UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOSÉ ELSON CLEMENTE DA SILVA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA MATEMÁTICA DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE CONVERGENTE QUANDO X TENDE A UM PONTO P NA FORMAÇÃO INICIAL DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARUARU
2024

JOSÉ ELSON CLEMENTE DA SILVA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA MATEMÁTICA DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE CONVERGENTE QUANDO X TENDE A UM PONTO P NA FORMAÇÃO INICIAL DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida

CARUARU
2024

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Nasaré Oliveira - CRB/4 - 2309

S586a Silva, José Elson Clemente da.
Análise praxeológica matemática da definição formal de limite convergente quando x tende a um ponto p na formação inicial da licenciatura em matemática. / José Elson Clemente da Silva. – 2024.
98 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Fernando Emílio Leite de Almeida.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2024.
Inclui Referências.

1. Teoria antropológica do didático. 2. Prática de ensino. 3. Cálculo. 4. Praxeologia matemática. I. Almeida, Fernando Emílio Leite de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2024-026)

JOSÉ ELSON CLEMENTE DA SILVA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA MATEMÁTICA DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE CONVERGENTE QUANDO X TENDE A UM PONTO P NA FORMAÇÃO INICIAL DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 28/ 05/2024 .

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____
Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____
Prof. Dr. Rochelande Felipe Rodrigues (Examinador Externo)
Universidade Federal do Cariri - UFCA

Ao meu Deus pelo dom da vida e
graça da salvação!

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A Deus por conduzir os meus caminhos na estrada da vida.

A minha família, esposa e filhas por todo apoio e força que me deram durante o curso.

A meu orientador e amigo, Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida por toda paciência e confiança.

A banca examinadora desta pesquisa, o Prof. Dr Marcus Bessa de Menezes e Dr. Rochelande Felipe Rodrigues pelas valiosas contribuições, considerações e observações.

A Universidade Federal de Pernambuco, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECM, pela oportunidade de cursar o mestrado.

“Porque o Senhor dá a sabedoria; dá sua boca vem o conhecimento e o entendimento” (Bíblia Sagrada, 2022).

RESUMO

Essa pesquisa tem como objetivo analisar os livros didáticos, que fazem parte da ementa do curso Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, Campus Caruaru, sobre o ponto de vista das praxeologias matemáticas na definição formal de limite convergentes quando x tende a um ponto p. Para isso iremos nos apoiar nos estudos sobre as praxeologias da Teoria Antropológica do Didático (TAD). A TAD proposta por Yves Chevallard e colaboradores situa a atividade matemática no conjunto de atividades humanas e das instituições sociais. Para atingir o nosso objetivo, iremos analisar as praxeologias matemáticas, contidas nos livros didáticos de Guidorizzi, Leithold e Stewart, e dessa forma apreender as escolhas dos autores, no que se refere a construção conceitual, da definição formal de limite. É uma pesquisa de abordagem qualitativa, que busca investigar as praxeologias matemáticas presentes nos livros didáticos, apoiada no modelo de análise de livros didáticos desenvolvido por Marilena Bittar. Os resultados evidenciaram que as praxeologias matemáticas, presentes nos livros didáticos contribuem para a construção conceitual, na definição formal de limite, desde que desenvolvidas de forma conjunta, pelas três obras.

Palavras-chave: Definição formal de limite; Teoria Antropológica do Didático; Praxeologia matemática.

ABSTRACT

This research has the objective to analyze the didatic books, which are part of the syllabus of the degree in Mathematics Course, at the Federal University of Pernambuco, Campus Caruaru, about of mathmatical praxeologies point of view in a formal definition of convergent limit when X tends to a point P. To do this, we will rely on studies on the praxeologies of the Anthropological Theory of Didactics (ATD). The ATD, proposed by Yves Chevallard and collaborators situate the mathematical activity in the set of human activities and social institutions. To achieve our goal, we will analyze the mathmaticals praxeologies, contained in textbooks Guidorizzi, Leithold, and Stewart, and in this way understand the authors' choices, regarding the conceptual construction, of the formal definition of limit. It’s a qualitative research approach, which seeks to investigate the mathematical praxeologies present in textbooks, supported by the textbook analysis model developed by Marilena Bittar. The results showed that, the mathmatical praxeologies present in textbooks contribute to the conceptual construction, in the formal definition of limit. as long as they are developed jointly, by the three works.

Keywords: Formal definition of limit; Anthropological Theory of Didactics; Mathematical Praxeology.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é um tema que vem sendo investigado no meio acadêmico, já há algum tempo (Abreu, 2011; Alves, 2010; Amorim, 2011, entre outros). Estas pesquisas vêm enfatizando sobre as dificuldades que os licenciandos em matemática apresentam na compreensão dos conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, a exemplo, o conceito de limites.

O limite, assim como a derivada e a integral, são os três principais conceitos desenvolvidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O Cálculo Diferencial e Integral compreende um ramo da matemática, que foi desenvolvido a partir de estudos sobre taxas de variação e grandezas e acumulação de quantidades.

O Cálculo é entendido como a matemática da mudança e reconhecido como a matemática de retas tangentes, áreas, curvaturas, etc., possibilita que engenheiros, economistas e cientistas possam realizar modelações da vida real (LARSON et al, 2006). Nesse sentido, o Cálculo Diferencial e Integral, está presente em diferentes áreas e ciências, o que demonstra a importa de entender com clareza os seus conceitos (Holanda, 2015).

O interesse pelo tema “A definição formal de limite”, surgiu a partir de minhas experiências, primeiro enquanto estudante de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), e posteriormente, durante o tempo em que fui professor substituto do curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), nas disciplinas de Cálculo I, II e III.

Quando era estudante de Licenciatura em Matemática (UEPB), percebia a grande dificuldade que os alunos tinham para compreender os conceitos mais abstratos, como os que envolviam a disciplina de CDI, apesar de todo o esforço dos nossos mestres em ministrar a disciplina, poucos alunos conseguiam aprender os conceitos, ao final da disciplina.

Ao concluir a graduação, passei atuar na educação básica, como professor de matemática, até 2021, quando ingressei como professor substituto nas disciplinas de Cálculo I, II e III(UFPE), onde pude presenciar as mesmas dificuldades na apreensão dos conceitos pelos alunos. Foi a partir da minha experiência como professor dessas disciplinas, que me senti instigado a olhar de forma mais específica e detalhada para as dificuldades na compreensão da definição formal de limite.

O acesso ao Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE/CAA) e, posteriormente, ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática – EPeDiMa, oportunizou aprofundar sobre o Ensino e a Aprendizagem de conceitos específicos da matemática no ensino superior.

Tal aprofundamento, aponta que as pesquisas têm se dedicado bastante sobre as dificuldades presentes no ensino da matemática que afetam o processo de ensino e aprendizagem, e que comprometem a aquisição do conhecimento pelo aluno. Dentre as dificuldades, podemos destacar aquelas que estão relacionadas à ausência na compreensão dos conceitos matemáticos mais abstratos, em decorrência da falta de compreensão de outros conceitos matemáticos, que são ensinados no ensino médio.

Pesquisas no campo da Didática da Matemática (Chevallard,1999; Brousseau, 1983; Durval, 2003, etc.) vem sendo desenvolvidas, com intuito de entender os cenários didáticos, e a partir dessa compreensão contribuir para a construção de um arcabouço teórico que forneça aos professores elementos para a construção de metodologias, e consequentemente para a melhoria do ensino a aprendizagem da matemática.

Colaboradores associados, procuram contribuir através de pesquisas para promover um maior alcance analítico com ênfase nessas teorias (Araújo, 2020; Almouloud et al, 2018; Batista, 2019; Almeida,2016 entre outros).

Dentre as teorias que surgiram no campo da Didática da Matemática, particularmente, temos interesse pela a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 1999), e em especial, o estudo das organizações praxeológicas matemáticas, que foram pensadas a fim de contribuir para o processo de ensino (Almoloud et al, 2018).

As praxeologias é uma importante ferramenta da TAD para analisar as práticas em sala de aula. Através dessa ferramenta é possível analisar as organizações matemáticas e didáticas, presentes na relação didática. Essa teoria caracteriza o conhecimento matemático, no sentido de organizações ou praxeologias, sendo as noções básicas, os tipos de tarefas T, técnica t, tecnologias θ e teorias Θ. Essas noções básicas modelam as práticas socias em geral e a atividade matemática em particular (Chevallard, 1999).

Acreditamos que os estudos sobre a TAD, especificamente no que se refere a investigação das praxeologias matemáticas, poderá contribuir para as pesquisas sobre a definição formal de Limite, já que permitirá ao pesquisador investigar como vem sendo proposto o ensino dessa definição nos livros didáticos.

Do ponto de vista das pesquisas, já há algumas décadas, a Teoria Antropológica do Didático tem inspirado diversos estudos, inclusive esse que, de forma geral, procura dar luz as transformações da definição formal de Limite.

Estudos como o de Brito de Menezes (2006) buscou analisar as Inter-relações entre os fenômenos didáticos (contrato didático e transposição didática), no ensino de álgebra elementar, em uma turma de 6ª série do Ensino Fundamental. A pesquisa evidenciou que os fenômenos didáticos se relacionam de forma estreita, já que tanto os efeitos de contrato estão relacionados diretamente ao fenômeno da Transposição Didática, quanto à relação ao saber do professor, está presente na relação didática, e influencia os fenômenos didáticos e a formação do conhecimento pelo aluno.

Já os estudos de Araújo (2009) tiveram como intuito caracterizar e comparar as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil, sobre o ensino de resolução de equações do 1º grau, com uma incógnita. Para isso, ele se baseia na Transposição Didática (TD) e na Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999 e 2001). Os resultados da sua pesquisa apontam que no Ensino Fundamental, a álgebra, tanto na França, quanto no Brasil, não é enfatizada como um domínio próprio do conhecimento matemático. Em relação ao ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, nos dois países, ele é usado como uma ferramenta para resolver problemas de contextos sociais e de outros domínios da matemática. Com relação as organizações matemáticas presentes nos documentos oficiais, as análises apontam que estas não oferecem elementos para uma caracterização das praxeologias nos dois países investigados.

A pesquisa de Bessa de Menezes (2010) se propôs a refletir sobre as semelhanças e diferenças existentes nas práticas de professores e de alunos, a partir do trabalho com as equações de segundo grau. Com esse objetivo o autor caracterizou, analisou e comparou as praxeologias do professor e de seus alunos. Os resultados apontam que os alunos, a partir das suas relações com o objeto equações de segundo grau, conseguem reorganizar, de modo particular, o conhecimento construído em sala de aula. Outro achado da pesquisa diz respeito ao uso de diferentes técnicas e subtécnicas pelos alunos, diferentemente das que são ensinadas pelo professor, demonstrando dessa forma as relações de conformidade que os estudantes tem com a instituição escolar.

A tese de Barbosa (2017) faz uma análise sobre as praxeologias contidas em documentos oficiais, no livro didático e do professor, no que diz respeito ao ensino de equações polinomiais do primeiro grau, a fim de compreender as relações existentes entre essas praxeologias. O estudo foi baseado nas pesquisas sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), que foi proposta por Yves Chevallard e seus colaboradores. De acordo com os resultados obtidos foi confirmado que existe uma consonância entre as praxeologias a serem ensinadas, propostas pelos autores dos livros didáticos, e as praxeologias efetivamente ensinadas pelos professores na sala de aula.

No que diz respeito as pesquisas que revelam as dificuldades que os alunos estão apresentando na compreensão do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), apontamos a de Veríssimo (2020), Marcêdo e Gregor (2020), Rosa et. Al. (2019), Santos et.al. (2019), entre outros. Esses estudos destacam o baixo rendimento dos alunos em matemática na disciplina de CDI, como também a necessidade de uma maior investigação sobre os processos de ensino e aprendizagem e a possibilidade de pensar em ações educativas que venha colaborar com a aprendizagem mais eficaz da disciplina pelos estudantes.

Para Veríssimo (2020, p.48), as deficiências dos alunos no tocante a aprendizagem do Cálculo está relacionada não só a ausência de conhecimentos matemáticos que, na visão da pesquisadora, deveriam ser construídas no ensino básico, mas também estão relacionadas a maneira tradicional de ensino de alguns professores de Cálculo Diferencial e Integral.

Ainda sobre a aprendizagem do CDI, Abreu (2011), alerta para um conflito relacionado a definição formal de continuidade. O pesquisador revela que “ao associar a continuidade de uma função no ponto apenas à existência de um valor da função nesse ponto, os alunos recorrem a uma imagem conceitual bastante intuitiva, mas sem “consultar” sua definição formal” (p.94).

Partilhando dessas inquietações sobre as dificuldades dos alunos em compreender conceitos relacionados ao CDI nos cursos de Matemática, delineamos como objeto de nossa pesquisa, “a definição formal de limite a partir do olhar da TAD”. Optamos por realizar essa investigação na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) Campus Agreste, no curso de Licenciatura em Matemática. A escolha da instituição se justifica por ser o lócus de trabalho do professor/pesquisador.

O curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) é regido pelo Parecer Nº 1.302/2001 do Conselho Nacional de Educação (CNE) e da Câmara de Educação Superior (CES). Neste documento é apresentado as competências e habilidades, os conteúdos curriculares que devem contemplar os currículos dos cursos de Bacharelado e de Licenciatura de Matemática das IES.

O referido Parecer (Nº 1.302/2001/CNE/CES) recomenda a organização do currículo das Instituições de Ensino Superior, em consonância com essas diretrizes e com o núcleo de formação específica.

Outro documento que é referência para os cursos de Licenciatura de Matemática, é o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática-Licenciatura (PPC), dado pela Portaria MEC Nº 121, de 05 de julho de 2012. Dentre vários aspectos que o PPC apresenta um deles é o Programa de Componente Curricular, que consta a ementa das disciplinas a serem cursadas.

Ainda sobre o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) Campus Agreste, é importante frisar que este curso recebeu o conceito 3[1] no Exame Nacional de Desempenho dos Estudante (Enade)[2], no ano de 2017[3] (INEP, 2017). Isso nos leva a conjecturar que o componente CDI pode ter uma forte influência nesse resultado, já que trata-se de um componente tido como de difícil compreensão. É preciso enfatizar também que a assimilação desse componente requer o entendimento de definições essenciais, como o conceito formal de limite.

É necessário entender que o conceito de Limite é inerente ao estudo de cálculo. Nesse sentido, o conceito de Limite se apropria da matemática elementar do pré- cálculo (álgebra, geometria e trigonometria) suficiente para solucionar problemas envolvendo grandezas constantes, áreas regulares e somas finitas, e aplica em problemas cujas grandezas variam com passar do tempo, em regiões em que as áreas são irregulares e em somas cujas parcelas são infinitas. Para tais problemas, as regras da matemática básica não são suficientes para resolvê-las.

---

[1] Os conceitos do ENADE variam de 1 a 5. Disponível em: https:// enade.inep.gov.br/enade/#!/relatorioCursos

[2] O Exame Nacional de Desempenho (Enade) tem o objetivo de avaliar o rendimento dos concluintes dos cursos de graduação, no que tange os conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares dos cursos. Disponível em: emfile:///C:/Users/User/Downloads /07020058026041060000118100%20(1).pdf

[3] O último resultado do Enade para o curso de Licenciatura em Matemática foi divulgado em 2017, de acordo com pesquisa realizada no site https://enade.inep.gov.br/enade/#!/relatorioCursos

Nessas condições o limite aproxima as grandezas variantes em grandezas constante, faz áreas irregulares tender para áreas constantes e torna possível calcular somas infinitas por meio de somas parciais finitas (Simmons, 1987).

Quando discutimos questões relacionadas ao ensino, lembramos o papel do livro didático. Este, é considerado por muitos pesquisadores como uma importante ferramenta que auxiliam o ensino da matemática (Bittar, 2017).

Segundo Brandão (2013, p.45) “um bom livro didático deve levar o aluno a compreender os conteúdos, investigar, refletir, concluir, generalizar e aplicar seus conhecimentos, ele pode ser um grande motivador da aprendizagem e importante suporte para eliminação de dúvidas”.

Podemos acrescentar que o livro aciona métodos de aprendizagem, uma vez que são propostos exercícios e atividades que podem contribuir para o processo de memorização dos conhecimentos, assim como favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais” (Santana Filho, 2017, p.11). Esses autores destacam em suas pesquisas a importância do livro didático para o processo de aquisição do conhecimento matemático.

Ainda sobre a análise dos livros didáticos, Mateus (2006, p.41) pontua que “levantar os aspectos que um livro didático possui pode ser uma contribuição no sentido de chamar atenção ao usuário sobre o que vai encontrar no tal material (...)”. Na relação entre a análise do livro didático e as praxeologias, Bittar (2017) destaca que estudar essa relação é essencial para a análise de livros didáticos, pois é através da compreensão de uma organização didática que poderemos apreender os paradigmas de aprendizagem do sujeito autor da praxeologia. O estudo da OM e OD nos possibilita descrever as escolhas didáticas e matemáticas que foi instituída para uma dada instituição. É importante ressaltar, a importância dos estudos de Bittar(2027), para a análise do livro didático.

Ao realizar análises de livros didáticos é preciso verificar se a forma que os objetos matemáticos são apresentados auxiliam na compreensão dos alunos, sem provocar confusões conceituais. Desse modo salientamos o cuidado que o professor deve ter ao utilizar esse instrumento didático, pois a depender da maneira que o conteúdo está sendo apresentado, poderá facilitar o entendimento do objeto matemático, ou introduzir obstáculos epistemológicos e didáticos.

No que diz respeito ao objeto matemático Limite, podemos compreendê-lo como a pedra fundamental do cálculo, ou a pedra angular do cálculo, pois é só através do conceito de limite que todo cálculo diferencial e integral é desenvolvido (Larson et al, 2006).

Posto isso, apresentaremos no tópico seguinte uma revisão de literatura, realizada no Banco de Teses e Dissertações da Capes, sobre pesquisas que abordam o tema.

1.1 Revisão de literatura em Teses e Dissertações

Para compreendermos melhor nosso objeto de estudo, realizamos no dia 23 de janeiro de 2023 um levantamento das produções científicas no Banco de Teses e Dissertações da Capes, que tratam da definição formal de limite, e constatamos que existem poucas pesquisas. Ao todo encontramos apenas dez trabalhos, sendo seis dissertações e quatro teses. Utilizamos como descritor para esse levantamento “conceito de limite”.

Além desse descritor, havíamos testados os seguintes descritores: “definição formal de limite”; “conceito formal de limite”; “ensino e aprendizagem de limite”; “ensino e aprendizagem do conceito de limite”, porém não obtivemos nenhum resultado.

Os trabalhos encontrados inicialmente correspondiam a um total de 42 produções, entre teses e dissertações. Percebemos que muitos desses trabalhos abrangiam diferentes áreas como educação, ensino, etc. Desse modo optamos por fazer um refinamento da pesquisa, e selecionamos como área de conhecimento ensino de ciências e matemática. Após o refinamento apareceram 12 trabalhos, sendo que dois deles estavam duplicados, restando 10 trabalhos para serem analisados.

Os trabalhos encontrados estão concentrados nas seguintes Universidades: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Roraima, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Universidade Estadual da Paraíba, Universidade Federal do Pará, Universidade Franciscana e Universidade Federal do Mato Grosso. Apresentaremos a seguir as pesquisas encontradas.

A tese “Um Modèle didactique de reference pour la construction des savoirs et l’actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali” de Doumbia (2020) tem como objetivo central ajudar futuros professores, participantes do projeto de pesquisa, a construir situações de ensino que lhes permitam atribuir um significado matemático à noção de limite de uma função numérica de uma variável real em um ponto e usá-la para mostrar que um dado real é o limite de uma função em um determinado ponto. Para isso o autor opta por uma pesquisa de abordagem qualitativa, que está fundamentada no campo da Didática da Matemática, tendo como referenciais teóricos a teoria das situações didáticas, a teoria antropológica do didático, a teoria dos campos conceituais e a teoria dos registros de representação semiótica. As discussões da pesquisa apresentam que a definição intuitiva que surge, impede o entendimento da definição formal e que os professores que foram sujeitos da pesquisa têm uma concepção dinâmica do limite.

Revelam também, que é preciso incluir a história da matemática no currículo dos futuros professores, que é possível os alunos compreenderem a definição formal do conceito de limite. Outra informação importante que esse estudo aponta, é que a manipulação dessa definição permite aos alunos atualizarem muitos conhecimentos relacionados a definição, como a noção de intervalo, as desigualdades com valor absoluto, a distância, a composição, a decomposição de função, de ordem em R etc. Para o autor é através da definição formal que os alunos tem a possibilidade de corrigir os obstáculos como "o limite atingido ou não", a ausência dos quantificadores, a confusão entre o limite e a continuidade. Ele ainda enfatiza que é o domínio de definição no cálculo do limite que marca a passagem da álgebra para a análise.

A tese de Ferreira (2021), intitulada "Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de ciências exatas" tem como objetivo geral analisar a compreensão do conceito de limite de função de uma variável real por alunos de cursos de Ciências Exatas de uma universidade pública. Ele utiliza uma metodologia de caráter qualitativo, considerando aspectos da Engenharia Didática. Os resultados da pesquisa evidenciam os elementos que surgiram a partir das atividades desenvolvidas, e indicaram que a realização de sequências de atividades utilizando as tecnologias digitais como applets combinada às diferentes representações do objeto matemático limite de função de uma variável podem fortalecer a compreensão da definição formal de limite.

