ em (3.31), temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha \gamma} \|\nabla G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(3 - v_1 - \frac{N}{r}))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - v_1 - \frac{N}{r}))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_1 + \frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_1 + N/r)}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Desigualdade (3.26). Fazendo $\theta = v_2 + N/q$ em (3.31), temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha \gamma} \|\nabla G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(3 - v_2 - \frac{N}{q}))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - v_2 - \frac{N}{q}))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_2 + \frac{N}{q})} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_2 + N/q)}}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração de (3.26). $\square$

Para provar (3.27) usamos (9) e o Lema 7 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{B_r^{v_1}} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) \nabla \cdot f\|_{B_r^{v_1}} ds \\
&\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) C (st^\alpha)^{\frac{1}{2}(1-v_1 - \frac{N}{r})} \|\nabla \cdot f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,-1}} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{C} t^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})} \int_0^\infty M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}(3-v_1-\frac{N}{r})} ds \|\nabla \cdot f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,-1}} \\
&= \hat{C} t^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}(3-v_1-\frac{N}{r}))}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2}(3-v_1-\frac{N}{r}))} \|\nabla \cdot f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,-1}} \\
&\leq C t^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}}.
\end{aligned}$$

Desigualdade (3.28). De (2.15) temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha) f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \tilde{C}(st^\alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds.
\end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 8 itens (i) e (ii) obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq \hat{C} t^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2}} M_\alpha(s) ds \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração de (3.28) □

Desigualdade (3.29). A demonstração de (3.29) é análoga a demonstração de (3.28). □

Desigualdade (3.30). Lembrando que $v_2 \leq v_1$ inferimos que (2.17) limita superiormente (3.30), ou seja

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha) f\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
&\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha) f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\leq \int_0^\infty \alpha s \tilde{C}(st^\alpha)^{-\frac{1}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})} M_\alpha(s) \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\leq C t^{-\frac{1}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})} \|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}
\end{aligned}$$

□

Isto completa a demonstração do Lema (19).

4 BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL EM ESPAÇOS DE BESOV-HERZ

4.1 SOLUÇÃO GLOBAL DO MODELO DE KELLER-SEGEL

Usaremos a seguinte notação para os operadores bilinear e linear que aparecem em (3.10)-(3.11):

$$\mathcal{B}(u, v)(t) = - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s) ds, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{T}(u)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha (\Delta - \gamma)) u(s) ds. \quad (4.2)$$

Portanto temos as igualdades

$$\begin{aligned} u(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s) ds \\ &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 + \mathcal{B}(u, v)(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma)) v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha (\Delta - \gamma)) u(s) ds \\ &= E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma)) v_0 + \mathcal{T}(u)(t). \end{aligned}$$

4.2 ESTIMATIVAS PARA O MAPA BILINEAR $\mathcal{B}$

Lema 20. *Suponha que $N \geq 2$, $\frac{N}{2} < r < N < q < \infty$, $0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r}$, $0 \leq v_2 < 1 - \frac{N}{q}$, $v_2 \leq v_1$. Seja $[u, v]$ em $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, então existe $K_{\mathcal{B}} > 0$ tal que as estimativas a seguir são satisfeitas:*

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_2\right)} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{W\dot{K}_{r, \infty}^{v_2}} &\leq K_{\mathcal{B}} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r, \infty}^{v_1}} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_2\right)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q, \infty}^{v_2}} \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right)} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{W\dot{K}_{r, \infty}^{v_1}} &\leq K_{\mathcal{B}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r, \infty}^{v_1}} \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{B_r^{v_1}} &\leq K_{\mathcal{B}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r, \infty}^{v_1}} \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Demonstração (4.3). Iremos fazer a demonstração de (4.3) em duas etapas.

1º Etapa. Usando (3.30) e a observação 2.13 obtemos a seguinte sequência de inequações

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
& \leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\
& \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\
& \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

em (4.6), utilizamos a seguinte igualdade que recorrentemente utilizaremos ao longo do texto;

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v) + \frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v) &= -\frac{3\alpha}{2} + \frac{N\alpha}{2r} + \frac{\alpha v}{2} + \alpha - \frac{N\alpha}{2r} - \frac{\alpha v}{2} \\
&= -\frac{3\alpha}{2} + \alpha \\
&= \frac{-3\alpha + 2\alpha}{2} \\
&= -\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

2º Etapa. Usando (3.29) e a observação 2.13 temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{q}-v_2)} ds \\
& \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{q}-v_2)} ds \\
& \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

De (4.6) e (4.8), garantimos (4.3). $\square$

Demonstração (4.4). Note que

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s) ds \right\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds, \text{ (Usando (2.13))} \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} B(1 - \frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1), \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

que garante (4.4). $\square$

Demonstração (4.5). Usando (3.27), (5), (2.13) e sabendo que $\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - v_1 - \frac{N}{r}) > 0$ e $\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1) < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(x, y)(t)\|_{B_r^{v_1}} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha+\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1,0}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha+\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha+\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha+\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&= C B(1 - \frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1), \alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - v_1 - \frac{N}{r})) \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Concluimos com isso a prova do Lema 20. $\square$

4.3 ESTIMATIVAS PARA O MAPA LINEAR τ

Lema 21. *Suponha que $N \geq 2$, $\frac{N}{2} < r < N < q < \infty$, $0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r}$, $0 \leq v_2 < 1 - \frac{N}{q}$, $v_2 \leq v_1$. Seja u em $\mathcal{X}_1$, então existe $K_\tau > 0$ tal que as seguintes estimativas são*

satisfeitas:

$$\sup_{t>0} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq K_\tau \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{T}(u)(t)\|_{L^\infty} &\leq K_\tau \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + \right. \\ &\quad \left. \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Demonstração (4.9). Usando (3.23) e as inclusões contínuas $\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+N/r} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, $W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1} \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}$ segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)ds \right\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,v_1+N/r}} ds \\ &\leq C \int_0^\infty (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(v_1+N/r)} \|u(s)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r}-1)} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r}-1)} s^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(v_1+\frac{N}{r}-1)} s^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\leq CB(1 - \frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1), \alpha - \frac{\alpha}{2}(v_1 + \frac{N}{r})) \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \end{aligned}$$

□

Demonstração (4.10). A demonstração de (4.10) será feita em duas etapas:

