



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

LUCIANO GOMES BEZERRA JUNIOR

**REVISITANDO O EXPERIMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS DE HERTZ:
UMA ANÁLISE COMPUTACIONAL**

Caruaru

2024

LUCIANO GOMES BEZERRA JUNIOR

**REVISITANDO O EXPERIMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS DE HERTZ:
UMA ANÁLISE COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Física da Universidade Federal de
Pernambuco, como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Jehan Fonsêca do Nascimento

Caruaru

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Bezerra Junior, Luciano Gomes .

Revisitando o experimento de ondas eletromagnéticas de Hertz: uma
análise computacional / Luciano Gomes Bezerra Junior. - Caruaru, 2024.
36 : il., tab.

Orientador(a): Jehan Fonsêca do Nascimento
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Física - Licenciatura, 2024.
Inclui referências, apêndices.

1. ondas eletromagnéticas. 2. simulação. 3. modelagem. 4. Hertz. 5.
Maxwell. I. Nascimento, Jehan Fonsêca do . (Orientação). II. Título.

530 CDD (22.ed.)

LUCIANO GOMES BEZERRA JUNIOR

**REVISITANDO O EXPERIMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS DE HERTZ:
UMA ANÁLISE COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Física da Universidade Federal de
Pernambuco, como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado em: 29/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jehan Fonsêca do Nascimento (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Heydson Henrique Brito da Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este TCC à minha avó, Reginalda (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Marta e Luciano, por me ensinarem valores que carrego comigo sempre, e a minha irmã, Luciana, que sempre esteve do meu lado. Agradeço a minha noiva, Narjara, por sempre me apoiar e estar comigo em todos os momentos bons e principalmente os ruins, por sempre me incentivar a ser melhor.

Agradeço muito ao meu orientador Prof. Jehan Fonsêca do Nascimento, pelas disciplinas que ministrou, as orientações de iniciação científica e por sempre acreditar no meu potencial. Agradeço também aos membros do grupo de pesquisa NUDOM, que sempre me ajudaram.

Agradeço a todos os professores do curso de Física pelos ensinamentos. Sou grato aos amigos que fiz no curso, em especial Almir e Thaiane, que dividiram boa parte do curso comigo, sempre com uma ajuda mútua.

Sou grato a PROAES e a Capes pela ajuda financeira durante o curso.

“A persistência é o caminho do êxito.” (Charles Chaplin)

RESUMO

No ano de 1888, o experimento de Heinrich Rudolf Hertz comprovou a existência de ondas eletromagnéticas, e que seus comportamentos são os mesmos da Luz, a qual já se sabia sua natureza ondulatória. Esse experimento foi um marco para a ciência e a tecnologia, já que validou o que foi proposto teoricamente por James Maxwell, onde a onda eletromagnética é obtida por meio das conhecidas Equações de Maxwell. Sendo assim, do ponto de vista tecnológico, essas comprovações teórica e experimental possibilitaram o desenvolvimento de equipamentos, que estão presentes no dia a dia, tais como TVs de espessuras finas, sinal *wi-fi*, *smartphones*, *tablets* entre outros. Essas tecnologias modernas possuem forte influência na área educacional, o que ainda é um “tabu” por parte dos profissionais da área, na tentativa de qualificação profissional, melhorando assim a qualidade da didática em sala de aula, como também na produção de produtos educacionais modernos. Por fim, este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) analisa um experimento comumente aplicado em Laboratório de Ensino de Eletromagnetismo, a níveis de ensino médio e superior, a depender da abordagem, por meio de modelagens computacionais produzidas através de um *software* de acesso livre, para simular, especificamente, o experimento de geração e propagação de ondas eletromagnéticas realizado por Hertz. Além disso, na abordagem analítica, foi usada a Transformada de Laplace, que é bastante utilizada em cursos de Física e Engenharia, por exemplo, e, na abordagem numérica, o Método de Euler-Cromer. Como resultado, foi desenvolvida uma modelagem computacional que simula bem o experimento de Hertz. Essa simulação pode ser usada por estudantes e professores, para manipulações dos valores nominais dos equipamentos eletrônicos assim como outras grandezas presentes no experimento, para acompanhamento do fenômeno físico.

Palavras-chave: Ondas eletromagnéticas; simulação; modelagem; Hertz; Maxwell.

