



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JONATHAN JUSTINO ÁPOS CASSIMIRO

**ANÁLISE DE EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA
MULTIOBJETIVA BASEADA EM CONFIABILIDADE APLICADA
A UM PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO**

Recife

2024

JONATHAN JUSTINO ÁPOS CASSIMIRO

**ANÁLISE DE EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA
MULTIOBJETIVA BASEADA EM CONFIABILIDADE APLICADA A UM
PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta.

Coorientadora: Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva.

Recife

2024

Catálogo na fonte:
Bibliotecária Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

C345a Cassimiro, Jonathan Justino Ápos.
Análise de eficiência computacional de otimização robusta multiobjetiva baseada em confiabilidade aplicada a um pórtico plano de concreto armado / Jonathan Justino Ápos Cassimiro. – 2024.
90 f.: il., fig., tab., abrev. e siglas.

Orientador: Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta.
Coorientadora: Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Recife, 2024.
Inclui referências e apêndices.

1. Engenharia civil. 2. Otimização baseada em confiabilidade. 3. Otimização robusta multiobjetiva. 4. Pórticos de concreto armado. 5. Eficiência computacional. 6. Python. I. Motta, Renato de Siqueira (Orientador). II. Silva, Silvana Maria Bastos Afonso da (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2024-37

JONATHAN JUSTINO ÁPOS CASSIMIRO

**ANÁLISE DE EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA
MULTIOBJETIVA BASEADA EM CONFIABILIDADE APLICADA A UM
PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre ou Doutor em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 30/01/2024.

BANCA EXAMINADORA

Participação por videoconferência
Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Participação por videoconferência
Prof. Dr. Paulo Fernando Silva Sousa (Examinador externo)
Universidade de Pernambuco

Participação por videoconferência
Profa. Dra. Juliana von Schmalz Torres (Examinadora externa)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho, em primeiro lugar, a Deus, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino, meu guia e socorro presente na hora da angústia. Expresso minha gratidão aos meus pais, Jeane Cleide Justino de Souza e Jailton Ápos Cassimiro, "In Memoriam", e às minhas queridas irmãs. Um agradecimento especial é dedicado a Paloma Marque, a quem devo muito auxílio, paciência e carinho.

Quero expressar minha gratidão aos amigos, colegas e às pessoas com quem convivi ao longo desses anos no ambiente acadêmico. A experiência de uma produção compartilhada na comunhão com amigos foi a melhor vivência da minha formação acadêmica. Destaco, em especial, a contribuição fundamental dos colegas Bruno Alves e Jacqueline Nascimento, cujos trabalhos foram essenciais para o desenvolvimento do meu projeto.

Agradeço à instituição UFPE, que valoriza e incentiva seus servidores a cada vez mais se capacitarem. Manifesto minha gratidão aos meus professores, em particular aos meus orientadores Prof. Dr. Renato Motta e Prof^ª Dr^ª Silvana Bastos, por acompanharem minha trajetória, proporcionando liberdade de escolha e direcionando-me para soluções, além da paciência e motivação constantes.

Portanto, quem ouve estas minhas palavras e as pratica
É como o homem prudente que construiu a sua casa sobre a rocha.
Caiu a chuva, transbordaram os rios,
Sopraram os ventos e deram contra aquela casa,
Mas ela não caiu, porque estava alicerçada na rocha (Mt 7, 24 – 27).

RESUMO

Projetos de estruturas de concreto utilizam métodos semi-probabilísticos, que incorporam coeficientes de segurança no tratamento das incertezas, majorando cargas e minorando resistências; enquanto os métodos probabilísticos quantificam a probabilidade de falha de uma estrutura ao lidar com as incertezas. Este estudo aplicou a Otimização baseada em Confiabilidade e a Otimização Robusta Multiobjetiva baseada em Confiabilidade a um pórtico plano de concreto armado. A análise comparativa entre os quatro métodos numéricos – *Reliability Index Approach (RIA)*, *Performance Measure Approach (PMA)*, *Single Loop Approach (SLA)* e *Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)* – envolveu critérios de desempenho como precisão, tempo de processamento, número de iterações e de avaliações de funções, e qualidade de distribuição de pontos de Pareto. A principal contribuição deste trabalho é a identificação do método mais eficiente para a otimização sob incertezas aplicado a um pórtico plano de concreto armado. A otimização foi realizada via *Sequential Quadratic Programming (SQP)*, disponível na biblioteca Scipy (SCIPY, 2023). A análise de confiabilidade, por sua vez, foi executada via *First-Order Reliability Method (FORM)*, disponível no pacote Pystra (HACK; CAPRANI, 2022) apenas para os métodos *RIA* e *PMA*; enquanto foi implementado uma rotina tradicional para os métodos *SLA* e *SORA*. Ademais, a análise estrutural foi realizada via Método dos Elementos Finitos (MEF), disponível no pacote CasPy (ALVES, 2018). Por fim, a fronteira de Pareto foi elaborada via as técnicas *Weighted Sum (WS)* e *Normal-Boundary Intersection (NBI)*. O desempenho dos algoritmos foi avaliado em quatro exemplos: Função estado limite não linear, Múltiplas funções estados-limite, Pilar curto (*Short Column*), Caixa de engrenagens (*Gear Box*). O projeto principal é o Pórtico Plano de Concreto Armado 3B3S. Com base na análise de eficiência computacional, conclui-se que *SORA* e *SLA* são os mais eficientes, principalmente pelo desempenho superior no tempo de processamento e no número de avaliações de funções estado limite; *SLA* apresentou maior eficiência na Otimização baseada em Confiabilidade, enquanto o *SORA* se sobressaiu na Otimização Robusta Multiobjetiva baseada em Confiabilidade. Os métodos *RIA* e *PMA* apresentaram melhores curvas de projetos viáveis.

Palavras-chave: otimização baseada em confiabilidade; otimização robusta multiobjetiva; pórticos de concreto armado; eficiência computacional; Python.

ABSTRACT

Concrete structure designs often employ semi-probabilistic methods, incorporating safety factors to compensate for uncertainties by increasing loads and decreasing resistances. Conversely, probabilistic methods quantify the probability of failure when dealing with uncertainties. This study applied Reliability-Based Design Optimization (RBDO) and Robust Reliability-Based Multi-objective Design Optimization (RBRMDO) to a reinforced concrete plane frame. The comparative analysis among four numerical methods – Reliability Index Approach (RIA), Performance Measure Approach (PMA), Single Loop Approach (SLA), and Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA) – considered performance criteria such as accuracy, processing time, number of iterations and function evaluations, and the quality of Pareto points distribution. The primary contribution of this work lies in identifying the most efficient method for optimization under uncertainties applied to a reinforced concrete flat frame. Optimization was performed using sequential quadratic programming (SQP), available in the Scipy library (SCIPY, 2023). Reliability analysis was conducted using the First-Order Reliability Method (FORM), available in the Pystra package (HACK; CAPRANI, 2022) for RIA and PMA methods, with a traditional routine implemented for SLA and SORA methods. Additionally, structural analysis was carried out using the Finite Element Method (FEM), available in the CasPy package (ALVES, 2018). Finally, the Pareto frontier was constructed using the Weighted Sum (WS) and Normal-Boundary Intersection (NBI) techniques. The algorithm performance was evaluated in four examples: Nonlinear limit state function, Multiple limit state functions, Short column, Gear Box. The main design is the Reinforced Concrete Frame 3B3S. Based on computational efficiency analysis, it is concluded that SORA and SLA are the most efficient, mainly due to their superior performance in processing time and the number of limit state function evaluations. SLA exhibited greater efficiency in Reliability-Based Optimization, while SORA excelled in Robust Multi-objective Reliability-Based Optimization. RIA and PMA methods showcased better viable project curves.

Keywords: reliability-based design optimization; robust multiobjective optimization; reinforced concrete frames; computational efficiency; Python.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Diagrama tensão-deformação idealizado	21
Figura 2 –	Diagrama tensão-deformação do aço	22
Figura 3 –	Domínios de estado limite último de uma seção transversal	25
Figura 4 –	Eixos locais, cargas, esforços internos e reações de um pórtico plano	26
Figura 5 –	Seção retangular submetida à Flexocompressão Normal	28
Figura 6 –	Seção retangular submetida à Flexão Simples	29
Figura 7 –	Solicitação na biela de compressão inclinada	30
Figura 8 –	Função de densidade conjunta e Região de falha	31
Figura 9 –	Etapas do MEF	40
Figura 10 –	Elemento de viga linear com 06 graus de liberdade	41
Figura 11 –	Esquema de busca do <i>RIA</i>	44
Figura 12 –	Esquema de busca do <i>PMA</i>	45
Figura 13 –	Fluxogramas das abordagens <i>RIA</i> e <i>PMA</i>	46
Figura 14 –	Mudança dos limites das restrições determinísticas violadas	47
Figura 15 –	Fluxograma do método <i>SORA</i>	50
Figura 16 –	Geometria da solução ótima para uma restrição ativa	51
Figura 17 –	Geometria da solução ótima para duas restrições	51
Figura 18 –	Fluxograma do método <i>SLA</i>	53
Figura 19 –	Fronteira de Pareto	54
Figura 20 –	Imagem do conjunto viável sobre o mapeamento de f	56
Figura 21 –	Geometria da <i>CHIM</i> em um espaço biobjetivo	57
Figura 22 –	Função de falha $G(d_0^1, d_0^2)$ do exemplo 01, no espaço das variáveis d	59
Figura 23 –	Histórico de convergência do exemplo 01	61
Figura 24 –	Função de falha $G(x_1, x_2)$ do exemplo 02, no espaço das variáveis x	62
Figura 25 –	Histórico de convergência do exemplo 02	64
Figura 26 –	Função de falha $G(x_1, x_2)$ do exemplo 03, no espaço das variáveis x	65
Figura 27 –	Histórico de convergência do exemplo 02	67
Figura 28 –	Caixa de engrenagens (<i>Gear Box</i>)	70
Figura 29 –	Fronteira de Pareto <i>WS</i> e <i>NBI</i>	73
Figura 30 –	Modelo reticulado do pórtico plano	74
Figura 31 –	Fronteira de Pareto <i>WS</i> e <i>NBI</i>	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Propriedades mecânicas do aço	23
Tabela 2 –	Características de fios e barras de aço	23
Tabela 3 –	Valores do coeficiente adimensional χ	28
Tabela 4 –	Índice de confiabilidade alvo β_i^T	35
Tabela 5 –	Descrição das variáveis do exemplo 01	60
Tabela 6 –	Resultados de desempenho do exemplo 01	60
Tabela 7 –	Descrição das variáveis do exemplo 02	62
Tabela 8 –	Resultados de desempenho do exemplo 02	63
Tabela 9 –	Descrição das variáveis do exemplo 03	66
Tabela 10 –	Resultados de desempenho do exemplo 03	66
Tabela 11 –	Descrição das variáveis do exemplo 04	69
Tabela 12 –	Resultados de desempenho do exemplo 04, no processo <i>RBDO</i>	70
Tabela 13 –	Resultados de desempenho do exemplo 04, no processo <i>RBRMDO</i>	71
Tabela 14 –	Resultados dos pontos de Pareto do exemplo 04	72
Tabela 15 –	Dados de entrada	74
Tabela 16 –	Variáveis aleatórias da otimização sob incertezas	75
Tabela 17 –	Resultados de desempenho do pórtico plano, no processo <i>RBDO</i>	77
Tabela 18 –	Valores ótimos das variáveis d e x	78
Tabela 19 –	Resultados de desempenho do Pórtico Plano, no processo <i>RBRMDO</i>	78
Tabela 20 –	Resultados dos pontos de Pareto do pórtico plano	79

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CA	Concreto Armado
CDF	<i>Cumulative Distribution Function</i>
CHIM	<i>Convex Hull of Individual Minima</i>
DLM	<i>Double Loop Method</i>
ECMI	Envoltória Convexa do Mínimo Individual
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
FORM	<i>First-Order Reliability Method</i>
JCSS	<i>Joint Committee on Structural Safety</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MPP	<i>Most Probable Point</i>
NBI	<i>Normal-Boundary Intersection</i>
PDF	<i>Probability Density Function</i>
PMA	<i>Performance Measure Approach</i>
RBDO	<i>Reliability-Based Design Optimization</i>
RBRMDO	<i>Robust Reliability-Based Multi-objective Design Optimization</i>
RIA	<i>Reliability Index Approach</i>
SLA	<i>Single Loop Approach</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
SORA	<i>Sequential Optimization and Reliability Assessment</i>
WS	<i>Weighted Sum</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A_{acid}	Ação acidental
α	Ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural
θ	Ângulo de inclinação das diagonais de compressão
α_{v2}	Ângulo de inclinação dos estribos em relação ao eixo da viga
h	Altura da seção transversal
A_c	Área da seção transversal
A_s	Área de aço da armadura
χ	Coefficiente adimensional
ν	Coefficiente de Poisson
V	Coefficiente de Variação
l_b	Comprimento de viga
l_c	Comprimento de pilar
B_k^j	Coefficiente de ponderação relacionado a função objetivo k e ao ponto de pareto j
$\$s$	Custo do aço
$\$c$	Custo do concreto
$\$f$	Custo da fôrma
ε_c	Deformação específica do concreto
ε_{c2}	Deformação específica de encurtamento do concreto no início plástico
ε_{cu}	Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
ε_s	Deformação específica do aço
ε_s	Deformação específica de projeto do aço
W_s	Densidade específica do aço
σ_x	Desvio padrão das variáveis X
d'	Distância da face de concreto ao centróide da barra de aço
d	Distância do centróide da barra de aço até a face superior da seção transversal de concreto
U	Domínio normal padrão e independente
D	Dobra da barra
Q	Esforço cortante

Q_d	Esforço cortante de projeto
N	Esforço normal
N_d	Esforço normal de projeto
N_r	Esforço normal reduzido
f_R	Função densidade probabilística referente às resistências R
f_S	Função densidade probabilística referente às solicitações S
f_{RS}	Função densidade probabilística conjunta
Φ	Função de distribuição normal padrão
$g_i(X)$	Função de restrição de desigualdade
$h_j(X)$	Função de restrição de igualdade
$f(X)$	Função uniobjetivo, com grandeza escalar
$F(X)$	Função multiobjetivo, com grandeza vetorial
β	Índice de confiabilidade
β_i^T	Índice de confiabilidade alvo
b	Largura da seção transversal
n_{obj}	Número de funções objetivo do problema original
n_{par}	Número de pontos de pareto desejado
K	Matriz de rigidez global da análise elástica linear
k'	Matriz de rigidez local da análise elástica linear
T	Matriz de rotação
φ	Matriz <i>pay-off</i> dos mínimos individuais transladados
μ_X	Média das variáveis X
μ_x	Médias das variáveis aleatórias de projeto x
μ_p	Médias dos parâmetros aleatórios de projeto p
E_c	Módulo de elasticidade do concreto à compressão
E_{ci}	Módulo de elasticidade inicial
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante
E_s	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
G	Módulo de elasticidade transversal
M	Momento fletor
M_d	Momento fletor resistente de projeto
M_d^-	Momento fletor resistente de projeto à compressão

M_d^+	Momento fletor resistente de projeto à tração
M_r	Momento fletor reduzido
∇	Operador gradiente
α_E	Parâmetro do agregado que influencia o módulo de elasticidade
δ	Parâmetro geométrico
x_{MPP}	Ponto de partida equivalente a média das variáveis aleatórias x
p_{MPP}	Ponto de partida equivalente a média dos parâmetros aleatórios p
p_f	Probabilidade de falha
ln	Profundidade da linha neutra
λ	Razão entre a posição da linha neutra considerando-se o diagrama parábola-retângulo de tensões no concreto e o diagrama retangular
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
f_{cd}	Resistência de projeto à compressão do concreto
f_{yk}	Resistência característica ao escoamento do aço
f_{yd}	Resistência de projeto ao escoamento do aço
f_{ci}	Resistência à compressão do concreto, obtida em ensaios.
f_{cm}	Resistência à compressão do concreto média
X_L	Restrição lateral, limite inferior (<i>Lower</i>) do vetor de variáveis x
X_U	Restrição lateral, limite superior (<i>Upper</i>) do vetor de variáveis x
s	Vetor de deslocamento
X	Vetor de variáveis
d	Vetor de variáveis determinísticas de projeto
x	Vetor de variáveis aleatórias de projeto
p	Vetor de parâmetros aleatórios de projeto
f	Vetor de esforços nodais
∂	Vetor de deslocamentos nodais
$\bar{F}(x)$	Vetor normalizado das funções objetivo
\vec{n}	Vetor unitário quase-normal à <i>CHIM</i>
ω	Taxa mecânica de armadura
σ_c	Tensão à compressão do concreto
σ_{cd}	Tensão de projeto à compressão do concreto
σ_s	Tensão ao escoamento do aço

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVOS	18
1.1.1	Objetivo geral	18
1.1.2	Objetivos específicos	19
1.2	JUSTIFICATIVA	19
1.3	ESQUEMA DE DISSERTAÇÃO	20
2	PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO	21
2.1	CONCRETO ARMADO	21
2.1.1	Estados Limites de Dimensionamento	23
2.1.2	Domínios de Dimensionamento	24
2.2	PÓRTICO PLANO	25
2.2.1	Esforços Resistentes	27
2.2.1.1	Flexocompressão Normal	27
2.2.1.2	Flexão Normal Simples	29
2.2.1.3	Esforço Cortante	30
2.2.1	Esforços Solicitantes	31
2.2.3	Valores médios	31
3	PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA	32
3.1	OTIMIZAÇÃO	32
3.2	CONFIABILIDADE	33
3.3	OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE	36
3.4	OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTI OBJETIVA BASEADA EM CONFIABILIDADE	37
3.5	APLICAÇÕES EM PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO	38
4	METODOLOGIA	40

4.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	40
4.1.1	Definições	40
4.1.2	Pré-processamento	40
4.1.3	Processamento	41
4.1.4	Pós-processamento	43
4.2	MÉTODOS <i>RBDO</i>	43
4.2.1	Método <i>DLM</i>	43
4.2.1.1	Reliability Index Approach (RIA)	43
4.2.1.2	Performance Measure Approach (PMA)	44
4.2.2	Método <i>SORA</i>	46
4.2.3	Método <i>SLA</i>	50
4.2	MÉTODOS <i>RBRMDO</i>	53
4.2.1	Conceito de Pareto	53
4.2.2	Método <i>WS</i>	54
4.2.3	Método <i>NBI</i>	55
5	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	58
5.1	EXEMPLOS MATEMÁTICOS	59
5.1.1	Exemplo 01 – Função estado limite não linear	59
5.1.2	Exemplo 02 – Múltiplas funções estado limite	61
5.1.3	Exemplo 03 – Pilar curto (<i>Short Column</i>)	65
5.1.4	Exemplo 04 – Caixa de engrenagens (<i>Gear Box</i>)	68
5.2	PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO 3B3S	73
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
	REFERÊNCIAS	82
	APÊNDICE A – MODELO REFORMULADO	87
	APÊNDICE B – CÓDIGOS PYTHON	89

1 INTRODUÇÃO

As estruturas de concreto são projetadas utilizando vários métodos, com abordagens mais avançadas, classificando-se em duas categorias. Os métodos semi-probabilísticos utilizam fatores de segurança parciais para levar em conta as incertezas nas cargas e resistências das estruturas. Os fatores de segurança parciais são parâmetros aplicados aos valores das cargas e resistências para aumentar a margem de segurança. Os métodos probabilísticos usam uma abordagem mais abrangente para considerar as incertezas do projeto. Envolvem a quantificação da probabilidade de não atendimento aos requisitos de projeto – como exemplo o colapso de uma estrutura – o que é feito considerando as distribuições de probabilidade das cargas e das resistências. A principal diferença entre métodos semi-probabilísticos e métodos probabilísticos é que os métodos semi-probabilísticos não calculam explicitamente a probabilidade de falha de uma estrutura. Em vez disso, esses métodos baseiam-se em fatores de segurança parciais para proporcionar uma margem de segurança. Os métodos probabilísticos, por outro lado, abordam explicitamente a probabilidade de falha de uma estrutura; essa informação é utilizada para projetar a estrutura de forma a atender um nível de confiabilidade específico.

A otimização é necessária para o projeto estrutural para melhorar a eficiência, segurança e desempenho. Um projeto de sistema ótimo pode ser formulado como um problema de otimização no qual o desempenho é maximizado enquanto satisfaz todas as restrições (ARORA, 2004). A otimização desempenha um papel importante na obtenção de projetos viáveis e econômicos, sendo cada vez mais empregada na resolução de problemas complexos por meio de simulação computacional (MOTTA, 2015); dentre os vários métodos de otimização, este estudo utiliza o *Sequential Quadratic Programming (SQP)*. A análise de confiabilidade, por sua vez, é fundamental na avaliação dos níveis de segurança, evitando que estes se tornem excessivamente elevados e tornem a estrutura economicamente inviável (Sobral, 2019); dentre os vários métodos de análise de confiabilidade, este estudo utiliza o *First-Order Reliability Method (FORM)*.

O acoplamento da otimização com a confiabilidade leva a um processo conhecido por Otimização baseada em Confiabilidade – do inglês *Reliability-Based Design Optimization (RBDO)*, o qual aprimora os estágios de projeto de uma estrutura e garante que ele seja viável, atendendo aos níveis de segurança desejados. Este acoplamento considera as incertezas de forma estatística, medindo o nível de confiabilidade e fornecendo um projeto ótimo, confiável e de baixa sensibilidade (LOBATO *et al.*, 2020). No processo *RBDO* são utilizados quatro

métodos: *Reliability Index Approach* (NIKOLAIDIS; BURDISSO, 1988), *Performance Mensure Approach* (TU; CHOI, 1999), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (DU; CHEN, 2002) e *Single Loop Approach* (LIANG; MOURELATOS; TU, 2004).

A Otimização Robusta Multiobjetivo baseado em Confiabilidade – do inglês *Robust Reliability-Based Multi-objective Design Optimization (RBRMDO)* – requer a busca pela fronteira de Pareto que minimize parâmetros estatísticos como média, variância, desvio padrão, etc. Martins e Ning (2021) apresentam duas razões para a proposição de problemas multiobjetivo: a quantificação do compromisso entre diferentes funções de interesse e o fornecimento de um conjunto de projetos viáveis ao invés de apenas um projeto viável. Em um problema de otimização multiobjetiva, o conjunto de todos os pontos de Pareto é conhecido como Conjunto de Pareto, que se refere ao vetor x^* ; enquanto a Fronteira de Pareto se refere ao vetor $f(x^*)$. Por outro lado, um projeto é robusto quando a função objetivo é insensível à variabilidade das variáveis e um projeto é confiável quando a função de restrição é insensível à variabilidade das variáveis. No processo *RBRMDO* são utilizados dois métodos: *Weighted Sum (WS)* e *Normal Boundary Intersection (NBI)*.

A escolha de um método pode ser validada pelo seu desempenho computacional; analisado com base em requisitos como precisão, tempo de processamento, número de iterações, número de avaliações de função objetivo e de função de estado limite, e qualidade de distribuição de pontos de Pareto (MESSAC; MATTSON, 2004). A precisão é um requisito que desempenha um papel crucial no projeto de sistemas econômicos e, juntamente com o tempo de processamento, formam os conceitos fundamentais de otimização (ARORA, 2004). O tempo de processamento é um requisito crucial para alcançar a eficiência computacional de um algoritmo de otimização (TYNI; YLINEN, 2006). O baixo número de avaliações de funções é um requisito para a eficiência computacional de um processo de otimização (LIU *et al.*, 2003; SAHAI *et al.*, 2004). A eficiência computacional aumenta significativamente com a redução no número de avaliações de funções de estado limite (DU; CHEN, 2002).

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Analisar a eficiência computacional dos métodos numéricos (*RIA, PMA, SORA, SLA*) em processos de Otimização baseada em Confiabilidade e Otimização Robusta Multiobjetiva

baseada em Confiabilidade aplicado a cinco exemplos da literatura: Função estado-limite não linear, Múltiplas funções estado-limite, Pilar curto, Caixa de engrenagens (*Gear Box*), e Pórtico Plano de Concreto Armado 3B3S; considerando requisitos de desempenho como precisão, tempo de processamento, número de iterações e de avaliações de funções, e qualidade de distribuição de pontos.

1.1.2 Objetivos específicos

Quanto aos objetivos específicos, pode-se destacar a análise e a comparação dos métodos numéricos em:

- a) um processo de Otimização baseada em Confiabilidade aplicado aos três exemplos Função estado-limite não linear, Múltiplas funções estado-limite, e Pilar curto;
- b) processos de Otimização baseada em Confiabilidade e Otimização Robusta Multiobjetiva baseada em Confiabilidade aplicado a Caixa de engrenagens (*Gear Box*);
- c) processos de Otimização baseada em Confiabilidade e Otimização Robusta Multiobjetiva baseada em Confiabilidade aplicado ao Pórtico Plano de Concreto Armado 3B3S.

1.2 JUSTIFICATIVA

A linguagem de programação Python permite acesso à pacotes com simplicidade, rapidez e eficiência em processos com operações matriciais; além da gratuidade, os pacotes disponíveis são livres, isto é, podem ser modificados e adaptados para qualquer caso. Na otimização, optou-se pelo algoritmo *SQP* devido à sua capacidade de lidar com projetos de alta complexidade, nos quais a resolução analítica não é viável, possibilitando assim o desenvolvimento de códigos de programação. Já na análise de confiabilidade, o algoritmo *FORM* foi selecionado devido ao seu menor custo computacional na resolução de estruturas com níveis elevados de confiabilidade, em comparação com a simulação Monte Carlo. Por fim, na análise estrutural, o Método dos Elementos Finitos obtém os esforços internos (forças e momentos) e os deslocamentos nodais (translações e rotações) de uma estrutura, através rotinas internas implementadas na linguagem de programação Python. Os pesquisadores estão interessados em desenvolver novas técnicas que acoplem o MEF com uma modelagem

probabilística realista das variáveis básicas. Isto ocorre porque há uma necessidade crescente de métodos mais eficientes para o projeto de estruturas (NOVAK *et al.*, 2023).

