UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - UFPE
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE - CAA
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE - NFD
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

JEAN MARTINS DE ARRUDA SANTOS

UMA ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE COMBINATÓRIA DO 12º PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Caruaru-PE
2017

JEAN MARTINS DE ARRUDA SANTOS

UMA ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE COMBINATÓRIA DO 12º PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Núcleo de Formação Docente da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Área de concentração: ensino

Orientadora: Profª. Meª. Cristiane de Arimatéa Rocha.

Caruaru-PE
2017

Catalogação na fonte:

Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 - 1242

S237a Santos, Jean Martins de Arruda.
Uma análise das atividades de combinatória no 12º Programa de Iniciação Científica da OBMEP sob a ótica da teoria antropológica do didático. / Jean Martins de Arruda Santos. – 2017.
60f.; il. : 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Análise combinatória. 2. Material didático. 3. Teoria antropológica. 4. Matemática - Estudo e ensino. I. Rocha, Cristiane Arimatéa (Orientadora). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-457)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática-Licenciatura

UMA ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE COMBINATÓRIA DO 12º PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

JEAN MARTINS DE ARRUDA SANTOS

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e ______________ em 18 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora:

____
Prof. Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientadora)

____
Prof. Marcos Luiz Henrique
(Examinador(a) Interno(a))

____
Prof. Valdir Bezerra dos Santos Júnior
(Examinador(a) Interno(a))

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe *Marluce Maria de Arruda Martins,* ao meu pai *João Paulo Martins* e a minha avó *Maria Josefa da Conceição* (in memorian), cujos ensinamentos me fortaleceram nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta etapa na minha vida. Registrarei aqui meus agradecimentos às pessoas cuja participação na minha formação se deu de forma mais significativa. Porém isso não significa que as outras pessoas não contribuíram.

Agradeço antes de tudo a Deus pela oportunidade que me foi concedida de compartilhar tamanha experiência.

Agradeço a minha orientadora Cristiane de Arimatéa Rocha (Cris) pela paciência e dedicação que teve comigo ao longo do desenvolvimento da pesquisa. A ela meu muito obrigado.

Meus sinceros agradecimentos aos professores Valdir Bezerra dos Santos Júnior e Marcos Luiz Henrique por terem aceitado o convite para participar de minha banca examinadora e terem dado uma valiosa contribuição para melhoria do texto final.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais João Paulo Martins e Marluce Maria de Arruda Martins pelos ensinamentos tão valiosos; e também ao meu irmão Damião Martins e minha cunhada Wilza Lira pela acolhida nos momentos difíceis.

Agradeço ao professor Jorge Antônio Hinojosa Vera do Dep. de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco pelas suas atenciosas orientações durante minha atuação no 12º Programa de Iniciação Científica Júnior da OBMEP.

Agradeço aos meus queridos alunos do 12º PIC-OBMEP pelos longos momentos de aprendizagens que me proporcionaram, são eles: Juan Gustavo (RN), Jussiane Martins (CE), Maria Geyza (PE), Raissa Scorsatto (RS), Rebeca Fontoura (RJ) e Rodrigo Porto (RJ). Carinhosamente chamados por mim de “Pitagorinhas”.

Agradeço aos meus colegas de curso pelos momentos de alegria e de aprendizagem que me proporcionaram.

Agradeço aos meus amigos Jeferson Lima e Joelmir Moraes, aos quais tive a honra de dividir toda minha estadia em Caruaru-PE.

Não poderia deixar de agradecer ao meu eterno professor José Alves dos Santos. Um exemplo de profissional que sempre me ensinou de forma competente. Meu muito obrigado.

O sonho

Sonhe com aquilo que você quer ser,
porque você possui apenas uma vida
e nela só se tem uma chance
de fazer aquilo que quer.

Tenha felicidade bastante para fazê-la doce.
Dificuldades para fazê-la forte.
Tristeza para fazê-la humana.
E esperança suficiente para fazê-la feliz.

As pessoas mais felizes não têm as melhores coisas.
Elas sabem fazer o melhor das oportunidades
que aparecem em seus caminhos.

A felicidade aparece para aqueles que choram.
Para aqueles que se machucam
Para aqueles que buscam e tentam sempre.
E para aqueles que reconhecem
a importância das pessoas que passaram por suas vidas.

Clarice Lispector.

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa foi identificar a abordagem de Análise Combinatória no 12º Programa de Iniciação Científica da OBMEP na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1991). Proposta por Yves Chevallard e seus colaboradores, esta teoria discute que os objetos matemáticos são entidades cuja existência está condicionada aos sistemas de práticas dentro de uma instituição. Neste trabalho, a referida teoria tem papel fundamental, sendo utilizada tanto para fins de fundamentação teórica quanto para fins de ferramenta metodológica de pesquisa. Mais precisamente, utilizamos um dos conceitos da TAD, conhecida por praxeologia, na análise e discussão dos dados coletados. Neste sentido, nos propomos a analisar as Organizações Matemáticas relativas aos problemas de Combinatória, tomando o material de apoio ao ensino do 12º PIC-OBMEP como meio de coleta de dados. A análise dos problemas nos possibilitou concluir que as tarefas são semelhantes, e as técnicas relativas às tarefas são repetitivas. No entanto, as técnicas utilizadas possibilitam a generalização, sempre justificadas por meio do discurso tecnológico-teórico a ela associadas.

Palavras-chave: Material Didático. Obmep. Análise Combinatória. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

The objective of this research was to identify the approach of Combinatorial Analysis in the 12th Scientific Initiation Program of OBMEP from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics - TAD (CHEVALLARD, 1991). Proposed by Yves Chevallard and his collaborators, this theory discusses that mathematical objects are entities whose existence is conditioned to the systems of practices within an institution. In this work, the aforementioned theory plays a fundamental role, being used both for the purposes of theoretical foundation and for purposes of a methodological research tool. More precisely, we use one of the concepts of TAD, known as praxeology, in the analysis and discussion of collected data. In this sense, we propose to analyze the Mathematical Organizations related to the problems of Combinatorics, taking the material to support the teaching of the 12th PIC-OBMEP as a means of collecting data. The analysis of the problems allowed us to conclude that the tasks are similar, and the techniques related to the tasks are repetitive. However, the techniques used allow the generalization, always justified by the technological-theoretical discourse associated with it.

Keywords: Learning Material. Obmep. Combinatorial Analysis. Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Programa de Iniciação Científica Júnior da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (PIC-OBMEP) tem uma importante função social, pois a partir dele muitos estudantes da Educação Básica podem ampliar seus conhecimentos e se prepararem para uma futura carreira profissional e acadêmica. Desenvolvido em parceria com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, tal Programa abrange todos os estados brasileiros e conta com a participação de milhares de jovens todos os anos.

Meu interesse pelo PIC vem da época em que participava da OBMEP no intuito de ser medalhista e assim poder fazê-lo parte. Algo que não ocorreu. Entretanto, anos mais tarde, acabei sendo admitido como professor do Programa. Desde então meu interesse pelo mesmo ganhou mais proporção e a vontade de realizar estudos sobre o tema ainda mais significado.

O Material Didático do PIC é desenvolvido por professores com ampla experiência, tanto em termos de pesquisa acadêmica quanto em termos pedagógicos. Vale destacar que seu projeto pedagógico apresenta uma proposta diferenciada e voltada para o desenvolvimento de competências pelo aluno na Matemática. Além disso, os conteúdos selecionados são estruturados de modo a favorecer tal desenvolvimento.

Um dos temas trabalhados no PIC é a Combinatória.

A Análise Combinatória se configura como uma área da Matemática Discreta que permite saber o número de objetos de um conjunto finito sem a necessidade de contá-los por meio da enumeração. Para tanto, a Análise Combinatória dispõe de um conjunto de técnicas, as quais isso se torna possível. Além disso, em relação à formação do pensamento matemático, a Análise Combinatória tem papel fundamental ao permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de investigação e dedução.

Vale salientar que os conceitos básicos da Análise Combinatória estão representados pelo Princípio Aditivo e pelo Princípio Multiplicativo, cujas aplicações compõem os pilares fundamentais para a formação do raciocínio combinatório e para a resolução dos problemas de Contagem (TEIXEIRA, 2014).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) o estudo da Análise Combinatória deve ser iniciado nos anos iniciais do Ensino

Fundamental. Para o *National Council of Teachers of Mathematics – NCTM* (2000) é recomendável que as ideias da Análise Combinatória sejam introduzidas no ensino de Matemática logo na pré-escola.

Assim, é necessário investigar as estratégias usadas nos processos de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, uma vez que

> É na elaboração de estratégias e na resolução de problemas que o estudante estabelece processos cognitivos importantes que não podem ser desenvolvidos por meio de um ensino baseado na memorização sem compreensão ou na sistematização precoce de conceitos. (PERNAMBUCO, 2012, p. 92).

Diante do exposto resolvemos realizar o presente estudo, cujos objetivos estão descritos a seguir.

1.1 Objetivo geral

Se constitui em *analisar o tratamento da Combinatória no material de apoio ao ensino do 12º PIC-OBMEP sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.*

Para atingir tal objetivo estabelecemos alguns objetivos específicos.

1.2 Objetivos específicos

- Estudar os tipos de tarefas sobre Combinatória, presentes no material de apoio ao ensino do 12º PIC-OBMEP.
- Compreender as Organizações Matemáticas e Didáticas em torno dos tipos de tarefas predominantes no material de apoio ao ensino de Combinatória do 12º PIC-OBMEP.

Estes objetivos tentam responder a seguinte questão de pesquisa: Qual é a Organização Matemática e Didática apresentada no material de apoio do 12º PIC-OBMEP em relação ao conteúdo de Combinatória?

Para realizar o presente estudo utilizamos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático – TAD desenvolvida pelo pesquisador Yves Chevallard e seus colaboradores. Esta teoria oferece instrumentos de investigação de atividades matemáticas, se configurando de grande relevância na análise de materiais didáticos.

Apresentamos a seguir um panorama geral dos capítulos que compõem este Trabalho de Conclusão de Curso.

No primeiro capítulo fazemos uma apresentação breve do *tema*, elencando a *justificativa*, a *problemática*, assim como os *objetivos* que guiaram o desenvolvimento da pesquisa.

No segundo capítulo do presente estudo tratamos da *Teoria Antropológica do Didático*, ao qual apresentamos os conceitos que consideramos fundamentais para a compreensão de nosso trabalho. É dada ênfase à ideia de Praxeologia Matemática ou Organização Matemática, cujo significado é de suma importância na análise e discussão dos dados da pesquisa.

No terceiro capítulo do trabalho apresentamos algumas *técnicas da Análise Combinatória*. Nele procuramos mostrar que o Princípio Fundamental da Contagem – PFC é de fato a base da obtenção de outras técnicas usadas no ensino da Análise Combinatória em nível de Ensino Básico.

O quarto capítulo do trabalho compõe os *procedimentos metodológicos*. Nele discorremos sobre os caminhos percorridos por nós para o desenvolvimento da pesquisa.

No quinto capítulo do trabalho apresentamos os tipos de tarefas assim como a *Organização Matemática das atividades de Combinatória,* presentes no material de apoio ao ensino do PIC-OBMEP, destacando as técnicas utilizadas e o discurso tecnológico-teórico referentes às tarefas.

Por fim, o sexto capítulo é dedicado às *considerações finais* do nosso trabalho.

2 ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Os diversos fenômenos com caráter didático que permeiam a sala de aula são estudados muitas vezes por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta pelo pesquisador francês Yves Chevallard (1998). Ela nos permite responder a diversas questões de ordem didática que dizem respeito à sala de aula (CÂMARA DOS SANTOS & BESSA DE MENEZES, 2015).

A Teoria de Chevallard e seus colaboradores deve

> [...] ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises. (CHEVALLARD, 1998, p. 92, tradução nossa).