1º Etapa. Utilizando (3.25) e a inclusão contínua $W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_1+N/r)}$ inferimos que

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1+\frac{N}{r})-1} \|u(s)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_1+\frac{N}{r})}} ds \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1+\frac{N}{r})-1} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1+\frac{N}{r})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} ds \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{WK_{r,\infty}^{v_1}}. \quad (4.12)$$

2º Etapa. Usando (3.26) e a inclusão contínua $W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{(v_2+N/q)}$ podemos verificar que

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ & \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_2+\frac{N}{q})-1} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\ & \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_2+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} ds \\ & \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\ & \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_2-\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} ds \\ & \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\ & \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Com as estimativas (4.11) e (4.13), temos (4.10). Assim, o Lema 21 está demonstrado. $\square$

Lema 22. *Assuma que $\alpha \in (0,1)$, $N \geq 2$, $\frac{N}{2} < r < N < q < \infty$, $0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r}$, $0 \leq v_2 < 1 - \frac{N}{q}$, $v_2 \leq v_1$ e suponha que $u_0 \in B_r^{v_1} \cap B_q^{v_2}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ e seja $[u,v]$ em $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Temos $\mathcal{B}(u,v)(t)$ converge para 0 na topologia fraca-* de $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-2}$ quando $t \rightarrow 0^+$*

Demonstração. Pelo Lema 5 tem-se que $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-2}$ é o espaço dual do espaço $\dot{B}_{1,1}^2$. Seja ϕ em $\dot{B}_{1,1}^2$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Podemos escolher $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi - \tilde{\phi}\|_{\dot{B}_{1,1}^2} < \epsilon$. Então por um lado temos

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{B}(u,v)(t), \phi - \tilde{\phi} \rangle| & \leq \|\mathcal{B}(u,v)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-2}} \|\phi - \tilde{\phi}\|_{\dot{B}_{1,1}^2} \\ & \leq C \|\mathcal{B}(u,v)(t)\|_{B_r^{v_1}} \|\phi - \tilde{\phi}\|_{\dot{B}_{1,1}^2} \\ & \leq CK_B \epsilon. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por outro lado, utilizando (3.24) e (2.13) temos,

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{B}(u,v)(t), \tilde{\phi} \rangle| & \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |\langle E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s), \nabla \tilde{\phi} \rangle| ds \\ & \leq \|\nabla \tilde{\phi}\|_{\dot{B}_{1,1}^{\frac{N}{r}}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{\frac{N}{q}}} ds \\ & \leq C_{\tilde{\phi}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} ds \\ & \leq C_{\tilde{\phi}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}v_1-1} \|u(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ & \leq C_{\tilde{\phi}} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}v_1-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} ds \right) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\tilde{\phi}} \left(\int_0^1 (t - t\hat{s})^{\alpha - \frac{\alpha}{2}v_1 - 1} (t\hat{s})^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} t d\hat{s} \right) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2} \\
&\leq C_{\tilde{\phi}} \left(\int_0^1 (1 - \hat{s})^{\alpha - \frac{\alpha}{2}v_1 - 1} \hat{s}^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} d\hat{s} \right) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2} t^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{r} - 1)} \\
&\leq C_{\tilde{\phi}} B \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(3 - \frac{N}{r} - v_1 \right), \alpha - \frac{\alpha}{2}v_1 \right) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2} t^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{r} - 1)}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Além disso temos

$$|\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \phi \rangle| - |\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \tilde{\phi} \rangle| \leq |\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \phi - \tilde{\phi} \rangle|$$

De (4.14) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}
0 \leq |\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \phi \rangle| &\leq |\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \phi - \tilde{\phi} \rangle| + |\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \tilde{\phi} \rangle| \\
&\leq CK_{\mathcal{B}}\epsilon + C_{\tilde{\phi}} B \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(3 - \frac{N}{r} - v_1 \right), \alpha - \frac{\alpha}{2}v_1 \right) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2} t^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{r} - 1)}.
\end{aligned}$$

Note que por hipótese $\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{r} - 1) > 0$, portanto

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} |\langle \mathcal{B}(u, v)(t), \phi \rangle| \leq C\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ e $\phi \in \dot{B}_{1,1}^2$ são arbitrários, temos a convergência desejada. $\square$

Lema 23. *Seja u_0 em $B_r^{v_1}$; temos $E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 \xrightarrow{*} \text{em } \dot{B}_{\infty,\infty}^{-2}$ quando $t \rightarrow 0^+$*

Demonstração. Seja $\phi \in \dot{B}_{1,1}^2$. Pelo Lema 4 temos $\|G(t)\phi - \phi\|_{\dot{B}_{1,1}^2} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Portanto, nossa convergência desejada decorre do teorema da Convergência Dominada e da estimativa

$$|\langle E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 - u_0, \phi \rangle| \leq C \|u_0\|_{B_r^{v_1}} \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st)\phi - \phi\|_{\dot{B}_{1,1}^2} ds.$$

A prova do Lema 23 está completa. $\square$

4.4 BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL FRACIONÁRIO

Teorema 8. *Assuma que $N \geq 2$, $\frac{N}{2} < r < N < q < \infty$, $0 \leq v_1 < 2 - \frac{N}{r}$, $0 \leq v_2 < 1 - \frac{N}{q}$, $v_2 \leq v_1$ e suponha que $u_0 \in B_r^{v_1} \cap B_q^{v_2}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ tais que o problema 1.1 tem uma solução global branda $[u, v]$ pertencente a classe de Fujita-Kato $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, desde que $\|u_0\|_{B_r^{v_1} \cap B_q^{v_2}} \leq \delta_1$ e $\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq \delta_2$. A solução é única satisfazendo $\|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq \rho_1$ e $\|v\|_{\mathcal{X}_2} \leq \rho_2$, em que $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon)$ e $\rho_2 = \rho_2(\varepsilon)$ são constantes adequadas. Além disso, a solução depende continuamente das condições iniciais e também obtemos a continuidade fraca em $t = 0$: $u(t) \xrightarrow{*} u_0$ em $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-2}$ quando $t \rightarrow 0^+$, $v(t) \xrightarrow{*} v_0$ em $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ quando $t \rightarrow 0^+$.*

Demonstração. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \epsilon < (6K_B\sigma_1)^{-1}$, em que $\sigma_1 = 1 + 4k_\tau$. Definimos a função $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ por

