UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

BRANDON MARCELINO CARHUAS DE LA TORRE

Existência e não existência de soluções locais para problemas parabólicos não lineares com dados singulares

Recife

2024

BRANDON MARCELINO CARHUAS DE LA TORRE

Existência e não existência de soluções locais para problemas parabólicos não lineares com dados singulares

Trabalho apresentado ao Programa de Pósgraduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática

Área de Concentração: Análise

Orientador : Prof. Dr. Miguel Loayza Lozano

Coorientador : Prof. Dr. Ricardo Castillo Maldonado

Recife

2024

Catalogação na fonte
Bibliotecário Josias Machado da Silva Junior, CRB4-1690

T689e Torre, Brandon Marcelino Carhuas de la
Existência e não existência de soluções locais para problemas parabólicos não lineares com dados singulares / Brandon Marcelino Carhuas de la Torre. – 2024.
98 f.

Orientador: Miguel Loayza Lozano.
Orientador: Ricardo Castillo Maldonado.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2024.
Inclui referências.

1. Equação não linear. 2. Existência local. 3. Não existência. 4. Unicidade. 5. Dados iniciais singulares. 6. Expoente variável. 7. Valores críticos. I. Lozano, Miguel Loyaza (orientador). II. Maldonado, Ricardo Castillo. (coorientador). III. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2024 - 37

BRANDON MARCELINO CARHUAS DE LA TORRE

Existência e não existência de soluções locais para problemas parabólicos não lineares com dados singulares

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 28/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

A Deus, minha família e para minha querida prima Betzabe.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelas oportunidades que tive e por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Para minha querida prima Betzabe, meu irmão Victor, meu sobrinho Jonathan por sempre cuidar de mim.

Agradeço muito a meus queridos e amados pais, pelo exemplo de vida transmitido a mim e pela educação que recebi ao longo da minha vida que formaram a base para meu desenvolvimento acadêmico e humano. Agradeço as minhas irmãs, Liz, Cherlin, Leticia, Yeraldine e meus irmãos Carlos, Freddy, Darien pela união e por sempre acreditarem nos avanços por mim conquistados. Agradeço a toda minha família pelo suporte na minha criação.

Gostaria de expressar minha gratidão à minha noiva, Milagros, pelo amor e apoio de cada dia que permanece ao meu lado. Não posso esquecer a sua família, em especial a seus pais e irmãos, por todo o apoio e carinho.

Reservo agora um agradecimento mais do que especial ao meu orientador Miguel Loayza (a quem já considero como um grande amigo) por tudo que ele tem feito por mim ao longo deste doutorado. Obrigado, professor, por sua generosidade, conselhos e paciência. Serei sempre muito grato ao senhor por todas estas coisas.

Meu muito obrigado vai agora para o professor Ricardo Castillo, meu coorientador. Só tenho a agradecer por sua generosidade e paciência.

Aos professores da pós-graduação do DMAT-UFPE, pelo ensino nas disciplinas.

Aos meus colegas e amigos da pós-graduação: Nelson Leal, Ygor, Geovani, Jackellyny, Micael, Mirelle, Lázaro, Franco, Rafael Cavalcanti, Matheus Nunes, Igor Nonato, Ricardo, Jandeilson, Leonardo, Túlio, Rafael Souto, Luan e Júlio.

Aos meus amigos: Oscar, Alberto, Angel, Alberca, Omar, Wilfredo, Fernando e meus amigos do Perú pelo apoio e conselhos.

Aos meus professores da Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica: Yance, Vicente, Gutierres, Velazques, Aparcana Aquije e Berrocal.

Meu agradecimento também para os professores Felipe Wergete e Roberto Capistrano, por se mostrar sempre prestativos.

Agradeço aos membros da banca avaliadora, pela disponibilidade e contribuições.

E finalmente, meu agradecimento ao CNPq por todo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta tese apresentamos resultados de existência local de soluções para problemas parabólicos não lineares com dados inicias singulares. Primeiramente, no Capítulo 3 fornecemos novas condições para a existência local de soluções para um problema parabólico não linear com dados iniciais no espaço de Lebesgue. Como consequência de nossos resultados, considerando um comportamento adequado dos dados iniciais não negativos obtemos um segundo valor critico que determina a existência (ou não) de uma solução local. Para alcançar esses resultados, empregamos um método de comparação, mostrando a existência de uma super e uma subsolução. No Capítulo 4, estudamos condições de existência, não existência e unicidade de soluções locais para um problema parabólico com expoente variável considerando dados iniciais no espaço de Lebesgue, usando um método iterativo monótono, estimativas de efeitos regularizantes nos espaços de Lebesgue e desigualdade de Jensen para expoente variável. No Capítulo 5, estamos interessados na existência de soluções locais não negativa considerando o espaço de Lebesgue uniformemente local para o problema parabólico não linear com potencial singular. Em particular, obtemos condições necessárias e suficientes para a existência de soluções, melhorando os resultados obtidos no contexto dos espaços Lebesgue. As principais ferramentas técnicas para provar esses resultados são um método iterativo monótono, estimativas de efeitos regularizantes nos espaços de Lebesgue uniformemente locais e desigualdade de Jensen.

Palavras-chaves: equação não linear; existência local; não existência; unicidade; dados iniciais singulares; expoente variável; valores críticos.

ABSTRACT

In this thesis, we present results on the local existence of solutions for nonlinear parabolic problems with singular initial data. Firstly, in Chapter 3, we provide new conditions for the local existence of solutions to a nonlinear parabolic problem with initial data in the Lebesgue space. As a consequence of our results, considering an appropriate behavior of non-negative initial data, we obtain a second critical value that determines the existence (or non-existence) of a local solution. To achieve these results, we employ a comparison method, showing the existence of a super and a subsolution. In Chapter 4, we investigate conditions for the existence, non-existence, and uniqueness of local solutions to a parabolic problem with a variable exponent, considering initial data in the Lebesgue space. We employ a monotone iterative method, estimates with regularizing effects in Lebesgue spaces, and Jensen's inequality for a variable exponent. In Chapter 5, we are concerned with the existence of non-negative local solutions considering the uniformly local Lebesgue space for the nonlinear parabolic problem with singular potential. In particular, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of solutions, improving results obtained in the context of Lebesgue spaces. The main technical tools for proving these results include a monotone iterative method, estimates with regularizing effects in uniformly local Lebesgue spaces, and Jensen's inequality.

Keywords: nonlinear equation; local existence; non-existence; uniqueness; singular initial data; variable exponent; critical values.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\bar{C}, C_1, C_2, \ldots$	Constantes positivas.
$\mathbb{R}^N$	Espaço euclidiano N-dimensional, onde $x = (x_1, ..., x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, N$.
$B_R(x)$	Bola aberta do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ centrado em x com raio $R > 0$, ou seja, $B_R(x) = \Big\{y \in \mathbb{R}^N; \lvert x - y\rvert < R\Big\}$.
B_R	Bola aberta do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ centrado na origem.
$\partial B_R(x)$	Circunferência de $\mathbb{R}^N$ centrado em x com raio $R > 0$, ou seja, $\partial B_R(x) = \Big\{y \in \mathbb{R}^N; \lvert y - x\rvert = R\Big\}$.
$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	$i-$ ésima derivada parcial da função u.
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u.
$C_c^\infty(\Omega)$	O conjunto formado pelas funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$L^q(\Omega)$	$\left\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u \text{ mensurável e } \int_\Omega \lvert u(x)\rvert^q \, dx < \infty\right\}$.
$L^1_{loc}(\Omega)$	O conjunto de funções que são integráveis em cada subconjunto compacto de Ω.
$L^\infty(\Omega)$	$\left\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} \lvert u(x)\rvert < \infty\right\}$.
$C(\Omega)$	O espaço das funções contínuas.
$C_0(\Omega)$	O fecho do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com a norma do máximo.
$C^k(\Omega)$	O conjunto das funções em Ω que tem derivada parcial contínua em Ω de ordem menor ou igual a k.
$C^\infty(\Omega)$	O conjunto das funções em Ω com derivadas parciais contínuas em Ω de todas as ordens.
$L^p_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$	$\left\{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N); \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{B_\rho(y)} \lvert u(x)\rvert^p \, dx\right)^{1/p} < \infty\right\}$, $\rho > 0$.

$L^{\infty}_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$	$\left\{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N); \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \mathrm{ess} \, \|u\|_{L^{\infty}(B_\rho(y))} < \infty\right\}.$
$\mathcal{L}^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$	O fecho do espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas $BUC(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$, ou seja , $\mathcal{L}^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N) := \overline{BUC(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)}}$.
I_ρ	$\{\psi \in C(\mathbb{R}^N), \psi \geq 0, \liminf_{\lvert x\rvert\to+\infty} \lvert x\rvert^\rho \psi(x) > 0\}.$
I^ρ	$\{\psi \in C(\mathbb{R}^N), \psi \geq 0, \limsup_{\lvert x\rvert\to+\infty} \lvert x\rvert^\rho \psi(x) < \infty\}.$
$\mathcal{I}^{\rho,r}$	$\{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0$ e $\lvert x\rvert^\rho \psi^r(x) \leq K \, \chi_{B_a}(x)$ q.t.p. em $\Omega,$ para alguns $K, a > 0\}$.
$\mathcal{I}_{\rho,r}$	$\{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0$ e $\lvert x\rvert^\rho \psi^r(x) \geq K \chi_{B_a}(x)$ q.t.p. em Ω para alguns $K, a > 0\}$.
$p_{\inf}$	$\inf\left\{p > p^*; \limsup_{t\to+\infty} t^{-p} f(t) < \infty\right\}.$
$p_{\sup}$	$\sup\left\{p > p^*;\ \liminf_{t\to+\infty} t^{-p} f(t) > 0\right\}.$
q.t.p de Ω	Significa quase todo ponto de Ω.
p_F, p^*, p^*_γ	São os expoentes críticos.
ρ_F, ρ^*	São os segundos expoentes críticos.
$h \equiv C$	significa que a função h é constante identicamente igual a C.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo desta tese é a análise de problemas parabólicos com dados iniciais singulares. Ao longo desta introdução faremos uma descrição de tais problemas, forneceremos uma breve visão histórica dos mesmos, e apresentaremos os principais resultados obtidos.

As equações diferenciais constituem uma área da Matemática que surgiu junto com o Cálculo e suas aplicações nas Ciências Naturais, principalmente na Mecânica dos Corpos, enquanto, suas subáreas de pesquisa, como a Teoria Geométrica de Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais Parciais e Funcionais (E.D.P. e E.D.F.) entre outras, desenvolvem até hoje diferentes técnicas e abordagens de estudo.

As equações parabólicas não lineares, bem como sistemas de tais equações modelam diversos fenômenos, como por exemplo os que envolvem processos difusivos. Também encontramos aplicações na Teoria da combustão, na Biologia e na Medicina. Estudar o comportamento desses problemas e suas soluções podem ajudar a compreender melhor os modelos e, consequentemente, as situações modeladas. Sugerimos as referencias (BEBERNES; EBERLY, 1989),(CHILDRESS; PERKUS, 1977), (BELLMAN, 1983),(ARIS, 1975), (GAVALAS, 1968) para maiores detalhes.

Em geral, resolver um problema envolvendo equações diferenciais consiste em exibir uma solução explicita, em termo das funções elementares, verificando as condições de fronteira, as condições iniciais e a equação diferencial do problema. Contudo, nem sempre é possível exibir a fórmula da solução, e por isso, uma outra abordagem é necessária. A teoria das Equações Diferenciais Parciais está bem estruturada e subsidiada pelos resultados da Análise Funcional e Teoria de Operadores, das quais, dentro das diversas técnicas, utilizaremos a teoria de semigrupo (veja (PAZY, 1983); (CAZENAVE; HARAUX, 1998); (YOSIDA, 2012)) para estudar o comportamento das soluções de um tipo de Equação Diferencial Parcial parabólica não linear.

A teoria de equações diferenciais parciais parabólicas, vista do ponto da teoria de semigrupos, possui diversos resultados quando olhamos para os problemas como uma equação de evolução em um espaço de dimensão infinita, em específico, de Banach, para isto, reescrevemos de alguma forma o problema parabólico original como uma equação que faz sentido em algum espaço de Banach, na qual, futuramente, denominaremos de formulação abstrata. A teoria de semigrupos fornece ferramentas poderosas para analisar a existência, unicidade e regularidade das soluções dessas equações.

Na presente tese, estamos interessados em estudar resultados de existência local para problemas parabólicos não lineares com dados iniciais singulares.

O primeiro problema parabólico semilinear, estudado no Capítulo 3, é

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio (limitado ou ilimitado) com fronteira $\partial\Omega$ suave sempre que existir, $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ e $1 \leq r < \infty$. O objetivo principal é considerar um comportamento adequado dos dados inicias para a existência (ou não) de soluções do problema (1.1).

A motivação do estudo deste problema está relacionado com o problema parabólico não linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $p \geq 1$.

O problema (1.2) tem sido extensivamente estudado. Um dos pioneiros em estudar a existência de soluções globais com condições iniciais $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ foi Fujita em (FUJITA, 1966), quem mostrou a existência do seguinte valor "$p_F = 1+2/N$", conhecido como expoente crítico de Fujita, que determina a existência ou não existência de soluções globais não negativas. Este expoente crítico pode ser determinado através do método chamado de scaling e pode ser usado para encontrar o coeficiente de Fujita de outras equações como, por exemplo $u_t - \Delta u = |\cdot|^{-\gamma} |u|^{p-1} u$, veja (BANDLE; LEVINE, 1989) $u_t = \nabla (u^\sigma \nabla u) + u^\beta$ veja (GALAKTIONOV et al., 1980). O trabalho de Fujita gerou inúmeras extensões do problema (1.2). Em lugar de $|u|^{p-1}u$, outros termos não lineares são considerados, o espaço $\mathbb{R}^N$ dá lugar a outros domínios, limitados e ilimitados, e condições de contorno são adicionadas. Para cada extensão, tem-se buscado determinar um expoente crítico que desempenhe papel semelhante ao de p_F no problema (1.2). Recomendamos conferir (FUJITA, 1966; WEISSLER, 1980; WEISSLER, 1981; MEIER, 1988; MEIER, 1990; LEVINE, 1990; LEVINE; MEIER, 1990; DENG; LEVINE, 2000), para resultados nessa direção. Seguindo a linha de expoente crítico, temos o trabalho realizado por T. Y. Lee e W. Ni em (LEE; NI, 1992) e Wang (WANG, 1993). Nesses trabalhos, os autores consideraram o problema (1.2) com dados iniciais em $C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para $p > p_F = 1 + 2/N$, eles analisam a existência de soluções globais e explosão em tempo finito quando u_0 pertence aos conjuntos I_ρ ou I^ρ, onde

$$I_\rho = \{\psi \in C(\mathbb{R}^N), \psi \geq 0, \liminf_{|x|\to+\infty} |x|^\rho \psi(x) > 0\},$$

$$I^\rho = \{\psi \in C(\mathbb{R}^N), \psi \geq 0, \limsup_{|x|\to+\infty} |x|^\rho \psi(x) < \infty\}.$$

Eles determinaram um novo valor crítico $\rho_F = 2/(p-1)$, chamado de segundo valor crítico, de modo que se $0 < \rho < \rho_F$ e $u_0 \in I_\rho$ então as soluções explodem em tempo finito, enquanto se $\rho \geq \rho_F$ e $u_0 \in I^\rho$ então a solução é global.

Para $u_0 \in L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \infty$, o problema (1.2) também tem sido extensivamente estudado, veja os resultados obtidos por Brezis, Cazenave em (BREZIS; CAZENAVE, 1996), Celik, Zhou em (CELIK; ZHOU, 2003) e Weissler em (WEISSLER, 1980), (WEISSLER, 1981). É bem sabido que existe um valor crítico $r_c = N(p-1)/2$ tal que:

- Se $r \geq 1$ e $r_c < r$ ou $r > 1$ e $r_c = r$, então o problema (1.2) admite uma solução local.
- Se $r \geq 1$ e $r_c > r$ ou $r = 1$ e $r_c = r$, então existe $u_0 \in L^r(\Omega)$ não negativo tal que o problema (1.2) não possui solução.

O problema (1.1) com $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$, foi completamente caracterizado por Laister et al. em (LAISTER et al., 2016). Eles mostraram a existência de um valor crítico

$$p^* = 1 + \frac{2r}{N} \tag{1.3}$$

obtendo o seguinte resultado:

- Se Ω é um domínio limitado, então o problema (1.1) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ com $r > 1$ se, e somente se, $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty$.
- Para $r = 1$, o problema (1.1) possui solução local para cada $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$ se, e somente se, $\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F(\sigma) d\sigma < \infty$, onde $F(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq\sigma} f(t)/t$.

O caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ também foi tratado por eles, mas neste caso o resultado da existência requer a condição adicional $\limsup_{t\to 0} f(t)/t < \infty$ e F é dado por $F(\sigma) = \sup_{0<t\leq\sigma} f(t)/t$. Para mais detalhes veja (LAISTER et al., 2016, Teorema 3.4, Corolário 4.5 e Teorema 5.1). Note que, quando $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) = +\infty$, existem dados iniciais não negativos $u_0 \in L^r(\Omega)$ de modo que o problema (1.1) não admite uma solução local não negativa. Assim, naturalmente, surgem as duas seguintes questões:

- O que acontece com a existência local de soluções neste caso?
- É possível definir uma classe de dados iniciais onde a existência local de soluções seja válida?

Até onde sabemos, existem poucos resultados sobre isso e apenas no caso $f(t) = t^q$, $q > 1$ veja (HARAUX; WEISSLER, 1982), (MIYAMOTO, 2021).

Para responder às questões levantadas, assumimos que $0 \in \Omega$ e $B_a \subset \Omega$, onde B_a denota a bola aberta com raio $a > 0$ centrada em 0, e consideramos dados iniciais nos conjuntos $\mathcal{I}^{\rho,r}$ e $\mathcal{I}_{\rho,r}$, onde

$$\mathcal{I}^{\rho,r} = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x|^\rho \psi^r(x) \leq K\ \chi_{B_a}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para alguns } K, a > 0\},$$

$$\mathcal{I}_{\rho,r} = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x|^\rho \psi^r(x) \geq K \chi_{B_a}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ para alguns } K, a > 0\},$$

para $0 < \rho < N$ e $r \geq 1$. A condição $0 < \rho < N$ garante que $|\cdot|^{-\rho/r}\chi_{B_a} \in L^r(\Omega)$. Aqui χ_{B_a} denota a função característica da bola B_a. Como consequência do nosso resultado, encontramos um novo expoente crítico quando $f(t) = t^q, q > 1$, que é dado por $\rho^* = 2r/(q-1)$. Diremos que ρ^* é o segundo valor crítico.

Os conjuntos $\mathcal{I}^{\rho,r}$ e $\mathcal{I}_{\rho,r}$ são inspirados nos conjuntos considerados por Lee e Ni (LEE; NI, 1992) e Wang (WANG, 1993).

Vale ressaltar que dados iniciais na forma $u_0 = |\cdot|^{-\alpha}\chi_{B_a}$ foram usados primeiramente em (QUITTNER; SOUPLET, 2001) para mostrar a não existência de solução não negativa para um sistema relacionado a (1.1), e caracterizações para problemas parabólicos relacionados a (1.1).

Em nosso principal resultado, analisamos a existência de soluções não negativas.

Teorema 1.0.1 *Seja $f \in C([0, +\infty))$ convexa, não decrescente e $f(0) = 0$.*

(i) Suponha que exista $p_0 > p^*$ tal que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) < \infty$. Seja

$$p_{\inf} = \inf\left\{p > p^*;\ \limsup_{t\to+\infty} t^{-p} f(t) < \infty\right\}$$

e $0 < \rho < 2r/(p_{\inf} - 1)$. Então, para todo $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,r}$, o problema (1.1) possui uma solução local não negativa em algum intervalo $(0, T)$. Além disso, $u \in L^\infty_{loc}((0, T), L^\infty(\Omega))$ e $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\rho/2r}$ para todo $t \in (0, T)$ e alguma constante $C > 0$.

(ii) Assuma que existe $p_0 > p^*$ tal que $\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) > 0$. Se

$$p_{\sup} = \sup\left\{p > p^*;\ \liminf_{t\to+\infty} t^{-p} f(t) > 0\right\} < \infty,$$

e $2r/(p_{\sup}-1) < \rho < N$, então para cada $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$, o problema (1.1) não possui solução local não negativa.

Os argumentos usados para tratar o problema (1.1) também podem ser usados para resolver um problema parabólico ponderado no tempo com $u_0 \in L^r(\Omega)$ sem a restrição de sinal. Além disso obtemos um resultado de unicidade.

O Teorema 1.0.1 faz parte de um primeiro artigo (veja (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022)), o qual encontra-se submetido.

O segundo problema que estamos interessados, tratado no Capítulo 4, é o seguinte problema parabólico com uma não linearidade com expoente variável

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u)^{p(x)} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, $p : \Omega \to (1,+\infty)$ é uma função contínua tal que

$$1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \text{ para todo } x \in \Omega, \tag{1.5}$$

com $p^- = \min_{x\in\Omega} p(x), \quad p^+ = \max_{x\in\Omega} p(x)$ e $u_0 \in L^r(\Omega), r \geq 1$. Consideramos aqui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. O objetivo principal é apresentar condições que garantem a existência de soluções para o problema (1.4).

Quando $f(u) = u$, temos o seguinte problema parabólico com não linearidade variável

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^{p(x)} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

O problema (1.6) aparece em vários modelos das ciências aplicadas, como fluidos eletrorreológicos (veja (ACERBI; MINGIONE, 2002a; ACERBI; MINGIONE, 2002b; HALSEY, 1992; RŮŽIČKA, 1999; RŮŽIČKA, 2000; RŮŽIČKA, 2004; STRANGROOM, 1983)), fluidos termo-reológicos (veja (ANTONTSEV; RODRIGUES, 2006)), processamento de imagens (veja (ABOULAICH; MESKINE; SOUISSI, 2008; BLOMGREN; CHAN; MULET, 1997; BOLLT et al., 2009)), magnetostática (veja (CEKIC et al., 2012)), reações químicas, transferência de calor e dinâmica populacional (veja (CRUZ-URIBE; FIORENZA, 2013; DIENNING; RŮŽIČKA, 2007; DIENING et al., 2011)).

O problema (1.6) com $u_0 \in C_0(\Omega)$ e $p(x) \equiv p$ tem sido extensivamente estudado, veja por exemplo os trabalhos de (FUJITA, 1966), (WEISSLER, 1981), (HAYAKAWA, 1973) e (KOBAYASHI;

SIRAO; TANAKA, 1977), (MEIER, 1990). Para dados iniciais no espaço $L^r(\Omega)$ o problema (1.6) foi estudado (veja por exemplo (BREZIS; CAZENAVE, 1996),(HARAUX; WEISSLER, 1982), (MATOS; TERRANEO, 2003), (NI, 1986), (TERRANEO, 2002), (WEISSLER, 1979), e (WEISSLER, 1980)).

O interesse nos problemas com expoente variável têm atraído considerável atenção nos últimos anos. Dentre os estudos relevantes, destacam-se trabalhos como (KHELGHATI; BAGHAEI, 2015), (BAI; ZHENG, 2011), (WANG; HE, 2013), (WUA; GUOA; GAO, 2013), e o livro (DIENING et al., 2011), juntamente com as referências mencionadas neste último. Pinasco em (PINASCO, 2009) estudo a explosão em tempo finito das soluções positivas do problema (1.6) com dados iniciais contínuos. Ferreira et al. em (FERREIRA et al., 2012), estudaram o expoente crítico de Fujita p_F do problema (1.6) com dados iniciais contínuos e limitadas, considerando p uma função contínua e limitada definida em $\mathbb{R}^N$. Eles mostraram o seguinte resultado que estende os resultados obtidos por Fujita em (FUJITA, 1966).

- Se $p^- > 1 + 2/N$, então existem soluções globais não triviais do problema (1.6).
- Se $1 < p^- < p^+ \leq 1 + 2/N$, então todas as soluções do problema (1.6) explodem em tempo finito.
- Se $p^- < 1+2/N < p^+$, então existem funções p tal que o problema (1.6) tem soluções globais não triviais, e funções p tal que todas as soluções não triviais explodem em tempo finito.

Este resultado foi pioneiro no contexto de coeficiente de Fujita para expoente variável, foram estendidos para qualquer domínio Ω (limitado ou ilimitado); veja (CASTILLO; LOAYZA, 2017, Teorema 1.2 e Observação 1.3), para o problema (1.4), com dados iniciais contínuos em (CASTILLO; LOAYZA, 2023) e para $f(t) = e^t$ em (LI; LIU, 2013).

O problema (1.4) com $p \equiv 1$ foi estudado em (LAISTER et al., 2016). Assim o objetivo principal do Capítulo 4 é estender estes resultados. Até onde sabemos, não existem trabalhos que tratem da existência de soluções para o problema (1.4) com dados iniciais em espaços de Lebesgue. Como consequência dos resultados obtidos, podemos analisar completamente a equação $u_t - \Delta u = u^{p(x)}$ em $\Omega \times (0, T)$.

Em nosso primeiro resultado, analisamos a existência de soluções não negativas.

Teorema 1.0.2 *Sejam $f \in C([0, +\infty))$ não decrescente, $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ verificando (1.5), p^* dado por (1.3), $F_1(\sigma) = \sup_{1 \leq t \leq \sigma} f(t)^{p^+}/t$ e $F_2(\sigma) = \sup_{1 \leq t \leq \sigma} f(t)^{p^-}/t$.*

(i) Se

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} < \infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty, \text{ para } r > 1,$$

ou

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_1(\sigma) d\sigma < \infty \text{ e } \int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma < \infty, \text{ para } r = 1,$$

então o problema (1.4) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$*, com* $u_0 \geq 0$.

(ii) Se

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty, \text{ para } r > 1,$$

ou

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma = +\infty, \text{ para } r = 1,$$

então existe $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ *tal que o problema (1.4) não possui solução local.*

Observe que o Teorema 1.0.2 não é ótimo, já que o item (ii) analisa o caso em que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty$, mas não se aplica quando

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty.$$

Assim, no próximo resultado nos concentramos neste caso e mostramos que a existência e a não nexistência da solução ocorrem simultaneamente. Para fazer isso, consideramos dados iniciais nos conjuntos $\mathcal{I}^\rho(x_0)$ e $\mathcal{I}_\rho(x_0)$ definidos por

$$\mathcal{I}^\rho(x_0) = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x - x_0|^\rho \psi^r(x) \leq K\ \chi_{B_a(x_0)}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } K, a > 0\},$$

$$\mathcal{I}_\rho(x_0) = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x - x_0|^\rho \psi^r(x) \geq K \chi_{B_a(x_0)}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } K, a > 0\},$$

onde $B_a(x_0) \subset \Omega$ é a bola aberta com raio $a > 0$ centrada em x_0, para $0 < \rho < N$ e $r \geq 1$. A condição $0 < \rho < N$ garante que $|\cdot - x_0|^{-\rho/r} \chi_{B_a(x_0)} \in L^r(\Omega)$. Aqui $\chi_{B_a}(x_0)$ denota a função característica da bola $B_a(x_0)$. Quando $x_0 = 0 \in \Omega$, denotamos $\mathcal{I}^\rho(0) = \mathcal{I}^{\rho,r}$ e $\mathcal{I}_\rho(0) = \mathcal{I}_{\rho,r}$ e $B_a(0) = B_a$.

Os conjuntos $\mathcal{I}^\rho$ e $\mathcal{I}_\rho$ foram usados em (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022)(ou no Problema 1) para mostrar a existência do segundo valor crítico $\rho^* = 2r/(p-1)$, quando $f(t) = t$ e $p(x) \equiv p > 1$.

Considerando $u_0 \in \mathcal{I}^\rho(x_0)$ e $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.0.3 *Sejam* $f \in C([0, +\infty))$ *convexa, não decrescente,* $f(0) = 0$, $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ *verificando (1.5) e* p^* *dado por (1.3).*

(i) Suponha que exista $p_0 \geq p^*$ tal que

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} < \infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} < \infty.$$

Então, para cada $x_0 \in \Omega$ e $u_0 \in \mathcal{I}^\rho(x_0)$, com $0 < \rho < 2r/(p_0 - 1) \leq N$, o problema (1.4) possui uma solução local não negativa em algum intervalo $(0, T)$. Além disso, $u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$ e $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\rho/2r}$ para todo $t \in (0,T)$ e alguma constante $C > 0$.

(ii) Suponha que exista $p_0 > p^*$ tal que

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} > 0 \text{ ou } \liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} > 0.$$

Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que, para cada $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$, com $2r/(p_0 - 1) < \rho < N$, o problema (1.4) não possui solução local não negativa.

