UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

TIAGO DE OLIVEIRA MOREIRA

DIFICULDADES DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ARRANJO E COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Caruaru
2024

TIAGO DE OLIVEIRA MOREIRA

DIFICULDADES DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ARRANJO E COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Profª. Dr. Cristiane de Arimatéa Rocha

.

Caruaru

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Moreira, Tiago de Oliveira.

Dificuldades de resolução de problemas em arranjo e combinação com repetição no ensino médio / Tiago de Oliveira Moreira. - Caruaru, 2024.

47 p. : il., tab.

Orientador(a): Cristiane de Arimatéa Rocha

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2024.

Inclui referências, apêndices.

1. Teoria dos Campos Conceituais. 2. Arranjo. 3. Combinação. 4. Repetição. 5. Invariantes. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

TIAGO DE OLIVEIRA MOREIRA

DIFICULDADES DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ARRANJO E COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Aprovada em: 25/03/2024.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Ma. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinador Interno)

Profª. Drª. Ana Paula Barbosa de Lima (Examinadora Interna)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso. Sem o apoio delas, este trabalho não teria sido possível. Primeiramente, gostaria de agradecer a minha orientadora, Profº. Dr. Cristiane de Arimatéa Rocha, pela orientação dedicada, paciência ao longo deste processo. Sua expertise e orientações foram fundamentais para moldar este trabalho.

Agradeço à minha família, em especial minha irmã, pelo constante encorajamento, apoio emocional e compreensão durante os momentos intensos deste trabalho. Aos meus amigos e colegas de classe, agradeço por compartilharmos conhecimentos, experiências e risadas ao longo destes anos. Não posso deixar de agradecer aos participantes da minha pesquisa, cujas contribuições foram essenciais para a coleta de dados e enriqueceram este estudo.

Por fim, quero expressar minha gratidão a todos aqueles que acreditaram em mim e me incentivaram a perseverar, mesmo diante dos desafios. Este trabalho é dedicado a vocês. Que este agradecimento reflita a profundidade da minha gratidão. Obrigado a todos por fazerem parte desta jornada.

RESUMO

O presente estudo tem como foco a análise das dificuldades enfrentadas por alunos do terceiro ano do ensino médio em relação aos invariantes operatórios e prescritivos na repetição em problemas combinatórios que envolvem arranjo e combinação. Fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, esta pesquisa explora as noções de invariantes prescritivos e operatórios, bem como as representações relacionais e simbólicas associadas aos problemas de arranjo e combinação com repetição. O objetivo central da pesquisa é analisar os conhecimentos que os alunos do ensino médio apresentam ao resolver problemas de arranjo e combinação, com e sem a presença do invariante de repetição, após terem tido a intervenção do professor em sala de aula. Para isso, foi empregado um questionário com alguns estudantes do terceiro ano do ensino médio, com o intuito de avaliar a compreensão dos alunos sobre os conceitos de arranjo e combinação com a presença de invariantes de repetição. Os resultados destacam uma série de desafios enfrentados pelos estudantes, incluindo a dificuldade em diferenciar os invariantes em arranjos e combinações, a aplicação incorreta de fórmulas e a pela falta de discussão sobre o tema em sala de aula. A pesquisa reforça a importância de abordagens de ensino que se alinham com a Teoria dos Campos Conceituais, visando facilitar a compreensão e aplicação dos invariantes operatórios e das representações simbólicas essenciais para o domínio da combinatória.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais; Arranjo; Combinação; Repetição; Invariantes.

ABSTRACT

The present study focuses on analyzing the difficulties faced by third-year high school students in relation to operational and prescriptive invariants in repetition in combinatorial problems involving arrangement and combination. Based on Vergnaud's Conceptual Field Theory, this research explores the notions of prescriptive and operational invariants, as well as the relational and symbolic representations associated with problems of arrangement and combination with repetition. The central objective of the research is to analyze the knowledge that high school students present when solving arrangement and combination problems, with and without the presence of the repetition invariant, after having had the teacher's intervention in the classroom. For this, a questionnaire was used with some third-year high school students, with the aim of evaluating students' understanding of the concepts of arrangement and combination with the presence of repetition invariants. The results highlight a series of challenges faced by students, including the difficulty in differentiating invariants in arrangements and combinations, the incorrect application of formulas and the lack of discussion on the topic in the classroom. The research reinforces the importance of teaching approaches that align with Conceptual Field Theory, aiming to facilitate the understanding and application of operational invariants and symbolic representations essential for mastering combinatorics.

.

Keywords: Conceptual Field Theory; Arrangement; Combination; Repetition; Invariants.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente percebemos maior exigência da sociedade para a formação de indivíduos que analisem e resolvam problemas de contagem e que consigam perceber conceitos que estão por trás da aplicação de fórmulas. No ensino médio os alunos se deparam com situações problemas, diferenciadas, que exigem habilidades de contagem, seja por meio de listagem, esgotamento de possibilidades e outros meios de representação do raciocínio combinatório, que vai, geralmente, além da utilização de formulas. Tais habilidades, vinculadas a resolução de problemas combinatórios, podem oportunizar um pensamento amplo permeado de estratégias matemática.

Kapur, em 1970, alertava para o papel da combinatória no currículo, afirmando que esses problemas “fortalecem o desenvolvimento matemático do indivíduo, aprofundando seu pensamento e expandindo suas noções de matemática” (Kapur, 1970, p. 114). Nesse sentido, acredita-se que a resolução de problemas combinatórios desafia a mente a pensar de forma crítica, ou seja, ela envolve a análise previa e um raciocínio lógico para considerar múltiplas abordagens e desenvolver estratégias para chegar a soluções.

Kapur (1970) também listou as razões pelas quais a análise combinatória é importante para a matemática escolar. Em seu texto, Kapur (1970) apresenta que a combinatória é um conteúdo acessível, pois não exige conhecimentos de álgebra avançada, que a resolução desses problemas possibilita a sistematização de práticas matemáticas. Em texto, escrito 50 anos depois, Lockwood, Wasserman e Tillema (2020), discutindo sobre a importância desse conteúdo, afirmam que a Combinatória pode contribuir positivamente para questões de equidade na educação matemática.

Com base no exposto, a Combinatória foi escolhida como objeto de pesquisa deste trabalho. Acredita-se que a partir de um processo de ensino e aprendizagem adequado pode auxiliar no processo de construção do raciocínio combinatório onde examinar todas as possibilidades e enumerar as descobertas gera um facilitador na tomada de decisão na resolução de problemas combinatórios.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam que o trabalho com a combinatória inicie desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Nos anos finais do Ensino Fundamental, esse documento, destaca o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas (Brasil, 1998, p.257).

Segundo as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio), na última etapa de escolarização, o Ensino Médio "contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional" (Brasil, 2002, p. 111). O PCN+ Ensino Médio introduz o Pensamento Combinatório como um processo que necessita da elaboração de um modelo simplificado e explicativo dada uma circunstância, que mostrar todas as possibilidades para auxiliar na tomada de decisões.

> Este tema estruturador permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sociocultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática (Brasil, 2002, p. 127).

A atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica o trabalho com problemas de contagem a partir do 4º ano do Ensino Fundamental. No Ensino Médio esse documento propõe um trabalho articulado com a Probabilidade, como pode-se observar nas habilidades a seguir:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade (Brasil, 2018, p.546).

Para abordar situações complexas, é essencial criar modelos que simplifiquem a realidade. Isso envolve identificar os elementos-chave, as relações entre eles e representá-los de forma compreensível. Nesse sentido, o processo de ensino e de aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio tem-se caracterizado como uma área da matemática que agrega certas dificuldades para os alunos, na forma de como são apresentados os conteúdos, no que se refere à aprendizagem, tanto no aspecto conceitual do conteúdo, quanto no comando dos problemas ou na escolha de estratégias para resolver problemas.

Os problemas combinatórios constituem-se em verdadeiros desafios para os estudantes, pois exigem o desenvolvimento do raciocínio e a capacidade de reflexão, já que é preciso compreender regularidades, estabelecer relações e esgotar todas as possibilidades sem deixar de contar nenhum elemento (Pessoa, 2009). O desenvolvimento do raciocínio combinatório prescinde de atividades que promovam a reflexão sobre o que está sendo trabalhado, que envolvam a revisão das abordagens utilizadas, discutam as estratégias para identificação de erros ou pequenos ajustes necessários, permitindo a escolha de outras estratégias quando requisitado pelo problema.

Entre as dificuldades de aprendizagem de Combinatória, Pessoa e Borba (2010, p.19) ressaltam que os problemas de arranjo, combinação e permutação “requerem a compreensão de quais elementos dos conjuntos dados podem ser selecionados e como serão organizados”. No Ensino Médio as autoras afirmam que os problemas de combinação são os que apresentam maior dificuldades, e justificam que esse tipo de problema exige que

> os alunos precisam perceber que de forma semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são retiradas possibilidades para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades (Pessoa; Borba, 2010, p. 18).

Acrescenta-se as dificuldades de estudantes ao lidar com problemas como esse, além da falta de entendimento do contexto estrutural do problema, a diferenciação entre problemas de arranjos e combinação (Rocha, 2011), a grande variedade dos modelos de problemas e suas variações como a inclusão de invariantes de repetição ou de elementos idênticos (Rocha, 2019).

Silva e Rocha (2015, p. 5) ao tratar de invariantes sobre problemas combinatórios presentes em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, comentam que o invariante de repetição em problemas de arranjo e combinação, ampliam a quantidade de possibilidades, o que "pode mudar as estratégias de resolução das mesmas".