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 \\ \tilde{v} &= E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} &= \sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{B_r^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\quad + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}}.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} &\leq K_1\|u_0\|_{B_r^{v_1}} + K_1\|u_0\|_{B_r^{v_1}} + K_1\|u_0\|_{B_q^{v_2}} \\ &= K_1(2\|u_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0\|_{B_q^{v_2}}) \\ &\leq 3K_1(\|u_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0\|_{B_q^{v_2}})\end{aligned}$$

De forma análoga temos

$$\|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq 2k_2\|v_0\|_{\dot{B}_\infty^0}$$

escolhendo $[u_0, v_0]$ tal que

$$\|u_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0\|_{B_q^{v_2}} \leq \delta_1 = \frac{\epsilon}{3K_1} \text{ e } \|v_0\|_{\dot{B}_\infty^0} \leq \delta_2 = \frac{\epsilon}{2k_2}$$

temos

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} &\leq \epsilon \\ \|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} &\leq \epsilon\end{aligned}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}(u, v)\|_{\mathcal{X}_1} &= \sup_{t>0} \|\mathcal{B}(u, v)\|_{B_r^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\mathcal{B}(u, v)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\quad + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|\mathcal{B}(u, v)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\ &\leq K_B \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + K_B \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + K_B \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& = K_{\mathcal{B}} \left(3 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \right) \\
& \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& K_{\mathcal{B}} \left(3 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \right) \\
& \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \leq K_{\mathcal{B}} \left(3 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{B_r^{v_1}} + 3 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \right. \\
& \quad \left. + 3 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \right) \\
& \quad \times \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} \|v(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \right) \\
& = 3K_{\mathcal{B}} \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2}
\end{aligned}$$

ou seja

$$\|\mathcal{B}(u, v)\|_{\mathcal{X}_1} \leq 3K_{\mathcal{B}} \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2}$$

De forma similar temos

$$\|\mathcal{T}(u)\|_{\mathcal{X}_2} \leq 2K_{\tau} \|u\|_{\mathcal{X}_1}$$

portanto pelo lema do ponto fixo, existe uma única solução $u \in \mathcal{X}_1$ com $\|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$ para a equação

$$u(t) = \tilde{u} + \mathcal{B}(u, v)(t)$$

com

$$v = \tilde{v} + \mathcal{T}(u) \in \mathcal{X}_2$$

Além disso temos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\mathcal{X}_2} &= \|\tilde{v} + \mathcal{T}(u)(t)\|_{\mathcal{X}_2} \\
&\leq \epsilon + 2K_{\tau} \|u\|_{\mathcal{X}_1} \\
&\leq (1 + 4K_{\tau})\epsilon \\
&= \sigma\epsilon.
\end{aligned}$$

Iremos provar agora a dependência contínua.

Sejam $[u, v]$ e $[\bar{u}, \bar{v}]$ duas soluções correspondentes aos valores iniciais $[u_0, v_0]$ e $[\bar{u}_0, \bar{v}_0]$ respectivamente.

Pela forma da solução temos

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} &= \|E_\alpha(\cdot)u_0 - \mathcal{B}(u, v) - E_\alpha(\cdot)\bar{u}_0 + B(\bar{u}, \bar{v})\|_{\mathcal{X}_1} \\
&= \|E_\alpha(\cdot)(u_0 - \bar{u}_0) - \mathcal{B}(u, v) + B(\bar{u}, v) - B(\bar{u}, \bar{v}) \\
&\quad + B(\bar{u}, \bar{v})\|_{\mathcal{X}_1} \\
&= \|E_\alpha(\cdot)(u_0 - \bar{u}_0) - B(u - \bar{u}, v) - B(\bar{u}, v - \bar{v})\|_{\mathcal{X}_1} \\
&\leq \|E_\alpha(\cdot)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{\mathcal{X}_1} + \|B(u - \bar{u}, v)\|_{\mathcal{X}_1} \\
&\quad + \|B(\bar{u}, v - \bar{v})\|_{\mathcal{X}_1} \\
&\leq 3k_1(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}}) + 3K_{\mathcal{B}}\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1}\epsilon\sigma_1 \\
&\quad + 3K_{\mathcal{B}}2\epsilon\|v - \bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} \\
&= 3k_1(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}}) \\
&\quad + 3\epsilon K_{\mathcal{B}}(\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1}\sigma_1 + 2\|v - \bar{v}\|_{\mathcal{X}_2})
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|v - \bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} &= \|E_\alpha((\cdot)^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \mathcal{T}(u) \\
&\quad - E_\alpha((\cdot)^\alpha(\Delta - \gamma))\bar{v}_0 - \mathcal{T}(\bar{u})\|_{\mathcal{X}_2} \\
&\leq \|E_\alpha((\cdot)^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{\mathcal{X}_2} + \|\mathcal{T}(u - \bar{u})\|_{\mathcal{X}_2} \\
&\leq 2k_2\|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} + 2K_\tau\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} &\leq 3k_1(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}}) \\
&\quad + 12\epsilon K_{\mathcal{B}}k_2\|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} + 3\epsilon K_{\mathcal{B}}\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1}(\sigma_1 + 4k_\tau) \\
&\leq 3k_1(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}}) \\
&\quad + 12\epsilon K_{\mathcal{B}}k_2\|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} + 6K_{\mathcal{B}}\sigma_1\epsilon\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1}(1 - 6K_{\mathcal{B}}\sigma_1\epsilon) &\leq C(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}} \\
&\quad + \|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0})
\end{aligned}$$

Como

$$0 < \epsilon < \frac{1}{6K_{\mathcal{B}}\sigma_1} \Leftrightarrow 0 < 6K_{\mathcal{B}}\sigma_1\epsilon < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - 6K_{\mathcal{B}}\sigma_1\epsilon$$

Então

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} &\leq \frac{1}{(1 - 6K_B\sigma_1\epsilon)} C(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}} \\ &\quad + \|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}) \end{aligned}$$

Ainda mais,

$$\begin{aligned} \|v - \bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} &\leq 2k_2\|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + 2K_\tau\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} \\ &\leq 2k_2\|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + 2K_\tau \frac{1}{(1 - 6K_B\sigma_1\epsilon)} C(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} \\ &\quad + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}} + \|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}) \\ &\leq C_2(\|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_r^{v_1}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_{B_q^{v_2}} + \|v_0 - \bar{v}_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}) \end{aligned}$$

O que garante a dependência contínua.