Em outras palavras, a TAD nos possibilita analisar de um modo mais abrangente boa parte dos diversos aspectos que compõem os fenômenos didáticos na sala de aula, mas não se restringindo a ela.

A TAD se apresenta como uma extensão da Teoria da Transposição Didática (TTD) também desenvolvida por Chevallard, permitindo expandir as relações entre os objetos de ensino para aquém da sala de aula.

De acordo com Chevallard (1998)

> Na prática, as primeiras análises propostas na transposição didática foram limitadas a distinguir objetos matemáticos, paramatémáticos e protomatômicos. A expansão da estrutura, realizada por necessidades analíticas, me levou a propor uma teoria em que qualquer objeto poderia aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto matemático, mas também existe a escola objeto, a Objeto professor, o objeto aprender, o objeto saber, o objeto dor de dente, etc. (p. 92, tradução nossa).

Um dos pontos mais importante tanto da TAD quanto da TTD é o de considerar a função das Instituições para a análise dos fenômenos didáticos. Em sua abordagem antropológica, Chevallard evidencia a função das Instituições no processo didático, e quando tratamos da escola, normalmente composto pelo professor, aluno e saber.

2.1 As noções primitivas e suas relações

Para compreender a TAD é necessário estabelecer à priori os conceitos fundamentais, aos quais Chevallard os denomina de *Objetos* (O), *Pessoas* (X) e *Instituições* (I).

Na TAD, "Objeto é considerado toda entidade, seja material ou não, existente para no mínimo um indivíduo" (CHEVALLARD, 1998, p. 81, tradução nossa). Além disso, têm-se os objetos como elementos básicos da teorização de Chevallard e seus colaboradores (MAIA, 2008). Como exemplos de Objetos matemáticos podemos citar os números naturais, os triângulos, os quadriláteros, entre outros. Vale destacar que, segundo Chevallard (1998), tudo pode ser considerado como objeto dependendo apenas do contexto em que ele está inserido. Assim, a tarefa a ser realizada pelo aluno, o livro didático, ou até mesmo o quadro negro são também objetos matemáticos na perspectiva da TAD.

Um fator importante na existência de um objeto está no poder de reconhecimento pela pessoa X ou instituição I. Esse reconhecimento ocasiona uma relação entre a pessoa e o objeto denotada por R(X, O), ou em outro caso entre o objeto e a instituição denominada por R(O, I). De acordo com o autor

> Do ponto de vista da semântica da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente. Simplesmente, podemos dizer que o objeto O existe para X se existir um objeto, que denoto por R (X, O), a que chamo de relação pessoal de X com O. (CHEVALLARD, 1998, p. 93, tradução nossa).

É importante compreendermos que um determinado objeto (dominó, por exemplo) só existe porque ele é reconhecido por um grupo de pessoas e também por ao menos uma instituição. Dessa forma, o reconhecimento do dominó tanto por parte do grupo quanto por parte da sociedade satisfazem a condição de existência de tal objeto.

Quando falamos em instituição, certamente a primeira ideia que nos vem à cabeça é a de uma associação que possui algum fim, seja educativo, religioso ou apenas social (KURY, 2002). Todavia, quando trabalhamos com a TAD a noção de instituição vai além da ideia de associação. Para Câmara Dos Santos & Bessa de Menezes (2015) "O conceito de instituição pode ser explicado como sendo um dispositivo social, total ou parcial, que impõe aos seus sujeitos formas de fazer e de pensar que são próprias a cada 'tipo' ou 'forma' de instituição" (p. 4).

Dentro da TAD, a Instituição (I) normalmente se apresenta de forma mais abrangente indo além do que conhecemos. Ela pode ser representada pela instituição de ensino (escola, por exemplo), uma sala de aula, um curso de especialização, um livro, uma pessoa, etc. Desse modo, dependendo do contexto da pesquisa, uma instituição assume diferentes representações.

> Dados um objeto (por exemplo, um objeto de saber) e uma instituição, a noção de relação diz respeito às práticas sociais que se realizam na instituição e que põem em jogo o objeto considerado, isto é, o que se faz na instituição com este objeto. (BOSCH & CHEVALLARD, 1999, p. 80, tradução nossa).

Nesse contexto, são a partir das relações que surgirão na sala de aula, isto é, relação pessoa-objeto R(X, O), relação objeto-instituição R(O, I) e relação pessoa-instituição R(X, I) que se desencadeará a construção do conhecimento, em outras palavras, haverá a aprendizagem. Nesta pesquisa de conclusão de curso, as instituições tomadas são atividades avaliativas do Programa de Iniciação Científica da OBMEP.

Para compreendermos de modo mais aprofundado o conceito de instituição I é imprescindível entendermos que em I existem diferentes relações entre pessoas X e objetos O. Essas relações fundamentam tal instituição como uma estrutura heterogênea e, portanto, de grandes possibilidades de análise (CÂMARA DOS SANTOS & BESSA DE MENEZES, 2015). Além disso,

> [...] A cada instituição I está associado um conjunto de objetos O_I, chamado conjunto dos objetos institucionais, que é o conjunto dos objetos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional $R_I(O)$. Um objeto O é institucional para I ou, dito de outra forma, existe para I, quando I estabelece uma relação com O. (CHEVALLARD, 1999, p. 225, tradução nossa).

A relação entre o objeto O e a instituição I se dá por meio de características particulares (CÂMARA DOS SANTOS & BESSA DE MENEZES, 2015). Como exemplo, podemos citar a noção de igualdade: na Matemática este conceito é bem mais complexo, não sendo determinado por mera observação, mas por definições construídas axiomaticamente.

Para compreendermos o conceito de “pessoa” na TAD, precisamos entender a princípio a afinidade que esta possui com o Indivíduo e com o sujeito. De acordo com Câmara Dos Santos & Bessa de Menezes (2015) o Indivíduo representa um estágio primitivo do que seria a “pessoa”, pois o mesmo não muda com a presença de relações entre objetos e instituições.

Para Chevallard (1999)

> [...] ao longo do tempo, o sistema das relações pessoais de X evolui; objetos que não existem para ele passam a existir; outros deixam de existir; para outros, enfim, a relação pessoal de X muda. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa. (p. 226, tradução nossa).

Dessa forma, à medida que o indivíduo se relaciona com uma instituição ele passa a ser sujeito dessa instituição. A partir desse momento os costumes, as normas, as exigências, entre outros, passam a fazer parte do indivíduo, tornando-o sujeito da instituição, mas nem sempre um bom sujeito. Além disso, é através das diversas relações que um mesmo indivíduo estabelece com diferentes instituições que surge a pessoa.

De acordo com Chevallard (1999)

> Uma pessoa X está sujeita a uma série de instituições. Introduzo aqui o axioma segundo o qual uma pessoa não é, na realidade, mais do que a emergência de um complexo de sujeições institucionais. Aquilo que se chama de liberdade da pessoa surge então com o efeito obtido em consequência de uma ou de várias sujeições institucionais contra outras. (p. 227).

O que Chevallard propõe é que, na verdade, as pessoas são produtos da interação entre os indivíduos e as instituições. Sendo assim, a partir do contato que os indivíduos estabelecem com as diversas instituições I ocasiona-se a formação da pessoa X.

Ao entrar em uma instituição I, uma pessoa X passa a viver com um objeto O pertencente a I através de uma relação institucional R(I). Nessa convivência, tem-se a influência da relação R(X, O) que pode se modificar ou ir se construindo consonante à relação entre O e I, ou seja, R (I, O). Nesse processo, não importa se antes de entrar na instituição I, a pessoa X já conhecia o objeto O. “Independente desse fato, a relação R (X, O) irá alterar-se” (CÂMARA DOS SANTOS; BESSA DE MENEZES, 2015, p. 653). É importante ressaltar que a aprendizagem, para Chevallard, é consequência da alteração que venha a ocorrer em R (X, O).

A partir de agora introduzimos outra noção primitiva, chamada sujeito adequado. Uma pessoa X passa a ser sujeito adequado quando ela está em conformidade com a instituição I. Dito de outra forma, um sujeito é adequado quando as relações R (X, O) e R (I, O) estão em acordo com as expectativas exigidas pela instituição I.

A fim de esclarecer as ideias acima postas, pensemos em um professor (sujeito) que acabara de ser contratado por certo uma escola (instituição). Ao iniciar suas atividades nesta escola, o professor terá que se adequar às regras pré-estabelecidas, isto é, dar aulas em horários exigidos, participar de reuniões, entre outras obrigações. Quando o sujeito cumpre todas as regras, ele se torna o sujeito adequado da referida instituição.

Segundo a TAD um objeto O existe na instituição I a partir do momento que a instituição o reconhece; isto quer dizer que O existe se esta instituição possui alguma relação com O, denotada em símbolos por R(O, I). Da mesma forma, O existe para X se possui alguma relação com X, simbolicamente denotada por R(O, X).

Chevallard (1992) discute que para um objeto O ser reconhecido pela pessoa ou instituição basta que tenham alguma relação com O. Para que uma pessoa X conheça O é necessário existir R(O, X). Do mesmo modo, para que a instituição I conheça O é necessário uma relação entre ambos, isto é, R(O, I) deve existir. Dessa forma, para que um objeto exista, este deve ser conhecido por pelo menos uma pessoa ou instituição.

Em se tratando da articulação entre objetos e instituições, ela pode ocorrer da seguinte forma:

A toda instituição I está associada um conjunto de objetos, ao qual denotamos por O_I. Tal conjunto é formado pelos objetos O que I conhece, que por sua vez estabelecem uma relação institucional $R_I(O)$. De um modo geral, a relação institucional $R_I(O)$ define o que ocorre com cada objeto O em I.

Seja I uma instituição. Se as pessoas X pertencem a I então tais pessoas X são sujeitos de I. Caso uma pessoa X comece a fazer parte de I, um objeto O viverá para uma pessoa X sob as restrições da relação institucional $R_I(O)$. Isso significa que a relação R_I (O) modifica a relação pessoal R(X, O).

É importante destacar que mesmo o objeto O sendo conhecido (ou não) pela pessoa X antes de sua entrada na instituição I, a relação pessoal R(X, O) pode ser alterada. Tendo isso em vista, Chevallard (1992) explica que se a relação pessoal

R(X, O) se não sofrer alteração então a pessoa X não obtém aprendizagem, considerando a instituição na qual ele está se sujeitando.

Já sabemos que as instituições I estabelecem naturalmente relação com os objetos $R_I(O)$ e com as pessoas $R_I(X)$. Mas vale salientar que a relação entre o objeto O com a instituição I.

Um exemplo bastante comum dessa situação diz respeito à relação que o professor (pessoa X) estabelece com o objeto O e seu aluno (pessoa Y) estabelece com este mesmo objeto. De um modo geral, tais relações são diferentes, pois as posições da pessoa X e da pessoa Y são diferentes dentro da sala de aula (instituição I). A partir disso, pode-se falar em instituições didáticas.

2.2 Problemática Ecológica

Chevallard desenvolve a Teoria Antropológica do Didático em uma perspectiva ecológica, fazendo uso das noções primitivas objetos, pessoas e instituições. Com isso, ele passa a questionar aquilo que é real, levantando os seguintes questionamentos: *o que de fato existe e por qual motivo? O que não existe e por qual motivo? O que poderia vir a existir? Quais objetos poderiam viver (ou não) em dadas condições?* (ARTAUD, 1997 apud MAIA, 2008).

Tais questionamentos, aos quais estão associados a uma problemática ecológica, serviram de inspiração para que Chevallard fizesse relações entre esses elementos e a ecologia biológica. Assim, o conceito de ecossistema tem papel importante na TAD, pois Chevallard faz analogia ao saber matemático, ao entender que nenhum saber pode viver isolado, e para conhecê-lo é necessário compreender o meio em que está inserido, além das relações deste com outros saberes.