A pesquisa que tem por título "Um olhar para o conceito de limite: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado" de Santos (2013), trata-se de uma tese, que objetiva trazer novas reflexões relacionadas ao conceito de limite de uma função buscando respostas para alguns questionamentos. A autora elenca os seguintes questionamentos: de onde vem a dificuldade de aprendizagem desse conceito? Como os livros o apresentam? E as tarefas? Como são propostas? Em que os professores universitários se apoiam para ensinar esse conceito? Que elementos utilizam para motivar o aprendizado? Com quais definições trabalham? Como veem as dificuldades dos alunos? E os alunos? Que testemunho nos trazem com relação aos seus aprendizados de limite de uma função? Para conseguir obter as respostas a pesquisadora utiliza a combinação das abordagens quantitativa e qualitativa e também diferentes instrumentos de coleta de dados (questionário, atividade livre e entrevistas). A análise dos dados coletados foi realizada a partir da teoria de Bakhtin e da Psicologia Cognitiva. Os resultados da pesquisa primeiro confirmam resultados de estudos anteriores, mostram outros elementos relacionados ao conceito, e apresentam novos questionamentos para as pesquisas futuras, entre eles, a definição formal de limite- que continua a ser um desafio tanto para quem ensina, quanto para quem aprende.

A tese de Moraes (2021), que tem por título “Processos de superação dos obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite de função: potencialidades conceituais e didáticas para a formação de professores de matemática” tem como objetivo discutir os processos de superação dos obstáculos epistemológicos, que surgiram durante o desenvolvimento histórico do conceito de limite de função, com vistas a apontar potencialidades para a abordagem do tema nos cursos de licenciatura em matemática. A autora destaca que realizou uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento histórico do conceito de limite de função, tanto em manuais de história da matemática, publicados em língua portuguesa, quanto nas línguas espanhola e inglesa. Os processos de superação dos obstáculos epistemológicos referentes ao assunto, em sua perspectiva conceitual e didática foram analisados a partir da análise de conteúdo. No que se refere aos resultados da pesquisa, a autora nada informou no resumo. Ao fazer uma busca do trabalho completo, constatamos que esta pesquisa não possui autorização de divulgação.

A dissertação “Perspectivas no estudo de limite: numa perspectiva figural e conceitual-foco em objetos e aprendizagem” de Moura (2014) tem como objetivo compreender as manifestações de representação e os processos de ensino e aprendizagem no estudo de cálculo, sobretudo nos Tópicos de Limite e Continuidade. A autora utiliza a abordagem qualitativa, realiza aplicação de atividades e análise dos erros e utiliza como ferramenta de coleta de dados, os registros dos alunos e das resoluções das atividades, além de gravação de áudio e notas de campo. A pesquisadora não traz muitas informações no resumo sobre os resultados encontrados, afirmando apenas que o resultado final trata de um conjunto de atividades que constitui o produto da dissertação, em um caderno de atividades. Todavia, nas considerações finais da pesquisa, ela aponta que a proposta de uma prática pedagógica através de tarefas que efetivem os Objetos de Aprendizagem, associada ao uso da tecnologia, se mostrou positiva, enquanto processo e ferramenta para um ensino e aprendizagem, pois a maioria dos estudantes conseguiram responder corretamente grande parte das questões.

O estudo realizado por Souza (2014), intitulado “Estudo da aprendizagem do conceito de limite fundamentado na teoria da aprendizagem significativa aplicado à licenciatura em matemática” busca analisar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite de funções de uma variável real, dos estudantes da Licenciatura em Matemática, no Instituto Federal de Roraima, utilizando como referência de análise a resolução de problemas como metodologia de ensino e fundamentado na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel.

A pesquisa está configurada em uma perspectiva interpretativa com enfoque misto, porém enfatizando mais no aspecto qualitativo, a partir de coleta de dados realizadas por meio de observações direta, entrevistas, filmagem e provas de lápis e papel. Os resultados da pesquisa apontam para uma melhoria da aprendizagem dos estudantes, apesar de não ter se mostrado muito significativa, quanto o esperado. A autora ressalta a importância da teoria da aprendizagem significativa para todos os partícipes da pesquisa.

A pesquisa realizada por Araújo (2020) que tem como título “A construção do conceito de limite através da resolução de problemas” tem como objetivo identificar os erros cometidos pelos estudantes a partir de suas atividades e avaliações. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que está assentada no Modelo Metodológico de
Romberg-Onuchic. A coleta de dados, como os registros produzidos pelos alunos, ocorreu nas aulas de Cálculo Diferencial Integral (CDI) por meio de diário de campo do professor-pesquisador. Os resultados obtidos apontam que a compreensão do conceito de Limite não é bem internalizada pelos estudantes. Outro dado importante aponta que a não consolidação de aspectos algébricos no Ensino Básico são fatores que contribuem para um aproveitamento insatisfatório de uma parcela significativa dos estudantes. A partir dos resultados encontrados o pesquisador desenvolveu uma proposta de ensino e aprendizagem de Limite fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

A dissertação “Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função” de Messias (2013) investiga os elementos que compõem a imagem conceitual de estudantes universitários sobre o conceito de limite de uma função de uma variável real. É uma pesquisa de caráter exploratório. Os resultados encontrados na pesquisa indicam que os estudantes relacionam o conceito de limite de uma função a uma variável real com interpretações estáticas e/ou dinâmicas que, em alguns momentos, constituíram-se como fatores de conflito potencial, conforme destacado por Vinner . O estudo também evidencia que algumas das imagens conceituais evocadas pelos sujeitos investigados não se fizeram coerentes, fato que os influenciou a construir uma definição conceitual pessoal diferente da definição conceitual formal de limite de uma função de uma variável real.

A pesquisa de Soares (2018), “O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: um estudo à luz dos três mundos da matemática “tem como objetivo analisar o conceito de limite de uma função em um ponto, apresentado por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo. Como achados do estudo o autor destaca que a maior parte dos alunos utiliza a linguagem natural para conceituar limite, apresentando características do Mundo Corporificado, com alguns elementos simbólicos, mas sem atingir um desenvolvimento compatível com o Mundo Axiomático Formal.

A última dissertação que tem como título “Metodologia da resolução de problemas e a construção do conceito de limite em uma turma do 3º ano do ensino médio” de Pereira (2015) busca investigar se a metodologia de Resolução de Problemas contribui para a compreensão do conceito de limite de funções reais por alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Para a realização da pesquisa a autora utilizou a metodologia de pesquisa qualitativa e a metodologia de ensino de Resolução de Problemas proposta por Onuchi e Allevato, juntamente com os pressupostos teóricos de Tall e Vinner, que tratam das teorias de “imagem de conceito” e “definição de conceito” para aquisição de conhecimento. A partir de encontros, dez no total com o tempo de 50 minutos cada um, a pesquisadora desenvolveu junto com os alunos: noções de limite, relação entre os símbolos épsilon e delta, conceito de limites laterais e limites infinitos. Os resultados mostram que os alunos evoluíram no conhecimento sobre limite, apropriando-se de conceitos que são ensinados somente no Ensino Superior.

As primeiras análises indicam que ainda são ínfimas as pesquisas que tratam do conceito formal de limite. Outro dado importante diz respeito aos anos de publicação que abrangem o período de 2013 a 2021, onde vem revelar uma maior preocupação com o ensino desse conceito, isso pode ser justificado pelo aumento da reprovação do componente de Cálculo Diferencial e Integral nas Universidades. De acordo com estudos realizados (ROSA et al, 2019; SANTOS et al, 2020) os estudantes vêm apresentando um desempenho insatisfatório na disciplina de Cálculo, apresentando uma elevada reprovação e médias muito baixas. Em relação aos Programas de Pós-Graduação onde foram desenvolvidas as pesquisas, percebemos que estes estão localizados em diferentes regiões do Brasil: Norte (2), Nordeste (2), Centro Oeste (1), Sudeste (3) e Sul (2), com uma maior concentração nas duas regiões consideradas mais desenvolvidas, Sul e Sudeste. Isso nos leva a problematizar sobre a necessidade de estudos voltados para a definição formal de Limite em nossa região, pois trata de um conhecimento essencial para a compreensão de Cálculo.

1.2 Problema

Diante do contexto apresentado, e considerando a importância de uma maior discussão, sobre a definição formal de limite, elencamos a seguinte questão de pesquisa: De que forma os livros didáticos, indicados da Ementa de Cálculo 1, do curso Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, Campus Caruaru, apresenta as praxeologias matemáticas, sobre o ponto de vista de uma construção conceitual, da definição formal de limite? A fim de responder essa questão enumeramos alguns objetivos, que são apresentados no próximo tópico.

1.2 Objetivos

Objetivo Geral

- Analisar os livros didáticos, que fazem parte da ementa do curso Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, Campus Caruaru, sobre o ponto de vista das praxeologias matemáticas na definição formal de limite convergentes quando x tende a um ponto p.

Objetivos Específicos

- Identificar as praxeologias matemáticas adotadas para o ensino formal de limites, nos livros indicados na ementa do curso de Licenciatura em matemática, da Universidade Federal de Pernambuco;
- Caracterizar as organizações matemáticas presentes nos livros didáticos da bibliografia básica, do curso de Licenciatura em matemática da Universidade Federal de Pernambuco, sobre o ensino formal de limite;
- Analisar as organizações matemáticas, que se distanciam e se aproximam, sobre a definição formal de limite, presentes nos livros didáticos.

1.4 Estrutura da Pesquisa

Nossa pesquisa está dividida em quartos capítulos. O primeiro capítulo corresponde a introdução. Neste apresentamos nosso trabalho, destacamos alguns elementos que justificam essa escolha, algumas pesquisas que foram realizadas sobre o conceito de limite, o problema de pesquisa, os objetivos (geral e específicos), e a estrutura da pesquisa.

No segundo capítulo discutimos sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), ressaltando a Transposição Didática (TD) como fundamento para a TAD, e apontando as praxeologias como importante ferramenta da TAD.

O terceiro capítulo apresentamos o conceito de Limite, e também algumas reflexões acerca das dificuldades presentes no ensino e aprendizagem da definição formal de Limite. O quarto capítulo diz respeito aos caminhos traçados na/para a referida pesquisa, através dos procedimentos metodológicos. Nesse capítulo também apresentamos as análises das praxeologias, sobre a definição formal de Limite, e verificamos as praxeologias matemáticas, sobre o ponto de vista de uma construção conceitual, da definição formal de limite.

2. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), teorizada por Yves Chevallard (1992), apresenta-se como uma importante teoria para a Didática da Matemática, já que "além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas" (Almouloud, 2007, p.111).

Para Verbisck (2019) "A TAD surge com o objetivo de oportunizar ao pesquisador o estudo da atividade matemática, uma vez que com suas ferramentas nos permite compreender(...) aspectos do processo de ensino e aprendizagem do saber".

Chevallard (1999) aponta que um dos maiores princípios da TAD é a compreensão que toda atividade humana, é explicada, inteligível justificada, contabilizada, em algum tipo de raciocínio. No que tange os elementos introdutórios da teorização da TAD temos: os conceitos iniciais de objetos, pessoas, instituições, relações de pessoas com objeto, e também relação da instituição com o objeto.

O conceito de objeto é o que fundamenta a TAD. Assim, a compreensão de conhecimento na TAD está intrinsicamente relacionada com o conhecimento de um objeto. Segundo Araújo (2009, p. 33-34) um indivíduo só passa a conhecer um objeto quando "esse objeto passa a existir para esse indivíduo, isto é, conhecer um objeto O significa ter uma relação pessoal com ele". Isso implica dizer que esse objeto existe apenas para a pessoa que o conhece.

De acordo com essa teoria, os objetos matemáticos não existem em si mesmos, mas são elementos que surgem através de sistemas de práticas que são adotadas pelas instituições. Trata-se de uma teoria que estuda o homem em sua relação com os saberes matemáticos, isso significa que a atividade e o estudo da matemática, fazem parte do conjunto das ações humanas, que são desenvolvidas nas instituições sociais (Batista, 2019).

Assim, podemos dizer, que todo saber é saber de alguma instituição (Chevallard ,1991), sendo que cada saber sofre transformações/adaptações de acordo com cada instituição em que se encontra. Esse processo de mudanças é denominado de transposição didática. Para compreendermos melhor sobre a TAD, é importante refletir/discutir sobre a Transposição Didática (TD).

2.1 A Transposição Didática (TD) como Fundamento da Teoria Antropológicado Didático (TAD)

É a partir dos estudos de Michel Verret, em 1975, que o conceito de transposição didática, é introduzido no meio acadêmico, sendo desenvolvido, em seguida por Chevallard (Carvalho, 2022).

A transposição didática “refere-se às transformações que sofrem as teorias dos matemáticos quando se tornam saberes escolares, em primeiro lugar nas propostas curriculares, depois nos livros didáticos e em sala de aula” (Almouloud, 2011).

A Transposição Didática (TD) depois de ser apresentada aos pesquisadores, passou a adentrar em vários países, sendo que os primeiros interessados foram os países francófonos, e aliada a ecologia dos saberes, e o estudo de práticas institucionais constituem a Teoria Antropológica do Didático que foi elaborada por Chevallard e colaboradores.

A TD passou a integrar a TAD, depois de mais de 20 anos contribuindo para os estudos em Didática da Matemática. As primeiras formulações da antropologia didática partem de investigações sobre os saberes e instituições (Almeida, 2016). Os saberes surgem das práticas sociais, e levam em consideração um certo domínio de realidade, porém, é importante destacar que o desenvolvimento desse saber está diretamente relacionado a organização das instituições.

Para entendermos melhor a TD é importante em primeiro lugar compreender que os saberes ensinados na escola, são constituídos fora dela, e que a transposição desses saberes acontece mediante uma necessidade social da educação e de sua divulgação. Em segundo lugar é preciso entender que não se trata de uma prática individual do professor, é um processo, que implica em um movimento que conduz ao saber.

A construção do saber se fundamenta em uma ou mais instituições, isso quer dizer que cada saber é saber de uma instituição, e que através da TD esses saberes são passados de uma instituição para outra. Porém é preciso compreender que o fato de o saber ter sido passado de uma instituição a outra, não significa que esse saber deixou de existir na instituição de origem.

Outra questão importante para destacarmos sobre a existência do saber em uma instituição é que este saber para poder existir precisa estar subordinado a algumas exigências, que irão promover transformações necessárias para que possa permanecer na instituição.

Nesse sentido, o trabalho fecundo realizado pelos agentes da noosfera, não é um trabalho como diz Gascón e Bosch (2007) de mera transferência, adaptação ou simplificação, trata-se de um trabalho que requer engenhosidade.

A noosfera na compreensão de Chevallard (1991) é uma instituição oculta, não percebível, que abrangem coletivos de pessoas (professores, pedagogos, técnicos do governo) que são responsáveis pela transformação dos saberes científicos em saberes a ensinar. Nesse sentido, a noosfera tem o trabalho de definir programas, currículos, manuais e livros didáticos, levando em conta a produção científica, e as demandas da sociedade e do sistema de ensino.

Chevallard (1991) enfatiza que os técnicos do governo são os profissionais que tem a incumbência de organizar os saberes que precisam ser ensinados na escola. Esses agentes públicos, para Bessa de Menezes(2004), são os profissionais responsáveis por gerir o ensino, juntamente com os professores, pedagogos, etc. Assim, a noosfera, é entendida como um centro operacional do processo de transposição de saberes de uma instituição para outra, sendo responsável por aprovar os "saberes científicos a serem expostos ao trabalho externo e visível da Transposição Didática" (Barbosa, 2017, p.39).

Os elementos que fazem parte de um dado saber, só serão passíveis de serem ensinados, se tiverem passados por determinadas deformações, que os tornarão apropriados para serem ensinados. Nesse sentido, é importante refletir sobre a existência de diferentes instituições que elaboram distintas atividades matemáticas, em que cada atividade matemática apresenta discursos diversos sobre a própria matemática (Almeida, 2016).

Quando um pesquisador produz o saber, ele sofre pressões internas e externas para apresentar este saber a sociedade e a comunidade científica, pois esse saber é compreendido como uma construção histórica e social, e não como um saber que deve ser isolado e de posse apenas de quem o produziu. " O pesquisador, no mundo acadêmico/científico, sofre pressões internas e externas (...) as pressões internas aparecem quando a própria comunidade científica e exige que tais saberes sejam comunicados, pois, a partir deles, novos saberes serão produzidos" (Bessa de Menezes, 2010, p.26).

As pressões externas se referem a obrigação de apresentar os saberes à sociedade. O saber para ser ensinado precisa adquirir uma roupagem didática, para serem ensinados, visto que a comunidade científica e a escola têm objetivos diferentes (Barbosa, 2017).

É importante salientarmos que os saberes presentes no interior do sistema didático passam também por adequações pelos professores. Essa relação entre o professor e o saber, influencia a nova produção de saberes, que por questão da necessidade social da educação, do seu desenvolvimento e de sua difusão, precisam ser transferidos de uma instituição para outra.

Para Brito Menezes (2006) a relação que existem entre o funcionamento didático do saber e o funcionamento científico é o que explica a existência da transposição didática. Esses saberes se inter-relacionam, mas atuam de formas diversas, isso acontece porque o saber que será apreendido pelo aluno, precisa ser diferente daquele saber que é elaborado na comunidade científica, já que os objetivos a serem alcançados pelas comunidades científicas e escolares são diferentes.

Depois que a escola sistematiza o saber científico, por meio de uma didatização, ou seja, se coloca uma roupagem didática, esse saber tornasse comunicável e apto para ser ensinado aos alunos (Almeida, 2016).

Chevallard (1991) chama a atenção para a perda que o saber científico sofre, em relação a sua origem, no processo de TD. Por isso ele alerta que é preciso que a noosfera realize um trabalho cuidadoso com o conhecimento que será transposto, para que este saber não venha a perder sua própria epistemologia, em virtude das deformações e supressões em que passa nesse processo de transformações. “A aplicação de uma teoria deslocada de seu território original torna-se estéril, perde seu significado, obscurece sua validade e confunde a solução do problema estudado naquele momento” (Pais, 2008).

Desse modo, é importante que a distância entre o saber sábio e o saber escolar seja preservado, sem que tal separação venha provocar erros conceituais ao objeto de saber (Pereira et al, 2016).

Barbosa (2017) pontua que enquanto a transposição didática externa está relacionada com a transformação do saber científico, ao saber a ensinar, a transposição didática interna ocorre na introdução formal dos novos saberes no interior do sistema de ensino.

A Transposição Didática Interna é compreendida como a etapa final da transformação que passa o saber científico, “acontece intramuros da sala de aula, cujos parceiros envolvidos são, a rigor, professor e aluno, e que tem no professor o elemento humano responsável por tal transposição” (Bessa de Menezes, 2010, p.31). A TAD, e mais especificamente a noção de praxeologia, é o resultado da ampliação dos estudos referentes a transposição didática, que estão relacionados a compreensão dos diferentes objetos de saberes a ensinar, que acontecem no interior de uma dada instituição. Barbosa (2017), exemplifica as instituições como sendo o tempo de vida, a família, a sala de aula, o livro didático. No tocante dessa pesquisa, a instituição investigada é o livro didático, e o objeto matemático enfocado é o conceito formal de limite.

2.2 As Praxeologias como importante ferramenta da TAD

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estabelece a atividade matemática, em um conjunto que estão relacionadas as atividades humanas e as instituições sociais (Chevallard, 1999). Segundo o princípio que fundamenta a TAD as atividades humanas, que são realizáveis, podem ser descritas e analisadas através de um modelo único, denominado de praxeologia. Sobre essa questão Chevallard (2018, p.34) aponta que “a noção de praxeologia é o coração da TAD. Essa noção generaliza diferentes noções culturais comuns - a de saber e de saber-fazer”, ou seja, ela caracteriza toda estrutura de conhecimento possível.

A TAD tem como fundamento também a antropologia cognitiva ou antropologia do conhecimento, esta busca articular as noções, de forma a garantir a unificação de muitos fenômenos didáticos, partindo da premissa de que toda atividade humana pode ser caracterizada a partir de uma praxeologia. A praxeologia, é constituída de um modelo, denominado de organização praxeológica ou quarteto praxeológico, e é representado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

As praxeologias estão relacionadas a um saber matemático, e podem ser de dois tipos: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas (OM) estão relacionadas ao estudo do objeto matemático, que no caso dessa pesquisa seria o conceito formal de limite, e as organizações didáticas (OD) estão associadas a forma que será realizado esse estudo.

Para compreendermos a TAD é preciso nos apropriarmos da noção de praxeologia. A praxeologia é constituída por noções chaves de tipos de tarefas (T), que precisam ser realizadas, e para isso é necessário o desenvolvimento de uma técnica (τ), que é explicada e confirmada por uma tecnologia (θ), e legitimada e esclarecida por uma teoria (Θ). Isso implica dizer que toda atividade realizada por um ser humano é descrita através de uma tarefa. Existem tarefas que são de um mesmo tipo, e outras de tipos diferentes. Para cada tarefa é preciso uma técnica específica. A tarefa a ser desenvolvida é definida por um verbo de ação e um complemento. As técnicas que são escolhidas para resolver cada tarefa podem ser ou não justificadas de forma explícita, isso vai depender do tipo da tarefa.

O modelo praxeológico que é proposto para desenvolver atividades de matemática ou de outras disciplinas está baseado no quarteto seguinte: tipo de tarefa T; técnicas utilizadas para resolver tarefa desse tipo t; tecnologias (θ) que irão justificar e assegurar a validade das técnicas e a teoria (Θ) que comprova a tecnologia.

Quando utilizamos o modelo teórico proposto pela TAD para explicar uma atividade de matemática, estamos considerando os aspectos matemáticos e didáticos, pois o professor ao planejar sua aula realiza escolhas matemáticas e didáticas (Bittar, 2017).

As organizações matemática e didática são importantes ferramentas para compreender as mudanças que ocorrem nos objetos dos saberes a ser ensinados no interior do sistema didático, ou em outra instituição, já que caracterizam os elementos que estão presentes na transposição didática interna. A Organização matemática (OM) e a Organização didática (OD) tem uma relação de interdependência no Sistema Didático, sendo que a OM se refere a toda atividade matemática que é produzida na sala de aula, através da OD. A OD se refere a própria atuação da OM, pois para uma OM ser colocada em prática é necessário que se tenha uma OD.