Continuidade fraca no tempo em $t = 0$. A prova da convergência fraca-* de $u(t)$ segue dos lemas (22) e (23). Iremos provar a convergência fraca-* de $v(t)$. Pelo Lema 4 temos $G_\gamma(t)v_0 \xrightarrow{*} v_0$ em $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Com isso, inferimos que $E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 \xrightarrow{*} v_0$ em $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Usando um argumento similar da prova do Lema 22, garantimos que $\mathcal{T}(u)(t) \xrightarrow{*} 0$ em $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Portanto, $v(t) \xrightarrow{*} v_0$ em $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ quando $t \rightarrow 0^+$. $\square$

Com isso concluímos a prova do Teorema (8). $\square$

4.5 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Teorema 9. *Sob as hipóteses do Teorema anterior. Assuma que $[u, v]$ e $[\bar{u}, \bar{v}]$ são duas soluções dadas pelo teorema anterior correspondentes aos dados iniciais $[u_0, v_0]$ e $[\bar{u}_0, \bar{v}_0]$ respectivamente. Temos*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{t,\infty}^{v_1}} = o\left(t^{-\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)}\right) & \text{quando } t \rightarrow \infty, \\ \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} = o\left(t^{-\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)}\right), & \text{quando } t \rightarrow \infty, \\ \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} = o(t^{-\frac{\alpha}{2}}), & \text{quando } t \rightarrow \infty, \\ \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} = o(1), & \text{quando } t \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (4.16)$$

se e somente se

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} = o\left(t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)}\right) & \text{quando } t \rightarrow \infty, \\ \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} = o\left(t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)}\right) & \text{quando } t \rightarrow \infty, \\ \|\nabla v(t) - \nabla \bar{v}(t)\|_{L^\infty} = o(t^{-\frac{\alpha}{2}}) & \text{quando } t \rightarrow \infty, \\ \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{B_r^{v_1}} = o(1) & \text{quando } t \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Demonstração. Obteremos (4.17) de (4.16). Sejam $[u, v]$ e $[\bar{u}, \bar{v}]$ duas soluções suaves dadas pelo teorema (8) com dados iniciais $[u_0, v_0]$ e $[\bar{u}_0, \bar{v}_0]$ respectivamente. Lembrando que $\|u\|_{\mathcal{X}_1}, \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$ e $\|v\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq \sigma_1\epsilon$, em que $\sigma_1 = 1 + 4K_\tau$, e $\mathcal{T}(u)(t) \leq K_\tau\|u\|_{\mathcal{X}_1}$. Introduzimos a notação

$$\begin{aligned} A_1 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u - \bar{u})(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ A_2 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{L^\infty} \\ A_3 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|(u - \bar{u})(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\ A_4 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{B_r^{v_1}} \end{aligned}$$

Note que $A_i < \infty$, $i = 1, 2, 3, 4$. pois $A_1 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|(u - \bar{u})(t)\|_{\mathcal{X}_1} \leq 4\epsilon$, de forma análoga verifica-se para $i = 2, 3, 4$. Estimaremos então $W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}$ -norma da diferença $t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)}(u - \bar{u})$. Note inicialmente que;

$$\begin{aligned} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &= \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0) - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s) ds \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(\bar{u} \nabla \bar{v})(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(\bar{u} \nabla v)(s) ds \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(\bar{u} \nabla v)(s) ds\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &= \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u - \bar{u}) \nabla v(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(\bar{u} \nabla(v - \bar{v}))(s) ds)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\quad + C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|(u - \bar{u}) \nabla v(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ &\quad + C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|(\bar{u} \nabla(v - \bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ &= \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + C \int_0^t t(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \\ &\quad \times \|(u - \bar{u}) \nabla v(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|\bar{u} \nabla(v - \bar{v})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u - \bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad \times s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad \times s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u - \bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}
\end{aligned}$$

Fazendo $s' = \frac{s}{t}$ em ambas integrais temos, $s = ts'$ então $tds = ds'$, quanto aos limites de integração $s = 0$ temos $s' = 0$, e $s = t$ temos $s' = 1$ daí,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad + C \int_0^1 (t-ts')^{\frac{\alpha}{2}-1} (ts')^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\
&\quad \times \|(u - \bar{u})(ts')\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} tds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_0^1 (t-ts')^{\frac{\alpha}{2}-1} (ts')^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(ts')\|_{L^\infty} tds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&= \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad + C \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} t^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s'^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\
&\quad \|(u - \bar{u})(ts')\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} tds \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} t^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} t^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times s'^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(ts')\|_{L^\infty} tds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&= \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s'^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u - \bar{u})(ts')\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} t^{-\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r}-v_1)} s'^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(ts')\|_{L^\infty} ds
\end{aligned}$$

$$\times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}$$

Multiplicando por $t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)}$ temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\ &\quad \times \|(u - \bar{u})(ts')\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad \times \|\nabla(v - \bar{v})(ts')\|_{L^\infty} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\ &\quad \times \|(u - \bar{u})(ts')\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \|v\|_{\mathcal{X}_2} \\ &\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad \times \|\nabla(v - \bar{v})(ts')\|_{L^\infty} ds \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ &\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\ &\quad \times \|(u - \bar{u})(ts')\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \sigma_1 \epsilon \\ &\quad + C \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (ts')^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad \times \|\nabla(v - \bar{v})(ts')\|_{L^\infty} ds \cdot 2\epsilon \end{aligned}$$

portanto, aplicando o limite superior, temos;