Além disso, Chevallard ainda menciona dois conceitos relevantes em termos da TAD, são eles *habitat* e *nicho*. O primeiro diz respeito aos diversos tipos de instituições nas quais se encontra o saber (objeto matemático). O segundo se refere às diversas funções que o saber desempenha nas instituições. Vale destacar que o saber pode ter uma função diferente dependendo da instituição ao qual pertence.

É importante salientar que existem pesquisadores da Didática da Matemática que preferem identificar quatro tipos de ecossistemas, a saber: *ecossistema sábio*, aquele em que as Matemáticas são produzidas; *ecossistema didático*, aquele em que as Matemáticas são estudadas; *ecossistema profissional*, no qual utiliza a

Matemática na realização de atividades humanas; *ecossistema noosferiano*, em que as Matemáticas passam por um processo de Transposição Didática. (MAIA, 2008).

Chevallard (1998) em sua teorização explica que existem associações entre os objetos matemáticos e os objetos didáticos, como consequência das organizações matemáticas entre os objetos, as pessoas, e as instituições. É comum as organizações matemáticas possuírem certa autonomia sob as condições de produção. Isso justifica o fato dos objetos serem estudados muitas vezes separadamente.

2.3 Organização Praxeológica

A Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) defende que toda atividade humana pode ser explicada por um modelo chamado *Praxeologia*. Tal concepção é chamada de *postulado base* da TAD. Neste sentido, atividades como ensinar e aprender Matemática podem ser descritas segundo um modelo praxeológico. Dentro da TAD parte-se do pressuposto de as nossas atividades humanas consistem em realizar Tarefas (t), fazendo uso de uma Técnica (τ), justificada por uma Tecnologia (θ), e que pode ser explicada por uma Teoria (Θ). Neste contexto, em uma atividade humana sempre está em jogo uma organização $[t, \tau, \theta, \Theta]$, denominada por Chevallard de *Organização Praxeológica*.

2.3.1 A noção de tarefa

A noção de tarefa é fundamental no estudo das praxeologias. Uma tarefa t geralmente faz parte de um tipo T de tarefa. Quando uma tarefa t é do tipo T, escrevemos $t \in T$. Além disso, uma tarefa sempre é exprimida por um verbo no infinitivo, evocando uma ação. São exemplos de tarefas: calcular a área de um círculo; calcular o coeficiente angular de uma reta dada; entrar no elevador; e integrar a função $f(x) = xe^x$ com domínio sendo o intervalo compacto $I = [1,5]$.

Vale destacar que uma tarefa sempre envolve um objetivo preciso. Por exemplo, “entrar no elevador” é um tipo de tarefa, porém “entrar” não o é, pois não deixa claro em que é para entrar. Neste caso, *calcular*, *entrar*, assim como *integrar*, são denominados de *gêneros de tarefas*.

Da Educação Fundamental até o Ensino Superior, o gênero de tarefa "calcular" não se modifica, apesar da existência de novos tipos de tarefas. Assim, um gênero de tarefa existe sobre a forma de tipos de tarefas distintos. Por exemplo, no Ensino Fundamental, os alunos aprendem a calcular a área de um triângulo multiplicando a base do triângulo por sua altura e dividindo o valor obtido por dois; no Ensino Médio, quando um triângulo é dado em termos de coordenadas cartesianas, sua área pode ser calculada por meio de determinante; Já no Ensino Superior é possível calcular a área de um triângulo por meio da integral de superfície. Dessa forma, o que muda são as técnicas empregadas na resolução da tarefa.

Em uma instituição, as tarefas, os tipos de tarefas e os gêneros de tarefas estão constantemente sendo reconstruídos, de acordo com as exigências desta instituição. Esse processo é o objeto de estudo da Didática da Matemática (MAIA, 2008).

2.3.2 A noção de técnica

Consideremos um tipo de tarefa T. Chamamos de praxeologia relativa à T uma forma de realizar as tarefas $t \in T$. Esta forma de realizar a tarefa t é denominada de técnica τ. Neste sentido, a praxeologia relativa ao tipo de tarefa T pressupõe uma técnica τ, ao qual é relativa ao tipo de tarefa T. Esta relação é descrita por meio do bloco $[T, \tau]$, denominado bloco prático-técnico, que indica em geral a maneira de saber-fazer (MAIA, 2008).

Algumas ressalvas precisam ser elencadas em relação às técnicas τ de resolução das tarefas do tipo T. Maia (2008) elenca algumas considerações a esse respeito:

- ✓ Pode ocorrer de uma técnica τ não resolver um tipo de tarefa T, mas sim uma parte dela $P(\tau)$. Isso ocorre, pois a técnica pode não ser suficiente para realizar $t \in T$, ocasionando assim o fracasso de τ sobre T. Como exemplo podemos citar o cálculo da área de um triângulo. Se forem dados as medidas de seus lados, não se pode calcular sua área por meio da expressão "base x altura, dividido por 2". Com isso, algumas técnicas se sobrepõem a outras, haja vista que existem técnicas que realizam certos tipos de tarefas, porém outras não. Também pode acontecer de uma técnica resolver apenas parte da tarefa.

- ✓ Não existe necessariamente uma técnica algorítmica para resolver uma dada tarefa. Apenas em alguns casos o algoritmo existe. Por exemplo, jogar futebol é um tipo de tarefa ao qual não existe uma técnica algorítmica em sua execução. No entanto, no processo de evolução de muitas técnicas é inevitável o desenvolvimento da algoritmização, mesmo que existam instituições que resistam ainda à mudança.

- ✓ Em geral, existe uma única técnica τ adotada por uma instituição I para resolver uma tarefa do tipo T. Nesse processo, ocorre a exclusão de algumas técnicas alternativas que são adotadas permanentemente em outras instituições. Assim, as pessoas X em I tendem naturalmente a se aterem às técnicas reconhecidas nessa instituição a que pertencem, enquanto as técnicas alternativas são vistas como desprezíveis.

2.3.3 A noção de tecnologia

Já foi discutido que para resolver uma tarefa do tipo T é necessário fazer uso uma técnica ou até mesmo de algumas delas. Mas o que garante a aplicabilidade e validade de tais técnicas? É a tecnologia θ que garante tal aplicabilidade e principalmente sua validade. Ela assegura a funcionalidade das técnicas por meio de um discurso que permite realizar as tarefas do tipo T. Dependendo da instituição I em questão, a tecnologia varia (MAIA, 2008).

Enquanto uma instituição adota uma tecnologia construída rigorosamente e de forma sistemática, outras instituições podem simplesmente aceitar situações empíricas como sua tecnologia. Sendo assim, alguns elementos tecnológicos parecem ser essenciais serem estudados em uma instituição, mas em outra instituição isso pode parecer pouco conveniente. Além disso, uma tecnologia tem papel importante na atualização de técnicas, assim como em sua ampliação ou substituição. Em todo caso, a racionalidade da tecnologia tem o objetivo de aprimorar as técnicas existentes, permitindo assim sua adequação na realização das tarefas. Qualquer que seja o tipo de tarefa T, a técnica τ está sempre acompanhada de uma tecnologia θ, mesmo que esteja tão evidente (MAIA, 2008).

Em outro caso, existem instituições I com uma técnica tida como única, ao qual lhe confere uma característica de auto-tecnologia, uma vez que não precisa justificar sua forma de fazer naquela instituição.

Ainda, segundo a autora, existe tecnologia que não é tecnologia de técnica alguma, ou é de apenas algumas técnicas. Isso funciona como motivação na busca pela identificação e exploração de novas tecnologias a fim de explicarem o uso de técnicas nas tarefas de tipo T.

2.3.4 A noção de teoria

Como já foi comentado, para justificar uma técnica utilizada τ para resolver uma tarefa é necessário recorrer a uma tecnologia θ. Mas como explicar o emprego de uma tecnologia? É necessário então partirmos para um nível mais elevado de justificativa, que na TAD é denominado de Teoria Θ.

A Teoria é um discurso amplo ao qual é utilizado para justificar a tecnologia. Pode-se dizer que a teoria é uma tecnologia de suas tecnologias. Nesse nível de discurso não existe a necessidade de justificativa para sua constituição e validação, isto é, não é necessária uma teoria para explicar outra teoria. Chevallard (1998) considera suficiente o bloco $[\tau, \theta, \Theta]$ para analisar uma tarefa do tipo T. Uma teoria permite muitas explicações pelo fato de ser construída com foco na generalização.

Uma vez conhecidas as noções elementares da praxeologia, podemos enfim dizer que para uma atuação matemática de forma eficiente é imprescindível que a pessoa X esteja ciente daquilo que pretende fazer. De acordo com Chevallard, Bosch & Gascón (2001, apud MAIA, 2008, p. 35):

> Não há práxis sem logos, mas também não há logos sem práxis. Ao unir as duas faces da atividade matemática, obtemos a noção de praxeologia: para responder a um determinado tipo de questão matemática é necessário elaborar uma praxeologia matemática constituída por um tipo de problema determinado, uma ou várias técnicas, sua tecnologia e a teoria correspondente.

De um modo geral, uma praxeologia tem como intuito descrever as atividades humanas por meio de um modelo, No contexto escolar, pode envolver aspecto didático ou apenas matemático. Por exemplo, suponhamos que estejamos diante dos seguintes questionamentos:

Questionamento 1: Como ensinar o Princípio Fundamental da Contagem no 2º ano do Ensino Médio?

Questionamento 2: Quantas são os anagramas possíveis para a palavra MATEMÁTICA?

No primeiro questionamento evoca uma *Organização Didática* ou *Praxeologia Didática* para dar resposta à tarefa solicitada, ao qual designa o estudo de um processo. Enquanto que no segundo questionamento a tarefa é puramente matemática, em que é necessário colocar em prática conhecimentos de natureza matemática. Neste caso específico, a tarefa e a técnica compõem os blocos prático-técnico $[T, \tau]$ e tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, que estão associados aos conhecimentos matemáticos.

Ainda sobre a segunda questão, vale destacar que para resolver a tarefa é necessário ter conhecimentos prévios sobre o Princípio Fundamental da Contagem que, neste caso, representa a tecnologia.

Quando na resolução de uma tarefa ou um conjunto delas mobilizam-se técnicas fundamentadas por uma tecnologia, que é validada por uma teoria. Isso recebe o nome de *Organização Matemática* ou *Praxeologia Matemática*, dentro da perspectiva da TAD.

2.4 Praxeologias Didáticas ou Organizações Didáticas

No contexto da TAD a noção de Praxeologia Didática ou Organização Didática está diretamente relacionada à busca de respostas para os seguintes questionamentos: *como estudar um objeto O? De que forma organizar o ensino de um objeto matemático? Quais tarefas existem nessa Organização didática? De que forma as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias estão articuladas?*

Mesmo diante da variabilidade das situações matemáticas, tanto nos aspectos qualitativos quanto nos quantitativos, algumas delas estão frequentemente presentes no seu processo de estudo ou em sua (re)construção. Estas situações são denotadas de *momentos didáticos*.

Ao realizar o estudo praxeológico das atividades referentes ao conteúdo de combinatória, verificamos quais tipos de tarefas são propostas e quais técnicas estão associadas a elas. Em suma, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático para analisar as Organizações Matemáticas. Mais detalhes serão descritos na metodologia do trabalho.