1.3 ESQUEMA DA DISSERTAÇÃO

Cada capítulo aborda um aspecto específico da temática e apresenta informações detalhadas e relevantes para o entendimento do assunto. O estudo é organizado em sete capítulos, onde:

- a) O primeiro capítulo introduz e fornece uma visão geral da temática da otimização sob incertezas;
- b) O segundo capítulo descreve os conceitos fundamentais do sistema estrutural (pórtico plano) e do material (concreto armado);
- c) O terceiro capítulo detalha os conceitos da programação matemática, incluindo definições e formulações gerais dos temas de otimização e confiabilidade. Além disso, apresenta uma revisão bibliográfica dos métodos numéricos (*RIA*, *PMA*, *SORA*, *SLA*), incluindo aplicações e aprimoramentos;
- d) O quarto capítulo descreve o Método dos Elementos Finitos (MEF), os métodos numéricos (*RIA*, *PMA*, *SORA*, *SLA*), o conceito de Pareto e as técnicas robusta multiobjetiva (*WS*, *NBI*);
- e) O quinto capítulo apresenta os resultados e discussões referentes a análise computacional dos métodos numéricos aplicados aos cinco exemplos;
- f) Finalmente, o sexto capítulo apresenta as considerações finais do trabalho. Esse capítulo resume as principais conclusões do estudo e oferece sugestões para pesquisas futuras na área.

2 PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO

2.1 CONCRETO ARMADO

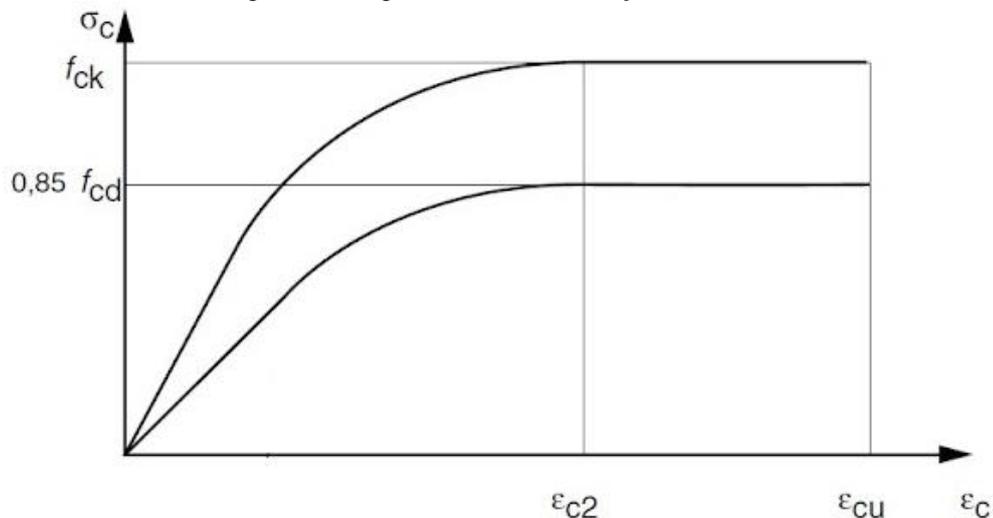
O concreto é um material isotrópico e composto por cimento, agregado miúdo, agregado graúdo e água; cuja utilização em elementos estruturais apresenta boa resistência à compressão e baixa resistência à tração. Ao associar-se às barras de aço, este oferece-lhe boa resistência à tração, onde ambos resistem solidariamente aos esforços solicitantes (CARVALHO; PINHEIRO, 2009). Carvalho e Pinheiro (2009) apresentam a equação (1) para o cálculo da resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}), onde f_{cm} é o valor médio das resistências ensaiadas; e a equação (2) para o cálculo do coeficiente de variação (V), onde f_{ci} é o valor da resistência obtida nos N ensaios.

$$f_{ck} = f_{cm}(1 - 1,645V) \quad (1)$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_{ci} - f_{cm}}{f_{cm}} \right)^2} \quad (2)$$

A Figura 1 apresenta o diagrama tensão-deformação do concreto, que relaciona as tensões (σ_c) e as deformações específicas (ϵ_c), onde f_{cd} é a resistência de projeto à compressão do concreto (f_{ck}). Nas análises no Estado Limite Último (ELU), o diagrama e a relação tensão-deformação são empregadas, no início do patamar plástico e $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$.

Figura 1 – Diagrama tensão-deformação idealizado



Fonte: NBR 6118 (2014)

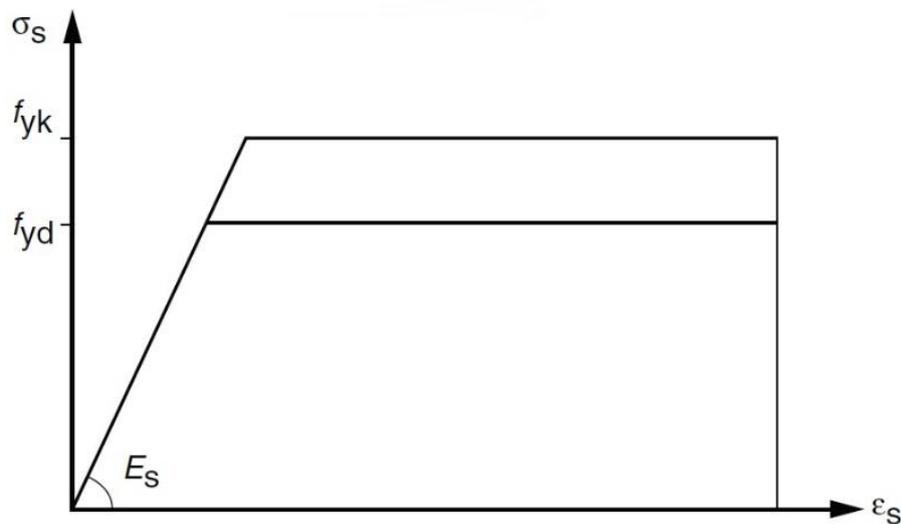
Considerando o comportamento linear-elástico, na avaliação global de uma estrutura, o valor do módulo de elasticidade inicial (E_{ci}) é calculado por meio da equação (3); enquanto na determinação de esforços solicitantes, a verificação do Estado Limite de Serviço (ELS) e a avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou de uma seção transversal, o valor do módulo de elasticidade secante (E_{cs}) é calculado por meio da equação (4).

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3)$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} = \left(0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80}\right) E_{ci}, \alpha_i \leq 1 \quad (4)$$

O aço é um material com ótima resistência à compressão e à tração, cujas barras de aço são classificadas nas categorias CA-25 e CA-50 e os fios de aço na categoria CA-60 (CARVALHO; PINHEIRO, 2009). As barras podem ser lisas ou nervuradas; as lisas possuem baixa aderência ao concreto e são restritas à categoria CA-25, enquanto as nervuradas são da categoria CA-50. Os fios podem ser lisos, entalhados ou nervurados, para melhorar a sua aderência ao concreto (ARAÚJO, 2010). A Figura 2 apresenta o diagrama tensão-deformação empregado nas análises ELS e ELU, cuja deformação permanente é de 0,2%, relaciona as tensões (σ_s) e as deformações específicas do aço (ε_s). A Tabela 1 apresenta as propriedades mecânicas do aço como a resistência característica ao escoamento do aço (f_{yk}) e a resistência de projeto ao escoamento do aço (f_{yd}); enquanto a Tabela 2 apresenta as características de fios e barras para as categorias CA-50 e CA-60.

Figura 2 – Diagrama tensão-deformação do aço



Fonte: NBR 6118 (2014)

Tabela 1 – Propriedades mecânicas do aço

Aço	f_{yk} (MPa)	f_{yd} (MPa)	ϵ_{yd} (%)	$\lambda = x/d$
CA-25	250	217	0,104	0,7709
CA-50	500	435	0,207	0,6283
CA-60	600	522	0,284	0,5900

Fonte: Carvalho & Pinheiro (2009)

Tabela 2 – Características de fios e barras de aço

Categoria	Diâmetro (ϕ), mm	Diâmetro (ϕ), pol	Área de aço (A_s), cm ²	Massa específica linear (ρ), kg/m
CA-60	4.20	-	0,139	0,109
	5.00	3/16"	0,196	0,154
CA-50	6.30	1/4"	0,312	0,245
	8.00	5/16"	0,503	0,395
	10.0	3/8"	0,785	0,617
	12.5	1/2"	1,227	0,963
	16.0	5/8"	2,011	1,578
	20.0	3/4"	3,142	2,466
	25.0	1"	4,909	3,853
	32.0	1.1/4"	8,042	6,313
	40.0	1.9/16"	12,566	9,865

Fonte: NBR 7480 (2008)

2.1.1 Estados Limites de Dimensionamento

Estado Limite de Serviço (ELS), de acordo com o item 10.4 da NBR 6118 (2014), é associado à durabilidade das estruturas, à aparência, ao conforto do usuário e à boa utilização funcional das mesmas, seja em relação aos usuários, às máquinas ou aos equipamentos.

- a) formação de fissuras: estado em que se inicia a formação de fissuras;
- b) abertura das fissuras: estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados;
- c) deformações excessivas: estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal;
- d) vibrações excessivas: estado em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção.

Estado Limite Último (ELU), de acordo com o item 10.3 da NBR 6118 (2014), é associado ao colapso ou qualquer outra forma de ruína estrutural que determine a paralisação, no todo ou em parte, do uso da estrutura:

- a) perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- b) esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando os efeitos das solicitações normais e tangenciais, de segunda ordem, de exposição ao fogo e de ações sísmicas;
- c) solicitações dinâmicas; colapso progressivo.

2.1.2 Domínios de Dimensionamento

A ruptura de uma seção transversal caracteriza-se pelas deformações específicas de cálculo de concreto e de aço. A Figura 3 apresenta os domínios de dimensionamento que representam as diversas possibilidades de ruína da seção. As rupturas convencionais por deformação plástica excessiva ocorrem nos domínios 1 e 2; enquanto as rupturas convencionais por encurtamento-limite do concreto ocorrem nos domínios 3, 4, 4a e 5.

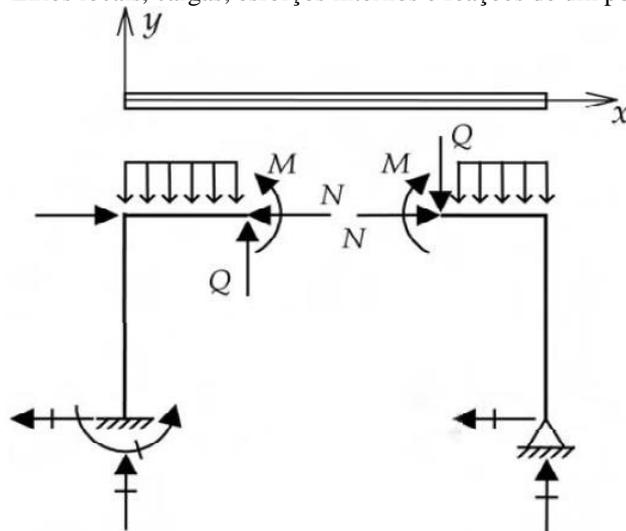
- a) domínio 1: tração não uniforme, sem compressão: a seção resistente é composta por aço, não havendo participação do concreto que se encontra totalmente tracionado e, portanto, fissurado;
- b) domínio 2: flexão simples ou composta: sem ruptura à compressão do concreto ($\epsilon_s < \epsilon_{cu}$ e com o máximo alongamento permitido). A seção resistente é composta por aço tracionado e concreto comprimido;
- c) domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ($\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$). A seção resistente é composta por aço tracionado e concreto comprimido; a ruptura do concreto ocorre simultaneamente ao escoamento da armadura, cuja situação é ideal, pois os dois materiais atingem sua capacidade resistente máxima. No domínio 3, a ruptura do concreto ocorre simultaneamente com o escoamento da armadura, isto é, os dois materiais atingem sua capacidade resistente máxima; sendo considerada como uma situação ideal para o dimensionamento;
- d) domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\epsilon_s < \epsilon_{yd}$). A seção resistente é composta por aço tracionado e concreto comprimido; a ruptura é frágil,

Em relação à disposição das barras, os pórticos podem ser classificados como planos, associados a dois eixos globais xy ; e espaciais, associados a três eixos globais xyz (CORREIA *et al.*, 2019). Quanto ao grau de estaticidade, os pórticos podem ser classificados como:

- a) hipostáticos: as restrições de movimentos em seus apoios e vínculos internos não são suficientes para manter os elementos em equilíbrio estático, sobre a atuação de forças e cargas externas;
- b) isostáticos: as restrições de movimentos em seus apoios e vínculos internos são suficientes para manter os elementos em equilíbrio estático;
- c) hiperestáticos: as restrições de movimentos em seus apoios e vínculos internos são mais que suficientes para manter os elementos em equilíbrio estático.

O comportamento de um pórtico plano é fundamentado na teoria de vigas de Navier, que governa o comportamento de barras submetidas à flexão, levando em consideração os efeitos axiais. Os esforços internos em uma estrutura são determinados pelas ligações internas de tensões, ou seja, são integrais das tensões ao longo de uma seção transversal de uma barra. Eles representam o efeito de forças e momentos entre duas partes de uma estrutura reticulada resultantes de um corte em uma seção transversal. Os esforços internos correspondentes em cada lado da seção seccionada são iguais e opostos, pois correspondem a uma ação e uma reação correspondente (MARTHA, 2010). A Figura 4 apresenta os esforços internos em um pórtico plano: esforço normal (N), esforço cortante (Q) e momento fletor (M).

Figura 4 – Eixos locais, cargas, esforços internos e reações de um pórtico plano



Fonte: Martha (2010)

2.2.1 Esforços Resistentes

De acordo com a NBR 6118 (2014), no item 17.2.2, as hipóteses básicas na análise dos esforços resistentes de uma seção de viga ou pilar, incluem as seguintes suposições:

- a) seções planas: seções transversais se mantêm planas após a deformação;
- b) aderência: deformação das barras passivas, submetidas a tração ou compressão, deve ser a igual à deformação do concreto ao seu redor;
- c) tração: tensões de tração no concreto, perpendiculares à seção transversal, podem ser desprezadas na análise de estados limites últimos (ELU);
- d) diagramas: distribuição de tensões no concreto é determinada de acordo com o diagrama parábola-retângulo e a tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas tensão-deformação;
- e) domínios: o Estado Limite Último (ELU) é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertence a um dos domínios definidos.

2.2.1.1 Flexocompressão Normal

No dimensionamento de seções retangulares, a Flexocompressão Normal pode ser decomposta em um esforço normal de projeto (N_d) e um o momento fletor de projeto (M_d) agindo em um plano contendo o eixo de simetria da seção transversal; em geral, a linha neutra (ln) está perpendicular ao plano de ação que contém o momento fletor. A Figura 5 ilustra uma seção transversal retangular submetida à Flexocompressão Normal e com $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$, onde momento fletor resistente de projeto (M_d) pode ser calculado pela equação (5).

$$M_d = M_r b h^2 \sigma_{cd} \quad (5)$$

Onde M_r é o momento fletor reduzido. A tensão de projeto à compressão do concreto (σ_{cd}) pode ser calculada pela equação (6).

$$\sigma_{cd} = 0,85 f_{cd} \quad (6)$$

Onde f_{cd} é a resistência de projeto à compressão do concreto. O esforço normal reduzido (N_r), a taxa mecânica de armadura (ω) e o parâmetro geométrico (δ) podem ser calculados pelas respectivas equações (7), (8) e (9).

$$N_r = \frac{N_d}{bh\sigma_{cd}} \quad (7)$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh\sigma_{cd}} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{d'}{h} \quad (9)$$

Onde b é a largura da seção transversal, h é a altura da seção transversal, c é o centro da seção transversal, d' é a distância da face de concreto ao centróide da barra de aço, A_s é a área de aço da armadura, f_{yd} é a resistência de projeto ao escoamento do aço e N_d é o esforço normal de projeto atuante em um eixo de simetria da seção e aplicada à excentricidade e , isto é, a distância em relação ao centro. A Tabela 3 apresenta a correlação entre o esforço normal reduzido N_r e o coeficiente χ . As equações (10) e (11) calculam o momento fletor reduzido M_r , o qual está associado aos valores de ν , ω , δ e χ . O dimensionamento é feito através dos diagramas de interação propostos por Araújo (2010). O momento fletor reduzido M_r também pode ser calculado através dos diagramas de interação de Montoya (MONTTOYA *et al.*, 1987).

Tabela 3 – Valores do coeficiente adimensional χ

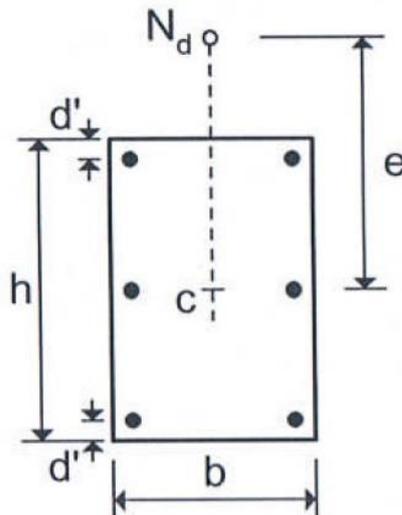
N_r	0,00	0,50	0,60	0,70	0,80	0,80	$\geq 1,0$
χ	1,00	1,00	0,93	0,88	0,88	0,90	0,93

Fonte: Araújo (2010)

$$N_r \leq 1 \rightarrow M_r = (0,5 - \delta)\chi\omega + 0,468N_r(1 - N_r) \quad (10)$$

$$N_r > 1 \rightarrow M_r = (0,5 - \delta)\chi(\omega + 1 - N_r) \quad (11)$$

Figura 5 – Seção retangular submetida à Flexocompressão Normal



Fonte: Araújo (2010)

2.2.1.2 Flexão Normal Simples

No dimensionamento de seções retangulares, o momento fletor resistente (M_d) age em um plano contendo o eixo de simetria da seção transversal, onde a profundidade da linha neutra x e seu ângulo de inclinação são conhecidos (ARAÚJO, 2010). A Figura 6 ilustra uma seção retangular submetida à Flexão Normal Simples, onde o momento fletor resistente de projeto, à tração (M_d^+) e à compressão (M_d^-), desta seção transversal pode ser calculado pela equação (12).

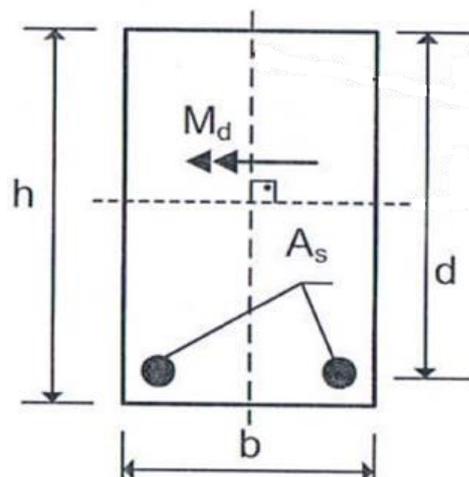
$$M_d^+ = M_d^- = \lambda b x (d - 0,5 \lambda x) \sigma_{cd} \quad (12)$$

Onde b é a largura da seção transversal, d é a distância do centroide da barra de aço até a face superior da seção transversal de concreto, x é a profundidade da linha neutra e $\lambda = 0,80$ é a razão entre a posição da linha neutra considerando-se o diagrama parábola-retângulo de tensões no concreto e o diagrama retangular. Para o cálculo da profundidade da linha neutra (ln), a equação (13) está associada ao momento fletor de projeto à tração (M_d^+) e a equação (14) está associada ao momento fletor de projeto à compressão (M_d^-), onde A_s é a área de aço da armadura e f_{yd} é a resistência de projeto ao escoamento do aço.

$$ln = \frac{A_s f_{yd}}{\lambda b \sigma_{cd}} \quad (13)$$

$$ln = \frac{-3,5 A_s E_s + \sqrt{3,5 A_s E_s * (3,5 A_s E_s + 3200 b d \sigma_{cd})}}{1600 b \sigma_{cd}} \quad (14)$$

Figura 6 – Seção retangular submetida à Flexão Simples



Fonte: Araújo (2010)

2.2.1.3 Esforço Cortante

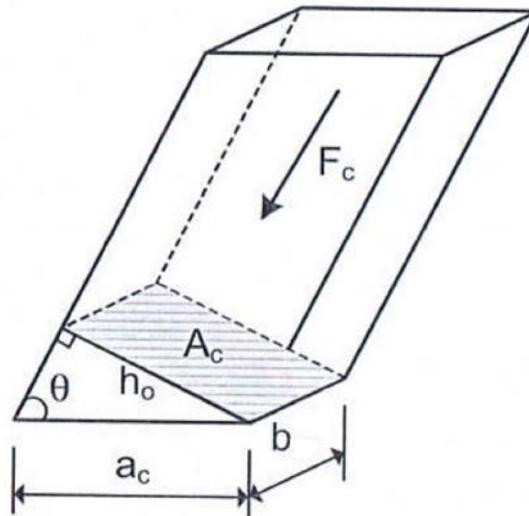
No dimensionamento de seções retangulares, admite-se diagonais de compressão inclinadas em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural. A Figura 7 ilustra uma biela simples submetida a uma força de compressão (F_c) que atua em uma área de seção transversal (A_c). De acordo com Araújo (2010), o esforço cortante resistente de projeto (Q_d), associado à ruína das diagonais comprimidas de concreto (Modelo II), pode ser calculado pela equação (15).

$$Q_d = 0,54\alpha_{v2}f_{cd}bd' \sin^2 \theta (\cot \alpha + \cot \theta) \quad (15)$$

Onde $\theta = 45^\circ$ é o ângulo de inclinação das diagonais de compressão, $\alpha = 90^\circ$ é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, b é a largura da seção transversal, d' é a distância da face de concreto ao centro da barra de aço e f_{cd} é a resistência de projeto à compressão do concreto. O ângulo de inclinação dos estribos em relação ao eixo da viga (α_{v2}) pode ser calculada pela equação (13), onde a resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}) é expressa em MPa.

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (16)$$

Figura 7 – Solicitação na biela de compressão inclinada



Fonte: Araújo (2010)

2.2.2 Esforços Solicitantes

Os esforços solicitantes referem-se a quaisquer esforços, sejam forças, momentos ou uma combinação destes, que surgem devido às ações aplicadas em uma seção transversal. De acordo com a NBR 6118 (2014), as solicitações de cálculo são determinadas baseada na análise estrutural e em cada estado-limite a ser considerado. As ações são classificadas em:

- a) ações permanentes: subclassificadas como diretas (peso próprio da estrutura e dos elementos construtivos, dos equipamentos e os empuxos resultantes de terras não removíveis), e indiretas (deformações impostas por retração e fluência do concreto, deslocamento dos apoios, imperfeições geométricas e protensão);
- b) ações variáveis: subclassificadas como ações normais (pessoas, mobiliários, veículos, materiais, cargas móveis, força longitudinal de frenagem, impacto lateral e centrífugo, efeitos do vento, variações de temperatura, atrito nos aparelhos de apoio e pressões hidrostáticas e hidrodinâmicas) e especiais (ações sísmicas ou cargas acidentais de natureza ou intensidade especiais, variações uniformes e não uniformes de temperatura, e ações dinâmicas);
- c) ações excepcionais: são consideradas aquelas resultantes de eventos (explosões, impacto de veículos, incêndios, enchentes ou terremotos).

2.2.3 Valores médios

As equações (17), (18) e (19) calculam os valores médios dos parâmetros de resistente de projeto referente à compressão do concreto (f_{cd}) e ao escoamento do aço (f_{yd}), e do parâmetro de solicitação de projeto referente à ação acidental (A_{acid}), respectivamente. Os valores médios assumem distribuição e coeficiente de variação (V), conforme considerado em projeto.

$$f_{cd} = \frac{f_{ca}}{1-1,645V} \quad (17)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yd}}{1-1,645V} \quad (18)$$

$$A_{acid} = \frac{A_{acid}}{1+0,5244V} \quad (19)$$

3 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 OTIMIZAÇÃO

Na engenharia, os conceitos da otimização estão inseridos em pesquisa, desenvolvimento, projeto, análise, fabricação e venda. A otimização é processo de encontrar a melhor solução possível alterando variáveis controláveis, muitas vezes sujeitas a restrições (MARTINS; NING, 2021). Yang (2010) informa que a otimização está presente em diversas áreas, desde o projeto de engenharia até os mercados financeiros e desde a ciência da computação até aplicações industriais. Arora (2004) afirma que um projeto de um sistema pode ser formulado como um problema de otimização para otimizar o desempenho enquanto satisfaz todas as restrições.

Na formulação do problema, as características da função objetivo e das funções de restrições são dois aspectos importantes na otimização. A formulação do problema envolve a função objetivo, as funções de restrições, as variáveis de projeto e a região viável de projeto. Abaixo, apresenta-se as definições básicas que compõem um problema de otimização:

- a) função objetivo: associada a um critério de análise, o qual pode ser minimizado ou maximizado (ARORA, 2004). A otimização classifica-se em uniobjetivo (função escalar) ou multiobjetivo (função vetorial). Em caso de maximização, deve-se transformar a função objetivo em $f(X) = -f(X)$.
- b) funções de restrições: associado aos limites impostos na resolução do sistema, como leis físicas de conversação, os critérios de desempenho e recursos. As restrições podem ser de igualdade $h(X) = 0$, desigualdade $g(X) \leq 0$, ou laterais $X_L \leq X \leq X_U$. Nas restrições laterais, X_L é o limite inferior e X_U é o limite superior. As restrições de desigualdade são classificadas em ativas $g_i(X^*) = 0$ e influem na solução, ou inativas $g_i(X^*) < 0$ e não influem na solução.
- c) variáveis de projeto: associado a discretização do sistema e podem assumir quaisquer valores de partida no dimensionamento do sistema. As variáveis de projeto podem ser discretas, contínuas ou mistas;
- d) região viável: associado ao espaço definido pelas variáveis e delimitado pelas restrições, onde se localiza o ponto ótimo da função objetivo (SECCHI, 2015).