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \epsilon(\sigma_1 A_1 + 2A_2)CB \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(3 - \frac{N}{r} - v_1\right), \frac{\alpha}{2}\right) \\ &\leq \epsilon(\sigma_1 A_1 + 2A_2)K_{\mathcal{B}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Note agora que;

$$\begin{aligned} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{B_r^{v_1}} &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)[((u - \bar{u})\nabla v)(s) \\ &\quad + (\bar{u}\nabla(v - \bar{v}))(s)]\|_{B_r^{v_1}} ds \\ &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} + C \int_0^t (t-s)^{\alpha+\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r}-v_1)-1} \\ &\quad \times \left(\|((u - \bar{u})\nabla v)(s)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}} + \|(\bar{u}\nabla(v - \bar{v}))(s)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{v_1,0}}\right) ds \\ &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} + C \int_0^t (t-s)^{\alpha+\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r}-v_1)-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{times} \left(\|((u - \bar{u})\nabla v)(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + \|(\bar{u}\nabla(v - \bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \right) ds \\
\leq & \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} + C \int_0^t (t-s)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{r} - v_1) - 1} \\
& \times \left(\|(u - \bar{u})\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla v(s)\| + \|\bar{u}\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} \right) ds \\
\leq & \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} \\
& + C\sigma_1 \epsilon \int_0^t (t-s)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{r} - v_1) - 1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} \\
& \times \|(u - \bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
& + 2C\epsilon \int_0^t (t-s)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{r} - v_1) - 1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\
= & \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} \\
& + C\sigma_1 \epsilon \int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} (1-s)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{r} - v_1) - 1} (st)^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} \\
& \times \|(u - \bar{u})(st)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
& + 2C\epsilon \int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} (1-s)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{r} - v_1) - 1} (st)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(st)\|_{L^\infty} ds
\end{aligned}$$

portanto, calculando o limite superior temos;

$$\begin{aligned}
A_4 & \leq \epsilon(\sigma_1 A_1 + 2A_2)CB \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(3 - \frac{N}{r} - v_1 \right), \alpha + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{N}{r} - v_1 \right) \right) \\
& \leq \epsilon(\sigma_1 A_1 + 2A_2)K_{\mathcal{B}}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Precisamos estimar agora o termo $t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})\|_{L^\infty}$. Note que:

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})\|_{L^\infty} &= t^{\frac{\alpha}{2}} \left[\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0) \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s)) ds \|_{L^\infty} \right] \\
&\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \left[\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \right] \\
&= t^{\frac{\alpha}{2}} \left[\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right. \\
& \quad + \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \\
& \quad \left. + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \right] \\
&\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \left[\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right. \\
& \quad + \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} C(t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_1+\frac{N}{r})} \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_1+\frac{N}{r})}} ds \\
& \quad \left. + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} C t^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_2+\frac{N}{q})} \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(v_2+\frac{N}{q})}} ds \right] \\
&\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \left[\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} C(t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_1+\frac{N}{r})} \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} C(t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_2+\frac{N}{q})} \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \Big] \\
& \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \left[\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right. \\
& \quad + \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} C \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
& \quad + \left. \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_2-\frac{N}{q})-1} C \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \right] \\
& = t^{\frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \\
& \quad + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1-\frac{N}{r})-1} C s^{-\frac{\alpha}{2}(2-v_1-\frac{N}{r})} (st)^{\frac{\alpha}{2}(2-v_1-\frac{N}{r})} \\
& \quad \times \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
& \quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_2-\frac{N}{q})-1} C s^{-\frac{\alpha}{2}(2-v_2-\frac{N}{q})} (st)^{\frac{\alpha}{2}(2-v_2-\frac{N}{q})} \\
& \quad \times \|(u(s) - \bar{u}(s))\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds
\end{aligned}$$

calculando o limite superior temos;

$$\begin{aligned}
A_2 & \leq CA_1 B \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{r} - v_1\right), \frac{\alpha}{2}\right) + CA_3 B \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{N}{q} - v_2\right), \frac{\alpha}{2} \left(1 - v_2 - \frac{N}{q}\right)\right) \\
& \leq (A_1 + A_3) K_\tau
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Agora precisamos limitar o termo $t^{(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}}$. Sabendo que,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} & \leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
& \quad + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) ((u - \bar{u}) \nabla v)(s) ds \right. \\
& \quad + \left. \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) (\bar{u} \nabla (v - \bar{v}))(s) ds \right\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
& = \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
& \quad + \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) \right. \\
& \quad \times \left(((u - \bar{u}) \nabla v)(s) + (\bar{u} \nabla (v - \bar{v}))(s) \right) ds \Big\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
& \quad + \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) \right. \\
& \quad \times \left(((u - \bar{u}) \nabla v)(s) + (\bar{u} \nabla (v - \bar{v}))(s) \right) ds \Big\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
& \leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
& \quad + \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) \\
& \quad \times \left(((u - \bar{u}) \nabla v)(s) + (\bar{u} \nabla (v - \bar{v}))(s) \right)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
& \quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) \\
& \quad \times \left(((u - \bar{u}) \nabla v)(s) + (\bar{u} \nabla (v - \bar{v}))(s) \right)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds
\end{aligned}$$

Usando (3.30) e (3.29) temos

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} &\leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
&\quad + \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} C(t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})} \\
&\quad \times \|((u-\bar{u})\nabla v)(s) + (\bar{u}\nabla(v-\bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} C(t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|((u-\bar{u})\nabla v)(s) + (\bar{u}\nabla(v-\bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
&= \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})-1} \|((u-\bar{u})\nabla v)(s) \\
&\quad + (\bar{u}\nabla(v-\bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|((u-\bar{u})\nabla v)(s) + (\bar{u}\nabla(v-\bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \quad (4.21)
\end{aligned}$$

sejam

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t) &= C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(1+v_1-v_2+\frac{N}{r}-\frac{N}{q})-1} \|((u-\bar{u})\nabla v)(s) + (\bar{u}\nabla(v-\bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
\mathcal{G}_2(t) &= C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|((u-\bar{u})\nabla v)(s) + (\bar{u}\nabla(v-\bar{v}))(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds
\end{aligned}$$

Iremos estimar o termo $\mathcal{G}_1(t)$. Usando (2.13) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t) &\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} (\|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} \\
&\quad + \|\bar{u}(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty}) ds \\
&= C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad \times \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\bar{u}(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad \times \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\
&\quad \times \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}}
\end{aligned}$$

Usando o fato de $\|u\|_{\mathcal{X}_1}, \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$ e $\|v\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq \sigma_1\epsilon$ temos;

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t) &\leq \sigma_1\epsilon C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\
&\quad + 2\epsilon C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{s}{t}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t) &\leq \sigma_1 \epsilon C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\
&\quad \times \|(u-\bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} dz + 2\epsilon C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} \\
&\quad \times z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(zt)\|_{L^\infty} dz
\end{aligned} \tag{4.23}$$

iremos estimar agora o termo $\mathcal{G}_2(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2(t) &\leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|\bar{u}(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\
&= C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
&\leq \sigma_1 \epsilon C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u-\bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} ds \\
&\quad + 2\epsilon C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds
\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $z = st$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2(t) &\leq \sigma_1 \epsilon C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u-\bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} dz \\
&\quad + 2\epsilon C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(zt)\|_{L^\infty} dz
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Portanto juntando (4.21), (4.23) e (4.24), obtemos;