Araújo e Rocha (2018, p. 149) em investigação realizada com estudantes do ensino médio sobre os invariantes de ordem e repetição dos problemas de arranjo e combinação constataram que os estudantes "apresentaram dificuldades principalmente em relação as situações de arranjo e combinação que envolve a repetição dos elementos".

Diante do exposto, foi feita a escolha de analisar os invariantes de repetição nos problemas de arranjo e combinação em uma turma de ensino médio para compreender as estratégias utilizadas na resolução desses problemas. Delimitou-se como problema de pesquisa: Quais dificuldades alunos do terceiro ano de ensino médio possuem na resolução de problemas combinatórios com invariante de repetição de elementos?

A fim de discutir as noções de invariantes do conceito, fundamentou-se a pesquisa na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (2009) e mais especificamente, na relação dessa teoria com a Combinatória apresentada por Borba (2010; 2013). Autores como Borba (2010; 2013), Rocha (2011), Silva e Rocha (2015), Araújo e Rocha (2018) evidenciam que as estruturas dos problemas combinatórios podem causar dificuldades, principalmente no que diz respeito ao cálculo relacional dos problemas.

A interpretação do enunciado do problema, o conhecimento do contexto indicado pode influenciar diferentes compreensões na resolução de um problema de contagem, dessa maneira demarcou-se como objetivo geral: Analisar as dificuldades dos alunos do 3ª ano do Ensino Médio em relação aos invariantes repetição nos problemas de arranjo e combinação.

A fim de discuti-lo foram adotados os seguintes objetivos específicos: Verificar se estudantes do ensino médio identificam a presença do invariante de repetição em problemas de arranjo e combinação; averiguar semelhanças e diferenças apresentadas pelos estudantes sobre problemas de arranjo e combinação, com e sem a presença do invariante de repetição; investigar as justificativas para resolução dos problemas de arranjo e combinação apresentadas pelos estudantes.

Para elucidar mais algumas questões esse trabalho está organizado em cinco capítulos. Após a introdução, no capítulo seguinte, discute-se sobre a Teoria dos Campos Conceituais e a relação sobre o ensino de combinatória.

O capítulo da metodologia elucida o percurso metodológico adotado nessa pesquisa, bem como a elaboração do questionário aplicado com os estudantes de 3º ano de Ensino médio. Já a análise e discussão dos resultados, apresenta alguns dos resultados obtidos na pesquisa. Por fim, nas considerações finais apresentam-se algumas sugestões sobre continuações de pesquisa.

2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O ENSINO DE COMBINATÓRIA

A Teoria dos Campo Conceituais (TCC) é uma teoria psicológica e cognitiva, que busca analisar o desenvolvimento e a aprendizagem dos estudantes, e que nos ajuda a entender como se constrói essa aprendizagem. Onde observam-se as relações existentes em conceitos que constituem o que se denomina campos conceituais (Araújo, 2017), em que possibilita entender como é formada a construção do conceito, como também, pode auxiliar na compreensão de algumas dificuldades em meio ao processo de ensino e aprendizagem.

A TCC, criada por Vergnaud (1998; 2009), auxilia na compreensão que conceitos matemáticos, como por exemplo, as conhecidas estruturas aditivas e multiplicativas que classificam diferentes situações, invariantes e representações ligadas a essas estruturas. Segundo Vergnaud (1998) o Campo Conceitual é composto por um grupo informal e heterogêneo de conceitos, situações, estruturas, relações, conteúdos e mecanismos de compreensão, os quais se ligam e se comunicam durante o processo de aquisição de conceitos de modo geral.

Vergnaud (1986) define os campos conceituais como "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p.84). Para Vergnaud (1988, p. 141), C = (S, I, R)

> C: conjunto
>
> S: é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
>
> I: é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto;
>
> R: é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

A teoria entrega a ideia de que campos conceituais, são estruturas cognitivas compostas por conceitos relacionados. Esses campos conceituais ajudam a organizar o conhecimento, facilitando a compreensão das relações entre os conceitos.

Dessa maneira com o uso da TCC pode-se compreender como se constrói o campo conceitual, proporcionando subsídios aos professores para que estes possam compreender a prática pedagógica, desencadeando assim o processo de aprendizagem cognitiva. Baseando-se nessa teoria é possível um planejamento didático que leve a aprendizagem dos estudantes.

No caso do ensino de conceitos matemáticos, os professores necessitam fornece oportunidades de vivenciar experiências que desafiem os alunos a refletir e a questionar em um ambiente de aprendizagem, fazendo com que também estes professores pensem a respeito de sua ação docente. A premissa de Vergnaud (1993, p. 9) “é permitir a classificação a partir da análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser utilizados em cada tarefa". Um indivíduo precisa de tempo, experiência, maturidade e capacidade de aprendizagem para dominar um determinado Campo Conceitual. As dificuldades conceituais serão superadas quando forem descobertas e enfrentadas, ou seja, isto não acontecerá de forma simultânea.

Vergnaud (1986) apresenta a noção de invariantes para ajudar na compreensão da realidade que estes problemas se encontram até a sua representação, e que se apresenta de diferentes maneiras, a depender de como esse conjunto é observado. Para esse autor os invariantes podem ser compreendidos como “uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre certo conjunto de transformação” (p.81).

Vergnaud (2009) discute a necessidade de conhecer invariantes operatórios que podem se apresentar na relação entre a realidade e a representação, se constituindo nas relações e propriedades que os alunos colocam em ação na resolução de situações, podendo ser verdadeiros ou falsos a depender da situação (Araújo, Rocha, 2018, p. 142-150). Logo, o invariante operatório está voltado as estratégias que o aluno irá utilizar para resolver cada situação. E ao se trabalhar problemas combinatório o invariante operatório irá definir o tipo de problema e qual melhor estratégia utilizar, e dependendo da forma que for abordado irar definir o tipo de conceito abordado. Características da Combinatória tais como situações, invariantes prescritivos e representações simbólicas são apresentadas por Borba (2010; 2013), Rocha (2011), Borba, Montenegro e Santos (2021), Araujo (2017), entre outras. Araújo e Rocha (2018, p.142) também definem os invariantes prescritivos como “as relações e propriedades de conceitos que são necessários para compreensão do mesmo”, onde os invariantes prescritivos são caracterizados pelo invariante de ordem e repetição em problemas de arranjo e combinação.

As autoras também explicitam a discussão sobre o invariante relacional, sobre a qual indicam que:

> Vergnaud (1986) define ainda o invariante relacional (como “uma relação que permanece invariante para um conjunto de transformações de operações ou de variações” (p.82). Nesse caso, diz respeito à interpretação do enunciado para identificação do tipo de problema. Partindo do exposto, compreende-se que as diferentes noções de invariante é um instrumento que se devidamente utilizado possivelmente proporciona segurança no momento da construção da representação dos conceitos (Araújo; Rocha, 2018, p. 142-150).

O invariante relacional apresenta na forma de como será representando raciocínio combinatório, seja ele por meios de listagens, árvores de possibilidades, que possibilitem a compreensão das ações tomada para resolução do problema.

No que diz respeito às representações simbólicas, fica evidente que essas desempenham um papel significativo na resolução de problemas. Segundo Vergnaud (2009), existem diferentes representações simbólicas que podem indicar diversas maneiras de simbolizar conceitos e suas relações. No caso da Combinatória, podem assumir diversas formas, incluindo fórmulas, listagens, árvores de possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e outros métodos. Cada uma dessas formas representa informações de maneira única.

Borba, Montenegro e Santos (2021) dividem as situações de combinatória em produto de medidas, arranjo, combinação e permutação e defendem que

> [...] todas as situações combinatórias devem ser trabalhadas desde os primeiros anos de escolarização, de modo que sejam discutidos os invariantes de escolha e de ordenação de elementos e o esgotamento de possibilidades, por meio de diversificadas representações simbólicas (Borba; Montenegro; Santos, 2021, p.21-22).

As situações de arranjo e combinação simples, suas definições, invariantes, representações e exemplos são apresentadas a seguir.

Os problemas de arranjo, também chamado de arranjo simples, são definidos por Merayo (2015) dado um conjunto formado por m elementos distintos, um arranjo é constituído por:

> [...] um grupo ordenado formado por n elementos tomados de m, de tal maneira que dois arranjos ou grupos se consideram distintos se diferem em algum de seus elementos ou, se tenham os mesmos elementos, diferem na ordem em que estão colocados (Merayo, 2015, p. 280).

Nesse sentido, observam-se os invariantes de escolha, ao tomar n elementos em m, e de ordem, uma vez que as possibilidades do arranjo se diferenciam quando seus elementos estão em posições diferentes. Observa-se um exemplo a seguir.

Exemplo de arranjo simples: Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, 6 alunos se candidataram para os cargos de presidente e vice-presidente. De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas no grêmio?

Para responder essa questão pode ser utilizada diferentes representações simbólicas, no Quadro 1 utilizou-se uma listagem, o uso do princípio fundamental da contagem e o uso da fórmula.