O quarteto praxeológico também pode contribuir para modelar a atividade do professor. A praxeologia didática ou organização didática (OD) é a ação de fazer escolhas didáticas para resolver uma tarefa didática.

Importante enfatizar que, ao desenvolver uma mesma organização matemática, em instituições distintas, utilizando organizações didáticas diferenciadas, teremos uma praxeologia matemática diferente. A partir de um conjunto de tarefas bem planejadas, podemos analisar a prática de uma instituição, através de diversas formas e sob diferentes perspectivas.

Sobre esse tema é importante salientar que o tipo de tarefa está relacionado diretamente a um objeto específico. “Assim, quando dizemos subir uma escada, estamos diante de um tipo de tarefa. Mas, se dizemos apenas subir, não haveria tarefa” (Almeida, 2016, p. 95). Do mesmo modo temos uma tarefa quando falamos calcular o valor de uma função no ponto, mas quando usamos apenas a expressão calcular, segundo Chevallard (1999) se trata apenas de um gênero de tarefa, assim como os verbos decompor, somar, que de forma isolada não explicam o conteúdo que irá ser estudado (Silva, 2005).

A organização didática está relacionada com o tipo de tarefa e um número de técnicas que são reconhecidas, nas instituições que a engendraram. No entanto, Almeida (2016, p.96) aponta que “os alunos podem ter acesso a técnicas alternativas que não se encontram à disposição nessa mesma instituição. Para o autor, a utilização dessas técnicas, podem causar rupturas e renegociações.

Sobre o uso das técnicas institucionais é importante enfatizar que muitas dessas técnicas são constituídas sem uma problematização, isso acaba resultando em apenas uma prática rotineira de atividades. Para Barbosa (2017, p. 46) “uma técnica (T) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas t ∈ T”. Essa praxeologia que se estabelece pela relação entre tarefa T e técnica τ, foi nomeada por Chevallard (1999) de bloco prático-técnico que diz respeito ao desenvolvimento de uma tarefa, mediante a utilização de determinadas técnicas.

Ainda sobre as técnicas utilizadas é preciso frisar que nem sempre a técnica usada será satisfatória para a realização de todas as tarefas, pois o que é possível resolver com a técnica em uma determinada tarefa, pode ser ineficiente para outra. Dessa forma essas atividades que não foram contempladas, vão requerer a aplicação de outras técnicas. Podemos inferir que no desenvolvimento de uma praxeologia é preciso considerar a existências de técnicas superiores no que diz respeito a resolução de várias tarefas.

Com relação a vida na instituição, podemos afirmar que existem uma correlação das condições e restrições na elaboração e no uso das tarefas e técnicas na instituição. Para Chevallard (1999) uma técnica para existir em uma instituição precisa ser compreensível, legível e justificada, e essa necessidade ecológica provoca o surgimento de um discurso explicativo e esclarecedor das tarefas e técnicas, que o autor denomina de tecnologia da técnica.

A definição da tecnologia está firmada em um discurso coerente sobre a técnica, e busca primeiramente justificar a técnica de forma sensata. A função da técnica é fazer com que a tarefa possa ser concluída, e a tecnologia tem um papel muito importante nesse sentido, pois descreve e justifica a técnica, para que a tarefa possa ser resolvida de fato com precisão.

Outra função da tecnologia “consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica t isto é, em expor por que ela funciona bem” (Barbosa, 2017, p.47). Ainda segundo Barbosa (2017) a matemática nessa lógica, tem a prevalência da função de justificação, através da cobrança da demonstração, sobre a execução da explicação.

É importante salientar que independentemente do tipo de tarefa, a técnica a ser utilizada apresenta sinais de tecnologia. Desse modo pode ocorrer que alguns elementos tecnológicos estejam incorporados à técnica. Percebemos a necessidade de justificação que tem a tecnologia, a qual é denominada de teoria da técnica. "A teoria (Ɵ) tem como objetivo justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico” (Araújo, 2019, p.38).

Chevallard (2007) adverti que em cada instituição existe uma técnica que foi estabelecida, e por isso, em tese, é a única técnica aceita. Essa técnica considerada canônica na instituição pode ser transformada pela tecnologia, e se tornar mais eficaz e ao mesmo tempo mais ampla (Almeida, 2016).

A função de produção de técnicas é a terceira atribuição da tecnologia. Nesse contexto ocorre “o fenômeno de subutilização de tecnologias disponíveis, tanto do ponto de vista da explicação como da produção” (Barbosa, 2017, p.47).

A relação entre a teoria e a tecnologia é similar ao da tecnologia e da técnica, pois a função da teoria é de justificar e esclarecer a tecnologia. Porém, nesse cenário o diferencial está no nível, pois segundo Chevallard (1999) passa ao nível superior: justificação, explicação e produção.

Almeida (2016) chama a atenção para o fato da excessiva abstração na apresentação da teoria pelos professores e em sua organização presente nos livros didáticos. O autor atribui essa situação a ausência de clareza nos caminhos percorridos para tornar clara a função de justificar e esclarecer da teoria.

Portanto, é importante que os professores tenham clareza quanto aos caminhos que precisam trilhar, para que os alunos possam compreender os conceitos matemáticos. Daí a necessidade de consultar e analisar a forma que os conceitos vêm sendo apresentados nos livros didáticos.

O conhecimento matemático, de acordo com Bosch e Gascón (2007) não é algo elaborado e certo, porém pode ser caracterizado a partir da praxeologia. É importante observar que as praxeologias matemáticas são constituídas com o tempo, e se desenvolvem de forma contínua. Com o envelhecimento das praxeologias, os seus elementos teóricos e tecnológicos não permanecem claros, o que acarreta o aparecimento de novas tecnologias, que passam a considerar as técnicas anteriores ultrapassadas (Chevallard, 1991).

Sobre as praxeologias é importante destacar que elas estão em constante desenvolvimento “ou seja, as praxeologias matemáticas decorrem de atividades variadas e contínuas, e, nessa complexidade, elas precisam ser modelizadas” (Almeida, 2016, p.108).

A OD é compreendida como um processo de estudo, desenvolvido a partir da introdução da OM, sendo esta entendida como uma praxeologia local e relativamente completa. As praxeologias locais se referem ao resultado da união das praxeologias pontuais (Ti, ti, θ, Θ), que são centradas em volta de uma determinada tecnologia (θ), justificada por uma mesma teoria (Θ) (Santos e Bessa de Menezes, 2015).

Percebemos que a relação existente entre a OM e a OD se configura em uma relação dialética, pois a elaboração da OM é viabilizada pela OD, através das próprias características existentes na OD, e do mesmo modo, a partir das características que constituem as OM o professor e/ou pesquisador pode organizar o seu estudo (organizações didáticas).

No processo de estudo o professor direciona a ação didática, tendo como objetivo a compreensão dos estudantes sobre determinada OM. Nesse sentido existe uma participação tanto dos professores na condução didática, quanto dos alunos no processo para aquisição dos conhecimentos matemáticos (Almeida, 2016).

Sobre os seis momentos de estudo ou didáticos da OD temos: o encontro com a OM, a exploração do tipo de tarefa, a formação do ambiente tecnológico-teórico, o trabalho com a técnica, a institucionalização e a avaliação (Chevallard, 1999).

O primeiro momento, diz respeito ao encontro com a OM, isto é o momento em que o estudante tem o primeiro encontro com o tipo de tarefa, Chevallard (1999) afirma que este encontro pode vir a acontecer em outros momentos, não se trata de um momento único, pois pode ocorrer a necessidade de que esse tipo de tarefa seja novamente revisitado, podendo ser compreendido como um reencontro. Para Almeida (2016, p.111) "essa situação pode ocorrer em função do entorno matemático e didático, ambos produzidos pelos atores".

É importante discutir sobre a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica, segundo momento de estudo, e refletir sobre o lugar mais apropriado para explorar o tipo de tarefa proposto, pois este seria entendido como o operador chave da formação dos tipos de tarefas, conforme organização específica. Outro ponto importante a destacar diz respeito a questão de examinar, na organização da técnica, se o tipo de tarefa se inclui no rol de tarefas problemáticas, pois essa organização é entendida como o coração do trabalho didático (Barbosa, 2017).

O momento de elaboração do ambiente tecnológico-teórico, o terceiro momento de estudo didático, refere-se à técnica e ao tipo de tarefa que está sendo colocado pela OM. É preciso mencionar que todos os outros momentos de estudo estão diretamente relacionados com esse terceiro momento.

O trabalho da técnica, que é considerado o quarto momento de estudo, é entendido como o trabalho da OM. É um momento em que a técnica pode ser aperfeiçoada, através do auxílio da tecnologia, ou até mesmo da teoria, a tornando mais efetiva.

A institucionalização, é o quinto momento de estudo, e representa o momento em que ocorre a distinção dos elementos que fizeram parte da OM, dos elementos que foram sendo incluídos ao seu equipamento praxeológico. Desse modo seu propósito é integrar os elementos que realmente tem relação com a OM. Isso implica dizer que nos momentos anteriores de estudo alguns elementos podem ser deixados de lado, e outros possam ser acrescentados, mediante a elucidação realizada pelo professor ou pelo aluno, incluindo dessa forma esses elementos na cultura da instituição, ou da sala de aula.

A avaliação corresponde ao sexto momento e está associada ao momento de institucionalização. É possível que esse momento seja conhecido pela avaliação das relações institucionais e pelas relações pessoais. Para Barbosa (2017, p.53) "o momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é aquela na qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus aluno

No próximo capítulo iremos discutir sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo e o conceito formal de Limite, apresentado nos livros de Cálculo, e na literatura da área, e também discutir com base em algumas pesquisas as principais dificuldades percebidas para a compreensão da definição de limite.

3. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE

O Cálculo apresentado no ensino superior é fundamentalmente diferente da matemática que estudamos no ensino médio, a qual chamamos de Pré-Cálculo. O Pré- Cálculo é formado pelas áreas da Álgebra, Geometria, Aritmética e Trigonometria. Já o Cálculo é formado pelas áreas do Pré-Cálculo, Processos de Limites, Derivadas e Integrais.

O cálculo tem como objetivo principal estudar o movimento e as variações. É uma ferramenta indispensável em quase toda área das ciências pura e aplicadas – em Física, Química, Biologia, Astronomia, Engenharia, etc. Também possui muitas aplicações em outras áreas da matemática, especialmente na Geometria (Simmons,1987).

O Cálculo consiste em compreender as variações das grandezas e modelá-las por meio do processo de Limites. Isto significa que quando estamos analisando um objeto que se move a uma velocidade constante podemos modelá-lo e resolvê-lo com as técnicas da matemática do Pré-Cálculo, todavia, para analisar um objeto que se movimenta com uma dada aceleração ou variação de suas grandezas, é preciso utilizar as ferramentas do Cálculo.

Quando estudamos a área de um retângulo podemos examinar usando as técnicas do Pré-Cálculo, mas quando estamos diante de uma área sob uma curva, é necessário o uso do Cálculo. Quando estamos calculando uma soma com um número finito de parcelas, utilizamos as técnicas do Pré-Cálculo, no entanto, para somar infinitas parcelas, apenas utilizando as ferramentas sofisticadas do Cálculo (Larson et al, 2006).

Perceba que cada uma dessas situações envolvem a mesma estratégia geral ou modelagem padrão. Quando nos deparamos com questões de área de Figuras Planas, resolvemos por meios da Geometria Plana, que é uma área do Pré-Cálculo, porém, quando estamos diante de uma área irrregular, não contemplada pelas Figuras Planas, usamos a geometria Plana para resolver, porém, reformulada pela noção de Limite, que corresponde ao cálculo (Leithold, 1994). De outro modo podemos afirmar que o Cálculo é uma ferramenta valiosa para resolver problemas não alcançados pelo Pré-Cálculo, por conter em seu bojo o conceito de Limite, que é um mecanismo suficiente para resolver problemas com grandezas variáveis e dinâmicas.

Alguns alunos tentam apreender o Cálculo como se fosse simplesmente uma coleção de novas fórmulas, no entanto é preciso mostrar a esses estudantes que as fórmulas e técnicas do Pré-Cálculo são as mesmas ferramentas usadas no Cálculo, sendo apenas reformuladas pela noção de Limites (Guidorizzi, 2011).

O desenvolvimento do Cálculo no século XVII por Newton e Leibniz, forneceu aos cientistas o primeiro entendimento real sobre o que significa uma taxa de variação instantânea, tal como a velocidade ou a aceleração. Uma vez entendida conceitualmente essa ideia, seguiram-se métodos computacionais eficientes, e a ciência deu um salto quântico para a frente. A pedra fundamental sobre a qual se apoia a ideia de taxa de variação é o conceito de Limite (Larson et al, 2006). Uma noção tão importante que atualmente todos os demais conceitos do Cálculo se baseiam nela, ou seja, o conceito de Limite é o alicerce sobre o qual se fundamentam todos os demais conceitos do Cálculo.

Nesse sentido, o ensino e aprendizagem de limite vem sendo discutido por pesquisadores (Amorim, 2011; Soares, 2018; Miranda, 2017) com o intuito de enfatizar a importância desse conceito para uma melhor compreensão do cálculo. Esse conceito está presente na ementa da disciplina de Cálculo I, que é ofertada comumente nos cursos de Matemática (Licenciatura e Bacharelado), Engenharias, Economia, Física, Química, entre outras, nas diversas Instituições superiores do país. A seguir, apresentamos uma breve discussão sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo.

3.1 O ensino e aprendizagem do Cálculo

Muito se tem discutido sobre o ensino e aprendizagem do cálculo, e as dificuldades que os estudantes do ensino superior vêm apresentando na/para compreensão dessa disciplina. Pesquisas como as de Barufi (1999), já revelavam as dificuldades dos estudantes, ao se depararem com o cálculo, na Universidade. A pesquisadora destacou que muitas dessas dificuldades estavam relacionadas a ausência de algumas técnicas operatórias, a exemplo, a linguagem lógica- formal (Barufi, 1999). A discussão, delineada na Tese de Barufi, enfatizou o papel fundamental do professor, para o ensino do Cálculo, tendo como importante aliado o computador.

A questão da falta de compreensão e assimilação dos conceitos mais rigorosos da matemática, como é o caso do Cálculo Diferencial e Integral, também foi estudado por Faria(2019). “Como observado, cada vez mais os alunos chegam aos cursos superiores com um conhecimento matemático superficial. Com dificuldade em realizar operações simples como, por exemplo, as operações com frações, resolução de equações e inequações, sem contar com a trigonometria e a geometria espacial” (p. 18).

Para Rezende (2003), o insucesso que vem se configurando, nos cursos superiores, no que diz respeito o ensino de cálculo, está atrelado a própria história desse ensino. “Creio, no entanto, que, se investigarmos a origem histórica de tal “fracasso”, verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo” (p. 1)

Pesquisas vem apontando os baixos índices de aprovação e evasão na disciplina de cálculo (Nascimento, 2018; Santos et al, 2019; Barbosa et al, 2021).

Para Barbosa et al (2021) as causas dos elevados índices de reprovações, e de desistência dos alunos, em cálculo I, no curso de Engenharia, estão relacionados a defasagem de saberes matemáticos dos estudantes, no ensino médio; a enorme dificuldade em entender os conteúdos de Cálculo; e a uma despreparação dos professores para ministrar essa disciplina.

Diante disso, os autores explicitam a necessidade de ser criado programas que possam acompanhar os estudantes, uma reorganização curricular, a criação de reforço, enfatizando também a inclusão de uma disciplina de pré-cálculo, e a introdução de monitorias, que possam vir ajudar a sanar as dificuldades dos estudantes, no que tange as deficiências técnicas relacionadas aos saberes matemáticos básicos.

Rezende (2003) aponta que as dificuldades de aprendizagem presentes no ensino superior, quanto a disciplina de Cálculo encontra-se no ensino básico. Para o autor, evitar trabalhar as ideias e problemas construtores do cálculo no ensino básico, constitui no maior obstáculo ao ensino do cálculo. “É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O Cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático” (p.403). Assim, o autor argumenta que é preciso rediscutir o papel do ensino do cálculo na Universidade, e destaca que o êxito desse ensino, depende da preparação das ideias básicas do cálculo no ensino básico.

É notório, que a problemática do ensino do Cálculo Diferencial e Integral, se encontra presente em pesquisas que vem sendo desenvolvidas no campo da Educação Matemática. Pesquisas estas que tem discutido questões relacionadas as dificuldades do ensino da disciplina de Cálculo, no ensino superior. Soares (2018) salienta que o aumento de estudos sobre a problemática do ensino do Cálculo Diferencial e Integral, justifica-se pela alta complexidade dos tópicos matemáticos abordados ao trabalhar essa disciplina. O autor ainda ressalta que problemas associados aos altos índices de reprovação, o despreparo dos professores, com este componente curricular no âmbito acadêmico, e a necessidade de uma boa apropriação da Matemática do ensino básico, são questões que precisam ser melhores investigadas, a fim contribuir para uma melhoria dos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura em Matemática, à organização dos conteúdos curriculares, nos cursos de Licenciaturas em Matemática, precisam estar de acordo com as seguintes orientações: partir das representações que os alunos possuem dos conceitos matemáticos, assim como, dos processos escolares para organizar o desenvolvimento das abordagens durante o curso, a fim de construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno(Brasil, 2001).

Assim, percebemos que o ensino e aprendizagem de cálculo, na Licenciatura em Matemática, que é o foco de nosso estudo, precisa levar em consideração essa organização curricular, e isso significa que os conteúdos precisam ser apresentados de forma ampla, através de uma abordagem que permita estabelecer relações, no que diz respeito aos conteúdos, aplicações e a prática docente(Soares,2018),destacando que é preciso considerar, no processo de ensino e aprendizagem, as representações dos conceitos matemáticos, que os estudantes apresentam.

3.2 Conceituando Limite

O conceito de limite, é considerado uma noção particularmente difícil, e ocupa um lugar central em todo estudo da Análise Matemática, como base da teoria da aproximação, da Continuidade e do Cálculo Diferencial e Integral (Igliori, 2008).

Historicamente, a definição mais precisa de limite só foi desenvolvida posteriormente ao desenvolvimento das noções iniciais de diferenciação e integração.

As ideias básicas contidas nos cursos de Cálculo, tais como Derivada e Integral, têm suas gêneses em conceitos e problemas geométricos que a Matemática Grega colocava entre as suas principais preocupações. Dentre esses destacam-se o traçado de retas tangentes e a quadratura de figuras. Muito embora essas construções geométricas estejam relacionadas com ideias aparentemente simples, o seu entendimento perfeito somente se tornou possível com o advento do Cálculo Diferencial e Integral, cuja criação remota ao século XVII associada às pessoas de Fermat, Newton, Leibniz, entre outros, que começaram a associar tais noções geométricas às de derivada e integral que, por sua vez, estão associadas ao conceito de limite. A ausência desse último foi exatamente o que impediu que os matemáticos gregos se antecipassem aos dos séculos XVII e subsequentes na criação do Cálculo.

A Quadratura da Parábola, efetuada por Arquimedes, é um exemplo típico de quanto os matemáticos da Grécia Antiga se aproximaram da criação do Cálculo. Muito embora os criadores do Cálculo tenham preenchido certas lacunas deixadas pelos gregos, havia ainda muitas deficiências, no que se refere ao formalismo e o rigor. Os conceitos estavam repletos de motivações geométricas e físicas, o que não é um coisa ruim, mas o rigor que se impunha na Matemática, principalmente a partir do século XVIII, exigia que os conceitos do Cálculo, baseados em interpretações geométricas, fossem devidamente aritmetizados. Isso foi feito por vários matemáticos entre os quais se destacam Cauchy, Riemann, Bolzano, Weierstrass, entre outros, que colocaram em bases firmes e rigorosas os conceitos de limite, continuidade, etc. (Corrêa,2008).

O conceito de limite passa a se estabelecer de forma definitiva , após a definição formalizada por Weierstrass, que sobrepujou a de Cauchy, por conseguir excluir aspectos considerados subjetivos. No entanto,os aspectos mais intuitivos do conceito de limite, permanecem sendo explorados (Santos, 2013).

O conceito de limite é um dos conceitos matemáticos que mais gera controvérsias e dificuldades. Este é o primeiro conceito a ser ensinado, nas disciplinas de cálculo, no ensino superior, e que norteia os demais conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral (Santos, 2013).

Igliori (2008) aponta que as dificuldades na aprendizagem do conceito de limite, veio se configurando na história, e tem sido objeto de estudo de trabalhos no campo da Educação Matemática. Cornu (1981 apud Igliori 2008) apresenta que a noção de limite foi historicamente sendo introduzida com a finalidade de resolver problemas geométricos (cálculo de áreas), problemas de soma e raio de convergência de séries, e problemas que tratam de diferenciação, e isso implicou em quatro grandes obstáculos epistemológicos: a não possibilidade de estabelecer ligação entre o geométrico e o numérico; a concepção de infinitamente grande e infinitamente pequeno; o aspecto metafísico do conceito de limite e a questão que diz respeito se o limite é atingido ou não.

Outra abordagem, no que se refere aos obstáculos epistemológicos, associados a definição de limite, foi investigado por Sierpinska (1985 apud Igliori, 2008). De acordo com essa autora, os entraves para a compreensão de limite, se deve a obstáculos gerados pelo o horror ao infinito; o que está relacionado a noção de função; os obstáculos geométricos, os obstáculos lógicos, e o obstáculo do símbolo.

Para Santos (2013) ao ensinar limite, é importante pensar na maneira que este conceito é apresentado, a linguagem que está sendo utilizada, os elementos que são enfatizados, e os que são ignorados, definição formal apresentada por Weierstrass, se está sendo explorado a noção intuitiva de limite, e os aspectos de natureza algébrica, que estão presentes nesse estudo. Outros aspectos que precisam ser considerados, no ensino de limite dizem respeito a forma que o professor ensina, e que apresenta o conceito de limite, o seu discurso, as tarefas que pede aos alunos, o livro que adota, etc.(Santos, 2013).