Os Teoremas 1.0.2 e 1.0.3 fazem parte de um segundo artigo (veja (CARHUAS-TORRE et al., 2024)), o qual encontra-se submetido. Vale a pena mencionar que unicidade de soluções para o problema (1.4) na classe $L^\infty((0,T), L^r(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$ é também estudada.

Para entrar no terceiro problema desta tese, consideramos o seguinte problema parabólico não linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |\cdot|^{-\gamma} |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $p \geq 1$, $\gamma > 0$.

A primeira equação do problema (1.7) é conhecida na literatura como equação parabólica de Hardy e tem sido considerada por muitos autores; veja por exemplo (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017), (TAYACHI, 2020), (CHIKAMI, 2019), (CHIKAMI; IKEDA; TANIGUCHI, 2022), (CHIKAMI et al., 2023), (PHAN, 2013), (WANG, 1993) e as referências contidas neles. Sua versão elíptica, ou seja, $-\Delta u = |\cdot|^{-\gamma} |u|^{p-1}u$, foi proposta por Hénon em (HÉNON, 1973) como um modelo para estudar sistemas estelares de estado esférico estacionários em relação a distúrbios esféricos, veja (NI, 1986, p. 230).

O problema (1.7) com dados iniciais não negativos no espaço das funções limitadas contínuas $C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ foi estudado primeiramente em (WANG, 1993, Teorema 2.3). A boa colocação do problema (1.7) foi estudada por Slimene et. al. em (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017), onde as questões de existência local e global foram abordadas para dados iniciais em $C(\mathbb{R}^N)$ e em $L^r(\mathbb{R}^N)$. Entre outras coisas, eles provaram, para $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, que existe um expoente crítico $r_c = N(p-1)/(2-\gamma)$ tal que: Se $r \geq r_c$ e $r > 1$, então o problema (1.7) tem uma solução local na classe $C([0,T), L^r(\mathbb{R}^N))$, mas a unicidade só vale em um subconjunto próprio de $C([0,T), L^r(\mathbb{R}^N))$, veja (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017, Teorema 1.1(ii)-(iii)) para detalhes. Na mesma linha, considerando dados iniciais no espaço de Besov foi estudada em (CHIKAMI, 2019). Além disso, a unicidade incondicional foi tratada por Tayachi em (TAYACHI, 2020) usando os espaços de Lorentz.

No terceiro problema, tratado no Capítulo 5, estendemos os resultados obtidos em (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017) considerando o seguinte problema parabólico não linear singular

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |\cdot|^{-\gamma} f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.8}$$

com $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, $\gamma > 0$, $u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $1 \leq r < \infty$.

O problema (1.8) foi estudado em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022) com dados iniciais $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Para $0 < \gamma < \min\{2, N\}$ eles mostraram a existência de um valor crítico

$$p^*_\gamma = 1 + \frac{(2-\gamma)r}{N} \tag{1.9}$$

obtendo o seguinte resultado:

Teorema 1.0.4 *(CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Teorema 1.2 e 1.4) Seja $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função contínua, não decrescente e $0 < \gamma < \min\{2, N\}$.*

(i) Caso $r > 1$.

a) Se $\gamma < N/r$,

$$\limsup_{t \to 0} t^{-(1+\epsilon-\gamma r/N)} f(t) < \infty \text{ e } \limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*_\gamma} f(t) < \infty,$$

para algum $\epsilon \in (0, \gamma r/N)$, ou

$$\gamma > N/r \text{ e } \limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*_\gamma} f(t) < \infty,$$

então o problema (1.8) tem uma solução não negativa para cada $u_0 \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$, com $u_0 \geq 0$.

b) Se $\gamma < N/r$ *e* $\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\gamma r/N)} f(t) = +\infty$ *ou* $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) = +\infty$*, então existe* $u_0 \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$ *com* $u_0 \geq 0$ *tal que o problema (1.8) não tem solução não negativa.*

(ii) Caso $r = 1$.

a) Se $\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) = +\infty$ *ou*

$$\int_1^{+\infty} G_0(\sigma)\,\sigma^{-[1+(2-\gamma)/N]} d\sigma = +\infty,$$

então existe $u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right), u_0 \geq 0$ *tal que o problema (1.8) não tem solução não negativa.*

b) Se

$$\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N+\epsilon)} f(t) < \infty \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} G_\epsilon(\sigma)\,\sigma^{-[1+(2-\gamma)/N]} d\sigma < \infty,$$

então para cada $u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right), u_0 \geq 0$*, o problema (1.8) tem uma solução local não negativa.*

Neste caso, os autores consideraram a função $G_\epsilon : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *dada por* $G_\epsilon(t) = \sup_{0<\sigma\leq t} f(\sigma)/t^{1-\gamma/N+\epsilon}$*, para* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Observe que o Teorema 1.0.4 é um resultado "quase ótimo" (seria ótimo se $\epsilon = 0$).

O objetivo principal do Capítulo 5 é analisar a existência de soluções para o problema (1.8), consideramos os dados iniciais no espaço $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$. Como consequência da abordagem obtemos condições necessárias e suficientes para a existência de soluções não negativas para o problema (1.8), melhorando os resultados dados em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022) veja o Teorema 1.0.6. O resultado é obtido em $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ que é fecho do espaço das funções limitadas uniformemente contínuas $BUC(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$.

A existência local para o problema (1.8) com condições iniciais em $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ é o seguinte.

Teorema 1.0.5 *Suponha que* $f \in C([0, +\infty))$ *é não decrescente,* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, p_γ^* *definido por (1.9) e que uma das seguintes condições é válida:*

(i) $u_0 \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$ *com* $u_0 \geq 0$ *e*

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+(2-\gamma)/N)} \tilde{F}(\sigma) d\sigma < \infty, \text{ onde } \tilde{F}(t) := \sup_{1\leq\sigma\leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma}.$$

(ii) $r > 1$ *e*

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) < \infty \ \text{ se } \ u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N) \ \text{ com } \ u_0 \geq 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) = 0 \ \text{ se } \ u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N) \ \text{ com } \ u_0 \geq 0.$$

Então, o problema (1.8) possui uma solução não negativa

$$u \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$$

definida em algum intervalo $(0,T)$*. Além disso,* $t^{N/2r}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C$ *para algum* $C > 0$ *e todo* $t \in (0,T)$*.*

Como consequência do Teorema 1.0.5, temos o seguinte resultado que melhora os resultados dados no Teorema. 1.0.4.

Teorema 1.0.6 *Seja* $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *uma função contínua e não decrescente, e seja* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$*. O problema (1.8) tem uma solução local não negativa para cada* $u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ *se, e somente se,*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^{+\infty} \sigma^{-[1+(2-\gamma)/N]} F(\sigma) d\sigma < \infty & \text{se } r = 1, \\ \displaystyle\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) < \infty & \text{se } r > 1, \end{cases}$$

onde $F(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} f(\sigma)/\sigma$*,* $t > 0$*.*

Também estabelecemos resultados de unicidade incondicional e condicional para o problema (1.8), veja os Teoremas 5.3.5 e 5.3.7 para mais detalhes. Estes resultados farão parte de um terceiro artigo (veja (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2024)), o qual será submetido em breve.

Quanto a organização desta tese, ela está dividida da seguinte maneira. No segundo capítulo introduzimos algumas notações e resultados preliminares. O terceiro capítulo trata a existência de um segundo valor crítico que determina a existência (ou não) de uma solução local para o problema parabólico não linear (1.2) com dados iniciais em espaços de Lebesgue. O quarto capítulo é dedicado à existência, não existência e unicidade de soluções para o problema parabólico semilinear com expoente variável (1.4) com dados iniciais em espaços de Lebesgue. Finalmente, no quinto capítulo, apresentamos resultados de existência local de soluções para dados iniciais no espaço de Lebesgue uniformemente locais para o problema parabólico com potencial singular (1.8).

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo tem como principal objetivo fazer uma breve revisão dos principais conceitos e resultados que serão usados nos demais capítulos. Omitiremos as demonstrações, fornecendo a referência onde elas podem ser encontradas.

A maioria dos resultados encontram-se nas referencias (BREZIS, 2010), (EVANS, 2010), (FOLLAND, 2013) e (PAZY, 1983).

2.1 ESPAÇOS DE LEBESGUE

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio, $N \geq 1$.

Definição 2.1.1 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é Lipschitz (ou Lipschitziana) se existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|, \quad \textit{para todo} \quad x, y \in \Omega.$$

Definição 2.1.2 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz se para cada $x \in \Omega$, existir uma vizinhança do ponto x, V_x, tal que $f|_{V_x}$ é Lipschitz.*

Denotaremos por $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, o espaço das funções reais u definidas em Ω mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável (à Lebesgue) em Ω, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Além disso, $L^p(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = \infty$, precisamos do seguinte conceito

Definição 2.1.3 *Dizemos que uma função u mensurável em Ω é essencialmente limitada em Ω se existe uma constante $C \in \mathbb{R}^+$ tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p. em Ω, ou seja, $|u(x)| \leq C$ exceto, possivelmente, para x pertencente a algum subconjunto de Ω com medida nula.*

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções u mensuráveis em Ω que são essencialmente limitadas em Ω.

Chama-se de supremo essencial de u ao ínfimo do conjunto

$$\left\{C \in \mathbb{R}^{+}; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\right\},$$

e o denotamos por

$$\sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)|.$$

Temos que $L^{\infty}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)|$$

é um espaço de Banach.

Em toda a tese $C > 0$ será uma constante genérica. Para simplificar a notação, o espaço $L^p(\Omega)$, será denotado por L^p e a norma em $L^p(\Omega)$, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ será denotada por $\|\cdot\|_{L^p}$.

Os seguintes resultados apresentam algumas propriedades da convergência nos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 2.1.4 *Uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^p(\Omega)$ converge em $L^p(\Omega)$ para $u \in L^p(\Omega)$, se para todo $\epsilon > 0$ dado existe um número natural $N_\epsilon > 0$ tal que, se $n \geq N_\epsilon$, então*

$$\|u_n - u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \epsilon.$$

Teorema 2.1.5 *(Teorema da Convergência Monótona). Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não negativa em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, tal que $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$ q.t.p. x de Ω e $\sup_n \int_\Omega u_n^p < \infty$. Então, existe $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n(x)$ converge para $u(x)$ q.t.p. em Ω, além disso*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

Teorema 2.1.6 *(Teorema da Convergência Dominada). Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, tal que $u_n(x) \to u(x)$, quando $n \to +\infty$, q.t.p. x de Ω. Se existe uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$, q.t.p. x de Ω e para todo $n \in \mathbb{N}$, então $u \in L^p(\Omega)$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $L^p(\Omega)$ para u.*

Definição 2.1.7 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que a restrição de u a K, $u|_K \in L^p(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Sejam I um intervalo da reta e X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.1.8 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por $L^p(I,X)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que a função $t \to \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I,X)$, definimos no caso $1 \leq p < \infty$*

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left\{ \int_I \|f(t)\|_X^p \, dt \right\}^{1/p},$$

e no caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \sup_{t \in I} \operatorname{ess} \|f(t)\|_X .$$

2.2 ESPAÇOS DE LEBESGUE UNIFORMEMENTE LOCAIS

Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Lebesgue uniformemente local $L^p_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$ é definido por

$$L^p_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N); \|u\|_{L^p_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)} < \infty \right\},$$

onde

$$\|u\|_{L^p_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)} := \begin{cases} \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^N} \left(\displaystyle\int_{B_\rho(y)} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^N} \operatorname{ess} \|u\|_{L^\infty(B_\rho(y))} & \text{se} \qquad p = \infty, \end{cases}$$

e $B_\rho(y) \subset \mathbb{R}^N$ denota a bola aberta centrada em y com raio $\rho > 0$. É claro que $L^\infty_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N) = L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Denotamos por $\mathcal{L}^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$ o fecho do espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas $BUC(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\mathcal{L}^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N) := \overline{BUC(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)}}.$$

Para reduzir a notação, escrevemos $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ se $\rho = 1$.

Os espaços de Lebesgue uniformemente locais foram introduzidos pela primeira vez por Kato (KATO, 1975) e têm sido usados para estudar diferentes problemas e propriedades relacionadas a semigrupos de Shrödinger (SIMON, 1982), equações hiperbólicas amortecidas (FEIREISL, 1996), equações complexas de Ginzburg-Landau (MIELKE, 1997), (MIELKE; SCHNEIDER, 1995), problemas parabólicos (ARRIETA et al., 2004), (EFENDIEV; ZELIK, 2001), (MAEKAWA; TERASAWA, 2006), (MATOS; SOUPLET, 2004), (MIYAMOTO; SUZUKI, 2021), (SUZUKI, 2019).

De (MAEKAWA; TERASAWA, 2006) as seguintes propriedades são válidas:

- Para quaisquer $\rho_1, \rho_2 > 0$, temos que $L^r_{ul,\rho_1}(\mathbb{R}^N) = L^r_{ul,\rho_2}(\mathbb{R}^N)$ com normas equivalentes.

- Para $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $\rho > 0$, temos que $L^{p_2}_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p_1}_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$.
- Para qualquer $\rho > 0$ e $1 \leq r \leq \infty$, temos que $L^r(\mathbb{R}^N) \subset L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$ e $L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$.

2.3 SEMIGRUPOS

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados da teoria dos semigrupos que serão utilizados no texto. Esta seção é baseada nos livros de (PAZY, 1983; BREZIS, 2010; CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2016). Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $D(A) \subset X$ um subconjunto não vazio, e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear.

Definição 2.3.1 *Um operador $A : D(A) \subset X \to X$, diz-se dissipativo se*

$$\|u - \lambda A u\| \geq \|u\|$$

para todo $u \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Definição 2.3.2 *Um operador $A : D(A) \subset X \to X$, diz-se m-dissipativo se*

- *A é dissipativo;*
- *para todo $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda A u = f$.*

Definição 2.3.3 *Um semigrupo de operadores lineares em um espaço de Banach X é uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

(i) $S(0) = I_X$;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Diz-se que o semigrupo é de classe C_0 ou que o semigrupo é fortemente contínuo se:

(iii) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$, *para todo* $x \in X$.

Definição 2.3.4 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. O operador $A : D(A) \to X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \quad \lim_{h\to 0} \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x \text{ existe} \right\},$$

e

$$Ax = \lim_{h \to 0} \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x; \text{ para todo } x \in D(A),$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$.

Agora vamos citar alguns resultados sobre a teoria de semigrupos.

Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo e A o seu gerador infinitesimal. Temos que:

- Existem $M \geq 1$ e β tais que
$$\|S(t)\| \leq M e^{\beta t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$
- $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.
- Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, para todo $t \geq 0$, e verifica as seguintes igualdades:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \text{ para todo } t \geq 0.$$
- Se $x \in D(A)$, então
$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax d\xi, \quad 0 \leq s \leq t.$$
- Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\xi)x d\xi \in D(A)$ e
$$A \int_0^t S(\xi)x d\xi = S(t)x - x.$$
- O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e $D(A)$ é denso em X.

Definição 2.3.5 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo. Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é uniformemente limitado se existe $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$. Além disso se $M = 1$ dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações de classe C_0.*

Teorema 2.3.6 *(Hille-Yosida). Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear. A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0, se e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.

(ii) O conjunto resolvente de A contém $(0, \infty)$ e para cada $\lambda > 0$

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Veja a demonstração em (PAZY, 1983, Teorema 3.1, p.8).

2.3.1 O problema abstrato de Cauchy

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dado $u_0 \in X$, o problema abstrato de Cauchy para A com dados iniciais u_0 consiste em encontrar uma solução u para o problema homogêneo de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= Au(t),\ t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Usaremos a seguinte noção de solução para o problema (2.1):

Definição 2.3.7 *(Solução clássica ou forte) Uma função $u : [0, +\infty) \to X$ é uma solução clássica de (2.1) se u é contínuo para todo $t \geq 0$, continuamente diferenciável e $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e (2.1) é satisfeito.*

Observação 2.3.8

- *Note que uma vez que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e u é contínua em $t = 0$, (2.1) não pode ter solução clássica para $u_0 \notin \overline{D(A)}$.*
- *Se $u_0 \in D(A)$ e A é o gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0, $S : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, então $u(\cdot) = S(\cdot)u_0 : [0, +\infty) \to D(A)$ é uma solução clássica de (2.1). Mais ainda $S(\cdot)u_0$ é a única solução de (2.1).*

A partir de agora, assumiremos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 e $u(\cdot) = S(\cdot)u_0$, com $u_0 \in D(A)$ é uma solução clássica de (2.1). A seguir, sejam $T > 0$ uma constante fixa e $f : [0, T) \to X$. Considere o problema não homogêneo de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= Au(t) + f(t),\ t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição 2.3.9 *Uma função $u : [0, T) \to X$ é uma solução clássica de (2.2) se u é contínuo em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e (2.2) é satisfeito.*

Supondo $f \in L^1([0,T);X)$. Seja u uma solução clássica de (2.2) e ponhamos, $v(\sigma) = S(t-\sigma)u(\sigma)$ é diferenciável para $0 < \sigma < t$, então

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\sigma} &= -AS(t-\sigma)u(\sigma) + S(t-\sigma)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\sigma} \\ &= -AS(t-\sigma)u(\sigma) + S(t-\sigma)Au(\sigma) + S(t-\sigma)f(s) \\ &= S(t-\sigma)f(\sigma).\end{aligned}$$

Portanto, como v é integrável em $[0,t]$, integrando de 0 a t resulta

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma. \tag{2.3}$$

Como consequência, a equação (2.3) é uma condição necessária para que u seja uma solução clássica de (2.2).

Para cada $f \in L^1([0,T];X)$ o lado direito de (2.3) é uma função continua em $[0,T]$. É natural considerá-la como uma solução generalizada de (2.2), mesmo que não seja diferenciável e não satisfaça estritamente a equação no sentido da Definição 2.3.9. Portanto, é natural considerar o seguinte conceito.

Definição 2.3.10 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0. Seja $u_0 \in X$ e $f \in L^1([0,T];X)$. A função $u \in C([0,T];X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma,\ 0 \le t \le T,$$

é dita solução branda do problema não homogêneo de Cauchy (2.2) em $[0,T]$. Algumas vezes podemos nos referir a ela como "mild solution".

Observação 2.3.11 *A Definição 2.3.10 do problema (2.2) coincide quando $f = 0$ com a Definição 2.3.7 de $S(t)u_0$ como a solução branda da equação homogênea correspondente. É portanto claro que nem toda solução branda de (2.2) é de fato uma solução clássica mesmo no caso $f \equiv 0$.*

2.3.2 O problema não linear

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach reflexivo. Considere o problema não linear

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = Au(t) + F(u(t)),\ t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $F : X \to X$ é uma função contínua e $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $S(t) : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$.

O problema (2.2) não tem necessariamente qualquer tipo de solução. Contudo, se tiver uma solução clássica ou forte (veja a Definição 2.3.9), então o argumento dado na subsecção anterior mostra que esta solução u satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)F(u(\sigma))d\sigma. \tag{2.5}$$

Portanto, é natural definir.

Definição 2.3.12 *Uma solução contínua u da equação integral (2.5) será chamada de solução branda do problema (2.4).*

2.4 EQUAÇÃO DO CALOR

Nesta seção apresentamos algumas propriedades do operador Laplaciano em alguns espaços e algumas propriedades sobre a equação do calor homogênea. Para mais detalhes veja (CAZENAVE; HARAUX, 1998) e (PAZY, 1983).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto não vazio e limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular. Quando $A = -\Delta$, chamamos de operador Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, a equação do calor homogênea é a seguinte equação

$$u_t - \Delta u = 0, \ (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

O problema (2.6) é conhecido como a equação do calor homogênea com condição de Dirichlet na fronteira. Os seguintes resultados são conhecidos para o problema (2.6):

(a) Quando a condição inicial $u_0 \in X = H^{-1}(\Omega)$, então o problema (2.6) possui uma solução $u(t) \in D(A) = H_0^1(\Omega)$.

(b) Quando a condição inicial $u_0 \in X = L^2(\Omega)$, então o problema (2.6) possui uma solução $u(t) \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$.

(c) Quando a condição inicial $u_0 \in X = L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$, então o problema (2.6) possui uma solução $u(t) \in D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

(d) Quando a condição inicial $u_0 \in X = L^1(\Omega)$, então o problema (2.6) possui uma solução $u(t) \in D(A) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\right\}$.

(e) Quando a condição inicial $u_0 \in X = L^\infty(\Omega)$, então o problema (2.6) possui uma solução $u(t) \in D(A) = \{u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^\infty(\Omega)\}$.

(f) Quando a condição inicial $u_0 \in X = C_0(\Omega)$, então o problema (2.6) possui uma solução $u(t) \in D(A) = \{u \in C_0(\Omega); \Delta u \in C_0(\Omega)\}$.

Nos casos (c) e (d) precisamos que o subconjunto Ω tenha fronteira suave e no caso (e) precisamos que o subconjunto Ω seja limitado.

Proposição 2.4.1 *Seja $u(t) = S(t)u_0$, com $t \geq 0$.*

(i) Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, então u é solução do problema (2.6) e $u \in C([0,+\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0,+\infty), L^2(\Omega)), \Delta u \in C((0,+\infty), L^2(\Omega))$. Além disso, temos

$$u \in C((0,+\infty), H_0^1(\Omega)),$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \tfrac{1}{2\sqrt{t}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \text{ para } t > 0,$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \tfrac{1}{2\sqrt{t}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \text{ para } t > 0.$$

(ii) Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in C([0,+\infty), H_0^1(\Omega))$ e $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}$ para $t > 0$.

(iii) Se $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, então $u \in C^1([0,+\infty), L^2(\Omega)), \Delta u \in C([0,+\infty), L^2(\Omega))$ e $u_t(x,0) - \Delta u(x,0) = 0$.

(iv) Se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então $u \in C([0,+\infty), H^2(\Omega))$.

Demonstração. Veja (CAZENAVE; HARAUX, 1998, Proposição 3.5.2 e 3.5.3).

A solução do problema linear (2.6) pode ser expressado da seguinte forma

$$[S_\Omega(t)u_0](x) = \int_\Omega K_\Omega(x,y;t)u_0(y)dy \tag{2.7}$$

onde $u_0 \in L^1(\Omega)$ e K_Ω é o nucleo de calor de Dirichlet. De (VAN, 1990, Teorema 2 e Lemas 8 e 9), sabemos também que

$$K_\Omega(x,y;t) \geq \exp\left\{-N^2\pi^2 t/4\delta^2\right\}(4\pi t)^{-N/2} \exp\left\{-|x-y|^2/4t\right\},$$

para $t > 0$, se o segmento de linha que liga x e y estiver a uma distância de pelo menos δ de fronteira $\partial\Omega$. Em particular, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, sabe-se que para $u_0 \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$,

$$[S(t)u_0](x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y;t)u_0(y)dy, \quad \text{onde} \quad K(x,y;t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp\left\{- |x-y|^2 /4t\right\},$$

e

$$K_\Omega(x,y;t) \leq K(x,y;t) \tag{2.8}$$

para $x, y \in \Omega$ e $t > 0$.

2.4.1 A equação do calor não linear

Consideramos agora o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= F(u) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(0) &= u_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com fronteira $\partial\Omega$ regular e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz. Temos os seguintes resultados.

Teorema 2.4.2 *(CAZENAVE; HARAUX, 1998; BREZIS; CAZENAVE, 1996) Dado $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única solução u do problema (2.9) definida em um intervalo maximal $[0, T_m)$ tal que $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ para todo $T < T_m$ e é solução da equação integral*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)F(u(\sigma))d\sigma,$$

para todo $t \in [0, T_m)$. Além disso, vale uma das seguintes alternativas:

1. *$T_m = \infty$, e neste caso dizemos que a solução é global;*

2. *$T_m < \infty$ e $\limsup_{t \to T_m} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$, e neste caso dizemos que a solução explode num tempo finito.*

O seguinte teorema é um resultado de regularidade da solução do problema (2.9). Este resultado é conhecido como regularidade maximal.

Teorema 2.4.3 *(LAMBERTON, 1987, Corolário 1.1) Sejam $T > 0$, $p, q \in (1, +\infty)$, $F \in L^p((0,T), L^q(\Omega))$ e a função u definida por*

$$u(t) = \int_0^t S(t-\sigma)F(u(\sigma))d\sigma.$$

Então $u \in W^{1,p}((0,T), L^q(\Omega))$, $\Delta u \in L^p((0,T), L^q(\Omega))$ e existe uma constante C tal que

$$\|u_t\|_{L^p(((0,T),L^q(\Omega))} + \|\Delta u\|_{L^p(((0,T),L^q(\Omega))} \leq C \|F\|_{L^p(((0,T),L^q(\Omega))} .$$

2.4.2 Lemas importantes para os espaços de Lebesgue

Relembramos que denotamos por $B_\rho(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ a bola centrada em x_0 com raio $\rho > 0$, por $\chi_{B_\rho(x_0)}$ a função característica em $B_\rho(x_0)$. Quando $x_0 = 0$ denotamos $B_\rho = B_\rho(0)$, $\chi_\rho = \chi_{B_\rho(0)}$, e por ω_N o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$.

Os seguintes lemas são usados nos seguintes capítulos.

Lema 2.4.4 *Sejam $l, \delta > 0$ tal que $B_{l+2\delta}(x_0) \subset \Omega$ e $0 < \gamma < N$. Então existem constantes $c_N, c'_N > 0$, dependendo apenas de N, x_0 e γ, tal que*

(i) $S(t)\chi_{B_l(x_0)} \geq c_N l^N (l + \sqrt{t})^{-N} \chi_{B_{l+\sqrt{t}}(x_0)}$, *para todo* $0 < t \leq \delta^2$.

(ii) $S(t)|\cdot - x_0|^{-\gamma}\chi_{B_l(x_0)} \geq c'_N\, t^{-\frac{\gamma}{2}}\, \chi_{B_{\sqrt{t}}(x_0)}$, *para todo* $0 < t \leq \min\{\delta^2, l^2\}$.

O item (i) foi estabelecido em (LAISTER et al., 2016), e o item (ii) em (APARCANA et al., 2020) para $x_0 = 0$, mas os métodos utilizados por eles podem ser adaptados ao caso $x_0 \neq 0$.

Lema 2.4.5 *(LAISTER et al., 2016, Lema 4.2). Suponha que $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é não decrescente e $q > 1$. Então as duas condições a seguir são equivalentes*

1. *Existe uma sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $s_{k+1} \geq \theta s_k$, $\theta > 1$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k^{-q} f(s_k) = +\infty$.*
2. *$\int_1^{+\infty} \sigma^{-q} F(\sigma) d\sigma = +\infty$, onde $F(s) = \sup_{1\leq t\leq s} f(t)/t$.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave (possivelmente ilimitado). Recordamos o conhecido efeito regularizante do semigrupo de calor em espaços de Lebesgue, ou seja,

$$\|S(t)\psi\|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)} \|\psi\|_{L^{q_1}(\Omega)}, \tag{2.10}$$

para $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, $t > 0$ e $\psi \in L^{q_1}(\Omega)$ (veja (BREZIS; CAZENAVE, 1996) Lema 7]. Também usamos a seguinte estimativa que pode ser obtida da estimativa (2.8), (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017, Proposição 2.1) e (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Lema 2.5)

Lema 2.4.6 *Seja $\gamma \in (0, N)$, e sejam $q_1, q_2 \in (1, +\infty]$ satisfazendo*

$$0 \leq \frac{1}{q_2} < \frac{\gamma}{N} + \frac{1}{q_1} < 1.$$

Então, existe uma constante $C > 0$, dependendo de N, γ, q_1 e q_2 tal que

$$\left\| S(t) \left(|\cdot|^{-\gamma} \psi \right) \right\|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq C t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right) - \frac{\gamma}{2}} \|\psi\|_{L^{q_1}(\Omega)},$$

para todo $t > 0$ e todo $\psi \in L^{q_1}(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave de $\mathbb{R}^N$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$.

2.4.3 Lemas importantes para os espaços de Lebesgue uniformemente locais

O seguinte lema fornece algumas propriedades básicas do espaço $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.4.7 *Seja $1 \leq r < \infty$.*

(i) $\phi \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ é equivalente a $\lim_{t \to 0} \|S(t)\phi - \phi\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} = 0$.

(ii) $u \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ é equivalente a $|u|^r \in \mathcal{L}^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$.

(iii) Seja $a > 0$. Se $u \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$, então $\max\{u, a\} \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, os itens (ii) e (iii) acima também valem para $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$.