Quadro 1. Representações simbólicas para um problema de arranjo

Listagem	Princípio Fundamental da Contagem	Fórmula
Candidatos: a,b,c,d,e,f Possibilidades: ab,ac,ad,ae,af ba,bc,bd,be,bf ca,cb, cd,ce,cf da,db,dc,de,df ea,eb,ec,ed,ef, fa, fb, fc, fd, fe. 30 possibilidades	_____._____ 1º 2º 1ºopção: 6 possibilidades (qualquer um deles pode ser presidente) 2º opção: 5 possibilidades (pode ser qualquer um, menos aquele que já foi escolhido presidente) 6 . 5 =30 __________. __________	$A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$ $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!}$ $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!}$ $A_6^2 = \frac{6!}{4!}$ $A_{6,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$ $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As representações simbólicas apresentadas, apesar de obterem o mesmo resultado, possuem diferentes características. Na listagem consegue-se observar o invariante de *escolha* pela necessidade de selecionar apenas duas pessoas para os cargos, de *esgotamento de possibilidades* uma vez que são listadas todas as possibilidades, além do invariante de *ordem* já que ab e ba são consideradas possibilidades diferentes. Sobre a elaboração da listagem observa-se que se apresenta de forma sistemática pois segue uma sequência ordenada em que cada linha inicia com uma letra, a utilização de letras minúsculas como tipo de registro mais econômico, bem como sua posição representando os cargos de presidente e de vice-presidente.

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) indica o número de possibilidades para cada opção de escolha, excluindo a repetição de elementos, o invariante de escolha é representado pelo número de opções a ser escolhida, o da ordem está subentendido na posição das opções e o esgotamento de possibilidades não está explicitado, mas é previsto a partir do produto realizado.

Já na fórmula a noção de fatorial é utilizada, o invariante de escolha é representado pelo n, que representa na resolução a escolha de dois elementos, os de ordem e o de esgotamento de possibilidades é subentendido. As discussões entre as diferentes representações simbólicas utilizadas em problemas combinatórios, bem como a forma como que os invariantes se apresentam em cada representação, pode auxiliar na compreensão das situações combinatórias.

No problema de arranjo com repetição, assim como seu nome estabelece, entende-se que novos grupos podem ser obtidos a partir da repetição de algum dos elementos do conjunto, e isso pode ocorrer de variadas maneiras. De acordo com Merayo (2015) esse tipo de situação pode ser definido por:

> Seja um conjunto formado por m elementos distintos [...] qualquer grupo formado por n elementos, não necessariamente distintos, tomados dos m do conjunto original. Ao poder repetir elementos, pode que seja n >m (Merayo, 2015, p.283).

Nesse sentido, entra em jogo além dos invariantes de escolha, de ordem e do esgotamento de possibilidade, o invariante de repetição de elementos. Nesse sentido, pode haver a escolha de elementos do conjunto com m elementos a escolha de elementos iguais, e compreende como nova(s) possibilidade(s). Observa-se um exemplo a seguir.

Exemplo de arranjo com repetição: Os celulares oferecem uma função para proteger suas informações. Essa proteção consiste na definição de uma senha para o desbloqueio de tela, que pode ser formada com vários dígitos escolhidos dentre os algarismos de 1 a 4, impedindo que outras pessoas tenham acesso a seus dados. Certo dia Tiago decidiu usar essa função criando uma senha 3 dígitos para facilitar sua memorização. Mas ele acabou esquecendo a própria senha e teve que levar para um técnico recuperá-la. O técnico utilizou um software que calcula todas as possibilidades de senhas para que possa ser tentado uma por uma até decodificar a senha do celular. Quantas senhas o software apresentou para o técnico testar?

Na resolução dessa questão pode ser utilizada diferentes representações simbólicas, no Quadro 2 utilizou-se uma listagem, o uso do princípio fundamental da contagem e o uso da fórmula.

Quadro 2. Representações simbólicas para um problema de arranjo com repetição

Listagem	Princípio Fundamental da Contagem	Fórmula
Números da senha:1,2,3,4 Possibilidades de senha: 111, 222, 333, 444 112,113,114, 221,223,224, 331,332,334,441,442,443 121,131,141,212,232,242, 313,323,324,414,424,434, 211,311,411,122,322,422, 133,233,433,144,244,344 123, 124, 132, 134, 142,143, 213, 214,231, 234, 241,243, 312, 314, 321,324,341,342, 412, 413,421,423, 431,432. 64 possibilidades	A senha possui _____._____._____ 1º 2º 3º 1ºopção: 4 possibilidades (qualquer número sem restrição) 2º opção: 4 possibilidades (qualquer número sem restrição) 3º opção: 4 possibilidades (qualquer número sem restrição) 4 . 4 . 4 =64	$AR_{m,n} = m^n$ $AR_{4,3} = 4^3$ $A_{4,3} = 64$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As representações simbólicas exibidas no quadro 2 também apresentam os invariantes dos problemas de arranjo com repetição de maneiras diferentes, mas existe algumas semelhanças com o problema de arranjo já comentado anteriormente, como no caso dos invariantes de escolha, ordem e esgotamento de possibilidades.

Com relação ao invariante de repetição observa-se explicitamente na listagem dos elementos, sendo apresentados nas possibilidades de senhas com três algarismos iguais (111,222,333,444), como também na possibilidade de senhas com dois algarismos iguais (112,113,114,221,223,224, 331,332,334, 441,442,443121,131,141,212,232,242,313,323,324,414,424,434,211,311,411, 122, 322, 422,133,233,433,144,244,344) que geram novas possibilidades. Já com relação ao PFC e a Fórmula o invariante de repetição de elementos, encontra-se de maneira subtendida. No caso do PFC, o número de possibilidades para cada opção de escolha ´o mesmo, incluindo o elemento que já foi selecionado anteriormente. No caso da Fórmula, o invariante da repetição de elementos, é previsto a partir do produto realizado, uma vez que caracteriza uma potenciação, onde a base é o número de elementos do conjunto (m) e o expoente representa o número de elementos (n) do grupo escolhido.

Outro problema é chamado de combinação ou combinação simples, nesse tipo de problema está em jogo os invariantes de escolha e de esgotamento de possibilidade, mas o invariante de ordem não gera novas possibilidades. Merayo (2015) define esse problema como:

> Seja um conjunto formado por m elementos distintos. Recebe o nome de combinação simples, cada grupo firmado por n elementos tomados dos m, e tal que duas combinações se considerarão distintas se diferem em algum dos seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, ou seja, dois agrupamentos são o mesmo se contêm os mesmos elementos colocados em uma ordem distinta (Merayo, 2015, p.313).

Dessa forma, entende-se que o invariante de escolha ocorre na seleção do grupo, mas se trocarmos as posições depois a escolha, alterando a localização, a possibilidade continua a mesma, indicando que o invariante de ordem não gera novas possibilidades. Discute-se um exemplo a seguir:

Exemplo de combinação: Com a liberação das aulas em meio a pandemia da Covid-19, no primeiro dia de retorno, apenas 6 alunos da mesma turma compareceram à escola para a aula de matemática. No final da aula, ao irem embora os alunos forma se despedindo uns dos outros com um soco de mão, seguindo as medidas de prevenção como o distanciamento seguro. Quantos socos de mão diferentes foram dados?

Na resolução dessa questão pode ser utilizada diferentes representações simbólicas, no Quadro 3 utilizou-se uma listagem, o PFC e o uso da fórmula.

Quadro 3. Representações simbólicas para um problema de combinação

Listagem	Princípio Fundamental da Contagem	Fórmula
Alunos: a,b,c,d,e,f Possibilidades de soco de mão: ab,ac,ad,ae,af ba,bc,bd,be,bf	Temos duas escolhas para cada soco _____ . _____ 1º 2º 1º opção: 6 possibilidades	$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ $C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!}$

ca,cb,cd,ce,cf da,db,dc,de,df ea,eb,ec,ed,ef fa, fb, fc, fd, fe as vermelhas representam possibilidades iguais as outras já listadas, restando. 15 possibilidades	2º opção: 5 possibilidades (retirando o aluno escolhido na primeira posição) Depois utilizando a propriedade $C_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{n!}$, o n! nesse caso significa a permutação do número de elementos do grupo escolhido desordenando-o. $\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$	$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!\,2!}$ $C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2}$ $C_{6,2} = 15$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As representações simbólicas apresentadas, apesar de obterem o mesmo resultado, possuem diferentes características. Na listagem consegue-se observar o invariante de escolha uma vez que seleciona duas pessoas para os socos de mão e de esgotamento de possibilidades já que são enumeradas todas as possibilidades. Como já mencionado o invariante de *ordem* não gera novas possibilidades e as opções ab e ba são consideradas possibilidades iguais, por isso não foram contadas.

Com relação ao PFC, utilizou-se a regra do quociente que possibilita o cálculo de combinações a partir da divisão entre o número de arranjo e o número de permutações, que apresenta uma relação entre alguns tipos diferentes de problemas combinatórios. Observa-se na listagem que cada possibilidade foi contada duas vezes, que é justamente a quantidade de permutações de dois elementos 2! =2. Quando se divide o número de arranjos obtidos com o PFC pelo número de permutações da quantidade escolhida, obtém-se a combinação. (Se a escolha fosse de 3 elementos, se dividiria por 3! =6). A mesma analogia pode ser realizada na discussão da fórmula da combinação. Faz-se necessário para a compreensão de fórmulas combinatórias, oportunizar a discussão em sala de diferentes atividades que apresentam as relações entre fórmulas, entre as fórmulas e PFC, bem como, com outras diferentes representações simbólicas.

O problema de combinação com repetição adiciona o invariante de repetição ao problema de combinação simples. Merayo (2015) define esse problema como:

> Seja um conjunto formado por m elementos todos eles distintos entre sí. Recebe o nome de combinação com repetição, cada grupo formado por n elementos, distintos ou repetidos, tomados dos m dados, considerando como grupos iguais os formados pelos mesmos objetos repetidos igual número de vezes (Merayo, 2015, p. 321).