ABSTRACT

In 1888, Heinrich Rudolf Hertz's experiment proved the existence of electromagnetic waves, and that their behavior is the same as that of light, whose wave nature was already known. This experiment was a milestone for science and technology, since it validated what was theoretically proposed by James Maxwell, where the electromagnetic wave is obtained by means of the well-known Maxwell Equations. From a technological point of view, these theoretical and experimental proofs enabled the development of equipment that is present in everyday life, such as thin TVs, wi-fi signals, smartphones and tablets, among others. These modern technologies have a strong influence on the educational field, which is still a "taboo" for professionals in the area, in an attempt to gain professional qualifications, thus improving the quality of teaching in the classroom, as well as in the production of modern educational products. Finally, this Final Paper analyzes an experiment commonly applied in Electromagnetism Teaching Laboratories, at secondary and higher education levels, depending on the approach, by means of computer models produced using open-access software, to simulate, specifically, the electromagnetic wave generation and propagation experiment carried out by Hertz. In addition, the analytical approach used the Laplace transform, which is widely used in physics and engineering courses, for example, and the numerical approach used the Euler-Cromer method. As a result, a computer model was developed that simulates Hertz's experiment well. This simulation can be used by students and teachers to manipulate the nominal values of the electronic equipment as well as other quantities present in the experiment, in order to monitor the physical phenomenon.

Keywords: Electromagnetic waves; simulation; modeling; Hertz; Maxwell.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Experimento original de Hertz.	14
Figura 2 – Circuito do experimento feito por Hertz	15
Figura 3 – Composição de uma onda eletromagnética	17
Figura 4 – Circuito RLC , formado por um indutor, um capacitor e uma resistência	20
Figura 5 – Esquema da Transformada de Laplace	22
Figura 6 – Circuito equivalente ao experimento de Hertz	25
Figura 7 – Comparação da solução da EDO analiticamente e numericamente	28
Figura 8 – Resultados experimentais dos campos elétrico e magnético da onda eletromagnética propagada no espaço livre	29
Figura 9 – Análises analítica e numérica dos campos elétrico e magnético, além da intensidade da onda eletromagnética	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Transformadas de Laplace	22
Tabela 2 – Parâmetros de entrada da simulação	27

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
PVI	Problema de Valor Inicial
TCC	Trabalho de conclusão de curso
RMS	Root Mean Square

LISTA DE SÍMBOLOS

ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
ρ	Densidade de carga total
μ_0	Permeabilidade do vácuo
E_{RMS}	Valor RMS do campo elétrico
B_{RMS}	Valor RMS do campo magnético
S	Módulo do vetor de Poynting
P_{RMS}	Valor RMS da potência elétrica
d	Comprimento de propagação da onda eletromagnética no espaço livre
q	Carga elétrica
c	Velocidade da luz no vácuo
π	Número pi
R	Resistência elétrica
i	Corrente elétrica
L	Indutância
C	Capacitância
ω'	Frequência angular da onda eletromagnética
U	Energia total do circuito
U_E	Energia elétrica do circuito
U_B	Energia magnética do circuito
V	Tensão elétrica
f	Frequência

SUMÁRIO

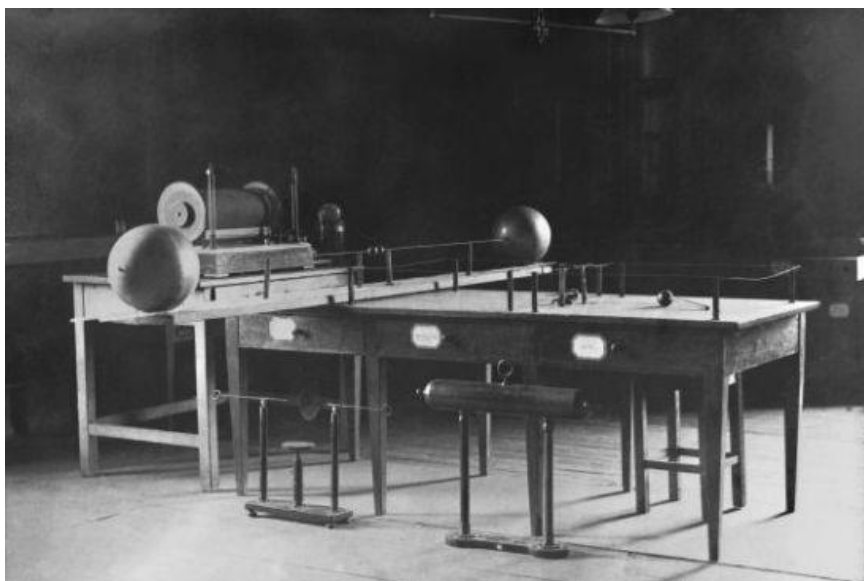
1	Introdução.....	14
2	Fundamentação teórica.....	17
2.1	Ondas eletromagnéticas.....	17
2.2	Circuito <i>RLC</i>	19
2.3	Transformada de Laplace.....	21
2.4	Método Euler-Cromer.....	23
3	Resultados e discussões.....	25
3.1	Modelagem analítica do circuito <i>RLC</i>	25
3.2	Modelagem numérica do circuito <i>RLC</i>	26
3.3	Resultados das modelagens computacionais.....	27
4	Considerações finais e pretensões futuras.....	31
	Referências.....	32
	APÊNDICE A – Resolução da EDO por Transformada de Laplace.....	33
	APÊNDICE B – Código de programação realizado em Octave.....	35