O item (i) foi provado em (MAEKAWA; TERASAWA, 2006, Proposição 2.2). A afirmação (ii) segue de (FUJISHIMA; IOKU, 2018, Observação 2.1) e (iii) segue de (SUZUKI, 2019, Lema 2.5-(ii)).

Em nossas estimativas do semigrupo do calor usamos as fornecidas pelo lema abaixo.

Lema 2.4.8 *As seguintes afirmações são válidas:*

(i) Seja $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Então existe uma constante $C = C(N, q_1, q_2) > 0$ tal que para $\phi \in L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|S(t)\phi\|_{L^{q_2}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left[1 + t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)} \right] \|\phi\|_{L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{para todo} \quad t > 0.$$

Conseqüentemente,

$$\|S(t)\phi\|_{L^{q_2}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)} \|\phi\|_{L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{para} \quad 0 < t < t_0.$$

(ii) Seja $1 \leq q_1 < q_2 \leq \infty$. Então, para cada $\phi \in \mathcal{L}^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $C_* > 0$, existe $t_0 = t_0(C_*, \phi)$ tal que

$$\|S(t)\phi\|_{L^{q_2}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq C_* t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)} \quad \textit{para} \quad 0 < t < t_0.$$

Além disso, a constante $C_* > 0$ pode ser escolhida arbitrariamente pequena.

A prova do Lema 2.4.8 é baseada em (MAEKAWA; TERASAWA, 2006, Corolário 3.1), (ARRIETA et al., 2004, Proposição 2.1), (BREZIS; CAZENAVE, 1996, Lema 8) e (GIRAUDON; MIYAMOTO, 2022, Proposições 2.4 e 2.5).

O resultado a seguir estabelece uma relação entre o semigrupo de calor e as funções convexas (côncavas) e segue diretamente da desigualdade de Jensen.

Lema 2.4.9 *Sejam $a \geq 0$, $\phi \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \geq a$ em $\mathbb{R}^N$.*

(i) Suponha que $J : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função convexa. Se $J(\phi) \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$, então

$$J[S(t)\phi] \leq S(t)[J(\phi)] \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

(ii) Suponha que $G : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função côncava. Se $G(\phi) \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$, então

$$G[S(t)\phi] \geq S(t)[G(\phi)] \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

Precisamos também do seguinte resultado, veja (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Lema 4.1).

Lema 2.4.10 *Assuma que $\phi \in L^1_{ul}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $0 < \gamma < N$. Então existe uma constante $\bar{C} = C(N, \gamma) > 0$ tal que*

$$S(t)\,|\cdot|^{-\gamma}\, S(s)\,\phi \leq \bar{C}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right)^{\gamma/2} S(t+s)\,\phi$$

para todo $t, s > 0$.

2.4.4 Algumas desigualdades

Esta seção tem como objetivo enunciar algumas desigualdades que serão utilizadas ao decorrer deste trabalho. A prova destas podem ser encontradas em (BREZIS, 2010).

Teorema 2.4.11 *(Desigualdade de Jensen's). Seja X um conjunto dotado de uma medida positiva μ tal que $\int_X d\mu = 1$ e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então para cada $f \in L^1(X, d\mu)$ tal que $F(f) \in L^1(X, d\mu)$, temos*

$$F\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_X F(f(x))d\mu(x).$$

Corolário 2.4.12 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, $\varphi \in L^1(\Omega)$ uma função não negativa tal que $\int_\Omega \varphi(x)dx = 1$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

$$F\left(\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right) \leq \int_\Omega F(f(x))\varphi(x)dx,$$

para todo $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $f\varphi \in L^1(\Omega)$ e $F(f)\varphi \in L^1(\Omega)$.

Lema 2.4.13 *(Desigualdade de Gronwall). Sejam $T > 0; A \geq 0$ e $f \in L^1(0;T)$ uma função não negativa. Considere uma função não negativa $\varphi \in C([0,T])$ tal que*

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Então,

$$\varphi(t) \leq A\exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

para todo $t \in [0,T]$.

Usamos o seguinte Lema de Gronwall singular, veja (BREZIS; CAZENAVE, 1996, pág. 288)

Lema 2.4.14 *(Desigualdade de Gronwall singular). Sejam $T > 0$, $A > 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ e seja f uma função não negativa com $f \in L^p(0,T)$ para algum $p > 1$ tal que $p' \max\{\alpha, \beta\} < 1$. Considere uma função não negativa $\varphi \in L^\infty(0,T)$ tal que*

$$\varphi(t) \leq At^{-\alpha} + \int_0^t (t-s)^{-\beta} f(s)\varphi(s)ds, \text{ para quase todo } t \in [0,T].$$

Então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de T, α, β, p e $\|f\|_{L^p}$, tal que

$$\varphi(t) \leq ACt^{-\alpha},$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

3 EXISTÊNCIA DE UM SEGUNDO VALOR CRÍTICO PARA UM PROBLEMA PARABÓLICO NÃO LINEAR EM ESPAÇOS DE LEBESGUE

Neste capítulo, estudamos a existência local de soluções (sem restrições de sinal) para uma equação parabólica ponderada no tempo. Como consequência de nossos resultados, considerando o comportamento adequado dos dados iniciais não negativos, obtemos a existência de um segundo valor crítico para a existência (ou não) de uma solução local.

3.1 INTRODUÇÃO

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio (limitado ou ilimitado) com fronteira $\partial\Omega$ suave sempre que existir. A existência local de soluções não negativas do problema parabólico não linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

com $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$, $1 \leq r < \infty$ foi completamente caracterizado por Laister et al. em (LAISTER et al., 2016) no caso de Ω ser limitado ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Eles mostraram a existência de um valor crítico

$$p^* = 1 + \frac{2r}{N} \tag{3.2}$$

obtendo o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *(LAISTER et al., 2016) Seja $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função contínua e não decrescente.*

(i) Quando Ω é um domínio limitado.

a) O problema (3.1) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$ se, e somente se,

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty, \text{ se } r > 1, \tag{3.3}$$

b) O problema (3.1) possui solução local para cada $u_0 \in L^1(\Omega)$ se, e somente se,

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F(\sigma) d\sigma < \infty, \text{ onde } F(\sigma) = \sup_{1 \leq t \leq \sigma} f(t)/t, \text{ se } r = 1. \tag{3.4}$$

(ii) Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, as afirmações (a) e (b) permaneceram válidas se substituirmos as condições (3.3) e (3.4) por

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty \quad \textit{e} \quad \limsup_{t\to 0} f(t)/t < \infty, \ \textit{se}\ r > 1,$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} G(\sigma) d\sigma < \infty \quad \textit{e} \quad \limsup_{t\to 0} f(t)/t < \infty, \ \textit{se}\ r = 1,$$

respectivamente, onde $G(\sigma) = \sup_{0<t\leq\sigma} f(t)/t$.

Além disso, quando a condição (3.3) não é válida, ou seja, $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) = +\infty$, então existe um dado inicial não negativo adequado $u_0 \in L^r(\Omega)$ de modo que o problema (3.1) não admita uma solução local não negativa. Assim, naturalmente, surgem as duas questões seguintes:

- O que acontece com a existência local de soluções neste caso?
- É possível definir uma classe de dados iniciais onde a existência local de soluções seja válida?

Até onde se sabe, existem poucos resultados sobre isso e apenas no caso $f(t) = t^q$, $q > 1$ veja (HARAUX; WEISSLER, 1982), (MIYAMOTO, 2021).

Para responder às questões levantadas, consideramos dados iniciais nos conjuntos $\mathcal{I}^{\rho,r}$ e $\mathcal{I}_{\rho,r}$, onde

$$\mathcal{I}^{\rho,r} = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x|^\rho \psi^r(x) \leq K\ \chi_{B_a}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para alguns } K, a > 0\},$$

$$\mathcal{I}_{\rho,r} = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x|^\rho \psi^r(x) \geq K \chi_{B_a}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para alguns } K, a > 0\},$$

para $0 < \rho < N$ e $r \geq 1$. A condição $0 < \rho < N$ garante que $|\cdot|^{-\rho/r} \chi_{B_a} \in L^r(\Omega)$. Como consequência do nosso resultado, encontramos um novo expoente crítico quando $f(t) = t^q, q > 1$, veja Observação 3.3.2(i), que é dado por

$$\rho^* = \frac{2r}{q-1}. \tag{3.5}$$

Diremos que ρ^* é o segundo valor crítico.

Os conjuntos $\mathcal{I}^{\rho,r}$ e $\mathcal{I}_{\rho,r}$ são inspirados nos conjuntos considerados por Lee e Ni (LEE; NI, 1992) e Wang (WANG, 1993).

Os argumentos usados para tratar com o problema (3.1) também podem ser usados para resolver o problema parabólico ponderado no tempo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= h(t)g(u) & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $g \in C(\mathbb{R})$, $h \in C((0,+\infty))$ uma função de peso geral, $u_0 \in L^r(\Omega)$ sem a restrição de sinal com $1 \leq r < \infty$ e $T > 0$.

Neste capítulo, determinamos condições para a existência e não existência de soluções do problema (3.1) e (3.6) considerando um comportamento adequado dos dados iniciais, para obter um segundo valor crítico, que determina a existência (ou não) de uma solução local $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$. Antes disso, definimos o que entendemos por solução do problema (3.1) e (3.6).

Definição 3.1.2 *Sejam $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $1 \leq r < \infty$, $g \in C(\mathbb{R})$ e $h \in C((0,+\infty))$. Uma função mensurável u definida q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$, para algum $T > 0$, é chamada de solução local do problema (3.6) se*

$$u(t) = S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\,h(\sigma)\,g(u(\sigma))\,d\sigma = \mathfrak{F}(u,u_0) \tag{3.7}$$

q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$ e $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$. Aqui $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ denota o semigrupo do calor.

Quando $u_0 \geq 0$ e $g|_{[0,\infty)} \in C([0,+\infty))$ dizemos que u é uma solução não negativa se (3.7) for válido e $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 3.2 apresentamos alguns resultados preliminares e enunciamos os resultados obtidos. Após isso, demonstramos os teoremas na Seção 3.3.

3.2 RESULTADOS PRELIMINARES

3.2.1 Resultado de existência

Para os resultados da existência local, usamos o método de super e subsolução, os quais são entendidos no seguinte sentido.

Definição 3.2.1 *Sejam $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $1 \leq r < \infty$, $g \in C(\mathbb{R})$ e $h \in C((0,+\infty))$. Dizemos que uma função w, definida q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$, é uma supersolução de (3.6) se $w \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ e $\mathfrak{F}(w,u_0) \leq w$ q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$, onde $\mathfrak{F}$ é definido por (3.7).*

As subsoluções de (3.6) são definidas da mesma forma com a desigualdade reversa.

O seguinte resultado é uma versão de (LAISTER; SIERŻĘGA, 2020, Teorema 2).

Lema 3.2.2 *Assuma que $g \in C(\mathbb{R})$ é não decrescente, $h \in C((0,+\infty))$, e $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $1 \leq r < \infty$. Se $\overline{u}$ e $\underline{u}$ são uma supersolução e uma subsolução do problema (3.6) em $\Omega \times (0,T)$, respectivamente, tal que $\overline{u} \geq \underline{u}$ com $g(\underline{u}), g(\overline{u}) \in L^r(\Omega)$ e $h(\cdot)\left\|g(\underline{u}(\cdot))\right\|_{L^r}, h(\cdot)\left\|g(\overline{u}(\cdot))\right\|_{L^r} \in L^1((0,T))$, então existe uma solução u do problema (3.6) definido em $\Omega \times (0,T)$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.*

Demonstração. De (3.7), $\overline{u} \geq \mathfrak{F}(\overline{u},u_0)$, pois $\overline{u}$ é uma supersolução de (3.6). Além disso, $\mathfrak{F}$ é não decrescente em u, pois g é não decrescente, $h > 0$ e pela propriedade de monotonicidade do semigrupo de calor $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Considere a sequência $\{u^n\}_{n \geq 0}$, dada por $u^0 = \overline{u}$, e $\mathfrak{F}(u^{n-1},u_0) = u^n$ para cada $n \geq 1$. Como $\mathfrak{F}$ é não decrescente e $\underline{u}$ é uma subsolução com $\underline{u} \leq \overline{u}$ temos que a sequência $\{u^n\}_{n \geq 0}$ é não crescente q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$ e $\overline{u} \geq u^n \geq u^{n+1} \geq \underline{u}$. Seja $u(x,t) = \lim\limits_{n \to +\infty} u^n(x,t)$, sempre que o limite existir.

Pela continuidade da função g segue que $g(u(x,t)) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u^n(x,t))$ q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$. Por outro lado, como g é não decrescente, temos que $g(\underline{u}) \leq g(u^n) \leq g(\overline{u})$. Daí, $|g(u^n)| \leq \max\{|g(\underline{u})|, |g(\overline{u})|\}$, e vemos que $g(u^n) \in L^r(\Omega)$ porque $g(\underline{u}), g(\overline{u}) \in L^r(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da convergência dominada (veja Teorema 2.1.6) $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u^n(t)) = g(u(t))$ em $L^r(\Omega)$ q.t.p. $t \in (0,T)$.

Da expressão do semigrupo (2.7) e da estimativa (2.10) temos

$$\|S(t-\sigma)g(u(\sigma)) - S(t-\sigma)g(u^n(\sigma))\|_{L^r} \leq \|g(u(\sigma)) - g(u^n(\sigma))\|_{L^r},$$

para $0 < \sigma < t$. Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} S(t-\sigma)g(u^n(\sigma)) = S(t-\sigma)g(u(\sigma))$ em $L^r(\Omega)$ q.t.p. $\sigma \in (0,t)$. Além disso, usando novamente a estimativa (2.10) temos

$$\begin{aligned} \left\|S(t-\sigma)h(\sigma)g(u^n(\sigma))\right\|_{L^r} &\leq h(\sigma)\left\|g(u^n(\sigma))\right\|_{L^r} \\ &\leq h(\sigma)\left\|\max\{|g(\underline{u}(\sigma))|, |g(\overline{u}(\sigma))|\}\right\|_{L^r}, \end{aligned}$$

e $h(\cdot)\left\|g(\underline{u}(\cdot))\right\|_{L^r}, h(\cdot)\left\|g(\overline{u}(\cdot))\right\|_{L^r}$ pertencem a $L^1((0,T))$ por hipótese. Usando novamente o Teorema da convergência dominada, segue-se que

$$\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)g(u(\sigma))d\sigma = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)g(u^n(\sigma))d\sigma$$

em $L^r(\Omega)$.

Portanto $u = \lim_{n\to+\infty} u^n = \lim_{n\to+\infty} \mathfrak{F}\left(u^{n-1}, u_0\right) = \mathfrak{F}(u, u_0)$. Além disso, como $|u| \leq \max\{|\overline{u}|, |\underline{u}|\}$ e $\overline{u}, \underline{u} \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ concluímos que $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$. $\square$

3.2.2 Resultado de não existência

Lema 3.2.3 *Suponha que $f \in C([0,+\infty))$ é convexa com $f(0) = 0$ e $u : \Omega \times (0,T) \to [0,+\infty)$ uma função mensurável finita. Então $f(S(t)u) \leq f(S(t)u)$.*

Demonstração. Da desigualdade (2.8) temos que $0 < \eta = \int_\Omega K_\Omega(x,y;t)dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y;t)dy = 1$. Usando a expressão (2.7), a desigualdade de Jensen, a convexidade de f e $f(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
f(S(t)u) &= f\left(\int_\Omega K_\Omega(x,y;t)u(y)dy\right)\\
&= f\left(\eta\int_\Omega \frac{K_\Omega(x,y;t)}{\eta}u(y)dy + (1-\eta)0\right)\\
&\leq \eta f\left(\int_\Omega \frac{K_\Omega(x,y;t)}{\eta}u(y)dy\right)\\
&\leq \int_\Omega K_\Omega(x,y;t)f(u(y))dy = S(t)f(u)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. $\square$

A seguinte proposição é usada na prova de nossos resultados de inexistência. Sua prova segue das ideias de (WEISSLER, 1980) e (WEISSLER, 1986) (veja também o Lema 15.6 em (QUITTNER; SOUPLET, 2007)).

Proposição 3.2.4 *Assuma $h \in C((0,+\infty))$, $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, convexa, $f(0) = 0$ e $f(s) > 0$ para todo $s \geq z_0$, para algum $z_0 > 0$, tal que*

$$\int_{z_0}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)} < \infty. \tag{3.8}$$

Sejam $u_0 : \Omega \to [0,+\infty)$ e $u : \Omega \times (0,T) \to [0,+\infty)$ funções mensuráveis tais que

$$u(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)f(u(\sigma))d\sigma \qquad \textit{q.t.p. em } \Omega \times (0,T). \tag{3.9}$$

Assuma também que $u(x,t) < \infty$ q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$ e $u_0 \neq 0$. Então

$$\int_0^\tau h(\sigma)d\sigma \cdot \left(\int_{\|S(\tau)u_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)}\right)^{-1} \leq 1$$

para todo $\tau \in (0,T)$.

Demonstração. Como f é convexa, $f(0) = 0$, pelo Lema 3.2.3 obtemos

$$f(S(t)u) \leq S(t)f(u)$$

para todo $t > 0$. De (3.9) e das propriedades do semigrupo, temos, para $0 < t < s$,

$$\begin{aligned} S(s-t)u(t) &\geq S(s-t)S(t)u_0 + S(s-t)\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)f(u(\sigma))d\sigma \\ &= S(s)u_0 + \int_0^t S(s-\sigma)h(\sigma)f(u(\sigma))d\sigma \\ &= S(s)u_0 + \int_0^t h(\sigma)S(s-\sigma)f(u(\sigma))d\sigma \\ &\geq S(s)u_0 + \int_0^t h(\sigma)f(S(s-\sigma)u(\sigma))d\sigma. \end{aligned}$$

Logo,

$$S(s-t)u(t) \geq \Theta(\cdot, t), \tag{3.10}$$

para $t \in (0, s)$ com $s \in (0, T)$, onde

$$\Theta(\cdot, t) := S(s)u_0 + \int_0^t h(\sigma)f(S(s-\sigma)u(\sigma))\; d\sigma \leq u(\cdot, s) < \infty,$$

para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, s)$.

Note que para $x \in \Omega$ fixo a função $\beta(t) := \Theta(x, t)$ é absolutamente contínua em $(0, s)$, consequentemente é diferenciável q.t.p. em $(0, s)$ e de (3.10) temos

$$\beta'(t) = h(t)f(S(s-t)u(x,t)) \geq h(t)f(\beta(t)) \qquad \text{q.t.p. } t \in (0, s), \tag{3.11}$$

pois f é não decrescente.

Para $z \geq z_0$, seja $H\left(z\right) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{d\sigma}{f\left(\sigma\right)}$. De (3.8) e (3.11),

$$H'\left(\beta\left(t\right)\right) = -\frac{\beta'\left(t\right)}{f\left(\beta\left(t\right)\right)} \leq -h\left(t\right).$$

Integrando, obtemos

$$H\left(\beta\left(s\right)\right) - H\left(\beta\left(0\right)\right) = \int_0^s H'\left(\beta\left(\mu\right)\right) d\mu \leq -\int_0^s h\left(\mu\right) d\mu,$$

isto é,

$$\int_0^s h\left(\mu\right) d\mu \;\; \leq \;\; \int_{\beta(0)}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f\left(\sigma\right)} - \int_{\beta(s)}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f\left(\sigma\right)} \leq \int_{\beta(0)}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f\left(\sigma\right)}.$$

Portanto

$$\int_{S(s)u_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)} \geq \int_{\beta(0)}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)} \geq \int_0^s h(\sigma)d\sigma$$

e segue o resultado. $\square$

3.3 PRINCIPAIS RESULTADOS

3.3.1 Existência e não existência de soluções para dados inicias não negativas

Em nosso primeiro resultado, analisamos a existência de soluções não negativas. Estas soluções são entendidas no sentido da Definição 3.1.2.

Teorema 3.3.1 *Seja $f \in C([0, +\infty))$ convexa, não decrescente, $f(0) = 0$ e $0 < \rho < N$.*

(i) Assuma que exista $p_0 > p^*$ tal que $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_0} f(t) < \infty$. Seja

$$p_{\inf} = \inf \left\{ p > p^*; \limsup_{t \to +\infty} t^{-p} f(t) < \infty \right\}$$

e $0 < \rho < 2r/(p_{\inf} - 1)$. Então, para todo $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,r}$, o problema (3.1) possui uma solução local não negativa em algum intervalo $(0, T)$. Além disso, $u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$ e $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C t^{-\rho/2r}$ para todo $t \in (0,T)$ e alguma constante $C > 0$.

(ii) Assuma que existe $p_0 > p^*$ tal que $\liminf_{t \to +\infty} t^{-p_0} f(t) > 0$. Se

$$p_{\sup} = \sup \left\{ p > p^*; \ \liminf_{t \to +\infty} t^{-p} f(t) > 0 \right\} < \infty,$$

e $2r/(p_{\sup} - 1) < \rho < N$, então para cada $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$, o problema (3.1) não possui solução local não negativa.

Observação 3.3.2 *Alguns comentários sobre o Teorema 3.3.1 são:*

(i) A condição $p_0 > p^*$ implica que $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_0} f(t) \leq \limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*} f(t)$. Portanto, o Teorema 3.3.1 permanece válido quando $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*} f(t) = +\infty$.

(ii) O Teorema 3.3.1 fornece resultados otimais. Por exemplo, suponha $f(t) = t^q, t \geq 0$, com $q > p^*$ e p^* dado por (3.2). Então $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*} f(t) = +\infty$ e a condição (3.3) não é satisfeita, mas $p_{\sup} = p_{\inf} = q$ e o Teorema 3.3.1 implica que:

- *Se $0 < \rho < \rho^*$ e $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,r}$, então existe uma solução local não negativa de (3.1).*
- *Se $\rho^* < \rho < N$ e $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$, então não existe uma solução local não negativa de (3.1).*

Assim, o valor $\rho^* = 2r/(q-1)$, dado por (3.5), é o segundo valor crítico para a existência de soluções locais não negativas.

Uma situação semelhante ocorre se $f(t) = (1+t)^q [\ln(1+t)]^s$ com $s \geq 1, q > p^*$.

(iii) A condição de convexidade de f e $f(0) = 0$ é exigida em (i) para garantir que a função $t \in (0, +\infty) \mapsto f(t)/t$ esteja bem definida e é não decrescente, e em (ii) para mostrar a estimativa $f(S(t)u_0) \leq S(t)f(u_0)$, veja a prova do Lema 3.2.3 e da Proposição 3.2.4.

(iv) A condição $\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) > 0$, para algum $p_0 > p^*$, implica que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) = +\infty$, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, argumentamos por contradição, suponha que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty$, então $f(t) \leq Ct^{p^*}$ para t suficientemente grande e alguma constante $C > 0$. Assim, $t^{-p_0} f(t) \leq Ct^{p^*-p_0}$ para t grande e tomando $t \to +\infty$ concluímos que $\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) \leq 0$ temos uma contradição.

(v) A condição $\limsup_{t\to+\infty} t^{-(1+2/N)} f(t) = +\infty$ implica $\int_1^{+\infty} t^{-(1+2/N)} G(t)dt = +\infty$. Mas, a implicação inversa não é necessariamente válida. Portanto, o caso $r = 1$ pode ser melhorado. Com efeito, como f é convexa, não decrescente e $f(0) = 0$ temos que $G(s) = f(s)/s$ então fazendo a prova por contrapositiva, suponha que $\int_1^{+\infty} s^{-\left(1+\frac{2}{N}\right)} G(s)\, ds < \infty$, para $s > t > 1$ suficientemente grande, então

$$\begin{aligned}
\infty > \int_1^{+\infty} s^{-\left(1+\frac{2}{N}\right)} G(s)\, ds &= \int_1^{+\infty} s^{-\left(1+\frac{2}{N}\right)} \frac{f(s)}{s} ds \\
&= \int_1^{+\infty} s^{-\left(2+\frac{2}{N}\right)} f(s)\, ds \\
&\geq \int_t^{+\infty} s^{-\left(2+\frac{2}{N}\right)} f(s)\, ds \\
&\geq f(t) \int_t^{+\infty} s^{-\left(2+\frac{2}{N}\right)} ds \\
&= \frac{t^{-(1+2/N)}}{1+\frac{2}{N}} f(t).
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 3.3.1.

(i) Como f é convexa e $f(0) = 0$ a função $t \in (0, +\infty) \mapsto f(t)/t$ é não decrescente. Assim, a função $G : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $G(t) = f(t)/t$ está bem definida.

Como

$$p_{\inf} = \inf \left\{ p > p^*; \quad \limsup_{t\to+\infty} t^{-p} f(t) < \infty \right\}$$

da definição de ínfimo, seja $\epsilon > 0$, existe $p_0 > p^*$ tal que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) < \infty$ e $p_0 < p_{\inf} + \epsilon$. Então existe $t_0 > 1$ de modo que $f(t) \leq \eta t^{p_0}$ para algum $\eta > 0$ e todo $t \geq t_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \sigma^{-\left(1+\frac{2r}{\rho}\right)} G(\sigma)\, d\sigma &= \int_1^{t_0} \sigma^{-\left(1+\frac{2r}{\rho}\right)} G(\sigma)\, d\sigma + \int_{t_0}^{+\infty} \sigma^{-\left(1+\frac{2r}{\rho}\right)} G(\sigma)\, d\sigma \\
&\leq C + \eta \int_{t_0}^{+\infty} \sigma^{-2-\frac{2r}{\rho}+p_0} d\sigma < \infty,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

pois $p_0 < p_{\inf} + \epsilon < 1 + 2r/\rho$ se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Seja $w(t) = AS(t)\,u_0$ com $A > 1$, e $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,r}$, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que $0 \leq u_0 \leq K^{1/r}\left|\cdot\right|^{-\rho/r}\chi_{B_a}$. Se $u_0 = 0$ então $u = 0$ é uma solução, já que $f(0) = 0$. Assim, podemos assumir que $u_0 \neq 0$. Do Lema 2.4.6 temos $\|S(t)u_0\|_{L^\infty} \leq C_0 K^{1/r} t^{-\rho/2r}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^t S(t-\sigma)\,f(w(\sigma))\,d\sigma &= \int_0^t S(t-\sigma)\,f(AS(\sigma)\,u_0)\,d\sigma \\
&= \int_0^t S(t-\sigma)\,G(AS(\sigma)\,u_0)\,AS(\sigma)\,u_0 d\sigma \\
&\leq \int_0^t S(t-\sigma)\,G(\|AS(\sigma)\,u_0\|_{L^\infty})\,AS(\sigma)\,u_0 d\sigma \\
&\leq \int_0^t S(t-\sigma)\,G\left(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r}\right)AS(\sigma)\,u_0 d\sigma \\
&\leq AS(t)\,u_0\int_0^t G\left(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r}\right)d\sigma \\
&= w(t)(AC_0)^{2r/\rho}K^{2/\rho}\left(\tfrac{2r}{\rho}\right)\int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G(\sigma)d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Então, de (3.12) e (3.13) temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(w,u_0) &= S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\,f(w(\sigma))\,d\sigma \\
&\leq S(t)\,u_0 + w(t)(AC_0)^{2r/\rho}K^{2/\rho}\left(\frac{2r}{\rho}\right)\int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G(\sigma)d\sigma \\
&= \left[\frac{1}{A} + (AC_0)^{2r/\rho}K^{2/\rho}\left(\frac{2r}{\rho}\right)\int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+2r/\rho)}G(\sigma)d\sigma\right]w(t) \\
&\leq w(t),
\end{aligned}$$

para $t \in (0,T)$ com $T > 0$ suficientemente pequeno. Assim, $\mathfrak{F}(w,u_0) \leq w$ em $(0,T)$ e w é uma supersolução de (3.1) em $(0,T)$.

Como $f(0) = 0$ vemos que $v = 0$ é uma subsolução de (3.1). Além disso, usando a estimativa (2.10) temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|f(w(t))\right|^r dx &= \int_\Omega \frac{(f(AS(t)u_0))^r}{(AS(t)u_0)^r}(AS(t)u_0)^r dx \\
&\leq \int_\Omega \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r (AS(t)u_0)^r dx \\
&= \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r \int_\Omega \left|AS(t)u_0\right|^r dx \\
&= \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r \left\|AS(t)u_0\right\|_{L^r}^r \\
&\leq \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r CA^r \left\|u_0\right\|_{L^r}^r .
\end{aligned}$$

Então, da condição integral (3.12) temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|f(w(\sigma))\|_{L^r}\,d\sigma\\
\leq\ & CA\,\|u_0\|_{L^r}\int_0^T G(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r})d\sigma\\
=\ & CA\,\|u_0\|_{L^r}\,\tfrac{2r}{\rho}(AC_0K^{1/r})^{2r/\rho}\int_{AC_0K^{1/r}T^{-\rho/2r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+2r/\rho)}G(\sigma)d\sigma<\infty,
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \|f(v(\sigma))\|_{L^r}\,d\sigma=\int_0^T \|f(0)\|_{L^r}\,d\sigma<\infty.$$

Portanto $f(w(t)), f(v(t))\in L^r(\Omega)$ e $\|f(w(\cdot))\|_{L^r}, \|f(v(\cdot))\|_{L^r}\in L^1((0,T))$. Do Lema 3.2.2, com $h\equiv 1$, $g\in C(\mathbb{R})$ definido por $g(t)=0, t\leq 0$ e $g(t)=f(t)$ para $t>0$, concluímos que existe uma solução do problema (3.1) tal que $0=v\leq u\leq w$ em $(0,T)$. Além disso, $\|u(t)\|_{L^\infty}\leq\|w(t)\|_{L^\infty}\leq Ct^{-\rho/2r}$ para $t\in(0,T)$ para alguma constante $C>0$.