A equação (20) apresenta a formulação geral de um processo de otimização uniobjetivo com restrições, onde X é o vetor representante das variáveis determinísticas e

aleatórias de projeto, com limites inferiores X_L e limites superiores X_U , $f(X)$ é a função objetivo, $g_i(X)$ são as restrições de desigualdade e $h_j(X)$ são as restrições de igualdade.

$$\begin{aligned}
 \min: & f(X) && X \in \mathfrak{R}^n && (20) \\
 \text{s.a:} & g_i(X) \leq 0, && i = 1, 2, \dots, m \\
 & h_j(X) = 0, && j = 1, 2, \dots, l \\
 & X_L \leq X \leq X_U
 \end{aligned}$$

A equação (21) apresenta a formulação geral de um processo de otimização multiobjetivo com restrições, onde $F(X)$ é o vetor das funções objetivo. A otimização multiobjetivo também é dita como otimização vetorial.

$$\begin{aligned}
 \min: & F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)] && (21) \\
 \text{s.a:} & g_i(X) \leq 0, && i = 1, 2, \dots, m \\
 & h_j(X) = 0, && j = 1, 2, \dots, l \\
 & X_L \leq X \leq X_U
 \end{aligned}$$

Os métodos numéricos podem ser aplicados a projetos de alta complexidade e sem solução analítica (ARORA, 2004). Os métodos numéricos permitem a sua implementação em códigos de programação a ser processado por computador (ANTONIOU; LU, 2007). O algoritmo *Sequential Quadratic Programming (SQP)* é aplicado em processos de otimização; sendo utilizado na solução de diversos problemas de otimização, dentre outros, treliças planas e espaciais (MAKRIS *et al.*, 2006), vigas engastada e livre (JARRAYA *et al.*, 2007), Caixa de engrenagens “*Gear Box*” (WEI *et al.*, 2009), motores ultrassônicos (ZHANG *et al.*, 2012).

3.2 CONFIABILIDADE

A confiabilidade calcula e prevê a probabilidade de violação de um estado limite em um sistema estrutural durante a sua vida útil. Com base em dados estatísticos dos elementos, pode-se estimar o comportamento do sistema. A probabilidade de falha (pf) pode ser calculada por meio representada pela sobreposição das funções de distribuição probabilísticas. As resistências R e as solicitações S devem ser expressas nas mesmas unidades de medida. O elemento estrutural será considerado como falho se sua resistência R for menor do que a

solicitação S aplicada, onde $g_i(R - S)$ são as funções estado limite e a probabilidade de falha é igual a probabilidade de violação do estado limite (MELCHERS; BECK, 2018). A equação (22) apresenta a formulação geral de um problema básico de confiabilidade em relação a segurança de um elemento estrutural com diversos modos de falhas.

$$pf(R - S \leq 0) = pf[g_i(R - S) \leq 0] \quad (22)$$

As funções de distribuição probabilísticas referentes às resistências (f_R) e às solicitantes (f_S), bem como a função conjunta $f_{RS}(r, s)$ e a região de falha são mostrados na Figura 8. Para qualquer elemento infinitesimal, Δr representa a probabilidade que R assume um valor entre $\{r, r + \Delta r\}$ e Δs representa a probabilidade que S assume um valor entre $\{s, s + \Delta s\}$. A equação (23) apresenta o cálculo da probabilidade de falha, em relação variável X que representa a margem de segurança $R - S$ (MELCHERS; BECK, 2018).

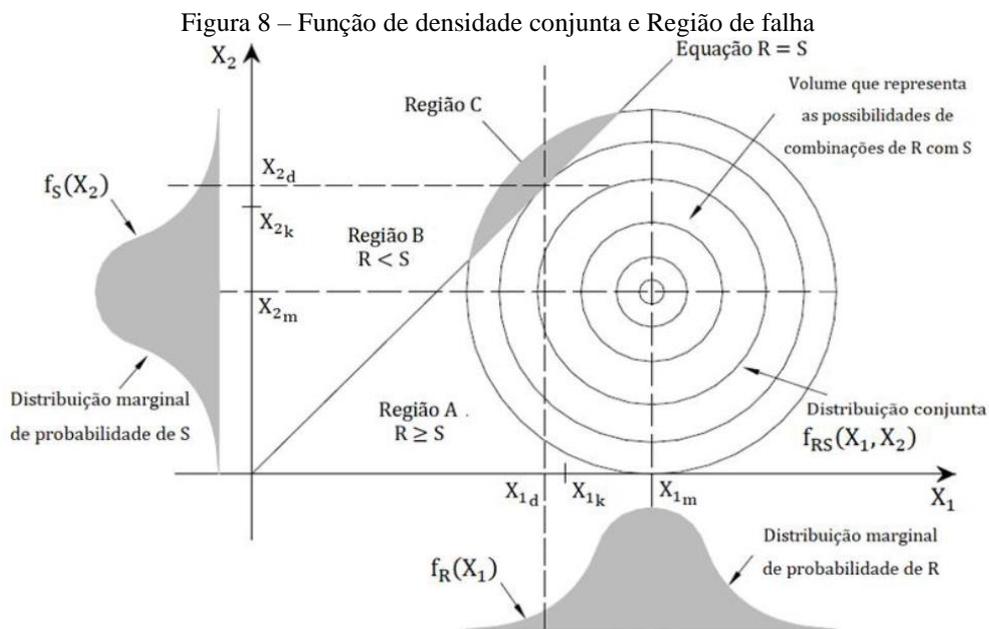
$$pf[g_i(X) \leq 0] = \iint_{g_i(X)} f_X(X) dX \approx \Phi(-\beta_i^T) \quad (23)$$

Em caso especial de variáveis aleatórias normalizadas, algumas distribuições de R e S é possível integrar analiticamente a integral de convolução com médias (μ_R, μ_S) e variâncias (σ_R^2, σ_S^2). Com a média $\mu_X = \mu_R - \mu_S$ e o desvio padrão $\sigma_X = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ da variável X em relação à margem de segurança $R - S$, a equação (24) apresenta o cálculo da probabilidade de falha, onde Φ é a função de distribuição normal padrão (MELCHERS; BECK, 2018).

$$pf[g_i(X) \leq 0] = \Phi\left(-\frac{\mu_X}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = \Phi(-\beta_i^T) \quad (24)$$

A probabilidade de falha pode ser calculada através de uma integral dupla da função densidade de probabilidade conjunta $f_X(X)$, do inglês *Probability Density Function (PDF)*, ou de uma aproximação da função distribuição cumulativa normal padrão $\Phi(-\beta_i^T)$, do inglês *Cumulative Distribution Function (CDF)*. Como o custo computacional deste cálculo é alto, uma aproximação via *FORM* é aplicada. Assim, Hasofer e Lind (1974, *apud* Du e Chen, 2002) propuseram o conceito *Most Probable Point (MPP)* para aproximação da integração, onde o vetor das variáveis X é transformado em um espaço normal, independente e

padronizado U_X . O *MPP* é o ponto de distância mínima no limite de restrição até a origem, $g(X) = g(U_X) = 0$. Essa distância mínima é o índice de confiabilidade. A busca do *MPP* e do índice de confiabilidade β é um problema de minimização que envolve um processo de busca iterativo. Logo, a confiabilidade também é um problema de otimização. O algoritmo *First-Order Reliability Method (FORM)* é utilizado na solução de diversos problemas de confiabilidade, dentre outros, fundações de linhas de transmissão (PHOON *et al.*, 2003), treliças (CHENG; LI; XIAO, 2008), turbinas eólicas offshore (DONG; MOAN; GAO, 2012) e estruturas de cúpula (DUDZIK; POTRZESZCZ-SUT, 2021).



O *Joint Committee on Structural Safety – JCSS* estuda o tema da segurança estrutural. O nível de segurança de uma estrutura está associado ao índice de confiabilidade, o qual é definido em função do custo relativo e da classe de consequências das falhas. Em situação de projeto mais comum, o *JCSS* recomenda o índice β_i^T igual a 4,20, isto é, o custo relativo de segurança Normal e a classe de consequência de falhas Moderada, de acordo com a Tabela 4.

Tabela 4 – Índice de confiabilidade alvo β_i^T

Custo	Mínima	Moderada	Elevada
Baixo	4,20	4,40	4,70
Normal	3,70	4,20	4,40
Alto	3,10	3,30	3,70

Fonte: JCSS (2001)

3.3 OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE

A otimização baseada em confiabilidade, do inglês *Reliability-Based Design Optimization (RBDO)*, trata estatisticamente as incertezas de projeto (MOTTA, 2015). A formulação *RBDO*, apresentada na equação (25), consiste na minimização da função objetivo com restrições probabilísticas, onde a função objetivo pode ser o custo inicial ou o custo do ciclo de vida (AOUES; CHATEAUNEUF, 2010).

$$\begin{aligned}
 \text{min: } & f(X) & (25) \\
 \text{s.a: } & g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & h_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \\
 & p_f[g_i(X) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & X_L \leq X \leq X_U
 \end{aligned}$$

Onde X é o vetor representante das variáveis determinísticas e variáveis aleatórias de projeto, com limites inferiores X_L e limites superiores X_U , para a parte determinística; $f(X)$ é a função objetivo; $g_i(X)$ são as restrições determinísticas de desigualdade; $h_j(X)$ são as restrições determinísticas de igualdade; $p_f[g_i(X) \leq 0]$ são as restrições probabilísticas e $p_f(\sim)$ é a probabilidade de falha. Para a resolução de problemas, são discutidos quatro métodos:

- a) *Reliability Index Approach (RIA)* e *Performance Measure Approach (PMA)*: abordagens de dois laços, onde o laço externo é a otimização e o laço interno é a análise de confiabilidade.
- b) *Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)*: abordagem de laços desacoplados, onde a análise de confiabilidade é avaliada após a otimização.
- c) *Single-Loop Approach (SLA)*: abordagem com apenas um único laço para a otimização, eliminada a análise de confiabilidade estrutural.

De acordo com Aoues e Chateaneuf (2010), o *PMA* é mais robusto e eficiente que o *RIA*, mas ambos apresentam limitações em aplicações com muitas variáveis e parâmetros de projeto aleatório. Já o *SLA* é eficiente e robusto, mas enfrenta desafios com funções de estado limite não lineares e um alto coeficiente de variação. Enquanto o *SORA* é o mais robusto, preciso, eficiente e menos sensível ao número de variáveis e tendo menos dificuldades com funções de estado limite não lineares.

3.4 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTI OBJETIVA BASEADA EM CONFIABILIDADE

A otimização robusta multiobjetivo baseada em confiabilidade, do inglês *Robust Reliability-Based Multi-objective Design Optimization (RBRMDO)*, como a quantificação do compromisso entre diferentes funções de interesse e o fornecimento de um conjunto de projetos viáveis ao invés de apenas um projeto viável (MARTINS; NING, 2021). A formulação geral *RBRMDO*, apresentada na equação (26), consiste na busca de um conjunto de variáveis que minimiza um conjunto de funções objetivo sobre o espaço viável de projeto (HUANG; GU; DU, 2006).

$$\begin{aligned}
 \min: F(X) &= [\mu_{f_1}(X), \sigma_{f_2}(X), \dots, V_{f_n}(X)] & (26) \\
 \text{s.a: } g_i(X) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 h_j(X) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \\
 p_f[g_i(X) \leq 0] &\leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 X_L &\leq X \leq X_U
 \end{aligned}$$

Onde X é o vetor representante das variáveis determinísticas e variáveis aleatórias de projeto, com limites inferiores X_L e limites superiores X_U , para a parte determinística; $f(X)$ é a função objetivo; $F(X)$ é o vetor das funções-objetivo e $\mu_{f_i}(X)$ e $\sigma_{f_i}(X)$ são as medidas de robustez das funções objetivos individuais; $g_i(X)$ são as restrições determinísticas de desigualdade; $h_j(X)$ são as restrições determinísticas de igualdade; $p_f[g_i(X) \leq 0]$ são as restrições probabilísticas e $p_f(\sim)$ é a probabilidade de falha.

Em um processo de otimização robusta multiobjetivo baseada em confiabilidade, a principal dificuldade na teoria da decisão estatística é a busca do ponto ótimo geral X^* . Essa condição geralmente não pode ser alcançada, pois a função objetivo em um ponto ótimo varia com as variáveis aleatórias. Portanto, a função objetivo deve buscar minimizar parâmetros estatísticos, como média e desvio padrão, onde a otimização em relação à média resulta em um ótimo menos conservador, pois há uma probabilidade razoável de desempenho pior (ou melhor) do que o valor encontrado, enquanto a otimização em relação ao desvio padrão resulta no ponto onde há a menor variação da função objetivo, sendo esta uma das principais medidas de robustez (MOTTA, 2015).

Martins e Ning (2021) apresenta algumas razões para a proposição de problemas *RBRMDO* como a quantificação do compromisso entre diferentes funções de interesse e o

fornecimento de um conjunto de projetos viáveis ao invés de apenas um projeto viável. Nesse processo, o conjunto de todos os pontos de Pareto é conhecido como conjunto de Pareto, que se refere ao vetor X^* ; enquanto a fronteira de Pareto se refere ao vetor $f(X^*)$. Em relação a robustez e a confiabilidade, um projeto robusto é quando a função objetivo é insensível à variabilidade das variáveis de projeto e um projeto confiável é quando as funções de restrições são insensíveis à variabilidade das variáveis de projeto.

Existem diversas técnicas para a elaboração do conjunto de mínimo de Pareto, dentre elas, as técnicas baseadas em metodologias metaheurísticas. Motta (2015) apresenta três técnicas de programação matemática: *Weighted Sum (WS)* e *Normal-Boundary Intersection (NBI)*.

3.5 APLICAÇÕES EM PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO

Em relação ao tema da otimização e confiabilidade aplicada aos pórticos de concreto armado é apresentada abaixo alguns estudos consultados na literatura.

- a) Surahman e Rojiani (1983) apresentam uma metodologia para *RBDO* de pórticos de concreto armado, que considera a falha estrutural simultaneamente nos níveis do componente e do sistema sob diferentes combinações de carga. O processo minimiza os custos estruturais totais enquanto otimiza as capacidades de momento crítico da seção;
- b) Asghshahr (2021) apresenta um novo esquema para otimização de pórticos de concreto armado utilizando algoritmo genético; a análise estrutural utilizou o MEF e a análise de confiabilidade utilizou o *FORM*, considerando módulo e cargas do concreto como variáveis aleatórias;
- c) Akhavan Kazemi *et al.* (2023), abordam a importância de considerar as incertezas em projetos de engenharia, particularmente em pórticos de concreto armado. O estudo minimiza as emissões de CO₂ em estruturas de concreto armado, de quatro e nove andares, usando quatro algoritmos metaheurísticos na otimização baseada em confiabilidade;
- d) Çoşut *et al.* (2023) otimizaram pórticos de concreto armado utilizando o algoritmo metaheurístico Jaya, desenvolvido por Rao (2016), considerando diferentes classes de concreto e cargas distribuídas;
- e) Pereira Júnior *et al.* (2023) abordam o impacto da simetria estrutural, regularidade e assentamentos de apoio na confiabilidade dos membros dentro de uma estrutura de

concreto armado de quatro andares e três vãos. A análise de confiabilidade é realizada por meio de simulação de Monte Carlo, considerando incertezas nas cargas e resistências dos materiais.

O grupo de trabalho, do programa de pós-graduação em engenharia civil, apresenta estudos sobre o pórtico plano de concreto armado 3B3S desde 2017. Os estudos são citados abaixo, em ordem cronológica.

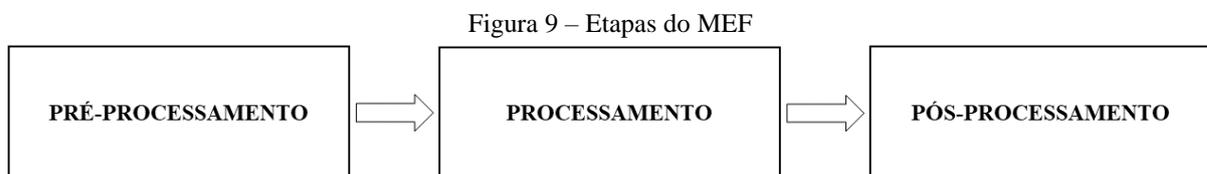
- a) Coêlho (2017) aplicou o processo de otimização determinística, onde buscou a minimização do custo de construção do pórtico 3B3S utilizando algoritmos genéticos para a otimização e o *software* SAP2000 para as análises estruturais;
- b) Alves (2018) aplicou o processo de otimização baseada em confiabilidade, onde buscou a minimização do custo de construção do pórtico 3B3S utilizando o *Sequential Quadratic Programming (SQP)* para a otimização, o Método dos Elementos Finitos (MEF) para as análises estruturais utilizou o MEF e o *First-Order Reliability Method (FORM)* para a análise de confiabilidade;
- c) Nascimento (2020) aplicou o processo de otimização robusta multiobjetiva baseada em confiabilidade, onde buscou a minimização do custo médio de construção e do desvio padrão máximo dos deslocamentos nodais do pórtico 3B3S utilizando o *Sequential Quadratic Programming (SQP)* para a otimização, o Método dos Elementos Finitos (MEF) para as análises estruturais utilizou o MEF, o *First-Order Reliability Method (FORM)* para a análise de confiabilidade; e as técnicas *Weighted Sum (WS)* e *Normal-Boundary Intersection (NBI)* para a elaboração da curva de Pareto no processo multiobjetivo.

4 METODOLOGIA

4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1.1 Definições

Na análise estrutural, sistemas com cargas e geometrias complexas não possuem soluções por métodos analíticos pois estes requerem soluções de equações diferenciais parciais, que é bastante dispendioso. Então, a formulação do Método dos Elementos Finitos resulta em um sistema de equações algébricas em troca de um sistema de equações diferenciais parciais. A discretização de um modelo em elementos finitos é um processo de subdivisão do sistema em elementos equivalente, interligados por nós (pontos comuns) e/ou limite do contorno ou da superfície (LOGAN, 2016). A solução exata fica substituída por soluções aproximadas na medida em que a malha se refina. A checagem de convergência e a comparação de resultados de sucessivas discretizações devem ser realizadas (SORIANO, 2009). Os elementos finitos podem ser uni, bi e tridimensionais, de variadas formas e com número distintos de pontos nodais em seus lados e faces, bem como com diferentes números e tipos de graus de liberdade por ponto nodal. A forma do elemento é escolhida de acordo com o domínio a ser discretizado. O modelo da estrutura é escolhido de acordo com a geometria de seus componentes, das ações externas e do comportamento que se deseja analisar. A aplicação do Método dos Elementos Finitos em estruturas pode ser subdivida em três partes principais, como esquematizado na Figura 9 (SORIANO, 2009).

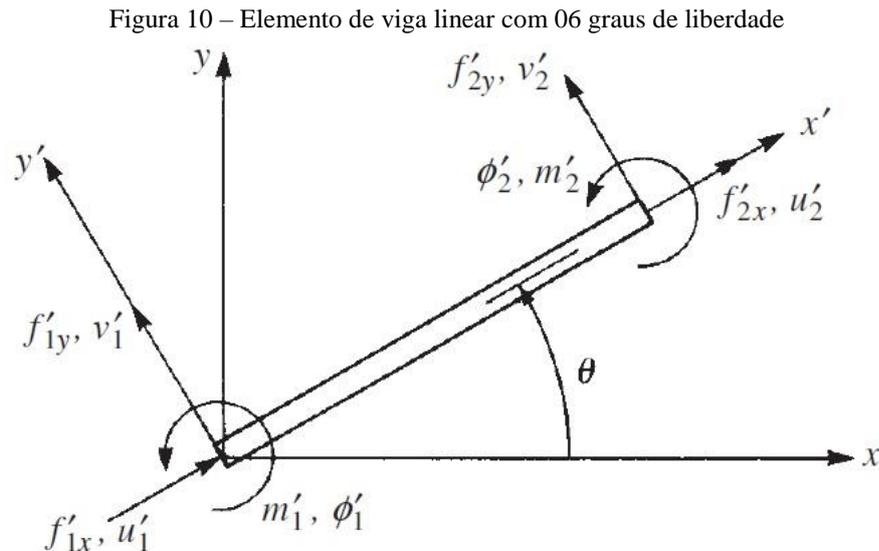


Fonte: Soriano (2009)

4.1.2 Pré-processamento

O pré-processamento é a etapa destinada a geração do modelo discreto, isto é, a escolha dos tipos, propriedades, formas e distribuição dos elementos em uma malha, além da atribuição das condições de contorno e da especificação das ações externas. O pré-processador contém um conjunto de rotinas de geração, visualização, modificação e

verificação de consistência do modelo discreto. A Figura 10 ilustra um elemento finito de viga com 06 graus de liberdade; onde utiliza-se como referência local xy , em que o eixo x é o dirigido do centroide e o eixo y é o de inércia das seções transversais. Na obtenção do sistema global de equações de equilíbrio de uma estrutura reticulada, os sistemas de equações dos seus elementos de barra são transformados para uma referência global XY (SORIANO, 2009).



Fonte: Logan (2016)

Anota-se f para os esforços internos e ∂ para os deslocamentos nodais, onde f'_{ij} representam as forças e m'_i representam os momentos fletores; bem como u'_i, v'_i representam as translações nos eixos locais $x'y'$, respectivamente, e ϕ'_j representa a rotação no eixo local z . O índice i representa o ponto nodal de aplicação dos esforços e o j representa o eixo local associado ao grau de liberdade. O elemento de barra, apresentado na Figura 10, possui seis esforços nodais, sendo quatro forças e dois momentos fletores, e seis deslocamentos nodais, sendo quatro translações e duas rotações.

4.1.3 Processamento

O processamento é a etapa que trata da análise propriamente dita, o qual contém um conjunto de rotinas que realizam a simulação numérica e obtém as soluções nodais. A análise estática não inclui forças de inércia e pode ser classificada em relação ao comportamento linear ou não-linear; a não-linearidade física, está associada ao material, e a não-linearidade geométrica, está associada à verificação do equilíbrio na situação deformada, isto é, considera os efeitos de segunda ordem (SORIANO, 2009). Neste trabalho, a análise estática foi

considerada linear pois o pórtico plano produz deslocamentos relativamente pequenos, admitindo um comportamento elástico-linear para os materiais. A formulação da equação governante que calcula os esforços internos e os deslocamentos nodais é apresentada na equação (27).

$$f = K \partial \quad (27)$$

Onde f é o vetor de forças nodais global, K é a matriz de rigidez global da análise elástica linear e ∂ é o vetor dos deslocamentos nodais global. Neste trabalho, adota-se formulações para a matriz de rigidez global (K) descritas por Logan (2016). A matriz de rigidez k' está escrita em termos de eixos coordenadas locais, cuja transformação de eixos locais para eixos de globais é ilustrada na Figura 10.

A análise estrutural de um pórtico plano pode ser realizada aplicando a matriz de rigidez global (K) a um elemento de viga. Substituindo T e k' na equação ($K = T^T k' T$), obtém-se a matriz de rigidez global para um elemento de viga que inclui os efeitos de força axial (N), força cortante (Q) e momento fletor (M) (Logan 2016). As equações (28) e (29) apresentam a matriz de rigidez local da análise elástica linear (k') e a matriz de rotação (T), respectivamente, onde $C_1 = AE/L$, $C_2 = EI/L^3$, $C = \cos(\theta)$ e $S = \sin(\theta)$ (Logan 2016).

$$k' = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

A matriz de rigidez global de um elemento de barra da análise elástica linear K é descrita na equação (30), onde o cosseno diretor C e o seno diretor S estão associados aos eixos locais $x'y'$ em relação aos eixos globais XY (Logan 2016).

$$K = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & (A - \frac{12I}{L^2})CS & -\frac{6I}{L} S & -AC^2 - \frac{12I}{L^2} S^2 & -(A - \frac{12I}{L^2})CS & -\frac{6I}{L} S \\ & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C & -(A - \frac{12I}{L^2})CS & -AS^2 - \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C \\ & & 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 2I \\ & & & AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & (A - \frac{12I}{L^2})CS & \frac{6I}{L} S \\ & & & & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & -\frac{6I}{L} C \\ \text{Simetria} & & & & & 4I \end{bmatrix} \quad (30)$$

4.1.4 Pós-processamento

O pós-processamento é o conjunto de rotinas automáticas à determinação das soluções nodais, com o objetivo de preparar os resultados em forma de gráficos, ilustrações e tabelas, para interpretação, validação e documentação. A validação dos resultados pode ser realizada em comparação com resultados de análises em outras ferramentas (SORIANO, 2009).