2.5 Praxeologia Matemática ou Organização Matemática

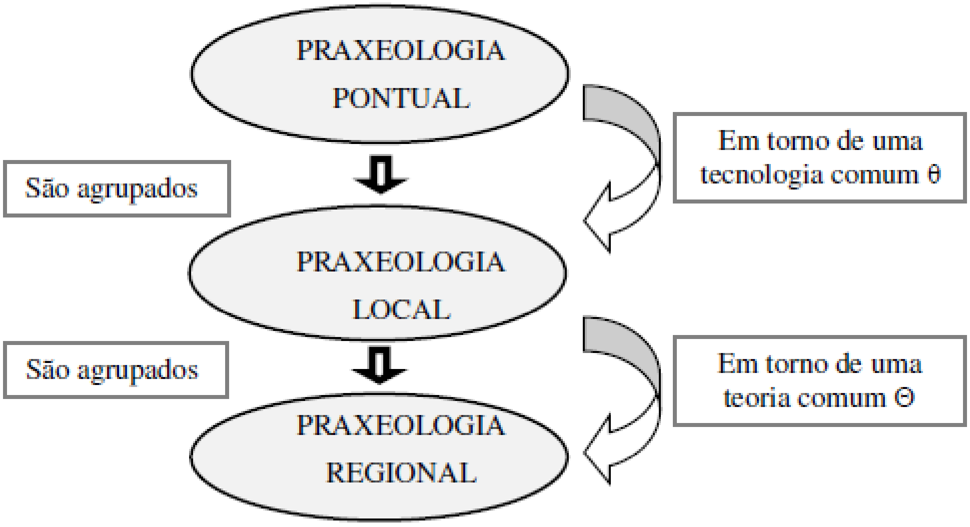
A Praxeologia Matemática ou ainda podemos dizer Organização Matemática se trata dos objetos matemáticos em termos de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria.

Ao considerarmos uma tarefa do tipo T encontraremos um tripé formado ao menos por uma técnica τ, uma tecnologia θ e uma teoria Θ. Quando nos referirmos a uma praxeologia em torno de um único tipo de tarefa T, a chamamos de *Praxeologia Pontual*, em símbolos representamo-la pelo bloco $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Mas como já foi explicado em momento anterior, tal praxeologia é estruturada pelo bloco prático-técnico $[T, \tau]$ e pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ (MAIA, 2008).

O bloco $[\theta, \Theta]$ é denominado de saber e o bloco $[T, \tau]$ de saber-fazer. Em uma instituição I, uma teoria Θ pode justificar várias tecnologias θ_j e cada uma destas justifica outras técnicas τ_{ij} relativas a tipos de tarefas T_{ij}. Além disso, as praxeologias pontuais $[T, \tau, \theta, \Theta]$ vão constituir as praxeologias locais representadas pelo bloco $[T_i, \tau_{ij} \cdot, \theta, \Theta]$, em que a tecnologia mantem-se a mesma. Ainda tem-se a praxeologia regional em que a teoria está centrada, cuja representação é dada por $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j \cdot, \Theta]$ (MAIA, 2008).

Uma organização mais geral é a global em que várias organizações regionais são agregadas e correspondem a várias teorias Θ_k, cuja representação é dada por $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$. Vale ressaltar que na passagem de uma praxeologia pontual $[T, \tau, \theta, \Theta]$ para uma local $[T_i, \tau_{ij}, \theta, \Theta]$ dá-se notável atenção à tecnologia θ, enquanto que na passagem da praxeologia local $[T_i, \tau_{ij}, \theta, \Theta]$ para a regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ a atenção está voltada para a Teoria Θ (MAIA, 2008).

Figura 1 – Níveis das Estruturas Praxeológicas Matemáticas



Fonte: Artigue (2011).

Dessa forma, uma Organização Praxeológica pode estar (ou não) adequada conforme as estruturas apresentadas, em termos das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. De qualquer forma, uma praxeologia é um conceito genérico, ao qual, segundo Chevallard (1998), permite fazer uma análise e estudos dos dados observados dentro da Didática da Matemática.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA E ALGUMAS DE SUAS TÉCNICAS

A *Combinatória* é considerada um dos núcleos centrais da Matemática Discreta, ao qual compõe um conjunto de conceitos e métodos relacionados ao estudo dos problemas aos quais existe a interferência de conjuntos discretos (GUZMÁN, 2000). Além disso, a Combinatória se constitui como um amplo campo da Matemática com aplicações teóricas e práticas em diversas áreas do conhecimento como informática, engenharia, geologia, entre outras (GRIMALDI, 1989).

Para Guzmán (2000)

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução têm e também tiveram profundas implicações no desenvolvimento de outros ramos da Matemática como a probabilidade, a teoria dos números, [...] a geometria combinatória e a topologia. (p. 9).

Segundo Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez (2006) a *Análise Combinatória* constitui o ramo da Matemática que estuda as relações discretas e as estruturas, sendo frequente na sua constituição dois tipos de problemas: "I- Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e II- Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem condições dadas" (MORGADO et al., 2006, p. 2). Além disso,

> A combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação sem necessariamente ter que contá-los um a um. (PESSOA & BORBA, 2009, p. 3).

Comumente, no Ensino Médio os problemas relacionados à Análise Combinatória são classificados em basicamente três tipos. São eles: problemas de *arranjo*, problemas de *permutação* e, por fim, problemas de *combinação*. Segundo Pessoa & Borba (2007) têm-se ainda os problemas de *produto cartesiano* aos quais são trabalhados ainda no Ensino Fundamental. Segundo Borba (2013, p. 4) estes problemas "são determinados a partir da escolha de elementos de diferentes conjuntos".

É importante ressaltar que cada um desses tipos de problemas possuem características próprias que serão detalhadas mais adiante.

Apesar de as técnicas da Análise Combinatória serem bastante gerais, muitos problemas com caráter combinatório possui uma solução que requer uma boa dose de estratégias que, muitas vezes, vão além da aplicação dessas técnicas. Neste sentido, o ensino de Análise Combinatória tem um importante impacto na aprendizagem dos alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) o estudo da Análise Combinatória deve ser iniciado ainda no Ensino Fundamental, e deve-se dar um aprofundamento mais sistemático e generalizador no Ensino Médio através dos diferentes problemas combinatórios. É importante ainda que no ensino de Combinatória no Ensino Fundamental os professores se utilizem da espontaneidade das crianças em manipular desenhos e figuras, e vão inserindo o conteúdo para estas crianças com um grau de generalização gradativo (BORBA, 2010).

A abordagem de Análise Combinatória no Ensino Médio, segundo os Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013, p. 195) “deve possibilitar que o estudante amplie, aprofunde e formalize seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório adquirido ao longo do Ensino Fundamental".

No processo de resolução dos problemas de Análise Combinatória é importante que os alunos compreendam os enunciados de forma eficaz, objetivando a resolução dos mesmos. Para tanto, segundo Lima, Carvalho, Wagner & Morgado (2016) algumas atitudes são essenciais, são elas:

> 1) *Postura*: Devemos nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema para saber que decisões tomar.
>
> 2) *Divisão*: Devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
>
> 3) *Não adiar dificuldades*: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. (p. 82).

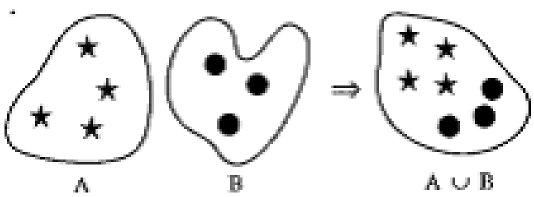
Tais atitudes não costumam ser desenvolvidas entre os alunos da Educação Básica, ao qual o ensino ocorre de forma tradicional e é dada ênfase, por vezes, na manipulação de fórmulas, pouco valorizando a autenticidade e postura crítica diante dos problemas. Isso é um dos motivos, que fazem com que os alunos apresentem dificuldades ao se depararem com problemas de contagem.

3.1 O Princípio Aditivo

O primeiro procedimento matemático aprendido pelas crianças no seu período de escolarização é a *contagem* dos elementos que certo conjunto possui. Além disso, as operações aritméticas são aprendidas pelas crianças através dos problemas relacionados também à contagem (MORGADO et al., 2006). Um dos princípios da contagem é o *Princípio da Adição* ou *Princípio Aditivo*.

Tal Princípio diz que: *se A e B são dois conjuntos disjuntos, isto é,* $A \cap B = \emptyset$*, o primeiro com* p *elementos e o segundo com* q *elementos, então os dois conjuntos juntos possuem* $p + q$ *elementos, isto é* $n(A \cup B) = p + q$.
Abaixo temos um exemplo que ilustra o Princípio Aditivo.

Figura 2 – Representação Gráfica do Princípio Aditivo



Fonte: Morgado et al. (2006, p.18).

A seguir enunciamos o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Antes disso, daremos um exemplo em que tal princípio se aplica.

Suponhamos que uma pessoa deseje montar um sorvete com um sabor e uma calda. Se ela dispõe de quatro sabores para montar seu sorvete e três tipos de calda, quantas são as maneiras diferentes que esta pessoa poderá montá-lo? Chamando os sabores de S_1, S_2, S_3, S_4 e as caldas de C_1, C_2, C_3 podemos ver que 4 sorvetes poderá ter a calda S_1, outros 4 sorvetes poderá ter a calda S_2 e também outros 4 sorvetes com a calda S_3. Assim, o número total de possibilidades para montar o sorvete é 4 + 4 + 4 = 3x4 = 12.

3.2 Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

O exemplo anterior ilustra o *Princípio Fundamental da Contagem* também conhecido como *Princípio Multiplicativo* que junto com o Princípio Aditivo, constitui uma importante ferramenta na resolução de problemas.

Matematicamente, este princípio, segundo Carvalho (2016, p. 3) diz que "*Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a p·q*".

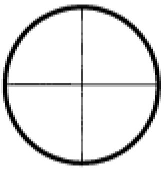
É importante ressaltar que o PFC pode ser expandido para quantas decisões quisermos, por exemplo, se tivermos D_3 (tomada de x modos), D_4 (tomada de y modos) e D_5 (tomada de z modos) teríamos $p \cdot q \cdot x \cdot y \cdot z$ maneiras distintas de se tomar consecutivamente as decisões D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5. E assim por diante.

Assim, no exemplo dado, para montar um sorvete devemos tomar as decisões: D_1 (escolha do sabor), D_2 (escolha da calda). Como D_1 pode ser tomada de 4 maneiras distintas e, em seguida, D_2 pode ser tomada de 3 maneiras também distintas, então o número total de maneiras de se formar um sorvete (ou seja, tomar as decisões D_1 e D_2) é 4x3 = 12.

A seguir mostramos outro exemplo que também utiliza em sua resolução o PFC.

A figura 3 representa um mapa com 4 países: De quantos modos podemos pintá-lo, se dispomos de Y cores, de modo que países com mesma fronteira não recebam a mesma cor?

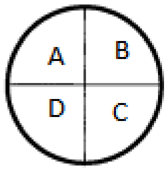
Figura 3 – Representação de quatro países



Fonte: Morgado et al. (2006, p.27).

Vamos inicialmente nomear os países de A, B, C ou D para entendermos melhor o processo de resolução. Assim temos:

Figura 4 – Esquema do problema dos países



Fonte: Morgado et al. (2006, p. 27).

Notemos que uma vez fixado um país A, ele poderá ser pintado de Y cores diferentes. Assim sendo, quando pintarmos o país A com uma dada cor os países B e D não poderão mais ser pintados com a mesma cor escolhida para o país A. O mesmo raciocínio é válido para o país C.

Para resolver o problema, vamos dividi-lo em dois casos.

Caso 1: Os países A e C têm cores diferentes. Neste caso, tem-se Y cores para pintar o país A, Y-1 cores para pintar o país C, Y-2 cores para pintar o país B e Y-2 cores para pintar o país D. Logo, pelo PFC o número de maneiras de se pintar o mapa é Y(Y-1)(Y-2)(Y-2).

Caso 2: Os países A e C têm cores iguais. Assim, tem-se Y cores para pintar o país A, 1 cor para pintar o país C, Y-1 cores para pintar o país B e Y-1 cores para pintar o país D. Pelo PFC, o número de maneiras de se pintar a bandeira nestas condições é Y(1)(Y-1)(Y-1).

Por fim, deve-se somar (pelo Princípio Aditivo) as possibilidades encontradas em cada caso, obtendo assim o número total de maneiras de se pintar o mapa.