(ii) Seja $u_0\in\mathcal{I}_{\rho,r}$, ou seja, $u_0\geq K^{1/r}|\cdot|^{-\rho/r}\chi_{B_a}=v_0$, onde $B_a\subset\Omega$. Observe que $v_0\in L^r(\Omega)$ pois $0<\rho<N$.

Argumentamos por contradição e supomos que existe uma solução local não negativa u de (3.1) com condição inicial $u_0\in\mathcal{I}_{\rho,r}$, isto é,

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-\sigma)f(u(\sigma))d\sigma,$$

para $t\in(0,T)$, $u\in L^\infty((0,T),L^r(\Omega))$ para algum $T>0$. Daí

$$u(t)\geq S(t)v_0+\int_0^t S(t-\sigma)f(u(\sigma))d\sigma \tag{3.14}$$

para $t\in(0,T)$.

Note que o Lema 2.4.6 implica que $S(t)v_0\in L^\infty(\Omega)$ para todo $t>0$. Além disso, pelo Lema 2.4.4, temos que $S(t)v_0\geq c_N't^{-\frac{\rho}{2r}}\chi_{\sqrt{t}}$, para todo $0<t<\min\{(a/3)^2,T\}$. Portanto,

$$\|S(t)v_0\|_{L^\infty}\geq c_N't^{-\rho/2r}, \tag{3.15}$$

para todo $0<t<\min\{(a/3)^2,T\}$.

Como

$$p_{\sup}=\sup\left\{p>p^*;\ \liminf_{t\to+\infty}t^{-p}f(t)>0\right\}<\infty,$$

da definição de supremo, tomando ϵ suficientemente pequeno tal que $0<\epsilon<p_{\sup}-1-2r/\rho$. Existe $p_0>p^*$ tal que $\liminf_{t\to+\infty}t^{-p_0}f(t)>0$ e $p_{\sup}<p_0+\epsilon$. Assim, existe

uma constante $\eta > 0$ tal que $f(t) \geq \eta t^{p_0}$ para $t \geq t_0 \geq 1$ para alguma constante t_0. De (3.15), vemos que existe τ_0 tal que $\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty} \geq t_0$ para todo $0 < \tau \leq \tau_0$. Usando novamente (3.15), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)} &\leq \frac{1}{\eta} \int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{p_0}} \\
&= \frac{1}{\eta(p_0-1)} \|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}^{1-p_0} \\
&\leq \frac{1}{\eta(p_0-1)} \|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}^{1-p_{\sup}+\epsilon} \\
&\leq \frac{(c'_N)^{1-p_{\sup}+\epsilon}}{\eta(p_0-1)} \tau^{-\rho(1-p_{\sup}+\epsilon)/2r}
\end{aligned}$$

Assim, de (3.14) e da Proposição 3.2.4, segue que

$$1 \geq \tau \left(\int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)} \right)^{-1} \geq \eta(p_0-1)(c'_N)^{-(1-p_{\sup}+\epsilon)} \tau^{1+\rho(1-p_{\sup}+\epsilon)/2r}$$

para todo $0 < \tau \leq \min\{\tau_0, (a/3)^2, T\}$. Isso é uma contradição para τ suficientemente pequeno, pois $1 + \rho(1 - p_{\sup} + \epsilon)/2r < 0$.

□

3.3.2 Existência e não existência de soluções para dados inicias que mudam de sinal

Assumindo que $g \in C(\mathbb{R}^N)$ é localmente Lipschitz, não decrescente e $g(0) = 0$ estão bem definidas as funções não decrescentes $G, L : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dadas por

$$G(s) = \sup_{0<|t|\leq s} \frac{g\,(t)}{t}, \quad s > 0; \quad G(0) = 0, \tag{3.16}$$

$$L\,(s) = \sup_{\substack{|u|,|v|\leq s \\ u\neq v}} \frac{g\,(u) - g\,(v)}{u - v}, \; s > 0; \quad L(0) = 0.$$

Estas funções foram usadas por Laister e Sierżęga em (LAISTER; SIERŻĘGA, 2020) para mostrar a existência e unicidade de uma solução local para o problema (3.6), com $h \equiv 1$ e $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, sob a condição integral

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} G(\sigma) d\sigma < \infty. \tag{3.17}$$

Como no Teorema 3.3.1, analisamos o problema (3.6) para $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,r}$ e $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$. Obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.3 *Sejam $g \in C(\mathbb{R})$ e $h \in C((0, +\infty))$.*

(i) Suponha que g seja localmente lipschitz, não decrescente e $g(0) = 0$. Para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $|u_0| \in \mathcal{I}^{\rho,r}$ e $0 < \rho < N$, o problema (3.6) possui uma solução local em algum intervalo $(0,T)$ se as seguintes condições forem válidas

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\rho)} h\left((AC_0K^{1/r})^{2r/\rho}\sigma^{-2r/\rho}\right) G(\sigma)\, d\sigma < \infty, \tag{3.18}$$

onde $A > 1$, C_0 é dado pelo Lema 2.4.6 (para $q_1 = q_2 = \infty$) e K é a constante de $|u_0|$ no conjunto $\mathcal{I}^{\rho,r}$. Além disso, $u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$ e existe uma constante $C > 0$ tal que $t^{\rho/2r}\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C$ para $t \in (0,T)$.

(ii) Assuma que a restrição $g|_{[0,+\infty)}$ é não decrescente, convexa, $g(0) = 0$ e

$$p_{\sup} = \sup\left\{p > p^*;\ \liminf_{t\to+\infty} t^{-p}g(t) > 0\right\} < \infty.$$

Se existe $0 < \epsilon < p_{\sup} - 1$ tal que

$$\limsup_{t\longrightarrow 0^+} t^{-\frac{\rho}{2r}(p_{\sup}-1-\epsilon)} \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma = +\infty, \tag{3.19}$$

então para cada $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$, $0 < \rho < N$, o problema (3.6) não possui solução local não negativo.

Observação 3.3.4 *A seguir são dados alguns comentários sobre o Teorema 3.3.3.*

(i) De (3.17) e (3.18) vemos que

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\rho)} G(\sigma) d\sigma < \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} G(\sigma) d\sigma,$$

quando $r = 1$ e $h \equiv 1$. Portanto, sob as hipóteses do Teorema 3.3.3 pode-se obter uma solução do problema (3.6) para $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,1}$ mesmo se (3.17) não é válido.

(ii) Se $g(t) = |t|^{q-1}t, t \in \mathbb{R}, q \geq p^*$, então $G(s) = s^{q-1}$ e a condição (3.18) é satisfeita, para $h \equiv 1$, quando $\rho(q-1)/2 < r$. Assim, o Teorema 3.3.3 nos permite obter uma solução local para dados iniciais no conjunto $\mathcal{I}^{\rho,r}$ quando $1 \leq r < N(q-1)/2$ e o caso duplamente crítico $r = N(q-1)/2 = 1$.

(iii) Se $f \in C([0,+\infty))$ é convexa com $f(0) = 0$, então definindo $g(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $g(t) = f(t)$ para $t > 0$ temos que g é contínua e

$$G(s) = \sup_{0<|t|\leq s} \frac{g(t)}{t} = \sup_{0<t\leq s} \frac{f(t)}{t} = \frac{f(s)}{s}.$$

Assim, pelo Teorema 3.3.3, assumindo as hipóteses do Teorema 3.3.1, com $h(t) = t^\beta$, $\beta > -1$, temos:

- *Se $u_0 \in \mathcal{I}^{\rho,r}$ e $0 < \rho < 2r(\beta+1)/(p_{\inf}-1)$ então o problema (3.6) admite uma solução não negativa.*
- *Se $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$ e $2r(\beta+1)/(p_{\sup}-1) < \rho < N$, então problema (3.6) não admite uma solução local não negativa.*

Em particular, quando $\beta = 0$ recuperamos o Teorema 3.3.1, e para $f(t) = t^q, q > 1$ o segundo valor crítico é dado por $\rho^* = 2r(\beta+1)/(q-1)$, veja Observação 3.3.2(ii).

Demonstração do Teorema 3.3.3.

(i) Adaptamos a prova do Teorema 3.3.1-(i) para obter uma solução para dados iniciais com sinal indefinido. Para fazer isso, mostramos que para $|u_0| \in \mathcal{I}^{\rho,r}$ e $A > 1$, as funções $w(t) = AS(t)|u_0|$ e $v(t) = -AS(t)|u_0|$ são, respectivamente, uma supersolução e uma subsolução de (3.6).

Observe que tomando $t = s$ em (3.16), temos

$$g(s) \leq sG(s), \quad s \geq 0, \tag{3.20}$$

e tomando $t = -s$, segue que

$$g(s) \geq sG(-s), \quad s \leq 0. \tag{3.21}$$

Argumentando da mesma forma que na derivação de (3.13), usando a desigualdade (3.20) e a estimativa $\|S(\sigma)|u_0|\|_{L^\infty} \leq C_0 K^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t S(t-\sigma)\, h(\sigma) g(w(\sigma))\, d\sigma &= \int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma)\, g(AS(\sigma)|u_0|)\, d\sigma \\
&\leq \int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma)\, G(AS(\sigma)|u_0|)\, AS(\sigma)|u_0| d\sigma \\
&\leq \int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma)\, G(\|AS(\sigma)|u_0|\|_{L^\infty})\, AS(\sigma)|u_0| d\sigma \\
&\leq AS(t)|u_0| \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0 K^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma \\
&= w(t) \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0 K^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Assim, pela desigualdade (3.18) e (3.22)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(w, u_0) &= S(t)\, u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\, h(\sigma) g(w(\sigma))\, d\sigma \\
&\leq S(t)|u_0| + w(t) \int_0^t h(\sigma) G\left(AK^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma \\
&\leq \left(\frac{1}{A} + \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0 K^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma\right) w(t) \\
&\leq w(t),
\end{aligned}$$

para $t \in (0,T)$ com $T > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, $\mathfrak{F}(w, u_0) \leq w$ em $(0,T)$ e w é uma supersolução de (3.6) em $(0,T)$.

Agora, usando (3.21) e argumentando da mesma forma que na derivação de (3.22), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t S(t-\sigma)\, h(\sigma) g(v(\sigma))\, d\sigma &= \int_0^t S(t-\sigma)\, h(\sigma) g(-AS(\sigma)\,|u_0|)\, d\sigma \\
&\geq -\int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma)\, G(AS(\sigma)\,|u_0|)\, AS(\sigma)\,|u_0| d\sigma \\
&\geq -\int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma)\, G(\|AS(\sigma)\,|u_0|\|_{L^\infty})\, AS(\sigma)\,|u_0| d\sigma \\
&\geq -\int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma)\, G(AC_0K^{1/r}s^{-\rho/2r})[AS(\sigma)\,|u_0|] d\sigma \\
&\geq -AS(t)\,|u_0| \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma \\
&= v(t) \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(v, u_0) &= S(t)\, u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\, h(\sigma) g(v(\sigma))\, d\sigma \\
&\geq -S(t)\,|u_0| + v(t) \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma \\
&\geq \left(\frac{1}{A} + \int_0^t h(\sigma) G\left(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r}\right) d\sigma\right) v(t) \\
&\geq v(t)\,,
\end{aligned}$$

para $t \in (0,T)$ com $T > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, $\mathfrak{F}(v, u_0) \geq v$ em $(0,T)$ e v é uma subsolução de (3.6) em $(0,T)$. Além disso, usando a estimativa (2.10) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(w(t))|^r\, dx &\leq \int_\Omega \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r |AS(t)|u_0||^r dx \\
&= \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r \int_\Omega |AS(t)|u_0||^r\, dx \\
&= \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r \|AS(t)|u_0|\|_{L^r}^r \\
&\leq \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r CA^r \|u_0\|_{L^r}^r\,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(v(t))|^r\, dx &\leq \int_\Omega \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r |AS(t)|u_0||^r dx \\
&= \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r \int_\Omega |AS(t)|u_0||^r\, dx \\
&= \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r \|AS(t)|u_0|\|_{L^r}^r \\
&\leq \left[G(AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r})\right]^r CA^r \|u_0\|_{L^r}^r\,.
\end{aligned}$$

Pela condição integral (3.18) temos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T h(\sigma) \left\| g(w(\sigma)) \right\|_{L^r} d\sigma \\
\leq\ & CA \left\| u_0 \right\|_{L^r} \int_0^T h(\sigma) G(AC_0 K^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}) d\sigma \\
=\ & CA \left\| u_0 \right\|_{L^r} \tfrac{2r}{\rho} (AC_0 K^{1/r})^{2r/\rho} \\
& \times \int_{AC_0 K^{1/r} T^{-\rho/2r}}^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\rho)} h((AC_0 K^{1/r})^{2r/\rho} \sigma^{-2r/\rho}) G(\sigma) d\sigma < \infty,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^T h(\sigma) \left\| g(v(\sigma)) \right\|_{L^r} d\sigma \\
\leq\ & CA \left\| u_0 \right\|_{L^r} \int_0^T h(\sigma) G(AC_0 K^{1/r} \sigma^{-\rho/2r}) d\sigma \\
=\ & CA \left\| u_0 \right\|_{L^r} \tfrac{2r}{\rho} (AC_0 K^{1/r})^{2r/\rho} \\
& \times \int_{AC_0 K^{1/r} T^{-\rho/2r}}^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\rho)} h((AC_0 K^{1/r})^{2r/\rho} \sigma^{-2r/\rho}) G(\sigma) d\sigma < \infty.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente $g(w(t)), g(v(t)) \in L^r(\Omega)$ e $h(\cdot) \left\| g(w(\cdot)) \right\|_{L^r}, h(\cdot) \left\| g(v(\cdot)) \right\|_{L^r} \in L^1((0,T))$. Portanto, o Lema 3.2.2 garante que o problema (3.6) admite uma solução definida em $(0,T)$ e $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ para $t \in (0,T)$. Portanto, $|u(t)| \leq AS(t)|u_0|$ para $t \in (0,T)$, e

$$\left\| u(t) \right\|_{L^\infty} \leq A \left\| S(t)|u_0| \right\|_{L^\infty} \leq C t^{-\rho/2r}$$

para alguma constante $C > 0$.

(ii) Seja $u_0 \in \mathcal{I}_{\rho,r}$ com $0 < \rho < N$, isto é, $u_0 \geq K|x|^{-\rho/r}\chi_a = v_0$ e seja $f = g|_{[0,+\infty)}$. Então $v_0 \in L^r(\Omega)$.

Argumentamos por contradição e assumimos que existe uma solução local u não negativa de (3.6), com condição inicial u_0, isto é,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma) f(u(\sigma)) d\sigma,$$

para $t \in (0,T)$, $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ para algum $T > 0$. Como $u_0 \geq v_0$ obtemos

$$u(t) \geq S(t)v_0 + \int_0^t h(\sigma) S(t-\sigma) f(u(\sigma)) d\sigma,$$

para $t \in (0,T)$.

Como na prova do Teorema 3.3.1(ii) temos

$$\left\| S(t)v_0 \right\|_{L^\infty} \geq c_N' t^{-\rho/2r}, \tag{3.23}$$

para todo $0 < t < \min\{(a/3)^2, T\}$, veja (3.15).

Como $p_{\sup} < \infty$ existe $p_0 > p_{\sup} - \epsilon$ e $\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) > 0$. Assim, existem $C > 0$ e $t_0 > 1$ tais que $f(t) \geq Ct^{p_{\sup}-\epsilon}$ para todo $t > t_0$. Então, de (3.23) para $\tau > 0$ pequeno temos

$$\begin{aligned}
& C^{-1}(p_{\sup} - 1 - \epsilon)^{-1}(c'_N)^{-(p_{\sup}-1-\epsilon)}\tau^{\rho(p_{\sup}-1-\epsilon)/2r} \\
\geq\ & C^{-1}(p_{\sup} - 1 - \epsilon)^{-1}\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}^{1-p_{\sup}+\epsilon} \\
=\ & C^{-1}\int_{\|S(t)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{p_{\sup}-\epsilon}} \\
\geq\ & \int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Assim, da Proposição 3.2.4, segue que

$$\begin{aligned}
1 \ &\geq\ \int_0^\tau h(\sigma)d\sigma \cdot \left(\int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)}\right)^{-1} \\
&\geq\ C(p_{\sup} - 1 - \epsilon)(c'_N)^{-(1-p_{\sup}+\epsilon)}\,\tau^{-\frac{\rho(p_{\sup}-1-\epsilon)}{2r}} \cdot \int_0^\tau h(\sigma)d\sigma,
\end{aligned}$$

para todo τ suficientemente pequeno. Isso contradiz a condição (3.19).

$\square$

Nosso resultado de unicidade é o seguinte.

Teorema 3.3.5 *Sejam $g \in C(\mathbb{R})$ localmente Lipschitz, não decrescente com $g(0) = 0$, $h \in C((0,+\infty))$ e $0 < T < \infty$. O problema (3.6) admite solução única na classe*

$$\{u \in L^\infty\left((0,T), L^r(\Omega)\right);\ \sup_{t\in(0,T)} t^{\rho/2r}\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C_1\} \tag{3.24}$$

se a seguinte condição integral

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\rho)} h\left((C_1^{-1}\sigma)^{-2r/\rho}\right) L(\sigma)\, d\sigma < \infty \tag{3.25}$$

é satisfeita.

Observação 3.3.6 *A seguir, são dados alguns comentários sobre o Teorema 3.3.5.*

(i) Do Teorema 3.3.3(i), o conjunto (3.24) é não vazio se g é não decrescente e $|u_0| \in \mathcal{I}^{\rho,r}$ com $0 < \rho < N$.

(ii) Suponha $g(t) = |t|^{p-1}t$ para $t \in \mathbb{R}$, $p > 1$ e $h(t) = t^\beta$ com $\beta > -1$. Então $L(s) = ps^{p-1}$ e a condição (3.25) é verificada para $\rho < 2r(1+\beta)/(q-1) = \rho^*$, veja Observação 3.3.4(iii).

(iii) Para $h \equiv 1$ um resultado de unicidade similar para o problema (3.6) com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ foi obtido em (LAISTER; SIERŻĘGA, 2020) quando $\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} L(\sigma) d\sigma < \infty$.

Demonstração do Teorema 3.3.5. Suponha que o problema (3.6) tenha duas soluções locais u e v na classe (3.24) definidas em algum intervalo $(0,T)$ com dados iniciais u_0 e v_0 respectivamente, isto é,

$$u(t) = S(t) u_0 + \int_0^t S(t-\sigma) h(\sigma) g(u(\sigma)) d\sigma \tag{3.26}$$

e

$$v(t) = S(t) v_0 + \int_0^t S(t-\sigma) h(\sigma) g(v(\sigma)) d\sigma, \tag{3.27}$$

para $t \in (0,T)$. Subtraindo (3.27) de (3.26), e usando a estimativa (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u(t) - v(t)\|_{L^r} \\
&\leq \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + \left\| \int_0^t S(t-\sigma) h(\sigma) [g(u(\sigma)) - g(v(\sigma))] d\sigma \right\|_{L^r} \\
&= \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + \left\| \int_0^t S(t-\sigma) h(\sigma) \frac{[g(u(\sigma)) - g(v(\sigma))]}{u(\sigma) - v(\sigma)} [u(\sigma) - v(\sigma)] d\sigma \right\|_{L^r} \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_{L^r} + \int_0^t \left\| \frac{g(u(\sigma)) - g(v(\sigma))}{u(\sigma) - v(\sigma)} \right\|_{L^\infty} h(\sigma) \|S(t-\sigma)(u(\sigma) - v(\sigma))\|_{L^r} d\sigma \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_{L^r} + \int_0^t L\left(C_1 \sigma^{-\rho/2r}\right) h(\sigma) \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r} d\sigma.
\end{aligned}$$

Pela condição (3.25) e pela desigualdade de Gronwall (veja o Lema 2.4.13) obtemos

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^r} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^r} \exp\left[\int_0^T L(C_1 \sigma^{-\rho/2r}) h(\sigma) d\sigma \right],$$

para $t \in (0,T)$. Portanto, a unicidade segue tomando $u_0 = v_0$. □

4 UMA EQUAÇÃO DE CALOR SEMILINEAR COM FONTE VARIÁVEL E DADOS INICIAIS SINGULARES

Neste capítulo estudamos a equação de calor semilinear com expoente variável e condição de contorno de Dirichlet nula. Nosso objetivo é estabelecer resultados de existência, não existência e unicidade de soluções com dados iniciais em espaços de Lebesgue.

4.1 INTRODUÇÃO

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $T > 0$. Consideramos o seguinte problema parabólico com uma não linearidade variável

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u)^{p(x)} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente, $p : \Omega \to (1,+\infty)$ é uma função contínua tal que

$$1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \text{ para todo } x \in \Omega, \tag{4.2}$$

com $p^- = \min_{x\in\Omega} p(x), \quad p^+ = \max_{x\in\Omega} p(x)$ e $u_0 \in L^r(\Omega), r \geq 1$.

Quando $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente e $p \equiv 1$, o problema (4.1) foi estudado em (LAISTER et al., 2016, Teorema 3.4 e Corolário 4.5). Explicitamente, foi mostrado o seguinte.

Proposição 4.1.1 *Seja $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função contínua e não decrescente. O problema (4.1) tem uma solução com dados iniciais $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ se, e somente se,*

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty \text{ para } r > 1,$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F(\sigma) d\sigma < \infty \text{ para } r = 1,$$

onde $F(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq\sigma} f(t)/t$ e

$$p^* = 1 + \frac{2r}{N}, \tag{4.3}$$

para $1 \leq r < \infty$.

Observação 4.1.2 *A solução obtida acima pertence à classe*

$$\left\{ u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega)) \, ; \, \sup_{t\in(0,T)} t^{N/2r} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty \right\},$$

veja (BREZIS; CAZENAVE, 1996), (LAISTER et al., 2016) e (WEISSLER, 1980).

O objetivo principal deste capítulo é estender os resultados obtidos em (LAISTER et al., 2016) para o problema (4.1) assumindo $f \in C([0, +\infty))$, $u_0 \in L^r(\Omega)$ e p uma função dependendo de x. Até onde sabemos, não existem trabalhos que tratem da existência de soluções para o problema (4.1) com dados iniciais em espaços de Lebesgue. Como consequência de nossos resultados, podemos analisar completamente a equação $u_t - \Delta u = u^{p(x)}$ em $\Omega \times (0, T)$ (veja Corolários 4.3.3 e 4.3.6).

Antes disso, definimos a noção de solução do problema (4.1).

Definição 4.1.3 *Seja* $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ *com* $1 \leq r < \infty$, $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ *e* $f \in C([0, +\infty))$. *Uma função mensurável* u *definida q.t.p. em* $\Omega \times (0, T)$, *para algum* $T > 0$, *é chamada de solução local do problema (4.1) se*

$$u(t) = S(t) u_0 + \int_0^t S(t - \sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma = \mathfrak{F}(u, u_0) \tag{4.4}$$

q.t.p. em $\Omega \times (0, T)$ *e* $u \in L^\infty((0, T), L^r(\Omega))$.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 4.2 apresentamos alguns resultados preliminares para o problema (4.1) e enunciamos os resultados obtidos, seguidamente demonstramos esses teoremas na Seção 4.3.

4.2 RESULTADOS PRELIMINARES

4.2.1 Resultado de existência

Para os resultados da existência local de soluções do problema (4.1), usamos o método de supersolução. Supersolução é entendido no seguinte sentido.

Definição 4.2.1 *Seja* $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ *com* $1 \leq r < \infty$, $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ *e* $f \in C([0, +\infty))$. *Dizemos que uma função não negativa* w *definida q.t.p. em* $\Omega \times (0, T)$ *é uma supersolução de (4.1) se satisfaz* $\mathfrak{F}(w, u_0) \leq w$ *q.t.p. em* $\Omega \times (0, T)$ *e* $w \in L^\infty((0, T), L^r(\Omega))$.

O resultado a seguir é uma versão do resultado de Robinson e Sierżęga em (ROBINSON; SIERŻĘGA, 2013, Teorema 1).

Lema 4.2.2 *Assuma que* $f \in C([0, +\infty))$ *é não decrescente,* $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ *e* $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ *com* $1 \leq r < \infty$. *Então, o problema (4.1) admite uma solução em* $\Omega \times (0, T)$ *se e somente se admite uma supersolução em* $\Omega \times (0, T)$.

Demonstração. Da Definição 4.1.3, qualquer solução de (4.1) é uma supersolução de (4.1). Assim, precisamos apenas mostrar que a existência de uma supersolução $\overline{u}$ para (4.1) implica a existência de uma solução u para (4.1).

Como $\overline{u}$ é a supersolução de (4.1) temos que $\overline{u} \geq \mathfrak{F}(\overline{u}, u_0)$. Além disso, $\mathfrak{F}(\cdot, u_0)$ é não decrescente, porque f é não decrescente e o semigrupo de calor $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é monótono (ou seja, se $u_0 \geq v_0 \geq 0$ então $S(t)u_0 \geq S(t)v_0$). Considere agora a sequência $\{u^n\}_{n\geq 0}$, dada por $u^0 = \overline{u}$, e $\mathfrak{F}(u^{n-1}, u_0) = u^n$ para cada $n \geq 1$. Então, a sequência $\{u^n\}_{n\geq 0}$ não crescente q.t.p em $\Omega \times (0,T)$ e $\overline{u} \geq u^n \geq 0$. Seja $u(x,t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u^n(x,t)$, sempre que existir. Então, a partir da continuidade da função não decrescente f, da monotonicidade de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, e pela aplicação do Teorema da convergência monótona (veja o Teorema 2.1.5), obtemos que $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{F}\left(u^{n-1}, u_0\right) = \mathfrak{F}(u, u_0)$. Devido à construção da sequência é possível concluir que $0 \leq u \leq \overline{u}$. Além disso, como $\overline{u} \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ concluímos que $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ e a prova está completa. □

Para mostrar a existência de uma solução para o problema (4.1) consideramos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u)^{p^+} + f(u)^{p^-} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

com $u_0 \in L^r(\Omega)$. Temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.3 *Seja $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, p^* dado por (4.3), $F_1(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq\sigma} f(t)^{p^+}/t$ e $F_2(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq\sigma} f(t)^{p^-}/t$. O problema (4.5) tem uma solução para qualquer condição inicial $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$ definido em algum intervalo $(0,T)$ se, e somente se,*

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} < \infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty \qquad \text{se } r > 1.$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} F_1(\sigma)d\sigma < \infty \text{ e } \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} F_2(\sigma)d\sigma < \infty \qquad \text{se } r = 1.$$

Demonstração. (i) **Caso** $r > 1$. ($\Leftarrow$) Como $f(\cdot)^{p^+} + f(\cdot)^{p^-} \in C([0,+\infty))$ é não decrescente porque $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente e $p^+, p^- > 1$, e

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*}(f(t)^{p^+} + f(t)^{p^-}) = \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} + \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty,$$

pela Proposição 4.1.1, segue-se que o problema (4.5) tem uma solução local não negativa para cada $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$.

($\Rightarrow$) Sem perda de generalidade, assumimos que $0 \in \Omega$ e suponhamos que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty$. O caso $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty$ pode ser tratado de forma similar.

Como $f(\cdot)^{p^+} + f(\cdot)^{p^-} \in C([0,+\infty))$ é não decrescente porque $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente e $p^+, p^- > 1$, com

$$+\infty = \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} \leq \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} (f(t)^{p^+} + f(t)^{p^-}),$$

pela Proposição 4.1.1, segue-se que existe $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $u_0 \geq 0$ tal que o problema (4.5) não tem solução não negativo.