4.2 MÉTODOS *RBDO*

4.2.1 Método *DLM*

O método de laços duplos, do inglês *Double-Loop Method (DLM)*, tem baixa eficiência devido a dependência entre o laço de otimização e da análise da confiabilidade (DU; CHEN, 2002). *Reliability Index Approach (RIA)* e *Performance Measure Approach (PMA)* podem ser aplicados na solução de problemas *RBDO*. Na formulação geral do modelo probabilístico apresentada na equação (31), onde a viabilidade do projeto é formulada como a probabilidade de satisfação da restrição, isto é, $g_i(X) \leq 0$ ser menor ou igual a uma probabilidade desejada.

$$\begin{aligned} \min: & f(X) \\ \text{s.a: } & p_f[g_i(X) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & X_L \leq X \leq X_U \end{aligned} \quad (31)$$

4.2.1.1 *Reliability Index Approach (RIA)*

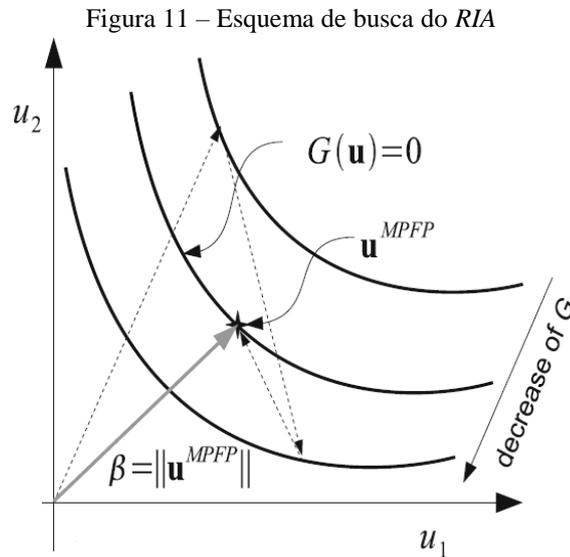
O método *RIA* é a abordagem mais tradicional e calcula o índice β durante a análise de confiabilidade o qual é recalculado para cada novo projeto e comparado com o índice alvo

β_i^T . Em cada restrição i , a norma do ponto ótimo $\|u_{MPP}\|$ é igual ao índice de confiabilidade β_i .

$$\begin{aligned} \min: & \|u_{MPP}\| = \beta_i \\ \text{s.a: } & g_i(u_{MPP}) \leq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

A restrição associada é a diferença entre o índice de projeto β_i , calculado na equação (32), e o índice de confiabilidade alvo β_i^T , em cada restrição i . A restrição probabilística é transformada em um problema de sub-otimização com uma restrição de igualdade no espaço normal padrão U (HYEON; CHAI, 2008). Por fim, a formulação geral RIA é apresentada na equação (33). A Figura 11 ilustra o esquema de busca pelo ponto ótimo no RIA .

$$\begin{aligned} \min: & f(X) \\ \text{s.a: } & p_f[g_i(X) = \beta_i - \beta_i^T \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & X_L \leq X \leq X_U \end{aligned} \quad (33)$$



Fonte: Aoues e Chateaufneuf (2010)

4.2.1.2 Performance Measure Approach (PMA)

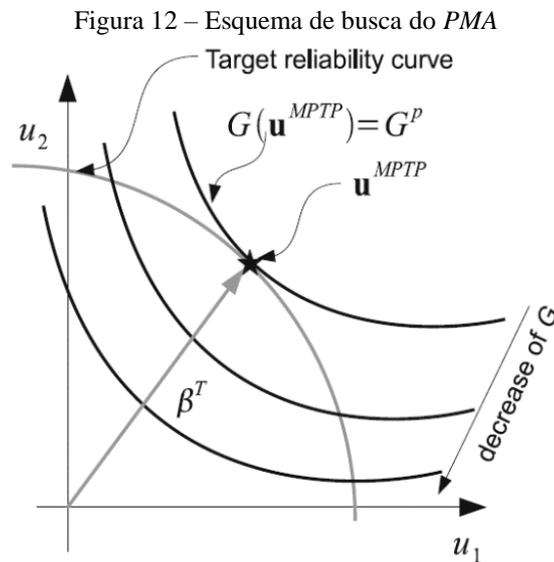
O método PMA é baseada no princípio que minimiza uma função complexa com restrições simples (AOUES; CHATEAUNEUF, 2010). Ele não calcula o índice β durante a análise de confiabilidade. O ponto ótimo u_{MPP} é encontrado na superfície de uma hipersfera

de raio igual ao índice alvo β_i^T , no espaço reduzido, onde o valor da função de falha g_i é máximo. Se o valor máximo for menor que zero, significa que o elemento ou sistema estrutural não falhou e atende às especificações do projeto (MOTTA, 2015).

$$\begin{aligned} \min: & -g_i(u_{MPP}) \\ \text{s.a: } & \|u_{MPP}\| = \beta_i^T \end{aligned} \quad (34)$$

A restrição associada é o valor da função de falha no ponto ótimo e menor que zero. A restrição probabilística é transformada em uma restrição determinística (HYEON; CHAI, 2008). Por fim, a formulação geral *PMA* é apresentada na equação (49). A Figura 12 ilustra o esquema de busca pelo ponto ótimo no *PMA*.

$$\begin{aligned} \min: & f(X) \\ \text{s.a: } & p_f[g_i(X) = G \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & X_L \leq X \leq X_U \end{aligned} \quad (35)$$

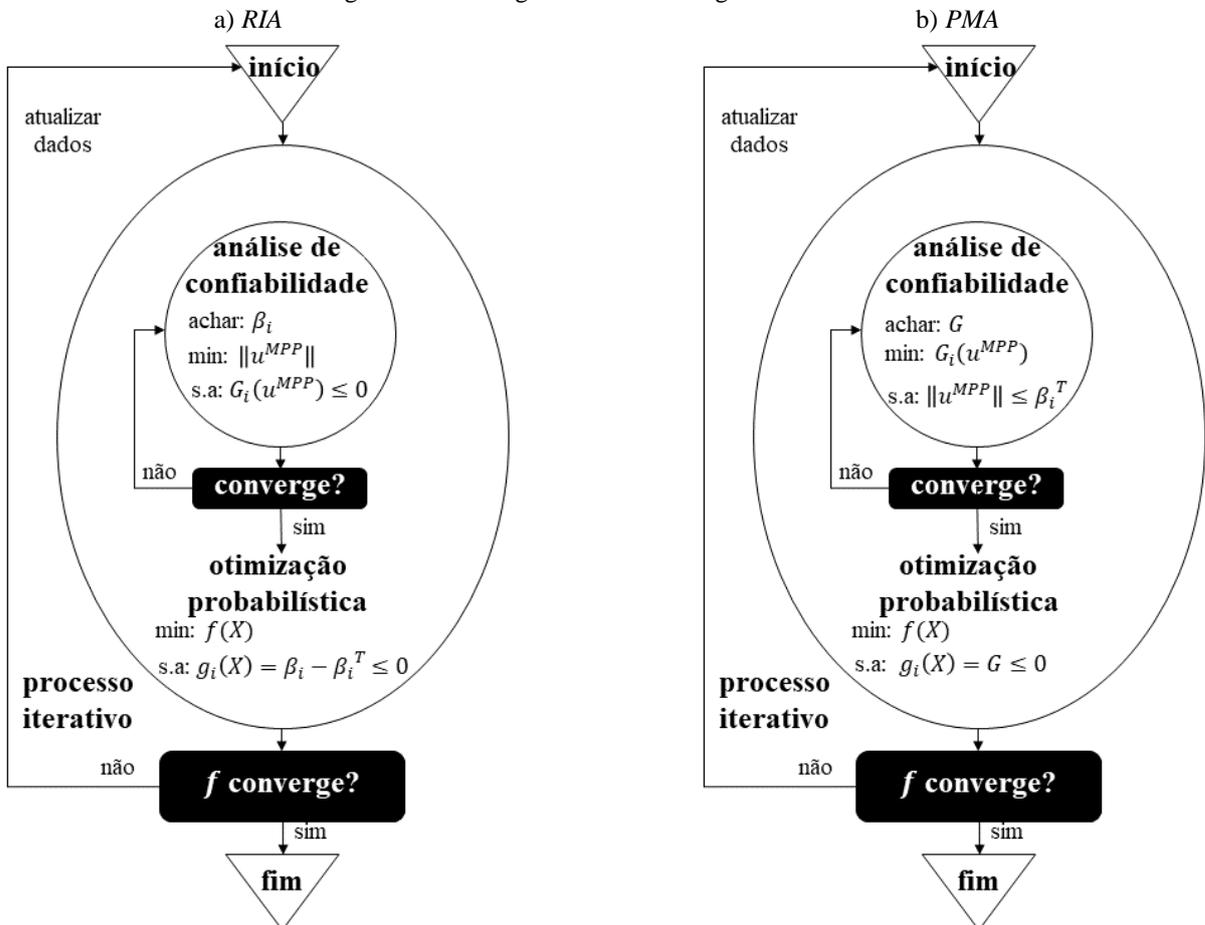


Fonte: Aoues e Chateaufneuf (2010)

O laço externo é a otimização; enquanto o laço interno é a análise de confiabilidade. O laço externo chama o laço interno repetidamente para avaliações das funções e seus gradientes. Para cada avaliação de confiabilidade, haverá múltiplas avaliações de funções de restrição. A análise de confiabilidade deve ser realizada para todas as restrições probabilísticas (LIU *et al.*, 2003). Os fluxogramas do *RIA* e *PMA* é apresentado na Figura 13. A principal diferença entre *RIA* e *PMA* está no ciclo de análise de confiabilidade. No *RIA*, o

índice de projeto β_i é calculado como a norma do ponto ótimo $\|u_{MPP}\|$, enquanto que no *PMA* é fixado. Essa característica do *PMA* de começar com um valor especificado para o índice β_i , o torna conhecido como um problema de *MPP* inverso. Outra diferença entre *RIA* e *PMA* está na função de restrição. No *RIA*, a restrição de desigualdade associada é a diferença entre o índice de projeto e o índice alvo; enquanto no *PMA*, a restrição de desigualdade associada é o valor da função de falha menor que zero. Após a análise de confiabilidade, é realizada a otimização probabilística, onde o valor atual da função objetivo é comparado com o valor da função objetivo na iteração anterior para verificar a viabilidade do projeto. Este processo iterativo continua até que um critério de convergência seja alcançado.

Figura 13 – Fluxogramas das abordagens *RIA* e *PMA*



Fonte: O Autor (2024)

4.2.2 Método *SORA*

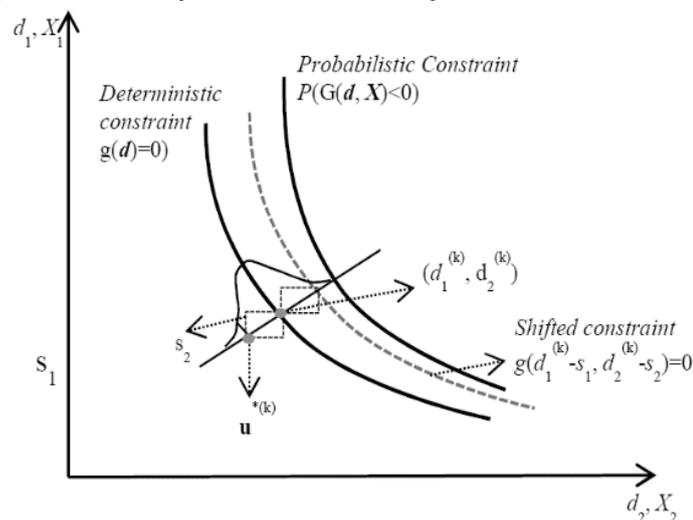
O método *Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)* melhora a eficiência computacional de um processo de otimização baseada em confiabilidade. Ele utiliza

ciclos sequenciais de otimização determinística e análise de confiabilidade e se diferencia de outros métodos pela forma como são estabelecidas as restrições probabilísticas e as determinísticas equivalentes (DU; CHEN, 2002). São três conceitos que caracterizam o método:

- ciclos sequenciais: a otimização e a confiabilidade são desacopladas a cada ciclo, com a confiabilidade sendo avaliada após a otimização determinística para verificar a viabilidade das restrições sob incertezas. Isso reduz o número de avaliações de funções na análise de confiabilidade;
- algoritmo de busca eficiente: *Most Probable Point (MPP)* inverso, melhora o desempenho do algoritmo em termos de eficiência e robustez;
- nível desejado: a avaliação da confiabilidade é realizada apenas no nível desejado, com os limites das restrições violadas sendo ajustados na direção viável com base nas informações do ciclo anterior.

Com base nas informações obtidas na análise de confiabilidade, o valor do vetor de deslocamento s é encontrado e a restrição determinística equivalente é deslocada na direção da restrição probabilística (linha tracejada). A restrição é satisfeita quando s é igual a zero, ou seja, quando a linha tracejada coincide com a restrição probabilística. O vetor de deslocamento s é atualizado com as informações fornecidas pelo *MPP* e os ciclos de otimização são desacoplados. Esse procedimento é repetido até que um critério de convergência seja alcançado. A Figura 14 apresenta o procedimento de mudança de limites (LOPEZ; BECK, 2012).

Figura 14 – Mudança dos limites das restrições determinísticas violadas



Fonte: Lopez e Beck (2012)

No ciclo 1, a otimização determinística é realizada sem informações sobre os *MPPs*. Os valores de x_{MPP} e p_{MPP} são definidos como as médias das variáveis aleatórias de projeto e dos parâmetros aleatórios, respectivamente (DU; CHEN, 2002). A equação (36) apresenta o modelo de otimização determinística no primeiro ciclo de otimização probabilística.

$$\begin{aligned} \text{min: } & f(d, \mu_x) \\ \text{s.a: } & g_i(d, \mu_x, \mu_p) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (36)$$

O procedimento começa no primeiro ciclo e estende-se até o k-ésimo ciclo. No primeiro ciclo, após resolver a otimização determinística, algumas das restrições podem se tornar ativas. Para uma restrição ativa g , o ponto ótimo $\mu_x^{(1)} = (\mu_{x1}^{(1)}, \mu_{x2}^{(1)})$ fica no limite da função de restrição determinística $g(\mu_x, \mu_p)$. Após a otimização determinística, a avaliação da confiabilidade é implementada na solução ótima $\mu_x^{(1)} = (\mu_{x1}^{(1)}, \mu_{x2}^{(1)})$ para localizar o *MPP* que corresponde ao nível desejado. Como esperado, o *MiPP* $x_{MPP}^{(1)}$ da restrição determinística $g(\mu_x, \mu_p)$ fica fora da região viável. Sabe-se que para garantir a viabilidade de uma restrição probabilística, o *MPP* correspondente ao percentil que deve estar dentro da região viável determinística. Portanto, ao estabelecer a otimização determinística equivalente no ciclo 02, as restrições devem ser modificadas para deslocar o *MPP* pelo menos para o limite determinístico e ajudar a garantir a viabilidade da restrição. A equação (37) descreve a nova restrição na otimização determinística do próximo ciclo é apresentada abaixo, usando s como o vetor de deslocamento (DU; CHEN, 2002).

$$g(\mu_x - s) \leq 0 \quad (37)$$

Para garantir o *MPP* no limite determinístico, o vetor de deslocamento s é modificado. A equação (38) indica que a localização das variáveis aleatórias de projeto (μ_x) no modelo de otimização determinística, precisa ser movida para o limite da restrição probabilística para garantir a viabilidade sob incerteza.

$$s = (s_1, s_2) = (\mu_x^{(1)} - x_{MPP}) = (\mu_{x1}^{(1)} - x_{1MPP}^{(1)}, \mu_{x2}^{(1)} - x_{2MPP}^{(1)}) \quad (38)$$

Se houver mais de uma restrição probabilística, outros limites de restrição probabilística também são deslocados para a região viável pelo distância entre o ponto ótimo, $\mu_x^{(1)} = (\mu_{x1}^{(1)}, \mu_{x2}^{(1)})$, e seus respectivos *MPPs*.

No segundo ciclo de otimização probabilística, as novas restrições formam uma região viável mais estreita em comparação com a região viável do primeiro ciclo, como apresentado na equação (39) (DU; CHEN, 2002).

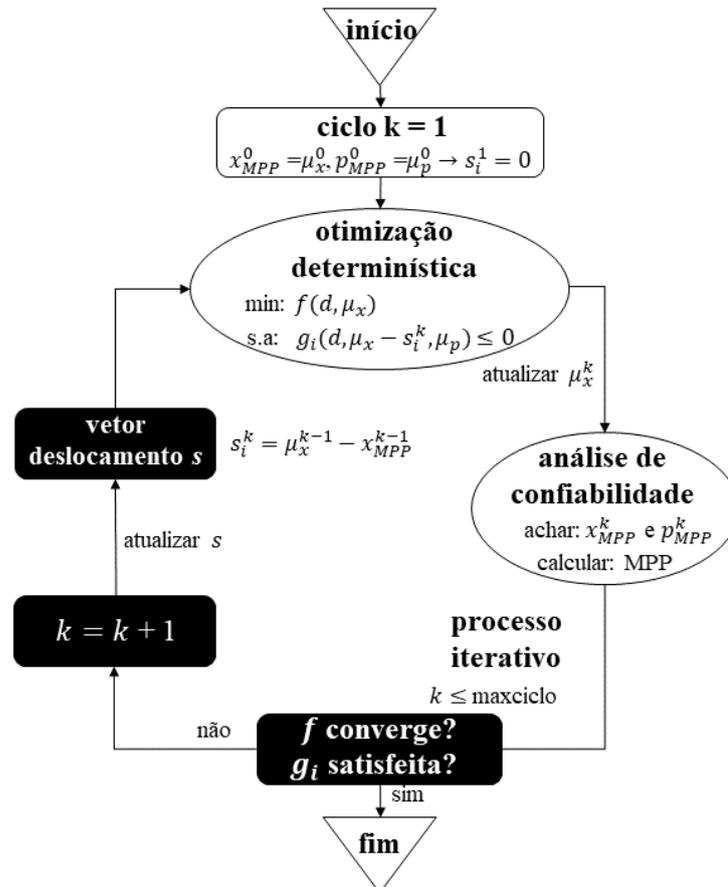
$$\begin{aligned} \min: & f(d, \mu_x) \\ \text{s.a: } & g_i(d, \mu_x - s_i^k, \mu_p) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & d_L \leq d \leq d_U \\ & x_L \leq x \leq x_U \\ & s_i^k = \mu_x^{k-1} - x_{MPP}^{k-1} \end{aligned} \tag{39}$$

Após a otimização no ciclo 02, a avaliação da confiabilidade é realizada para encontrar os *MPPs* atualizados e verificar a viabilidade do projeto. A confiabilidade das restrições probabilísticas violadas no ciclo 01 devem melhorar notavelmente ao usar a estratégia proposta de mudança de *MPP*. Se alguma restrição probabilística não for satisfeita, o procedimento é repetido ciclo por ciclo até que o objetivo convirja e o requisito de confiabilidade seja alcançado, isto é, quando os deslocamentos se tornarem zero, ($s = 0$). Os critérios de parada do método são dois: a) o objetivo se aproxima do estável: a diferença da função objetivo entre dois ciclos consecutivos é pequena o suficiente; b) todos os requisitos de confiabilidade são satisfeitos (DU; CHEN, 2002).

A Figura 15 apresenta o fluxograma do *SORA*. No primeiro ciclo, a otimização determinística não tem dados do *MPP*, ou seja, os valores de x_{MPP} e p_{MPP} são iguais às médias das variáveis x e p , respectivamente, e o valor do vetor de deslocamento s é zero. Após a otimização no Ciclo 1, a análise de confiabilidade é implementada na solução ótima na busca do *MPP* inverso correspondente ao nível desejado, normalmente fora da região viável. No segundo ciclo, o vetor de deslocamento s é atualizado com as informações fornecidas pelo *MPP*, e o modelo de otimização determinístico equivalente é estabelecido, onde as restrições são modificadas para mover o *MPP* em direção ao limite determinístico, garantindo sua viabilidade. Usando dados da análise de confiabilidade, o valor do vetor de deslocamento s é encontrado, e a restrição determinística equivalente é deslocada na direção da restrição probabilística. Este limite de restrição determinística deslocado é apresentado na

Figura 14 pela curva pontilhada. Após a otimização no Ciclo 2, a análise de confiabilidade é realizada na busca do *MPP* atualizado. O valor atual da função objetivo é comparado com ao valor da função no ciclo anterior na verificação de viabilidade do projeto. Este processo iterativo continua até que um critério de convergência seja alcançado (DU; CHEN, 2002).

Figura 15 – Fluxograma do método *SORA*

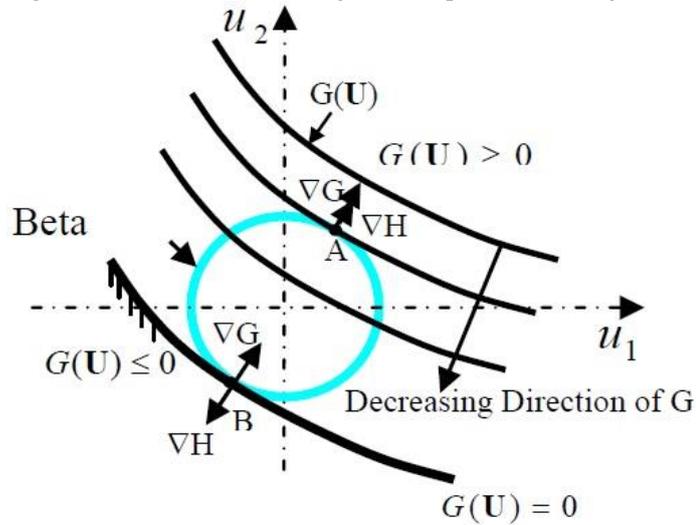


4.2.3 Método *SLA*

O método *Single-Loop Approach (SLA)* melhora a eficiência computacional de um processo de otimização sob incertezas, onde converte um problema de otimização probabilística em um problema de otimização determinística equivalente (LIANG; MOURELATOS; TU, 2004). O laço interno de confiabilidade é eliminado ao impor as condições de otimalidade Karush-Kuhn-Tucker (KKT) como restrição, a cada iteração do laço externo (BECK, 2021) e é empregada na estimativa de cada MPP (MENG *et al.*, 2018) com base nas sensibilidades das funções estado limite e do índice alvo β_i^T (AOUES; CHATEAUNEUF, 2010). O laço interno resolve a otimização no espaço normal padrão U ,

onde $G(U)$ é uma das restrições do problema original e β_i^T é o índice alvo para esta restrição. De acordo com Liang, Mourelatos e Tu (2004), no ponto ótimo, a condição de otimização KKT é satisfeita, onde $H(U) = \|U\| - \beta_i^T$ é uma restrição de igualdade, e o multiplicador lagrangeano λ deve ser não-negativo. Isso significa que os gradientes de $G(U)$ e $H(U)$ são colineares e apontam em direções opostas, isto é $\nabla G(U) + \lambda \nabla H(U) = 0$, visto na Figura 16.

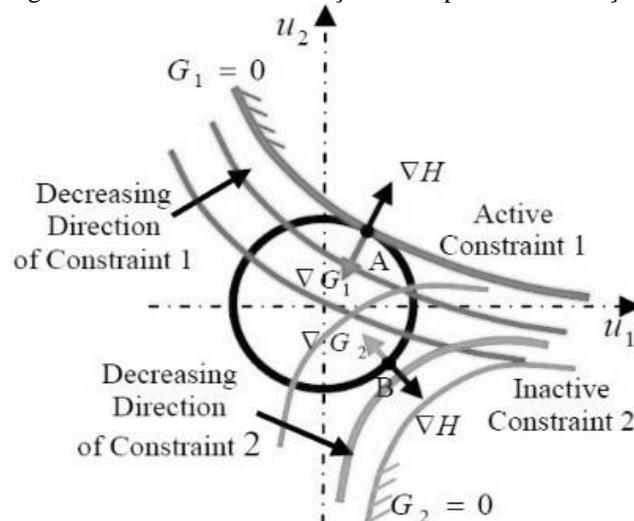
Figura 16 – Geometria da solução ótima para uma restrição ativa



Fonte: Liang, Mourelatos e Tu (2004)

A Figura 17 apresenta duas restrições com o mesmo índice de confiabilidade alvo. Durante a otimização, elas tendem a se mover em direção ao círculo beta. No ponto ótimo, uma restrição pode estar ativa e tangente ao círculo, enquanto a outra está inativa. Portanto, o ponto A é o *MPP* para a primeira restrição, enquanto o ponto B não é para a segunda.