Observemos que não importa o quadrante que fixemos o país A, o resultado será sempre o mesmo.

O Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo também é útil na resolução de problemas que não são resolvidos usando diretamente o próprio PFC. Muitos destes problemas combinatórios envolvem a ideia de *permutação* que será mais detalhada no capítulo mais adiante.

3.3 Problemas de Permutações

Outro tipo bastante interessante de problema de combinatória é o que envolve *Permutação*. A seguir definiremos três tipos de permutações que são elementos básicos no estudo da Análise Combinatória.

3.3.1 Permutações simples

Antes de definirmos o que é *permutação simples* levantaremos o seguinte questionamento: De quantos modos podemos organizar um conjunto de n objetos todos distintos?

Primeiramente, vamos supor que o conjunto dado seja o conjunto formado pelos objetos 0, 1 e 2. Assim, as possibilidades de ordenações são: 012, 021, 102, 120, 201 e 210. Ou seja, um total de 6 possibilidades.

Geralmente, para sabermos de quantas maneiras podemos organizar um conjunto formado por n objetos, basta percebermos que para ocupar a primeira posição dispomos de n opções de escolher o objeto, para a segunda posição dispomos agora de n-1 objetos, para a terceira posição temos n-2 objetos, e assim sucessivamente, até só restarem uma opção de escolha do objeto. Neste sentido, para Morgado et al. (2006, p. 28) “O número de modos de ordenar n objetos distintos é n(n-1)(n-2)...1 = n!”. Ainda segundo os autores, cada ordenação desses n objetos recebe o nome de *permutação simples,* além disso, o número de permutações simples possíveis desses n objetos é denotado por P_n. Segue ainda que $P_n = n!$ e, por fim de praticidade, considera-se 0! = 1.

Vejamos a seguir um exemplo em que se aplica a permutação simples em sua resolução.

Suponhamos que queremos saber de quantas formas distintas podemos escrever a palavra ESCOLA mudando-se apenas as posições das letras. Ou seja, nos interessa saber quantos são os anagramas possíveis para a palavra ESCOLA.
É possível escrevermos todas as possibilidades de anagramas que este conjunto de seis letras admitem, porém, isto não é muito prático, uma vez que a quantidade é razoavelmente grande. No entanto, a fim de resolução podemos fazer o seguinte raciocínio: a primeira letra de cada anagrama pode ser qualquer uma das seis letras da palavra ESCOLA; uma vez fixada a primeira letra, só restam agora cinco letras a serem utilizadas para o preenchimento da segunda letra de cada anagrama; fixada a segunda letra, ficam restando quatro opções de letras para preencher a terceira letra do anagrama; assim, segue que fixada a terceira letra, restam três opções de letras para a quarta letra do anagrama; uma vez escolhida a quarta letra, ficam restando duas opções para a quinta letra do anagrama; e, por fim, sobrou apenas uma letra para formar a sexta letra do anagrama.

Assim, pelo PFC o total de anagramas possíveis é o resultado da multiplicação do número de possibilidades para o preenchimento de cada letra que formará o anagrama, ou seja, 6·5·4·3·2·1=720. Isto significa que tomando-se as seis letras que compõem a palavra ESCOLA podemos formar 720 anagramas.

Diante do exposto, é importante ressaltar que no caso da permutação simples, a ordem em que são dispostos os elementos de um determinado conjunto faz mudar a representação deste conjunto, por isso, surgem diferentes composições para o mesmo, sem modificá-lo. Dessa forma, ainda considerando o conjunto das letras da palavra ESCOLA, os anagramas ESLACO e LAESCO são representações diferentes de um mesmo conjunto e, portanto, não são a mesma coisa.

Além disso, se pensarmos na TAD, note que nas duas situações de Permutações Simples apresentadas podemos observar três técnicas para resolução, a primeira se utiliza da enumeração das possibilidades, a segunda utiliza-se do fatorial e a terceira observamos o uso do PFC.

3.3.2 Combinação simples

A fim de compreensão e fixação do conceito, consideremos a seguinte situação: de quantos modos podemos escolher um conjunto formado por p objetos distintos dentre um conjunto de n objetos todos distintos? Segundo Morgado et al. (2006) isso é equivalente à pergunta: quantos subconjuntos com p elementos é possível formar a partir de um conjunto composto por n elementos $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}, \mathrm{a}_\mathrm{n}\}$?

De acordo com Morgado et al. (2006) cada subconjunto de p elementos fornece uma combinação simples, donde p representa uma classe entre os n elementos $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}, \mathrm{a}_\mathrm{n}$.

Por exemplo, suponhamos que se queira formar as combinações simples com 3 elementos, isto é, de classe 3, em relação aos elementos $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4$. Resolvendo temos como possibilidades: $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$, $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_4\}$, $\{\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4\}$, $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4\}$.

O número de combinações de classe p referente a n elementos é indicada pela expressão $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$ ou ainda $\binom{n}{p}$ (lê-se: combinação de n tomados p a p). Assim, no exemplo anterior $\mathrm{C}_4^3 = 4$. Observemos que para um número pequeno de n objetos é possível enumerar todas as combinações simples de p elementos. Mas sendo n razoavelmente grande, como calcular o número de combinações simples?

Para responder a esta pergunta, pensemos um pouco mais no exemplo anterior. Temos quatro maneiras de escolher o primeiro elemento da combinação; três maneiras de escolher o segundo elemento, e duas maneiras de escolher o terceiro elemento. Assim, pelo PFC há um total de $4\mathrm{x}3\mathrm{x}2 = 24$ combinações possíveis.

No entanto, se considerarmos uma combinação, por exemplo, $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3, a_1\}$, $\{a_3, a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_2, a_1\}$ são as mesmas, uma vez que apenas a ordem dos elementos é diferente. Acontece que têm 4 possibilidades de escolha para o primeiro elemento, 3 para o segundo, e 2 para o terceiro, estamos apenas meramente contando o número de agrupamentos com três elementos distintos, obtendo assim 24 combinações. Mas como cada agrupamento pode ser escrito de $P_3 = 3! = 6$ maneiras, então é necessário dividir o total de agrupamentos pelo número de permutações da classe 3 o que equivale a 6. Assim, o número de combinações simples se torna $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$.

Genericamente, se tivermos n elementos e quisermos formar combinações de classe p podemos calculá-las por meio da seguinte expressão:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!}, \text{ com } 0 \leq p \leq n.$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por $(n-p)!$ obtemos a expressão equivalente: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, com $0 \leq p \leq n$. Por convenção, define-se $C_n^0 = 1$.

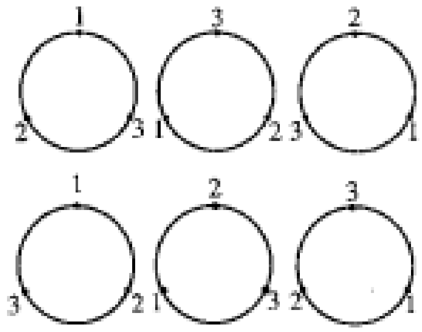
Na próxima seção voltaremos a falar de permutação, desta vez quando a mesma for *circular*.

3.3.3 Permutações circulares

Vimos no exemplo 2 da seção anterior um caso de permutação bastante especial, que se trata da disposição de n objetos em torno de um círculo. A esse tipo de permutação chamamos de *Permutação Circular*. Também quando nos referirmos ao número de permutações circulares de n objetos a representamos, simbolicamente, por $(PC)_n$ (MORGADO et al., 2006). Como foi mostrado no exemplo, o número total de disposições possíveis é dividido pelo total de maneiras diferentes de serem girada o círculo, pois, os giros sofridos pelo círculo não interferem na disposição final dos objetos.

Observemos na figura 5 um exemplo bastante simples de permutação circular com 3 objetos, neste caso, os algarismos 1, 2 e 3.

Figura 5 - Exemplo (a) de Permutação Circular



Fonte: Morgado et al. (2006, p. 45).

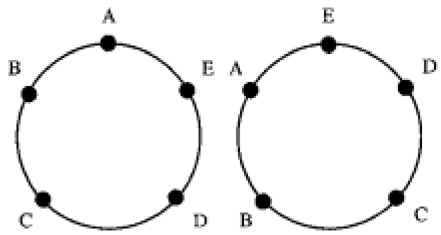
Sabemos que o número de permutações simples envolvendo os três algarismos é $P_3 = 3! = 3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$, contudo, em se tratando de permutação circular, como podemos ver na figura 5, essa quantidade se reduz para $P_2 = 2! = {\cdot}2{\cdot}1 = 2$, uma vez que girando as três primeiras permutações descritas acima elas se coincidem. O mesmo ocorre com as três últimas permutações. Sendo assim, está-se justificado o porquê do número de permutações circulares dos algarismos 1, 2 e 3 ser apenas 2.

De acordo com Morgado et al. (2006) existe uma singela distinção entre permutação simples e permutação circular, "nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam ao passo que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si" (MORGADO et al., 2006, p. 45). Nessa perspectiva, observando os três primeiros círculos no sentido anti-horário percebemos que 1 antecede 2, que por sua vez, antecede 3; e este antecede 1. Logo podemos afirmar que a posição relativa entre os objetos é sempre a mesma. Nos três últimos círculos, temos que 1 antecede 3, que antecede 2, que antecede 1. Novamente temos que a posição relativa entre os objetos é a mesma. Portanto, como nos três primeiros círculos a disposição dos objetos é a mesma e, nos três últimos círculos também, temos que o número total de permutações circulares distintas é apenas $2! = 2$.

Vejamos outro exemplo envolvendo a permutação circular:

Suponhamos ainda que uma roda será formada por 5 crianças como podemos ver na figura 5. De quantos modos diferentes esta roda poderá ser formada?

Figura 6 – Exemplo (b) de Permutação Circular



Fonte: Morgado et al. (2006, p. 29).

Como existem 5 crianças para formarem a roda, então podemos obter 5! = 120 possibilidades para tal formação. Contudo, devemos observar que as rodas podem girar sem alterar a disposição inicial das crianças, isto é, não importa como a roda está virada o importante é a posição relativa das crianças entre si. Basta observar que as rodas ABCDE e EABCD são iguais Assim, devemos dividir a contagem inicial realizada por 5, pois a roda pode girar e ficar disposta de 5 modos diferentes, logo 120/5 = 24.

Diante do exposto, nos interessa saber se dada uma quantidade n qualquer de objetos, dispostos em formato circular, tem-se $(PC)_n = (n-1)!$ sempre. A seguir daremos dois argumentos utilizados por Morgado et al. (2006) que justificam a veracidade da expressão para o cálculo do número de permutações circulares desses n objetos.

1: Suponhamos que não existissem equivalências entre as disposições dos n objetos após o círculo ser rotacionado. Assim, teríamos um total de n! permutações circulares. Como sabemos que a equivalência existe e cada permutação circular possui n disposições, então resulta que: $(\mathrm{PC})_{\mathrm{n}} = \mathrm{n}!/\mathrm{n} = (\mathrm{n}-1)!$

2: Como foi explicado anteriormente, na determinação do número de permutações circulares importa apenas a disposição relativa entre os objetos no círculo. Dessa forma, dados n objetos, há uma maneira de colocar o 1º objeto no círculo, já que só existe ele; há uma maneira de colocar o 2º objeto no círculo, que será logo após o primeiro; há duas formas de se colocar o 3º objeto no círculo, ou após o primeiro ou após o segundo; há três formas de se colocar o 4º objeto no círculo, ou após o primeiro, ou após o segundo ou após o terceiro;... ; há n-1 formas de se colocar o n-ésimo objeto no círculo. Logo, pelo PFC, o número de permutações circulares que dos n objetos é dado por $(\mathrm{PC})_{\mathrm{n}} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (\mathrm{n}-1) = (\mathrm{n}-1)!$

Na próxima seção, apresentaremos as permutações de elementos nem todos distintos.