(ii) **Caso** $r = 1$**.** ($\Leftarrow$) Como $f(\cdot)^{p^+} + f(\cdot)^{p^-} \in C([0,+\infty))$ é não decrescente porque $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente e $p^+, p^- > 1$, e

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} F(\sigma) d\sigma &= \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} \sup_{1\leq t\leq\sigma} \left(\frac{f(t)^{p^+} + f(t)^{p^-}}{t} \right) d\sigma \\
&\leq \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} \sup_{1\leq t\leq\sigma} \frac{f(t)^{p^+}}{t} d\sigma + \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2N)} \sup_{1\leq t\leq\sigma} \frac{f(t)^{p^-}}{t} d\sigma \\
&= \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} F_1(\sigma) d\sigma + \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2N)} F_2(\sigma) d\sigma < \infty,
\end{aligned}$$

pela Proposição 4.1.1, segue-se que o problema (4.5) tem uma solução local não negativa para cada $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$.

($\Rightarrow$) Sem perda de generalidade, assumimos que $0 \in \Omega$ e suponhamos que $\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_1(\sigma) d\sigma = +\infty$. O caso $\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma = +\infty$ pode ser tratado de forma semelhante. Como $f(\cdot)^{p^+} + f(\cdot)^{p^-} \in C([0,+\infty))$ é não decrescente porque $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente e $p^+, p^- > 1$, com

$$+\infty = \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2N)} F_1(\sigma) d\sigma \leq \int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2N)} F(\sigma) d\sigma,$$

onde $F(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq\sigma} \left(f(t)^{p^+} + f(t)^{p^-} \right) / t$ obtemos que $\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2N)} F(\sigma) d\sigma = +\infty$. Pela Proposição 4.1.1, segue-se que existe $u_0 \in L^1(\Omega)$ com $u_0 \geq 0$ tal que o problema (4.5) não tem solução não negativa. $\square$

4.2.2 Resultado de não existência

A seguinte versão da desigualdade de Jensen foi estabelecida em (FERREIRA et al., 2012, Lema 3.1).

Lema 4.2.4 *Seja η uma medida positiva em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\int_\Omega d\eta = 1$ e seja $f \in L^{p^+}(\Omega, d\eta)$ com $1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+$ para todo $x \in \Omega$. Então*

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} d\eta(x) \geq 2^{-p+} \min\left\{ \left(\int_\Omega |f(x)| d\eta(x)\right)^{p^-}, \left(\int_\Omega |f(x)| d\eta(x)\right)^{p^+} \right\}.$$

A seguinte proposição é usada na prova dos nossos resultados de inexistência. Sua prova segue as mesmas ideias de (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022), (CASTILLO; LOAYZA, 2023, p. 9) e (QUITTNER; SOUPLET, 2007, Lema 15.6).

Proposição 4.2.5 *Assuma $f \in C([0, +\infty))$ não decrescente, convexa, $f(0) = 0$ e $f(s) > 0$ para todo $s \geq z_0$, para algum $z_0 > 0$, tal que*

$$\int_{z_0}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\min\{f(\sigma)^{p^+}, f(\sigma)^{p^-}\}} < \infty. \tag{4.6}$$

Sejam $u_0 : \Omega \to [0, +\infty)$ e $u : \Omega \times [0, T] \to [0, +\infty)$ mensuráveis satisfazendo

$$u(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma \quad \text{q.t.p. em } \Omega \times (0, T).$$

Assuma também que $u(x, t) < \infty$ q.t.p. $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ e $u_0 \neq 0$. Então

$$2^{-p^+} t \cdot \left(\int_{\|S(t)u_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\min\{f(\sigma)^{p^+}, f(\sigma)^{p^-}\}} \right)^{-1} \leq 1$$

para todo $t \in (0, T]$.

Demonstração. Usando a convexidade de f, $f(0) = 0$, a desigualdade de Jensen, $0 < \eta = \int_\Omega K_\Omega(x, y; t) dy \leq 1$ (veja (2.8)), (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} f(S(t)u) &= f\left(\int_\Omega K_\Omega(x, y; t) u(y) dy\right) \\ &= f\left(\eta \int_\Omega \frac{K_\Omega(x, y; t)}{\eta} u(y) dy\right) \\ &\leq \eta f\left(\int_\Omega \frac{K_\Omega(x, y; t)}{\eta} u(y) dy\right) \\ &\leq \int_\Omega K_\Omega(x, y; t) f(u(y)) dy = S(t) f(u) \end{aligned} \tag{4.7}$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, como

$$u(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma,$$

para $t \in (0, T)$, tomando $0 < t < s < T$ temos

$$S(s - t)u(t) \geq S(s)u_0 + \int_0^t S(s - \sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma. \tag{4.8}$$

Seja

$$\Theta(\cdot,t) := S(s)u_0 + \int_0^t S(s-\sigma)f(u(\sigma))^{p(\cdot)}d\sigma$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,s)$.

Note que para $x \in \Omega$ fixo a função $\Theta(x,t)$ é absolutamente contínua em $(0,s)$, conseqüentemente é diferenciável q.t.p. em $(0,s)$ e de (4.8) temos

$$\Theta'(t) = S(s-t)f(u(t))^{p(\cdot)} \qquad \text{q.t.p. } t \in (0,s),$$

e do Lema 4.2.4

$$\begin{aligned} S(s-t)f(u(t))^{p(\cdot)} &= \int_\Omega K_\Omega(x,y;s-t)f(u(t,y))^{p(y)}dy \\ &\geq 2^{-p^+}\min\left\{\frac{[S(s-t)f(u(t))]^{p^-}}{a(s-t,x)^{p^--1}}, \frac{[S(s-t)f(u(t))]^{p^+}}{a(s-t,x)^{p^+-1}}\right\}, \end{aligned}$$

onde K_Ω é o kernel de calor de Dirichlet em Ω e $a(s-t,x) = \int_\Omega K_\Omega(x,y;s-t)dy > 0$. Como $K_\Omega(x,y;s-t) \leq K_{\mathbb{R}^N}(x,y;s-t)$ (veja (VAN, 1992, Lema 7)), concluímos que $a(s-t,x) \leq 1$. Assim, como $p^- \geq 1$, f é não decrescente, a desigualdade (4.7) e (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} \Theta'(t) &\geq 2^{-p^+}\min\left\{[S(s-t)f(u(t))]^{p^-}, [S(s-t)f(u(t))]^{p^+}\right\} \\ &\geq 2^{-p^+}\min\left\{[f(S(s-t)u(t))]^{p^+}, [f(S(s-t)u(t))]^{p^-}\right\} \\ &\geq 2^{-p^+}\min\left\{[f(\Theta(t))]^{p^+}, [f(\Theta(t))]^{p^-}\right\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Seja $g(t) = \min\left\{f(t)^{p^-}, f(t)^{p^+}\right\}$ para todo $t \geq 0$. Por (4.9), $\Theta'(t) \geq 2^{-p^+}g(\Theta(t))$. Definindo $H(t) = \int_t^{+\infty}\frac{d\sigma}{g(\sigma)}$ para $t > 0$ obtemos $[H(\Theta(t))]' = -\frac{\Theta'(t)}{g(\Theta(t))} \leq -2^{-p^+}$, para $0 < t < s$. Observe que a condição (4.6) garante que a função H esta bem definida.

Integrando de 0 a s obtemos $H(\Theta(s)) - H(\Theta(0)) \leq -2^{-p^+}s$, isto é

$$2^{-p^+}s \;\leq\; \int_{\Theta(0)}^{+\infty}\frac{d\sigma}{g(\sigma)} - \int_{\Theta(s)}^{+\infty}\frac{d\sigma}{g(\sigma)} \leq \int_{\Theta(0)}^{+\infty}\frac{d\sigma}{g(\sigma)} = \int_{S(s)u_0}^{+\infty}\frac{d\sigma}{g(\sigma)}.$$

Assim, como H é decrescente e o lado esquerdo não depende de x, concluímos que

$$2^{-p^+}s \leq \int_{\|S(s)u_0\|_{L^\infty}}^{+\infty}\frac{d\sigma}{g(\sigma)}$$

e o resultado segue. □

A não existência de solução será mostrada usando o seguinte resultado, veja (LAISTER et al., 2016, Lema 4.2).

Lema 4.2.6 *Suponha que* $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *é não decrescente e* $q, p^- > 1$. *Então as duas condições a seguir são equivalentes* *(i) Existe uma sequência* $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $s_{k+1} \geq \theta s_k$, $\theta > 1$ *e* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} s_k^{-q} f(s_k)^{p^-} = +\infty$.

(ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sigma^{-q} F(\sigma) d\sigma = +\infty$, *onde* $F(s) = \sup_{1\leq t\leq s} f(t)^{p^-}/t$.

4.3 PRINCIPAIS RESULTADOS

Em nosso primeiro resultado, analisamos a existência de soluções não negativas.

Teorema 4.3.1 *Seja* $f \in C([0,+\infty))$ *não decrescente,* $p \in C(\Omega, (1,+\infty))$ *verificando (4.2),* p^* *dado por (4.3),* $F_1(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq \sigma} f(t)^{p^+}/t$ *e* $F_2(\sigma) = \sup_{1\leq t\leq\sigma} f(t)^{p^-}/t$.

(i) Se

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} < \infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty, \text{ para } r > 1, \tag{4.10}$$

ou

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_1(\sigma) d\sigma < \infty \text{ e } \int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma < \infty, \text{ para } r = 1, \tag{4.11}$$

então o problema (4.1) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, *com* $u_0 \geq 0$.

(ii) Se

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty, \text{ para } r > 1,$$

ou

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma = +\infty, \text{ para } r = 1,$$

então existe $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ *tal que o problema (4.1) não possui solução local.*

Observação 4.3.2 *O Teorema 4.3.1 é obtido usando as mesmas ideias de (LAISTER et al., 2016). Assim, este resultado também é válido quando* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *considerando as suposições adicionais* $\limsup_{t\to 0} f(t)^{p^+}/t < \infty$ *e* $\limsup_{t\to 0} f(t)^{p^-}/t < \infty$ *em (4.10) e (4.11).*

Demonstração do Teorema 4.3.1. Note que

$$\min\{f(t)^{p^-}, f(t)^{p^+}\} \leq f(t)^{p(x)} \leq f(t)^{p^+} + f(t)^{p^-},$$

$$f(t)^{p^+} \geq f(t)^{p^-} \quad \text{se} \quad f(t) \geq 1,$$

$$f(t)^{p^-} \geq f(t)^{p^+} \quad \text{se} \quad f(t) < 1,$$

onde $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+$ para todo $x \in \Omega$.

(i) Seja $v \in L^{\infty}((0,T), L^r(\Omega))$ uma solução local, dada pela Proposição 4.2.3, com $r \geq 1$, para o problema (4.5). Como v é uma supersolução de (4.1), a existência local segue do Lema 4.2.2.

(ii) Sem perda de generalidade assumimos que $0 \in \Omega$. Consideramos duas situações:

Caso $r > 1$. Assuma $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty$. Então, existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\phi_n \geq n$ e $f(\phi_n)^{p^-} \geq e^{n/r} \phi_n^{p^*} \geq 1$.

Seja $\rho_n = (\phi_n n^2)^{-r/N}$. Como $\lim_{n \to +\infty} \rho_n = 0$, é possível assumir que $B_{3\rho_n} \subset \Omega$ para cada $n \geq 1$. Seja $u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n = c_N^{-1} 2^N \phi_n \chi_{\rho_n}$, e c_N é a constante dada no Lema 2.4.4(i). Note que

$$\|u_0\|_{L^r} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} c_N^{-1} 2^N \phi_n \omega_N^{1/r} \rho_n^{N/r} = c_N^{-1} 2^N \omega_N^{1/r} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < \infty,$$

onde ω_N é o volume da bola unitária. Agora, argumentamos por contradição e assumimos que existe $u \in L^{\infty}((0,T), L^r(\Omega))$ uma solução do problema (4.1) com $u(0) = u_0$, para algum $T > 0$. Como $u \geq 0$ e $f \geq 0$, pelo Lema 2.4.4(i) temos

$$u(\sigma) \geq S(\sigma) u_0 \geq S(\sigma) u_n \geq 2^N \phi_n \left(\frac{\rho_n}{\rho_n + \sqrt{\sigma}} \right)^N \chi_{\rho_n + \sqrt{\sigma}} \geq \phi_n \chi_{\rho_n},$$

para $0 < \sigma \leq \rho_n^2$. Como f é não decrescente, temos

$$f(u(\sigma)) \geq f(\phi_n) \chi_{\rho_n}, \quad 0 < \sigma \leq \rho_n^2. \tag{4.12}$$

Portanto, para $t \in [\rho_n^2/2, \rho_n^2]$, por (4.4), (4.12) e o Lema 2.4.4(i), temos

$$\begin{aligned}
u(t) &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma \\
&\geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma) \min\left\{ f(u(\sigma))^{p^+}, f(u(\sigma))^{p^-} \right\} d\sigma \\
&\geq \int_0^t S(t-\sigma) \min\left\{ [f(\phi_n)\chi_{\rho_n}]^{p^+}, [f(\phi_n)\chi_{\rho_n}]^{p^-} \right\} d\sigma \\
&= \int_0^t S(t-\sigma) [f(\phi_n)\chi_{\rho_n}]^{p^-} d\sigma \\
&\geq f(\phi_n)^{p^-} \int_0^t S(t-\sigma) \chi_{\rho_n} d\sigma \\
&\geq C f(\phi_n)^{p^-} \int_0^t \chi_{\rho_n + \sqrt{t-\sigma}} d\sigma \\
&\geq C f(\phi_n)^{p^-} \int_0^{\rho_n^2/2} \chi_{\rho_n} d\sigma \\
&\geq C f(\phi_n)^{p^-} \rho_n^2 \chi_{\rho_n}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^r} &\geq Cf(\phi_n)^{p^-}\rho_n^2\|\chi_{\rho_n}\|_{L^r}\\ &= C\omega_N^{1/r}f(\phi_n)^{p^-}\rho_n^{2+N/r}\\ &\geq C\omega_N^{1/r}e^{n/r}\phi_n^{p^*}(\phi_n^{-1}n^{-2})^{p^*}\\ &= \omega_N^{1/r}Ce^{n/r}n^{-2p^*}.\end{aligned}$$

Como o lado direito tende ao infinito quando $n \to +\infty$, concluímos que $u \notin L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$, e temos uma contradição.

Caso $r = 1$: Assuma que $\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*}F_2(\sigma)d\sigma = +\infty$. Pelo Lema 4.2.6, existe uma sequência $\{s_k\}_{k\geq 0}$ tal que $s_{k+1} \geq \theta s_k$, para algum $\theta > 1$, e $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k^{-(1+2/N)}f(s_k)^{p^-} = +\infty$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que $B_{3\delta} \subset \Omega$ e considere uma sequência $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$, com $\psi_n^N = n^2 s_{k_n+1} > 0$ (a sequência $\{k_n\}_{n\geq 1}$ será escolhida posteriormente) tal que $1/\psi_n < \delta$ para $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Agora, argumentamos por contradição e assumimos que para cada $u_0 \in L^1(\Omega)$ existe uma solução local do problema (4.1). Defina $u_0 = 2^N c_N^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}\psi_n^N\chi_{1/\psi_n}$, onde c_N é a constante do Lema 2.4.4(i). Note que

$$\|u_0\|_{L^1} \leq 2^N c_N^{-1}\omega_N\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < \infty.$$

Assim, existe $u \in L^\infty((0,T), L^1(\Omega))$ uma solução do problema (4.1) com $u(0) = u_0$, para algum $T > 0$. Pelo Lema 2.4.4(i) temos

$$S(\sigma)u_0 \geq 2^N c^{-1}n^{-2}\psi_n^N S(\sigma)\chi_{1/\psi_n} \geq n^{-2}\sigma^{-N/2}\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}},$$

para $1/\psi_n \leq \sqrt{\sigma} \leq \delta$ e $n \geq n_0$. Como f é não decrescente, temos

$$\begin{aligned}u(t) &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(u(\sigma))^{p(\cdot)}d\sigma\\ &\geq \int_0^t S(t-\sigma)\min\left\{f(u(\sigma))^{p^+}, f(u(\sigma))^{p^-}\right\}d\sigma\\ &\geq \int_0^t S(t-\sigma)\min\left\{[f(S(\sigma)u_0)]^{p^+}, [f(S(\sigma)u_0)]^{p^-}\right\}d\sigma\\ &\geq \int_{1/\psi_n^2}^t S(t-\sigma)\min\left\{[f(n^{-2}\sigma^{-N/2})\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}]^{p^+}, [f(n^{-2}\sigma^{-N/2})\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}]^{p^-}\right\}d\sigma\\ &\geq \int_{1/\psi_n^2}^t \min\left\{[f(n^{-2}\sigma^{-N/2})]^{p^+}, [f(n^{-2}\sigma^{-N/2})]^{p^-}\right\}S(t-\sigma)\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}d\sigma\end{aligned}$$

para $0 < t < \delta^2$. Defina $g(t) = \min\left\{f(t)^{p^+}, f(t)^{p^-}\right\}$ para todo $t \geq 0$. Do Lema 2.4.4(i), as estimativas $\sqrt{\sigma} + \sqrt{t-\sigma} \geq \sqrt{t}$ para todo $0 \leq \sigma \leq t$, e $1/\psi_n + \sqrt{\sigma} + \sqrt{t-\sigma} \leq 3\sqrt{t}$ para todo $1/\psi_n^2 \leq \sigma \leq t$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq c\int_{1/\psi_n^2}^{t} g(n^{-2}\sigma^{-N/2})\left(\frac{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}+\sqrt{t-\sigma}}\right)^N \chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}+\sqrt{t-\sigma}}d\sigma \\ &\geq Ct^{-N/2}\chi_{1/\psi_n+\sqrt{t}}\int_{1/\psi_n^2}^{t} g(n^{-2}\sigma^{-N/2})\sigma^{N/2}d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, fazendo uma mudança na variável, temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^1} &\geq C\int_{1/\psi_n^2}^{t} g(n^{-2}\sigma^{-N/2})\sigma^{N/2}d\sigma \\ &\geq C\, n^{-(2N+4)/N}\int_{t^{-N/2}}^{s_{k_n+1}} g(\sigma)\sigma^{-2-2/N}d\sigma, \end{aligned} \tag{4.13}$$

para $n \geq n_0$.

Observe que existe $\sigma_0 > 1$ tal que $f(\sigma_0) > 1$. De fato, suponha por contradição que $f(\sigma) \leq 1$ para todo $\sigma > 1$, então

$$+\infty = \int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*}F_2(\sigma)d\sigma \leq \int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*}\sup_{1\leq t\leq \sigma}\frac{f(t)^{p^-}}{t}d\sigma \leq \int_1^{+\infty}\sigma^{-p^*}d\sigma < \infty,$$

o que resulta uma contradição. Portanto, como f é não decrescente, $f(\sigma) > 1$ para $\sigma \geq \sigma_0$.

Fixe $t \in \left(0, \min\left\{T, \sigma_0^{-2/N}\right\}\right)$ e seja $n_1 \geq n_0$ tal que $s_{k_{n_1}} \geq t^{-N/2}$, de (4.13) temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^1} &\geq Cn^{-(2N+4)/N}\int_{t^{-N/2}}^{s_{k_n+1}} f(\sigma)^{p^-}\sigma^{-2-2/N}d\sigma \\ &\geq Cn^{-(2N+4)/N}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n}\int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\sigma)^{p^-}\sigma^{-2-2/N}d\sigma \\ &\geq Cn^{-(2N+4)/N}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)^{p^-}\int_{s_j}^{s_{j+1}}\sigma^{-2-2/N}d\sigma \\ &= Cn^{-(2N+4)/N}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)^{p^-}\left[\frac{s_{j+1}^{-1-2/N}-s_j^{-1-2/N}}{-1-2/N}\right] \\ &= Cn^{-(2N+4)/N}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)^{p^-}s_j^{-1-2/N}\left[1-\left(\frac{s_{j+1}}{s_j}\right)^{-1-2/N}\right] \\ &\geq (1-\theta^{-1-2/N})Cn^{-(2N+4)/N}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)^{p^-}s_j^{-(1+2/N)}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

para todo $n > n_1$. Portanto, como $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k^{-(1+2/N)}f(s_k)^{p^-} = +\infty$ existe uma subsequência $\{k_n\}_{n\geq 1}$ tal que $n^{-(2N+4)/N}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)^{p^-}s_j^{-(1+2/N)}$ diverge como $n \to +\infty$. A partir disso e da estimativa (4.14) temos que $u \notin L^\infty((0,T), L^1(\Omega))$. Isto é uma contradição.

$\square$

Como consequência do Teorema 4.3.1 temos.

Corolário 4.3.3 *Suponha que $f(t) = t$ para $t \geq 0$, e $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ verificando (4.2).*

(i) Se $p^+ < p^*$ (resp. $p^+ = p^*$) então o problema (4.1) tem uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ com $1 \leq r < \infty$ (resp. $r > 1$).

(ii) Se $p^- > p^*$ (resp. $p^- = p^*$) então existe $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ tal que o problema (4.1) não admite uma solução com $1 \leq r < \infty$ (resp. $r = 1$).

Observe que há uma lacuna no Teorema 3.3.1. De fato, se $r > 1$ e $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty$, então $f(t) > 1$ para t suficientemente grande e temos que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} \leq \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty$. Portanto, o Teorema 3.3.1 (ii) analisa o caso $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty$, mas não se aplica quando $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty$ e $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty$. Isso fica claro quando consideramos $f(t) = t$, porque o Teorema 4.3.1 não se aplica quando: $p^- < p^* < p^+$, $r \geq 1$; $p^* = p^+, r = 1$; e $p^* = p^-, r > 1$ (veja Corolário 4.3.3). Assim, nos próximos resultados (Teorema 4.3.4 e Corolário 4.3.6) nos concentramos nestes casos e mostramos que a existência e a não existência de solução ocorrem simultaneamente. Para fazer isso, consideramos os dados iniciais nos conjuntos $\mathcal{I}^\rho(x_0)$ e $\mathcal{I}_\rho(x_0)$ definidos por

$$\mathcal{I}^\rho(x_0) = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x - x_0|^\rho \psi^r(x) \leq K\ \chi_{B_a(x_0)}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } K, a > 0\},$$

$$\mathcal{I}_\rho(x_0) = \{\psi \in L^r(\Omega); \psi \geq 0 \text{ e } |x - x_0|^\rho \psi^r(x) \geq K \chi_{B_a(x_0)}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } K, a > 0\},$$

onde $B_a(x_0) \subset \Omega$ é a bola aberta com raio $a > 0$ centrada em x_0, para $0 < \rho < N$ e $r \geq 1$. A condição $0 < \rho < N$ garante que $|\cdot - x_0|^{-\rho/r} \chi_{B_a(x_0)} \in L^r(\Omega)$. Aqui $\chi_{B_a}(x_0)$ denota a função característica da bola $B_a(x_0)$. Quando $x_0 = 0 \in \Omega$, denotamos $\mathcal{I}^\rho(0) = \mathcal{I}^\rho$ e $\mathcal{I}_\rho(0) = \mathcal{I}_\rho$ e $B_a(0) = B_a$.

Os conjuntos $\mathcal{I}^\rho$ e $\mathcal{I}_\rho$ foram usados em (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022) para mostrar a existência de um segundo valor crítico $\rho^* = 2r/(p-1)$, quando $f(t) = t$ e $p(x) = p > 1$ é uma função constante.

Considerando $u_0 \in \mathcal{I}^\rho(x_0)$ e $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.4 *Seja $f \in C([0, +\infty))$ convexa, não decrescente, $f(0) = 0$, $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ verificando (4.2) e p^* dado por (4.3).*

(i) Suponha que exista $p_0 \geq p^*$ tal que

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} < \infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} < \infty. \tag{4.15}$$

Então, para cada $x_0 \in \Omega$ e $u_0 \in \mathcal{I}^\rho(x_0)$, com $0 < \rho < 2r/(p_0 - 1) \leq N$, o problema (4.1) possui uma solução local não negativa em algum intervalo $(0, T)$. Além disso, $u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$ e $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\rho/2r}$ para todo $t \in (0,T)$ e alguma constante $C > 0$.

(ii) Suponha que exista $p_0 > p^*$ tal que

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} > 0 \text{ ou } \liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} > 0.$$

Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que para cada $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$, com $2r/(p_0 - 1) < \rho < N$, o problema (4.1) não possui solução local não negativa.

Observação 4.3.5 *A seguir fazemos alguns comentários sobre o Teorema 4.3.4.*

(a) Como $p_0 > p^*$ podemos concluir que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p+} \leq \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+}$. Isso significa que a condição (4.15) não exclui o caso $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty$.

(b) Algumas funções convexas e não decrescentes onde é possível aplicar o Teorema 4.3.4 são: $f(t) = t^q$ e $f(t) = (1+t)(\ln(1+t))^q$ para $q > 1$.

(c) As suposições do item (ii) implicam que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty$. Observe que este caso não é coberto pelo Teorema 4.3.1. Provamos a afirmação apenas quando $\liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} > 0$ porque o outro caso é semelhante. Para isto, argumentamos por contradição e assumimos que $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} < \infty$. Então $f(t)^{p^+} \leq Ct^{p^*}$ para t suficientemente grande e alguma constante $C > 0$. Assim, $t^{-p_0} f(t)^{p^+} \leq Ct^{p^* - p_0}$ para t grande e temos uma contradição quando $t \to +\infty$.

Demonstração do Teorema 4.3.4. (i) Como f é convexa e $f(0) = 0$, as funções $t \in (0,+\infty) \mapsto f(t)^{p^+}/t$ e $t \in (0,+\infty) \mapsto f(t)^{p^-}/t$ são não decrescentes. Assim, as funções $G_1, G_2 : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dadas por $G_1(t) = f(t)^{p^+}/t$ e $G_2(t) = f(t)^{p^-}/t$ estão bem definidas.

Usando as condições $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} < \infty$ e $\limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} < \infty$ para $p_0 \geq p^*$, existe $t_0 > 1$ então $f(t)^{p^+} \leq \eta_1 t^{p_0}$ e $f(t)^{p^-} \leq \eta_2 t^{p_0}$ para alguns $\eta_1, \eta_2 > 0$ e todo $t \geq t_0$. Assim,

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-\left(1+\frac{2r}{\rho}\right)} G_1(\sigma)\, d\sigma \leq C + \eta_1 \int_{t_0}^{+\infty} \sigma^{-2-\frac{2r}{\rho}+p_0} d\sigma < \infty, \tag{4.16}$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-\left(1+\frac{2r}{\rho}\right)} G_2(\sigma)\, d\sigma \leq C + \eta_2 \int_{t_0}^{+\infty} \sigma^{-2-\frac{2r}{\rho}+p_0} d\sigma < \infty, \tag{4.17}$$

porque $0 < \rho < 2r/(p_0 - 1) \leq N$.

Sem perda de generalidade assumimos que $x_0 = 0 \in \Omega$. Seja $w(t) = AS(t)u_0$ com $A > 1$, $u_0 \in \mathcal{I}^\rho$, e $\rho < 2r/\left(p_0 - 1\right)$. Logo, existem $K > 0$ e $a > 0$ tais que $u_0 \leq K^{1/r}|\cdot|^{-\rho/r}\chi_{B_a}$. Se $u_0 = 0$, então $u = 0$ é uma solução pois $f(0) = 0$. Suponha agora que $u_0 \neq 0$. Do Lema 2.4.6, temos $\|w(t)\|_{L^\infty} \leq AC_0K^{1/r}t^{-\rho/2r}$, para alguma constante $C_0 > 0$ e todo $t > 0$. Dai,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t S(t-\sigma)f(w(\sigma))^{p(\cdot)}d\sigma \\
\leq\ & \int_0^t S(t-\sigma)[f(w(\sigma))^{p^+} + f(w(\sigma))^{p^-}]d\sigma \\
=\ & \int_0^t S(t-\sigma)G_1(w(\sigma))w(\sigma)d\sigma + \int_0^t S(t-\sigma)G_2(w(\sigma))w(\sigma)d\sigma \\
\leq\ & A\int_0^t G_1(\|w(\sigma)\|_{L^\infty})S(t-\sigma)S(\sigma)u_0d\sigma + A\int_0^t G_2(\|w(\sigma)\|_{L^\infty})S(t-\sigma)S(\sigma)u_0d\sigma \\
\leq\ & AS(t)u_0\int_0^t G_1(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r})d\sigma + AS(t)u_0\int_0^t G_2(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r})d\sigma \\
=\ & w(t)\int_0^t G_1(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r})d\sigma + w(t)\int_0^t G_2(AC_0K^{1/r}\sigma^{-\rho/2r})d\sigma \\
=\ & w(t)(AC_0K^{1/r})^{2r/\rho}\left(\tfrac{2r}{\rho}\right)\Bigg\{\int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G_1(\sigma)d\sigma \\
& + \int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G_2(\sigma)d\sigma\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Ao combinar as limitações (4.16) e (4.17) com as informações fornecidas acima e assumindo $T > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(w,u_0) &= S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\,f(w(\sigma))^{p(\cdot)}\,d\sigma \\
&\leq S(t)\,u_0 + w(t)(AC_0K^{1/r})^{2r/\rho}\left(\frac{2r}{\rho}\right)\Bigg\{\int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G_1(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G_2(\sigma)d\sigma\Bigg\} \\
&= \Bigg\{\frac{1}{A} + (AC_0K^{1/r})^{2r/\rho}\left(\frac{2r}{\rho}\right)\Bigg\{\int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G_1(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_{t^{-\rho/2r}AC_0K^{1/r}}^{+\infty}\sigma^{-(1+\frac{2r}{\rho})}G_2(\sigma)d\sigma\Bigg\}\Bigg\}w(t) \\
&\leq w(t),
\end{aligned}$$

para $t \in (0,T)$. Logo, $\mathfrak{F}(w,u_0) \leq w$ em $(0,T)$ e w é uma supersolução de (4.1) em $(0,T)$.