Figura 17 – Geometria da solução ótima para duas restrições



Fonte: Liang, Mourelatos e Tu (2004)

Considerando que $\nabla H(U) = 2U$ e que $\|\nabla G(U)\|$ é o comprimento de $\nabla G(U)$. O comprimento do vetor U é igual a multiplicação do raio da hipersfera beta, β_i^T , pelo vetor unitário do gradiente normalizado de restrição (α) no espaço U , conforme a equação (40). Finalmente, apresenta-se a formulação do método de laço único na equação (41).

$$U = - \left[\frac{\|\nabla G(U)\|}{2*\lambda} \right] * \left(\frac{\nabla G(U)}{\|\nabla G(U)\|} \right) = -\beta_i^T * \alpha \quad (40)$$

$$\text{min: } f(d, \mu_x) \quad (41)$$

$$\text{s.a: } g_i(d, x_i^k, p_i^k) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_L \leq d \leq d_U, \quad x_L \leq x \leq x_U$$

$$\text{onde: } x_i^k = \mu_x^k - (\sigma_x \cdot \alpha_{xi}^k) \cdot \beta_i^T, \quad \alpha_{xi}^k = \frac{\sigma_x \cdot \nabla_x G_{i,X,P}(d^k, x_i^{k-1}, p_i^{k-1})}{\|\sigma_x \cdot \nabla_x G_{i,X,P}(d^k, x_i^{k-1}, p_i^{k-1})\|}$$

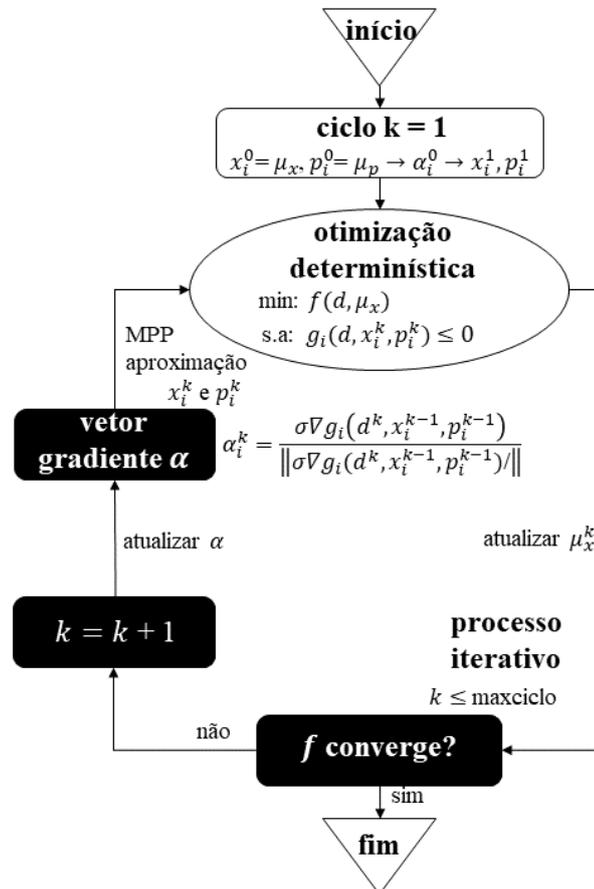
$$p_i^k = \mu_p^k - (\sigma_p \cdot \alpha_{pi}^k) \cdot \beta_i^T, \quad \alpha_{pi}^k = \frac{\sigma_p \cdot \nabla_p G_{i,X,P}(d^k, x_i^{k-1}, p_i^{k-1})}{\|\sigma_p \cdot \nabla_p G_{i,X,P}(d^k, x_i^{k-1}, p_i^{k-1})\|}$$

Onde $\{x_i^k, p_i^k\}$ são vetores *MPP* aproximados de $\{x, p\}$, respectivamente, para a restrição probabilística i na iteração k do laço de otimização, avaliado em termos dos vetores dos valores médios $\{\mu_x^k, \mu_p^k\}$, dos desvios padrão $\{\sigma_x, \sigma_p\}$, do índice alvo β_i^T e das sensibilidades normalizadas $\{\alpha_{xi}^k, \alpha_{pi}^k\}$ (Meng *et al.* 2018). Na iteração k , as restrições são avaliadas no *MPP* aproximado; quando o otimizador altera as variáveis de projeto d^k entre iterações sucessivas iterações, os vetores gradientes $\{\alpha_{xi}^k, \alpha_{pi}^k\}$ são atualizados antes de serem utilizados no cálculo de $\{x_i^k, p_i^k\}$; caso contrário, o vetores de gradientes anteriores são utilizados na aproximação do *MPP* (AOUES; CHATEAUNEUF, 2010). No *SLA*, a função objetivo é avaliada no ponto médio $\{d, \mu_x, \mu_p\}$ enquanto as restrições são avaliadas no ponto $\{d, x, p\}$. Este método não busca o *MPP* de cada restrição em cada iteração. Em vez disso, os *MPPs* das restrições ativas são identificados corretamente na solução ótima. Isso melhora drasticamente a eficiência sem comprometer a precisão.

A Figura 18 apresenta o fluxograma do *SLA*. Inicialmente, os valores de x_i^0 e p_i^0 são iguais às médias das variáveis x e p , respectivamente. Assim como o vetor d , o índice alvo β_i^T , os vetores de desvio padrão σ e os vetores de limite superior e inferior são especificados. No ponto inicial $\{x_i^0, p_i^0\}$, o vetor gradiente normalizado inicial α_i^0 para a restrição i é calculado. Então, o vetor α_i^0 é usado para calcular x_i^1 e p_i^1 para cada restrição. No primeiro

ciclo da otimização determinística, a função objetivo é avaliada no ponto $\{x_i^1, p_i^1\}$. No segundo ciclo, o vetor gradiente α é atualizado com as informações fornecidas pela otimização determinística, onde μ_x^k foram atualizados. Assim, o vetor gradiente α_i^k é usado no cálculo de aproximação *MPP* de $\{x_i^k, p_i^k\}$. Após a otimização determinística no Ciclo 2, o valor atual da função objetivo é comparado com o valor da função objetivo no ciclo anterior para verificar a viabilidade do projeto. Este processo iterativo continua até que um critério de convergência seja alcançado, cujo critérios de convergência é a estacionariedade no valor da função objetivo $|f_{k+1} - f_k| \leq f_{tol} = 1e^{-4}$. Interromper se for o caso (LIANG *et al.*, 2004).

Figura 18 – Fluxograma do método *SLA*



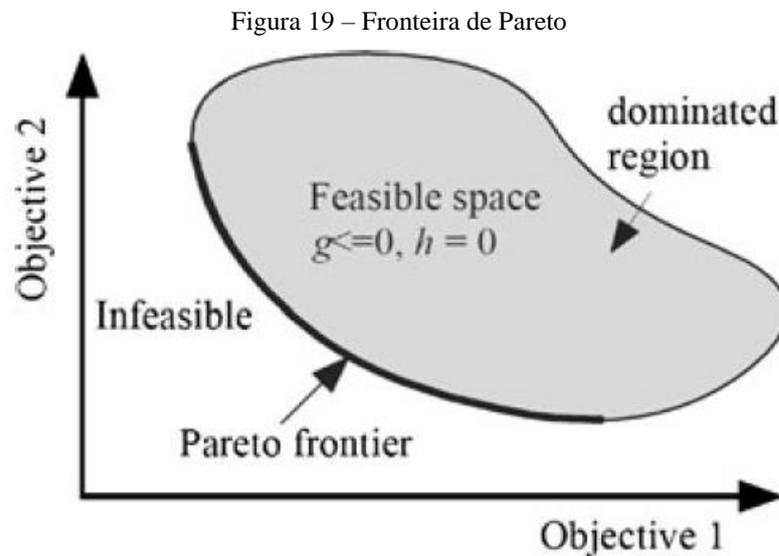
Fonte: O Autor (2024)

4.3 MÉTODOS RBRMDO

4.3.1 Conceito de Pareto

A otimização multiobjetivo emprega o conceito de otimalidade de Pareto, onde os pontos mínimos de Pareto apresentam um comportamento de movimentação na direção

decrecente de uma das funções; pelo menos uma das funções tem seu valor aumentado (MOTTA *et al.*, 2012). A Figura 19 apresenta um problema geral em um espaço biobjetivo de projeto, no qual destaca-se a fronteira de Pareto. Encontrar uma única solução pode ser difícil, pois as funções objetivo geralmente entram em conflito umas com as outras. Assim, o projetista usa o conceito de Pareto para identificar o maior número possível de pontos mínimos, os quais são usados para construir uma aproximação pontual da frente de Pareto, que representa um conjunto de soluções ótimas, conforme visto na Figura 19. Existem várias técnicas para a obtenção do conjunto de mínimo de Pareto. Aqui, serão considerados apenas procedimentos que fazem uso de programação matemática. Motta (2015) apresenta dois métodos numéricos: Método da Soma Ponderada e Método da Interseção Contorno Normal.



Fonte: Arora (2007)

4.3.2 Método WS

O método da Soma Ponderada, do inglês *Weighted Sum (WS)*, é o de uso mais simples entre os métodos desenvolvidos para problemas de otimização multiobjetivo. Neste processo, o problema vetorial é convertido em um problema escalar, onde as funções objetivo são substituídas por uma única função, denominada função substituta (MOTTA, 2015). A equação (42) do problema escalar baseia-se na minimização da soma das funções objetivo normalizadas e ponderadas por um vetor coeficiente. A função substituta escalar é apresentada abaixo, onde f_{0k} é a função-objetivo k no ponto inicial x_0 , B_k^j são os coeficientes de ponderação relacionados a função objetivo k e ao ponto de pareto j , n_{obj} é o número de funções objetivo do problema original e n_{par} é o número de pontos de pareto desejado.

$$\begin{aligned} \min: F(X)^j &= \sum_{k=1}^{n_{obj}} B_k^j \frac{f_k}{f_{0k}}, k = 1, 2, \dots, n_{obj}, j = 1, 2, \dots, n_{par} \\ \text{s.a: } p_f[g_i(X) \leq 0] &\leq \Phi(-\beta_i^T) \end{aligned} \quad (42)$$

Os coeficientes de ponderação representam a importância relativa de cada função objetivo original e são normalizados de acordo com a equação (43).

$$\sum_{k=1}^{n_{obj}} B_k^j = 1, 0 \leq B_k^j \leq 1 \quad (43)$$

A sua desvantagem é uma distribuição uniforme de pesos que nem sempre resulta em uma distribuição uniforme de pontos de Pareto. Além disso, ela pode ter dificuldade em encontrar soluções em regiões não convexas. Isso pode aumentar a dificuldade de encontrar pontos mínimos de Pareto e impedir o projetista de estimar a forma da fronteira de *trade-off* (MOTTA; AFONSO; LYRA, 2012). Quando o contorno da região viável no espaço das funções-objetivos é não-convexo, surgem problemas porque é impossível encontrar soluções nesta região. Neste caso, nenhum B_k^j será capaz de fornecer uma solução na parte não-convexa. Segue um roteiro para implantação do algoritmo do método WS.

- a) definição do número de subconjuntos B ;
- b) normalização das funções objetivo;
- c) para cada vetor coeficiente de ponderação B_k^j :
 - i. obtenção da função objetivo substituta usando a formulação do problema;
 - ii. otimização da função objetivo substituta e encontro o ponto X_j^* ;
 - iii. substituição do X_j^* nas funções-objetivo e obtenção dos seus valores.

4.3.3 Método *NBI*

O método Interseção Contorno Normal, do inglês *Normal-Boundary Intersection (NBI)*, busca pontos eficientes do contorno, no espaço viável das funções objetivo, que permitam a construção de uma curva suave (MOTTA, 2015). Baseado na parametrização da curva de Pareto, ele produz uma distribuição uniforme de pontos. Essa característica é adequada para a obtenção de soluções *trade-off* entre as diversas funções de interesses conflitantes (DAS; DENNIS, 1996). Na Figura 20, esses pontos de Pareto são encontrados a partir da interseção da reta quase-normal (\vec{n}) à Envoltória Convexa do Mínimo Individual, do

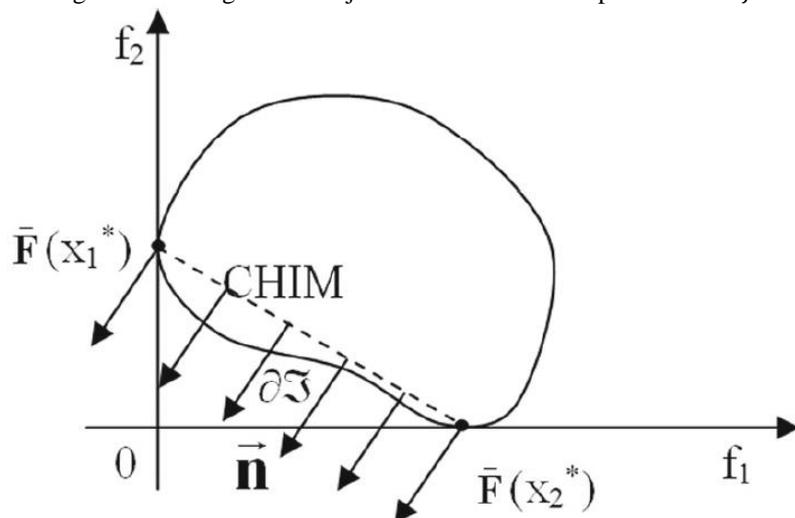
inglês *Convex Hull of Individual Minima (CHIM)*, apontada para a origem, com o contorno $\partial\mathfrak{S}$. Matematicamente, na busca da reta quase-normal (\vec{n}) à *CHIM*, com o contorno que define o espaço $\partial\mathfrak{S}$. A formulação do subproblema baseia-se na minimização de $-t$ sujeita à uma restrição determinística adicional, a qual representa o conjunto de pontos que formam a reta \vec{n} ; onde \vec{n} é o vetor unitário quase-normal à *CHIM*, como se observa na equação (44).

$$\begin{aligned} \min: & -t \\ \text{s.a: } & \varphi B + t\vec{n} \geq \bar{F}(X) \\ & p_f[g_i(X) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T) \end{aligned} \quad (44)$$

Quando as soluções do problema estão sobre uma parte do contorno suficientemente convexa, são pontos de Pareto. Quando estão sobre uma parte do contorno suficientemente côncava, não há garantia de que sejam pontos de Pareto; ainda assim, eles contribuem para a definição da curva de fronteira de Pareto. A formulação do vetor normalizado das funções objetivo $\bar{F}(x)$ é apresentada na equação (45), onde F^* é o ponto de utopia, f_i^* representa um mínimo local individual e X_i^* é o vetor solução ótimo para cada f_i . A *CHIM* é definida como φB , onde φ é a matriz *pay-off* dos mínimos individuais transladados e B são os coeficientes de ponderação relacionados a função objetivo e aos pontos de Pareto.

$$\begin{aligned} \bar{F}(X) &= F(X) - F^*, & F^* &= [f_1^*, f_2^*, \dots, f_{n_{obj}}^*] \\ \varphi_{i,j} &= f_i(X_j^*) - f_i^*, & i, j &= 1, \dots, n_{obj} \end{aligned} \quad (45)$$

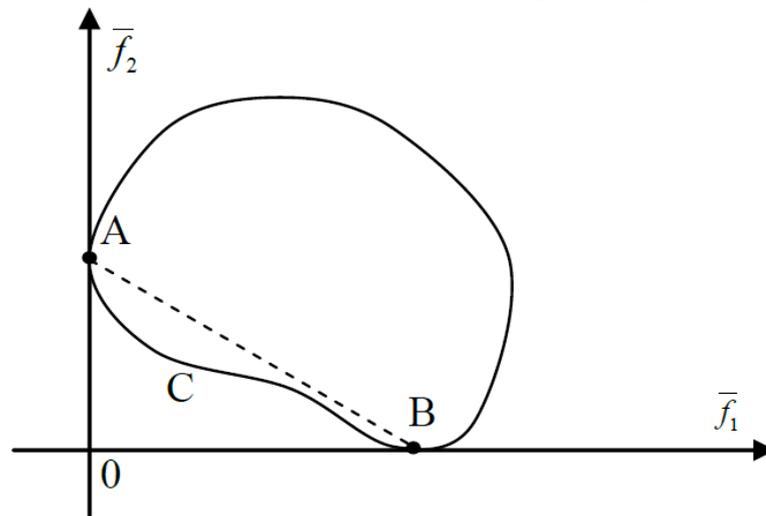
Figura 20 – Imagem do conjunto viável sobre o mapeamento de f



Fonte: Das e Dennis (1998)

Os pontos pertencentes a *CHIM* são definidos por um conjunto de pontos $\mathfrak{R}^{n_{obj}}$, que são combinações convexas de $F(X_i^*) - F^*$, armazenados sob a forma de matriz *pay-off* (φ) (DAS; DENNIS, 1996). A Figura 21 considera que na origem esteja o ponto de utopia F^* . Todas as funções objetivos são não-negativas, ou seja, $F(x)$ é substituída pela definição $\bar{F}(X) = F(X) - F^*$. Com essa redefinição, observa-se na Figura 21 que o ponto A é $\bar{F}(X_1^*)$ e o ponto B é $\bar{F}(X_2^*)$, a origem é o ponto Utópico F^* , o segmento tracejado é a *CHIM*, enquanto que a curva ACB é a fronteira de Pareto no espaço das funções objetivo. O conjunto das funções objetivo no espaço viável $F(X) : X \in C$ será denominado por f e o seu contorno por $\partial\mathfrak{S}$ (MOTTA, 2015).

Figura 21 – Geometria da *CHIM* em um espaço biobjetivo



Fonte: Motta (2015)

O método *NBI* objetiva encontrar a parte do contorno $\partial\mathfrak{S}$ que contém os pontos ótimos de Pareto. A formulação que define a reta quase-normal (\vec{n}) à *CHIM* a partir do ponto médio da *CHIM* é apresentada na equação (46).

$$\vec{n}_i = \frac{1}{n_{obj}} \sum_{j=1}^{n_{obj}} \Phi_{i,j} \quad (46)$$

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A otimização utilizou o *Sequential Quadratic Programming (SQP)* através da biblioteca Scipy (SCIPY, 2023). A análise estrutural empregou o Método dos Elementos Finitos (MEF) através do pacote CasPy (ALVES, 2018). A análise de confiabilidade utilizou o *First-Order Reliability Method (FORM)* para *RIA* e *PMA* por meio do pacote Pystra (HACK; CAPRANI, 2022), enquanto *SORA* e *SLA* utilizou uma rotina *FORM* implementada. O algoritmo HL-RF foi utilizado na avaliação do *Most Probable Point (MPP)*, enquanto o Método das Diferenças Finitas foi empregado no cálculo das derivadas numéricas. A eficiência computacional dos algoritmos (*RIA*, *PMA*, *SORA*, *SLA*) foi testada em quatro exemplos: Função estado limite não linear, Múltiplas funções estados limite, Pilar curto (*short column*), Caixa de engrenagens (*Gear Box*). O projeto principal é o Pórtico Plano de Concreto Armado 3B3S. Os algoritmos foram implementados em linguagem de programação Python.

O requisito tempo representa o tempo de processamento total, medido em segundos (s), minutos (min) ou horas (h). Já o requisito *Evness* avalia a qualidade da distribuição de pontos, com valores mais próximos de zero indicando melhor qualidade. Ademais, o requisito *Iter* quantifica o número de iterações de otimização. Os requisitos F_{eval} e G_{eval} , por sua vez, representam o número de chamadas da função objetivo e das funções estado limite, respectivamente. Por fim, *RIA* e *PMA* avaliam a função objetivo e as funções estado limite separadamente e em um único ciclo; enquanto *SLA* e *SORA* avaliam a função objetivo e as funções estado limite de forma simultânea e por ciclos.

O valor da função objetivo de cada ciclo é comparado ao valor do ciclo anterior, continuando até que a diferença seja menor que a tolerância especificada. Os critérios de convergência adotado são: tolerância de $1e-4$ para a função objetivo e para as funções estado limite, número máximo de 1000 iterações e número máximo de 50 ciclos. Configuração de hardware: Intel Core i7-8550U, 16 GB de RAM, SSD de 256 GB.

5.1 EXEMPLOS MATEMÁTICOS

5.1.1 Exemplo 01 – Função estado limite não linear

Neste problema, Aoues e Chateauneuf (2010) consideraram o seguinte modelo na equação (47), onde a função objetivo é linear e a restrição é não linear. O problema consiste em duas variáveis determinísticas de projeto $d = \{d_1; d_2\}$ e dois parâmetros aleatórios $p = \{p_1; p_2\}$. O índice de confiabilidade alvo é $\beta_i^T = 2,32$. Dois pontos iniciais foram considerados para testar a robustez das abordagens: $d_0^1 = \{2,0; 2,0\}$ e $d_0^2 = \{12,0; 12,0\}$.

$$\min: f(d) = d_1^2 + d_2^2 \quad (47)$$

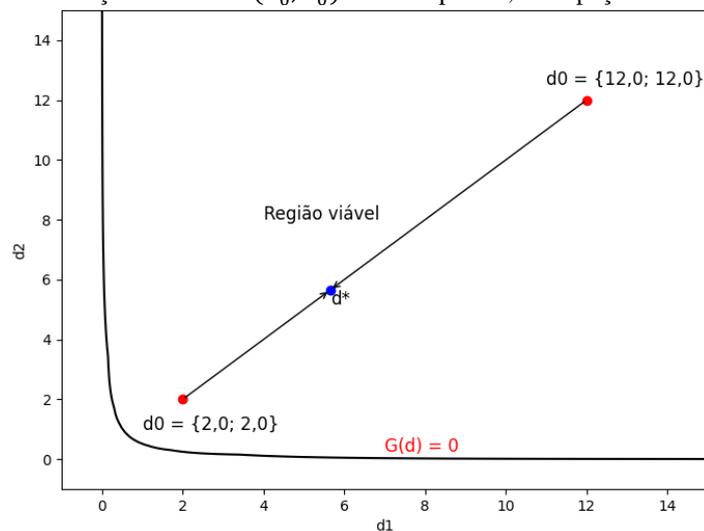
$$\text{s.a: } p_f[g_i(d, p) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1$$

$$g_1(d, p) = \frac{1}{5} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot p_2^2 - p_1$$

$$0 \leq d \leq 15$$

A Figura 22 apresenta o contorno da função de falha no espaço das variáveis d . Além disso, a partir de diferentes pontos iniciais d_0 (em vermelho), os algoritmos buscam a direção do ponto ótimo d^* (em azul) dentro da região viável de projeto. A Tabela 5 descreve o tipo de distribuição, o valor médio e o coeficiente de variação (V) aplicado às variáveis do exemplo 01.

Figura 22 – Função de falha $G(d_0^1, d_0^2)$ do exemplo 01, no espaço das variáveis d



Fonte: O Autor (2024)

Tabela 5 – Descrição das variáveis do exemplo 01

Variável	Distribuição	Média	V
d_1	-	μ_{d_1}	-
d_2	-	μ_{d_2}	-
p_1	Normal	5,0	0,30
p_2	Normal	3,0	0,30

Fonte: O Autor (2024)

A Tabela 6 apresenta os resultados de desempenho do exemplo 01, onde todos os algoritmos convergiram para a mesma solução, $f^* = \{63,095\}$, para os dois pontos iniciais. Na análise computacional, os algoritmos demonstraram resultados favoráveis quanto aos requisitos de eficiência em comparação com Aoues e Chateauneuf (2010), sendo o método *SLA* o mais eficiente, por exemplo foram 68 avaliações de funções de falha ao invés de 149 para o método *PMA*, no ponto inicial d_0^1 . O método *SLA* é mais robusto e insensível à escolha do ponto inicial; enquanto o método *RIA* é eficiente, porém menos robusto. Quando o ponto inicial está muito longe do ótimo, essas aproximações podem levar à direção de busca errada, de modo que o método *RIA* não converge para o segundo ponto inicial. Todos os algoritmos apresentaram tempo de processamento inferior a 1s.

Tabela 6 – Resultados de desempenho do exemplo 01

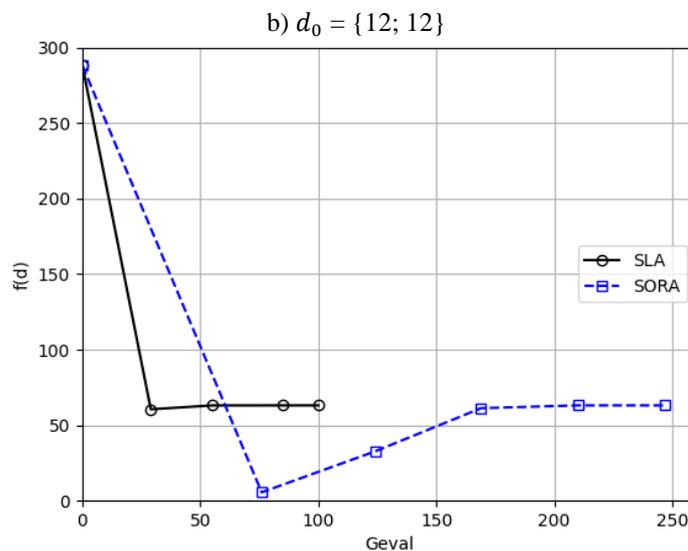
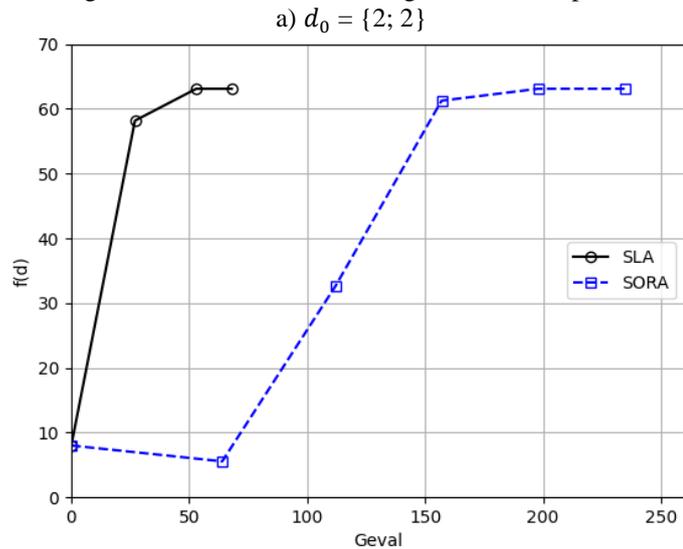
Método	Aoues and Chateauneuf (2010)	$d_0^1 = \{2,0; 2,0\}$	Aoues and Chateauneuf (2010)	$d_0^2 = \{12,0; 12,0\}$
		$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}$		$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}$
<i>RIA</i>	63,880	63,095/23/7/292	63,880	<i>nc</i>
<i>PMA</i>	63,880	63,095/17/5/149	63,880	63,095/16/5/87
<i>SORA</i>	63,880	63,095/70/21/235	63,880	63,095/79/23/247
<i>SLA</i>	63,880	63,095/35/9/68	63,880	63,095/54/15/100

Fonte: O Autor (2024)

A Figura 23 apresenta os métodos *SLA* (em preto) e *SORA* (em azul) que iniciam o processo a partir dos mesmos pontos. No ponto d_0^1 , no Ciclo 1, *SLA* está próximo da solução ótima com 27 avaliações de funções de estados limites, enquanto o método *SORA* está longe com 64 avaliações de funções de estados limites. O método *SLA* converge para a solução ótima no terceiro ciclo; totalizando 68 avaliações de funções. O método *SORA* converge com 5 ciclos e 3,5 vezes mais que o método *SLA* em avaliações de funções de estados limites. No ponto d_0^2 , no Ciclo 1, o método *SLA* está ainda mais próximo da solução ótima com 29

avaliações de funções de estados limites, enquanto o método *SORA* permanece distante do ponto ótimo com 76 avaliações de funções de estados limites. *SLA* converge para a solução ótima no quarto ciclo, com 100 avaliações de funções de estados limites, enquanto o método *SORA* converge com 5 ciclos e 247 avaliações de funções de estados limites.