Dessa forma, entende-se que o invariante de repetição nesse caso gera novas possibilidades. Discute-se um exemplo a seguir:

Exemplo de combinação com repetição: O dominó é um jogo muito popular entre os estudantes. São usadas peças com formatos de paralelepípedo, em que uma das faces é marcada por pontos indicando valores numéricos, onde nessa face é possível agrupar dois blocos de número. Quantas peças diferentes são possíveis de se formar com algarismos de 1 a 4?

Na resolução dessa questão pode ser utilizada diferentes representações simbólicas, no quadro 4 utilizou-se uma listagem e o uso da fórmula.

Quadro 4. Representações simbólicas para um problema de combinação com repetição

Listagem	Fórmula
Números: 1,2,3,4 Possibilidades de dominó: 11,12,13,14 21,22,23,24 31,32,33,34 41,42,43,44 10 possibilidades	$C_{m+n-1,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m+n-1-n)!\,n!}$ $C_{5,2} = \frac{(4+2-1)!}{(4+2-1-2)!\,2!}$ $C_{5,2} = \frac{5!}{3!\,2!}$ $C_{5,2} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}$ $C_{5,2} = \frac{20}{2} = 10$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Com relação ao invariante de repetição observa-se explicitamente na listagem, as peças de dominó que são chamadas de carroças (11,22,33,44) que possuem dois algarismos iguais, que geram novas possibilidades. Já com relação a Fórmula o invariante de repetição de elementos, encontra-se de maneira subtendida.

3 METODOLOGIA

O estudo foi realizado em uma turma de 24 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual, no Município de Caruaru-PE. A escola foi escolhida pela disponibilização da gestão e do professor de matemática em participar de uma pesquisa e a turma foi selecionada pela disponibilidade da carga horária do professor.

A aplicação foi dividida em dois momentos, primeiro momento foi uma conversar com o professor de como seria realizado o questionário em sala, onde foi apresentado o tema e os objetivos da pesquisa, definindo também o dia e tempo de aula para a coleta.

No segundo momento foi a aplicação do questionário, onde fiz uma breve apresentação do tema da pesquisa e leitura do questionário para ser entregue aos alunos. O professor preferiu permanecer em sala para acompanhar a aplicação e auxiliar a entrega do questionário.

O questionário foi constituído de quatro questões: 1° questão combinação com repetição, 2° questão arranjo com repetição, 3° questão arranjo simples e 4° questão combinação simples. Cada questão foi dividida em alguns itens que ampliavam gradativamente o número de possibilidades do problema e ao final solicitava uma regra ou uma maneira para sistematizar as reflexões tidas ao longo dos itens. Desse modo, pretende-se que o aluno perceba no processo se a estratégia escolhida continua válida ou não, e se ele consegue chegar a uma generalização.

Para analisar quais dificuldades os alunos mais têm com relação ao conteúdo, foi verificado se estudantes do ensino médio identificam a presença do invariante de repetição em problemas de arranjo e combinação; foi averiguado semelhanças e diferenças apresentadas pelos estudantes sobre problemas de arranjo e combinação, com e sem a presença do invariante de repetição; foi investigado as justificativas para resolução dos problemas de arranjo e combinação apresentadas pelos estudantes.

Figura 1. Questionário

Questão 1) O dominó é um jogo muito popular entre os estudantes. São usadas peças com formatos de paralelepípedo, em que uma das faces é marcada por pontos indicando valores numéricos, onde nessa face é possível agrupar dois blocos de números. Com base nisso responda.

A) Quantas peças são possíveis de se formar com algarismos de 1 a 4?

B) Liste todas essas peças abaixo.

C) Quantas peças são possíveis de se formar com algarismos de 1 a 5?

D) Você consegue descobrir uma regra para não esquecer nenhuma das peças de dominó, nem as repetir caso fosse adicionados mais algarismos? Justifique sua resposta utilizando desenhos, escritas, cálculos e outras ideias.

Questão 2) Os celulares oferecem uma função para proteger suas informações. Essa proteção consiste na definição de uma senha para o desbloqueio de tela, que pode ser formada com vários dígitos escolhidos dentre os algarismos de 1 a 4, impedindo que outras pessoas tenham acesso a seus dados. Certo dia Tiago decidiu usar essa função criando uma senha com 3 dígitos para facilitar sua memorização. Mas ele acabou esquecendo a própria senha e teve que levar para um técnico recuperá-la. O técnico utilizou um software que calcula todas as possibilidades de senhas para que possa ser tentado uma por uma até decodificar a senha do celular.

A) Quantas senhas o software apresentou para o técnico testar?

D) Você consegue descobrir uma regra para não esquecer nenhuma das peças de dominó, nem as repetir caso fosse adicionados mais algarismos? Justifique sua resposta utilizando

B) Se fosse possível adicionar os demais algarismos de 0 a 9, quantas seriam as senhas possíveis?

C) Apresente uma regra para descobrir a quantidade total de senhas. Justifique sua resposta utilizando desenhos, escritas, cálculos e outras ideias.

Questão 3) Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, 6 alunos se candidataram para os cargos de presidente e vice-presidente.

A) De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas grêmio?

C) Apresente uma regra para descobrir a quantidade total possibilidades para ocupar as vagas do grêmio estudantil. Justifique sua resposta utilizando desenhos, escritas, cálculos e outras ideias.

Questão 4) Com a liberação das aulas em meio a pandemia do COVID-19, no primeiro dia de retorno, apenas 6 alunos da mesma turma compareceram à escola para a aula de matemática. No final da aula, ao irem embora os alunos foram se despedindo uns dos outros com um soco de mão, seguindo as medidas de prevenção como o distanciamento seguro.

A) Quantos socos de mão foram dados?

B) Se no momento da saída o professor tivesse junto com os alunos para se despedirem, quantos socos de mão teriam dados?

C) Faça a listagem das possibilidades da forma que melhor represente seu pensamento, seja por meio de tabela, diagrama ou desenho.

Para validar essas questões, o questionário foi apresentado no Grupo de Estudo em Raciocínios Combinatórios e Probabilísticos – GERAÇÃO liderado pela professora Rute Borba. Nesse sentido reformulamos as questões para deixá-las em níveis semelhantes de dificuldade e sem recursos que possam auxiliar a construção de alguma representação, em detrimento de outras. As questões foram discutidas e avaliadas, verificando a contextualização e alterando valores de modo a apresentar de outra forma para que eles visualizem melhor os tipos de problemas.

A duração da aplicação foi de 40 minutos, incluindo apresentação e distribuição do questionário, com o auxílio do professor para a organização da turma. Na apresentação do questionário foi informado aos alunos que poderiam utilizar desenho, escrita, cálculo e outras ideia que chegassem a uma conclusão para responder as questões.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A pesquisa baseia nas dificuldades de resolução de problemas em arranjo e combinação com repetição e sem repetição com alunos do 3° ano do ensino médio para entender esse processo verificando os tipos de erros e analisando as respostas dos alunos para tentar identificar se os estudantes conseguem uma generalização a partir dos contextos evidenciados, classificando as estratégias realizada. Os resultados foram analisados de forma qualitativa onde será apresentado as relações dos erros e resposta analisando as semelhanças e diferenças apresentadas pelos estudantes sobre problemas de arranjo e combinação, com e sem a presença do invariante de repetição, e investigar as justificativas para resolução dos problemas de arranjo e combinação apresentadas pelos estudantes.

Com esse método, podemos não apenas responder a perguntas de pesquisa, mas também ganhar uma compreensão mais profunda dos processos e significados que estão subjacentes aos dados. Esta introdução fornece uma visão geral dos primeiros passos na análise de dados qualitativa, à medida que avançamos no processo, exploraremos a análise dos dados, a interpretação e a apresentação de resultados.

4.1 Análise das respostas dos alunos

Recolhemos esses dados por meios dos questionários, organizamos as informações em tabela e analisamos os resultados com o objetivo de identificar se os alunos visualizam o invariante de repetição. Para analisa e avaliar as respostas dos alunos, definimos para as repostas com acerto total (AT) com peso de nota 2; acerto parcial (AP) com peso de nota 1; resposta em branco (B); resposta que não há relação com a combinatória (R); resposta errada (E) com peso de nota 0 como mostra no quadro a seguir.

Tabela 1. Respostas dos alunos

SUJEITO	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24
QUESTÃO 1 A	AT	AP	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	E	E	AT	AT	E	AT	AT	E	E	E
QUESTÃO 1 B	AT	AP	AT	AT	AP	AT	AT	AT	AT	AP	AT	AT	AT	AT	E	E	AT	AT	E	AP	AP	E	E	E
QUESTÃO 1 C	AT	AT	AT	AT	AP	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	B	E	E	AT	AT	E	AP	AP	E	E	E
QUESTÃO 1 D	E	B	E	E	E	R	R	E	R	E	E	R	R	B	E	E	R	E	E	B	B	R	E	E
QUESTÃO 2 A	AT	AT	AT	AT	AT	E	AT	E	AT	E	E	AP	E	E	E	E	R	E	E	E	B	E	E	E
QUESTÃO 2 B	AP	AP	AP	AP	AT	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E	E	R	E	E	E	B	E	E	E
QUESTÃO 2 C	B	AP	E	E	E	E	E	E	E	E	B	AT	E	E	E	E	R	E	E	R	B	E	E	B
QUESTÃO 3 A	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	B	E	E	R	E	E	E	AP	E	B	E	E	E
QUESTÃO 3 B	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	B	E	E	R	E	E	E	AT	E	B	E	E	E
QUESTÃO 3 C	E	B	R	R	B	E	E	E	E	E	B	B	E	B	R	E	R	E	E	E	B	E	E	B
QUESTÃO 4 A	E	R	E	E	B	AT	AT	E	AT	AP	AP	B	E	E	E	E	AP	AT	E	E	B	E	E	B
QUESTÃO 4 B	E	B	E	E	B	AT	E	E	E	AP	AP	B	E	B	E	E	AP	AT	E	E	B	E	E	B
QUESTÃO 4 C	R	B	R	E	B	AP	E	E	E	E	B	B	E	E	E	E	R	AP	E	E	B	E	E	B

Fonte: Autor (2024)

A análise do Tabela 1 evidencia a diversidade de respostas e o nível de compreensão dos alunos no que se refere à Análise Combinatória. Os dados mostram a relação de resposta dos alunos com acertos e erros, com esses dados iremos iniciar o estudo da análise. Observasse um quantitativo relevante de erros que reflete uma divergência significativa nas resoluções das questões que abrangem os invariantes de repetição, apresentando uma variedade de interpretações e abordagens dos alunos frente aos desafios propostos.