Do Lema 4.2.2, concluímos que existe uma solução do problema (4.1) tal que $0 \leq u \leq w$ em $(0,T)$. Além disso, $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|w(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\rho/2r}$ para $t \in (0,T)$ e alguma constante $C > 0$.

(ii) Assuma primeiro que $\liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-p_0}f(t)^{p^+} > 0$, $p_0 > p^*$ e $2r/(p_0-1) < \rho < N$. Como p é uma função contínua, consideramos $\zeta = p^+ - \delta > 0$ e o conjunto $\Omega_1 = p^{-1}(\zeta, +\infty) \subset \Omega$, a pré-imagem de $(\zeta, +\infty)$, para δ suficientemente pequeno tal que

$$p_0 > \frac{p^* p^+}{\zeta} > p^* \text{ e } \rho > \frac{2r}{(\zeta p_0/p^+ - 1)} > \frac{2r}{(p_0 - 1)}.$$

Escolha um $x_0 \in \Omega_1$ e considere $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$, ou seja $u_0 \geq K^{1/r}|\cdot - x_0|^{-\rho/r}\chi_{B_a(x_0)} = v_0$, onde $B_a(x_0) \subset \Omega_1$. Observe que $v_0 \in L^r(\Omega)$ uma vez que $0 < \rho < N$.

Argumentamos por contradição e assumimos que existe uma solução local não negativa u de (4.1) com condição inicial $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$, isto é

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma \tag{4.18}$$

para $t \in (0, T)$, e $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ para algum $T > 0$. Das propriedades do núcleo de calor e (4.18), temos que

$$\begin{aligned} u(t) &\geq S_{\Omega_1}(t)u_0 + \int_0^t S_{\Omega_1}(t-\sigma) f(u(\sigma))^{p(\cdot)} d\sigma \\ &\geq S_{\Omega_1}(t)v_0 + \int_0^t S_{\Omega_1}(t-\sigma) \min\left\{ f(u(\sigma))^{p^+}, f(u(\sigma))^{\zeta} \right\} d\sigma \end{aligned} \tag{4.19}$$

para $t \in (0, T)$. Observe que o Lema 2.4.6 implica que $S_{\Omega_1}(t)v_0 \in L^\infty(\Omega_1)$ para todo $t > 0$. Além disso, pelo Lema 2.4.4(ii), temos que $S_{\Omega_1}(t)v_0 \geq c'_N t^{-\frac{\rho}{2r}} \chi_{B_{\sqrt{t}}(x_0)}$, para todo $0 < t < \min\{(a/3)^2, T\}$. Assim,

$$\|S_{\Omega_1}(t)v_0\|_{L^\infty} \geq c'_N t^{-\rho/2r}, \tag{4.20}$$

para todo $0 < t < \min\{(a/3)^2, T\}$.

Como $\liminf_{t \to +\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} > 0$ com $p_0 > p^* p^+/\zeta$ existe uma constante $\eta > 0$ tal que $f(t)^{p^+} \geq \eta t^{p_0} \geq 1$ para $t \geq t_0 \geq 1$ para alguma constante t_0. De (4.20), vemos que existe τ_0 tal que $\|S_{\Omega_1}(\tau)v_0\|_{L^\infty} \geq t_0$ para todo $0 < \tau \leq \tau_0$. Usando novamente (4.20), temos

$$\begin{aligned} \int_{\|S_{\Omega_1}(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\min\left\{ f(\sigma)^{p^+}, f(\sigma)^{\zeta} \right\}} &= \int_{\|S_{\Omega_1}(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)^{\zeta}} \\ &\leq \eta^{-\zeta/p^+} \int_{\|S_{\Omega_1}(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{p_0\zeta/p^+}} \\ &= \frac{\eta^{-\zeta/p^+}}{(p_0\zeta/p^+ - 1)} \|S_{\Omega_1}(\tau)v_0\|_{L^\infty}^{1 - p_0\zeta/p^+} \\ &\leq \frac{\eta^{-\zeta/p^+}(c'_N)^{1-p_0\zeta/p^+}}{(p_0\zeta/p^+ - 1)} \tau^{-\rho(1 - p_0\zeta/p^+)/2r}. \end{aligned}$$

Portanto, de (4.19) e da Proposição 4.2.5, temos

$$\begin{aligned} 1 &\geq 2^{-p^+}\tau \left(\int_{\|S_{\Omega_1}(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\min\left\{ f(\sigma)^{p^+}, f(\sigma)^{\zeta} \right\}} \right)^{-1} \\ &\geq 2^{-p^+} \eta^{\zeta/p^+} (p_0\zeta/p^+ - 1)(c'_N)^{(p_0\zeta/p^+ - 1)} \tau^{1 - \rho(p_0\zeta/p^+ - 1)/2r} \end{aligned}$$

para todo $0 < \tau \leq \min\{\tau_0, (a/3)^2, T\}$. Isto é uma contradição para τ suficientemente pequeno, já que $1 - \rho(p_0\zeta/p^+ - 1)/2r < 0$.

Quando $\liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} > 0$ argumentamos como no caso anterior. Seja $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$, isto é $u_0 \geq K^{1/r}|\cdot - x_0|^{-\rho/r}\chi_{B_a(x_0)} = v_0$, onde $B_a(x_0) \subset \Omega$ e supomos que existe uma solução local não negativa u verificando (4.18). Como na derivação de (4.19) e (4.20) obtemos

$$u(t) \geq S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\sigma) \min\left\{f(u(\sigma))^{p^+}, f(u(\sigma))^{p^-}\right\} d\sigma, \tag{4.21}$$

e

$$\|S(t)v_0\|_{L^\infty} \geq c'_N t^{-\rho/2r}, \tag{4.22}$$

para todo $0 < t < \min\{(a/3)^2, T\}$.

Como $p_0 > p^*$ tal que $\liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^-} > 0$. Assim, existe uma constante $\eta > 0$ tal que $f(t)^{p^-} \geq \eta t^{p_0} \geq 1$ para $t \geq t_0 \geq 1$ para alguma constante t_0. De (4.22), vemos que existe τ_0 tal que $\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty} \geq t_0$ para todo $0 < \tau \leq \tau_0$. Usando novamente (4.22)

$$\begin{aligned}
\int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\min\{f(\sigma)^{p^+}, f(\sigma)^{p^-}\}} &= \int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)^{p^-}} \\
&\leq \tfrac{1}{\eta} \int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{p_0}} \\
&= \tfrac{1}{\eta(p_0-1)} \|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}^{1-p_0} \\
&\leq \tfrac{(c'_N)^{1-p_0}}{\eta(p_0-1)} \tau^{-\rho(1-p_0)/2r}.
\end{aligned}$$

Assim, de (4.21) e da Proposição 4.2.5 segue-se

$$\begin{aligned}
1 &\geq 2^{-p^+}\tau \left(\int_{\|S(\tau)v_0\|_{L^\infty}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\min\{f(\sigma)^{p^+}, f(\sigma)^{p^-}\}} \right)^{-1} \\
&\geq 2^{-p^+}\eta(p_0-1)(c'_N)^{(p_0-1)} \tau^{1-\rho(p_0-1)/2r}
\end{aligned}$$

para todo $0 < \tau \leq \min\{\tau_0, (a/3)^2, T\}$. Isto é uma contradição para τ suficientemente pequeno, pois $1 - \rho(p_0 - 1)/2r < 0$.

□

Quando p é uma função constante, ou seja $p(x) = p^- = p^+$ $(x \in \Omega)$, é possível aplicar o Teorema 4.3.1. Assim, assumindo $p^- < p^+$ obtemos.

Corolário 4.3.6 *Suponha que $f(t) = t$, $t \geq 0$, $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ verificando (4.2), e $p^- < p^+$.*

(i) Se $p^- < p^* \leq p^+$, então o problema (4.1) tem uma solução local para cada $x_0 \in \Omega$ e $u_0 \in \mathcal{I}^\rho(x_0)$, com $0 < \rho < 2r/(p_0 - 1)$ para cada $p_0 \geq p^+$ e $p_0 > p^*$.

(ii) Se $p^- \leq p^* < p^+$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que para cada $u_0 \in \mathcal{I}_\rho(x_0)$, com $2r/(p_0-1) < \rho < N$ e $p^+ \geq p_0 > p^*$, o problema (4.1) não admite uma solução.

Observação 4.3.7 *Suponha que $f(t) = t, t \geq 0$. Como foi mencionado anteriormente, o Corolário 4.3.3 não cobre os casos: $p^- < p^* < p^+, r \geq 1$; $p^* = p^+, r = 1$; e $p^* = p^-, r > 1$. Esses casos são analisados no Corolário 4.3.6.*

Resultados sobre a unicidade para $f(t) = t$ com $p(x) = p > 1$ uma função constante foram obtidos em (BREZIS; CAZENAVE, 1996), (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022),(LAISTER; SIERŻĘGA, 2020), (TERRANEO, 2002), (WEISSLER, 1980). Como em (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022) e (LAISTER; SIERŻĘGA, 2020) assumimos que $f \in C([0, +\infty))$ é localmente Lipschtiz, não decrescente e definimos a função $\mathcal{G} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dado por

$$\mathcal{G}(t) = \sup_{\substack{0 \leq u,v \leq t \\ u \neq v}} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}, \text{ para } t > 0, \ \mathcal{G}(0) = 0.$$

Nosso resultado de unicidade é o seguinte.

Teorema 4.3.8 *Sejam $f \in C([0, +\infty))$ localmente Lipschitz, não decrescente, $f(0) = 0$, e $p \in C(\Omega, (1, +\infty))$ satisfazendo (4.2). O problema (4.1) admite uma única solução na classe*

$$\left\{ u \in L^\infty\left((0,T), L^r(\Omega)\right) \cap L^\infty_{loc}\left((0,T), L^\infty(\Omega)\right); \sup_{t \in (0,T)} t^{\alpha/2r} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty \right\}, \tag{4.23}$$

para $\alpha > 0$ se a seguinte condição integral

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\alpha)} \mathcal{G}(\sigma) \left[f(\sigma)^{p^+-1} + f(\sigma)^{p^--1} \right] d\sigma < \infty \tag{4.24}$$

é satisfeita.

Observação 4.3.9 *A seguir fazemos alguns comentários sobre o Teorema 4.3.8.*

(a) A solução obtida no Teorema 4.3.1 (i) para $u_0 \in L^r(\Omega)$ pertence ao conjunto definido em (4.23) com $\alpha = N$, veja a Observação 4.1.2.

(b) A solução dada pelo Teorema 4.3.4 (i) para $u_0 \in \mathcal{I}^\rho(x_0) \subset L^r(\Omega)$ está na classe definida em (4.23) para $\alpha = \rho$.

(c) Quando $f(t) = t$ para $t \geq 0$ obtemos $\mathcal{G}(t) = 1$. Então, a condição (4.24) é verificada para $p^+ < 1 + 2r/\alpha$. Em particular, a solução obtida no Corolário 4.3.3 (i) é única na classe definida por (4.23), porque $p^+ < p^* = 1 + 2r/N$. Por outro lado, a solução do Corolário 4.3.6 (i) é única na classe definida por (4.23) pois $p_0 < 1 + 2r/\rho$ e $p_0 \geq p^+$.

Demonstração do Teorema 4.3.8.

Suponha que o problema (4.1) tem duas soluções locais u e v na classe (4.23) definidas em algum intervalo $(0,T)$ com dados iniciais u_0 e v_0 respectivamente, ou seja, u, v pertencem ao conjunto

$$\left\{ z \in L^{\infty}\left((0,T), L^{r}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}_{loc}\left((0,T), L^{\infty}(\Omega)\right); \sup_{t\in(0,T)} t^{\alpha/2r} \|z(t)\|_{L^{\infty}} < C_1 \right\},$$

para alguma constante $C_1 > 0$,

$$u(t) = S(t)\, u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\, f(u(\sigma))^{p(\cdot)}\, d\sigma \tag{4.25}$$

e

$$v(t) = S(t)\, v_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\, f(v(\sigma))^{p(\cdot)}\, d\sigma. \tag{4.26}$$

Observe que

$$f(u(x,\sigma))^{p(x)} - f(v(x,\sigma))^{p(x)} = p(x) w^{p(x)-1} \left[f(u(x,\sigma)) - f(v(x,\sigma)) \right],$$

onde $w = \theta f(u(x,\sigma)) + (1-\theta) f(v(x,\sigma))$, $\theta \in [0,1]$ para q.t.p. $x \in \Omega, 0 < \sigma < t < T$. Além disso, como f é não decrescente temos

$$\left| \frac{f(u(x,\sigma)) - f(v(x,\sigma))}{u(x,\sigma) - v(x,\sigma)} \right| = \frac{f(u(x,\sigma)) - f(v(x,\sigma))}{u(x,\sigma) - v(x,\sigma)} \leq \mathcal{G}\left(C_1 \sigma^{-\alpha/2r}\right).$$

Assim, subtraindo (4.26) de (4.25), e usando a estimativa (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - v(t)\|_{L^r} \\
\leq\ & \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + \left\| \int_0^t S(t-\sigma) \left[f(u(\sigma))^{p(\cdot)} - f(v(\sigma))^{p(\cdot)} \right] d\sigma \right\|_{L^r} \\
\leq\ & \|u_0 - v_0\|_{L^r} + p^+ \int_0^t \left\| S(t-\sigma) \max\left\{ f(u(\sigma))^{p(\cdot)-1}, f(v(\sigma))^{p(\cdot)-1} \right\} \left[f(u(\sigma)) - f(v(\sigma)) \right] \right\|_{L^r} d\sigma \\
\leq\ & \|u_0 - v_0\|_{L^r} + p^+ \int_0^t \left\| \frac{f(u(\sigma)) - f(v(\sigma))}{u(\sigma) - v(\sigma)} \right\|_{L^\infty} \left\| S(t-\sigma) \max\left\{ f(u(\sigma))^{p(\cdot)-1}, f(v(\sigma))^{p(\cdot)-1} \right\} \times \right. \\
& \left. (u(\sigma) - v(\sigma)) \right\|_{L^r} d\sigma \\
\leq\ & \|u_0 - v_0\|_{L^r} + p^+ \int_0^t \mathcal{G}\left(C_1 \sigma^{-\alpha/2r}\right) \left\| \max\left\{ f(\|u(\sigma)\|_{L^\infty})^{p(\cdot)-1}, f(\|v(\sigma)\|_{L^\infty})^{p(\cdot)-1} \right\} \right\|_{L^\infty} \times \\
& \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r} d\sigma \\
\leq\ & \|u_0 - v_0\|_{L^r} + p^+ \int_0^t \mathcal{G}\left(C_1 \sigma^{-\alpha/2r}\right) \left[f(C_1 \sigma^{-\alpha/2r})^{p^+-1} + f(C_1 \sigma^{-\alpha/2r})^{p^--1} \right] \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r} d\sigma.
\end{aligned}$$

Pela condição (4.24) e pela desigualdade de Gronwall (veja Lema 2.4.13) obtemos

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - v(t)\|_{L^r} \\
\leq\ & \|u_0 - v_0\|_{L^r} \exp\left[p^+ \int_0^T \mathcal{G}\left(C_1 \sigma^{-\alpha/2r}\right) \left[f(C_1 \sigma^{-\alpha/2r})^{p^+-1} + f(C_1 \sigma^{-\alpha/2r})^{p^--1} \right] d\sigma \right] \\
=\ & \|u_0 - v_0\|_{L^r} \exp\left[\tfrac{2rp^+ C_1^{2r/\alpha}}{\alpha} \int_{C_1 T^{-\alpha/2r}}^{+\infty} \sigma^{-(1+2r/\alpha)} \mathcal{G}(\sigma) \left[f(\sigma)^{p^+-1} + f(\sigma)^{p^--1} \right] d\sigma \right],
\end{aligned}$$

para $t \in (0,T)$. Portanto, a unicidade segue quando $u_0 = v_0$. $\square$

5 O PROBLEMA PARABÓLICO DE HARDY COM DADOS INICIAIS EM ESPAÇOS DE LEBESGUE UNIFORMEMENTE LOCAIS

Neste capítulo estudamos a equação parabólica com potencial singular, a qual tem sido extensivamente estudada na literatura. Nossa análise produz um resultado de existência local para os dados iniciais em espaços de Lebesgue uniformemente locais. Também estabelecemos condições necessárias e suficientes para a existência local de soluções. Nossas descobertas melhoram significativamente o trabalho recente de Castillo et al. em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022), que consideraram apenas dados iniciais em espaços de Lebesgue e não obtiveram resultados otimais nesse caso.

5.1 INTRODUÇÃO

A existência local de soluções não negativas do problema parabólico não linear singular

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |\cdot|^{-\gamma} f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5.1}$$

com $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente, $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ foi estudado por Castillo et al. em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022). Eles mostraram a existência de um valor crítico

$$p_\gamma^* = 1 + \frac{(2-\gamma)r}{N} \tag{5.2}$$

obtendo o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1 *(CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Teorema 1.2 e 1.4) Sejam* f : $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *uma função contínua, não decrescente e* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$.

(i) Caso $r > 1$

a) Se $\gamma < N/r$, $\limsup_{t \to 0} t^{-(1+\epsilon-\gamma r/N)} f(t) < \infty$ *e* $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) < \infty$, *para algum* $\epsilon \in (0, \gamma r/N)$, *ou* $\gamma > N/r$ *e* $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) < \infty$, *então o problema (5.1) tem uma solução não negativa para cada* $u_0 \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$, *com* $u_0 \geq 0$.

b) Se $\gamma < N/r$ *e* $\limsup_{t \to 0} t^{-(1-\gamma r/N)} f(t) = +\infty$ *ou* $\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) = +\infty$, *então existe* $u_0 \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$ *com* $u_0 \geq 0$ *tal que o problema (5.1) não tem solução não negativa.*

(ii) Caso $r = 1$

a) Se $\limsup_{t \to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) = +\infty$ *ou* $\int_1^{+\infty} G_0(\sigma)\, \sigma^{-[1+(2-\gamma)/N]} d\sigma = +\infty$, *então existe* $u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right), u_0 \geq 0$ *tal que o problema (5.1) não tem solução não negativa.*

b) Se $\limsup_{t \to 0} t^{-(1-\gamma/N+\epsilon)} f(t) < \infty$ *e* $\int_1^{+\infty} G_\epsilon(\sigma)\, \sigma^{-[1+(2-\gamma)/N]} d\sigma < \infty$, *então para cada* $u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right), u_0 \geq 0$, *o problema (5.1) tem uma solução local não negativa.*

Neste caso, os autores consideraram as funções $\Gamma_\epsilon, G_\epsilon : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *dada por* $G_\epsilon(t) = \sup_{0<\sigma\leq t} f(\sigma)/\Gamma_\epsilon(\sigma)$, *onde*

$$\Gamma_\epsilon(t) = \begin{cases} t^{1-\gamma/N+\epsilon} & \text{se} \quad 0 < t \leq 1, \\ t & \text{se} \quad t > 1, \end{cases}$$

para $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Observe que o Teorema 5.1.1 é um resultado quase ótimo porque os itens (a) e (b) em (i) e (ii) não fornecem uma caracterização completa para a existência local no sentido de (LAISTER et al., 2016, Teorema 5.1), isto é,

- Para $\gamma = 0$, o problema (5.1) admite uma solução não negativa para $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ se, e somente se,

$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} < \infty \quad \text{e} \quad \begin{cases} \limsup_{t\to\infty} t^{-p^*_\gamma} f(t) < \infty & \text{se } r > 1, \\ \int_1^\infty t^{-(1+2/N)} F(t) dt < \infty & \text{se } r = 1, \end{cases}$$

  onde $F(t) = \sup_{0\leq\sigma\leq t} f(\sigma)/\sigma$;

também, o caso $\gamma = N/r$ não foi tratado por eles.

Para melhorar esses resultados anteriores, trabalhamos com um espaço maior que os espaços de Lebesgue, os espaços de Lebesgue uniformemente locais denotados por $L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r < \infty$.

Neste capítulo o objetivo principal é analisar a existência de soluções para o problema (5.1). Para tanto, consideramos $f \in C([0, +\infty))$ não decrescente e os dados iniciais no espaço $L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$ o qual é maior que o espaço de Lebesgue $L^r(\mathbb{R}^N)$. Esses espaços são úteis ao lidar com equações em domínios ilimitados. Eles compartilham a propriedade de inclusão $L^{r_1}_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N) \subset L^{r_2}_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$ para $r_1 \geq r_2$, assim como os espaços limitados, e contêm as funções constantes. Nossa abordagem fornece condições necessárias e suficientes para a existência de soluções não negativas para o problema (5.1), isto melhora os resultados apresentados em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022), onde trabalhamos com o espaço denotado por $\mathcal{L}^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$ que é o fecho do espaço das funções limitadas uniformemente contínuas $BUC(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^r_{ul,\rho}(\mathbb{R}^N)$. Para reduzir a notação, escrevemos $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ se $\rho = 1$.

Antes disso, definimos a noção de solução do problema (5.1).

Definição 5.1.2 *Sejam* $\gamma > 0, u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, $1 \leq r < \infty$ *e* $f \in C([0, +\infty))$. *Dizemos que* $u \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$, *para algum* $T > 0$, *é solução do problema (5.1) se verifica*

$$u\left(t\right) = \mathcal{F}\left(u, u_0\right)\left(t\right) := S\left(t\right) u_0 + \int_0^t S\left(t-\sigma\right) \left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(u\left(\sigma\right)\right) d\sigma \tag{5.3}$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^N \times (0,T)$, *onde* $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ *denota o semigrupo de calor.*

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 5.2 apresentamos alguns resultados preliminares para o problema (5.1) e enunciamos os resultados obtidos, em seguida, demonstramos esses teoremas na Seção 5.3.

5.2 RESULTADOS PRELIMINARES

5.2.1 Resultado de existência

Para os resultados da existência local de soluções do problema (5.1), usamos o método de supersolução. Supersolução é entendido no seguinte sentido.

Definição 5.2.1 *Sejam* $\gamma > 0, u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, $1 \leq r < \infty$ *e* $f \in C([0, +\infty))$. *Suponha que* $\overline{u} \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$, *para algum* $T > 0$. *Dizemos que* $\overline{u}$ *é uma supersolução do problema (5.1) se* $\overline{u}(t) \geq \mathcal{F}(\overline{u}, u_0)(t)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N \times (0,T)$.

Lema 5.2.2 *Suponha que* $f \in C([0, +\infty))$ *é não decrescente e* $\gamma > 0$. *Seja* $u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$ *com* $1 \leq r < \infty$. *Então, o problema (5.1) admite uma solução definida em* $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ *se, e somente se, admite uma supersolução em* $\mathbb{R}^N \times (0,T)$.

Demonstração. Pela Definição 5.1.2, qualquer solução de (5.1) é uma supersolução de (5.1). Assim, precisamos apenas mostrar que a existência de uma supersolução $\overline{u}$ para (5.1) implica a existência de uma solução u para (5.1).

Como $\overline{u}$ é uma supersolução de (5.1), $\overline{u} \geq \mathcal{F}(\overline{u}, u_0)$. Além disso, $\mathcal{F}$ é não decrescente em u, pois f é não decrescente e o semigrupo do calor $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tem a propriedade de monotonicidade (ou seja, se $u_0 \geq v_0 \geq 0$ então $S(t)u_0 \geq S(t)v_0$). Considere a sequência $\{u^n\}_{n\geq 0}$, dada por $u^0 = \overline{u}$, e $\mathcal{F}(u^{n-1}, u_0) = u^n$ para cada $n \geq 1$. Então a sequência $\{u^n\}_{n\geq 0}$ é não crescente q.t.p. em $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ e $\overline{u} \geq u^n \geq u^{n+1} \geq 0$. Seja $u(x,t) = \lim_{n\to+\infty} u^n(x,t)$, sempre que existir. Então, a partir da continuidade da função não decrescente f, a monotonicidade do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, e pela aplicação do Teorema da convergência monótona (veja Teorema 2.1.5) podemos concluir que $u = \lim_{n\to+\infty} u^n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u^{n-1}, u_0) = \mathcal{F}(u, u_0)$. Devido à construção da sequência é possível concluir que $u = \mathfrak{F}(u, u_0)$ e $0 \leq u \leq \overline{u}$. Além disso, como $\overline{u} \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ concluímos que $u \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$. □

Lema 5.2.3 *Sejam* $0 < \gamma < N$ *e* $1 < q_1, q_2 \leq \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{q_1} \leq 1,$$

com $1 < m < N/\gamma$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *que depende de* m, q_1 *e* q_2 *tal que*

$$\left\| S(t)\left(|\cdot|^{-\gamma}\psi\right)\right\|_{L^{q_2}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{N}{2m}} \|\psi\|_{L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)}$$

para $t \in (0,1)$ *e* $\psi \in L^{q_1}_{ul}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Demonstração. Como $|\cdot|^{-\gamma} \in L^m_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de Hölder

$$\left\||\cdot|^{-\gamma}\psi\right\|_{L^s_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq \left\||\cdot|^{-\gamma}\right\|_{L^m_{ul}(\mathbb{R}^N)} \|\psi\|_{L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)},$$

onde $1/s = 1/m + 1/q_1$. Então, pelo efeito regularizante do semigrupo de calor, veja Lema 2.4.8(i), segue

$$\begin{aligned}
\left\| S(t)\left(|\cdot|^{-\gamma}\psi\right)\right\|_{L^{q_2}_{ul}(\mathbb{R}^N)} &\leq Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q_2}\right)} \left\||\cdot|^{-\gamma}\psi\right\|_{L^s_{ul}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{N}{2m}} \left\||\cdot|^{-\gamma}\right\|_{L^m_{ul}(\mathbb{R}^N)} \|\psi\|_{L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{N}{2m}} \|\psi\|_{L^{q_1}_{ul}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

para $0 < t \leq 1$. □

5.2.2 Resultado de não existência

O problema (5.1) num domínio suave limitado $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ foi também estudado em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022). Mais precisamente, eles consideram o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |\cdot|^{-\gamma} f(u) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

com $u_0 \in L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \infty$, e estabeleceram o seguinte resultado, veja (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Teorema 1.2 (i) e Teorema 1.4 (i)).

Proposição 5.2.4 *Seja $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função contínua e não decrescente, $1 \leq r < \infty$ e $0 < \gamma < \min\{2, N\}$. O problema (5.4) admite uma solução não negativa para $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ se, e somente se,*

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) < \infty \text{ se } r > 1,$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p_\gamma^*} F(\sigma) d\sigma < \infty \text{ se } r = 1,$$

onde $F(\sigma) = \sup_{1 \leq t \leq \sigma} f(t)/t$.

Observação 5.2.5 *A parte necessária é mostrada escolhendo um $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$, $1 \leq r < \infty$ apropriado, tal que*

$$\int_\Omega \left(\int_0^t S_\Omega(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(S_\Omega(\sigma)u_0) d\sigma \right)^r dx = +\infty, \text{ para } t \text{ pequeno.} \tag{5.5}$$

5.3 PRINCIPAIS RESULTADOS

Em nosso primeiro resultado, estabelecemos a existência local para o problema (5.1) com condições iniciais em $L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.3.1 *Suponha que $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente, $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, p_γ^* definido por (5.2) e uma das seguintes condições é válida:*

(i) $u_0 \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$ *com* $u_0 \geq 0$ *e*

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+(2-\gamma)/N)} \tilde{F}(\sigma) d\sigma < \infty, \tag{5.6}$$

onde

$$\tilde{F}(t) := \sup_{1\le\sigma\le t} \frac{f(\sigma)}{\sigma}. \tag{5.7}$$

(ii) $r > 1$ *e*

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*_\gamma} f(t) < \infty \quad \textit{se} \;\; u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N) \;\textit{com}\;\; u_0 \ge 0, \tag{5.8}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-p^*_\gamma} f(t) = 0 \quad \textit{se} \;\; u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N) \;\textit{com}\;\; u_0 \ge 0. \tag{5.9}$$

Então, o problema (5.1) possui uma solução não negativa

$$u \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$$

definida em algum intervalo $(0,T)$. *Além disso,* $t^{N/2r}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le C$ *para algum* $C > 0$ *e todo* $t \in (0,T)$.