Figura 23 – Histórico de convergência do exemplo 01



Fonte: O Autor (2024)

5.1.2 Exemplo 02 – Múltiplas funções estado limite

Neste problema, Aoues e Chateaufeuf (2010) consideraram o seguinte modelo na equação (48), onde a função objetivo é linear e as restrições são não lineares. O problema contém duas variáveis aleatórias de projeto $x = \{x_1; x_2\}$. Diferentes índices de confiabilidade alvos são aplicados ao problema $\beta_i^T = \{2; 3; 4\}$. O ponto inicial é $x^0 = \{5,0; 5,0\}$.

$$\min: f(x) = x_1 + x_2 \quad (48)$$

$$\text{s.a: } p_f[g_i(x) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, \dots, 3$$

$$g_1(x) = x_1^2 \cdot \frac{x_2}{20} - 1$$

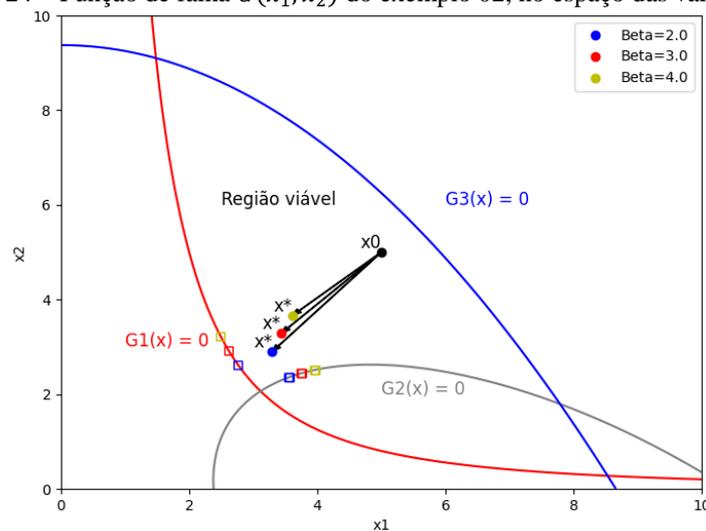
$$g_2(x) = \frac{(x_1+x_2-5)^2}{30} + \frac{(x_1-x_2-12)^2}{120} - 1$$

$$g_3(x) = \frac{80}{x_1^2+8x_2+5} - 1$$

$$0 \leq x \leq 10$$

A Figura 24 apresenta o contorno das funções de falha no espaço das variáveis x , onde o ponto inicial x^0 busca a direção dos pontos ótimos x^* para diferentes níveis de confiabilidade dentro da região de projeto viável. A Tabela 7 descreve o tipo de distribuição, o valor médio e o coeficiente de variação (V) aplicado às variáveis do exemplo 02.

Figura 24 – Função de falha $G(x_1, x_2)$ do exemplo 02, no espaço das variáveis x



Fonte: O Autor (2024)

Tabela 7 – Descrição das variáveis do exemplo 02

Variável	Distribuição	Média	V
x_1	Normal	μ_{x_1}	0,30
x_2	Normal	μ_{x_2}	0,30

Fonte: O Autor (2024)

A Tabela 8 apresenta que todos os algoritmos convergiram para as soluções exatas $f^* = \{6,192, 6,726, 7,268\}$ para os três níveis de confiabilidade alvo, respectivamente. Na análise computacional, os algoritmos demonstraram resultados favoráveis quanto aos requisitos de eficiência em comparação com Aoues e Chateauneuf (2010), sendo o método *SLA* o mais

eficiente, por exemplo foram 345 avaliações de funções de falha ao invés de 364 para o método *PMA* para o índice de confiabilidade alvo igual a 2,0. O método *SLA* teve o menor número de avaliações de funções de estados limites, enquanto o método *RIA* teve um desempenho ruim nesse aspecto, ultrapassando 1.000 avaliações de funções de estados limites. Por outro lado, os métodos *RIA* e *PMA* tiveram o menor número de avaliações de função objetivo. O método *SORA* apresenta um pior desempenho no número de avaliações de funções de estados limites com o aumento do nível de confiabilidade, atingindo um número 2 vezes superior ao método *PMA*. O método *SORA* teve menos avaliações de função objetivo em todos os índices de confiabilidade alvo do que método *SLA*. Os métodos *PMA* e *SLA* tiveram menores números de avaliações de funções de estado limite e de iterações. Todos os algoritmos apresentaram tempo de processamento inferior a 1s.

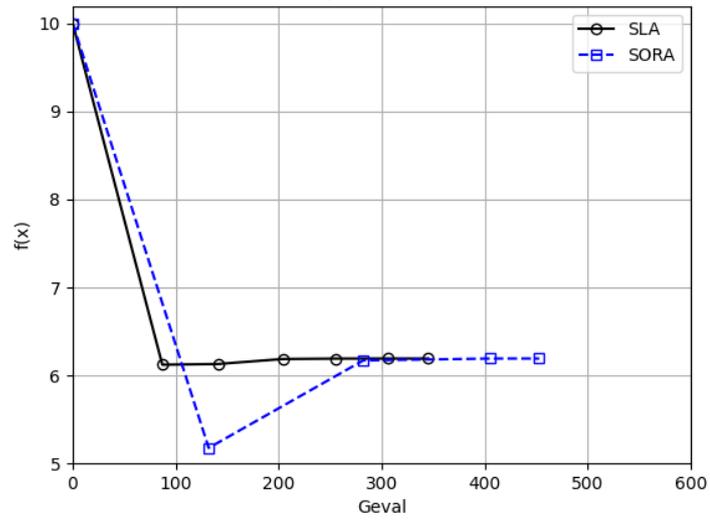
Tabela 8 – Resultados de desempenho do exemplo 02

Método	Aoues and Chateauneuf (2010)	$\beta_i^T = 2,0$	Aoues and Chateauneuf (2010)	$\beta_i^T = 3,0$	Aoues and Chateauneuf (2010)	$\beta_i^T = 4,0$
		f^*/F_{eval}		f^*/F_{eval}		f^*/F_{eval}
		Iter/ G_{eval}		Iter/ G_{eval}		Iter/ G_{eval}
<i>RIA</i>	6,192	6,192/16 5/1031	6,726	6,726/16 5/1063	7,268	7,268/14 4/974
<i>PMA</i>	6,192	6,192/17 5/364	6,726	6,726/16 5/404	7,268	7,268/16 5/450
<i>SORA</i>	6,192	6,192/441 3/453	6,726	6,726/481 4/558	7,268	7,268/39 12/978
<i>SLA</i>	6,192	6,192/521 5/345	6,726	6,726/581 7/369	7,268	7,268/65 19/420

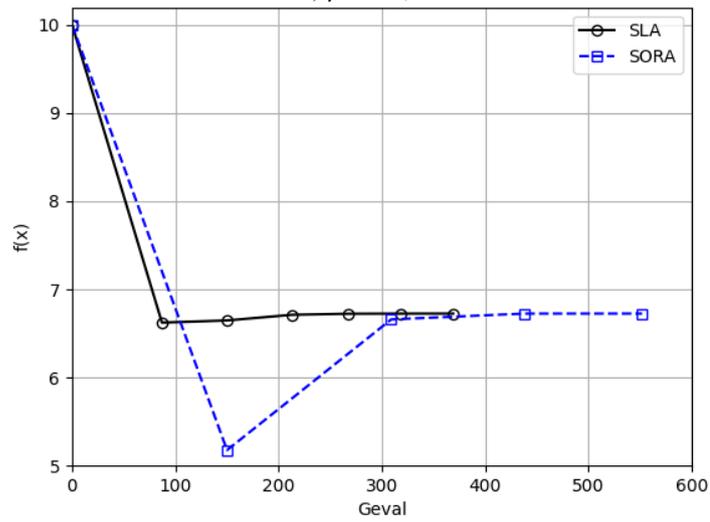
Fonte: O Autor (2024)

A Figura 25 apresenta que os métodos *SLA* (em preto) e *SORA* (em azul) iniciam o processo a partir do ponto x^0 . No Ciclo 1, o método *SLA* está muito próximo da solução ótima com G_{eval} igual a 87 para os diferentes níveis de confiabilidade alvo, enquanto o método *SORA* está longe do ponto ótimo com G_{eval} igual a 132/150/ 162, respectivamente. O método *SLA* converge para a solução ótima com 6/6/7 ciclos com 345/369/420 avaliações de funções de estados limites, respectivamente. *SORA* precisa de menos ciclos, mas converge com quase 1.000 avaliações de funções de estados limites em $\beta_i^T = 4,0$. O método *SLA* é mais regular que o método *SORA*, pois mostra um aumento gradual no número de avaliações de funções de estados limites para diferentes β_i^T .

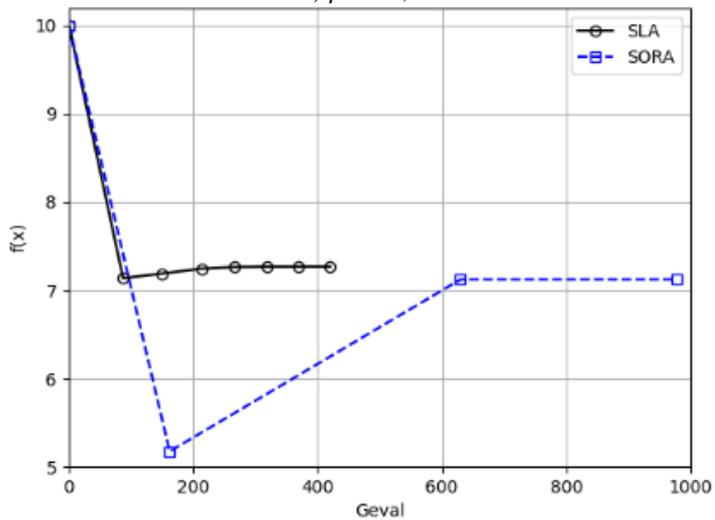
Figura 25 – Histórico de convergência do exemplo 02
a) $\beta^T = 2,0$



b) $\beta^T = 3,0$



c) $\beta^T = 4,0$



Fonte: O Autor (2024)

5.1.3 Exemplo 03 – Pilar curto (*Short Column*)

Neste problema, Aoues and Chateauneuf (2010) considera o seguinte modelo na equação (49), onde a função objetivo é linear e a restrição é não linear. O projeto consiste em uma seção transversal de um pilar curto sujeita à uma força normal e à dois momentos fletores e contém duas variáveis aleatórias de projeto $x = \{x_1; x_2\}$ e quatro parâmetros aleatórias de projeto $p = \{p_1; p_2; p_3; p_4\}$. Diferentes coeficientes de variação (V) são aplicados a x $\{0,00; 0,05; 0,10; 0,15\}$. O modo de falha é representado matematicamente pela lei constitutiva elástico-plástica. O índice de confiabilidade alvo é $\beta_i^T = 3,0$. O ponto inicial é $x^0 = \{0,5; 0,5\}$.

$$\min: f(x) = x_1 x_2 \quad (49)$$

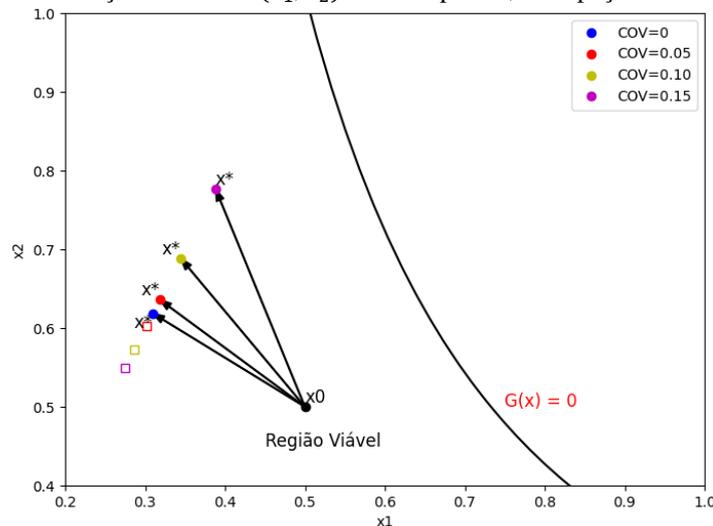
$$\text{s.a: } p_f [g_i(x, p) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1$$

$$g_1(x, p) = 1 - \frac{4p_2}{x_1 x_2^2 p_1} - \frac{4p_3}{x_1^2 x_2 p_1} - \frac{p_4^2}{(x_1 x_2 p_1)^2}$$

$$0,5 \leq x_1/x_2 \leq 2,0$$

A Figura 26 apresenta o contorno das funções de falha no espaço das variáveis x , onde o ponto inicial x^0 (em preto) busca a direção dos pontos ótimos x^* para diferentes coeficientes de variação dentro da região de projeto viável. A Tabela 09 descreve o tipo de distribuição, o valor médio e o coeficiente de variação (V) aplicado às variáveis do exemplo 03, onde x_1 e x_2 é a largura e profundidade da seção transversal, respectivamente; p_1 é a resistência ao escoamento, p_2 e p_3 são momentos fletores, e p_4 é a força axial.

Figura 26 – Função de falha $G(x_1, x_2)$ do exemplo 03, no espaço das variáveis x



Fonte: O Autor (2024)

Tabela 9 – Descrição das variáveis do exemplo 03

Variável	Distribuição	Média	V
x_1, m	Normal	μ_{x_1}	-
x_2, m	Normal	μ_{x_2}	-
p_1, MPa	Normal	40000	0,10
p_2, kNm	Normal	250	0,30
p_3, kNm	Normal	125	0,30
p_4, kN	Normal	2500	0,20

Fonte: O Autor (2024)

A Tabela 10 apresenta que todos os algoritmos convergiram para as soluções reportadas na literatura $f^* = \{0,1914, 0,2373, 0,2024, 0,3015\}$ para os diferentes coeficientes de variação, respectivamente. Na análise computacional, os algoritmos demonstraram resultados favoráveis quanto aos requisitos de eficiência em comparação com Aoues e Chateauneuf (2010), sendo o método *SLA* o mais eficiente, por exemplo foram 102 avaliações de funções de falha ao invés de 156 para o método *PMA* para o coeficiente de variação igual a 0. Todos os algoritmos apresentaram tempo de processamento inferior a 1s.

Tabela 10 – Resultados de desempenho do exemplo 03

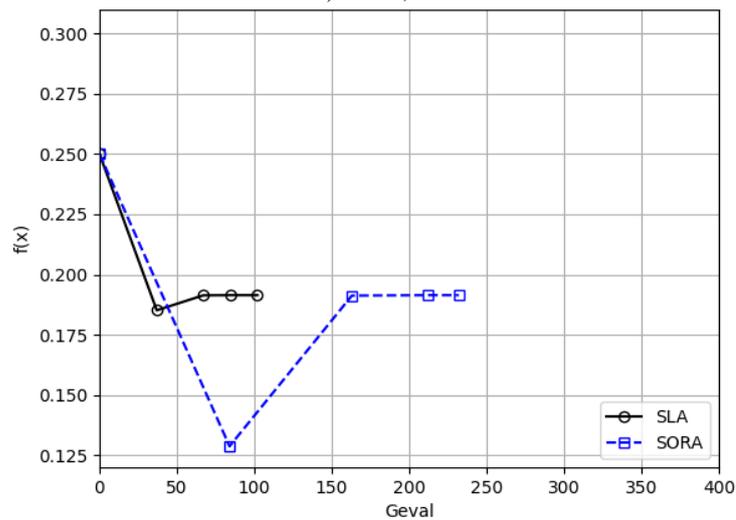
Método	Aoues and Chateauneuf (2010)	V = 0,00	Aoues and Chateauneuf (2010)	V = 0,05
		$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}$		$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}$
<i>RIA</i>	0,1920	0,1914/20/6/296	0,2024	0,2024/20/6/358
<i>PMA</i>	0,1913	0,1914/20/6/156	0,2023	0,2024/20/6/182
<i>SORA</i>	0,1915	0,1914/71/21/234	0,2024	0,2024/80/23/380
<i>SLA</i>	0,1923	0,1914/42/12/102	0,2019	0,2024/55/15/150
Método	Aoues and Chateauneuf (2010)	V = 0,10	Aoues and Chateauneuf (2010)	V = 0,15
		$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}$		$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}$
<i>RIA</i>	0,2373	0,2373/19/6/275	0,3015	0,3015/19/6/407
<i>PMA</i>	0,2372	0,2373/22/6/168	0,3015	0,3015/23/7/270
<i>SORA</i>	0,2372	0,2373/103/28/516	0,3014	0,3015/134/37/594
<i>SLA</i>	0,2335	0,2373/80/21/213	<i>nc</i>	0,3015/118/32/310

Fonte: O Autor (2024)

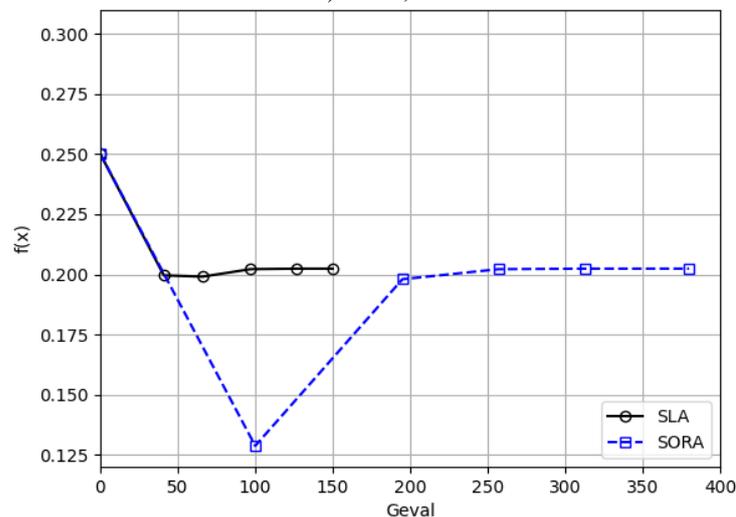
A Figura 27 apresenta que os métodos *SLA* (em preto) e *SORA* (em azul) iniciam o processo a partir do ponto d_0 . No Ciclo 1, o método *SLA* está próximo da solução ótima com

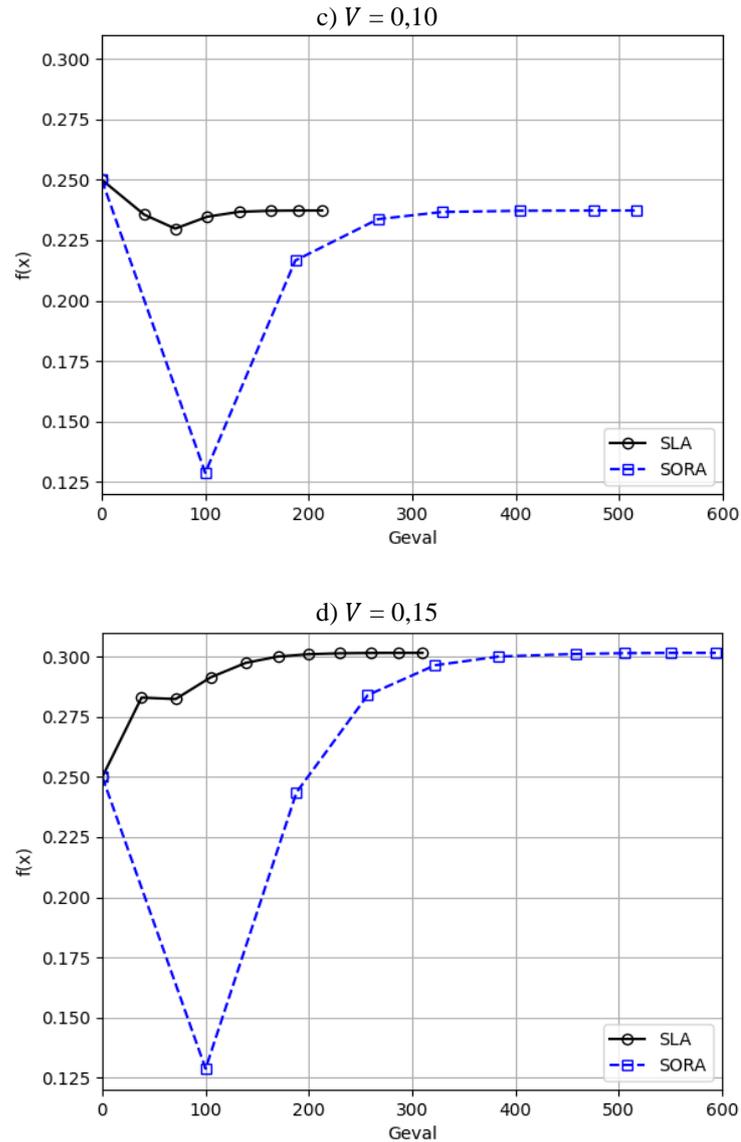
37, 41, 41 e 38 avaliações de funções de estados limites para diferentes coeficientes de variação, respectivamente. Ao mesmo tempo, o método *SORA* está longe do ponto ótimo com 84, 100, 100 e 100 avaliações de funções de estados limites, respectivamente. O método *SLA* converge para a solução ótima com 4, 5, 7 e 10 ciclos com 102, 150, 213 e 310 avaliações de funções, respectivamente. O método *SLA* teve o menor número de avaliações de funções de estados limites. No Ciclo 1, o método *SORA* realiza uma otimização determinística com valores de x^{MPP} e p^{MPP} definidos como as médias de variáveis de projeto aleatórias e parâmetros aleatórios, respectivamente (DU; CHEN, 2002), portanto a solução neste ciclo está sempre longe de a solução ótima. O método *SORA* precisa de menos ciclos, mas converge com quase 600 avaliações de funções de estados limites em $V = 0,15$. O método *SLA* convergiu para uma solução ótima para o coeficiente de variação igual a 0,15.

Figura 27 – Histórico de convergência do exemplo 03
a) $V = 0,00$



b) $V = 0,05$





Fonte: O Autor (2024)

5.1.4 Exemplo 04 – Caixa de engrenagens (*Gear Box*)

Neste problema, Meng *et al.* (2018) considera o seguinte modelo na equação (50), onde a função objetivo e as onze restrições são altamente não lineares. O projeto consiste nas características de uma caixa de engrenagens, conforme a Figura 28. O projeto contém sete variáveis aleatórias de projeto $x = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7\}$. O índice de confiabilidade alvo é $\beta_i^T = 3,0$. O ponto inicial é $x^0 = \{3,50; 0,70; 17,0; 7,30; 7,72; 3,35; 5,29\}$.

A Tabela 11 descreve o tipo de distribuição, o valor médio e o coeficiente de variação (V) aplicado às variáveis do exemplo 04, onde x_1 é a largura e x_2 é o módulo da engrenagem, x_3 é o número de dentes do pinhão, x_4 é a distância entre rolamento 1, x_5 é a distância entre rolamento 2, x_6 é o diâmetro do *shaft* 1 e x_7 é o diâmetro do *shaft* 2.

$$\min: f(x) = 0,7854x_1x_2^2(10x_3^2/3 + 14,933x_3 - 43,0934) - 1,508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7,477(x_6^3 + x_7^3) + 0,7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \quad (50)$$

$$\text{s.a: } p_f[g_i(x) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, \dots, 11$$

$$g_1(x) = 1 - 27(x_1x_2^2x_3)^{-1}$$

$$g_2(x) = 1 - 397,5(x_1x_2^2x_3^2)^{-1}$$

$$g_3(x) = 1 - 1,93x_4^3(x_2x_3x_6^4)^{-1}$$

$$g_4(x) = 1 - 1,93x_5^3(x_2x_3x_7^4)^{-1}$$

$$g_5(x) = 1100 - ((745x_4/x_2x_3)^2 + 16,9e^6)^{1/2}(.1x_6^3)^{-1}$$

$$g_6(x) = 850 - ((745x_5/x_2x_3) + 157,5e^6)^{1/2}(.1x_7^3)^{-1}$$

$$g_7(x) = 40 - x_2x_3$$

$$g_8(x) = x_1/x_2 - 5$$

$$g_9(x) = 12 - x_1x_2^{-1}$$

$$g_{10}(x) = 1 - (1,5x_6 + 1,9)x_4^{-1}$$

$$g_{11}(x) = 1 - (1,1x_7 + 1,9)x_5^{-1}$$

$$2,60 \leq x_1 \leq 3,60; 0,70 \leq x_2 \leq 0,80; 17,0 \leq x_3 \leq 28,0; 7,30 \leq x_4 \leq 8,30; 7,30 \leq x_5 \leq 8,30$$

$$2,90 \leq x_6 \leq 3,90; 5,00 \leq x_7 \leq 5,50 \quad X_i \sim N(x_i, 0,005)$$

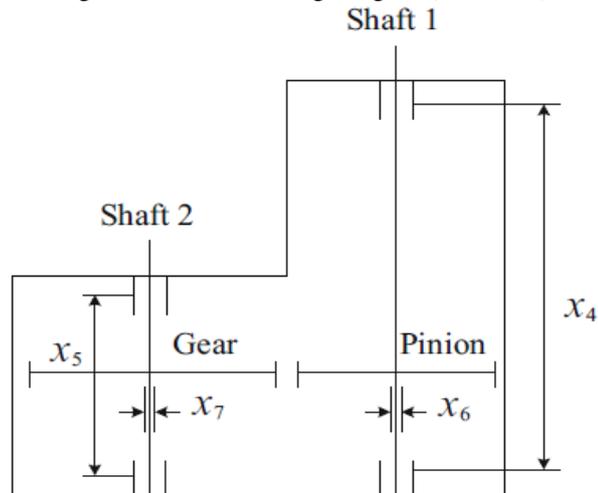
Tabela 11 – Descrição das variáveis do exemplo 04

Variável	Distribuição	Média	V
x_1	Normal	μ_{x_1}	0,005
x_2	Normal	μ_{x_2}	0,005
x_3	Normal	μ_{x_3}	0,005
x_4	Normal	μ_{x_4}	0,005
x_5	Normal	μ_{x_5}	0,005
x_6	Normal	μ_{x_6}	0,005
x_7	Normal	μ_{x_7}	0,005

Fonte: O Autor (2024)

O tamanho amostral (N) é igual a 1000 e o número de pontos de Pareto (n_{par}) é igual a 15, na elaboração da fronteira de Pareto (MOTTA *et al.*, 2012). A equação (51) apresenta o modelo *RBRMDO*, onde a função objetivo vetorial minimiza o volume médio da caixa de engrenagens (μ_{f_1}) e a tensão média no *shaft* 1 (μ_{f_2}), a qual é a função de restrição $G_5(x)$.

$$\min: F(x) = [\mu_{f_1}(x), \mu_{f_2}(x)] \quad (51)$$

Figura 28 – Caixa de engrenagens (*Gear Box*)Fonte: Meng *et al.* (2018)

Para mais detalhes, consultar Golinski (1970), Kurapati e Azarm (2000), Huang *et al.* (2006), Sanchis *et al.* (2008), Cho and Lee (2011), Motta *et al.* (2012), Dong, Moan e Gao (2012), Song *et al.* (2021). A Tabela 12 apresenta que todos os algoritmos convergiram para uma solução exata. Na análise computacional, todos os algoritmos demonstraram resultados favoráveis quanto aos requisitos de eficiência em comparação com Meng *et al.* (2018), sendo o método *SLA* o mais eficiente; por exemplo foram 1287 avaliações de funções de falha ao invés de 4154 para o método *PMA*. O método *SLA* melhor desempenho no tempo de processamento, no número de avaliações de funções objetivo e de estado limite. O método *SORA* teve maior número de iterações. O método *RIA* teve pior desempenho, cujo tempo de processamento 1400 vezes maior que o método *SLA* e com quase 70000 avaliações de funções objetivo.