Em sua pesquisa, que tinha como objetivo suscitar reflexões sobre o conceito de limite, considerando as dificuldades de aprendizagem desse conceito, Santos (2013) constatou que a utilização da História da Matemática em sala de aula é quase nula, “(...)há um apagamento das vozes de atores importantes da História que contribuíram para o desenvolvimento da matemática” (p. 357). Segundo a autora, isso poderá contribuir para fortalecer a ideia de que a matemática nasceu pronta, e não existe erros na sua evolução, ou ainda que esta evolução aconteceu de forma natural e linear.Na sequência discutiremos um pouco sobre o conceito intuitivo de limite.

3.2.1 Conceito Intuitivo de Limite

Consideremos uma função f(x) definida para valores de x próximos de um ponto p sobre o eixo x, mas não necessariamente definida no próprio ponto p. Suponhamos que exista um número L com a propriedade de que f(x) fica cada vez mais próximo de L quando x se aproxima mais e mais de p. Nessas circunstâncias dizemos que L é o Limite de f(x) quando x tende a p e expressamos simbolicamente por:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Se não existe um número L com essa propriedade, dizemos que f(x) não tem Limite quando x tende a p, ou usamos a notação seguinte:

x≠L

$$\lim_{x \to p} f(x) \neq L$$

Vejamos um exemplo usando o conceito intuitivo de Limite, de acordo com Larson et al(2006).

Suponha que lhe seja pedido para analisar a função f dada por: f

(x)=$\frac{x^3-1}{x-1}$, x≠ 1. Quando x→1 ,

Podemos fazer x se aproximar tanto de 1 pela esquerda como pela direita.

X	0,75	09	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25
f(x)	2,313	2,710	2,970	2,997	?	3,003	3,030	3,310	3,813

Percebemos que quando x tende à 1 pela esquerda, f(x) se aproxima de 3 por valores inferiores à 3. Quando x tende à 1 pela direita, f(x) se aproxima de 3 por valores maiores que 3.

Isso nos mostra que quando x→ 1, f (x)→ 3; isto significa que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Então podemos dizer que: os limites laterais pela esquerda e pela direita quando existirem e forem iguais é uma condição necessária e suficiente para que o Limite de f(x) exista. Dizemos de forma genérica que:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Se e somente se seus Limites laterais existem e são iguais.

Vejamos abaixo algumas definições que nos auxiliam na compreensão sobre a Definição Formal de Limite.

3.2.2 Definições preliminares

Rodrigues, Meneghetti e Poffal (2016) traz algumas definições importantes para a compreensão do nosso objeto de estudo, vejamos:

3.2.2.1 Vizinhança de um número real

Denomina-se vizinhança de centro P e raio δ o intervalo aberto (p- δ, p +δ), onde δ>0.

Denotamos por:

V(p, δ)= (p-δ, p+ δ)={xϵR/ |x-p|<δ}

3.2.2.2 Vizinhança Perfurada

Trata-se de um intervalo (p-δ,p)U(p,p+δ). Ou seja, é a vizinhança de p quando p não está definido no intervalo.

Denotamos por:

V_p (p, δ)= (p-δ,p)U(p,p+δ)= {x-R/p-δ<x<p+δ,x≠p}

3.2.2.3 Ponto de acumulação

Um número p é dito ponto de acumulação de um conjunto C se, e somente se, para toda vizinhança perfurada V_p (p, δ) de centro p, existe pelo menos um ponto x≠p tal que xϵc e xϵV_p (p, δ).

Agora iremos apresentar a Definição Formal de Limite que é objeto do nosso estudo.

3.2.3 Definição Formal de Limite

Para Stewart et al(2022) a definição formal de limite consiste em:

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número p, exceto possivelmente no próprio p. Então dizemos que o limite de f(x) quando x tende a p é L, e escrevemos

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

Se para todo número Є>0 houver um número δ>0 tal que se 0<|x-a|<δ então |f(x) - L|<Є

3.2.4 Definição Formal de Limite de uma função f(x) convergente quando x tende para p.

Seja uma função f definida em um intervalo aberto que contém o ponto p, exceto possivelmente no próprio ponto p, e seja L um número real.

A afirmação

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

Significa que, para todo Є > 0 existe um δ > 0 tal que Se 0 < |x-p| < δ, então | f(x) – L |< Є.

A desigualdade o < | x-p| < δ é chamada tolerância δ (delta) ou vizinhança de p com raio delta, e |x – p| < δ implica em

- δ < x – p < δ, isto é, p –δ < x < p + δ

A desigualdade | f (x) – L | < Є é chamada tolerância Є (épsilon) ou vizinhança de f(x) com raio Є, e | f (x) – L | < Є implica em

- Є < f (x) – L < Є que equivale a L – Є< f(x) < L + Є.

Podemos reescrever a proposição acima do seguinte modo:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

Significa que, para todo Є > o, existe um δ > o tal que se x está no intervalo (p- δ,p + δ) e x ≠ p, então f (x) está no intervalo aberto (L - Є, L+ Є)

É importante ressaltar que o nosso interesse de estudo compreende apenas a definição formal de limites convergentes, quando x tende a um ponto p.

No próximo tópico discorreremos sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito formal de limite.

3.3 Dificuldades no ensino e aprendizagem da definição formal de Limite

A definição de limite é um elemento importante para o desenvolvimento de outros conceitos como Cálculo Diferencial e Integral. O conceito de limite, frequentemente, é o primeiro conteúdo visto pelos alunos nas disciplinas de Cálculo, e segundo Soares (2018, p.18) "deve-se a isso a necessidade do seu entendimento para a aprendizagem dos outros conceitos do Cálculo, como o da derivada, que é definida como um limite".

Ainda segundo o autor as dificuldades de aprendizagem no que tange a definição formal de limite, estão associadas a fatores de natureza epistemológica (a complexidade do conceito), e a processos mentais, que requerem um maior nível de abstração (Soares, 2018).

Os estudos realizados por Santos et al (2019) indicam que as maiores dificuldades dos estudantes na disciplina de cálculo do curso de Licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba- Campus Cajazeiras se encontram no ensino e aprendizagem de Limites e Continuidade e Integrais. Essa pesquisa sinaliza a problemática do alto índice de retenção da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I).

Uma questão que vem sendo colocada é sobre a grande dificuldade de ensinar e aprender limite (Amorim, 2011). Segundo Miranda (2017) para compreender o conceito de limite, é preciso entender o conceito de sistema cartesiano, função e gráfico de função, sua representação geométrica e suas propriedades. "A falta de entendimento desses conteúdos podem resultar em uma ilusão de compreensão e aprendizado sobre limites levando o aluno a acreditar que uma simples aplicação de técnica ou propriedade de limite é resultado de um aprendizado sólido" (Miranda, 2017, p.9).

É importante destacar que sendo o Cálculo uma disciplina considerada difícil, exige tanto dos alunos quanto do professor uma maior responsabilidade, dedicação e organização (Macêdo; Gregor, 2020). Ainda segundo os autores “a principal tarefa do professor é realizar uma transposição didática eficaz, ou seja, transformar o conhecimento científico em conhecimento escolar, passível de ser compreendido pelos alunos(...)” (Macêdo; Gregor, 2020, p.4).

Essa questão é muito delicada, visto que muitos são os desafios que os professores vêm enfrentando. Problemas como a falta de interesse dos alunos, a defasagem escolar, e as dificuldades no uso com as tecnologias digitais nas aulas (Macêdo; Gregor, 2020).

Alguns estudos vêm propondo alternativas metodológicas que possam vir a contribuir com o ensino e aprendizagem da definição formal de limite. Silva Neto (2006) destaca a necessidade de promover práticas que facilitem esse ensino e aprendizagem, através da introdução de mais aplicações nas notas de aulas, no uso adequado das novas tecnologias, na utilização de bibliografias complementares que envolva outras áreas do conhecimento. “Desta forma, estaremos formando um profissional com visão ampla do assunto, tanto da parte formal como da parte aplicativa, com capacidade de amenizar as dificuldades dos alunos de outras áreas na aprendizagem da matemática” (Silva Neto, 2006, p. 66). No tópico seguinte apresentaremos os procedimentos metodológicos e a análise das praxeologias, contidas nos livros didáticos, que foram adotadas para o ensino da definição formal de limite.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISES DAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS

A pesquisa pode ser compreendida como um processo formal e sistemático que visa descobrir respostas para questões a partir da aplicação de procedimentos científicos (Gil, 2008).

Minayo (2014) entende que o ato de pesquisar forma uma atitude e uma prática teórica de constante busca, e por esse motivo "tem a característica do acabado provisório e do inacabado permanente (p.47)".

Assim, para se ter uma pesquisa é necessário o preenchimento de três requisitos: a existência de uma pergunta, a elaboração de um conjunto de passos que possibilite responder à pergunta, e a indicação do grau de confiabilidade diante da resposta atingida (Luna, 2008).

Nesse sentido, a pesquisa é um processo investigativo, que tem como objetivo responder a um questionamento, e para isso é preciso a realização de procedimentos, que venham produzir informações, sendo estas decorrentes dos procedimentos gerados, e que resulta em um conhecimento.

A referida pesquisa tem como objeto de investigação a definição formal de limite a partir do olhar da TAD. Para apreendermos nosso objeto, realizamos inicialmente um levantamento bibliográfico, no Banco de Teses e Dissertações da Capes. A partir desse levantamento, e com base em leituras mais específicas sobre o tema, apresentamos uma discussão sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e o Ensino e aprendizagem do conceito formal de limite, apoiada nos estudos de Yves Chevallard (1999) e colaboradores, Almouloud e Farias (2018), Batista (2029), Araújo (2020), entre outros.

Essa pesquisa tem como fundamento teórico-metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD). A TAD estabelece a atividade matemática, aliada as atividades humanas e as instituições sociais (Chevallard, 1999). Sustenta-se no princípio de que as atividades humanas, consideradas realizáveis, podem ser descritas e analisadas a partir de um modelo praxeológico.

A pesquisa apresenta uma investigação sobre as praxeologias matemáticas presentes nos livros didáticos que tratam da definição formal de limite. Dessa forma optamos por analisar os livros que fazem parte da ementa do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Campus Caruaru.

Para realizarmos as análises dos livros, consideramos o modelo de análise de livros didáticos sob a ótica da TAD, discutido por Marilena Bittar (2017). O modelo elaborado pela autora compreende as seguintes etapas:

- Primeira etapa: escolha do material (livro) a ser analisado;
- Segunda etapa: a separação entre Curso e Atividades Propostas (divisão do material para análise);
- Terceira etapa: elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático;
- Quarta etapa: elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático;
- Quinta etapa: análise das organizações modeladas.

Segundo Bittar (2017, p. 369) "as 3ª e 4ª fases não precisam ser realizadas (e nem apresentadas) separadamente. E mais, o processo de análise é dinâmico, com diversas idas e vindas entre o material de estudo, o apoio teórico e os objetivos da pesquisa".

Para esse estudo, optamos em analisar as praxeologias matemáticas, nos livros, de acordo com o modelo proposto por Bittar (2017). Os livros selecionados para análise foram: Um curso de cálculo de Guidorizzi (2011); O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold (1994) e Cálculo de Stewart (2016).

De acordo com Severino (2002, p. 193) "a análise é um processo de tratamento do objeto (...), pelo qual este objeto é decomposto em suas partes constitutivas, tornando-se simples aquilo que era composto e complexo". Para que possamos analisar o nosso objeto é preciso determinar parâmetros.

O parâmetro a ser utilizado para analisar os livros didáticos são as organizações matemáticas presentes nos livros, que dizem respeito a definição formal de limite. Para isso iremos nos apoiar nos estudos realizados sobre a TAD, que tratam das praxeologias matemáticas ou organizações matemáticas (tarefas, técnicas, tecnologias e teoria) (Chevallard, 1990).

Abaixo, apresentamos a análise das praxeologias matemáticas contidas nos livros didáticos, sobre a definição formal de limite, de Cálculo Diferencial e Integral.

4.1 Análise das praxeologias matemáticas contidas nos livros didáticos sobre adefinição formal de limite do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

As praxeologias matemáticas ou organizações matemáticas, está relacionada a realidade matemática que podemos construir, a fim de ser desenvolvida em uma sala de aula (Chevallard, 1999). "Uma praxeologia matemática é construída no contexto das noções e dos conceitos relativos ao próprio corpo dos saberes matemáticos" (Batista, 2019, p. 35).

O professor/pesquisador precisa descrever as praxeologias matemáticas, que deverão ser estudadas, e para isso ele se baseia em livros didáticos, em programas, e documentos oficiais (Chevallard, 1998). Nesse processo cabe ao professor/pesquisador saber, por exemplo: se as tarefas podem ser reconhecidas; se as técnicas apresentadas para resolver as tarefas se encontram de forma nítidas e se são satisfatórias para resolver as tarefas; se existe espaço para o desenvolvimento de novas técnicas ou adaptações das já existentes; se as tecnologias presentes são suficientes para que se possa esclarecer/justificar as técnicas, e se as teorias estão bem explicadas, e tem condições de justificar as tecnologias (Batista, 2019).

A análise de livros didáticos é um importante instrumento para o ensino e aprendizagem da matemática, pois permiti aos professores/pesquisadores identificar e aprender as dificuldades e os obstáculos que podem ser gerados no ensino dos objetos matemáticos.

Segundo Bittar (2017, p. 365-366) "O Livro Didático é o principal material utilizado pelo professor no preparo de suas aulas, seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor".

Nesse sentido, nossa pesquisa buscou analisar os seguintes livros: Um curso de cálculo de Guidorizzi (2011); O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold (1994) e Cálculo de Stewart (2016). A escolha dos livros se justifica por serem estes que estão presentes na ementa do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

O objeto matemático a ser analisado é a definição formal de limite. Este que é considerado como um fundamento mais importante do Cálculo Diferencial e Integral. O conceito formal de limite é utilizado para organizar e justificar as definições modernas, em relação a continuidade de funções, de derivada, de integral, de convergência ou divergência de sequências e séries (Batista, 2019).

Ao analisar os livros, partimos dos seguintes questionamentos:

- De que forma a definição formal de limite foi apresentado nos livros didáticos?

- As tarefas e técnicas utilizadas pelos autores dos livros didáticos, contribuíram para a compreensão da definição formal de limite?
- Os objetos ostensivos e não ostensivos utilizados nos livros didáticos, auxiliaram satisfatoriamente para a construção conceitual da definição formal de limite?
- As tecnologias utilizadas, para esclarecer e justificar as técnicas, foram suficientes? E as teorias, estão bem explicadas, para que as tecnologias possam ser justificadas?

4.1.1 Parte Curso nos livros didáticos

Como vimos, a análise dos livros didáticos, a luz da TAD nos ajuda a compreender como está organizado as praxeologias matemáticas, no que diz respeito as tarefas e técnicas escolhidas, e a tecnologia e teoria utilizada, para fundamentar as técnicas. Dito isso, apresentaremos cada obra selecionada e posteriormente, partiremos para a análise das tarefas e técnicas utilizadas nos livros.

4.1.1.1 Livro 1- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz- Um curso de cálculo, volume 1, 2011.

O prefácio da obra explicita inicialmente que a construção do livro se fundamentou nos cursos de Cálculo ministrados aos alunos da Escola Politécnica da USP, do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Instituto de Ensino de Engenharia Paulista — IEEP.

Guidorizzi enfatiza que o curso foi desenvolvido de modo que os conceitos e teoremas, pudessem sempre que possível, vir acompanhados de uma motivação ou interpretação geométrica ou física. O autor destaca também que as demonstrações de alguns teoremas, foram postos no final da seção, ou em apêndice, para que dessa forma o leitor pudesse ter a opção de omiti-las, caso queira.

Outro ponto que o autor enfatiza, é sobre a quantidade de exemplos e exercícios, que para ele, está em uma quantidade suficiente para que o leitor possa entender a matéria.

No que tange a organização dos exercícios, Guidorizzi afirma que estão dispostos em ordem crescente de dificuldade, no entanto, salienta que alguns, por apresentarem maiores sutilezas, vão requerer um maior domínio do assunto. Então o autor já alerta que é preciso manter o foco, seguir em frente, e depois retornar nas questões que não conseguiram resolver, quando acharem que já estão preparados para isso.

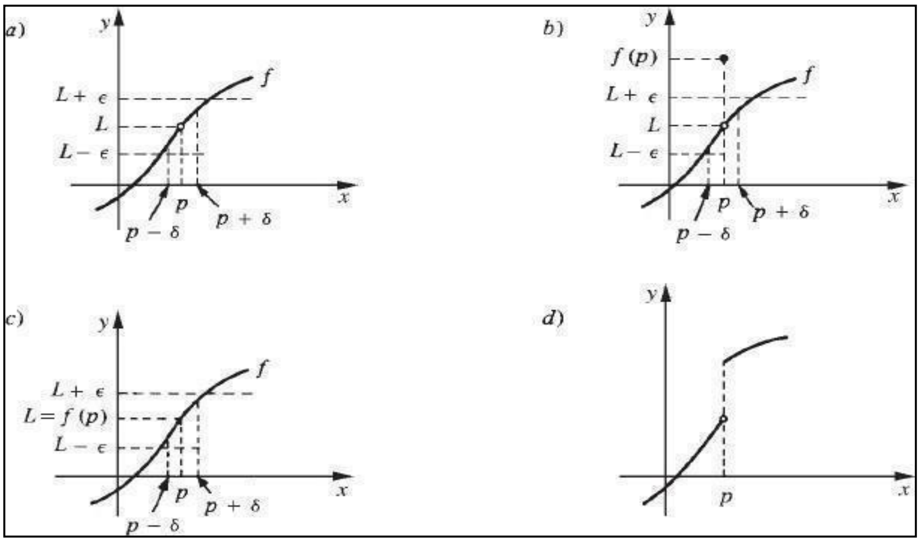
É importante destacar que o autor se coloca à disposição, para qualquer elucidação ou troca de ideias, que podem acontecer tanto através de email pessoal, ou por carta, sobre os cuidados da editora.

A definição formal de limite

A definição formal de limite é apresentado no capítulo 3, denominado Limite e continuidade, e no subtópico 3.3, que tem como título "Definição de Limite". Nesse subtópico, inicialmente Guidorizzi traz uma explanação sobre a representação gráfica da definição de limite.

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f (veja o final da Seção 3.1).

Figura 1- Situações de limite



Fonte: Guidorizzi (2011, p. 71)

O autor traz a representação gráfica do comportamento das funções que satisfazem a definição formal de limites (a, b e c), no item (d) é exibido como se comporta uma função cuja definição não é satisfeita, isto é, o limite da função não existe.

Abaixo, Guidorizzi comenta cada item destacando que para existir limite de uma função, os pontos x(s) devem pertencer a um intervalo (p-δ, p+δ) de centro (p) e raio (δ), e consequentemente os pontos de y(s) pertencem a um intervalo (L-ϵ, L+ϵ) de centro L e raio (ϵ), com o ponto (p) estando definido ou não no domínio de função f.

Na situação (a), f não está definida em p, mas existe L que satisfaz a propriedade:

Na situação (b), f está definida em p, mas não é contínua em p, entretanto existe L satisfazendo 1; observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial. Na situação (c), f é contínua em p, assim L = f (p) satisfaz 1. Finalmente, na situação (d), não existe L satisfazendo 1 em p.

A propriedade 1 é equivalente a:

$0 < | x - p | < \delta \Leftrightarrow p - \delta < x < p + \delta, x \neq p.$

Vamos provar a seguir que existe no máximo um número L satisfazendo a propriedade acima. De fato, suponhamos que L1 e L2 satisfaçam, em p, a propriedade acima; então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existem $\delta 1 > 0$ e $\delta 2 > 0$ tais que

$0 < | x - p | < \delta 1 \Rightarrow | f (x) - L1 | < \epsilon$

e

$0 < | x - p | < \delta 2 \Rightarrow | f (x) - L2 | < \epsilon$;

tomando-se $\delta = \text{mín } \{\delta 1, \delta 2\}$

$0 < | x - p | < \delta \Rightarrow | f (x) - L1 | < \epsilon$ e $| f (x) - L2 | < \epsilon$.

Das hipóteses sobre p e sobre o domínio de f, segue que existe $x0 \in Df$ com 0

$< | x0 - p | < \delta$; temos:

$| L1 - L2 | = | L1 - f (x0) + f (x0) - L2 | \leq | L1 - f (x0) | + | f (x0) - L2 |$. Assim,para todo $\epsilon > 0$,

$| L1 - L2 | < 2\epsilon$. Logo,

L1 = L2.

Aqui Guidorizzi demonstra a unicidade do limite se existir, que consiste em dizer, se o limite de uma função existe esse limite L é único. Em seguida o autor apresenta a definição formal de limite.

De acordo com a definição que daremos a seguir, o único número L (caso exista) satisfazendo 1 é o limite de f (x), para x tendendo a p :

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Abaixo, vejamos a definição formal de limite elencada no livro de Guidorizzi.

Definição. Seja f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\epsilon>0$ dado, existir um $\delta>0$ tal que, para todo $x \in D_{f.}$,

$0 < | x-p | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon$.

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim\limits_{x\to p} f(x)$.

Assim

$\lim\limits_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$

$0 < | x - p | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon$.

Após o autor apresentar a definição de limite, elenca dezoito exemplos, mostrando questões de limite, porém desses, apenas os exemplos 16, 17 e 18, aborda o conceito formal de limite. Vejamos abaixo.