Observação 5.3.2 *A seguir, fazemos alguns comentários sobre o Teorema 5.3.1.*

(i) *Dado* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$. *O Teorema 5.3.1 implica a existência de uma solução em* $L^\infty((0,T), L^1_{ul}(\mathbb{R}^N))$ *se a condição (5.6) é satisfeito. Neste caso, para* $\gamma = 0$, *Laister e Sierżęga em (LAISTER; SIERŻĘGA, 2020) obtiveram uma solução em* $L^\infty((0,T), L^1(\mathbb{R}^N))$ *assumindo* $f \in C(\mathbb{R})$ *localmente Lipschitz e*

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+2/N)} \overline{F}(\sigma) d\sigma < \infty,$$

com $\overline{F}(t) = \sup_{0<|\sigma|\le t} f(\sigma)/\sigma$ *para* $t > 0$.

(ii) *Seja* $f(t) = t^p$ *para* $t \ge 0$ *e* $p > 1$. *As condições (5.6) e (5.9) são verificadas se* $p < p^*_\gamma$. *Assim, concluímos que, para* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, *o problema (5.1) tem uma solução local para cada* $u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$, $r \ge 1$. *A condição (5.8) é satisfeita para* $p \le p^*_\gamma$, *e neste caso temos apenas soluções para* $u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ *com* $r > 1$.

(iii) *Observe que para* $u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N) \subset L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$, *o Teorema 5.3.1 implica a existência de uma solução no espaço* $L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N))$.

Demonstração do Teorema 5.3.1.

(i) Se $r = 1$.

a) $u_0 \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$. Seja $\nu(t) = \int_{A_1 t^{-N/2}}^{+\infty} \tilde{F}(\sigma)\,\sigma^{-1-\frac{(2-\gamma)}{N}} d\sigma$ para $t \in (0,1)$, onde $A_1 > 0$ será escolhido posteriormente. Por uma mudança de variável temos

$$\int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-\frac{N}{2}}\right)\sigma^{-\frac{\gamma}{2}} d\sigma = \frac{2}{N} A_1^{\frac{2-\gamma}{N}} \int_{A_1 t^{-N/2}}^{+\infty} \tilde{F}(\mu)\,\mu^{-1-\frac{(2-\gamma)}{N}} d\mu = \frac{2}{N} A_1^{\frac{2-\gamma}{N}} \nu(t), \tag{5.10}$$

e como $\tilde{F}$ é não decrescente

$$\frac{2t^{\frac{2-\gamma}{2}}}{2-\gamma}\tilde{F}\left(A_1 t^{-\frac{N}{2}}\right) \leq \frac{2}{N} A_1^{\frac{2-\gamma}{N}} \int_{A_1 t^{-\frac{N}{2}}}^{+\infty} \tilde{F}(\mu)\,\mu^{-1-\frac{(2-\gamma)}{N}} d\mu = \frac{2}{N} A_1^{\frac{2-\gamma}{N}} \nu(t). \tag{5.11}$$

Observe também que

$$\int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-\frac{N}{2}}\right) d\sigma \leq \int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-\frac{N}{2}}\right)\sigma^{-\frac{\gamma}{2}} d\sigma = \frac{2}{N} A_1^{\frac{2-\gamma}{N}} \nu(t), \tag{5.12}$$

para $t \in (0,1)$.

Para obter uma solução para dados iniciais não negativos mostramos que existe uma supersolução não negativa do problema (5.1). Assim, seja $\phi = \max\{u_0, 1\} \geq 1$,

$$w(t) = AS(t)\phi \geq 1,$$

onde $A > 1$. Então, w é uma supersolução de (5.1) em algum intervalo $(0,T)$. De fato, como $\phi \in L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$ pelo Lema 2.4.7(iii), segue-se do Lema 2.4.8(i) que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\|w(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 A t^{-N/2} \|\phi\|_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq A_1 t^{-N/2},$$

para $t > 0$ e $A_1 = C_0 A \|\phi\|_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)}$. Além disso, usando novamente o Lema 2.4.8(i), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|w(t)\|_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 A \|\phi\|_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto,

$$w \in L^\infty((0,\infty), L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Observe que considerando $t = s$ em (5.7) e temos

$$f(s) \leq s\tilde{F}(s), \quad \text{para } s \geq 1. \tag{5.13}$$

Usando as desigualdades (5.13), (5.10), (5.11), (5.12) e Lema 2.4.10, temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t S(t-\sigma)\,|\cdot|^{-\gamma} f(w(\sigma))\,d\sigma \\
\leq\ & \int_0^t S(t-\sigma)\,|\cdot|^{-\gamma} \tilde{F}(AS(\sigma)\phi)\,[AS(\sigma)\phi]d\sigma \\
\leq\ & \int_0^t S(t-\sigma)\,|\cdot|^{-\gamma} \tilde{F}\left(\|AS(\sigma)\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) AS(\sigma)\phi d\sigma \\
\leq\ & \int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right) S(t-\sigma)\,|\cdot|^{-\gamma}\,[AS(\sigma)\phi]d\sigma \\
\leq\ & \bar{C}AS(t)\,\phi t^{\gamma/2}\int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & \bar{C}AS(t)\,\phi 2^{1+\gamma/2}\int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & w(t)\bar{C}2^{\gamma/2+1}\tfrac{2}{N}A_1^{(2-\gamma)/N}\nu(t),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde $\bar{C}$ é a constante do Lema 2.4.10. Na dedução da penúltima desigualdade de (5.14) argumentamos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& t^{\gamma/2}\int_0^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & t^{\gamma/2}\int_0^{t/2} \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
& +t^{\gamma/2}\int_{t/2}^t \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma + 2^{\gamma/2}\tilde{F}\left(A_1(t/2)^{-N/2}\right)\int_{t/2}^t (t-\sigma)^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma + 2^{\gamma/2}\tilde{F}\left(A_1(t/2)^{-N/2}\right)\frac{2}{2-\gamma}(t/2)^{1-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma + 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} \tilde{F}\left(A_1\sigma^{-N/2}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, da formulação (5.3), da desigualdade (5.14) e da condição (5.6), segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(w,u_0) &= S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\,|\cdot|^{-\gamma} f(w(\sigma))\,d\sigma \\
&\leq S(t)\,\phi + w(t)\bar{C}2^{\gamma/2+1}\tfrac{2}{N}A_1^{(2-\gamma)/N}\nu(t) \\
&\leq \left(\frac{1}{A} + \bar{C}\frac{2^{\gamma/2+2}}{N}A_1^{(2-\gamma)/N}\nu(t)\right) w(t) \\
&\leq w(t)\,,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

para $t \in (0,T)$ com $T > 0$ suficientemente pequeno. Assim, $\mathcal{F}(w,u_0) \leq w$ em $(0,T)$ e w é uma supersolução de (5.1) em $(0,T)$.

Portanto, o Lema 5.2.2 garante que o problema (5.1) admite uma solução definida em $(0,T)$ e $0 \leq u(t) \leq w(t)$ para $t \in (0,T)$.

b) Se $u_0 \in \mathcal{L}^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$, a desigualdade (5.14) também é válida. Pelo Lema 2.4.7(iii) implica que $\phi \in \mathcal{L}^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$, segue do Lema 2.4.8(ii) que

$$\|w(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq AC_* t^{-N/2}, \text{ com } 0 < t < t_0,$$

para algum $t_0 = t_0(C_*, \phi)$. Procedendo como na derivação de (5.15) com C_0 substituído por C_*, segue que

$$\mathcal{F}(w, u_0) \leq \left(\frac{1}{A} + \bar{C}\frac{2^{2+\gamma/2}}{N}(AC_*)^{(2-\gamma)/N}\nu(t)\right) w(t),$$

para $0 < t < t_0$. Portanto, por (5.6) e do Lema 2.4.8(ii), podemos considerar $C_* > 0$ suficientemente pequeno tal que se $0 < t < t_0(C_*, \phi)$, de modo que

$$\bar{C}\frac{2^{2+\gamma/2}}{N}(AC_*)^{(2-\gamma)/N}\nu(t) \leq \frac{A-1}{A}. \tag{5.16}$$

Então por (5.16), vemos que w é um supersolução de (5.1). Dai, pelo Lema 5.2.2, o problema (5.1) tem uma solução verificando $0 \leq u(t) \leq w(t)$ para $0 < t < t_0 = T$.

(ii) Caso $r > 1$.

a) $u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$. Analisamos algumas situações.

Caso 1. $2(\gamma - 1)/N < 1/r \leq [N - (2-\gamma)]/N$ e $N \geq 2$.

Seja $\theta = 1/r + (2-\gamma)/N$. Então, $r\theta = 1 + (2-\gamma)r/N = p^*_\gamma$ e $\gamma/N < \theta \leq 1$. Por (5.8) existe $C_0 > 0$ tal que

$$G(t) = \sup_{1 \leq \sigma \leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{r\theta}} \leq C_0, \tag{5.17}$$

para todo $t \geq 1$. Portanto,

$$\eta^{\frac{(2-\gamma)r}{N}} \int_\eta^{+\infty} G(\sigma)\sigma^{-(1+\frac{(2-\gamma)r}{N})} d\sigma \leq \eta^{\frac{(2-\gamma)r}{N}} C_0 \int_\eta^{+\infty} \sigma^{-1-\frac{(2-\gamma)r}{N}} d\sigma = \frac{NC_0}{(2-\gamma)r}. \tag{5.18}$$

Seja $\nu_1(t) = \displaystyle\int_{A_1 t^{-N/(2r)}}^{+\infty} G(\sigma)\,\sigma^{-1-\frac{(2-\gamma)r}{N}} d\sigma$ para $t \in (0,1)$ onde $A_1 > 0$ é uma constante que será escolhida posteriormente. Fazendo uma mudança de variável temos

$$\int_0^t G\left(A_1\sigma^{-\frac{N}{2r}}\right)\sigma^{-\frac{\gamma}{2}} d\sigma = \frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}} \int_{A_1 t^{-\frac{N}{2r}}}^{+\infty} G(\mu)\,\mu^{-1-\frac{(2-\gamma)r}{N}} d\mu = \frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\nu_1(t), \tag{5.19}$$

e como G é não decrescente

$$\frac{2t^{\frac{2-\gamma}{2}}}{2-\gamma} G\left(A_1 t^{-\frac{N}{2r}}\right) \leq \frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}} \int_{A_1 t^{-\frac{N}{2r}}}^{+\infty} G(\mu)\,\mu^{-1-\frac{(2-\gamma)r}{N}} d\mu = \frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\nu_1(t). \tag{5.20}$$

Observe também que

$$\int_0^t G\left(A_1\sigma^{-\frac{N}{2r}}\right)d\sigma \le \int_0^t G\left(A_1\sigma^{-\frac{N}{2r}}\right)\sigma^{-\frac{\gamma}{2}}d\sigma = \frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\nu_1(t), \tag{5.21}$$

para $t \in (0,1)$.

Seja $\phi = \max\{u_0, 1\} \ge 1$, $A > 1$,

$$w(t) = A(S(t)\phi^r)^{1/r} \ge 1, \tag{5.22}$$

para $t \ge 0$. Pelo Lema 2.4.7(iii) temos que $\phi \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$, segue do Lema 2.4.8(ii) que

$$\|w(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le C_* A t^{-N/2r}\|\phi^r\|^{1/r}_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)} = A_1 t^{-N/2r},$$

onde $A_1 = C_* A\|\phi^r\|^{1/r}_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)}$, e

$$\|w(t)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} = A\|S(t)\phi^r\|^{1/r}_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)} \le C_* A\|\phi^r\|^{1/r}_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)},$$

para $t \in (0,T)$ com T suficientemente pequeno. Assim,

$$w \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Agora, mostramos que w é uma supersolução de (5.1) em $(0,T)$, para $T > 0$ possivelmente pequeno.

Note que, considerando $t = s \ge 1$ em (5.17), temos que

$$f(s) \le s^{r\theta}G(s), \quad s \ge 1, \tag{5.23}$$

De (5.23), Lema 2.4.9(ii), Lema 2.4.8(ii) e Lema 2.4.10 obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(w(\sigma))d\sigma \\
&\le \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} G(w(\sigma))w^{r\theta}(\sigma)d\sigma \\
&\le A^{p^*_\gamma}\int_0^t G(\|w(\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}(S(\sigma)\phi^r)^\theta d\sigma \\
&\le A^{p^*_\gamma}\int_0^t G(A_1\sigma^{-N/2r})S(t-\sigma)\left[|\cdot|^{-\gamma/\theta}S(\sigma)\phi^r\right]^\theta d\sigma \\
&\le A^{p^*_\gamma}\int_0^t G(A_1\sigma^{-N/2r})\left[S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma/\theta}S(\sigma)\phi^r\right]^\theta d\sigma \\
&\le \bar{C}[w(t)]^{r\theta}t^{\gamma/2}\int_0^t G(A_1\sigma^{-N/2r})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Observe que pelo Lema 2.4.8(ii) obtemos

$$[w(t)]^{r\theta} \le \|w(t)\|^{r\theta-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}w(t) \le \left[A_1 t^{-N/(2r)}\right]^{(2-\gamma)r/N} w(t) \le A_1^{p^*_\gamma-1}t^{-(2-\gamma)/2}w(t), \tag{5.25}$$

e por (5.19), (5.20), (5.21) e (5.18)

$$\begin{aligned}
& t^{\gamma/2}\int_0^t G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & t^{\gamma/2}\int_0^{t/2} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
& +t^{\gamma/2}\int_{t/2}^{t} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma + 2^{\gamma/2}G\left(A_1(t/2)^{-N/2r}\right)\int_{t/2}^{t}(t-\sigma)^{-\gamma/2}d\sigma \\
=\ & 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma + 2^{\gamma/2}G\left(A_1(t/2)^{-N/2r}\right)\frac{2}{2-\gamma}(t/2)^{1-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma + 2^{\gamma/2}\int_0^{t/2} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2+1}\int_0^{t} G\left(A_1\sigma^{-N/2r}\right)\sigma^{-\gamma/2}d\sigma \\
=\ & 2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{(2-\gamma)r/N}\int_{A_1t^{-N/2r}}^{+\infty} G(\sigma)\sigma^{-\left(1+\frac{(2-\gamma)r}{N}\right)}d\sigma \\
\leq\ & 2^{\gamma/2+1}\frac{2C_0}{2-\gamma}t^{(2-\gamma)/2}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Portanto, pela desigualdade (5.25) e (5.26) em (5.24) segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(w,u_0) &= S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)\,|\cdot|^{-\gamma} f(w(\sigma))\,d\sigma \\
&\leq (S(t)\,\phi^r)^{1/r} + \frac{2^{\gamma/2+2}\bar{C}C_0A_1^{p_\gamma^*-1}}{2-\gamma}w(t) \\
&\leq \left(\frac{1}{A} + \frac{2^{\gamma/2+2}\bar{C}C_0A_1^{p_\gamma^*-1}}{2-\gamma}\right)w(t)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

para $t \in (0,T)$.

Como $A_1 = C_*A\|\phi^r\|_{L^1_{ul}(\mathbb{R}^N)}^{1/r}$ depende de C_* é possível escolher A_1 suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{A} + \frac{2^{\gamma/2+2}\bar{C}C_0A_1^{p_\gamma^*-1}}{2-\gamma} \leq 1 \tag{5.28}$$

(veja Lema 2.4.8(ii)). Assim, de (5.27) e (5.28), $\mathcal{F}(w,u_0) \leq w$ em $(0,T)$ e w é uma supersolução de (5.1) em $(0,T)$.

Portanto, o Lema 5.2.2 garante que o problema (5.1) admite uma solução definida em $(0,T)$ e $0 \leq u(t) \leq w(t)$ para $t \in (0,T)$.

Caso 2: $N = 1$ ou $[N-(2-\gamma)]/N < 1/r$ e $N \geq 2$. Então, $1/r + (2-\gamma)/N > 1$. De (5.17) (com $\theta = 1$) e (5.8) temos

$$
\begin{aligned}
G(t) &= \sup_{1\le\sigma\le t}\frac{f(\sigma)}{\sigma^r}\\
&\le \sup_{1\le\sigma\le t}\left(\frac{f(\sigma)}{\sigma^r}\frac{(t^r)^{\frac{1}{r}+\frac{2-\gamma}{N}-1}}{(\sigma^r)^{\frac{1}{r}+\frac{2-\gamma}{N}-1}}\right)\\
&= \sup_{1\le\sigma\le t}\left(\frac{f(\sigma)}{\sigma^{1+\frac{(2-\gamma)r}{N}}}\right)t^{1+\frac{r(2-\gamma)}{N}-r}\\
&\le C_0 t^{1+\frac{r(2-\gamma)}{N}-r}.
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

Daí, segue-se que

$$
\eta^{r-1}\int_\eta^{+\infty} G(\sigma)\sigma^{-[1+\frac{(2-\gamma)r}{N}]}d\sigma \le \eta^{r-1}C_0\int_\eta^{+\infty}\sigma^{-r}d\sigma = \frac{C_0}{r-1}. \tag{5.30}
$$

Argumentando de forma similar ao caso anterior, considerando a função w definida por (5.22), é possível concluir que é uma supersolução do problema (5.1) em algum intervalo $(0,T)$. Argumentamos da seguinte forma: A partir de (5.23) usando o Lema 2.4.10, Lema 2.4.8(ii) e resolvendo de forma similar a (5.26), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t S(t-\sigma)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f(w(\sigma))\,d\sigma\\
\le\ &\int_0^t S(t-\sigma)\left|\cdot\right|^{-\gamma} G(w(\sigma))w^r(\sigma)d\sigma\\
\le\ & A^r\int_0^t G(\|w(\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})S(t-\sigma)\left|\cdot\right|^{-\gamma} S(\sigma)\phi^r d\sigma\\
\le\ & A^r\int_0^t G(A_1\sigma^{-N/2r})S(t-\sigma)\left|\cdot\right|^{-\gamma} S(\sigma)\phi^r d\sigma\\
\le\ & \bar{C}A^r S(t)\phi^r t^{\gamma/2}\int_0^t G(A_1\sigma^{-N/2r})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma\\
\le\ & \bar{C}[w(t)]^r 2^{\gamma/2+1}\int_0^t G(A_1\sigma^{-N/2r})\sigma^{-\gamma/2}d\sigma.
\end{aligned}
$$

Fazendo uma mudança de variável e usando a desigualdade (5.30), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t S(t-\sigma)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f(w(\sigma))\,d\sigma\\
\le\ & \bar{C}\,\|w(t)\|^{r-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\,w(t)2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\int_{A_1t^{-N/2r}}^{+\infty} G(\sigma)\sigma^{-(1+\frac{(2-\gamma)r}{N})}d\sigma\\
\le\ & \bar{C}A_1^{r-1}t^{-\frac{N}{2r}(r-1)}w(t)2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\int_{A_1t^{-N/2r}}^{+\infty} G(\sigma)\sigma^{-(1+\frac{(2-\gamma)r}{N})}d\sigma\\
\le\ & \bar{C}w(t)2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\frac{C_0}{r-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(w,u_0) &= S(t)\,u_0+\int_0^t S(t-\sigma)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f(w(\sigma))\,d\sigma\\
&\le (S(t)\,\phi^r)^{1/r}+\bar{C}2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\frac{C_0}{r-1}w(t)\\
&\le \left(\frac{1}{A}+\bar{C}2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\frac{C_0}{r-1}\right)w(t)
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

para $t \in (0,T)$.

Como A_1 depende de C_*, é possível escolher $A_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{A} + \bar{C}2^{\gamma/2+1}\frac{2r}{N}A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}}\frac{C_0}{r-1} \leq 1. \tag{5.32}$$

Assim, de (5.31) e (5.32), $\mathcal{F}(w,u_0) \leq w$ em $(0,T)$ e w é uma supersolução de (5.1) em $(0,T)$, e podemos concluir usando o Lema 5.2.2 que o problema (5.1) admite uma solução definida em $(0,T)$ com $0 \leq u(t) \leq w(t)$ para $t \in (0,T)$.

Caso 3. $1/r \leq 2(\gamma-1)/N$ e $N \geq 2$. Escolha $\eta > 1$ tal que

$$\frac{1}{r} \leq \frac{2(\gamma-1)}{N} < \frac{1}{\eta} < \frac{N-(2-\gamma)}{N} \text{ e } N \geq 2. \tag{5.33}$$

Como $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^\eta_{ul}(\mathbb{R}^N)$ para $r > \eta$, por hipótese temos que $\phi \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ então $\phi \in \mathcal{L}^\eta_{ul}(\mathbb{R}^N)$. Logo, de (5.33), como no Caso 1, segue que existe uma supersolução para o problema (5.1), dada por $w(t) = A(S(t)\phi^\eta)^{1/\eta}$ em $(0,T)$ com $w \in L^\infty((0,T), L^\eta_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Podemos concluir, usando o Lema 5.2.2, que o problema (5.1) admite uma solução definida em $(0,T)$, ou seja, $\overline{u} \in L^\infty((0,T), L^\eta_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ com $0 \leq \overline{u}(t) \leq w(t)$ para $t \in (0,T)$.

Como $\phi \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ então $\phi^\eta \in \mathcal{L}^{r/\eta}_{ul}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Lema 2.4.8(ii), temos que

$$\|\overline{u}(t)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq \|w(t)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} = A\,\|(S(t)\phi^\eta)\|^{1/\eta}_{L^{r/\eta}_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq C.$$

Portanto, o problema (5.1) admite uma solução definida em $(0,T)$ tal que $\overline{u} \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ com $0 \leq \overline{u}(t) \leq w(t)$ para $t \in (0,T)$.

b) Se $u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$. O argumento é similar ao caso anterior. Explicamos apenas alguns detalhes. Dado $\epsilon > 0$. Do limite (5.9) existe $t_1 \geq 1$ tal que

$$t^{-p^*}f(t) \leq \epsilon,$$

para todo $t \geq t_1$. Como $\phi = \max\{u_0, t_1\} \geq t_1$ e $\phi \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$, podemos argumentar como no caso $\mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ considerando no lugar de (5.17) e (5.29)

$$G(t) = \sup_{t_1 \leq \sigma \leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{r\theta}} \leq \epsilon$$

e

$$G(t) = \sup_{t_1 \leq \sigma \leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{r\theta}} \leq \epsilon t^{1+\frac{(2-\gamma)r}{N}-r}$$

para $t \geq t_1$, respectivamente. Além disso, com essas mudanças temos, no lugar de (5.28) e (5.32),

$$\frac{1}{A} + \frac{\bar{C}2^{\gamma/2+2}\epsilon A_1^{p_\gamma^*-1}}{2-\gamma} \leq 1, \quad \frac{1}{A} + \frac{\bar{C}2^{\gamma/2+2}r}{N} A_1^{\frac{(2-\gamma)r}{N}} \frac{\epsilon}{r-1} \leq 1,$$

que é verificado para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

□

Como consequência do Teorema 5.3.1, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.3.3 *Seja* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *uma função contínua e não decrescente, e seja* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$. *O problema (5.1) tem uma solução local não negativa para cada* $u_0 \in \mathcal{L}_{ul}^r(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ *se, e somente se,*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^{+\infty} \sigma^{-[1+(2-\gamma)/N]} F(\sigma) d\sigma < \infty & \text{se } r = 1, \\ \displaystyle\limsup_{t \to +\infty} t^{-p_\gamma^*} f(t) < \infty & \text{se } r > 1, \end{cases}$$

onde $F(t) = \sup_{1 \leq \sigma \leq t} f(\sigma)/\sigma$, $t > 0$.

Observação 5.3.4 *A seguir fazemos alguns comentários sobre o Teorema 5.3.3.*

(i) O Teorema 5.3.3 estende os resultados obtidos para $\gamma = 0$ *em (MIYAMOTO; SUZUKI, 2021, Teorema 5.3)(*$r = 1$*) e (MIYAMOTO; SUZUKI, 2021, Teorema 9.3)(*$r > 1$*).*

(ii) Se $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}_{ul}^r(\mathbb{R}^N)$, $r \geq 1$, *o Teorema 5.3.3 implica que existe uma solução no espaço* $L^\infty((0, T), L_{ul}^r(\mathbb{R}^N))$. *Para obter uma solução em* $L^\infty((0, T), L^r(\mathbb{R}^N))$ *precisamos de uma condição adicional sobre o comportamento de* f *na origem, ou seja,* $\limsup_{t \to 0} t^{-(1+\epsilon-\gamma r/N)} f(t) < \infty$, $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno quando* $\gamma < N/r$, *veja (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022).*

(iii) Nenhuma condição próxima à origem é necessária para f. *Assim, o resultado é semelhante ao obtido em (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Teorema 1.2(i))(*$r > 1$*) e (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA, 2022, Teorema 1.4(i))(*$r = 1$*) para o problema (5.1) em um domínio limitado.*

Demonstração do Teorema 5.3.3.

Caso 1. $r = 1$. $(\Leftarrow)$ Dado $u_0 \in \mathcal{L}_{ul}^1(\mathbb{R}^N) \subset L_{ul}^1(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, pelo Teorema 5.3.1(i) o problema (5.1) tem uma solução não negativa u definida em $(0, T)$.

($\Rightarrow$) Seja $u_0 \in L^1(\Omega)$ a condição inicial não negativa dada na Observação 5.2.5 e seja $\overline{u}_0$ a extensão zero, ou seja, $\overline{u}_0 = u_0$ em Ω e $\overline{u}_0 = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então, $\overline{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1_{ul}(\mathbb{R}^N)$. Suponha por contradição que o problema (5.1) admite uma solução não negativa u com $u(0) = \overline{u}_0$. Como

$$u(t) = S\left(t\right)\overline{u}_0 + \int_0^t S\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(u\left(\sigma\right)\right) d\sigma \geq S(t)\overline{u}_0$$

obtemos

$$u(t) \geq \int_0^t S\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(u\left(\sigma\right)\right) d\sigma \geq \int_0^t S\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(S(\sigma)\overline{u}_0\right) d\sigma.$$

Como $K(x,y;t) \geq K_\Omega(x,y;t)$ (veja (2.8)), $S(t)\overline{u}_0 \geq S_\Omega(t)u_0$, e

$$u(t) \geq \int_0^t S_\Omega\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(S_\Omega(\sigma)u_0\right) d\sigma.$$

A partir disso e (5.5), temos uma contradição.

Caso 2. $r > 1$. ($\Leftarrow$) Dado $u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$. Observe que pelo Teorema 5.3.1(ii) o problema (5.1) tem uma solução não negativa u definida em $(0,T)$.

($\Rightarrow$) Argumentamos por contradição, similarmente ao caso anterior, usando a Observação 5.2.5 para $r > 1$, isto é: Seja $u_0 \in L^r(\Omega)$ a condição inicial não negativa dada na Observação 5.2.5 e seja $\overline{u}_0$ a extensão zero, ou seja, $\overline{u}_0 = u_0$ em Ω e $\overline{u}_0 = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então, $\overline{u}_0 \in L^r(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$. Suponha por contradição que o problema (5.1) admite uma solução não negativa u com $u(0) = \overline{u}_0$.

Como

$$u(t) = S\left(t\right)\overline{u}_0 + \int_0^t S\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(u\left(\sigma\right)\right) d\sigma \geq S(t)\overline{u}_0$$

obtemos

$$u(t) \geq \int_0^t S\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(u\left(\sigma\right)\right) d\sigma \geq \int_0^t S\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(S(\sigma)\overline{u}_0\right) d\sigma.$$

Como $K(x,y;t) \geq K_\Omega(x,y;t)$ (veja (2.8)), $S(t)\overline{u}_0 \geq S_\Omega(t)u_0$, e

$$u(t) \geq \int_0^t S_\Omega\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(S_\Omega(\sigma)u_0\right) d\sigma.$$

Daí, segue que

$$\|u(t)\|^r_{L^r(\Omega)} \geq \int_\Omega \left(\int_0^t S_\Omega\left(t-\sigma\right)\left|\cdot\right|^{-\gamma} f\left(S_\Omega(\sigma)u_0\right) d\sigma\right)^r dx.$$

A partir disso e (5.5), temos uma contradição.