Observamos que as Questões 1A, 1B e 1C, que abordam conceitos introdutórios de combinatória, apresentam um número maior de acertos totais (AT) e parciais (AP), o que indica uma familiaridade maior dos estudantes com problemas mais simples ou tradicionais de contagem. Esta conclusão é suportada pelo fato de que as respostas em branco (B) são minimamente expressivas e as respostas erradas (E) aumentam nos itens posteriores das questões, algo alinhado ao desafio crescente ou dificuldade na aplicação de conceitos em contextos menos convencionais.

Curiosamente, a Questão 1D apresenta um contraste marcante com as anteriores, indicando uma dificuldade substancial dos alunos, evidenciada pelo número elevado de respostas erradas (E) e em branco (B), e também respostas que não têm relação com a combinatória (R). Nesse sentido, o invariante de repetição constitui um obstáculo significativo para a compreensão dos alunos, que pode estar relacionado a uma deficiência na base conceitual ou na capacidade de aplicar conceitos matemáticos a situações novas e complexas.

No que tange às Questões 2A, 2B e 2C, notamos uma tendência de declínio nos acertos totais (AT) e um incremento nas respostas erradas (E) e em branco (B). Isso denota que, à medida que a complexidade das questões aumenta, com a introdução do invariante de repetição, há um decréscimo na capacidade de resolução correta. Dessa forma, as questões exigiram dos estudantes um nível mais aprofundado de raciocínio e uma habilidade de aplicação de conceitos que ainda não foi plenamente desenvolvida ou consolidada.

A análise das Questões 3A, 3B e 3C revela uma predominância de respostas erradas (E), o que indica uma desconexão entre o ensino dos conceitos combinatórios e sua aplicação prática. Ademais, a presença de respostas em branco (B) e respostas que não se relacionam com a combinatória (R) sugere que, além das dificuldades conceituais, pode haver também um problema na compreensão das perguntas ou na transferência de conhecimento para o contexto dos problemas propostos.

Por fim, nas Questões 4A, 4B e 4C, observamos uma dispersão de respostas que sugere uma flutuação no entendimento dos alunos sobre os conceitos avaliados. A inconsistência nas respostas certas, parcialmente certas e erradas aponta para uma instabilidade na base de conhecimento e na confiança com que os alunos abordam problemas combinatórios mais desafiadores.

A heterogeneidade das respostas reflete, portanto, não apenas uma variedade de níveis de compreensão dos estudantes, mas também a necessidade de uma investigação mais profunda sobre as metodologias de ensino empregadas. No quadro a seguir, estão dispostas as quantidades de acertos e erros dos estudantes.

Tabela 2. Quantidade de acertos e quantidade de erros

QUESTÕES	AT	AP	R	B	E
COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO					
1A	18	1	0	0	5
1B	13	5	0	0	6
1C	14	3	0	1	6
1D	0	0	7	4	13
ARRANJO COM REPETIÇÃO					
2A	7	1	1	1	14
2B	1	4	1	2	16
2C	1	1	2	4	16
ARRANJO SIMPLES					
3A	0	1	1	3	19
3B	1	0	1	3	19
3C	0	0	3	7	14
COMBINAÇÃO SIMPLES					
4A	4	3	1	4	12
4B	2	3	0	6	13
4C	0	2	3	6	14

Fonte: Autor (2024)

Na Tabela 2 separamos também a quantidade de acerto e erro desses alunos para melhor visualizar as informações, portanto, apresentamos uma visão quantitativa das respostas dos alunos às questões de combinatória. De forma imediata, salta aos olhos a variação significativa entre os diferentes tipos de questões, sugerindo uma relação direta entre a complexidade conceitual do problema e o desempenho dos estudantes.

Nas questões de combinação com repetição (1A-1C), observa-se um predomínio de acertos totais (AT), indicando uma assimilação satisfatória dos conceitos fundamentais por parte da maioria dos alunos. No entanto, a presença de erros (E), mesmo que em menor escala, aponta para a necessidade atenção para aqueles que não alcançaram a compreensão plena. A questão 1D destoa completamente das anteriores, com um expressivo número de respostas erradas (E) e que não têm relação com a combinatória (R), demonstrando desconhecimento na aplicação dos conceitos envolvendo a repetição de elementos.

Ao examinar as questões de arranjo com repetição (2A-2C), detecta-se uma queda nos acertos totais e um aumento alarmante de respostas erradas. Resultado este que pode ser interpretado como um indicativo de que, quando inseridos no contexto de arranjos, os invariantes de repetição se tornam uma fonte de confusão para os alunos, talvez devido à complexidade adicional que esses invariantes introduzem no processo de contagem.

Um fator preocupante é a performance nas questões de arranjo simples (3A-3C), onde há uma ausência total de acertos e um avassalador número de erros. O que nos dá o diagnóstico de uma deficiência estrutural no ensino-aprendizagem desses conceitos. O alto número de respostas em branco (B) é um indicativo da falta de confiança ou do não reconhecimento da aplicabilidade das estratégias de resolução aprendidas.

Por fim, nas questões de combinação simples (4A-4C), nota-se uma melhora modesta nos acertos totais em comparação com as questões de arranjo simples, mas ainda assim um número considerável de erros persiste. Este fato pode estar refletindo uma dificuldade intrínseca dos estudantes em diferenciar e aplicar os conceitos de arranjo e combinação quando removidos os elementos de repetição.

A análise dos dados em questão ressoa com a proposta de Vergnaud e sua Teoria dos Campos Conceituais. Como dito, a teoria se debruça sobre a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo, postula que a compreensão de um conceito matemático decorre da interação entre o conjunto de situações-problema (S), os invariantes operatórios (I) e as representações simbólicas (R) que o aluno é capaz de mobilizar.

O desempenho dos alunos nas questões de combinatória, especialmente aquelas que envolvem repetição, quando interpretado à luz dos invariantes operatórios, descobre-se que os invariantes são essenciais para a compreensão e a execução de tarefas combinatórias, pois são as propriedades ou relações que se mantêm constantes mesmo diante de um conjunto de transformações ou variações. Dessa forma, a análise dos dados mostra que há uma dificuldade substancial em manter e aplicar esses invariantes de forma consistente, principalmente quando o contexto da questão se afasta dos exemplos típicos e entra em territórios mais complexos, como os arranjos com repetição.

A discrepância observada entre os acertos nas questões de combinação com repetição e os erros nas questões de arranjo simples e combinação simples é um reflexo das dificuldades na construção e aplicação de representações simbólicas adequadas (R). As representações simbólicas, sejam elas linguísticas, gráficas ou formais, são fundamentais para que os alunos possam expressar e manipular os conceitos matemáticos em jogo. A presença de um número elevado de respostas erradas e em branco denota o possível descompasso entre o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e as demandas das situações-problema propostas.

Vergnaud também enfatiza a ideia de que o domínio de um campo conceitual requer a aquisição de uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão. Os resultados dos quadros são evidências de que os alunos ainda não alcançaram esse domínio, especialmente em relação aos problemas mais complexos que exigem o reconhecimento e a manipulação de invariantes.

Além disso, o elevado número de respostas que não têm relação com a combinatória (R) nas questões mais complexas é um indicativo de uma falha na capacidade de relacionar os invariantes operatórios com as situações-problema (S). O que sugere uma necessidade de revisão das práticas pedagógicas, em que o ensino deva favorecer a construção de significados mais sólidos e a capacidade de transferência para diferentes contextos. No próximo quadro analisado, apresentamos os protocolos de erros dos estudantes.

Tabela 3. Protocolos de erros dos estudantes com tipos de diferentes questões

	ERROS APRESENTADOS
QUESTÃO 1	Uso equivocado da fórmula para generalização Erro na estratégia para generalização Uso inadequado da listagem de possibilidades Uso incompleto da listagem de possibilidades Analise incompleta da listagem
QUESTÃO 2	Uso inadequado de PFC Multiplicação equivocada Uso inadequado de listagem de possibilidades Uso inadequado de fatorial Uso inadequado de formula Uso inadequado de diagrama
QUESTÃO 3	Multiplicação equivocada Uso inadequado de formula Uso inadequado da permutação Adição inadequada Inversão de invariante de ondem pelo de escolha Uso equivocado de divisão
QUESTÃO 4	Multiplicação equivocada Uso inadequado de formula Inversão de invariante de escolha pelo de ordem Soma equivocada

Fonte: Autor (2024)

Nos erros apresentados para a Questão 1, é perceptível uma lacuna na habilidade de generalização, um dos pilares do raciocínio matemático avançado e essencial para a compreensão da Análise Combinatória. O uso equivocado de fórmulas e estratégias para generalização, bem como a listagem inadequada de possibilidades, refletem uma compreensão superficial dos conceitos, onde os alunos possivelmente se apegam a procedimentos mecânicos sem uma verdadeira internalização dos princípios subjacentes. Este fato ressoa com a teoria de Vergnaud, onde a construção do conhecimento exige um conjunto de invariantes operatórios que são fundamentais para a compreensão e o manejo das situações-problema.