EXEMPLO 16. Prove que

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0.$$

Solução

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - 0| < \epsilon \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 17. Prove que

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(p+h) = L.$$

Solução

Suponhamos

$\lim\limits_{x\to p} f(x) = L;$ assim dado $\epsilon > 0$ existe $\delta >$

0 tal que

$0 < | x - p| < \delta \Rightarrow | f(x) - L| < \epsilon$

daí

$0 < | h | < \delta \Rightarrow 0 < | (p + h) - p | < \delta \Rightarrow | f (p + h) - L | < \epsilon$, ouseja, $0 < | h | <$

$\delta \Rightarrow | f (p + h) - L | < \epsilon$. Assim

$$\lim_{h \to 0} f(p + h) = L.$$

Verifique você a recíproca.

Aqui o autor interage com o leitor convidando-o a concluir a demonstração. Ao nosso ver, concluir esta demonstração não é tarefa fácil para alunos iniciantes de cálculo, tendo em vista que demonstrar requer dos estudantes conhecimentos e percepções matemáticas mais avançadas e saber utilizar as técnicas de demonstração.

EXEMPLO 18. (Conservação do sinal.) Suponha que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L,$$

Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall\ x \in Df$,

$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow f (x) > 0$. Solução

Sendo $\lim_{x \to p} f(x) = L,$ para todo $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal

que, $\forall\ x \in Df$,

$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f (x) < L + \epsilon$.

Para $\epsilon = L$, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall\ x \in Df$, $p - \delta <$

$x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow L - L < f$ (xou

seja,

$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow f (x) > 0.$

Notemos que somente o uso da linguagem matemática, e a forma sucinta como é apresentada a demonstração, sem nenhum comentário explicando cada passagem dificulta a compreensão do aluno. Nesse sentido, Bessa de Menezes (2010, p. 88) já destaca que os “elementos que compõem uma organização (ou praxeologia) matemática, a saber: os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias (...) são feitos” de objetos ostensivos e não-ostensivos. Os objetos ostensivos são aqueles que tem uma forma material, sensível,e os objetos não-ostensivos são como os conceitos, as noções, as ideias (Dias e Santos Júnior, 2018). Logo, a necessidade de trabalhar, a definição formal de limite(objetos não-ostensivos), através de manipulações de diferentes objetos ostensivos(esquemas, desenhos, gráficos, escritas formalismos, etc) (Ibidem,2018), para alcançar uma maior compreensão do objeto matemático.

4.1.1.2 Livro 2. STEWART, James- Cálculo, volume 1, 2016.

Stewart apresenta no prefácio, citando Mark Van Dorem, que a arte de ensinar, consiste na arte de auxiliar a descoberta. Nesse sentido, o autor explica que o propósito dessa obra está em auxiliar os estudantes a descobrirem o cálculo, enfatizando que essa descoberta abrange o seu poder prático, quanto sua surpreendente beleza. Stewart salienta que a ênfase se concentra na compreensão dos conceitos, pois para ele esse deve ser o principal objetivo do ensino do cálculo. A obra apresenta também uma carta endereçada ao aluno, a qual o autor incentiva os estudantes a ler e compreender toda a seção antes de partir para a resolução dos exercícios. Stewart destaca a necessidade de fazer uma leitura atenta as definições buscando compreender o significado exato dos termos.

O livro de Stewart inicia com testes de verificação, justificando que o sucesso no cálculo depende de grande parte do conhecimento da matemática que antecede o cálculo, como por exemplo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Este livro está organizado em oito capítulos. Todos os capítulos apresentam uma revisão do objeto matemático que foi trabalhado, e a partir do capítulo dois, o autor inclui uma seção que é nomeada de “Problemas Quentes”, que segundo o autor, irá explorar problemas mais desafiadores.

A definição formal de limite

A definição formal de limite, se encontra no capítulo dois, que tem como título “Limites e Derivadas”, no tópico 2.4, denominado de “A definição precisa de limite”.

Inicialmente o autor problematiza a respeito da definição intuitiva de limite que foi dada na seção 2.2, apontando como inadequada para alguns propósitos, citando como exemplo o uso de frases como “x está próximo de 2” e “ se aproxima cada vez mais de L”, são consideradas vagas, para demonstrar conclusivamente que

$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000}\right) = 0{,}0001$ ou $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Nesse sentido Stewart passa a construir, a partir da função dada abaixo à definição precisa de limite.

Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então f(x) está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$

Para obter informações mais detalhadas sobre como f(x) varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que f (x) difira de 5 por menos que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x-3|$, e a distância de f(x) a 5 é $|f(x) - 5|$ logo,

nosso problema é achar um número δ tal que

$|f(x) - 5| < 0{,}1$ se $|x - 3| < \delta$ mas $x \neq 3$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$; portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$|f(x) - 5| < 0{,}1$ se $0 < |x-3| < \delta$

Observe que, se $0 < |x-3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x-3| < 2(0{,}05) = 0{,}1$ Isto é,

$|f(x) - 5| < 0{,}1$ se $0 < |x-3| < 0{,}05$

Logo abaixo, o autor começa a elencar as possibilidades de respostas dadas ao problema.

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então f(x) estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que f(x) diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$:

$$|f(x) - 5| < 0{,}01 \text{ se } 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

De forma análoga,

$|f(x) - 5| < 0{,}001$ se $0 < |x - 3| < 0{,}0005$

Perceba que falar em x se aproximar de 3, ou x tender para 3, é equivalente a falar na distância entre x e 3, representado por $|x-3|$ com raio de tolerância $\delta=0{,}05$ sea distância entre f(x) e 5 é menor que 0,1. Analogamente para $|f(x)-5|<0{,}01$, teremos
$|x-3|<0{,}005$ e assim sucessivamente. Generalizando esta distância para qualquer número real positivo temos, $|f(x)-5|<\epsilon$ se $0<|x-3|<\delta$

Os números 0,1, 0,01 e 0,001, anteriormente considerados, são tolerâncias de erro que podemos admitir. Para que o número 5 seja precisamente o limite de f(x), quando x tende a 3, devemos não apenas ser capazes de tornar a diferença entre f(x) e 5 menor que cada um desses três números; devemos ser capazes de torná-la menor que qualquer número positivo. E, por analogia ao procedimento adotado, nós podemos! Se chamarmos ε(a letra grega épsilon) a um número positivo arbitrário, então encontramos, como anteriormente, que

i) $|f(x)-5|<\varepsilon$ se $0<|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

Esta é uma forma rigorosa de afirmar que "f(x) está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois (i) diz que podemos fazer os valores de f(x) ficarem dentro de uma distância arbitrária εde 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $\neq 3$)"(Stewart, 2016, p.91).

Note que o autor enfatiza que essa é uma maneira precisa de dizer que o limite existe, isto é $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Stewart apresenta em seguida a reescrita de (i).

Se $3-\delta<x<3+\delta$ $(x\neq 3)$ então $5-\varepsilon<f(x)<5+\varepsilon$

Logo em seguida o livro traz a definição precisa de limite.

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de f(x) quando x tende a *a* é L, e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon>0$ houver um número δ 0 tal que se $0<|x-a|<\delta$ então $|f(x)-L|<\varepsilon$

Uma vez que | x – a | é a distância de x a a e | f(x) – L | é a distância de f (x) a L, e como εpode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre f(x) e L fica arbitrariamente pequena ao se exigir que a distância de x a a seja suficientemente pequena (mas não igual a 0).

Alternativamente,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de f (x) podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornado-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

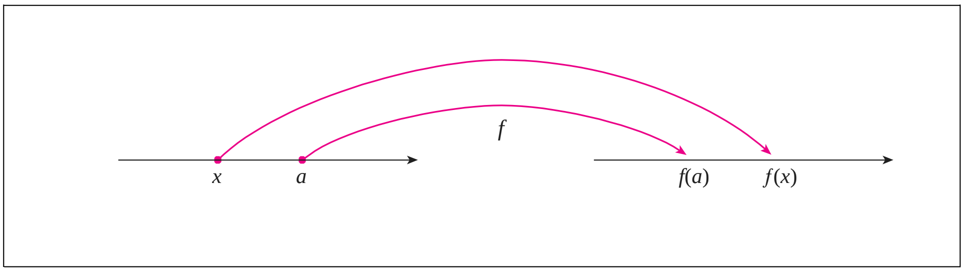
O autor mostra que a definição de limite poderá também ser remodelada em termos de intervalos considerando que a desigualdade | x- a | < δ é equivalente a – δ < x – a < δ, que pode ser escrita como a – δ < x < a + δ. Stewart destaca ainda que, 0 < | x – a | é válida se, e somente se, x – a ≠ 0, isto é, x ≠ a. E análogo a isso, temos que a desigualdade | f(x) – L < ε é equivalente ao par de desigualdades L - ε< f (x) < L + ε.

Em seguida o livro apresenta a definição formal de limite, em termos de intervalo.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for) podemos achar δ > 0 tal que, se x estiver no intervalo aberto (a – δ, a + δ) e x ≠ a, então f (x) estará no intervalo aberto (L – ε, L + ε).

É importante enfatizar que o autor expõe a definição também de forma geométrica, a partir da representação de uma função por um diagrama de flechas, como podemos perceber na figura abaixo, onde f leva um subconjunto de ℝ em outro subconjunto de ℝ.

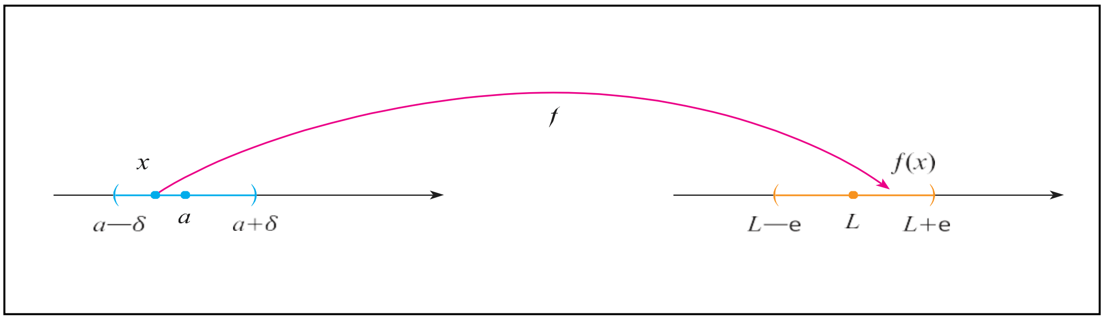
Figura 2- Representação geométrica da definição de limite



Fonte: Stewart (2016, p. 92).

Na definição de limite, temos que, "se for dado qualquer intervalo pequeno (L – ε, L + ε) em torno de L, então podemos achar um intervalo (a – δ, a + δ) em torno de *a* tal que f leve todos os pontos de (a – δ, a + δ) exceto possivelmente no própriao para dentro do intervalo (L – ε, L + ε)" (Stewart, 2016, p. 92). Isto quer dizer que dado um intervalo de raio δ na vizinhança simetrica de a, se x está dentro desse intervalo, então f(x) está dentro do intervalo de raio ϵ por uma vizinhança simétrica de
L. Como mostra a figura seguinte.

Figura 3- Representação geométrica de limite



Fonte: Stewart (2016, p. 92).

Stewart apresenta cinco exemplos sobre a definição de limite, dos quais dois tratam de limites laterais e no infinito, que não iremos elencar, por não serem objeto do nosso estudo.

Exemplo 1. Como f(x)= $x^3 - 5x + 6$ é uma função polinomial, sabemos da Propriedade de Substituição Direta que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) - 1^3 - 5(1) + 6 = 2$. Use um gráfico para encontra um número δ tal que se x está a menos de δ de 1, então y está a menos de 0,2 de 2, isto é,

$$\text{se } |x - 1| < \delta \qquad \text{então} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a ε = 0,2 na definição de um limite para a função f(x) = $x^3 - 5x + 6$ com a= 1 e L = 2.

Exemplo 2. Prove que $\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$

Exemplo 3. Demonstre que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Os exemplos mostrados tratam da definição formal de limites sendo que no primeiro é solicitado a construção gráfica para que o estudante visualize o intervalo em que x está inserido e determine o valor de delta (δ), dado um epsilon ε= 0,2. Nos outros exemplos é explorado a definição formal de limite de forma genérica onde epsilon (ε) e delta (δ) assumem valores reais positivos por menor que sejam.

4.1.1.3 Livro 3. LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica, 1994.

No prefácio, Leithold anuncia inicialmente, que o público-alvo da referida obra são os futuros matemáticos, e estudantes da Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não técnicas. O autor destaca que o livro, ao ser escrito, para estudantes, considerou a experiência e maturidade de um principiante, sem que isso causasse qualquer omissão ou deixasse algo sem explicação. Leithold ainda enfatiza que espera que os estudantes compreendam a necessidade das demonstrações dos teoremas, pontuando que estes foram explicados com cuidado, a fim de se tornar compreensível para os alunos.

O livro está organizado em 20 capítulos, 19 capítulos sobre o cálculo com geometria analítica, e o último capítulo que foi escrito especificamente para a edição brasileira, e que aborda as equações diferenciais. Além dos capítulos, existem as seções suplementares.

As sessões suplementares estão dispostas, ao final de cada capítulo. Estas seções apresentam algumas discussões teóricas, que a caso o estudante tenha interesse, poderá explorar ou não, sem prejuízo da sequência do texto.

O autor enfatiza, que desde a primeira versão do livro, em 1968, vem ocorrendo mudanças importantes, no conteúdo e ensino. Leithold ainda salienta que as mudanças vêm acontecendo considerando o equilíbrio saudável entre uma abordagem rigorosa e um ponto de vista intuitivo.

A definição formal de limite

O capítulo dois, mostra o conceito de Limites e Continuidade. Leithold inicia a seção 2.1 apresentando a ideia de limite de uma função, através de um passo a passo, que integra desde a discussão do cálculo, do valor de uma função na proximidade de um número, por meio de um tratamento intuitivo do processo de limite, até chegar na definição rigorosa, compreendendo épsilons e deltas.

Considerando a função (1)

f(x)= $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$

Observe que f(x) existe para todo x, exceto x = 1. Investigaremos os valores da função quando x está próximo de 1.

O livro expõe em seguida como a função definida por (1) pode aparecer e porque é importante considerar tais valores funcionais.

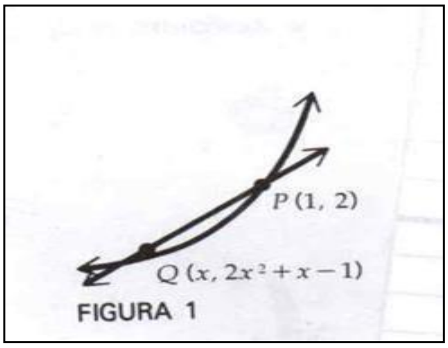
O ponto P (1,2) está sobre a curva de equação Y= $2x^2$

$+ x – 1$

Seja Q (x, $2x^2 + x – 1$) um outro ponto sobre essa curva, distinto de P.

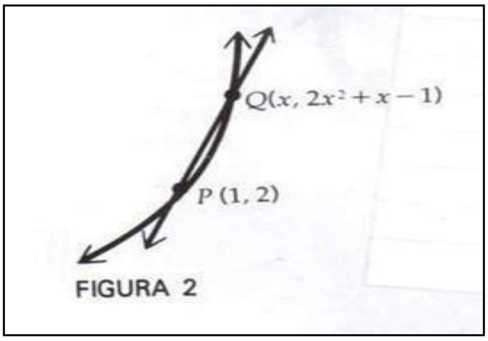
O autor aponta que na Figura 7, no primeiro gráfico, a coordenada x de Q é menor do que 1, e no segundo gráfico ela é maior do que 1.

Figura 4- Gráfico da reta secante 1



Fonte: Leithold (1994, p. 56) Figura

5- Gráfico da reta secante 2



Fonte: Leithold (1994, p. 56)

Suponhamos que f(x) seja a inclinação da reta PQ. Então

f(x) = $\frac{2x^2+x-1-2}{x-1}$ isto significa que f(x)= $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$

que é a igualdade (1). Além disso, $x \neq 1$, pois P e Q são pontos distintos. À medida que x fica cada vez mais próximo de 1, os valores de f(x) tornam-se cada vez mais próximos do valor que iremos definir na seção 3.1 como a inclinação da reta tangente à curva no ponto P.

O autor parte da noção intuitiva de limite, por meio de tomar valores de x cada vez mais próximo de 1 tanto pela direita quanto pela esquerda, ele mostra o que acontece com f(x) o quanto o valor de função se aproxima de 5. Desta maneira Leithold vai construindo a definição formal de limites exibindo um intervalo de centro a e raio delta (δ) no eixo dos x, e consequentemente o intervalo de centro L e raio ϵ no eixo y.

Leithold continua a explicação, com base nas informações da Tabela abaixo.

Tabela 1- Aproximação para x e f(x) pela esquerda

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

Fonte: Leithold (1994, p. 56)

Para a função f definida por (1), vamos atribuir a x os valores 0, 0,25, 0,50, 0,75, 0,9, 0,99, 0,999, 0, 9999, e assim por diante. Estamos tomando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém menores que 1, em outras palavras, a variável x está aproximando-se de 1 através de valores menores do que 1.

Note que à medida que vamos aumentando os valores de x só que pela esquerda de 1, ou seja, por valores menores que 1, temos o seguinte:

$x=0,9 \Rightarrow f(x)=4,8$; isto é $x-1=-0,1 \Rightarrow f(x)-5=-0,2$;

$x=0,99 \Rightarrow f(x)=4,98$; istoé $x-1=-0,01 \Rightarrow f(x)-5=-0,02$

$x=0.999 \Rightarrow f(x)=4,998$; isto é $x-1=0,001 \Rightarrow f(x)-5=-0,002$

e assim sucessivamente.

Se chamarmos estas diferenças x-1 e f(x) -5 de distância teremos:

$|x-1|=0,1$. Isto implica que $|f(x)-5|=0,2$

Para |x-1|=0,01. Isto implica que |f(x)-5|= 0.02 e assim sucessivamente. Perceba que é possível fazer f(x) ficar tão próximo de 5 quanto quisermos,

bastando fazer x ficar suficientemente próximo de 1, pela esquerda.

Leithold segue explicando.

Por outro lado, vamos deixar que a variável x aproxime-se de 1, através de valores maiores do que 1, isto é, vamos atribuir a x os valores 2, 1,75, 1,5, 1,25, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001, 1,00001, e assim por diante. Observe a Tabela 2.

Tabela 2- Aproximação de x e f(X) pela direita

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Fonte: Leithold (1994, p. 57)

A tabela 2 nos mostra que:

Para x = 1.1 ⇒f(x)= 5,2, isto é x – 1= 0,1 ⇒ f(x) – 5 = 0,2;

Para x = 1,01 ⇒f(x)= 5,02, isto é x – 1= 0,01 ⇒f(x) – 5 = 0,02;

Para x = 1,001 ⇒f(x) =5,002, isto é x – 1= 0,001 ⇒ f(x) = 0,002 e assim sucessivamente.

Aplicando estas diferenças em módulo teremos sempre valores positivos, pois x se aproxima de 1 pela direita de 1, ou seja, por valores maiores que 1.

Note que, em ambas as tabelas à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, f(x) torna-se cada vez mais próximo de 5 e quanto mais próximo de x estiver de 1, mais próximo de 5 estará f(x). Por exemplo, na tabela 1, quando x = 0,9, f(x) = 4,8, isto é, quando x for 0,1 inferior a 1, f(x) será 0,2 inferior a 5. Quando x- 0,999, f(x) – 4,998, isto é, quando x for 0,001 inferior a 1, f(x) será 0,002 inferior a 5(Leithold, 1994).

Comumente usamos símbolo para indicar estas diferenças pequenas. Os símbolos usualmente são ε (épsilon) e δ (delta).

Assim, quando tomamos um número positivo ε, se desejamos que |f(x) – 5| seja menor que ε devemos considerar |x-1| suficientemente pequeno, isto é, devemos encontrar um número positivo δ de tal modo que:

Se $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$

Percebe que ao questionar o quão próximo de 1 deve estar x para que f (x) difira de 5 por menos que 0,2? Significa que o δ depende do ε considerado.

Assim, $|x-1|= 0{,}1 \Rightarrow |f(x) - 5|= 0{,}2$

Logo, vemos que que quando x difere de 1 de ± 0,001 (isto é, x = 0,999 ou x = 1,001), f (x) difere de 5 de ± 0,002, isto é, f (x) = 4, 998 ou f(x)= 5,002). E quando x difere de 1 de ± 0,0001, f(x) difere de 5 ± 0,0002.

Atente que, consideremos os valores de f(x) primeiro. Vemos que podemos tornar os valores de f(x) tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Outro modo de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre f(x) e 5 tão pequeno quanto desejarmos tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, | f(x) – 5 | pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando | x - 1| suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que f(x) nunca assume o valor 5 (Leithold, 1994).

Se $|x-1|=0{,}1 \Rightarrow |f(x) - 5|=0{,}2$; isto é, se for dado ε = 0,2 devemos encontrar umδ = 0,1 para a qual $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$ é satisfeita.

Leithold enfatiza que uma forma mais precisa de notar essa questão é utilizando dois símbolos para essas pequenas diferenças. Assim, os símbolos geralmente usados são as letras gregas ε (epsilon) e δ (delta). Dessa forma, o autor explica que:

Para todo número ε dado positivo existe um número δ escolhido apropriadamente, tal que se | x – 1 | for menor do que δ e $|x - 1| \neq 0$ (isto é, $x \neq 1$), então | f(x) -5 | será menor do que ε.

O autor destacar a necessidade de observar que o tamanho de δ depende de ε, e apresenta outra forma de expressar essa situação.

Dado um número ε positivo qualquer, podemos tornar $|f(x) - 5| < \varepsilon$ tomando |x – 1 | suficientemente pequeno, isto é existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) -5| < \varepsilon$ (2)

Observe que o numerador da fração em (1) pode ser fatorado de forma que

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

Se x $\neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por x – 1 para obter

f(x) =2x +3 x $\neq$ 1 (3)

Perceba que lim f(x) = lim$\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$=lim 2x+3=5, quando x tende a 1.