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{q}-v_2)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
&\quad + \sigma_1 \epsilon C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} \\
&\quad \times (zt)^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u-\bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} dz \\
&\quad + 2\epsilon C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \|\nabla(v-\bar{v})(zt)\|_{L^\infty} dz \\
&\quad + \sigma_1 \epsilon C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\
&\quad \times \|(u-\bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} dz \\
&\quad + 2\epsilon C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(zt)\|_{L^\infty} dz
\end{aligned}$$

Calculando o limite superior temos

$$A_3 \leq \epsilon (A_1 \sigma_1 + 2A_2) C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1-v_1+v_2-\frac{N}{r}+\frac{N}{q})-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} dz$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon(A_3\sigma_1 + 2A_2)C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} dz \\
& \leq \epsilon(\sigma_1(A_1 + A_3) + 4A_2)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

somando (4.18) e (4.25), e usando (4.20) temos

$$\begin{aligned}
A_1 + A_3 & \leq \epsilon K_{\mathcal{B}}(\sigma_1 A_1 + 2A_2 + \sigma_1(A_1 + A_3) + 4A_2) \\
& \leq \epsilon K_{\mathcal{B}}(\sigma_1(2A_1 + A_3) + 6A_2) \\
& \leq \epsilon K_{\mathcal{B}}(\sigma_1 2(A_1 + A_3) + 6(A_1 + A_3)k_{\tau}) \\
& \leq \epsilon K_{\mathcal{B}}(\sigma_1 2(A_1 + A_3) + 4(A_1 + A_3)(1 + 4k_{\tau})) \\
& \leq \epsilon K_{\mathcal{B}}\sigma_1 6(A_1 + A_3)
\end{aligned}$$

como o ϵ escolhido foi tal que $\epsilon K_{\mathcal{B}}\sigma_1 6 < 1$ obtemos que $A_1 = A_3 = 0$ e consequentemente pelas estimativas do A_2 e A_4 temos $A_2 = A_4 = 0$, concluindo assim a primeira parte da demonstração do teorema. Para provar a recíproca usaremos como hipótese que $A_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Lembre-se que

$$u(t) = E_{\alpha}(t^{\alpha}\Delta)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(u\nabla v)(s)ds$$

então temos a seguinte igualdade

$$E_{\alpha}(t^{\alpha}\Delta)u_0 = u(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(u\nabla v)(s)ds$$

analogamente temos

$$E_{\alpha}(t^{\alpha}(\Delta - \gamma))v_0 = v(t) - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}(\Delta - \gamma))u(s)ds$$

portanto temos

$$\begin{aligned}
E_{\alpha}(t^{\alpha}\Delta)(u_0 - \bar{u}_0) & = u(t) - \bar{u}(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(u\nabla v)(s)ds \\
& \quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(\bar{u}\nabla v)(s)ds \\
& \quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(\bar{u}\nabla v)(s)ds \\
& \quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(\bar{u}\nabla \bar{v})(s)ds \\
& = u(t) - \bar{u}(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)((u - \bar{u})\nabla v)(s)ds \\
& \quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(\bar{u}\nabla v - \bar{v})(s)ds
\end{aligned}$$

daí

$$\|E_{\alpha}(t^{\alpha}\Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)$$

$$\begin{aligned} & \times ((u - \bar{u})\nabla v)(s) \|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ & + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(\bar{u}\nabla v - \bar{v})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \end{aligned}$$

usando (3.28) e (2.13) temos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} & \leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ & + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u - \bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ & + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|\bar{u}\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\ & = \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ & + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u - \bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} s^{\frac{\alpha}{2}} \\ & \times \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ & + C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|\bar{u}\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ & \times s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\ & \leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ & + \sigma_1 \epsilon C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\ & \times \|(u - \bar{u})(s)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} ds \\ & + 2\epsilon C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \\ & = \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ & + \sigma_1 \epsilon C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} \\ & \times (zt)^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|(u - \bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} dz \\ & + 2\epsilon C t^{-\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}} \\ & \times \|\nabla(v - \bar{v})(zt)\|_{L^\infty} dz \end{aligned}$$

Então segue a estimativa

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} & \leq t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\ & + \sigma_1 \epsilon C \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{N}{r}-v_1)} \\ & \times \|(u - \bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} dz \\ & + 2\epsilon C \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3-\frac{N}{r}-v_1)} (zt)^{\frac{\alpha}{2}} \\ & \times \|\nabla(v - \bar{v})(zt)\|_{L^\infty} dz \end{aligned}$$

Calculando o limite superior temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} &\leq A_1 + \epsilon(A_1\sigma_1 + 2A_2) \\
&\quad \times CB(-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1) + 1, \frac{\alpha}{2}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

de forma análoga obtemos o resultado desejado aplicando o limite superior às seguintes estimativas;

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{r} - v_1) - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} \\
&\quad \times (tz)^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} \|u(tz) - \bar{u}(tz)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} dz \\
&\quad + C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{q} - v_2) - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \\
&\quad \times (tz)^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \|u(tz) - \bar{u}(tz)\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} dz, \\
t^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} \\
&\quad + \sigma_1 \epsilon C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1 - v_1 + v_2 - \frac{N}{r} + \frac{N}{q}) - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} \\
&\quad \times (tz)^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} \|(u - \bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} dz \\
&\quad + 2\epsilon C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(1 - v_1 + v_2 - \frac{N}{r} + \frac{N}{q}) - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} \\
&\quad \times (tz)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz \\
&\quad + \sigma_1 \epsilon C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2} - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{q} - v_2)} (tz)^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{q} - v_2)} \\
&\quad \times \|(u - \bar{u})(zt)\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^{v_2}} dz \\
&\quad + 2\epsilon C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2} - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{q} - v_2)} (tz)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \|\nabla(v - \bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{B_r^{v_1}} &\leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{B_r^{v_1}} \\
&\quad + \sigma_1 \epsilon C \int_0^1 (1-z)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - v_1 - \frac{N}{r}) - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} \\
&\quad \times (tz)^{\frac{\alpha}{2}(2 - \frac{N}{r} - v_1)} dz \|(u - \bar{u})\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^{v_1}} \\
&\quad + 2\epsilon C \int_0^1 (1-z)^{\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - v_1 - \frac{N}{r}) - 1} z^{-\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{r} - v_1)} (tz)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \|\nabla(v - \bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz
\end{aligned}$$

e assim a prova do teorema está completa. $\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se por meio de ferramentas da Análise Funcional e do Cálculo fracionário, o estudo do sistema acoplado de equações do Modelo de Keller-Segel fracionário no tempo para a quimiotaxia, de ordem $\alpha \in (0, 1)$, em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, dado em (1.1). Disso, concluímos a existência de solução global branda para o sistema (1.1). Analisamos também o comportamento assintótico das soluções e obtivemos resultado de estabilidade no tempo para estas soluções.