Tabela 12 – Resultados de desempenho do exemplo 04, no processo *RBDO*

Método	Meng <i>et al.</i> (2018)	$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}/Tempo(s)$
RIA	3038,86	3038,60/60/12/69964/42,28
PMA	3038,86	3038,61/62/13/4154/24,54
SORA	3038,86	3038,61/123/23/4265/0,09
SLA	3038,86	3038,63/29/10/1287/0,03

Fonte: O Autor (2024)

A Tabela 13 apresenta o desempenho dos métodos *RBRMDO*. Na análise computacional, todos os algoritmos demonstraram resultados favoráveis quanto aos requisitos de eficiência, sendo o método *SLA* o mais eficiente; por exemplo foram 6798 avaliações de funções de falha ao invés de 630234 para o método *PMA*. O método *RIA* elaborou uma

fronteira de Pareto com alto custo computacional comparado com os outros algoritmos. O método *SORA* teve melhor desempenho na avaliação de funções de número de estados limites que o método *SLA*.

Tabela 13 – Resultados de desempenho do exemplo 04, no processo *RBRMDO*

Método		RIA	PMA	SORA	SLA
WS	f_1^*	3038,70	3038,70	2994,43	3038,74
	f_2^*	1093,12	1093,12	1093,12	1093,12
	Tempo(s)	418,84	66,98	3,24	3,26
	Iter	51	50	51	52
	F_{eval}	410	418	409	417
	G_{eval}	630234	15035	6545	6798
	$Evness$	2,576	2,576	2,576	2,374
NBI	f_1^*	3038,70	3038,70	2994,43	3038,74
	f_2^*	1093,12	1093,12	1093,12	1093,12
	Tempo(s)	373,10	66,15	6,61	8,10
	Iter	41	44	45	47
	F_{eval}	293	301	351	351
	G_{eval}	617130	12338	6325	9009
	$Evness$	0,316	0,316	0,331	0,331

Fonte: O Autor (2024)

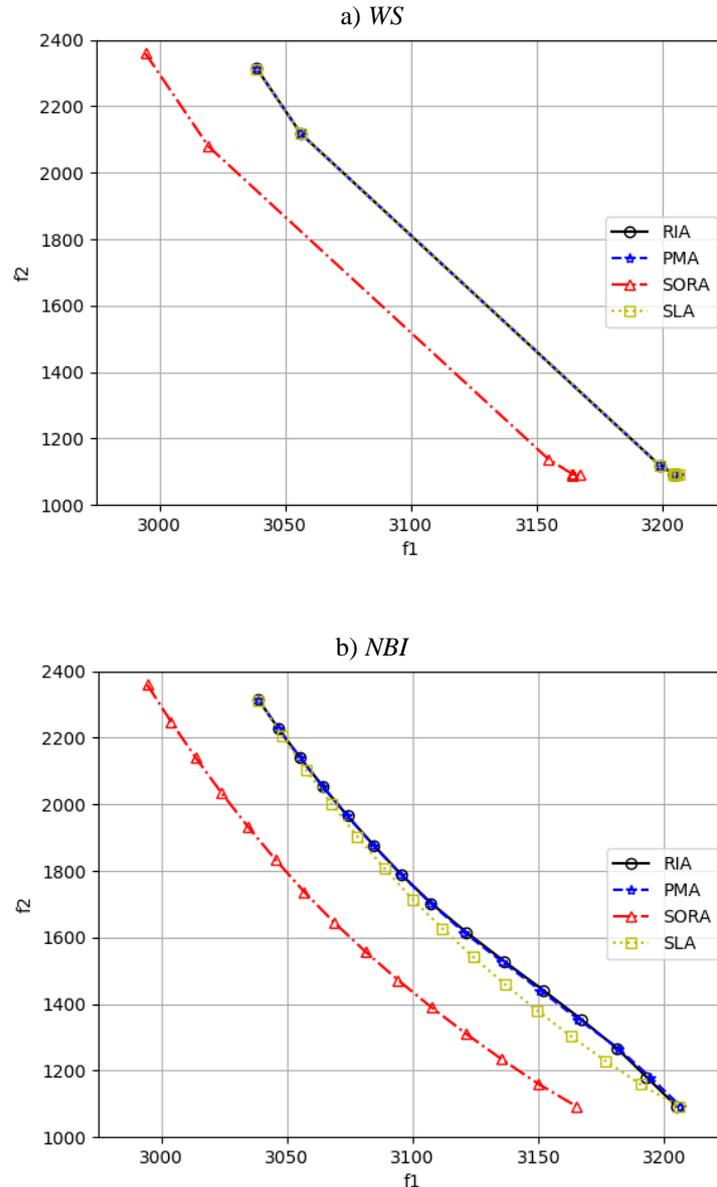
Notavelmente, a tensão média no Shaft 1 reduz à medida que o volume é maximizado, atingindo finalmente um valor mínimo de 1093,12 para todos os algoritmos. O volume médio da caixa de engrenagens diminui à medida que a tensão no Shaft 1 é maximizada, atingindo finalmente um valor mínimo de 2994,43 observado no método *SORA*. Vale ressaltar que a técnica *NBI* supera a técnica *WS* quanto à qualidade da distribuição de pontos de Pareto em todos os algoritmos, por exemplo o requisito *Evness* foi igual a 0,331 em vez de 2,576 para a técnica *WS-SORA*. A técnica *WS* apresenta lacunas e pontos sobrepostos na curva; enquanto a técnica *NBI* demonstra desempenho superior ao apresentar uma curva suave sem lacunas, pontos sobrepostos ou valores discrepantes. A Figura 29 apresenta as fronteiras de Pareto elaboradas pelas técnicas *WS* e *NBI*, onde apresenta as curvas referente aos métodos *RIA* (em preto), *PMA* (em azul), *SORA* (em vermelho) e *SLA* (em amarelo). A Tabela 14 apresenta os resultados para cada ponto de Pareto.

Tabela 14 – Resultados dos pontos de Pareto do exemplo 04

Método	RIA		PMA		SORA		SLA	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
WS	3038,70	2313,36	3038,70	2313,36	2994,43	2359,42	3038,74	2313,15
	3056,23	2117,23	3056,23	2117,26	3019,53	2078,95	3056,24	2117,15
	3198,59	1119,98	3198,61	1119,88	3154,54	1137,73	3198,60	1119,90
	3204,45	1093,12	3204,43	1093,12	3164,02	1093,11	3204,44	1093,12
	3204,77	1093,12	3204,76	1093,12	3164,02	1093,11	3204,77	1093,12
	3204,87	1093,12	3204,88	1093,12	3164,02	1093,11	3204,88	1093,12
	3204,84	1093,12	3204,86	1093,12	3164,02	1093,11	3204,86	1093,12
	3204,83	1093,12	3204,86	1093,12	3164,02	1093,11	3204,86	1093,12
	3204,72	1093,12	3204,74	1093,12	3164,02	1093,11	3204,75	1093,12
	3204,61	1093,12	3204,64	1093,12	3164,02	1093,11	3204,64	1093,12
	3204,53	1093,12	3204,56	1093,12	3164,02	1093,11	3204,56	1093,12
	3204,46	1093,12	3204,48	1093,12	3164,04	1093,11	3204,48	1093,12
	3204,39	1093,12	3204,42	1093,12	3164,07	1093,11	3204,42	1093,12
	3204,34	1093,12	3204,36	1093,12	3164,15	1093,11	3204,37	1093,12
	3204,84	1093,12	3206,40	1093,12	3167,20	1093,12	3206,49	1093,12
NBI	3038,70	2313,36	3038,70	2313,36	2994,43	2359,42	3038,74	2313,15
	3046,71	2226,20	3046,66	2226,20	3003,85	2248,51	3047,99	2206,52
	3055,31	2139,06	3055,26	2139,06	3013,66	2140,42	3057,62	2102,61
	3064,43	2051,94	3064,37	2051,94	3023,85	2035,21	3067,62	2001,40
	3074,08	1964,89	3074,00	1964,89	3034,44	1932,92	3078,00	1902,93
	3084,36	1877,56	3084,29	1877,56	3045,43	1833,59	3088,75	1807,23
	3095,26	1790,40	3095,17	1790,40	3056,81	1737,24	3099,94	1714,73
	3107,29	1703,24	3107,01	1703,24	3068,75	1645,01	3111,77	1626,87
	3121,21	1616,08	3120,27	1616,08	3081,26	1556,97	3123,98	1541,81
	3136,23	1528,92	3135,22	1528,92	3094,17	1471,92	3136,57	1459,55
	3151,81	1441,76	3150,65	1441,77	3107,48	1389,83	3149,54	1380,06
	3166,88	1354,61	3165,72	1354,62	3121,18	1310,68	3162,89	1303,34
	3181,11	1267,46	3181,59	1267,47	3135,27	1234,42	3176,61	1229,33
	3192,98	1180,32	3194,43	1180,28	3149,75	1161,01	3190,70	1158,00
	3204,84	1093,12	3206,40	1093,12	3164,97	1093,12	3205,67	1093,12

Fonte: O Autor (2024)

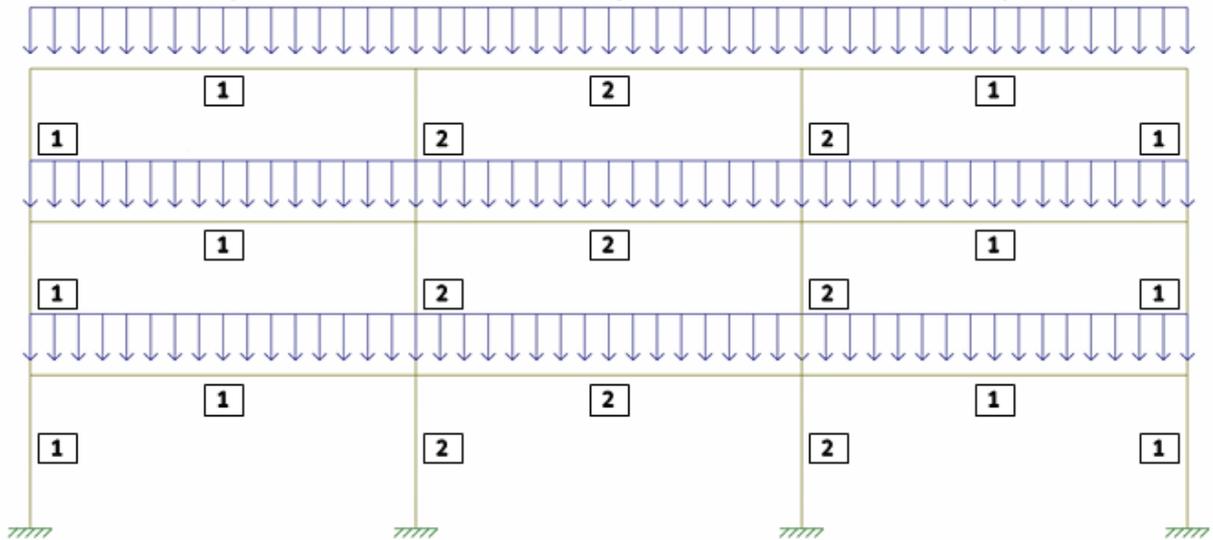
Figura 29 – Fronteira de Pareto WS e NBI



5.2 PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO 3B3S

O projeto consiste no dimensionamento de seções transversais e armaduras longitudinais de elementos de um pórtico plano submetido ao carregamento uniformemente distribuído referente ao peso próprio, a carga permanente e a carga acidental. A Figura 30 apresenta o modelo composto por 09 vigas e 12 pilares, dispostos em dois grupos de cada elemento. Os 06 pilares de canto pertencem ao Grupo 01, enquanto os 06 pilares centrais pertencem ao Grupo 02. Da mesma forma, as 06 vigas de extremidade pertencem ao Grupo 01, enquanto as 03 vigas centrais pertencem ao Grupo 02. Para mais detalhes, consultar Lee e Ahn (2003), Kwak e Kim (2008), Côelho (2017), Alves (2018) e Nascimento (2020).

Figura 30 – Modelo reticulado do pórtico plano 3B3S



Fonte: O Autor (2024)

Tabela 15 – Dados de entrada

Símbolo	Descrição	Valor
f_{ck} , N/m ²	Resistência característica à compressão do concreto	32,9e6
f_{yk} , N/m ²	Resistência característica ao escoamento do aço	450,8e6
E_{cs} , N/m ²	Módulo de elasticidade secante do concreto	2,834e10
E_s , N/m ²	Módulo de elasticidade longitudinal do aço	2,1e11
G , N/m ²	Módulo de elasticidade transversal do concreto	1,181e10
ν	Coefficiente de Poisson	0,20
$\$c$, US\$/m ³	Custo de concreto	54,0
$\$s$, US\$/kg	Custo de aço	0,55
$\$f$, US\$/m ²	Custo de forma	54,0
W_s , kg/m ³	Densidade específica do aço	7850
l_b , m	Comprimento de viga	9,00
l_c , m	Comprimento de pilar	3,60
d' , cm	Distância da face do concreto ao centro da barra de aço	4,00
D , m	Dobra da barra de aço	0,30

Fonte: O Autor (2024)

Neste problema, a função objetivo e as oito restrições probabilísticas são altamente não lineares. O projeto contém seis variáveis determinísticas de projeto $d = \{d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6\}$, oito variáveis aleatórias de projeto $x = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8\}$, e cinco variáveis aleatórias paramétricas $p = \{p_1; p_2; p_3; p_4; p_5\}$. O índice de confiabilidade alvo é $\beta_i^T = 4,20$. O ponto de partida é $d^0 = \{8,48; 14,58; 7,85; 18,01; 24,85; 11,34\}$ e $x^0 =$

{20,28; 36,48; 20,00; 35,02; 30,00; 30,00; 30,00; 30,00}. Alves (2018) considera o seguinte modelo na equação (52), que minimiza o custo total de construção, em dólares.

A Tabela 16 descreve o tipo de distribuição, o valor médio e o coeficiente de variação (V) aplicado às variáveis ao pórtico plano de concreto armado, onde d refere-se as médias das áreas de aço de vigas e pilares, x refere-se a média das dimensões da seção transversal das vigas e pilares e p refere-se aos parâmetros de projeto.

Tabela 16 – Variáveis aleatórias da otimização sob incertezas

Variável	Descrição	Distribuição	Média	V
d_1, cm^2	Armadura longitudinal positiva viga de canto	-	μ_{d_1}	-
d_2, cm^2	Armadura longitudinal negativa viga de canto	-	μ_{d_2}	-
d_3, cm^2	Armadura longitudinal positiva viga central	-	μ_{d_3}	-
d_4, cm^2	Armadura longitudinal negativa viga central	-	μ_{d_4}	-
d_5, cm^2	Armadura longitudinal pilar de canto	-	μ_{d_5}	-
d_6, cm^2	Armadura longitudinal pilar central	-	μ_{d_6}	-
x_1, cm	Largura seção transversal viga de canto	Normal	μ_{x_1}	0,025
x_2, cm	Altura seção transversal viga de canto	Normal	μ_{x_2}	0,025
x_3, cm	Largura seção transversal viga central	Normal	μ_{x_3}	0,025
x_4, cm	Altura seção transversal viga central	Normal	μ_{x_4}	0,025
x_5, cm	Lado seção transversal, no eixo x, pilar de canto	Normal	μ_{x_5}	0,025
x_6, cm	Lado seção transversal, no eixo y, pilar de canto	Normal	μ_{x_6}	0,025
x_7, cm	Lado seção transversal, no eixo x, pilar central	Normal	μ_{x_7}	0,025
x_8, cm	Lado seção transversal, no eixo y, pilar central	Normal	μ_{x_8}	0,025
$p_1, \text{N/m}^2$	Resistência de projeto à compressão do concreto	Lognormal	39,38e6	0,10
$p_2, \text{N/m}^2$	Resistência de projeto ao escoamento do aço	Lognormal	491,2e6	0,05
$p_3, \text{N/m}^2$	Módulo de elasticidade longitudinal do aço	Normal	2,1e11	0,05
$p_4, \text{N/m}$	Carga permanente	Normal	16,5e3	0,04
$p_5, \text{N/m}^2$	Carga acidental	Normal	6,841e3	0,10

Fonte: O Autor (2024)

A função objetivo e as oito restrições probabilísticas são lineares. As restrições são associadas às capacidades resistentes dos elementos estruturais no ELU. Matematicamente, é a diferença entre o esforço resistente e o esforço solicitante. A seção transversal dos pilares é verificada por momentos de flexocompressão normal M ($G_1; G_2$); enquanto a seção

transversal das vigas é verificada por momentos fletores de tração M^+ ($G_3; G_5$), e por momentos fletores de compressão M^- ($G_4; G_6$) e por esforços cortantes Q ($G_7; G_8$).

$$\begin{aligned} \min: f(d, x) = & 6\$_c x_1 x_2 (l_b - x_6/2 - x_8/2) + 6\$_s d_1 W_s (l_b - x_6/2 - x_8/2 + \\ & 0,3048) + 6\$_s d_2 W_s [(l_b - x_6/2 - x_8/2)/4 + x_6 - d'/100 + D] + 6\$_f (l_b - x_6/2 - \\ & x_8/2)(2x_1 + 2x_2) + 3\$_c x_3 x_4 (l_b - x_8) + 3\$_s d_3 W_s (l_b - x_8 + 0,3048) + 6\$_s d_4 W_s [x_8 + \\ & (l_b - x_6/2 - x_8/2)/3 + (l_b - x_8)/3] + 3\$_f (l_b - x_8)(2x_3 + 2x_4) + 6\$_c l_c x_5 x_6 + \\ & 6\$_s l_c d_5 W_s + 6\$_f l_c (2x_5 + 2x_6) + 6\$_c l_c x_7 x_8 + 6\$_s l_c d_6 W_s + 6\$_f l_c (2x_7 + 2x_8) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\text{s.a: } p_f [g_i(d, x, p) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, \dots, 8$$

$$g_1(d, x, p): M_{d,1} - M_{S,1}$$

$$g_2(d, x, p): M_{d,2} - M_{S,2}$$

$$g_3(d, x, p): M_{d,1}^+ - M_{S,1}^+$$

$$g_4(d, x, p): M_{d,1}^- - M_{S,1}^-$$

$$g_5(d, x, p): M_{d,2}^+ - M_{S,2}^+$$

$$g_6(d, x, p): M_{d,2}^- - M_{S,2}^-$$

$$g_7(d, x, p): Q_{d,1} - Q_{S,1}$$

$$g_8(d, x, p): Q_{d,2} - Q_{S,2}$$

$$5,67 \leq d_1 \leq 22,81; 5,67 \leq d_2 \leq 22,81; 5,67 \leq d_3 \leq 22,81; 5,67 \leq d_4 \leq 22,81$$

$$11,34 \leq d_5 \leq 88,36; 11,34 \leq d_6 \leq 88,36; 20,0 \leq x_1 \leq 50,0; 35,0 \leq x_2 \leq 90,0; 20,0 \leq x_3 \leq 50,0$$

$$35,0 \leq x_4 \leq 90,0; 30,0 \leq x_5 \leq 60,0; 30,0 \leq x_6 \leq 90,0; 30,0 \leq x_7 \leq 60,0; 30,0 \leq x_8 \leq 90,0$$

O tamanho amostral (N) é igual a 1000 e o número de pontos de Pareto (n_{par}) é igual a 11, na elaboração da fronteira de Pareto (NASCIMENTO, 2020). A equação (53) apresenta o modelo *RBRMDO*, onde a função objetivo vetorial minimiza o custo total médio de construção em dólares (μ_{f_1}) e o desvio padrão máximo dos deslocamentos nodais em milímetros (σ_{f_2}).

$$\min: F(d, x, p) = [\mu_{f_1}(d, x), \sigma_{f_2}(d, x, p)] \quad (53)$$

A Tabela 17 apresenta que todos os métodos *RBDO* convergiram para uma solução aproximada f^* , com erro percentual de 0,43, 1,27, 1,57 e 0,95, respectivamente. Na análise computacional, os algoritmos demonstraram resultados favoráveis quanto aos requisitos de

eficiência, sendo o método *SLA* o mais eficiente. O método *RIA* teve desempenho superior em avaliações de precisão e função objetivo, mas teve um tempo de processamento 28,8 vezes maior e 13,9 vezes mais avaliações de função de estado limite do que o método *SLA*.

Tabela 17 – Resultados de desempenho do pórtico plano, no processo *RBDO*

Método	Alves (2018)	$f^*/F_{eval}/Iter/G_{eval}/Tempo(h)$
<i>RIA</i>	9085,66	9124,56/302/70/194622/5,10
<i>PMA</i>	-	9200,75/621/134/100280/3,50
<i>SORA</i>	-	9200,75/447/68/20713/0,25
<i>SLA</i>	-	9171,98/1794/96/14028/0,18

Fonte: O Autor (2024)

Na análise de eficiência computacional, os métodos *SLA* e *SORA* demonstraram resultados favoráveis em comparação com Nascimento (2020). O método *SORA* apresentou desempenho superior em relação aos demais algoritmos, exceto na medida *Tempo/Iter*. A técnica *WS-SORA* teve desempenho inferior em relação ao tempo de processamento e número de avaliações de função objetivo em comparação com a técnica *WS-PMA* em 11,9 e 13,7 vezes, respectivamente. O método *SORA* reduziu 39% e 28% no número de avaliações de funções de estados limites em comparação ao método *SLA* nas técnicas *WS* e *NBI*, respectivamente. A Tabela 18 apresenta os valores ótimos das variáveis d e x . A Tabela 19 apresenta o desempenho dos métodos *RBRMDO*. A Figura 31 apresenta as fronteiras de Pareto *WS* e *NBI*, onde apresenta as curvas referente aos métodos *RIA* (em preto), *PMA* (em azul), *SORA* (em vermelho) e *SLA* (em amarelo). O deslocamento nodal diminui com a maximização do custo, atingindo um valor mínimo de 0,127mm na técnica *WS-RIA*. O custo total de construção diminui com a maximização do deslocamento, atingindo o valor mínimo de US\$ 8880,57 na técnica *NBI-SLA*. A técnica *NBI* apresenta melhor desempenho na distribuição de pontos de Pareto em comparação à técnica *WS* em todos os algoritmos; por exemplo o requisito *Evness* foi igual a 0,633 na técnica *NBI-RIA* enquanto 1,269 para a técnica *WS-RIA*. A técnica *WS-RIA* mostra lacunas e pontos sobrepostos, enquanto a técnica *NBI-RIA* mostra pontos discrepantes. A técnica *WS-PMA* mostra pontos sobrepostos, enquanto a técnica *NBI-PMA* mostra pontos discrepantes. As técnicas *WS-SLA* e *WS-SORA* mostram uma fronteira de Pareto suave com lacunas e pontos sobrepostos; enquanto as técnicas *NBI-SLA* e *NBI-SORA* mostram uma fronteira de Pareto suave sem lacunas, sobreposições ou pontos discrepantes. A Tabela 20 apresenta os resultados para cada ponto de Pareto.