A fórmula (3), com a estipulação de que x $\neq$ 1, é tão adequada quanto (1) para uma definição de f (x). De (3) e das duas tabelas, note que se | x - 1| < 0,1, então | f(x) – 5 | < 0,2. Assim, dado ε = 0,2, tomamos δ = 0,1 e afirmamos:

Se 0 < | x - 1| < 0,1 então | f (x) - 5| < 0,2 Essa é a

afirmativa (2), com ε = 0,2 e δ = 0,1.

Também, se | x - 1| < 0,001, então | f(x) – 5 | < 0,002. Logo, se ε = 0,002, tomamos δ = 0,001 e afirmamos que

Se 0 < | x – 1 | <0,001 então | f(x) – 5 | < 0,002

Essa é a afirmativa (2), com ε = 0,002 e δ= 0,001.

Da mesma forma, se ε = 0, 0002, tomamos δ = 0,0001 e afirmamos que Se 0 < | x

- 1| < 0,001 então | f (x) – 5 < 0,0002

Essa é a afirmativa (2), com ε= 0,0002 e δ = 0,0001.

Poderíamos prosseguir e atribuir a ε qualquer valor positivo, a fim de encontrar um valor adequado para δ, de tal forma que se |x - 1| for menor do que δ e x $\neq$ 1 (ou | x - 1| > 0), então | f(x) - 5| será menos do que ε. Agora, como para todo ε > 0 podemos encontrar um δ > 0, tal que se 0 < | x – 1 | < δ, então | f(x) - 5| < ε, afirmamos que o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 5 ou, em símbolos

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

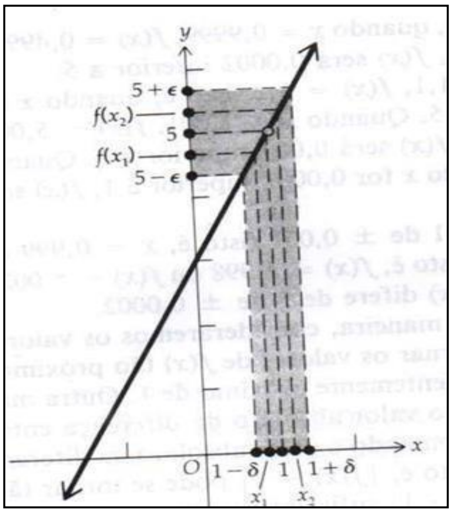
Observe que nessa equação temos um novo uso do símbolo “igual”. Aqui, f(x) não assume o valor 5 para nenhum valor x. O símbolo “igual” é apropriado, pois o primeiro membro está escrito como $\lim_{x\to 1} f(x)$

O que a expressão acima afirma que a função f(x) tende a 5 quanto mais x se aproxima de 1.

De (3) é evidente que f(x) pode se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1 e essa propriedade da função f não depende do fato de f estar definida em x = 1. Esse fato permite-nos distinguir entre $\lim_{x\to1} f(x)$ e o valor da função 1, isto é, $\lim_{x\to1} f(x) = 5$, mas f (1) não existe.

Isto significa que f(x) = $\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$, para x=1, a imagem de f (1) não existe, pois f(x) não está definida no ponto x=1. Por outro lado, para x muito próximo de 1, mas x ≠1, o lim $\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$= lim (2x+3) =5

Figura 6- Gráfico de f(x)



Fonte: Leithold (1994, p. 56)

A Figura 6 ilustra o significado geométrico de ε e δ. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$, então f(x) (no eixo vertical) estará entre $5 - \varepsilon$ e $5 + \varepsilon$, ou

Se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 5| < \varepsilon$

Percebemos na imagem que a definição formal de limite quando x tende a, geometricamente nos mostra um intervalo no eixo do x, que chamamos de vizinhança de centro *a* e raio δ e a denotamos por:

$V(a, \delta) = |x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x - a < \delta \Rightarrow a - \delta < x < a + \delta$, com a=1; Tem-se: $V(1, \delta) = |x-1| < \delta \Rightarrow -\delta < x - 1 < \delta \Rightarrow 1 - \delta < x < 1 + \delta$,

Já no eixo y temos o intervalo de centro L e raio ε, denotado por: $V(L,\varepsilon) = |f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, com L=5;

Tem-se:

V(5,ε) = | f(x)-5| < ε ⇒ - ε < f(x) – 5 < ε ⇒5 – ε < f(x) < 5 + ε

Outra forma indicada por Leithold para estabelecer isso é que f(x) (no eixo vertical) pode ser restrita a ficar entre 5 – ε e 5 + ε, se restringirmos x no eixo horizontal) a ficar entre 1 – δ e 1 + δ.

Pode-se notar que os valores de ε são escolhidos arbitrariamente e podem ser tão pequenos quanto quisermos, e que o valor de δ depende do ε escolhido. Precisamos enfatizar que quanto menor for o valor de ε, menor será o valor correspondente de δ(Leithold, 1994).

O autor enfatiza que para termos um intervalo δ muito pequeno devemos considerar ε suficientemente pequeno.

Então, $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, pois para qualquer ε 0, não importa o quão pequeno ele seja, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$ então | f(x) – 5 | < ε.

Em seguida Leithold apresenta a definição formal de limite.

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O limite de f(x) quando x tende a a será L, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se a seguinte afirmativa for verdadeira

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que (4)

Se 0 < | x – a | < δ então | f(x) – L | < ε

O limite de uma função existe, quando a função f(x) satisfaz em p a propriedade: para todo ε > 0, existe δ > 0, tal que f(x) pertence ao intervalo (f(p) - ε, f(p)+ ε), quando x pertence ao intervalo (p - δ, p+ δ), com x no domínio de f. Ou equivalentemente, para todo ε > 0, existe δ > 0, tal que:

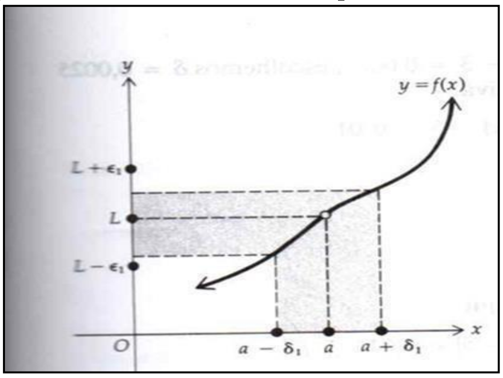
p - δ < x < p + δ ⇒ f(p) – ε < f(x) < f(p) + ε que significa

|p – x| < δ ⇒ |f(x)- f(p)| < ε ou em termos de vizinhança se x∈V(p, δ),

então f(x)∈V(f(p), ε).

Observe a Figura 7. Ela mostra uma interpretação geométrica da Definição formal de limite.

Figura 7- Gráfico da tolerância épsilon delta



Fonte: Leithold (1994, p. 59)

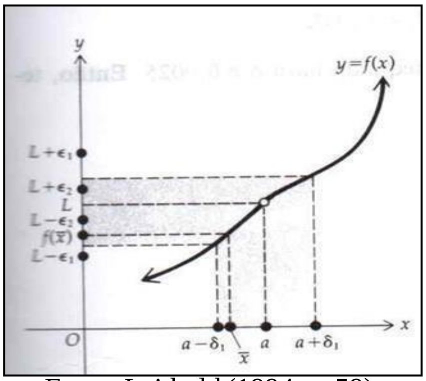
Como f não é necessariamente definida em a , não precisa haver no gráfico um ponto com abscissa a. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre a – a$-\delta_1$ e a$+\delta_1$, então f(x) (no eixo vertical) estará entre L – ε_1 e L + ε_1 .Expressando de outra maneira: se x (no eixo horizontal) for restringida a ficar entre a$-\delta_1$ e a$+\delta_1$, então f(x) (no eixo vertical) poderá ser restringida a ficar entre L - ε_1 e L + ε_1. Assim,

se $0 < | x - a | < \delta_1$ então $| f(x) - L | < \varepsilon_1$

O gráfico de f nos mostra que que o ponto a não precisa necessariamente está definida em f, pois quando estudamos limite de uma função o que nos interessa é saber o comportamento daquela função na vizinhança de um ponto a e não necessariamente o que acontece com a função no ponto a.

A figura abaixo apresenta como um valor de ε menor pode requerer uma escolha diferente para δ .

Figura 8- Gráfico da diminuição épsilon delta 1



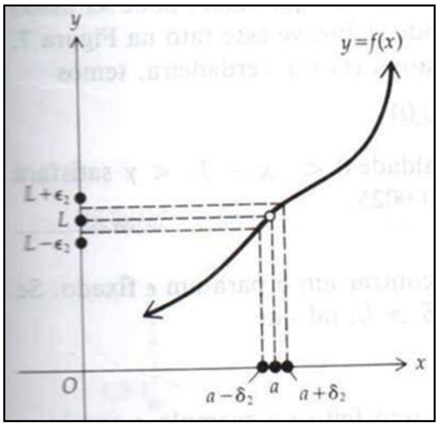
Fonte: Leithold (1994, p. 59)

Vemos que para $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, o valor δ_1 é muito grande, isto é, existem valores de x para os quais $0 < | x - a | < \delta_1$, mas $| f(x) - L |$ não é menor do que ε_2. Por exemplo, $0 < | x - a | < \delta_1$, mas $| f(x) - L | > \varepsilon_2$. Assim, precisamos escolher um valor menor δ_2, conforme mostrado na próxima figura, tal que

Se $0 < | x - a | < \delta_2$ então $| f (x) - L < \varepsilon_2$. No entanto, para escolha de $\varepsilon > 0$, não importa quão pequeno seja, existe um $\delta > 0$, tal que a afirmativa (4) seja verdadeira. Logo, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Perceba que, tomando um ponto x na fronteira de a- δ_1 f(x) estará dentro do intervalo (L- ε_1, L) mas como se pode ver não está dentro do intervalo (L- ε_2, L).

Figura 9- Gráfico da diminuição épsilon delta 2



Fonte: Leithold (1994, p. 59)

Abaixo apresentaremos os exemplos usados por Leithold sobre a definição de limite.

Exemplo 1. Seja f a função definida por

$x \to 2$

f(x) = x^2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Usando uma figura para ε = 0,001, determine δ > 0, tal que Se 0 < |x

– 2| < δ então | f(x)- 4| < 0,001

Exemplo 4. Use a Definição 2.1.1 para provar quef

(x) =4x – 7 e

suponha que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

a) Usando uma figura similar à Figura 3, para ε – 0,01, determine um δ >0, tal que Se 0 < |

x - 3| < δ então | f(x0 - 5| < 0,01

b) Usando as propriedades das desigualdades, determine δ > 0, tal que a afirmativa na parte (a) seja verdadeira.

Exemplo 2. Use a definição 2.1.1 para provar que

$$\lim_{x \to 3}(4x - 7) = 5$$

Nestes exemplos o autor explora a definição formal de limite, tanto usando a linguagem gráfica quanto usando a linguagem algébrica. No exemplo 1ª, é solicitado que o estudante construa um gráfico para o valor de ε dado e determine δ. Neste quesito é nítida a intenção do autor em que o aluno compreenda o intervalo de maneira gráfica para somente depois explorar a parte algébrica. No item b, é pedido que o estudante usando o valor de δ encontrado em no item a) mostre a implicação da definição formal de limite, isto é, se | x-a| < δ ⇒ | f(x)-L| < ε. Ainda sobre o esse item, é utilizada a linguagem algébrica, assim como no exemplo 2ª.

Observamos que o exemplo 3ª, é explorada novamente a representação gráfica para melhor compreender o menor intervalo capaz de satisfazer a definição formal de limite, que só é cobrado no exemplo 4ª) por meio da linguagem algébrica.

Percebemos que Leithold ao utilizar os objetos ostensivos, manipulados de forma apropriada, favorece o entendimento da definição formal de limite. Desse modo, corroboramos com Dias e Santos Júnior (2018, p. 545) quando afirmam que "o trabalho matemático é realizado por meio dos ostensivos manipulados adequadamente e regrados pelos não ostensivos que lhes são associados, o que faz com que os ostensivos associem aos não ostensivos um determinado conteúdo".

4.2 Atividades presentes nos livros didáticos e a identificação das tarefas,técnicas e elementos tecnológicos/teóricos

Com o intuito de responder as questões propostas sobre as organizações matemática contidas nos livros didáticos, sobre a definição formal de limite, apresentamos nesse tópico as tarefas, técnicas e os elementos tecnológicos/teóricos identificadas nos livros.

Nesse contexto apresentaremos nos tópicos seguintes as tarefas, organizamos a priori, as atividades que foram listadas pelos autores. Vejamos abaixo as atividades presentes nos livros analisados.

4.2.1 Guidorizzi (2011)

Guidorizzi apresenta uma bateria com 15 exercícios. Desses exercícios, dez vão focar na definição formal de limite. Algumas dessas atividades apresentam similaridade, por isso optamos por elencar apenas oito. Vejamos no quadro abaixo.

Quadro 1- Atividades encontradas no livro de Guidorizzi (2011, p. 80 a 82)

Atividades
1. Prove que existe δ > 0 tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}$
2. Sejam f e g definidas em ℝ com g (x) ≠ 0 para todo x. Suponha que $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Prove que existe δ > 0 tal que $0 < \lvert x - p \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) \rvert < \lvert g(x) \rvert$.
3. Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que existem r > 0, α e β tais que, para todo $x \in D_f$,

$0 < \mid x - p \mid < r \Rightarrow \alpha < f(x) < \beta$. Interprete graficamente.
4. Suponha que $\lim_{x \to p} f(x)$=L. Prove que existem r > 0 e M > 0 tais que, para todo x ∈ D_f, $0 < \mid x - p \mid < r \Rightarrow \mid f(x) \mid \leq M$.
5. Prove: $\lim_{x \to p} f(x)$= L ⇔ $\lim_{x \to p}$ f (x) – L |= 0.
6. Prove: $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{x-p}$=0 ⇔ $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{x-p\vee}$ = 0.
7. Suponha que existe r > 0 tal que f (x) ≥ 0 para $0 < \mid x - p \mid < r$ e que $\lim_{x \to p} f(x)$= L. Prove que L≥ 0. (Sugestão: Suponha L < 0 e use a conservação do sinal.
8. Suponha f contínua em ℝ e f (x) ≥ 0 para todo x racional. Prove que f(x) ≥ 0 para todo x.

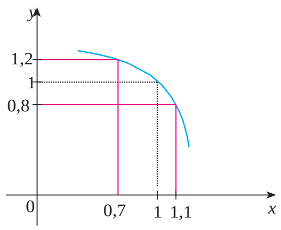
Fonte: autor

4.2.2 STEWART (2016)

Stewart elenca uma lista com 44 atividades, destas 37 dizem respeito a definição formal de limite. Das 37 questões que tratam da definição, escolhemos apenas seis, já que as demais são tipos de tarefas e técnicas utilizadas pelas 37 apresentadas.

Observe o Quadro 2, que dispõe sobre as atividades que foram expressas pelo autor.

Quadro 2- Atividades encontradas no livro de Stewart (2016, p. 80 a 82)

Atividades
1.Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que Se | x - 1| < δ então | f9x) - 1< 0,2 

2.Use um gráfico para encontrar um número δ tal que Se $\| x - \frac{\pi}{4} \| < \delta$ então $\| tg\ x - 1 \| < 0,2$
3.Para o limite $$\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 4) = 6$$ Ilustre a Definição encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,2 e \varepsilon - 0,1$
4.Encontre um número δ tal que se $\| x - 3 \| < \delta$, então $\| 5x - 15 \| < \varepsilon$,onde $\varepsilon = 0,1.$
5.Demonstre cada afirmação usando a definição ε,δ de um limite. $$\lim_{x \to -2}(x^2 - 1) = 3$$
6. Demonstre a afirmação usando a definição ε, δ de limite. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4} = 6$

Fonte: autor.

4.2.3 LEITHOLD, (1994)

O livro de Leithold apresenta uma lista com 44 atividades. Por muitas dessas atividades se apresentarem de forma análoga, elencamos apenas três, que serão expressas logo abaixo.

Quadro 3- Atividades encontradas no livro de Leithold(1994, p.63)

Atividade
Nos exercícios de 23 a 42, prove que o limite é um número indicado, aplicando a Definição 2.1.1(ver figura 10) 33. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$
25.$\lim_{x \to 4}(2x + 1) = 9$
Nos exercícios de 23 a 42, prove que o limite é o número indicado, aplicando a Definição 2.1.1. 43.Prove que $\lim_{x \to \alpha} x^2 = \alpha^2$, se a for qualquer número positivo

Fonte: autor

Tarefas

Inicialmente, buscamos observar todas as atividades que haviam sido elencadas pelos autores. Para Almeida (2016, p. 160) "para resolver um tipo de tarefa ou subtipo de tarefa, é necessário, no mínimo, uma técnica de base. E esta diz respeito à maneira de fazer ou realizar as tarefas t ЄT".

As atividades exemplificadas contribuíram para que pudéssemos identificar a tarefa central proposta nos livros, e consequentemente organizar, e reagrupar essa tarefa em tipos de tarefas.

Tomando como referência as atividades listadas pelos autores dos livros didáticos, elaboramos uma tabela contendo os tipos de tarefas.

Tabela 3- Tarefas identificadas nos livros

Tipos de tarefa	Descrição dos tipos de tarefas
T_1	Provar que existe que existe δ>0 tal que 0< $\mid x - P \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$
T_2	Provar que existe $\delta > 0$ tal que $P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$
T_3	Usar o gráfico para encontrar um número δ tal que se $\mid x - P \mid < \delta$ então $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$
T_4	Prove que $\lim\limits_{X \to P} \frac{P(x)}{Q(x)} = L$
T_5	Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to P} g(x) = k$
T_6	Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x) = L$

Fonte: o autor

Para que possamos entender melhor e identificar as tarefas presentes em cada obra, elaboramos o quadro seguinte.

Quadro 4- Tipos de Tarefas

Livros	Tarefas
Guidorizzi	T_2; T_5
Stewart	T_1; T_3, T_4; T_6

Leithold	T_4; T_6

Fonte: Autor

Técnicas

Para identificarmos as técnicas, relativas à definição formal de limite, analisamos as atividades resolvidas nos três livros didáticos. As Técnicas estão diretamente associadas a resolução por meio da definição formal de limite.

A partir da identificação das tarefas e técnicas contidas nos livros didáticos, podemos entender algumas das razões que podem estar ocasionando as dificuldades no ensino e aprendizagem da definição formal de limite. Vejamos abaixo a Tabela 4 que apresenta a caracterização das Técnicas presentes nos livros.

Tabela 4- Técnicas identificadas nos livros

Técnicas	Descrição
t_1	Aplicação da definição formal de limite em módulo.
t_2	Aplicação da definição formal de limite em desigualdade.
t_3	Interpretação geométrica da definição formal de limite .
t_4	Manipulação algébrica, substituição e comparações na aplicação da definição formal de limite.
t_5	Combinação entre a definição formal de limite e outras proposições

Fonte: o autor

Segue abaixo o Quadro 5 que apresenta as tarefas e técnicas contidas em cada obra.

Quadro 5- Tipos de Tarefas e Técnicas identificadas nos livros

Livros	Tarefas	Técnicas
Guidorizzi	T_2; T_5	t_2; t_5
Stewart	T_1; T_3, T_4; T_6	t_1; t_3; t_4;
Leithold	T_4;; T_6	t_1; t_4;

Fonte: Autor

Elementos tecnológicos/teóricos

Os elementos tecnológicos/teóricos encontrados nas atividades propostas nos livros analisados foram:

θ_1 Definição formal de limite

$\theta_{1.2}$ $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x - P| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ ou

$\theta_{1.3}$ $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

θ_2 Desigualdades

$\theta_{2.1}$ Se a >b e b>c então a >c

$\theta_{2.2}$ Se a>b, então a+c > b+c

$\theta_{2.3}$ Se a >b e c >0 , então ac>bc

$\theta_{2.4}$ Se a >b e c <0, então ac < bc

$\theta_{2.5}$ Se a > b então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

θ_3 Propriedades de valor absoluto Se

a,b $\in$ R e b > 0

$\theta_{3.1}$ $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$\theta_{3.2}$ $|a| = \begin{cases} a, \text{se } a \geq 0 \\ -a, \text{se } a < 0 \end{cases}$

$\theta_{3.3}$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ se $b \neq 0$

$\theta_{3.4}$ $|a.b| = |a| . |b|$

$\theta_{3.5}$ $|a| \geq b$ se, e somente se $a \geq b$ ou $a \leq -b$

$\theta_{3.6}$ $|a + b| \leq |a| + |b|$ desigualdade triangular

$\theta_{3.7}$ $|a-b| = |b-a|$

$\theta_{3.8}$ $|ax - ab| = |a|.|x-b|$

θ_4 Plano cartesiano

$\theta_{4.1}$ Gráfico de funções

θ_5 Propriedades algébricas do corpo dos reais

Iremos reunir algumas propriedades mais relevantes para o estudo de limite

$\theta_{5.1}$ $\forall$ x, y, z ϵ R tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$

$\theta_{5.2}$ $\forall$ x, y ϵ R, tem-se $x + y = y + x$

$\theta_{5.3}$ $\exists\, 0 \in R \,/\, x + 0 = x, \forall x \in R$

$\theta_{5.4}$ $\forall x \in R, \exists -x \in R$ tal $x + (-x) = 0$

$\theta_{5.5}$ $(x.y).\, z = x.\,(y.z)$ $\forall$ x, y, z ϵ R

$\theta_{5.6}$ $x.\, y = y,\, x$ $\quad \forall$ x, y ϵ R

$\theta_{5.7}$ $\exists\, 1 \in R$ tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, $\forall x \in R$

$\theta_{5.8}$ $\forall x \in R, x \neq 0.\ \exists\, x^{-1} \in R /\ x\,.x^{-1} = 1$

$\theta_{5.9}$ $\forall$ x, y, z ϵ R tem-se$x.(y+z)$

$= xy + xz$

$\theta_{5.10}$ $\forall x \in R$ tem-se $-(-x) = x$

$\theta_{5.11}$ $\forall$ x, y, z ϵ R tem-se x

$+ z = y + z \Rightarrow x = y$

$\theta_{5.12}$ $\forall$ x, y, z ϵ R tem-se

$x.\, z = y.\, z \Rightarrow x = y$

$\theta_{5.13}$ $\forall x \in R$ tem-se $x.0 = 0$

$\theta_{5.14}$ $\forall$ x, y, ϵ R tem-se $x.y = 0$ se, e somente se $x=0$ ou $y=0$

$\theta_{5.15}$ $\forall x \in R$ tem-se $|x| = \sqrt{x^2}$

θ_6 Relações trigonométricas

Optamos por chamar esta técnica simplesmente de relações trigonométricas para alcançar o maior número possível de técnicas auxiliares que envolvem noções de trigonometria.