No entanto, se pensarmos em outras investigações para o sistema (1.1) alguns problemas em aberto podem ser considerados. São eles:

- (a) É possível encontrarmos soluções para o sistema acoplado de equações diferenciais parciais em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\beta v = \Delta v - \gamma v + u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde, ${}^c D_t^\alpha$ e ${}^c D_t^\beta$ são derivadas fracionárias de Caputo de ordem $\alpha, \beta \in (0, 1)$, respectivamente, com $\alpha \neq \beta$? Se sim, também conseguimos concluir resultados semelhantes aos vistos nesta dissertação? Ressaltamos que γ , $u(x, t)$ e $v(x, t)$ em (5.1) possuem as mesmas representações como no problema (1.1).

- (b) Consideremos o problema (1.1). Existe solução para algum $\alpha > 1$, e o que dizer do comportamento assintótico das soluções, caso estas existam?

- (c) É possível encontrarmos soluções para o sistema acoplado de equações diferenciais parciais em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\alpha v = \Delta^w v - \gamma v + u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde, ${}^c D_t^\alpha$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$, e $w \in \mathbb{Q}$. Ressaltamos que γ , $u(x, t)$ e $v(x, t)$ em (5.2) possuem as mesmas representações como no problema (1.1)

REFERÊNCIAS

- ARUCHAMY, A.; TYAGI, J. Nonnegative solutions to time fractional keller–segel system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 44, n. 2, p. 1812–1830, 2021.
- ATANGANA, A.; ALKAHTANI, B. S. T. Analysis of the keller–segel model with a fractional derivative without singular kernel. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 17, n. 6, p. 4439–4453, 2015.
- AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; HENRIQUEZ, E. Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional keller–segel model for chemotaxis. *Mathematische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 292, n. 3, p. 462–480, 2019.
- BARTUMEUS, F.; PETERS, F.; PUEYO, S.; MARRASÉ, C.; CATALAN, J. Helical lévy walks: adjusting searching statistics to resource availability in microzooplankton. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 100, n. 22, p. 12771–12775, 2003.
- BETTERTON, M.; BRENNER, M. P. Collapsing bacterial cylinders. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 061904, 2001.
- BEURLING, A. Construction and analysis of some convolution algebras. In: *Annales de l’institut Fourier*. [S.l.: s.n.], 1964. v. 14, n. 2, p. 1–32.
- BEZERRA, M.; CUEVAS, C.; SILVA, C.; SOTO, H. On the fractional doubly parabolic keller–segel system modelling chemotaxis. *Science China Mathematics*, Springer, p. 1–48, 2021.
- BILER, P.; CANNONE, M.; GUERRA, I. A.; KARCH, G. Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 330, p. 693–708, 2004.
- BILER, P.; CORRIAS, L.; DOLBEAULT, J. Large mass self-similar solutions of the parabolic–parabolic keller–segel model of chemotaxis. *Journal of mathematical biology*, Springer, v. 63, n. 1, p. 1–32, 2011.
- BOURNAVEAS, N.; CALVEZ, V. The one-dimensional keller–segel model with fractional diffusion of cells. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 23, n. 4, p. 923, 2010.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 2.
- BURCZAK, J.; GRANERO-BELINCHÓN, R. Critical keller–segel meets burgers on: large-time smooth solutions. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 29, n. 12, p. 3810, 2016.
- CANNONE, M. A generalization of a theorem by kato on navier–stokes equations. *Revista matemática iberoamericana*, v. 13, n. 3, p. 515–541, 1997.
- CANNONE, M.; WU, G. Global well-posedness for navier–stokes equations in critical fourier–herz spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 75, n. 9, p. 3754–3760, 2012.

- CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 13, n. 5, p. 529–539, 1967.
- CARVALHO-NETO, P. M. de; PLANAS, G. Mild solutions to the time fractional navier–stokes equations in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 259, n. 7, p. 2948–2980, 2015.
- CHENG, X.; WANG, L.; HOU, J. Solving time fractional keller–segel type diffusion equations with symmetry analysis, power series method, invariant subspace method and q -homotopy analysis method. *Chinese Journal of Physics*, Elsevier, v. 77, p. 1639–1653, 2022.
- EL-SAYED, A.; RIDA, S.; ARAFA, A. On the solutions of time-fractional bacterial chemotaxis in a diffusion gradient chamber. *International Journal of Nonlinear Science*, v. 7, n. 4, p. 485–492, 2009.
- ENGEL, K.-J.; NAGEL, R.; BRENDLE, S. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. [S.l.]: Springer, 2000. v. 194.
- ESCUADERO, C. The fractional keller–segel model. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 19, n. 12, p. 2909, 2006.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2022. v. 19.
- FERREIRA, L. C.; PÉREZ-LÓPEZ, J. E. Besov-weak-herz spaces and global solutions for navier–stokes equations. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 296, n. 1, p. 57–77, 2018.
- FERREIRA, L. C.; PRECIOSO, J. C. Existence and asymptotic behaviour for the parabolic–parabolic keller–segel system with singular data. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 24, n. 5, p. 1433, 2011.
- FLETT, T. Some elementary inequalities for integrals with applications to fourier transforms. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 3, n. 3, p. 538–556, 1974.
- FRIEDMAN, A. *Partial differential equations of parabolic type*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2008.
- GIGA, Y.; MIYAKAWA, T. Navier-stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and morrey spaces. *Communications in partial differential equations*, Taylor & Francis, v. 14, n. 5, p. 577–618, 1989.
- HERNÁNDEZ, E.; YANG, D. Interpolation of herz-type hardy spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, Duke University Press, v. 42, n. 4, p. 564–581, 1998.
- HERNÁNDEZ, E.; YANG, D. Interpolation of herz spaces and applications. *Mathematische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 205, n. 1, p. 69–87, 1999.
- HERZ, C. "carl herz 1930–1995". *Notices of the AMS*, v. 43, n. 7, p. 768–771, July 1996.