□

Resultados sobre a unicidade para $f(t) = t^p$ para $t \geq 0, p > 1$ foram obtidos em (BREZIS; CAZENAVE, 1996), (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022),(LAISTER; SIERŻĘGA, 2020), (TERRANEO, 2002), (WEISSLER, 1980) (for $\gamma = 0$), e em (CHIKAMI et al., 2023), (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017), (TAYACHI, 2020), para $\gamma > 0$. A noção de unicidade incondicional, ou seja, sem condição adicional em u foi introduzido em (TAYACHI, 2020).

Quando $f(t) = t^p$ com $t \geq 0$, $p > 1$ e $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, Slimene et al. em (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017) mostrou que a solução do problema (5.1) é única na classe $C([0,T], L^r(\mathbb{R}^N))$ se

$$p < p_\gamma^* \quad \text{and} \quad r > \frac{Np}{N-\gamma}. \tag{5.34}$$

Estabelecemos o seguinte resultado de unicidade incondicional.

Teorema 5.3.5 *Sejam $0 < \gamma < \min\{2, N\}$ e $f \in C([0,+\infty))$ verificando*

$$|f(\tau) - f(t)| \leq M(\tau, t)|\tau - t|, \tag{5.35}$$

para $\tau, t \geq 0$ e alguma função $M : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Se

$$\sup_{t\in(0,T)} \|M(u(t), v(t))\|_{L^\alpha_{ul}(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

para $u, v \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N))$ com $\alpha > N/(2-\gamma)$ e $1/\alpha + 1/r + \gamma/N < 1$, então o problema (5.1) tem uma solução única na classe $L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N))$.

Observação 5.3.6 *Suponha $f(t) = t^p$ para todo $t \geq 0$ e $p > 1$. Então a condição (5.35) é satisfeita para $M(\tau, t) = p(\tau^{p-1} + t^{p-1})$. Definindo $\alpha = r/(p-1)$, pelo Teorema 5.3.5 temos que a unicidade é válida em $L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N))$ se a condição (5.34) é verificada.*

Demonstração do Teorema 5.3.5. Sejam $u, v \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N))$ duas soluções de (5.1) com condição inicial $u(0) = v(0) = u_0 \in L^r_{ul}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Então, u e v satisfazem

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(u(\sigma))\,d\sigma, \tag{5.36}$$

$$v(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(v(\sigma))\,d\sigma. \tag{5.37}$$

Subtraindo (5.37) de (5.36), e usando a condição (5.35) temos

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} |f(u(\sigma)) - f(v(\sigma))|\,d\sigma \\ &\leq \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} M(u(\sigma), v(\sigma))|u(\sigma) - v(\sigma)|\,d\sigma. \end{aligned}$$

Como $1/\alpha + 1/r + \gamma/N < 1$ e $1/\alpha + \gamma/N < 2/N$, é possível escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{m} = \frac{\gamma+\epsilon}{N} < 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} + \frac{1}{m} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N}.$$

Assim, pelo Lema 5.2.3 (com $q_2 = r, 1/q_1 = 1/\alpha + 1/r$) e da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
&\|u(t) - v(t)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \int_0^t \left\| S(t-\sigma) |\cdot|^{-\gamma} M(u(\sigma), v(\sigma)) |u(\sigma) - v(\sigma)| \right\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} d\sigma \\
&\leq C \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2\alpha} - \frac{N}{2m}} \|M(u(\sigma), v(\sigma)) [u(\sigma) - v(\sigma)]\|_{L_{ul}^{(1/\alpha+1/r)^{-1}}(\mathbb{R}^N)} d\sigma \\
&\leq C \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2\alpha} - \frac{N}{2m}} \|M(u(\sigma), v(\sigma))\|_{L^\alpha_{ul}(\mathbb{R}^N)} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} d\sigma \\
&\leq C \sup_{\sigma\in(0,T)} \|M(u(\sigma), v(\sigma))\|_{L^\alpha_{ul}(\mathbb{R}^N)} \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2\alpha} - \frac{N}{2m}} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} d\sigma.
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall singular (veja Lema 2.4.14) concluímos que $u = v$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N \times (0,T)$.

□

Resultados de unicidade condicional (ou seja, uma condição adicional ao fato que $u \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})))$ em espaços de Lorentz foram obtidos em (TAYACHI, 2020), em espaços de Lebesgue ponderados em (CHIKAMI; IKEDA; TANIGUCHI, 2022), e em espaços de Lorentz ponderados em (CHIKAMI et al., 2023). Para estabelecer nosso resultado de unicidade condicional, assumimos que $f \in C([0,+\infty))$ é localmente Lipschtiz, não decrescente e definimos $\mathcal{G} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dado por

$$\mathcal{G}(t) = \sup_{\substack{0\leq u,v\leq t \\ u\neq v}} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}, \text{ para } t > 0,\ \mathcal{G}(0) = 0.$$

Esta função foi usada em (CARHUAS-TORRE; CASTILLO; LOAYZA, 2022) e (LAISTER; SIERŻĘGA, 2020) para analisar a unicidade do problema (5.1) para $\gamma = 0$.

Estabelecemos o seguinte resultado de unicidade condicional.

Teorema 5.3.7 *Seja $0 < \gamma < \min\{2, N\}$ e $f \in C([0,+\infty))$ localmente Lipschitz, não decrescente. O problema (5.1) admite uma solução única na classe*

$$\left\{ u \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N));\ \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{N}{2r}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \right\}$$

se $\int_0^T \mathcal{G}^q(C_0 \sigma^{-N/2r}) d\sigma < \infty$ *com* $\gamma/N + 1/r < 1$, $1/q + \gamma/2 < 1$.

Observação 5.3.8 *Se $f(t) = t^p$ para $t \geq 0$ e $p > 1$, então $\mathcal{G}(t) = pt^{p-1}$. Assim, pelo Teorema 5.3.7 a unicidade vale para $p < p^*_\gamma$ e $r > N/(N-\gamma)$.*

Demonstração do Teorema 5.3.7. Sejam $u, v \in L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ soluções de (5.1) com condição inicial $u(0) = v(0) = u_0 \in L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)$ no sentido de que (5.36) e (5.37) são verificados.

Subtraindo (5.37) de (5.36) temos

$$\begin{aligned}
u(t) - v(t) &= \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}[f(u(\sigma)) - f(v(\sigma))]d\sigma \\
&= \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\frac{[f(u(\sigma)) - f(v(\sigma))]}{u(\sigma) - v(\sigma)}[u(\sigma) - v(\sigma)]d\sigma \\
&\leq \int_0^t \left\| \frac{f(u(\sigma)) - f(v(\sigma))}{u(\sigma) - v(\sigma)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}[u(\sigma) - v(\sigma)]d\sigma \\
&\leq \int_0^t \mathcal{G}(C_0\sigma^{-N/2r})S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}[u(\sigma) - v(\sigma)]d\sigma.
\end{aligned}$$

Como $\gamma < N$, $\gamma/N + 1/r < 1$ e $1/q + \gamma/2 < 1$ é possível escolher $1/m = (\gamma + \epsilon)/N$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{r} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} + \frac{N}{2m} < 1.$$

Pelo Lema 5.2.3 (com $q_1 = q_2 = r$) obtemos

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)} \leq \int_0^t \mathcal{G}(C_0\sigma^{-N/2r})(t-\sigma)^{-N/2m}\|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)}d\sigma.$$

Portanto, o resultado segue do Lema de Gronwall singular (veja o Lema 2.4.14). $\square$

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Apresentamos brevemente alguns projetos em curso e trabalhos futuros que surgem naturalmente do que foi discutido nos capítulos anteriores.

6.1 OBSERVAÇÕES FINAIS SOBRE O PRIMEIRO PROBLEMA

Em nosso primeiro resultado, no Teorema 3.3.1, assumindo que $0 < \liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t) < \infty$, $p_0 > p^* = 1 + 2r/N$, $f \in C([0,+\infty))$ convexa, não decrescente e $f(0) = 0$ obtivemos novos resultados de existência e não existência de soluções não negativas para o problema (3.1). Para fazer isso, consideramos dados iniciais não negativos u_0 nos conjuntos $\mathcal{I}^{\rho,r}$ e $\mathcal{I}_{\rho,r}$ respectivamente. Como consequência, quando $f(t) = t^q$, $q > 1$, obtemos um segundo valor crítico $\rho^* = 2r/(q-1)$ para a existência de soluções não negativas.

6.1.1 Existência de um segundo valor crítico para uma equação de calor fracionário não linear e um sistema parabólico acoplado em espaços de Lebesgue

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio (limitado ou ilimitado) com fronteira $\partial\Omega$ suave sempre que existir. As técnicas utilizadas no Capitulo 3 podem ser adaptadas para o seguinte problema semilinear

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\theta u = f(u) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $f \in C([0,+\infty))$, $u_0 \in L^r(\Omega)$, $0 < \theta < 1$ e $(-\Delta)^\theta$ é o Laplaciano fracionário. O problema (6.1) foi estudado para $\theta \in (1/2, 1)$ em (LI, 2017) com dados iniciais no espaço de Lebesgue $L^r(\Omega)$.

Também podem ser aplicados para tratar o seguinte sistema parabólico acoplado da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(v) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v = g(u) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = v = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $f, g \in C([0, +\infty))$ e $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$. O sistema (6.2) foi estudado em (APARCANA et al., 2020) com dados iniciais no espaço de Lebesgue $L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$.

Para ambos problemas surge a seguinte questão, é possível determinar um segundo valor crítico relacionado com a existência e não existência de soluções não negativas para os problemas (6.1) e (6.2)?

6.2 OBSERVAÇÕES FINAIS SOBRE O SEGUNDO PROBLEMA

Em nosso segundo resultado, o Teorema 4.3.1, a existência de uma solução local de (4.1) é garantida se

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} < \infty \text{ e } \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} < \infty, \text{ se } r > 1, \text{ ou}$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_1(\sigma) d\sigma < \infty \text{ e } \int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma < \infty, \text{ se } r = 1,$$

onde $f \in C([0, +\infty))$ é não decrescente, $F_1(\sigma) = \sup_{1\le t\le\sigma} f(t)^{p^+}/t$ e $F_2(\sigma) = \sup_{1\le t\le\sigma} f(t)^{p^-}/t$. O resultado de não existência de solução é obtida assumindo

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^-} = +\infty, \text{ se } r > 1,$$

$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-p^*} F_2(\sigma) d\sigma = +\infty, \text{ onde } F_2(\sigma) = \sup_{1\le t\le\sigma} \frac{f(t)^{p^-}}{t} \text{ se } r = 1,$$

isto é, existe $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$ tal que o problema (4.1) não possui uma solução local.

No Teorema 4.3.4, obtivemos novos resultados de existência e não existência de soluções não negativas para o problema (4.1) assumindo que

$$0 < \liminf_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} \leq \limsup_{t\to+\infty} t^{-p_0} f(t)^{p^+} \leq \limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*} f(t)^{p^+} = +\infty,$$

onde $p_0 > p^\star = 1 + 2r/N$, $f \in C([0, +\infty))$ é convexa, não decrescente e $f(0) = 0$. Para fazer isso, consideramos dados iniciais não negativos $u_0 \geq 0$ nos conjuntos $\mathcal{I}^\rho(x_0)$ e $\mathcal{I}_\rho(x_0)$ respectivamente.

6.2.1 Sobre a existência local de equações parabólicas de Hardy-Hénon com fonte de expoente variável e dados iniciais singulares

As técnicas utilizadas no Capítulo 4 podem ser adaptadas para tratar o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |\cdot|^{\gamma} f(u)^{p(x)} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{6.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio (limitado ou ilimitado) com fronteira $\partial\Omega$ suave sempre que existir, $f \in C([0,+\infty))$ é não decrescente, $\gamma \in \mathbb{R}$, $p : \Omega \to (1,+\infty)$ é uma função contínua tal que

$$1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \text{ para todo } x \in \Omega,$$

com $p^- = \min\limits_{x\in\Omega} p(x), \quad p^+ = \max\limits_{x\in\Omega} p(x)$ e $u_0 \in L^r(\Omega), r \geq 1.$

A questão aqui é a seguinte, será possível obter resultados de existência e não existência de soluções não negativas para o problema (6.3)?

6.3 OBSERVAÇÕES FINAIS SOBRE O TERCEIRO PROBLEMA

Em nosso terceiro resultado, o Teorema 5.3.1, estabelecemos um resultado de existência na classe $L^\infty((0,T), L^r_{ul}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Como consequência temos o Teorema 5.3.3. Neste caso temos uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções não negativas, isto é, o problema (5.1) tem uma solução local não negativa para cada $u_0 \in \mathcal{L}^r_{ul}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ se, e somente se,

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-p^*_\gamma} f(t) < \infty \quad \text{se } r > 1,$$
$$\int_1^{+\infty} \sigma^{-(1+(2-\gamma)/N)} F(\sigma) d\sigma < \infty \quad \text{se } r = 1,$$

com $F(t) := \sup_{1\leq\sigma\leq t} f(\sigma)/\sigma$ onde $f \in C([0,+\infty))$ não decrescente.

6.3.1 Uma caracterização completa da existência local para um sistema acoplado tipo Hardy em espaços de Lebesgue uniformemente local

As técnicas utilizadas no Capitulo 5 podem ser adaptadas para estudar o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |\cdot|^{-\gamma_1} f(v) & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ v_t - \Delta v = |\cdot|^{-\gamma_2} g(u) & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6.4}$$

onde $f, g \in C([0, +\infty))$, $\gamma_i \geq 0$ com $(u_0, v_0) \in L^{r_1}_{ul}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}_{ul}(\mathbb{R}^N)$. O problema (6.4) foi estudado para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ em (APARCANA et al., 2020) com dados iniciais no espaço de Lebesgue $L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$.

Será possível obter uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções não negativas para o problema (6.4)?

REFERÊNCIAS

ABOULAICH, R.; MESKINE, D.; SOUISSI, A. New diffusion models in image processing. *Comput. Math. Appl.*, v. 56, n. 4, p. 874–882, 2008.

ACERBI, E.; MINGIONE, G. Regularity results for electrorheological fluids: the stationary case. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, v. 334, n. 9, p. 817 – 822, 2002.

ACERBI, E.; MINGIONE, G. Regularity results for stationary electrorheological fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 164, n. 3, p. 213 – 259, 2002.

ANTONTSEV, S.; RODRIGUES, J. On stationary thermorheological viscous flows. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, v. 52, n. 1, p. 19–36, 2006.

APARCANA, A.; CASTILLO, R.; GUZMÁN-REA, O.; LOAYZA, M. On the local existence for a weakly parabolic system in Lebesgue spaces. *J. Differential Equations*, v. 268, n. 6, p. 3129–3151, 2020.

ARIS, R. *"The Mathematical Theory of diffusion and reaction in Permeable Catalysts"*. [S.l.]: Clarendon Press, London, 1975. v. 1.

ARRIETA, J.; RODRIGUEZ-BERNAL, A.; CHOLEWA, J.; DLOTKO, T. Linear parabolic equations in locally uniform spaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, v. 14, n. 2, p. 253–293, 2004.

BAI, X.; ZHENG, S. A semilinear parabolic system with coupling variable exponents. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, v. 190, p. 525–537, 2011.

BANDLE, C.; LEVINE, H. A. On the existence and nonexistence of global solutions of reactio-diffusion equations in sectorial domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 316, n. 2, p. 595–622, 1989.

BEBERNES, J.; EBERLY, D. *"Mathematical Problems from Combustion Theory"*. [S.l.]: Applied Math. Sciences, Springers, New York, 1989. v. 83.

BELLMAN, R. *"Mathematical Methods in Medicine"*. [S.l.]: Wourld Scientific, Singapore, 1983. v. 1.

BLOMGREN, P.; CHAN, T.; MULET, C. K. W. P. Total variation image restoration: numerical methods and extensions. *In Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Image Processing*, III, p. 384–387, 1997.

BOLLT, E.; CHARTRAND, R.; ESEDOGLU, S.; SCHULTZ, P.; VIXIE, K. Graduated adaptive image denoising: local compromise between total variation and isotropic diffusion. *Adv. Comput. Math.*, v. 31, p. 61–85, 2009.

BREZIS, H. *"Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations"*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

BREZIS, H.; CAZENAVE, T. A nonlinear heat equation with singular initial data. *J. Anal. Math.*, v. 68, n. 1, p. 277–304, 1996.

CARHUAS-TORRE, B.; CASTILLO, R.; GUZMÁN-REA, O.; LOAYZA, M. A semilinear heat equation with variable source and singular initial data. *Submitted*, 2024.

CARHUAS-TORRE, B.; CASTILLO, R.; LOAYZA, M. on a second critical value for the local existence of solutions in Lebesgue spaces. *arXiv preprint arXiv:2207.10182*, 2022.

CARHUAS-TORRE, B.; CASTILLO, R.; LOAYZA, M. The Hardy parabolic problem with initial data in uniformly local Lebesgue spaces. *Submitted*, 2024.

CASTILLO, R.; GUZMÁN-REA, O.; LOAYZA, M. On the local existence for Hardy parabolic equations with singular initial data. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 510, n. 2, p. 126022, 2022.

CASTILLO, R.; LOAYZA, M. A semilinear parabolic problem with variable reaction on a general domain. *Comput. Math. Appl.*, v. 74, n. 3, p. 351–359, 2017.

CASTILLO, R.; LOAYZA, M. Global and blow up solutions for a semilinear heat equation with variable reaction reaction on a general domain. *Authorea. July 18*, 2023.

CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. *"Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações"*. [S.l.]: Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática, Maringá, 2016.

CAZENAVE, T.; HARAUX, A. *"An introduction to semilinear evolution equations"*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 1998. v. 13.

CEKIC, B.; KALININ, A. V.; MASHIYEV, R. A.; AVCI, M. $L^{p(x)}(\omega)$-estimates for vector fields and some applications to magnetostatics problems. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 389, n. 2, p. 838 – 851, 2012.

CELIK, C.; ZHOU, Z. No local L^1 solution for a nonlinear heat equation. *Commun. Partial Differ. Equ.*, v. 28, p. 1807–1831, 2003.

CHIKAMI, N. Composition estimates and well-posedness for Hardy-Hénon parabolic equations in Besov spaces. *J. Elliptic Parabol. Equ.*, v. 5, n. 2, p. 215–250, 2019.

CHIKAMI, N.; IKEDA, M.; TANIGUCHI, K. Optimal well-posedness and forward self-similar solution for the Hardy-Hénon parabolic equation in critical weighted Lebesgue spaces. *Nonlinear Anal.*, v. 222, p. 112931, 2022.

CHIKAMI, N.; IKEDA, M.; TANIGUCHI, K.; TAYACHI, S. Unconditional uniqueness and non-uniqueness for Hardy-Hénon parabolic equations. *arXiv preprint arXiv:2301.00506*, 2023.

CHILDRESS, S.; PERKUS, J. K. *"Mathematical Models in Developmental Biology"*. [S.l.]: Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1977. v. 1978.

CRUZ-URIBE, D.; FIORENZA, A. *"Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis Applied and Numerical Harmonica Analysis"*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

DENG, K.; LEVINE, H. A. The role of critical exponent in blow up theorems: The sequel. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 243, n. 1, p. 85–126, 2000.

DIENING, L.; HARJULEHTO, P.; HÄSTÖ, P.; RŮŽIČKA, M. *"Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents"*. [S.l.]: Springer, 2011.

DIENNING, L.; RŮŽIČKA, M. Non-newtonian fluids and functions spaces. *Nonlinear analysis, function spaces and applications*, v. 8, p. 94–143, 2007.

EFENDIEV, M. A.; ZELIK, S. V. The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in an unbounded domain. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 54, n. 6, p. 625–688, 2001.

EVANS, L. C. *"Partial differential equations"*. [S.l.]: American Mathematical Soc, 2010. v. 19.

FEIREISL, E. Bounded, locally compact global attractors for semilinear damped wave equations on $\mathbb{R}^n$. *Diff. Int. Eqns.*, v. 9, p. 1147–1156, 1996.

FERREIRA, R.; PABLO, A. de; PÉREZ-LLANOS, M.; ROSSI, J. Critical exponents for a semilinear parabolic equation with variable reaction. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, v. 142, n. 5, p. 1027–1042, 2012.

FOLLAND, G. B. *"Real analysis: modern techniques and their applications"*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

FUJISHIMA, Y.; IOKU, N. Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term. *J. Math. Pures Appl.*, v. 118, p. 128–158, 2018.

FUJITA, H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci.Univ. Tokio Sect. I*, v. 13, p. 109–124, 1966.

GALAKTIONOV, V. A.; KURDJUMOV, S. P.; MIHAILOV, A. P.; SAMARSKII, A. A. On unbounded solutions of the Cauchy problem for parabolic equation $u_t = \nabla\left(u^\sigma \nabla u\right) + u^\beta$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 252, n. 6, p. 1362–1364, 1980.

GAVALAS, G. R. *"Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems"*. [S.l.]: Springers Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag, New York, 1968. v. 17.

GIRAUDON, T.; MIYAMOTO, Y. Fractional semilinear heat equations with singular and nondecaying initial data. *Rev. Mat. Complut.*, v. 35, n. 2, p. 415–445, 2022.

HALSEY, T. C. Electrorheological fluids. *Science, New Series*, v. 258, n. 5083, p. 761–766, 1992.

HARAUX, A.; WEISSLER, F. Non-uniqueness for a semilinear initial value problem. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 31, n. 2, p. 167–189, 1982.

HAYAKAWA, K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. *Proc. Japan Acad.*, v. 49, n. 7, p. 503–505, 1973.

HÉNON, M. Numerical experiments on the stability of spherical steller systems. *Astronomy and Astrophysics*, v. 24, p. 229–238, 1973.

KATO, T. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, v. 58, n. 3, p. 181–205, 1975.

KHELGHATI, A.; BAGHAEI, K. Blow-up in a semilinear parabolic problem with variable source under positive initial energy. *Applicable Analysis*, v. 94, n. 9, p. 1888–1896, 2015.

KOBAYASHI, K.; SIRAO, T.; TANAKA, H. On the blowing up problem for semilinear heat equation. *J. Math. Soc. Japan*, v. 29, n. 3, p. 407–424, 1977.

LAISTER, R.; ROBINSON, J.; SIERŻĘGA, M.; VIDAL-LÓPEZ, A. A complete characterization of local existence of semilinear heat equations in Lebesgue spaces. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, v. 33, n. 6, p. 1519–1538, 2016.

LAISTER, R.; SIERŻĘGA, M. Well-posedness of semilinear heat equations in L^1. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, v. 37, n. 3, p. 709–725, 2020.

LAMBERTON, D. Equations d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p. *Journal of Functional Analysis, Academic Press*, v. 72, n. 2, p. 252–262, 1987.

LEE, T. Y.; NI, W. M. Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 333, n. 1, p. 365–378, 1992.

LEVINE, H. A. The role of the critical exponents in blow up theorems. *SIAM, Rev.*, v. 32, n. 2, p. 269–288, 1990.

LEVINE, H. A.; MEIER, P. The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones. *Arch. Rational Mech. and Analysis*, v. 109, p. 73–80, 1990.

LI, F.; LIU, B. Asymptotic analysis for blow-up solutions in parabolic equations involving variable exponents. *Applicable Analysis*, v. 92, n. 4, p. 651–664, 2013.

LI, K. A characteristic of local existence for nonlinear fractional heat equations in Lebesgue spaces. *Comput. Math. Appl.*, v. 73, p. 653–665, 2017.

MAEKAWA, Y.; TERASAWA, Y. The Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local L^p spaces. *Differential Integral Equations*, v. 19, n. 4, p. 369–400, 2006.

MATOS, J.; SOUPLET, P. Instantaneous smoothing estimates for the hermite semigroup in uniformly local spaces and related nonlinear equations. *Houston J. Math*, v. 30, p. 879–890, 2004.

MATOS, J.; TERRANEO, E. Nonuniqueness for a critical nonlinear heat equation with any initial data. *Nonlinear Anal.*, v. 55, n. 7-8, p. 927–936, 2003.

MEIER, P. Blow-up of solutions of semilinear parabolic differential equations. *J. Appl. Math. Physics (ZAMP)*, v. 39, n. 2, p. 135–149, 1988.

MEIER, P. On the critical exponent for reaction-diffusion equations. *Arch. Rational Mech. and Analysis*, v. 109, p. 63–71, 1990.

MIELKE, A. The complex ginzburg–landau equation on large and unbounded domains: sharper bounds and attractors. *Nonlinearity*, v. 10, n. 1, p. 199–222, 1997.

MIELKE, A.; SCHNEIDER, G. Attractors for modulation equations on unbounded domains-existence and comparison. *Nonlinearity*, v. 8, n. 5, p. 743–768, 1995.

MIYAMOTO, Y. A doubly critical semilinear heat equation in the L^1 space. *Journal of Evolution Equations*, v. 21, p. 151–166, 2021.

MIYAMOTO, Y.; SUZUKI, M. Thresholds on growth of nonlinearities and singularity of initial functions for semilinear heat equations. *arXiv:2104.14773.*, 2021.

NI, W. M. Uniqueness, nonuniqueness and related questions of nonlinear elliptic and parabolic equations, in: Nonlinear functional analysis and its applications, part 2. *Proc. Sympos. Pure Math., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, p. 229–241, 1986.

PAZY, A. *"Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations"*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

PHAN, Q. H. Singularity and blow-up estimates via Liouville-type theorems for Hardy-Hénon parabolic equations. *J. Evol. Equ.*, v. 13, n. 2, p. 411–442, 2013.

PINASCO, J. P. Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents. *Nonlinear Anal.*, v. 71, n. 3-4, p. 1094–1099, 2009.

QUITTNER, P.; SOUPLET, P. Admissible L^p norms for local existence and for continuation in semilinear parabolic systems are not the same. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, v. 131, n. 6, p. 1435–1456, 2001.

QUITTNER, P.; SOUPLET, P. *"Superlinear parabolic problems: blow-up, global existence and steady states"*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

ROBINSON, J.; SIERŻĘGA, M. Supersolutions for a class of semilinear heat equations. *Rev. Mat. Complut.*, v. 26, p. 341–360, 2013.

RŮŽIČKA, M. Flow of shear dependent electrorheological fluids. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, v. 329, n. 5, p. 393 – 398, 1999.

RŮŽIČKA, M. *"Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, volume 1748 of Lecture Notes in Mathematics"*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 2000.

RŮŽIČKA, M. Modeling, mathematical and numerical analysis of electrorheological fluids. *Appl. Math.*, v. 49, n. 6, p. 565 – 609, 2004.

SIMON, B. Schrödinger semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 7, n. 3, p. 447–526, 1982.

SLIMENE, B.; TAYACHI, S.; WEISSLER, F. Well-posedness, global existence and large time behavior for Hardy-Hénon parabolic equations. *Nonlinear Anal.*, v. 152, p. 116–148, 2017.

STRANGROOM, J. E. Electrorheological fluids. *Physicss in Technology*, v. 14, n. 6, p. 290–296, 1983.

SUZUKI, M. Local existence and nonexistence for reaction–diffusion systems with coupled exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 477, n. 1, p. 776–804, 2019.

TAYACHI, S. Uniqueness and non-uniqueness of solutions for critical Hardy-Hénon parabolic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 488, n. 1, p. 123976, 2020.

TERRANEO, E. Non-uniqueness for a critical non-linear heat equation. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 27, p. 185–218, 2002.

VAN, M. Gaussian bounds for the dirichlet heat kernel. *J. Funct. Anal.*, v. 88, n. 2, p. 267–278, 1990.

VAN, M. A gaussian lower bound for the dirichlet heat kernel. *Bull. Lond. Math. Soc.*, v. 24, n. 5, p. 475–477, 1992.

WANG, H.; HE, Y. On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy. *Applied Mathematics Letters*, v. 26, n. 10, p. 1008–1012, 2013.

WANG, X. On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, v. 337, n. 2, p. 549–590, 1993.

WEISSLER, F. Semilinear evolution equations in Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, v. 32, p. 277–296, 1979.

WEISSLER, F. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 29, n. 1, p. 79–102, 1980.

WEISSLER, F. Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation. *Isr. J. Math.*, v. 38, p. 29–40, 1981.

WEISSLER, F. L^p-energy and blow-up for a semilinear heat equation, in nonlinear functional analysis and its applications. *Proc. Symp. Pure Math.*, v. 45, p. 545–551, 1986.

WUA, X.; GUOA, B.; GAO, W. Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy. *Applied Mathematics Letters*, v. 26, n. 5, p. 539–543, 2013.

YOSIDA, K. *"Functional analysis"*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.