θ_7 Intervalo na reta numerada

Essa tecnologia aborda todos os intervalos descritos na reta.

Outros elementos que fazem parte do Bloco Tecnológico/teórico são: Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais, Geometria Analítica e Trigonometria.

4.3 Elaboração do quarteto praxeológico matemático

Neste tópico, faremos a descrição e análise da praxeologia matemática contida nos livros analisados, sobre a definição formal de limite, com base nas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias mobilizadas sobre o tema em questão.

Para isso, realizamos a elaboração e identificação do quarteto praxeológico matemático, a partir dos dados obtidos na parte do curso e atividades propostas, com o intuito de apresentar a organização matemática.

A identificação dos tipos de tarefas, partem de uma tarefa T central que é demonstrar que limite de f(x) = L quando x tende a p, isto é, que vale a demonstrar que para todo épsilon maior do que zero, existe um delta também maior do que zero tal que satisfaz a condição:

Se zero é menor do que o módulo de x menos a, menor do que delta então o módulo de f(x) menos L é menor do que épsilon. Que denotamos da seguinte forma:

$$\lim_{x \to p} f(x) = 1$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $0 < | x - p| < \delta$ então $| f(x) - L | < \varepsilon$

Com o propósito de entender de que forma a definição formal de limite vem sendo desenvolvido nos livros didáticos, buscamos identificar nas tarefas elementos que nos possibilitem essa compreensão. “A que tipo de exercício teórico-cognitivo o aluno seria levado a realizar por meio dela” (Santos; Almouloud, 2014, p. 550).

Nesse sentido, as técnicas, caracterizadas, também tem um papel fundamental, pois dizem respeito a forma de realizar as tarefas.

As tarefas identificadas nos livros, e suas respectivas técnicas serão analisadas a seguir, a fim de explicitarmos as escolhas/pontos de vista dos autores, em relação ao objeto matemático em questão. Para uma melhor visualização da praxeologia matemática, apresentaremos as tarefas, técnicas, tecnologia e teoria propostas nos livros didáticos analisados, que nos ajudaram a atingir o objetivo da pesquisa.

4.3.1 Guidorizzi (2011)

Tarefa 2 Provar que existe $\delta > 0$ tal que $P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Exercício

Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}$

Nesse tipo de tarefa temos a seguinte proposição.

Dado $\varepsilon > 0$, prove que existe $\delta > 0$ tal que $P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow$ $L - \varepsilon < f(x) < L +$

Esta tarefa também é equivalente à prova que $\lim_{x \to P} f(x) = L$.

Atécnica apresentada para esse tipo de tarefa consiste em aplicar a proposição

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 talque$

$P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow$ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Devemos mostrar que dado um ε qualquer positivo, existe um $\delta > 0$ tal que a proposição acima é verdade. Uma boa sugestão para encontrar δ é partir da desigualdade $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e chegar em $P - \delta < x < P + \delta$.

Para concluir a demonstração, basta mostrar que se $P - \delta < x$ $P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Quadro 6- os 4 Ts na tarefa 2- Guidorizzi (2011)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um	θ_1 Definição formal de limite

número real; Corpo dos reais.	Dado ε>0, existe $\delta > 0$ tal que P– δ< x < P +δ ⇒ L – ε < f(x) < L + ε θ_2 Desigualdades $\theta_{2.1}$ Se a >b e b>c então a >c $\theta_{2.2}$ Se a>b, então a+c > b+c $\theta_{2.3}$ Se a >b e c >0 , então ac>bc $\theta_{2.4}$ Se a >b e c <0, então ac < bc $\theta_{2.5}$ Se a > b então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
Tarefa	**Técnica**
. Provar que existe $\delta > 0$ tal que P– δ< x < P +δ ⇒ L – ε < f(x) < L + ε	Aplicação da definição formal de limite em desigualdade

Fonte: autor

Tarefa 5 Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x)$=L ⇔ $\lim\limits_{X \to P} g(x)$ =k

Exercício

Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x)$=L ⇔ $\lim\limits_{X \to P}[f(x) - L] = 0$

Neste tipo de tarefa combina-se a proposição da definição formal de limite com outras proposições.

Quadro 7- os 4 Ts na tarefa 5- Guidorizzi (2011)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais.	$\theta_{1.2}$ ∀ $\varepsilon > 0$, ∃δ > 0 / 0 < | x – P |< δ ⇒ |f(x) – L | < ε
Tarefa	**Técnica**
Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x)$=L ⇔ $\lim\limits_{X \to P} g(x)$ =k	Combinação entre a definição formal de limite e outras proposições

Fonte: autor

4.3.2 Stewart (2016)

Tarefa 1. Provar que existe δ>0 tal que 0< \| x - P \|< δ ⇒ \| f(x) – L \|< ε

Exercício

Encontre um número δ tal que se | x – 3 | < δ, então | 5x – 15 | < ε,onde ε=0,1

A técnica usada consiste em aplicar a proposição $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que Se 0 < | x – P |< δ então | f(x) – L | < ε.

Nesta técnica devemos mostrar que para qualquer número positivo ε, existe um número positivo δ que satisfaz a proposição acima.

Uma boa sugestão para encontrar δ é partir da tolerância ε, | f(x) – L | < ε e chegar em |x – Pl que a tolerância δ. Encontrado δ,basta mostrar que a proposição se 0 < | x - P|<δ então |f(x) – L |< εé satisfeita.

Quadro 8- os 4 Ts na tarefa 01- Stewart (2016)

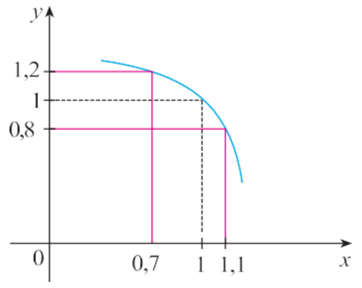
Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais.	$\theta_{1.2}$ $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / 0 < | x – P |< δ ⇒ |f(x) – L | < ε $\theta_{3.1}$ |a| < b ⇔ - b < a< b $\theta_{3.8}$ |ax-ab|=|a|.|x-b|
Tarefa	**Técnica**
Provar que existe δ>0 tal que 0< | x - P |< δ ⇒ | f(x) – L |< ε	Aplicação da definição formal de limite em módulo

Fonte: autor

Tarefa 3 Usar o gráfico para encontrar um número δ tal que se | x – P | <δ então | f(x) – L | <ε

Exercício

Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que: Se | x - 1| < δ então | f9x) - 1< 0,2



Esta técnica consiste em construir e visualizar a área delimitada pelas duas retas horizontais (y = L + ε e y = L – ε) e pelas duas retas verticais (x = P + δ e x= P – δ) formando a tolerância ε e δ, onde para cada ε é possível encontrar um δ tal que

Se $0 < |x - P| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Quadro 9- os 4 Ts na tarefa 03- Stewart (2016)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Geometria Analítica.	θ_4 Plano cartesiano $\theta_{4.1}$ Gráfico de funções
Tarefa	**Técnica**
Usar o gráfico para encontrar um número δ tal que se $\lvert x - P \rvert < \delta$ então $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	Interpretação geométrica da definição formal de limite

Fonte: autor

Tarefa 4 Prove que $\lim\limits_{X \to P} \frac{P(x)}{Q(x)} = L$

Exercício

Demonstre a afirmação usando a definição ε, δ de limite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-8}{x-4} = 6$$

Neste tipo de tarefa f(x)= $\frac{P(x)}{Q(x)}$ geram indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, quando aplicado x_i em f(x), isto é, $f(x_i) = \frac{P(x_i)}{Q(x_i)} = \frac{0}{0}$.

Veja o exemplo:

Note que ao aplicar x=4 na função f(x) temos:

f(4)= $\frac{4^2-2.4-8}{4-4} = \frac{0}{0}$

Nesse caso, devemos fazer uma manipulação algébrica para levantar essa indeterminação.

Quadro 10- os 4 Ts na tarefa 04- Stewart (2016)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais.	θ_1 Definição formal de limite $\theta_{1.2}$ $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ /\ 0 < \mid x - P \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$ θ_5 Propriedades algébricas do corpo dos reais $\theta_{5.8}$ $\forall\ x \in R,\ x \neq 0.\ \exists\ x^{-1} \in R/\ x.x^{-1} = 1$
Tarefa	**Técnica**
Prove que $\lim\limits_{X\to P} \frac{P(x)}{Q(x)} = L$	Manipulação algébrica, substituição e comparações na aplicação da definição formal de limite.

Fonte: autor

Tarefa 6 Prove que $\lim\limits_{X\to P} f(x)$=L

Exercício Demonstre cada afirmação usando a definição ε,δ de um limite.

$$\lim_{x\to -2} (x^2 - 1) = 3$$

Neste tipo de tarefa devemos mostrar que a seguinte proposição é satifeita. Dado ε> 0,prove que existe $\delta > 0$ tal que, $0 < \mid x - P \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$.

Na resolução desta tarefa, podemos em geral obter uma boa escolha para δ partindo da tolerância ε. Encontrado o valor de δ que depende do ε dado, e assim demonstramos a proposição.

Quadro 11- os 4 Ts na tarefa 06- Stewart (2016)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais.	θ_1 Definição formal de limite $\theta_{1.2}$ $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ /\ 0 < \mid x - P \mid < \delta \Rightarrow \mid$

	f(x) – L | < ε
Tarefa	**Técnica**
Prove que $\lim_{X\to P} f(x)$=L	Aplicação da definição formal de limite em módulo.

Fonte: autor

4.3.3 Leithold (1994)

Tarefa 4 Prove que $\lim_{X\to P} \frac{P(x)}{Q(x)}$= L

Exercício

Nos exercícios de 23 a 42, prove que o limite é um número indicado, aplicando a Definição 2.1.1(ver figura 10)

33. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$=-2

Veja que ao aplicar (-1) no limite temos uma indeterminação do tipo 0/0. Para contornas esta situação devemos fazer uma manipulação algébrica para levantar essa indeterminação. Note que x^2-1 pode ser reescrito como x^2-1^2 que por sua vez pode ser reescrito como (x-1).(x+1). Feito isso, perceba que x=1 não está no domínio da função, isto significa que o fator (x+1) não pode ser zero. Desta forma pode-se aplicar a lei do cancelamento no fator do numerador e do denominador, pois ambos são inversos e diferentes de zero, restando apenas o fator (x-1). E assim, temos: (x^2- 1)/(x+1)= (x- 1).(x+1)/(x+1)= (x-1). Ao aplicar a denição formal de limite podemos usar o argumento acima para exibir o delta e assim demonstrar o limite.

Quadro 12- os 4 Ts na tarefa 04- Leithold (1994)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais.	θ_1 Definição formal de limite $\theta_{1.2}$ $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / 0 < | x – P |< $\delta \Rightarrow$ | f(x) – L | < ε θ_5 Propriedades algébricas do corpo dos reais $\theta_{5.8}$ $\forall$ x ϵ R, x $\neq$ 0. $\exists$ x^{-1} ϵ R/ x .x^{-1} = 1
Tarefa	**Técnica**
Prove que $\lim_{X\to P} \frac{P(x)}{Q(x)}$= L	Manipulação algébrica, substituição e comparações na aplicação da definição

	formal de limite

Fonte: autor

Tarefa 6 Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x)$=L

Exercício

25.. $\lim\limits_{x \to 4}(2x + 1) = 9$

Para resolver esta tarefa do tipo T_6, usa-se as mesmas técnicas, tecnologia e teoria da tarefa T_1, pois se tratam de tarefas equivalentes.

Quadro 13- os 4 Ts na tarefa 06- Leithold (1994)

Bloco tecnológico teórico	
Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais.	θ_1 Definição formal de limite $\theta_{1.2}$ $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / $0 < \mid x - P \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$
Tarefa	**Técnica**
Prove que $\lim\limits_{X \to P} f(x)$=L	Aplicação da definição formal de limite em módulo.

Fonte: autor

4.4 Análise das praxeologias modeladas

Neste tópico apresentamos a análise das organizações matemáticas modeladas, que se refere a metodologia, para análise dos livros didáticos, elaborada por Bittar(2017), com intuito de modelar as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, com base nas organizações matemáticas dos livros didáticos (Guidorizzi, 2011; Stewart, 2016; Leithold, 1994), presentes na parte curso e na parte atividades propostas.

Os dados a serem discutidos, tratam da análise que fizemos das praxeologias matemáticas contidas nos livros didáticos, com intuito de apreender se estas se distanciam ou se aproximam da definição formal de limite.

Desse modo pudemos analisar a forma que os livros didáticos, indicados da Ementa de Cálculo 1, do curso Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, apresenta as praxeologias matemáticas, sobre o ponto de vista de uma construção conceitual, da definição formal de limite convergente quando x tende a um ponto P.

Inicialmente mostramos como o objeto matemático, havia sido apresentado pelos autores de cada livro didático. Então trouxemos algumas informações a esse respeito, da parte curso e parte atividades.

Foi possível perceber que todos os livros apresentaram exemplos resolvidos sobre a definição formal de limite, e desses, dois livros (Stewart e Leithold) foram construindo a definição a partir de exemplos numéricos, enquanto o livro de Guidorizzi apresenta a definição formal e quatro gráficos onde compara o que está escrito na definição formal de limite com as informações contidas em cada gráfico.

Guidorizzi comenta o comportamento da imagem da função f(x) que pode se aproximar ou não de um certo número L, quando x está na vizinhança de um ponto p, relacionando esse comportamento com a definição de limite. Essa forma de abordagem do autor, utilizando objetos ostensivos, como os gráficos, contribui para melhorar a percepção geométrica dos alunos, sobre a definição formal de limite, no que diz respeito a tolerância épsilon e delta.

No que diz respeito a parte das atividades propostas, constatamos que Guidorizzi traz, na seção 3.3 destinada a definição formal de limites (épsilon e delta),traz uma bateria de quinze questões, dessas, as cinco primeiras são dirigidas para calcular os limites, uma para provar que a função é contínua e as demais destinadas à provar os limites usando a definição de épsilon e delta, distribuídas em dois tipos de tarefas T_2 e T_5. Observamos que apesar do autor ter comentado a definição de limite utilizando gráficos, para exibir os intervalos épsilon e delta, não utilizou técnicas que privilegiasse esses aspectos na definição formal de limite. Nesse sentido, é importante frisar que “a compreensão de um conceito depende da técnica a que ele é submergido, ou seja, ela depende do sistema de objetos ostensivos e não ostensivos ativados por esta técnica” (Dias e Santos Júnior, 2018, p.544).

O livro de Stewart apresenta na seção 2.4 uma lista de 44 questões, divididas em quatro tipos de tarefas caracterizadas: T_1, T_3, T_4 e T_6 e mais algumas questões destinadas a limites infinitos que não é objeto de nosso estudo. Percebemos que o autor explora o conteúdo utilizando tanto objetos ostensivos quanto não ostensivos, através de gráficos e de sentenças algébricas, o que leva os estudantes a compreender a relação geométrica dos intervalos épsilon e delta com a proposição algébrica descrita na definição formal de limite.

Ao analisarmos o livro de Leithold percebemos que é o único, entre os livros analisados, que introduz a definição formal de limite já na primeira seção do conteúdo.

O autor constrói a definição formal de limite com auxílio de vários valores numéricos assumidos por x que vão se aproximando de um ponto p, e observa o comportamento das imagens desses valores que se aproximam de um certo valor L . Desta forma vai construindo a compreensão que para valores de x muito perto de p, a distância entre x e p é um valor positivo maior que 0, infinitamente pequeno que chamamos de δ, obrigando a imagem desses valores, f(x), a ficar muito perto de L de modo a assumir um valor infinitamente pequeno que chamamos de Є. Observamos que as atividades propostas no livro, um total de quarenta e quatro, são distribuídas em dois tipos de tarefas T_4 e T_6, estas que utilizam apenas a linguagem algébrica.

Ao total dos livros analisados, foram elencadas seis tarefas e cinco técnicas, que denominamos de T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6 e t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5, respectivamente.

No tópico que aborda a identificação/elaboração do quarteto praxeológico matemático, fizemos a retomada das discussões que haviam sido iniciadas na parte curso e atividades propostas, com o propósito de caracterizar os tipos de tarefas, técnicas e elementos tecnológicos e teóricos.

Nossa análise apontou que os tipos de tarefas surgem de uma tarefa T central que é demonstrar que limite de f(x)= L quando x tende a p, isto, equivale à demonstrar que para todo épsilon maior do que zero, existe um delta também maior do que zero tal que satisfaz a condição:

Se zero é menor do que o módulo de x menos p, que é menor do que delta então o módulo de f(x) menos L é menor do que épsilon.

Notação:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/ 0 < |x-P| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Para podermos analisar os livros partimos das questões abaixo:

- De que forma a definição formal de limite foi apresentada nos livros didáticos?
- As tarefas e técnicas utilizadas pelos autores dos livros didáticos, contribuíram para a compreensão da definição formal de limite?
- Os objetos ostensivos e não ostensivos utilizados nos livros didáticos, auxiliaram satisfatoriamente para a construção conceitual da definição formal de limite?

- As tecnologias utilizadas, para esclarecer e justificar as técnicas, foram suficientes? E as teorias, estão bem explicadas, para que as tecnologias possam ser justificadas?

O livro de Guidorizzi apresenta as tarefas T_2 e T_5, e as técnicas t_2 e t_5. Para cada tarefa foi utilizada uma técnica. Na tarefa T_2 é pedido que o aluno demonstre a proposição descrita na definição formal de limite que é dada por meio de desigualdade algébrica. A técnica utilizada requer que o aluno identifique os elementos descritos na proposição que também é dado em forma de desigualdade algébrica: f(x), L e ε, para que após essa identificação, possa demonstrar o que lhe é pedido. Percebemos que a partir da reescrita da tarefa 2, sendo está colocada em forma de desigualdade modular, podemos também resolvê-la pela técnica t_1(Aplicação da definição formal de limite em módulo), no entanto o autor não apresentou a tarefa em forma de módulo como Stewart e Leithold.

A tarefa 5 possui uma complexidade maior, requerendo do aluno um nível de conhecimento matemático mais elevado e conhecimento de técnicas de demonstração. Gostaríamos de salientar, que no tocante da técnica 5, entendemos que não se trata de uma técnica acabada, pronta, mas é a combinação da definição formal de limite com outras proposições. Isso implica dizer que, uma tarefa que relaciona a definição formal de limite, com uma proposição complexa requer uma técnica também complexa. Em outras palavras, na tarefa5, Guidorizzi traz a definição formal de limite de forma mais complexa. Vejamos abaixo a tarefa 5 e uma atividade que se enquadra nesse tipo de tarefa.

Prove que $\lim_{X \to P} f(x)$=L $\Leftrightarrow$ $\lim_{X \to P} g(x)$ =k

Prove que $\lim_{X \to P} f(x)$=L $\Leftrightarrow$ $\lim_{X \to P}[f(x) - L] = 0$

Perceba que na atividade descrita no tipo de tarefa acima temos a combinação de duas proposições: $\lim_{X \to P} f(x)$=L, se relacionando por meio do conectivo bicondicional ($\Leftrightarrow$)com outra proposição $\lim_{X \to P}[f(x) - L] = 0$.Dizer que limite de f(x) quando x tende a p é igual a L significa demonstrar a proposição da definição formal de limite, e que isso só é verdade se, somente si o limite de f(x) menos L quando x tende a p for igual a zero, e vice e versa.

O livro de Stewart apresenta as tarefas T_1; T_3, T_4; T_6 e as técnicas t_1; t_3; t_4.. Na tarefa 1, é solicitado que o aluno demonstre a proposição que é dada por meio da desigualdade modular. Para resolver essa tarefa é utilizado a técnica t_1, que consiste na aplicação da definição formal de limite em módulo. A tarefa 3 consiste em mostrar por meio de um gráfico que existe uma região plana que satisfaz a proposição descrita na definição formal, que dado um número pequeno $\varepsilon > 0$, as retas horizontais y = L –
ε e Y = L + ε formam uma região plana, onde nesta região existe um número positivo
δ tais que as retas verticais x= P + δ e x= P – δ cortam as retas horizontais y= L + ε e y = L – ε formando uma região delimitada pelo intervalo (L – ε, L + ε) ∩ (p – δ,P + δ), onde para x ϵ Df, temos a seguinte afirmação:

$$P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

ou seu equivalente em valor absoluto

$$|x-P| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A tarefa 4, descrita por uma função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ gera uma indeterminação do tipo 0/0. As funções racionais onde f(x) não apresentam indeterminação não estão tipificadas neste tipo de tarefa, estão incluídas nas tarefas do tipo T_6. A técnica, t_4, utilizada para demonstrar esse tipo de tarefa, tem como propósito levantar a indeterminação através de manipulações algébricas. A tarefa 6 é equivalente as
tarefas T_1 e T_2, pois dizer que $\lim_{X \to P} f(x)$=L significa provar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|x-P| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, que corresponde a tarefa 1, e provar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, que corresponde a tarefa 2, que tem por técnicas de resolução as técnicas t_1 e t_2. No entanto, Stewart só utilizou a técnica t_1, para resolução da tarefa 6.