- HERZ, C. S. Lipschitz spaces and bernstein's theorem on absolutely convergent fourier transforms. *Journal of Mathematics and Mechanics*, JSTOR, v. 18, n. 4, p. 283–323, 1968.
- HORSTMANN, D.; WINKLER, M. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system. *Journal of Differential Equations*, Academic Press, v. 215, n. 1, p. 52–107, 2005.
- HU, G.; LU, S.; YANG, D. The weak herz spaces. *JOURNAL-BEIJING NORMAL UNIVERSITY NATURAL SCIENCE EDITION*, BEIJING NORMAL UNIVERSITY, v. 33, p. 27–34, 1997.
- II, A. B.; SAWYER, E. T. *Embedding and Multiplier Theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$* . [S.l.]: American Mathematical Soc., 1985. v. 318.
- IWABUCHI, T. Global well-posedness for keller–segel system in besov type spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 379, n. 2, p. 930–948, 2011.
- IWABUCHI, T.; NAKAMURA, M. Small solutions for nonlinear heat equations, the navier-stokes equation and the keller-segel system in besov and triebel-lizorkin spaces. 2013.
- IWABUCHI, T.; TAKADA, R. Global well-posedness and ill-posedness for the navier–stokes equations with the coriolis force in function spaces of besov type. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 267, n. 5, p. 1321–1337, 2014.
- KONIECZNY, P.; YONEDA, T. On dispersive effect of the coriolis force for the stationary navier–stokes equations. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 250, n. 10, p. 3859–3873, 2011.
- KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. Semilinear heat equations and the navier-stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. *Communications in Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, v. 19, n. 5-6, p. 959–1014, 1994.
- KUMAR, S.; KUMAR, A.; ARGYROS, I. K. A new analysis for the keller-segel model of fractional order. *Numerical Algorithms*, Springer, v. 75, n. 1, p. 213–228, 2017.
- LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. [S.l.]: BG Teubner, 1909. v. 1.
- LANGLANDS, T.; HENRY, B. Fractional chemotaxis diffusion equations. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 5, p. 051102, 2010.
- LANZHE, L. The inequalities of commutators on weak herz spaces. *J. Korean Math. Soc.*, v. 39, n. 6, p. 899–912, 2002.
- LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. Recent developments in the navier-stokes problem. CRC press, 2002.
- LEVANDOWSKY, M.; WHITE, B. S.; SCHUSTER, F. Random movements of soil amebas. *Acta protozoologica*, -, v. 36, n. 4, 1997.
- LI, L.; LIU, J.-G. Some compactness criteria for weak solutions of time fractional pdes. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 50, n. 4, p. 3963–3995, 2018.

- LORENZI, L.; LUNARDI, A.; METAFUNE, G.; PALLARA, D. Analytic semigroups and reaction-diffusion problems. In: *Internet Seminar*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2005, p. 127.
- MAINARDI, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. [S.l.]: World Scientific, 2010.
- MAZZUCATO, A. Besov-morrey spaces: function space theory and applications to non-linear pde. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 355, n. 4, p. 1297–1364, 2003.
- MURRAY, J. D. *Mathematical biology: I. An introduction*. [S.l.]: Springer, 2002.
- NAGHIBOLHOSSEINI, M. *Estimation of outer-middle ear transmission using DPOAEs and fractional-order modeling of human middle ear*. [S.l.]: City University of New York, 2015.
- NETO, P. M. d. C. *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- OLIVEIRA, E. C. D. Sobre a clássica função de mittag-leffler. *Revista Matemática Universitária*, v. 1, 2019.
- OSTER, G. F.; MURRAY, J. D. Pattern formation models and developmental constraints. *Journal of Experimental Zoology*, Wiley Online Library, v. 251, n. 2, p. 186–202, 1989.
- PATLAK, C. S. Random walk with persistence and external bias. *The bulletin of mathematical biophysics*, Springer, v. 15, p. 311–338, 1953.
- PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44.
- RENARDY, M.; ROGERS, R. C. *An introduction to partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 13.
- ROSS, B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In: SPRINGER. *Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974*. [S.l.], 2006. p. 1–36.
- RUDIN, W. et al. *Principles of mathematical analysis*. [S.l.]: McGraw-hill New York, 1976. v. 3.
- SAGRADA, B.; BÍBLIA, C. E. A. Bíblia. *Antigo testamento*. Flórida: CPAD, 1995.
- SAHNI, R. Some applications of fixed point theorems. *JAYPEE INSTITUTE OF INFORMATION TECHNOLOGY*, Citeseer, 2012.
- SAWANO, Y. et al. *Theory of Besov spaces*. [S.l.]: Springer, 2018. v. 56.
- SCHIFF, J. L. *The Laplace transform: theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.

TAVARES, C. A.; LAZO, M. J. Sistemas dinâmicos com derivadas fracionárias aplicado a problemas de populações interagentes. *Revista Brasileira de Engenharia e Sustentabilidade*, v. 9, n. 3, p. 21–26, 2021.

TESCHL, G. Topics in real and functional analysis. *unpublished, available online at <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald>*, 1998.

TSUTSUI, Y. The navier-stokes equations and weak herz spaces. 2011.

WIDMAN, M. T.; EMERSON, D.; CHIU, C. C.; WORDEN, R. M. Modeling microbial chemotaxis in a diffusion gradient chamber. *Biotechnology and bioengineering*, Wiley Online Library, v. 55, n. 1, p. 191–205, 1997.

YAMADA, T. Large time behavior of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in the whole space (mathematical models of phenomena and evolution equations). *Notes on the Institute of Mathematical Analysis*, Institute of Mathematical Analysis, Kyoto University, v. 1542, p. 145–155, 2007.

ZAYERNOURI, M.; MATZAVINOS, A. Fractional adams–bashforth/moulton methods: an application to the fractional keller–segel chemotaxis system. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 317, p. 1–14, 2016.

ZHAO, J. Global existence of large solutions for the generalized poisson–nernst–planck equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 498, n. 1, p. 124943, 2021.