Quanto aos erros na Questão 2, percebe-se uma recorrência na utilização inadequada do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e erros em operações básicas como a multiplicação. A presença de falhas no uso de ferramentas como o fatorial e diagramas mostra deficiências na representação e no processamento da informação combinatória. Esses erros ao serem interpretados como um reflexo de um ensino que não conseguiu vincular satisfatoriamente os conceitos teóricos às suas aplicações práticas, é uma crítica que se assimila aos postulados de Vergnaud sobre a importância das representações simbólicas na estruturação do conhecimento matemático.

Os erros identificados na Questão 3 mostram dificuldades adicionais com a multiplicação e uso de fórmulas, além de equívocos na aplicação de permutações e divisões. A inversão do invariante de ordem pelo de escolha destaca uma confusão conceitual que fruto de uma abordagem pedagógica que não enfatiza suficientemente a relação entre os conceitos de arranjo e permutação, ambos cruciais para a compreensão da Análise Combinatória.

Por fim, a Questão 4 revela erros semelhantes em multiplicação e aplicação de fórmulas, além de equívocos na soma. A inversão do invariante de escolha pelo de ordem denota novamente uma compreensão distorcida ou incompleta dos conceitos fundamentais da combinatória. São erros que reiteram a importância de se abordar os invariantes não apenas como conceitos isolados, mas como parte de um campo conceitual mais amplo, onde a compreensão de um elemento reforça e expande a compreensão dos demais. Nos quadros a seguir, apresentamos a média de acerto por questão dos estudantes em que separamos (AT) acerto total, (ATp) acerto total parciais, (AP) acerto parcial parciais e (Ep) erro parciais.

Tabela 3. Média de acerto por questão (1A, 1B, 1C e 1D)

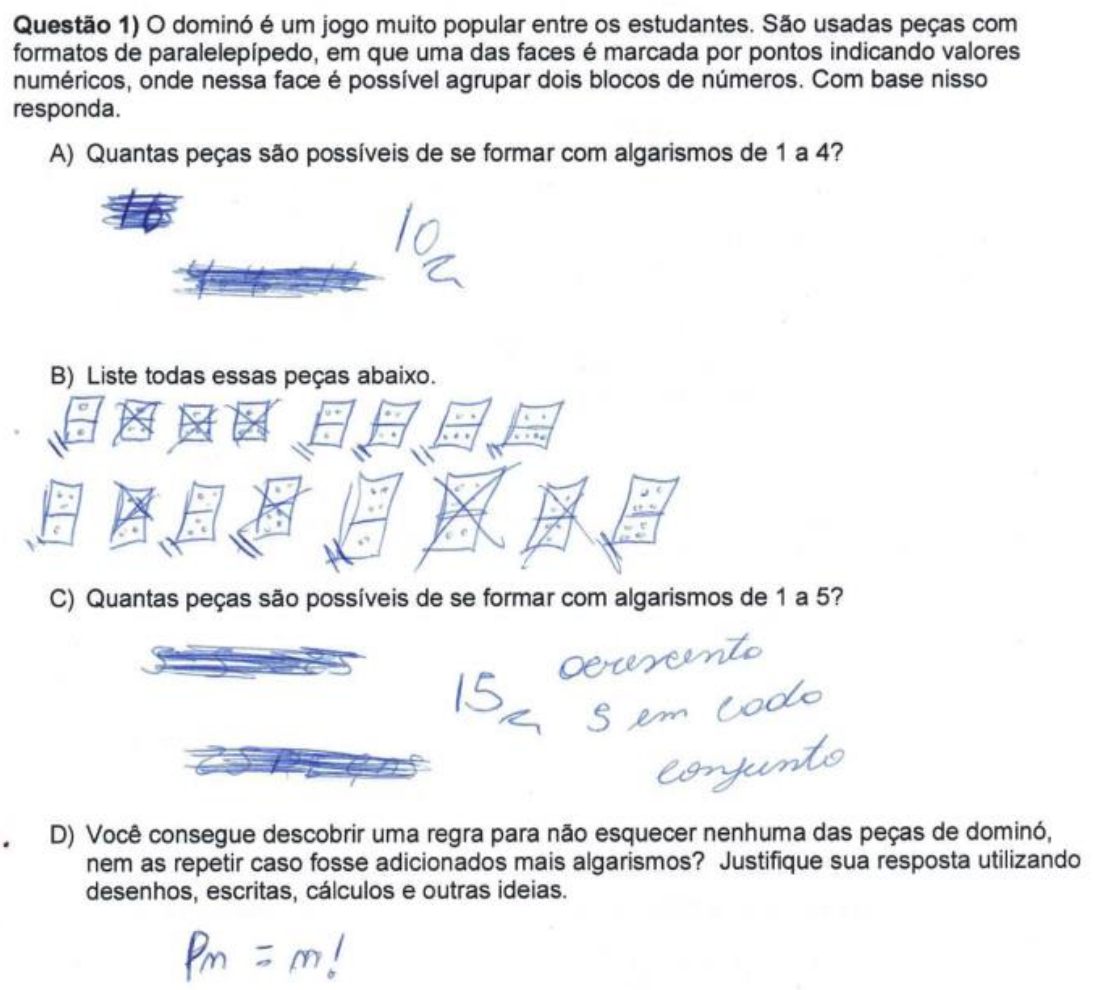
QUESTÃO	AT	Atp	AP	App	E	Ep	SOMA	MEDIA	MEDIA TOTAL
1A	18 *(2)	36	1*(1)	1	5*(0)	0	37	7,7	
1B	13 *(2)	26	5*(1)	5	6*(0)	0	31	6,45	5,15
1C	14 *(2)	28	3*(1)	3	6*(0)	0	31	6,45	
1D	0*(2)	0	0*(1)	0	13*(0)	0	0	0	

Fonte: Autor (2024)

Como dito, a Tabela 4 ilustra a média de acertos por questão, trazendo um parâmetro numérico para avaliar o desempenho dos alunos nas diferentes categorias de questões de Análise Combinatória.

Para a Questão 1A, a média de 7,7 reflete um grau de compreensão relativamente alto. O resultado mostra que os alunos possuem uma boa base no que tange a problemas de combinatória mais familiares a eles. É importante, contudo, não desconsiderar o fato de que essa média ainda revela espaço para melhorias, especialmente em relação aos erros (E) que não contribuíram para a soma total, mantendo a média total do conjunto de questões 1 em 5,15.

Figura 2. Protocolo de resolução do aluno A1 para a Questão 1A, 1B, 1C e 1D



Questão 1) O dominó é um jogo muito popular entre os estudantes. São usadas peças com formatos de paralelepípedo, em que uma das faces é marcada por pontos indicando valores numéricos, onde nessa face é possível agrupar dois blocos de números. Com base nisso responda.

A) Quantas peças são possíveis de se formar com algarismos de 1 a 4?

10

B) Liste todas essas peças abaixo.

C) Quantas peças são possíveis de se formar com algarismos de 1 a 5?

15 acrescento 5 em cada conjunto

D) Você consegue descobrir uma regra para não esquecer nenhuma das peças de dominó, nem as repetir caso fosse adicionados mais algarismos? Justifique sua resposta utilizando desenhos, escritas, cálculos e outras ideias.

$P_m = m!$

Fonte: Autor (2024)

A consistência nas médias das Questões 1B e 1C, ambas com 6,45, indica que os alunos mantêm um desempenho uniforme em problemas de um nível de complexidade similar. No entanto, a presença de acertos parciais (AP) e (App) mostra que, enquanto alguns conceitos estão sendo compreendidos, há detalhes ou nuances que ainda escapam ao entendimento pleno dos estudantes. Esta percepção é reforçada pela análise da Questão 1D, onde uma média de 0 explicita uma lacuna significativa na compreensão, possivelmente relacionada à aplicação de conceitos mais complexos ou ao raciocínio abstrato necessário para a resolução de tais problemas.

O peso dos erros (E) nas Questões 1B, 1C e, de maneira mais drástica, na 1D, onde não houve nenhum acerto total (AT) ou parcial (AP), traz a necessidade de uma investigação sobre as metodologias de ensino aplicadas. As médias, particularmente a média total, funcionam como um sinalizador de que os processos educativos podem estar falhando em promover um entendimento robusto e aplicável dos conceitos de Análise Combinatória.

Tabela 4. Média de acerto por questão (2A, 2B e 2C)

QUESTÃO	AT	Atp	AP	App	E	Ep	SOMA	MEDIA	MEDIA TOTAL
2A	7*(2)	14	1*(1)	1	14*(0)	0	15	3,12	
2B	1*(2)	2	4*(1)	4	16*(0)	0	6	1,25	1,6
2C	1*(2)	2	1*(1)	1	16*(0)	0	3	0,6	

Fonte: Autor (2024)

Para a Questão 2A, observa-se que a média de 3,12, apesar de ser a maior entre as três questões, ainda denota um desempenho moderado. O que sugere que, enquanto alguns alunos conseguiram responder corretamente à questão (indicado pelos 7 acertos totais - AT), houve uma quantidade significativa de respostas totalmente erradas (14 erros - E), indicando uma dificuldade na compreensão ou aplicação dos conceitos matemáticos necessários para a resolução da questão.