3.3.4 Permutações de elementos sendo alguns deles idênticos

De acordo com o que vimos em seções anteriores, as permutações de n objetos distintos representam o modo como estes n objetos podem estar dispostos. Mas o que ocorre com o número de permutações de n elementos dados quando alguns destes forem repetidos? Esse questionamento é essencial para a compreensão das permutações de elementos quando nem todos são distintos.

A princípio, pensemos no seguinte exemplo: quantos são os anagramas da palavra “TÁRTARA”? Intuitivamente, dá-se para notar sem muita dificuldade que como a palavra possui três letras repetidas, neste caso, a letra A, então o número de anagramas será menor do que se fossem todas as letras distintas. De fato, isso ocorre e a seguir apresentaremos duas justificativas para tal fato.

Pode-se determinar o número de anagramas da palavra TÁRTARA da seguinte forma:

1) Ao todo temos que organizar três letras A, duas letras R, e duas letras T em 7 lugares. As letras A podem ser dispostas em quaisquer lugares disponíveis, como são 3 letras isso pode ser feito de C_7^3 formas. Restando ainda quatro espaços livres, podemos dispor os dois R de C_4^2 maneiras. Para dispor os dois T restam dois lugares, o que implica C_2^2 maneiras disto ser feito.

Assim, $\mathrm{P}_7^{3,2,2} = \mathrm{C}_7^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^2 = 35\mathrm{x}6\mathrm{x}1 = 210.$

2) Caso as letras fossem todas diferentes poderíamos organizá-las de $\mathrm{P}_7 = 7!$ maneiras diferentes. Entretanto, como temos três A iguais, contamos $3!$ anagramas

iguais. Também contamos outros $2!$ anagramas iguais, por conta dos R e mais $2!$ Anagramas iguais por conta dos T. Logo, $P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$.

De acordo com Morgado et al. (2006) podemos generalizar esta situação quando $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$, em que cada α_i indica o número de elementos repetidos de cada tipo, da seguinte forma:

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \ldots C_{n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} =$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!\,(n-\alpha_1)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)!} \ldots \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1})!}{\alpha_k!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}-\alpha_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!0!} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}.$$

Esta expressão matemática é muito útil quando queremos calcular o número de permutações possíveis de um conjunto de objetos nem todos distintos.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No presente trabalho analisamos as atividades sobre Combinatória trabalhadas no 12º Programa de Iniciação Científica Júnior da OBMEP (PIC Jr.) sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.

Decidimos analisar as referidas atividades porque acreditamos conter mais dados para a nossa pesquisa e também ser uma ferramenta indispensável para nossa reflexão, enquanto profissionais da Educação.

Nossa questão de pesquisa foi: Qual é a Organização Matemática e Didática apresentada no material de apoio do 12º PIC-OBMEP, em relação ao conteúdo de Combinatória?

Na tentativa de responder a questão de pesquisa, propomos os seguintes objetivos a serem alcançados:

Objetivo geral: analisar a abordagem de Combinatória no material de apoio ao ensino do 12º PIC-OBMEP sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.

Os objetivos específicos: Mapear e classificar os tipos de tarefas sobre Combinatória, presentes no material de apoio ao ensino do 12º PIC-OBMEP; Compreender as Organizações Matemáticas em torno dos tipos de tarefas predominantes no material de apoio ao ensino de Combinatória do 12º PIC-OBMEP.

Considerando a questão de pesquisa e os objetivos propostos, resolvemos adotar como referencial metodológico a abordagem qualitativa. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) tal abordagem permite compreender os processos que não podem ser quantificados.

Segundo Oliveira (2008, p. 68)

> A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como sendo um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos da realidade. Esse procedimento visa buscar informações fidedignas para se explicar em profundidade o significado e as características de cada contexto, em que encontra cada objeto de pesquisa.

Para os autores a pesquisa de cunho qualitativo se utiliza de diversos instrumentos para a coleta dos dados, sendo uma delas a análise de textos dos sujeitos da pesquisa.

Para a fundamentação de nosso estudo realizamos a leitura de materiais didáticos tais como livros, artigos e dissertações sobre a Teoria Antropológica do Didático e a Análise Combinatória, com o objetivo de delinear a proposta de estudo.

Ainda sobre a pesquisa em questão, nos propomos a compreender a Organização Matemática das atividades, tratando os dados sempre por um viés qualitativo.

4.1 Descrição geral do PIC e das atividades de Combinatória

O Programa de Iniciação Científica Júnior da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (PIC-OBMEP) é um curso desenvolvido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com duração de um ano, destinado aos medalhistas da Olimpíada. O curso é dividido em *ciclos de estudos* que abordam temas específicos da Matemática em nível de iniciação científica.

O PIC possui três níveis de ensino: nível 1 para os medalhistas cursando o 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental; nível 2 para os medalhistas cursando o 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental; e por fim nível 3 para aqueles medalhistas cursando qualquer ano do Ensino Médio.

Além disso, o PIC possui duas modalidades de ensino: *presencial* e a *distância*. No PIC presencial as aulas ocorrem em universidades ou escolas seletivas ou federais. No PIC à distância, as aulas são ministradas pela internet através de sistema de videoconferência em horários definidos previamente pelo professor.

Na figura 6 temos a janela principal do Portal do PIC, ao qual pode ser acessado por meio de *login* e senha.

Figura 7 – Portal do 12º PIC-OBMEP

Fonte: Página da OBMEP (2017).

Em ambas as modalidades, o PIC tem o mesmo período de duração. Em 2017 o Programa esteve dividido em 7 ciclos, cada um com um mês de duração. Cada ciclo de estudo compôs-se por 2 encontros (presencial ou à distância, dependendo da modalidade) com duração de 4 horas cada. No quadro a seguir estão detalhados os ciclos e seus respectivos conteúdos trabalhados no nível 3 do PIC.

Quadro 1 – Ciclos de estudo do 12º PIC-OBMEP

Ciclo de estudo	Conteúdo
Ciclo 1	Aritmética
Ciclo 2	*Métodos de Contagem e Probabilidade*
Ciclo 3	Geometria
Ciclo 4	Aritmética
Ciclo 5	Geometria
Ciclo 6	Álgebra e Funções
Ciclo 7	Álgebra e Funções

Fonte: Material de apoio ao ensino do PIC-OBMEP (2017).

A metodologia utilizada no PIC é desenvolvida na perspectiva da resolução de problemas. Existe um material de apoio ao ensino para cada ciclo de estudo. Além disso, cada material de apoio possui uma lista de problemas, que devem ser trabalhados com os alunos durante os encontros, com o objetivo de desenvolver a capacidade de argumentação e competências matemáticas dos estudantes.

No material de apoio ao ensino do PIC nível 3 encontra-se as seguintes informações sobre o trabalho do professor no processo de ensino e aprendizagem:

> O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Exercícios adicionais sobre os assuntos abordados podem ser encontrados, por exemplo, na bibliografia disponibilizada ou nas videoaulas do Portal da Matemática. (PIC-OBMEP, 2017, p. 5).

Ao final de cada ciclo de estudo são realizadas duas atividades avaliativas. Para o PIC presencial a primeira atividade ocorre no Portal do Programa (plataforma) e a segunda ocorre presencialmente. No PIC a distância tanto a primeira quanto a segunda atividades ocorrem no Portal. Vale destacar que as atividades avaliativas são as mesmas para ambas as modalidades.

Salientamos que neste trabalho não pretendemos depreciar ou enaltecer quaisquer atividade proposta no PIC, objetivamos analisá-las e discuti-las dentro de uma perspectiva acadêmica com fins educacionais, embasados na Teoria Antropológica do Didático.

Ao contrário do que ocorre no Ensino Médio, em que os conteúdos referentes à Combinatória são abordados apenas no 2º ano, e muitas vezes dissociado de outros conteúdos, no PIC existe de forma efetiva uma associação entre a Combinatória e a Probabilidade. Mesmo assim, voltamos nossa atenção apenas ao conteúdo de Combinatória.

Salientamos que as análises realizadas dizem respeito à Organização Matemática dos conteúdos. Entretanto, não se pode esquecer que a Organização Matemática pressupõe uma Organização Didática. De qualquer modo, esta última não foi considerada para fins de análise.

4.2 Etapas da pesquisa

A seguir descreveremos as etapas da pesquisa, aos quais foram divididas em três momentos.

Primeira etapa: *Fundamentação Teórica*

Nesta etapa da pesquisa iniciamos o estudo da TAD, procurando compreendê-la de uma forma cuidadosa e que atendesse aos objetivos do estudo. Ao compreender o significado de Organização Praxeológica dentro da TAD decidimos por considerá-la em nosso estudo. Para tanto, foi necessário uma leitura de textos que discorressem sobre a temática, tais como artigos, livros e dissertações.

Além disso, nos propomos a compreender um pouco mais sobre a Combinatória, como parte integrante da fundamentação do nosso trabalho. Nela, elencamos suas técnicas na resolução de problemas. Com isso, pudemos definir melhor as questões dessa referida pesquisa.

Segunda etapa: *mapeamento das questões de Combinatória*

No segundo momento da pesquisa fizemos o levantamento das questões disponibilizadas no material de apoio do PIC sobre Combinatória, trabalhadas regularmente pelos alunos de uma turma virtual no ano de 2017.

Terceira etapa: *análise e tratamento dos dados*

Na última etapa de nossa investigação realizamos a análise das questões referentes ao ciclo de Combinatória, procurando identificar e compreender as Organizações Matemáticas ali envolvidas.

Pensando em atender aos objetivos desta pesquisa, estabelecemos algumas etapas a serem cumpridas para a análise das atividades de Combinatória do PIC.

Inicialmente realizamos uma descrição geral referente ao bloco Combinatória destacando o que o Programa descreve no material de apoio disponibilizado aos professores, fazendo o estudo dos conteúdos contemplados neste material.

Em seguida, buscamos identificar a Organização Matemática das questões com o objetivo de identificar os seguintes elementos: tarefa, técnica e discurso teórico-tecnológico.

Os resultados desta análise estão detalhados no próximo capítulo.

5 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA MATEMÁTICA DAS ATIVIDADES

O material de apoio ao ensino do 12º PIC-OBMEP é composto por sete ciclos de estudo, abrangendo temas específicos da Matemática. Alguns temas são trabalhados em forma de espiral, como é o caso da aritmética e da geometria. Enquanto que outros temas são tratados em apenas um dos sete ciclos estruturados, como é o caso da Análise Combinatória.

Cada ciclo possui um Guia de estudo contendo diversas informações, entre as quais podemos destacar a metodologia de ensino e os tópicos de Matemática a serem trabalhados durante o ciclo. A análise da organização Praxeológica relativa à Combinatória foi feita com base no 2º ciclo de estudo em que o tema estava definido sistematicamente.

Conseguimos mapear ao todo 8 questões relativas à Combinatória, as quais serão analisadas mais adiante.

A partir do mapeamento realizado, classificamos os tipos de tarefas que foram identificados.

No material de apoio ao ensino de Combinatória, especificamente na seção dedicada aos problemas, identificamos as tarefas a serem realizadas.

A seguir apresentamos as tarefas associadas aos problemas, suas técnicas de resolução e ainda o discurso tecnológico-teórico associado à técnica.

Quadro 2 – Questão 1 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

De quantos modos 4 *homens e* 4 *mulheres podem se sentar em* 4 *bancos de* 2 *lugares, sendo que em cada banco deve haver um homem e uma mulher?*

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 6).

Na questão 1, a *tarefa* consiste em saber de quantos modos é possível ordenar 4 homens e 4 mulheres, em 4 bancos com dois lugares cada, de forma que cada banco tenha um homem e uma mulher necessariamente. Neste caso, o tipo de tarefa corresponde a fazer agrupamentos de dois elementos de um total de oito elementos distintos, formando quatro grupos.