Tabela 18 – Valores ótimos das variáveis d e x

Variável	<i>RIA</i>	<i>PMA</i>	<i>SORA</i>	<i>SLA</i>
d_1, cm^2	8,31	7,94	8,14	7,87
d_2, cm^2	14,46	13,21	13,47	12,40
d_3, cm^2	7,55	7,39	7,61	7,23
d_4, cm^2	18,22	17,35	22,81	16,57
d_5, cm^2	24,83	24,19	24,41	23,52
d_6, cm^2	11,34	11,34	11,34	11,34
x_1, cm	20,00	20,00	20,00	20,00
x_2, cm	36,73	38,43	37,38	39,55
x_3, cm	20,00	20,00	20,00	20,00
x_4, cm	35,19	35,68	35,00	36,53
x_5, cm	30,77	31,47	30,00	30,00
x_6, cm	30,15	30,00	30,00	30,00
x_7, cm	30,00	30,00	30,00	30,00
x_8, cm	30,94	30,00	30,00	30,00

Fonte: O Autor (2024)

Tabela 19 – Resultados de desempenho do Pórtico Plano, no processo *RBRMDO*

Método	Nascimento (2020)		Autor (2024)		
	<i>RIA</i>	<i>PMA</i>	<i>SLA</i>	<i>SORA</i>	
<i>WS</i>	f_1^* (US\$)	9238,75	9536,71	9010,45	8946,09
	f_2^* (mm)	0,127	0,153	0,153	0,201
	Tempo (h)	30,5	70,2	9,88	5,92
	Tempo/Iter (min)	4,06	3,50	2,91	2,89
	F_{eval}	7972	25,701	3179	1870
	G_{eval}	-	-	25095	15183
	<i>Evness</i>	1,269	0,671	0,845	1,003
<i>NBI</i>	f_1^* (US\$)	9406,33	9177,80	8880,57	9006,56
	f_2^* (mm)	0,198	0,059	0,193	0,174
	Tempo (h)	39,8	52,2	12,8	10,7
	Tempo/Iter (min)	2,33	3,23	6,23	24,6
	F_{eval}	18557	17984	2010	1720
	G_{eval}	-	-	23135	16660
	<i>Evness</i>	0,633	0,784	0,666	0,653

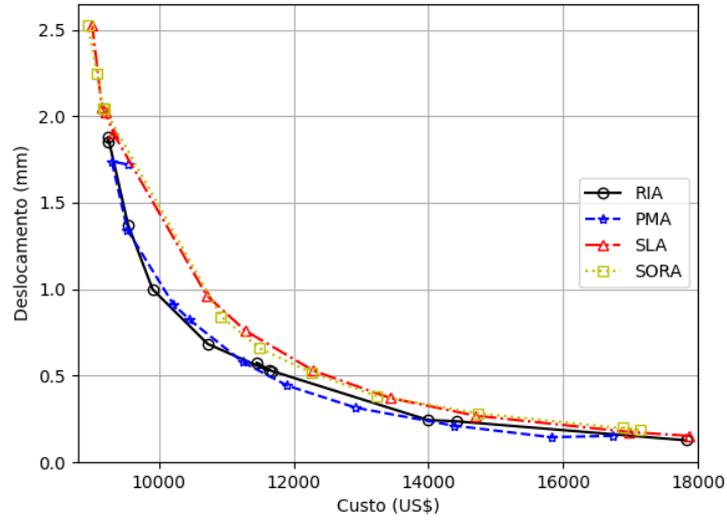
Fonte: O Autor (2024)

Tabela 20 – Resultados dos pontos de Pareto do pórtico plano

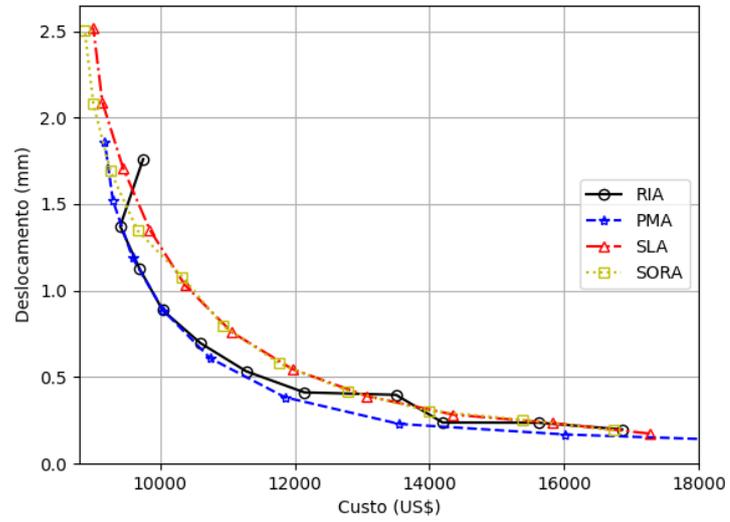
Método	Nascimento (2020)				Autor (2024)			
	RIA		PMA		SORA		SLA	
	f_1 (US\$)	f_2 (mm)	f_1 (US\$)	f_2 (mm)	f_1 (US\$)	f_2 (mm)	f_1 (US\$)	f_2 (mm)
WS	17826,98	0,127	16740,63	0,153	16886,64	0,201	17863,69	0,153
	14411,29	0,237	15824,16	0,145	17142,47	0,186	16983,09	0,175
	13997,30	0,244	14373,80	0,212	14732,23	0,283	14690,68	0,270
	11672,93	0,528	12926,78	0,315	13235,91	0,383	13429,91	0,372
	11448,25	0,575	11906,14	0,443	12275,94	0,516	12295,21	0,529
	11630,74	0,529	11246,33	0,579	11497,10	0,658	11281,97	0,761
	10723,81	0,684	10457,31	0,825	10922,20	0,843	10708,95	0,964
	9906,84	0,999	10215,07	0,913	9181,91	2,048	9327,25	1,899
	9541,85	1,373	9532,56	1,342	9170,07	2,045	9205,50	2,022
	9245,03	1,879	9299,25	1,740	9082,94	2,249	9152,42	2,053
	9238,75	1,849	9536,71	1,720	8946,09	2,522	9010,45	2,522
NBI	16863,09	0,198	16863,09	0,198	16743,50	0,193	17272,95	0,174
	15617,38	0,237	15294,63	0,169	15380,80	0,254	15833,16	0,235
	14197,85	0,238	14197,18	0,238	13984,58	0,306	14348,63	0,284
	13503,74	0,398	13119,72	0,311	12796,68	0,419	13072,35	0,391
	12142,95	0,412	12127,23	0,402	11771,87	0,579	11966,69	0,546
	11279,26	0,534	11401,96	0,549	10938,05	0,796	11065,03	0,760
	10598,26	0,697	10787,40	0,719	10329,64	1,080	10369,67	1,032
	10037,83	0,887	10059,91	0,866	9666,17	1,347	9846,20	1,352
	9697,75	1,124	9986,59	1,150	9262,40	1,691	9449,39	1,709
	9406,33	1,373	9438,23	1,334	9008,63	2,078	9141,16	2,090
9748,13	1,760	9727,89	1,693	8880,57	2,503	9006,56	2,521	

Fonte: O Autor (2024)

Figura 31 – Fronteira de Pareto *WS/NBI* do Pórtico Plano
a) *WS*



b) *NBI*



Fonte: O Autor (2024)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na Otimização baseada em Confiabilidade, o método *RIA* apresentou dificuldades em convergir para a solução ótima f^* para o segundo ponto inicial de projeto, no exemplo 01. O método *SORA* dobrou o número de avaliações de funções estado limite, no exemplo 02, sobre diferentes alvos índices de confiabilidade β_i^T . No exemplo 03, o método *SLA* triplicou o número de avaliações de funções estado limite para diferentes coeficientes de variação. Além disso, *RIA* atingiu 400000 avaliações de funções estado limite, no exemplo 04, para um projeto com restrições probabilísticas altamente não lineares. No projeto de pórticos planos de concreto armado, o método *RIA* apresentou o pior desempenho em relação ao tempo de processamento e ao número de avaliações da função de estado limite.

Na Otimização Robusta Multiobjetivo baseada em Confiabilidade, os métodos *RIA* e *PMA* apresentaram pior desempenho em termos de tempo de processamento e número de avaliações de funções estado limite. Isto resultou em lacunas, sobreposições e pontos discrepantes na elaboração da fronteira de Pareto *WS/NBI*. Porém, é importante destacar que ambos os algoritmos conseguiram atingir os melhores pontos ótimos ao longo de suas curvas. Os métodos *SORA* e *SLA* mostram uma fronteira Pareto *WS/NBI* suave sem lacunas, sobreposições ou pontos discrepantes.

Com base na análise de eficiência computacional, pode-se concluir que os métodos *SORA* e *SLA* são os algoritmos mais eficientes e robustos, principalmente pelo desempenho superior no tempo de processamento e no número de avaliações de funções de estado limite. O método *SLA* se apresentou mais eficiente em processos *RBDO*; enquanto *SORA* em processos multiobjetivo. Os métodos *RIA* e *PMA* apresentaram uma fronteira de Pareto com melhores valores para as funções objetivos.

Como direção futura, sugere-se expandir o escopo do estudo para incluir outros métodos de otimização sob incertezas, explorar diferentes técnicas multiobjetiva como *Normalized Normal Constraint (NNC)*, além de métodos substitutos e *Machine Learning*. Sugere-se também o cálculo das armaduras de aço de estribos para vigas e pilares, o dimensionamento dos pilares de canto por flexocompressão oblíqua e o dimensionamento de sapatas superficiais; além de aumento no número de pavimentos-tipo. No Apêndice A, apresenta-se um modelo proposto para o problema do pórtico plano de concreto armado, seguindo orientações da NBR 6118 (2014), onde as catorze funções de restrições laterais impostas à função objetivo são modificadas.

REFERÊNCIAS

- AKHAVAN KAZEMI, Mohammad; HOSEINI VAEZ, Seyed Rohollah; FATHALI, Mohammad Ali. An eco-friendly reliability-based design optimization of intermediate reinforced concrete moment frames. **European Journal of Environmental and Civil Engineering**, v. 27, n. 5, p. 1876-1896, 2023.
- ALVES, Bruno Sampaio. **Otimização baseada em confiabilidade de pórticos de concreto armado**. Dissertação de mestrado. 2018. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.
- ANTONIOU, Andreas; LU, Wu-Sheng. **Practical optimization: Algorithms and Engineering Applications**. New York, NY: Springer, 2007.
- AOUES, Younes; CHATEAUNEUF, Alaa. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. **Structural and multidisciplinary optimization**, v. 41, n. 2, p. 277-294, 2010.
- ARORA, Jasbir. **Introduction to optimum design**. Elsevier, 2004.
- ARORA, Jasbir S. **Optimization of structural and mechanical systems**. World Scientific, 2007.
- ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. Editora Dunas, 2010, v.1 e v.3, 3ed.
- ASGHSHAHR, Mohammadreza Seify. Reliability Based Design Optimization of Reinforced Concrete Frames Using Genetic Algorithm. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 65, n. 2, p. 566-576, 2021.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT. NBR 6118 – **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. 2014.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT. NBR 7480 – **Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado – Especificação**. 2008.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT. NBR 8681 – **Ações e segurança nas estruturas - Procedimento**. 2004.
- BECK, André T. **Curso de confiabilidade estrutural**. 2008. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo – USP.
- BECK, André T. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. 2021. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo – USP.
- CARVALHO, Roberto Chust; PINHEIRO, Libânio Miranda. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. Editora Pini, 2009, v.2, 1ed.
- CHENG, Jin; LI, Q. S.; XIAO, Ru-cheng. A new artificial neural network-based response surface method for structural reliability analysis. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 23, n. 1, p. 51-63, 2008.

CHO, Tae Min; LEE, Byung Chai. Reliability-based design optimization using convex linearization and sequential optimization and reliability assessment method. **Structural Safety**, v. 33, n. 1, p. 42-50, 2011.

COÊLHO, Gabriella Autran Gurgel. **Otimização de pórticos planos de concreto armado utilizando ajuste de parâmetros e operadores do algoritmo génético**. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

Çoşut, Muhammed; Bekdaş, Gebrail; Nigdeli, Sinan Melih. Optimization of reinforced concrete frame structures and matrix displacement method. **Challenge Journal of Concrete Research Letters**, p. 10-17, 2023.

DAS, Indraneel; DENNIS, John E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. **SIAM journal on optimization**, v. 8, n. 3, p. 631-657, 1998.

DONG, Wenbin; MOAN, Torgeir; GAO, Zhen. Fatigue reliability analysis of the jacket support structure for offshore wind turbine considering the effect of corrosion and inspection. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 106, p. 11-27, 2012.

DUDZIK, Agnieszka; POTRZESZCZ-SUT, Beata. Hybrid approach to the first order reliability method in the reliability analysis of a spatial structure. **Applied Sciences**, v. 11, n. 2, p. 648, 2021.

DU, Liu; CHOI, Kyung K. An inverse analysis method for design optimization with both statistical and fuzzy uncertainties. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, n. 2, p. 107-119, 2008.

DU, Xiaoping. Saddlepoint approximation for sequential optimization and reliability analysis. **Journal of Mechanical Design**, v. 130, n. 1, 2008.

DU, Xiaoping; CHEN, Wei. A most probable point-based method for efficient uncertainty analysis. **Journal of Design and Manufacturing automation**, v. 4, n. 1, p. 47-66, 2001.

DU, Xiaoping; CHEN, Wei. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. **International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. 2002. p. 871-880.

DU, Xiaoping; SUDJANTO, Agus; CHEN, Wei. An integrated framework for optimization under uncertainty using inverse reliability strategy. **J. Mech. Des.**, v. 126, n. 4, p. 562-570, 2004.

GOLINSKI, Jan. Optimal synthesis problems solved by means of nonlinear programming and random methods. **Journal of mechanisms**, v. 5, n. 3, p. 287-309, 1970.

HACKL, Jurgen; CAPRANI, Colin. (2022). **Python Structural Reliability Analysis with Python – Pystra**. Disponível em: < <http://pystra.github.io/pystra/index.html>>. Acesso em: 25 de ago. de 2022.

HUANG, Hong-Zhong; GU, Ying-Kui; DU, Xiaoping. An interactive fuzzy multi-objective optimization method for engineering design. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 19, n. 5, p. 451-460, 2006.

HYEON JU, Byeong; CHAI LEE, Byung. Reliability-based design optimization using a moment method and a kriging metamodel. **Engineering Optimization**, v. 40, n. 5, p. 421-438, 2008.

JARRAYA, A. *et al.* Shape and thickness optimization performance of a beam structure by sequential quadratic programming method. **Journal of Failure Analysis and Prevention**, v. 7, n. 1, p. 50-55, 2007.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **JCSS: Probabilistic Model Code – Part I – Basis of Design**, 2001, Disponível em: <<https://www.jcss-lc.org/publications/jcsspmc/desbasis2a.pdf>>. Acesso em: 01 de out. de 2022.

KURAPATI, A.; AZARM, S. Immune network simulation with multiobjective genetic algorithms for multidisciplinary design optimization. **Engineering Optimization**, v. 33, n. 2, p. 245-260, 2000.

KWAK, Hyo-Gyoung; KIM, Jieun. Optimum design of reinforced concrete plane frames based on predetermined section database. **Computer-Aided Design**, v. 40, n. 3, p. 396-408, 2008.

LEE, C.; AHN, J. Flexural design of reinforced concrete frames by Genetic Algorithm. **Journal of Structural Engineering**, vol.129, pp.762-774. ASCE. 2003.

LIANG, Jinghong; MOURELATOS, Zissimos P.; TU, Jian. A single-loop method for reliability-based design optimization. **International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. 2004. p. 419-430.

LIU, Huibin *et al.* Application of the sequential optimization and reliability assessment method to structural design problems. **International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. 2003. p. 63-72.

LOBATO, Fran Sérgio et al. Reliability-based robust multi-objective optimization applied to engineering system design. **Engineering Optimization**, v. 52, n. 1, p. 1-21, 2020.

LOGAN, Daryl L. **A first course in the finite element method**. Cengage Learning, 2016, 6 ed.

LOPEZ, Rafael Holdorf; BECK, André Teófilo. Reliability-based design optimization strategies based on FORM: a review. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 34, n. 4, p. 506-514, 2012.

MAKRIS, Panagiotis A.; PROVATIDIS, Christopher G.; VENETSANOS, Demetrios T. Structural optimization of thin-walled tubular trusses using a virtual strain energy density approach. **Thin-walled structures**, v. 44, n. 2, p. 235-246, 2006.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Elsevier Brasil, 2010.

MARTINS, Joaquim RRA; NING, Andrew. **Engineering design optimization**. Cambridge University Press, 2021.

MELCHERS, Robert E.; BECK, André T. **Structural reliability analysis and prediction**. John Wiley & Sons, 2018.

MENG, Zeng *et al.* Convergence control of single loop approach for reliability-based design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, n. 3, p. 1079-1091, 2018.

MESSAC, Achille; MATTSON, Christopher A. Normal constraint method with guarantee of even representation of complete Pareto frontier. **AIAA journal**, v. 42, n. 10, p. 2101-2111, 2004.

MONTOYA, P Jimenez; MESEGUER, Álvaro García, CABRÉ, Francisco Morán. Hormigon Armado. 3th ed., Gustavo Gili, Barcelona, 1987.

MOTTA, Renato de Siqueira. **Otimização robusta de estruturas utilizando o método da base reduzida**. 2009. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

MOTTA, Renato de Siqueira. **Otimização sob incertezas de estruturas com comportamento não linear utilizando modelos de ordem reduzida**. 2015. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

MOTTA, Renato de Siqueira; AFONSO, Silvana MB; LYRA, Paulo RM. A modified NBI and NC method for the solution of N-multiobjective optimization problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, p. 239-259, 2012.

NASCIMENTO, Jacqueline Cristine Messias do. **Otimização multiobjetivo robusta de pórticos planos de concreto armado com restrições baseadas em confiabilidade**. 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

NIKOLAIDIS, Efstratios; BURDISSO, Ricardo. Reliability based optimization: a safety index approach. **Computers & structures**, v. 28, n. 6, p. 781-788, 1988.

PEREIRA JUNIOR, Wanderlei Malaquias *et al.* Reliability analysis of reinforced concrete frames subjected to post-construction settlements. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 16, 2023.

PHOON, Kok-Kwang; KULHAWY, Fred H.; GRIGORIU, Mircea D. Development of a reliability-based design framework for transmission line structure foundations. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 129, n. 9, p. 798-806, 2003.

RAO, R. Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems. **International Journal of Industrial Engineering Computations**, v. 7, n. 1, p. 19-34, 2016.

REBELLO, Yopanan. **A concepção estrutural e a arquitetura**. Zigurate Editora, 2000.

SCIPY (2023). **Scipy documentation**. Disponível em: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html>>. Acesso em: 25 de ago. de 2022.

SAHAI, Atul *et al.* Sequential optimization and reliability assessment method for metal forming processes. In: **AIP Conference Proceedings**. American Institute of Physics, 2004. p. 2009-2013.

SANCHIS, J. *et al.* A new perspective on multiobjective optimization by enhanced normalized normal constraint method. **Structural and multidisciplinary optimization**, v. 36, n. 5, p. 537-546, 2008.

SECCHI, Argimiro R. **Otimização de Processos**. 2015. Notas de Aula. Instituto Alberto Luiz Coimbra - COPPE. Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ.

SOBRAL, Maylon Dieferson Silva de. **Otimização de dutos sujeitos à corrosão, baseado em confiabilidade**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

SONG, Kunling *et al.* Reliability-based design optimization using adaptive surrogate model and importance sampling-based modified SORA method. **Engineering with Computers**, v. 37, n. 2, p. 1295-1314, 2021.

SORIANO, Humberto Lima. **Elementos finitos – Formulação e aplicação na estática e na dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

SURAHMAN, Adang; ROJANI, Kamal B. Reliability based optimum design of concrete frames. **Journal of structural engineering**, v. 109, n. 3, p. 741-757, 1983.

TYNI, Tapio; YLINEN, Jari. Evolutionary bi-objective optimization in the elevator car routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 169, n. 3, p. 960-977, 2006.

TU, Jian; CHOI, Kyung K.; PARK, Young H. A new study on reliability-based design optimization. 1999.

WEI, Huang *et al.* The structural optimization of gearbox based on sequential quadratic programming method. In: 2009 **Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation**. IEEE, 2009. p. 356-359.

YANG, Xin-She. **Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications**. John Wiley & Sons, 2010.

ZHANG, Jian-Tao *et al.* Optimal design of a rod shape ultrasonic motor using sequential quadratic programming and finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 59, p. 11-17, 2012.

APÊNDICE A – MODELO REFORMULADO

Um novo modelo é proposto para o projeto do pórtico plano de concreto armado, seguindo orientações da NBR 6118 (2014). As modificações são, exclusivamente, nas funções de restrições laterais impostas à função objetivo e no ponto inicial:

- a) a largura mínima de seção transversal de vigas deve ser maior ou igual a 12,0cm, de acordo com o item 13.2.2 da norma;
- b) a área mínima para armadura longitudinal de tração de vigas deve ser maior ou igual a 0,15% da área de seção transversal, de acordo com o item 17.3.5.2 da norma; Neste caso, a menor área de seção bruta de concreto possível é 12x12cm, o que representa 0,22cm² de área para armadura longitudinal; como a norma não define sobre limites superiores da seção transversal e área máxima de armadura de tração. Aqui, será considerado o limite superior igual a 90cm e a área máxima igual a 324cm², o que representa 10% do comprimento total de viga e 4% da área de seção transversal, respectivamente; estes percentuais são utilizados pelos projetistas.
- c) o menor lado da seção transversal de pilares deve ser maior ou igual a 19,0cm, de acordo com o item 13.2.3 da norma; enquanto o maior lado da seção transversal de pilares deve ser menor ou igual a 5 vezes a dimensão do menor lado, isto é, 95cm, de acordo com o item 14.4.2.4 da norma;
- d) a área mínima de seção transversal de pilares deve ser maior ou igual a 360,0cm², de acordo com o item 13.2.3 da norma;
- e) a área mínima e máxima para armadura longitudinal deve ser igual a 0,4% e 8,0% da área de seção transversal, respectivamente, o que representa 1,44cm² e 722,0cm², de acordo com o item 17.3.5.3 da norma.

Neste problema, a função objetivo e as oito restrições probabilísticas são altamente não lineares. O projeto contém seis variáveis determinísticas de projeto $d = \{d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6\}$, oito variáveis aleatórias de projeto $x = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8\}$, e cinco variáveis aleatórias paramétricas $p = \{p_1; p_2; p_3; p_4; p_5\}$. O índice de confiabilidade alvo é $\beta_i^T = 4,20$. O ponto de partida é $d_0 = \{0,22; 0,22; 0,22; 0,22; 1,44; 1,44\}$ e $x_0 = \{12; 12; 12; 12; 19; 19; 19; 19\}$. Abaixo, apresenta-se o modelo reformulado na equação (54).

$$\begin{aligned}
\min: f(d, x) = & 6\$_c x_1 x_2 (l_b - x_6/2 - x_8/2) + 6\$_s d_1 W_s (l_b - x_6/2 - x_8/2 + \\
& 0,3048) + 6\$_s d_2 W_s [(l_b - x_6/2 - x_8/2)/4 + x_6 - d'/100 + D] + 6\$_f (l_b - x_6/2 - \\
& x_8/2)(2x_1 + 2x_2) + 3\$_c x_3 x_4 (l_b - x_8) + 3\$_s d_3 W_s (l_b - x_8 + 0,3048) + 6\$_s d_4 W_s [x_8 + \\
& (l_b - x_6/2 - x_8/2)/3 + (l_b - x_8)/3] + 3\$_f (l_b - x_8)(2x_3 + 2x_4) + 6\$_c l_c x_5 x_6 + \\
& 6\$_s l_c d_5 W_s + 6\$_f l_c (2x_5 + 2x_6) + 6\$_c l_c x_7 x_8 + 6\$_s l_c d_6 W_s + 6\$_f l_c (2x_7 + 2x_8) \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\text{s.a: } p_f [g_i(d, x, p) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_i^T), \quad i = 1, \dots, 8$$

$$g_1(d, x, p): M_{d,1} - M_{S,1}$$

$$g_2(d, x, p): M_{d,2} - M_{S,2}$$

$$g_3(d, x, p): M_{d,1}^+ - M_{S,1}^+$$

$$g_4(d, x, p): M_{d,1}^- - M_{S,1}^-$$

$$g_5(d, x, p): M_{d,2}^+ - M_{S,2}^+$$

$$g_6(d, x, p): M_{d,2}^- - M_{S,2}^-$$

$$g_7(d, x, p): Q_{d,1} - Q_{S,1}$$

$$g_8(d, x, p): Q_{d,2} - Q_{S,2}$$

$$0,22 \leq d_1 \leq 324; 0,22 \leq d_2 \leq 324; 0,22 \leq d_3 \leq 324$$

$$0,22 \leq d_4 \leq 324; 1,44 \leq d_5 \leq 722; 1,44 \leq d_6 \leq 722$$

$$12,0 \leq x_1 \leq 90,0; 12,0 \leq x_2 \leq 90,0; 12,0 \leq x_3 \leq 90,0; 12,0 \leq x_4 \leq 90,0$$

$$19,0 \leq x_5 \leq 95,0; 19,0 \leq x_6 \leq 95,0; 19,0 \leq x_7 \leq 95,0; 19,0 \leq x_8 \leq 95,0$$

APÊNDICE B – CÓDIGOS PYTHON

O acesso aos códigos de programação, em linguagem de programação Python, pode ser realizado através do *link* <<https://github.com/jonathancassimiro/Examples-Codes>>, no site GitHub. Os códigos foram alocados em um repositório, denominado “Examples-Codes”, e são referentes aos quatro exemplos testados: Função estado limite não linear, Múltiplas funções estados limite, Pilar curto (*short column*) e Caixa de engrenagens (*Gear Box*).