Ao considerar a Questão 2B, a média cai drasticamente para 1,25, com uma redução acentuada na soma total de pontos alcançados. Apenas 1 acerto total (AT) foi observado, em contraste com 16 erros (E), o que reforça a interpretação de que os alunos enfrentaram desafios substanciais ao lidar com o problema proposto. Mais uma vez, o resultado pode ser um indicativo da necessidade de revisão da metodologia de ensino ou da forma como o conteúdo é abordado, assim, retornamos a questão da importância de um ensino que desenvolva compreensão, aplicação e análise crítica.

Figura 3. Protocolo de resolução do aluno A2 para a Questão 2A, 2B e 2C

Questão 2) Os celulares oferecem uma função para proteger suas informações. Essa proteção consiste na definição de uma senha para o desbloqueio de tela, que pode ser formada com vários dígitos escolhidos dentre os algarismos de 1 a 4, impedindo que outras pessoas tenham acesso a seus dados. Certo dia Tiago decidiu usar essa função criando uma senha com 3 dígitos para facilitar sua memorização. Mas ele acabou esquecendo a própria senha e teve que levar para um técnico recuperá-la. O técnico utilizou um software que calcula todas as possibilidades de senhas para que possa ser tentado uma por uma até decodificar a senha do celular.

A) Quantas senhas o software apresentou para o técnico testar?

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ O Software poderá tentar 64 senhas diferentes

B) Se fosse possível adicionar os demais algarismos de 0 a 9, quantas seriam as senhas possíveis?

$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. O Software poderá tentar 729 senhas diferentes.

C) Apresente uma regra para descobrir a quantidade total de senhas. Justifique sua resposta utilizando desenhos, escritas, cálculos e outras ideias.

É só calcular o numero de algarismo elevado a quantidade de digito da senha.

Fonte: Autor (2024)

Na Questão 2C, a média de acertos é ainda mais baixa, com 0,6, refletindo o desempenho mais fraco neste conjunto de questões. Com somente 1 acerto total (AT) e uma prevalência de erros (16 erros - E), é patente que os alunos tiveram dificuldades significativas. O resultado, assim como o exercício, mostra que o tópico abordado na questão é particularmente desafiador.

A média total para as questões de 1,6, abaixo do que seria considerado um desempenho satisfatório, implica que, como um todo, os alunos não alcançaram um nível de compreensão efetivo dos conceitos avaliados. Esta constatação chama a atenção para uma reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas, o planejamento curricular e as estratégias de ensino, realçando a necessidade de abordagens que possam melhor atender às necessidades de aprendizagem dos estudantes e estimular o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas de forma mais eficaz e significativa.

Tabela 5. Média de acerto por questão (3A, 3B e 3C)

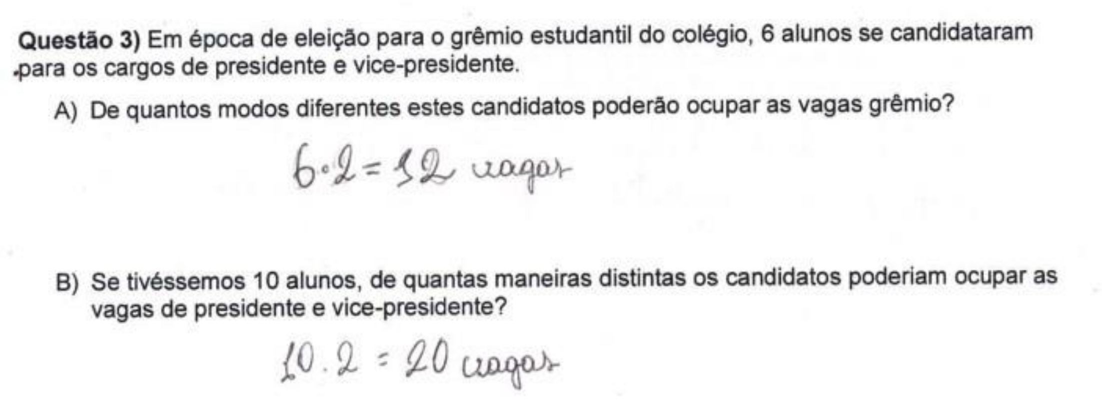
QUESTÃO	AT	Atp	AP	App	E	Ep	SOMA	MEDIA	MEDIA TOTAL
3A	0*(2)	0	1*(1)	1	19*(0)	0	1	0,2	
3B	1*(2)	2	0*(1)	0	19*(0)	0	2	0,4	0,2
3C	0*(2)	0	0*(1)	0	14*(0)	0	0	0	

Fonte: Autor (2024)

A Tabela acima reflete os resultados de desempenho dos estudantes nas questões 3A, 3B e 3C, cada uma delas representando um ponto de análise para entender as dificuldades enfrentadas pelos alunos em áreas específicas do conhecimento matemático abordado.

Para a Questão 3A, a ausência de acertos totais (AT) e uma média de apenas 0,2 indicam que os alunos não conseguiram atingir o nível de compreensão necessário para resolver a questão de maneira satisfatória. Os 19 erros (E) sugerem que os conceitos não foram assimilados de forma eficaz, apontando para uma desconexão entre o conteúdo e a aplicação em contextos problematizados.

Figura 4. Protocolo de resolução do aluno A11 para a Questão 3A e 3B



Questão 3) Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, 6 alunos se candidataram para os cargos de presidente e vice-presidente.

A) De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas grêmio?

6·2 = 12 vagas

B) Se tivéssemos 10 alunos, de quantas maneiras distintas os candidatos poderiam ocupar as vagas de presidente e vice-presidente?

10.2 = 20 vagas

Na Questão 3B, observa-se um pequeno avanço, com a presença de um acerto total (AT), refletido em uma média ligeiramente superior de 0,4. No entanto, essa melhoria é modesta e ainda destaca a necessidade de um reforço no ensino dos conceitos, dado que a grande maioria dos alunos ainda cometeu erros. A média total permanece em 0,2, reiterando a noção de que, em geral, os estudantes estão lutando com o material.

A Questão 3C apresenta um cenário semelhante ao da Questão 3A, com nenhum acerto total e uma média de 0, reforçando a percepção de que os desafios encontrados pelos alunos nessas questões são consistentes e significativos.

Esses resultados coletivos, com uma média total de 0,2 para o conjunto de questões, são indicativos de como o nível das questões é demasiado elevado para os conhecimentos adquiridos pelos alunos. A performance dos estudantes mostra ainda haver um distanciamento de conhecimentos básicos e complexos.

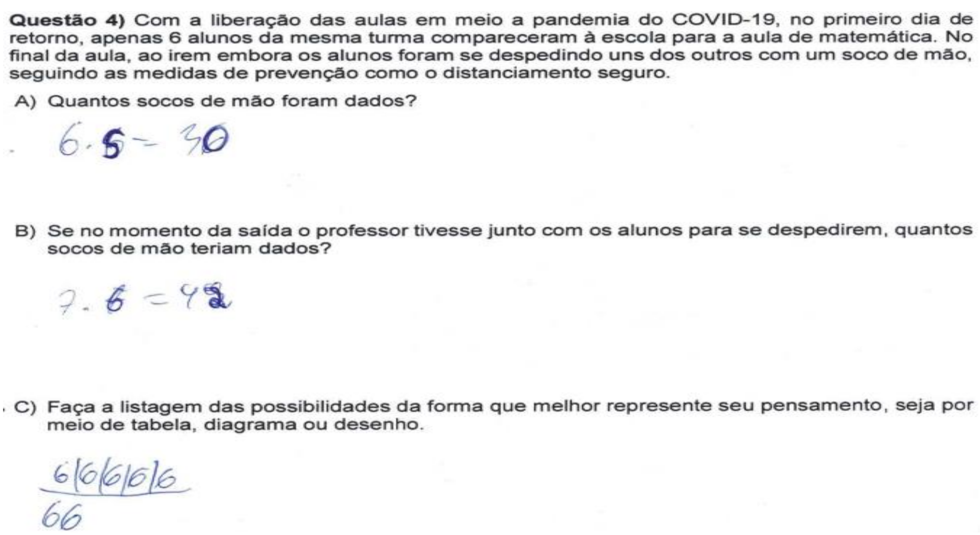
Tabela 6. Média de acerto por questão (3A, 3B e 3C)

QUESTÃO	AT	Atp	AP	App	E	Ep	SOMA	MEDIA	MEDIA TOTAL
4A	4*(2)	8	3*(1)	3	12*(0)	0	11	2,29	
4B	2*(2)	4	3*(1)	3	13*(0)	0	7	1,45	1,03
4C	0*(2)	0	2*(1)	2	14*(0)	0	2	0,4	

Fonte: Autor (2024)

Para a Questão 4A, uma média de 2,29, a mais elevada entre as três, indica que uma parcela dos estudantes conseguiu aplicar com sucesso os conceitos necessários para a resolução da questão. Contudo, o número de erros (12) ainda é significativo, o que mostra uma vez mais que, apesar dos acertos, muitos alunos encontraram dificuldades.

Figura 5. Protocolo de resolução do aluno A15 para a Questão 4°


Questão 4) Com a liberação das aulas em meio a pandemia do COVID-19, no primeiro dia de retorno, apenas 6 alunos da mesma turma compareceram à escola para a aula de matemática. No final da aula, ao irem embora os alunos foram se despedindo uns dos outros com um soco de mão, seguindo as medidas de prevenção como o distanciamento seguro.

A) Quantos socos de mão foram dados?