Para a resolução do exercício, a *técnica* utilizada pode ser dividida em três etapas.

1ª Fase: Determinar o número de etapas que compõem a resolução da tarefa e suas possibilidades. Neste caso, são necessárias 3 etapas.

2ª Fase: Corresponde a determinar o número de possibilidades de cada etapa.

a) A primeira etapa consiste em saber o número de possibilidades de distribuir as mulheres nos oito bancos disponíveis, respeitando as condições do exercício. Isso pode ser feito segundo o PFC de 8x6x4x2= 384 maneiras;
b) A segunda etapa consiste em descobrir o número de maneiras de distribuir os homens nos bancos, sabendo que eles já se encontram ocupados por uma mulher. Isso pode ser feito pelo PFC de 4x3x2x1=24 maneiras.

3ª Fase: É necessário multiplicar todas as possibilidades encontradas em cada etapa, conforme o PFC, o que resulta em 384x24=9216 maneiras distintas de organizar os casais.

Em relação ao *discurso tecnológico-teórico*, a técnica utilizada pode ser justificada e validada pelo PFC como tecnologia integrante da Análise Combinatória. A aplicação do PFC se deu de forma bastante interessante, permitindo a compreensão da técnica utilizada e dos procedimentos de resolução.

Vale destacar que no material de apoio não foi proposto nenhuma outra técnica de resolução desta tarefa, o que possivelmente representa uma falha no sentido da exploração do exercício por diferentes enfoques.

Quadro 3 – Questão 2 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 5 questões de múltipla escolha, com 3 alternativas (A, B, C) por questão? Em quantos a letra A não aparece? Em quantos a letra aparece pelo menos uma vez?

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 6).

Essa questão é composta por três *tarefas do mesmo tipo*: Encontrar o número de gabaritos possíveis de um teste com 5 questões, com cada questão possuindo como alternativas as letras A, B e C; calcular quantos desses gabaritos não possuem letra a A; e calcular quantos a letra A aparece ao mínimo uma vez.

Em suma, o tipo de tarefa consiste em descobrir o número de agrupamentos que podem ser formados, considerando a ocorrência de 5 eventos independentes. Além disso, cada evento possui a mesma quantidade de opções de ocorrência.

A *técnica* utilizada na resolução da primeira tarefa corresponde a multiplicar o número de possibilidades de ocorrência do evento. A técnica pode ser descrita em três fases.

1ª Fase: Identificar o número de etapas no evento. Em relação à primeira tarefa temos 5 etapas a considerar.

2ª Fase: Identificar as possibilidades que compõem cada etapa.

a) Tem-se 3 opções para escolha da alternativa do primeiro item;
b) Tem-se 3 opções para escolha da alternativa do segundo item;
c) Tem-se 3 opções para escolha da alternativa do terceiro item;
d) Tem-se 3 opções para escolha da alternativa do quarto item;
e) Tem-se 3 opções para escolha da alternativa do quinto item.

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades encontradas em cada etapa, o que nos dá 3x3x3x3x3 = 243 possibilidades.

Como se pode verificar a técnica utilizada faz uso do PFC, sendo portanto a mesma do exemplo anterior. De acordo com Chevallard (1998), isso caracteriza uma Organização Matemática local, uma vez que a tecnologia se manteve a mesma.

Em se tratando do *discurso tecnológico-teórico*, a técnica utilizada é justificada pelo PFC, com utilização de uma quantidade finita de etapas sucessivas.

A segunda tarefa pode ser resolvida de forma idêntica à primeira. De qualquer forma descreveremos o processo de Organização Matemática da mesma.

A *técnica* utilizada em sua resolução consiste em multiplicas as possibilidades para cada etapa do evento. No caso dessa tarefa, a técnica utilizada pode ser dividida em três fases.

1ª Fase: É preciso identificar o número de etapas que compõe o evento. Ao todo são 5 etapas, assim como na tarefa anterior.

2ª Fase: Determinar as possibilidades que compõem cada etapa do evento. Assim, temos:

a) São 2 opções para escolha da alternativa do primeiro item;
b) São 2 opções para escolha da alternativa do segundo item;
c) São 2 opções para escolha da alternativa do terceiro item;
d) São 2 opções para escolha da alternativa do quarto item;

e) São 2 opções para escolha da alternativa do quinto item.

3ª Fase: Devem ser multiplicadas todas as possibilidades do total de etapas, que neste caso resulta em 2x2x2x2x2=32 possibilidades.

O *discurso tecnológico-teórico* para esta tarefa pode ser explicado por meio do PFC aplicado em etapas sucessivas.

A terceira *tarefa* relativa à segunda questão possui o processo de resolução idêntico às outras duas tarefas. A seguir descreveremos a técnica utilizada no material de apoio do PIC.

A *técnica* relativa à tarefa pode ser dividida em duas fases. Consiste ainda subtrair as possibilidades das etapas que compõem o evento.

1ª Fase: Determinar o número de etapas que possui o evento. Ao todo são três etapas, as quais detalharemos a seguir.

a) Ao todo são 243 gabaritos possíveis;
b) O número de gabaritos em que a alternativa A não aparece é 32;

2ª Fase: Usar o Princípio Aditivo. Se são 243 gabaritos possíveis, e em 32 deles o A não aparece, então pelo Princípio Aditivo devemos fazer 243-32 para obter o número de gabaritos em que o A aparece ao menos uma vez.

O discurso *tecnológico-teórico* é motivado pelo Princípio Aditivo com aplicação em conjuntos disjuntos.

A seguir tratamos da terceira questão identificada no material de apoio ao ensino do PIC.

Quadro 4 – Questão 3 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

Quantos anagramas da palavra CEBOLA começam e terminam por vogal?

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 6).

Nesta questão, a *tarefa* corresponde a determinar o número de anagramas da palavra CEBOLA, que terminam com A, E ou O. Dito de outra forma, ela consiste em determinar a quantidade de agrupamentos possíveis dentre seis objetos distintos, sendo que em uma das etapas é necessário considerar a restrição de que os agrupamentos precisam terminar com uma das vogais.

A técnica utilizada consiste em multiplicar as possibilidades que compõem cada etapa do evento.

1ª Fase: Mapear as etapas do evento.

2ª Fase: Encontrar as possibilidades de cada etapa.

a) Distribuir as vogais na primeira casa e na última, simultaneamente;
b) Determinar o número de possibilidades para cada etapa;
c) Distribuir as consoantes entre as casas restantes;
d) Determinar o número de possibilidades obtido em cada etapa;

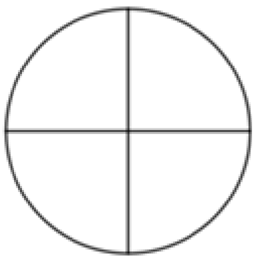
3ª Fase: Deve-se multiplicar os resultados obtidos em cada etapa.

O *discurso tecnológico-teórico* está de acordo com o PFC, com utilização de etapas sucessivas. Vale ressaltar que a tarefa pode ser generalizada para modelos diferentes, no entanto, seria interessante que se apresentasse inicialmente como tarefa, determinar os anagramas que terminam com vogal, a partir daí poderia fazer o processo de generalização.

A próxima questão a ser analisada apresenta um pouco mais de complexidade.

Quadro 5 – Questão 4 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

Dispomos de cinco cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é um segmento de reta não podem receber a mesma cor?



Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 6).

A quarta questão analisada apresenta algumas peculiaridades em relação às primeiras analisadas. Para resolvê-la é importante que se esteja atento às estratégias discutidas por Lima et al. (2016), são elas: ter *postura* (isto é, se colocar no lugar de quem vai resolver o problema), usar *divisão de decisões* (isto é, dividir as decisões sempre que possível) e *não adiar dificuldades* (isto é, ter consciência que algumas decisões tomadas no momento errado pode gerar dificuldades).

Nesse problema, a *tarefa* consiste em pintar uma bandeira circular dividida em quatro quadrantes, dispondo de cinco cores, sendo que quadrantes adjacentes com segmento em comum não recebam a mesma cor.

Levando isso em consideração, encontramos no material de apoio ao ensino do PIC como sugestão separar o evento em estágios. A *técnica* proposta para resolver este problema é a de multiplicar as possibilidades encontradas em cada etapa do evento, e ao final somar as possibilidades relativas aos estágios observados.

Por questão de estratégia de resolução, dividiremos o problema em dois estágios.

Estágio 1: Os quadrantes 1 e 3 (contados no sentido horário) têm cores diferentes. Logo,

1ª Fase: Determinar as possibilidades para cada etapa do evento, considerando as restrições impostas.

a) Tem-se 5 opções para pintar o quadrante 1;
b) Tem-se 4 opções para pintar o quadrante 3;
c) Tem-se 3 opções para pintar o quadrante 2;
d) Tem-se 3 opções para pintar o quadrante 4;

2ª Fase: Multiplicar as possibilidades encontradas em cada etapa.

Estágio 2: Os quadrantes 1 e 3 têm a mesma cor. Logo,

1ª Fase: Determinar as possibilidades para cada etapa do evento, levando em consideração as restrições.

a) Tem-se 5 opções para pintar o quadrante 1;
b) Tem-se 1 opção para pintar o quadrante 3;
c) Tem-se 4 opções para pintar o quadrante 2;
d) Tem-se 4 opções para pintar o quadrante 4;

2ª Fase: Deve-se multiplicar as possibilidades encontradas para cada etapa.

Por fim, somamos as possibilidades encontradas em cada estágio.

Vale destacar que sem dividir a técnica em dois estágios, somos levados a resolver a tarefa de forma errônea, pois não levamos em consideração as restrições. Por exemplo, poderíamos achar conveniente considerar 5 maneiras de pintar o primeiro quadrante, 4 maneiras de pintar o segundo quadrante, 4 maneiras de pintar o terceiro quadrante e por fim 3 maneiras de pintar o quarto quadrante. Esse raciocínio está equivocado, uma vez que o fato dos quadrantes 1 e 3 poderem ser (ou não) da mesma cor influencia na contagem das maneiras de pintar o círculo.

Sendo assim, a técnica de resolução considerando a estratégia de “atacar” inicialmente as restrições como discute Lima et al. (2016) parece ser fundamental.

Mais uma vez o *discurso tecnológico-teórico* referente à técnica está fundamentado no PFC e no Princípio Aditivo. A partir do trabalho com as técnicas relativas às tarefas dadas até o momento, existe a tendência de que o discurso se torne comum entre os alunos e às técnicas sejam melhor compreendidas por eles.

Daremos continuidade à nossa investigação com a próxima atividade disponibilizada no material de apoio.

Quadro 6 – Questão 5 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

Quantos são os números de três algarismos distintos?

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 6).

Na questão 5, a *tarefa* associada consiste em determinar a quantidade de números com três algarismos, sendo todos distintos. De um modo geral, a tarefa consiste em determinar o número de agrupamentos com três elementos distintos, tomados de um conjunto com 10 elementos. Tais elementos são os algarismos do sistema decimal de numeração.

A técnica associada a esse problema pode ser dividido em três fases.

1ª Fase: Determinar o número de etapas que compõem o evento.

2ª Fase: Calcular as possibilidades que compõem cada etapa.

a) Apenas o algarismo 0 não pode ser colocado na casa das centenas, logo existe 9 possibilidades de escolha;
b) Apenas o algarismo que não foi colocado na casa das centenas não pode ser colocado na casa das dezenas, logo temos 9 possibilidades de escolha;
c) Qualquer algarismo pode ser colocado na casa das unidades, menos os que foram colocados na casa das centenas e dezenas, logo restam 8 possibilidades de escolha.

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades encontradas para cada etapa do evento.

Em relação ao *discurso tecnológico-teórico* novamente existe a utilização do PFC para n etapas sucessivas.

Analisaremos agora a sexta questão do material de apoio ao ensino.