O livro de Leithold apresenta as tarefas T_4 e T_6, e as técnicas t_1 e t_4. Diferentemente de Stewart, as tarefas elencadas por Leithold apresenta valores numéricos para épsilon, o que contribui para uma melhor visualização e entendimento do intervalo épsilon delta.

Percebemos que as tarefas e técnicas elencadas por Guidorizzi abordam uma parte do alcance da compreensão total de limite. Esta compreensão total da definição formal de limite é completada quando unimos às tarefas e técnicas elencadas por

Guidorizzi, as que foram expostas por Stewart e Leithold. Assim, podemos depreender que as tarefas e técnicas caracterizadas nos livros contribuem para a compreensão da definição formal de limite, quando são desenvolvidas de forma conjunta.

No que tange os elementos tecnológicos e teóricos percebemos que as três obras em parte dialogam com os mesmos elementos. Porém, apenas o livro de Guidorizzi aplica as tecnologias relacionadas a desigualdades algébricas : θ_1 Definição formal de limite; Dado ε>0, existe $\delta > 0$ tal que $P - \delta < x < P + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$; θ_2 Desigualdades; $\theta_{2.1}$ Se a >b e b>c então a >c; $\theta_{2.2}$ Se a>b, então a+c > b+c; $\theta_{2.3}$ Se a >b e c >0 , então ac>bc; $\theta_{2.4}$ Se a >b e c <0, então ac < bc; $\theta_{2.5}$ Se a > b então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, na tarefa 2, cuja proposição é descrita por meio de uma desigualdade algébrica. Já no livro de Stewart, é utilizada a tecnologia que envolve a desigualdade modular na tarefa 1 e tarefa 6, e analogamente Leithold utiliza essa mesma tecnologia na tarefa 6, com a diferença de que o épsilon possui um valor numérico. Outros elementos tecnológicos identificadosnos livros foram: Limite; Vizinhança de número real; Ponto de acumulação de um número real; Corpo dos reais e Geometria Analítica.

Identificamos que cada tarefa possui elementos tecnológicos e teóricos. O conjunto das tarefas possuem o conjunto de todas tecnologias e teorias que fundamentam a definição formal de limite. Logo, para compreendermos de forma ampla a definição formal de limite, é necessário que sejam consideradas todas as tecnologias e teorias elencadas.

A partir das análises das praxeologias, verificamos que os livros didáticos contribuem para a construção conceitual, na definição formal de limite, desde que desenvolvidas de forma conjunta, pelas três obras, pois no livro de Guidorizzi essa definição é apresentada com auxílio de gráficos, e nos demais livros é construída a partir de valores numéricos, e combinando essas duas formas de apresentar a definição, entendemos que os estudantes têm a possibilidade de compreender a partir de diferentes abordagens, tanto a algébrica quanto a geométrica. Corroborando com esse assunto, Santos e Saddo Almouloud (2014) destacam a necessidade da exploração de mudanças de registros em uma mesma tarefa, para que os estudantes possam compreender melhor os exercícios elencados. “Alguns exercícios poderiam ser mais bem compreendidos se fossem trabalhados em diferentes registros(...)” (p.568). A abordagem geométrica permite que os alunos visualizem o que diz a proposição, já a abordagem algébrica possibilita que os estudantes possam desenvolver a percepção matemática, as manipulações algébricas dos intervalos épsilon e delta.

5. CONSIDERAÇÕES

A pesquisa procurou analisar os livros didáticos, que fazem parte da ementa do curso Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, Campus Caruaru, sobre o ponto de vista das praxeologias matemáticas na definição formal de limite convergentes quando x tende a um ponto p. Para compreender essa questão, utilizamos como aporte teórico-metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta elaborada por Chevallard (1991, 1999) e colaboradores, a partir do estudo das praxeologias propostas em livros didáticos.

Baseado no modelo de análise praxeológica de Marilena Bittar (2017), buscamos modelar/analisar as organizações matemáticas, contidas nos livros (Guidorizzi, 2011; Leithold, 1994 e Stewart, 2016), sobre a definição formal de limite, para que dessa forma pudéssemos perceber se as escolhas dos autores contribuem para o ensino e aprendizagem dessa definição.

Ao longo do estudo trouxemos uma discussão sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), e em especial o conceito formal de limite, e as dificuldades na apreensão desse conceito, na licenciatura em matemática. Sobre essa questão, Rodrigues et al (2017, p. 37) afirmam que "(...) as instituições responsáveis pelo processo de ensino e aprendizagem da Matemática devem refletir sobre a condução que é seguida atualmente, se realmente estão preparando os alunos e futuros professores para compreender os conceitos matemáticos e suas aplicações". Com o intuito de entender como vem sendo desenvolvido o estudo da definição formal de limite, procuramos na literatura da área, alguns trabalhos que pudessem nos dar algum indicativo. Então a partir de uma revisão sistemática, de Teses e Dissertações, no Banco de Teses e Dissertações da Capes, conseguimos verificar que ainda são poucos os estudos que envolvem o ensino e aprendizagem do conceito formal de limite, e que a maioria das pesquisas estão concentradas, nas regiões Sul e Sudeste, o que nos leva a problematizar sobre a necessidade de estudos voltados para o conceito formal de Limite em nossa região.

A ideia de investigar essa temática, parte do pressuposto de que esse conhecimento é essencial para a compreensão de CDI, e que de acordo com pesquisas que vem sendo realizadas (Amorim, 2011, Barbosa, 2021, entre outros) muitos estudantes vêm apresentando dificuldades na compreensão da definição formal de limite, por ser considerado como algo difícil e de grande complexidade.

Observamos as praxeologias matemáticas, nos livros didáticos, a partir do quarteto praxeológico (tarefas, técnicas; tecnologias e teorias). Conseguimos identificar seis tipos de tarefas, e cinco técnicas. A caracterização e análise das tarefas e técnicas evidenciaram que quando são desenvolvidas de forma conjunta, contribuem para a compreensão da definição formal de limite.

Ao analisarmos os elementos tecnológicos e teóricos nos livros didáticos pudemos depreender que para entender de forma ampla a definição formal de limite, é necessário considerar todas as tecnologias e teorias elencadas.

A partir das análises das praxeologias, pudemos constatar que as praxeologias utilizadas nos livros didáticos contribuem para a construção conceitual, na definição formal de limite, desde que desenvolvidas de forma conjunta, pelas três obras. No livro de Guidorizzi essa definição é apresentada com auxílio de gráficos, e nos demais livros é construída a partir de valores numéricos, e combinando essas duas formas de apresentar a definição, entendemos que os estudantes têm a possibilidade de compreender a partir de diferentes abordagens, tanto a algébrica quanto a geométrica. Acreditamos que a discussão iniciada nesse estudo, a partir da análise do quarteto praxeológico, sobre a definição formal de limite, presente nos livros didáticos, possibilitou uma maior reflexão acerca da construção de conceitos abstratos pelos livros didáticos. A intenção desse trabalho não foi esgotar a discussão sobre o tema, mas contribuir com o debate, sobre a construção conceitual da definição formal de limite, e colaborar com as investigações futuras sobre o tema.

Nesse sentido, elencamos como futuras proposições de investigações, questões que tratam da definição formal de limites no infinito e limites infinitos, pois são objetos matemáticos que complementam a compreensão da definição formal de limite, no entanto são definições pouco exploradas nos livros de cálculo, e que por questões de tempo, não tivemos como tratar nessa pesquisa.

REFERÊNCIAS

ABREU, Osvaldo Honório de. **Discutindo algumas relações possíveis entre instituição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensinode limites e continuidade em cálculo** I.2011. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ALMEIDA, F. E. L.**. O Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação na 7º Série do Ensino Fundamental**.Dissertação de Mestrado, UFRPE, 2009.

ALVES, D. O**. Ensino de funções, limite e continuidade em ambientes computacionais informatizados**: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010.

AMORIM, Lílian Isabel Ferreira**. A (re)construção do conceito de limite do cálculopara a análise [manuscrito]** : um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

ALMOULOUD, SADDO AG. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba:Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **As transformações do saber científico ao saber ensinado**: o caso do logaritmo. Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, Editora UFPR, 2011.

ALMOULOUD, SADDO AG; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso(ORG). **A Teoria Antropológica do Didático face ao professor de matemática**. 1. Ed. – Curitiba, PR: CRV, 2018.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. 2009.290f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife,2009.

ARAÚJO, Matheus Marques de**. A construção do conceito de limite através da resolução de problemas**- 2020. 146 p. Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

ASSIS, Eliane Maria do Nascimento**. Limites**: história e aplicações.2017 Dissertação (Mestrado Profissional em matemática) - Universidade Federal de Viçosa, 2017.

BACHELARD, G. **A Formação do Espírito Científico**. São Paulo:Contraponto, 1996.

BARBOSA, Edelweis José Tavares. **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. 2017. 252 f. Tese (Programa de Pós- Graduação em Ensinodas Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.

BARBOSA, João Batista Mendes et al. **Análise das reprovações em grande escala na disciplina de Cálculo I nos cursos de engenharia**. XLI Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil, 2021.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados nocurso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**.1999. Tese de Doutorado.- Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BATISTA, Leonardo Augusto de Lemos. **Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos**. 2019. Dissertação (Educação em Ciências e Matemática) -Universidade Federal dePernambuco, Caruaru, 2019.

BESSA DE MENEZES, M. Investigando o Processo de Transposição Didática Interna: o caso dos quadriláteros. Dissertação de Mestrado não publicada. Programa de Pósgraduação em Educação – Mestrado em Educação – UFPE-PE, 2004.

BESSA DE MENEZES, M.. **Praxeologia do Professor e do Aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau**. Tese de Doutorado, UFPE, 2010.

BÍBLIA. Provérbios. In: **Bíblia Sagrada**. Tradução de João Ferreira de Almeida Fernando. 1ª Edição. Santo André. Geográfica Editora, 2022.

BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológicapara análise de livros didáticos**. Zetetike, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364–387, 2017.

BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **La miséria del "generalismo pedagógico" ante el problema dela formación del professorado.** Aportaciones de la teoría antropológicade lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007a.

BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **25 años de transposición didáctica**. In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)/ L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007b.

BRANDÂO, Jefferson Dagmar Pessoa. **O papel do livro didático no processo de ensino aprendizagem: uma introdução do conceito de função**. Campina Grande 2013.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer 1.302/2001**. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília, 2001.

BRITO MENEZES, A.P.A.. **Contrato Didático e Transposição Didática**: Inter - Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado, UFPE, 2006.

BROUSSEAU, G. **Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques.** RDM, Grenoble, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

BROUSSEAU, G.. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didaticas: Conteúdos e Metodos de Ensino** / Guy Brousseau; Apresentação de Benedito Antonio da Silva; Consultoria Tecnica de José Carlos Miguel; [Tradução Camila Bogea].– São Paulo: Ática, 2008.

CAETANO NETO, Gustavo Alves. **Uma ideia sobre o conceito de limite ao longo da história da matemática.** 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016

CARVALHO, Osnildo Andrade. **A noção de Limite**: um estudo da organização de um percurso formativo digital.2022. tese(Doutorado), UFBA, 2022.

CHEVALLARD, Y.. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir eneigné, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y.. **La transposición didáctica**: del saber sábio al saber enseñado.Buenos Aires: Aique, 1991.

CHEVALLARD, Y.. **Conceitos Fundamentais da Didática**: as perspectivas trazidas, poruma abordagem antropológica. In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.

CHEVALLARD, Y.. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológicade lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques**.Vol 19, nº 2, 1999.

CHEVALLARD, Y.. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**.In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lodidáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CHEVALLARD, Y.. **A Teoria Antropológica do Didático face ao professor de matemática.** IN: ALMOULOUD, SADDO AG; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES,Afonso. A Teoria antropológica do Didático: Princípios e Fundamentos.
1. Ed. – Curitiba, PR: CRV, 2018.

CORRÊA, Francisco Júlio Sobreira de Araújo. I**ntrodução à Análise Real**. Disponível em: https://www.mat.unb.br/furtado/homepage/verao/livro_de_analise- novo.pdf

DIAS, Marlene Alves; SANTOS JÚNIOR, Valdir Bezerra dos. Elementos da Teoria Antropológica do Didático para análise das propostas institucionais brasileiras e metodologias de atividades e percursos de estudo e de pesquisa. In: ALMOULOUD, Saddo AG. et al (Org.). **A Teoria Antropológica do Didático**: Princípios e Fundamentos.-
.1ed.- Curitiba, PR, 2018.

DOUMBIA, CheicK Oumar. **Um Modèle didactique de reference pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion delimite au Mali**.2020. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências- Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

SANTOS, M. B. S.dos; ALMOULOUD, S. A. **O conceito de limite**: estudos das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos. Perspectivas em Educação Matemática, Campo Grande, v. 7, n. temático, p. 537-572, 2014.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: Registros de Representação Semiótica.Campinas SP: Papirus, 2003.

FARIA, Thiago. **Proposta de Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral**.2019. Dissertação (Mestrado Profissional) Faculdadede Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2019.

FERREIRA, Ronaldo Dias. **Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de ciências exatas**.2021. Tese. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Doutorado em Educação Matemática, São Paulo, 2021.

FIGUEROA, T. P.; ALMOULOUD, S. A**. Análise do tempo e dimensão epistemológica do saber**: limite de uma função real. Amazônia Revista de Educaçãoem Ciências e Matemáticas, Belém, v. 14, n. 32, p. 145-159, jul.-dez. 2018.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**.6.ed. São Paulo: Atlas,2008.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo Volume 1**. – 5 ed. -Rio de Janeiro:LTC, 2011.

HOLANDA, Dorghisllany Souza. **Investigando as Imagens Conceituais de estudantes universitários em relação ao conceito de limite de função de umavariável real**. – Caruaru, 2015.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara.(Org).**Educação Matemática: uma nova introdução**.-.3.ed.-São Paulo: Educ, 2008.

LARSON, Ron; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H..**Cálculo Volume1**. 1º ed. São Paulo: McGraw-Hill 2006.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3.ed.São Paulo, SP: Harbra, 1994.

LOPES, A. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação noscursos de Cálculo da UFRGS**. Matemática Universitária, n. 26/27, p. 123-146, 1999. Disponível em: https://rmu. sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/ n26_n27_

LUNA, Sérgio V. De. **O falso conflito entre tendências metodológicas**. IN: SILVA JÚNIOR, Celestino alves da et al. Metodologia da pesquisa educacional. 11.ed- São Paulo, Cortez, 2008.

MACÊDO, Josué Antunes de; GREGOR, Isabela Cristina Soares. **Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.**Disponível em:https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1804

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (org). **Teoria das Situações Didáticas**. EDUC (Série Trilhas) (p.77-113), São Paulo. 2008.

MATEUS, Pedro. **Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos: uma análisedo ponto de vista da organização praxeológica. 2007**. 188 f. Dissertação (Mestradoem Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limitede função**. 2013. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Institutode Educação Matemática e Científica, Belém, 2013.

MINAIO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde.-14.ed-São Paulo: 2014.

MIRANDA, Warlisson Inácio de. **Uma proposta de ensino diferente do conceito deLimite.** 2017.Dissertação(Mestrado em Matemática)Universidade Federal do Triângulo Mineiro.Uberaba - Minas Gerais, 2017.

MORAES, Mônica Suelen Ferreira de. **Processos de superação dos obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite de função:** potencialidades conceituais e didáticas para a formação de professores de matemática. 2021.Tese (Educação emCiências e Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso. Mato Grosso, 2021.

MOURA, Daniela Alves da Silveira. **Perspectivas no estudo de limite**: Numa perspectiva figural e conceitual - foco em objetos de aprendizagem. 2014.Dissertação em Ensino de Ciências e Matemática -Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

NASCIMENTO, Jorge Costa do. **O conceito de limite em cálculo**: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática.2003. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) Universidade Federal de Pernambuco, 2003.

NASCIMENTO, Ketly Dos Santos et al.. **Análise do índice de reprovação e evasão na disciplina de cálculo diferencial e integral i da ufcg – cuité.**. Anais III CONAPESC... Campina Grande: Realize Editora, 2018.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental**: uma análise praxeológica. 2008. Dissertação (Mestrado). Campo Grande, MS, 2008.

OLIMPIO JUNIOR, Antonio. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática**: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.2006 .Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática: uma análise da influência Francesa.**
Belo Horizonte:Autêntica, 2008.

PEREIRA, Carolina Conrado. **Metodologia da resolução de problemas e a construção do conceito de limite em uma turma do 3º ano do ensino médio**.2015. 89f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática)
- Centro Universitário Franciscano, Santa Maria – RS, 2015.

PEREIRA, Rúbia Carla Pereira; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela Paiva; FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira Freitas. **Vigilância Epistemológica de Chevallard em um estudode caso sobre o conceito de divisibilidade em uma turma do 6º ano do ensino fundamental**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo, 2016.

PIMENTEL, Robson Dias. **Sistema de equações do 1° grau**: uma análise das praxeologias do professor de matemática em conformidade com o livro didático. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2023.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico.- 2. Ed.- Novo Hamburgo, 2013.

Projeto Pedagógico do Curso de Matemática-Licenciatura (PPC). Universidade Federal de Pernambuco Centro Acadêmico do agreste.Caruaru, 2017. Disponível em: file:///C:/Users/User/Downloads/Pasta% 20textos%20da%20pesquisa% 20de%20Elson/PPC%20Matem%C3%A1tica.pdf

RODRIGUES, Bárbara Denicol do Amaral; MENEGHETTI, Cinthya Maria Scneider; POFFAL, Cristiana Andrade. **Limites de funções reais de uma variável**. Editora da FURG, Rio Grande, 2016.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológicas**. 2003. Tese(Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2003.

RODRIGUES, Rochelande Felipe; DE MENEZES, Marcus Bessa; DOS SANTOS, Marcelo Câmara. **Licenciatura em matemática e o percurso de estudo e pesquisa**: uma proposta do modelo epistemológico de referência para o ensino e aprendizagem do conceito de função. Amazônia: *Revista de Educação em Ciências eMatemáticas*, v. 13, n. 27, p. 36-50, 2017.

ROSA, Chaiane de Medeiros Rosa et al. **Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral**: um Estudo de Caso. Rev. Inter. Educ. Sup. Campinas, SPv.5 1-16, Campinas, 2019.

SANTANA FILHO, FLORISVAL. **Análise textual: outro olhar sobre a análise delivros didáticos**. Dissertação (Educação Matemática) Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS 2017.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. **A Teoria Antropológica do Didático**: uma Releitura Sobre a Teoria. Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015.

SANTOS, Maria Bethânia Sardeiro dos. **Um olhar para o conceito de limite**: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. 2013. 388 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SANTOS, Maria Bethânia Sardeiro dos; ALMOULOUD, Saddo Ag. **O Conceito de Limite**: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos. Perspectivas da Educação Matemática – UFMS – v. 7, número temático – 2014.

SANTOS, Rodiney Marcelo Braga dos; FERNANDES, Beatriz da Costa; SOUZA, Regina Maria Pereira de; SOUSA, Jonas Andrade de; MARTINS, José Doval Nunes. **Análise do índice de retenção da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I no IFPB – Campus Cajazeiras e proposta de intervenção didático-pedagógica a partir doserviço da web 'Google Sala de Aula**. Revista principia, 2019.

SENA, Thainnã T. Oliveira; SOUZA, Ademária A. de. **Causas de dificuldades no Ensino-Aprendizagem de Cálculo diferencial e integral na perspectiva dos alunos e dos professores do curso de matemática da UFAL – Campus de Arapiraca**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015. Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**.-22.ed.São Paulo: Cortez, 2002.

SILVA, M. J. F.. **Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para Quinta Série**. Tese de Doutorado, PUC – SP, 2005.

SILVA, Claudinéia Gonçalves Rocha. **Ensino e Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Visão de Acadêmicos de Licenciatura Plena em Matemática**. Monografia, IFMT, MT, 2016.

SILVA NETO, João Pereira da. **Um estudo sobre o ensino de limite.um tratamento computacional com aplicações**.2006. Dissertação (Ensino da matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SIMMONS, George F..**Cálculo com geometria analítica**.-São Paulo,1987.

SOARES, Gabriel de Oliveira. **O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: um estudo à luz dos três mundos da matemática**.2018. Dissertação Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática- CentroUniversitário Franciscano, Rio Grande do Sul, 2018.

SOUZA, Gladys Maria Bezerra. **Estudo da aprendizagem do conceito de limite fundamentado na teoria da aprendizagem significativa aplicado à licenciaturaem matemática.** 2014. Dissertação do Mestrado Profissional de Ensino de Ciências - Universidade Estadual de Roraima, Boa Vista-RR, 2014.

SOUZA, Naiara Fonseca. **Contextualização no ensino da álgebra: análise de livros didáticos do 7º ano.** 2014.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

STARON, F. **O monstro da reprovação em Cálculo Diferencial Integral. In: Conversando sobre extensão**, 14., 2016, Ponta Grossa. Anais… Ponta Grossa, 2016. p.1-7.

STEWART, James; CLEGG Daniel; WATSON, Saleem. **Cálculo Volume 1**.5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SWOKWSKI, Earl William.**Cálculo com Geometria Analítica**.- 2.ed. – São Paulo: Makron Books, 1994.

VERBISCK, Janielly Taila dos Santos. **Uma análise praxeológica da proposta de ensino de probabilidade em livros didáticos da educação básica**. 2019. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2019.

VERÍSSIMO, Manuella Ferreira. **Um estudo sobre o insucesso na disciplina de cálculo diferencial e integral sob a visão dos alunos**.2020. Trabalho de conclusãode curso (Graduação em Matemática) Universidade Estadual da Paraíba, 2020.