6 · 5 = 30

B) Se no momento da saída o professor tivesse junto com os alunos para se despedirem, quantos socos de mão teriam dados?

7 · 6 = 42

C) Faça a listagem das possibilidades da forma que melhor represente seu pensamento, seja por meio de tabela, diagrama ou desenho.

6|6|6|6|6

66

Na Questão 4B, a média cai para 1,45, o que mostra uma compreensão menos consistente dos conteúdos testados ou uma habilidade menor na aplicação de estratégias para resolver a questão. A soma total de pontos caiu em relação à questão anterior, reforçando a ideia de que os alunos encontraram mais dificuldades com este problema.

A Questão 4C apresenta a média mais baixa (0,4), com nenhum acerto total e apenas dois acertos parciais. O que mostra que a questão era mais complexa para os alunos. O número de erros (14) permanece elevado, reforçando a necessidade de reforço no ensino dos conceitos envolvidos.

Essa dificuldade se dá pelo fato do aluno inverte o invariante de escolha pelo de ordem, ou não soube identificar qual tipo de invariante estava sendo trabalhada. A média total para as questões (1,03) está abaixo do que seria considerado um desempenho satisfatório, sugerindo que, de modo geral, os alunos não atingiram um entendimento efetivo dos conceitos avaliados.

Tabela 7. Número de alunos que identificam os invariantes

CR	ESCOLHA	ORDEM	REPETIÇÃO
1A	18		17
1B	13		10
1C	14		11
1D	0		0
AR	**ESCOLHA**	**ORDEM**	**REPETIÇÃO**
2A	7	7	7
2B	4	4	1
2C	2	2	1
AS	**ESCOLHA**	**ORDEM**	**REPETIÇÃO**
3A	1	0	
3B	1	0	
3C	0	0	
CS	**ESCOLHA**	**ORDEM**	**REPETIÇÃO**
4A	4		
4B	2		
4C	0		

Fonte: Autor (2024)

A Tabela traz uma perspectiva quantitativa sobre a capacidade dos alunos de reconhecer e aplicar conceitos fundamentais da Análise Combinatória, especificamente os conceitos de escolha, ordem e repetição.

Na categoria CR, combinação com repetição, observa-se que a maioria dos alunos (18 para 1A e 14 para 1C) identifica com sucesso os invariantes relacionados à escolha e à repetição, uma compreensão razoável desses conceitos em problemas que podem ser mais diretos ou tradicionais na natureza de suas perguntas. Entretanto, a queda notável nos números para 1B e um declínio completo para 1D apontam para dificuldade crescente à medida que as questões se tornam mais complexas.

Nos problemas AR, Arranjo com repetição, o reconhecimento dos invariantes é moderado (7 para 2A) e depois diminui significativamente para 2B e 2C. Assim, embora alguns alunos consigam identificar os invariantes em contextos mais simples, há uma dificuldade consistente em aplicar esses conceitos em situações que requerem um entendimento mais aprofundado ou abstrato do material.

A categoria AS, Arranjos Simples, mostra uma dificuldade significativa, onde apenas um aluno identifica os invariantes corretamente. O que nos traz a possibilidade de desconexão na instrução ou assimilação dos conceitos, que pode estar relacionada à maneira como os invariantes são apresentados e explorados no currículo.

Para a categoria CS, Combinação Simples, os números são igualmente preocupantes, com uma diminuição acentuada na identificação dos invariantes, o que mostra que os alunos apresentam dificuldades para aplicar os conceitos de escolha em problemas de combinatória simples.

As questões com invariantes de repetição mostram uma diferença de acertos com relação as de arranjo e combinação simples, o facilitador para os acertos foi a representação por meio de listagem realizada pelos alunos. Já o quantitativo de erros nas questões de arranjo e combinação simples apresenta pelo fato de não identificação ou a inversão dos invariantes de ordem e escolha na aplicação da estratégia escolhida para resolução.

Essa análise crítica aponta para a necessidade de refletir sobre as abordagens pedagógicas em matemática, especialmente na forma como os conceitos de Análise Combinatória são introduzidos, principalmente com relação ao invariante de repetição, praticados e consolidados. A identificação de invariantes é crucial para o raciocínio matemático e para a solução eficaz de problemas, e esses resultados indicam que os alunos podem se beneficiar de estratégias de ensino que reforcem a compreensão e aplicação desses conceitos-chave. Isso pode incluir a utilização de modelos visuais, a prática de problemas contextualizados e uma ênfase em estratégias de resolução de problemas que cultivem um entendimento mais profundo e uma maior fluência com os invariantes combinatórios.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através da análise dos dados coletados, observa-se que os estudantes enfrentam dificuldades significativas ao abordar problemas que requerem o reconhecimento e a aplicação de invariantes operatórios. Esses desafios são mais pronunciados em questões que envolvem arranjos com repetição, onde a complexidade adicional imposta pelo invariante de repetição parece sobrecarregar a capacidade de raciocínio dos alunos. Essa situação ressalta a importância de um ensino que não apenas apresente os conceitos matemáticos, mas que também facilite a compreensão profunda e a habilidade de aplicar esses conceitos de maneira flexível a uma variedade de situações-problema.

As diferenças nas médias de acertos entre as questões de combinatória simples e aquelas com repetição, assim como a inconsistência no reconhecimento dos invariantes, apontam para a necessidade de práticas pedagógicas que reforcem as representações simbólicas e a conexão entre os conceitos matemáticos e sua aplicação. Os resultados sugerem que estratégias como a contextualização de problemas, o uso de exemplos variados e a promoção de discussões em sala de aula sobre estratégias de resolução podem ser particularmente benéficas.

É também importante considerar que a habilidade de interpretar corretamente os enunciados dos problemas e de distinguir entre diferentes tipos de questões combinatórias é fundamental para o sucesso na resolução dessas questões. A prática educativa deve, portanto, enfatizar a leitura crítica e a interpretação de problemas, além da execução de procedimentos matemáticos.

Finalmente, as dificuldades apresentadas pelos alunos neste estudo salientam a relevância de se explorar metodologias de ensino que estejam alinhadas com a Teoria dos Campos Conceituais. A adoção de uma abordagem que considere a aprendizagem como um processo integrado e progressivo de construção de conhecimento pode oferecer caminhos para superar as barreiras identificadas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. ; FERREIRA, A. C. . A Comunicação Matemática como ferramenta para o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio de Itabirito (MG): dois estudos de caso. In: XIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 2009, **Anais....** Goiânia: As relações entre pesquisa e as práticas pedagógicas em sala de aula, 2009.

ARAÚJO, K. L.S. **Problemas de arranjo e combinação**: uma intervenção a partir dos invariantes prescritivos de ordem e repetição de combinatória de ensino médio Trabalho de Conclusão de Curso. (Curso de Matemática-Licenciatura) Centro Acadêmico do Agreste. Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru: O Autor, 2017.

ARAÚJO, K.L.S; ROCHA, C. A. Como alunos de Ensino Médio Compreendem os Invariantes Prescritivos de Ordem e Repetição em Problemas de Arranjo e Combinação? **Rev. Ens. Educ. Cienc. Human.,** v. 19, n.2, p. 142-150, 2018.

BASTOS, A.C. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações Problema e sob uma Abordagem Histórica. EBRAPEM, 17 (Congresso). **Anais...** VITÓRIA-ES, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – *primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental*. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto**. PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BORBA, R.; PESSOA, C. *O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio*. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: ENEM, 2010.

BORBA, R.E.S.R. O raciocínio combinatório na educação básica. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 10. **Anais...** Salvador, 2010.

BORBA, R.E.S.R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. **Anais...** Curitiba, 2013.

BORBA, R. E. S. R.; MONTENEGRO, J. A.; SANTOS, J. A. F. L. 10 anos pesquisando o ensino e a aprendizagem de Combinatória e de Probabilidade. In: BORBA, R. E. S. R.; MONTENEGRO, J. A.; SANTOS, J. A. F. L. (Orgs.). **Investigações em ensino e em aprendizagem:** uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração). Recife: Ed. UFPE, 2021

GONÇALVES, R. R. S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio:** a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica. Ed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, PMPMAT, 2014.
https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2182/1753
https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189

KAPUR, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 1970. v.3, n.1, p.111–127.

MERAYO, F.G. **Matemática Discreta**. Madri: Ed. Paraninfo, 2015.

MOREIRA, *A* Teoria Dos Campos Conceituais De Vergnaud, O Ensino De Ciências E A Pesquisa Nesta Área *(Vergnaud's conceptual field theory, science education, and research in this area)*. **Investigações em Ensino de Ciências**. V.7, n.1, pp. 7-29, 2002.

MORGADO, A.C; CARVALHO, J.C.P.; CARVALHO,P.C.P; FERNANDEZ,P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. IMPA/SBM: Rio de Janeiro,2006.

PESSOA, C.A.S. Interação social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. In: 25ª Reunão Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002, Caxambu / MG. Educação: manifestos, lutas e utopias, 2002.

PESSOA, C.; SANTOS, L.. *Listagem, Invariantes, Sistematização e Generalização:* Um caminho para o Ensino de Combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais...** Fortaleza-CE: SBEM, 2012.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. Combinatória no Ensino Médio*:* influências do guia do Programa Nacional do Livro Didático brasileiro. In: Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2017, Granada. **Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico**. Granada: UGR, 2017. p. 1-10.

ROCHA, C. R. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1, 1993 Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 1993. p. 1-26 .

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavio**r, 1998, v. 17, n.2, p. 167-181.

VERGNAUD, G. *O que é aprender?* In: BITTAR, Marilena. MUNIZ, Cristiano Alberto (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV2009.