Quadro 7 – Questão 6 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

O alfabeto hermitiano consiste de apenas três letras: A, B e C. Uma palavra nesta linguagem é uma sequência arbitrária tendo, no máximo, quatro letras. Qual é o número de palavras na linguagem hermitiana?

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 6).

A *tarefa* relacionada à sexta questão consiste em determinar o número de agrupamentos de um, dois e três eventos, sendo que cada evento tem um número específico de elementos.

Para uma melhor caracterização da *técnica* utilizada vamos dividi-la em três casos, sendo que cada caso possui entre uma e três fases.

Estágio 1: A palavra é composta por apenas uma letra.

1ª Fase: Calcular as possibilidades para o evento.

a) Existem três possibilidades para formar uma palavra com apenas uma letra.

Estágio 2: A palavra possui duas letras.

1ª Fase: Determinar as etapas que compõem o evento.

2ª Fase: Calcular as possibilidades para cada etapa do evento.

a) A primeira letra pode ser escolhida de 3 formas;
b) A segunda letra pode ser escolhida de 3 formas.

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades encontradas para cada etapa.

Estágio 3: A palavra possui três letras.

1ª Fase: Determinar as etapas que compõem o evento.

2ª Fase: Calcular as possibilidades para cada etapa.

a) A primeira letra pode ser escolhida de 3 formas;
b) A segunda letra pode ser escolhida de 3 formas;
c) A terceira letra pode ser escolhida de 3 formas.

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades que compõem cada etapa do evento e em seguida somar os resultados obtidos.

Nessa tarefa, o *discurso tecnológico-teórico* continua sendo o PFC para n etapas sucessivas. Além disso, utilizou-se o Princípio Aditivo para justificar a técnica utilizada.

Até o momento dá-se para observar que as tarefas disponibilizadas no material de apoio foram desenvolvidas de modo a privilegiar o PFC e sua aplicação na resolução de problemas. Em relação ao uso de outras técnicas, nada foi evidenciado durante a nossa análise.

Daremos prosseguimento analisando a sétima questão da lista.

Quadro 8 – Questão 7 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

Quantos números inteiros positivos pares com quatro algarismos podem ser escritos com os algarismos 0, 1, 2 e 4?

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 7).

A *tarefa* consiste em determinar a quantidade de números pares com quatro algarismos que se podem formar de acordo com os dados do problema. De um modo geral, é solicitado para encontrar o número de agrupamentos que se pode formar com quatro elementos distintos, respeitando os dados e condições do problema.

Para resolver esta tarefa é necessário estar atento às restrições e se utilizar das estratégias discutidas por Lima et al. (2016).

A *técnica* associada à resolução da tarefa pode ser descrita em três fases e consiste em multiplicar as possibilidades referentes a cada etapa do evento.

1ª Fase: Determinar as etapas do evento.

2ª Fase: Calcular as possibilidades que compõem o evento.

a) São três opções para a casa das unidades (0, 2 ou 4);
b) São três opções para a cada da milhar (1, 2 ou 4);
c) São quatro opções para a casa das centenas (0, 1, 2 ou 4);
d) São quatro opções para a casa das dezenas (0, 1, 2 ou 4).

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades determinadas para cada etapa.

Mais uma vez a tarefa pode ser resolvida através do PFC. Vale salientar que essa tarefa assim como as outras já discutidas poderiam ser resolvidas por meio de outras técnicas, no entanto, no material de apoio ao ensino consta apenas a que aqui estamos considerando.

Neste quesito, o *discurso tecnológico-teórico* continua sendo permeado pelo PFC aplicado em n etapas sucessivas.

A seguir analisaremos a última questão sobre Combinatória identificada no material de apoio ao ensino.

Quadro 9 – Questão 8 do Material de apoio ao ensino de Combinatória

Quantos são os números naturais de quatro dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

Fonte: 12º PIC-OBMEP (2017, p. 7).

A *tarefa* associada à oitava questão pede para determinar a quantidade de número possíveis com quatro algarismos, sendo que pelos menos dois deles são iguais. Ou seja, é necessário formar agrupamentos com quatro elementos, sendo que pelo menos dois deles são idênticos.

A seguir descreveremos a *técnica* utilizada para resolver este problema. Ela será descrita em dois estágios de três fases cada. Além disso, as algumas fases estão desenvolvidas por meio de etapas.

É necessário utilizar o fato de que um número de quatro dígitos possui pelo menos dois dígitos iguais quando não tiver todos, ao mesmo tempo, distintos. Esse raciocínio é fundamental no desenvolvimento da técnica. Assim, basta desconsiderar os números, dentre todos os possíveis com quatro dígitos, cujos algarismos são distintos.

Estágio 1: Determinar a quantidade de números possíveis com quatro algarismos quaisquer.

1ª Fase: Determinar o número de etapas que compõe o evento.

2ª Fase: Encontrar as possibilidades de cada etapa.

a) Para a casa da milhar temos 9 opções, pois não pode ser 0;
b) Para a casa das centenas temos 10 opções;
c) Para a casa das dezenas temos 10 opções;
d) Para a casa das unidades temos 10 opções;

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades que compõem cada etapa do evento.

Estágio 2: Determinar a quantidade de números com quatro algarismos, sendo todos distintos.

1ª Fase: Determinar o número de etapas que compõe o evento.

2ª Fase: Encontrar as possibilidades de cada etapa.

a) Para a casa da milhar temos 9 opções;
b) Para a casa das centenas temos 9 opções;
c) Para a casa das dezenas temos 8 opções;
d) Para a casa das unidades temos 7 opções;

3ª Fase: Multiplicar as possibilidades determinadas em cada etapa.

Momento 3: Subtrair o resultado obtido no segundo momento do resultado obtido no primeiro.

O *discurso tecnológico-teórico* referente à técnica utilizada é justificado pelo PFC e o Princípio Aditivo. Tais ferramentas foram determinantes na resolução da tarefa.

Ao analisar a sequência de problemas notamos que o material de apoio ao ensino do PIC possibilita que o estudante desenvolva o raciocínio combinatório de uma forma privilegiada, ao abordar o tema através de tarefas diferenciadas e que ilustra o mesmo conteúdo. Neste sentido, permite a aprendizagem do objeto por meio de diferentes enfoques dentro da instituição.

Destacamos que as técnicas relativas às tarefas são justificadas em todo momento pelo Princípio Fundamental da Contagem e, às vezes, pelo Princípio Aditivo. Além disso, o PFC é aplicado para duas ou mais etapas sucessivas e independentes. Em alguns casos, o PFC foi utilizado de forma mais ampla, sendo aplicado na resolução de tarefas com que exigiam a aplicação de mais de três etapas sucessivas do Princípio.

Por sua vez, a teoria que justifica o uso do PFC em n etapas sucessivas na resolução das tarefas (logo como tecnologia das técnicas) é a Álgebra. A ideia é utilizar o Princípio da Indução Finita para validar a aplicação do PFC em n etapas sucessivas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa tivemos como objetivo estudar as atividades de Combinatória do material de apoio ao ensino do 12ª PIC-OBMEP na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático. Especificamente, utilizamos esta Teoria para analisar as organizações matemáticas das atividades.

Para tanto, estabelecemos algumas etapas fundamentais de nosso estudo. Partimos da apresentação da Teoria Antropológica do Didático, depois da Análise Combinatória, dando enfoque as suas técnicas de resolução de problemas. Após esse estudo teórico, obtivemos posse dos elementos teóricos e assim pudemos estabelecer os processos metodológicos para encaminhar o estudo.

Dessa forma, pudemos desenvolver a nossa questão de pesquisa: *Quais são as Organizações Matemáticas do material de apoio do 12º PIC-OBMEP em relação aos problemas de Análise Combinatória?*

Procuramos identificar na seção destinada às questões de Análise Combinatória as praxeologia matemáticas, as quais são estabelecidas em termos de tipos de tarefas, técnicas e discurso tecnológico-teórico, que por sua vez justificam a validam as técnicas utilizadas.

Em relação à análise do material de apoio ao ensino de Combinatória, o ensino desta temática é dado por meio da resolução de questões com ênfase na utilização do Princípio Fundamental da Contagem e do Princípio Aditivo como tecnologias na justificativa das técnicas utilizadas. A técnica frequente consiste em multiplicar as possibilidades que compõem as etapas de um determinado evento.

Com isso, entendemos que o Programa deixa de explorar outras técnicas na resolução das tarefas, como as discutidas na fundamentação do trabalho. No entanto, trabalha-se a mesma técnica aplicada a modelos distintos de tarefas, o que pode se tornar interessante do ponto de vista da compreensão e assimilação do conteúdo.

Pudemos inferir que a sequência de tarefas subsidia novas formas de abordagem do conteúdo, que vão além da manipulação de técnicas mecânicas e com pouco enfoque no processo de compreensão. As técnicas utilizadas garantiram a resolução de forma competente das tarefas. Além disso, o discurso tecnológico-teórico justifica de forma simples e de forma ampla as técnicas utilizadas.

Por fim, salientamos que esta pesquisa não se limita a esse texto, pretendemos realizar novos estudos no sentido de compreender a abordagem da Análise Combinatória ou até mesmo de outros temas sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático. Uma das propostas seria fazer um estudo do tratamento de Combinatória das provas da OBMEP sob a ótica da TAD.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. **La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: UFPE, 2011. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2884>. Acesso em: 05 de dezembro de 2017.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. Curitiba, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática. Ensino de primeira a quarta série. Brasília: MEC, 1997.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; BESSA DE MENEZES, M. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática – UFMS**, v. 8, número temático, 2015. p. 648-670.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique**. Recherches in Didactique des Mathématiques, vol 12, no 1, pp.73-112, 1992.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ**, 1998, p.91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

______. **L'Analyse de Des pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique**,1999.

GRIMALDI, R. P. **Discrete and combinatorial mathematics: an applied introduction**. Reading, Ma: Addison- Wesley, 1989.

GUZMÁN, R. R. **Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada**. 2000. 196 f. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada, 2000.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2. Coleção do Professor de Matemática. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MAIA, C. K. **A Organização Praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental**. 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NCTM**. National Council of Teachers of Mathematics:** Principles and standards for school mathematics**,** 2000.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco / Parâmetros na Sala de Aula:** Matemática Ensino Fundamental e Médio. Recife: SE, 2013.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco / Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SE, 2012.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. E. S. R. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. **Anais...** 4º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, 2009.

TEIXEIRA, P. J. M. **Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014.

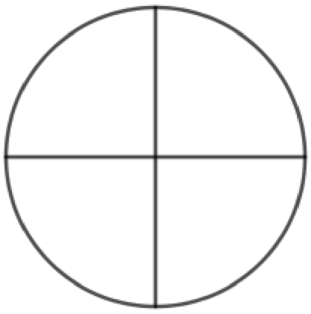
APÊNDICE A – QUESTÕES ANALISADAS DO MATERIAL DE APOIO AO ENSINO DE COMBINATÓRIA DO 12º PIC-OBMEP

1) De quantos modos 4 homens e 4 mulheres podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares, sendo que em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

2) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 5 questões de múltipla escolha, com 3 alternativas (A, B, C) por questão? Em quantos a letra A não aparece? Em quantos a letra aparece pelo menos uma vez?

3) Quantos anagramas da palavra CEBOLA começam e terminam por vogal?

4) Dispomos de cinco cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é um segmento de reta não podem receber a mesma cor?



5) Quantos são os números de três algarismos distintos?

6) O alfabeto hermitiano consiste de apenas três letras: A, B e C. Uma palavra nesta linguagem é uma sequência arbitrária tendo, no máximo, quatro letras. Qual é o número de palavras na linguagem hermitiana?

7) Quantos números inteiros positivos pares com quatro algarismos podem ser escritos com os algarismos 0, 1, 2 e 4?

8) Quantos são os números naturais de quatro dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?