1 INTRODUÇÃO

Em 1888, Heinrich Rudolf Hertz comprovou a existência de ondas eletromagnéticas, confirmando o que foi demonstrado teoricamente, 23 anos antes, por James Clark Maxwell através das conhecidas Equações de Maxwell. Esse feito foi um marco muito importante para a ciência e a tecnologia, tanto para a época quanto para o presente, pois foi a partir dessas contribuições de Hertz que o Italiano Guglielmo Marconi construiu o primeiro sistema de telégrafos sem fio, e mais tarde veio a ser criada a televisão.

A Figura 1 mostra o aparato experimental de geração e detecção de ondas de Rádio feito por Hertz, onde comprovou a existência de ondas eletromagnéticas.

Figura 1 – Experimento original de Hertz.



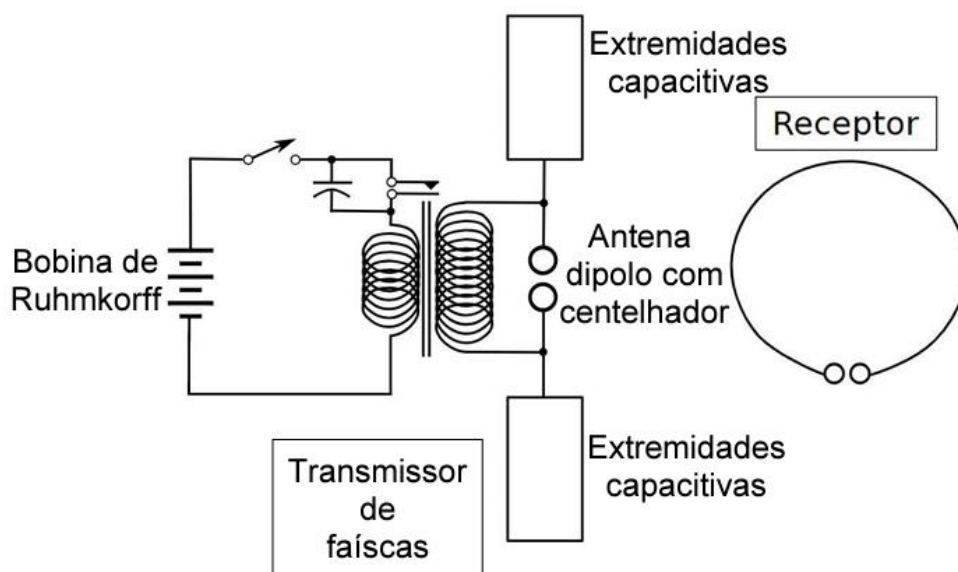
Fonte: GUAZZARONI, C., 2024. Disponível <<https://espaciodecesar.com>>. Acesso em 05 fevereiro 2024.

De acordo com Mangili (2011), como ilustra a Figura 1, o aparato de Hertz era composto por um oscilador, que seria uma bobina de Ruhmkorff, equipamento esse ligado a duas barras de cobre próximas uma da outra com esferas de metal em suas pontas. Essas duas barras serviram como antena transmissora de ondas eletromagnéticas. Além disso, ele utilizou um detector, em forma de anel, para detectar e registrar a variação de grandezas físicas, tais como campos elétrico e magnético e potência elétrica. Com isso, ele conseguiu comprovar que a Onda

Eletromagnética, descrita pela Equação da Onda Eletromagnética, que por sua vez é obtida a partir das Equações de Maxwell, existia.

Fisicamente, a bobina de Ruhmkorff produz nas esferas, que funcionam como unidades capacitivas, um campo elétrico variável, que gera um campo magnético na região, gerando “faíscas” entre as barras metálicas, gerando assim uma onda eletromagnética, que se propaga em todas as direções, e, tendo um dispositivo receptor semelhante ao dispositivo de geração, é possível detectá-las. A antena receptora transforma a Onda Eletromagnética gerada pelo transmissor em corrente elétrica, gerando assim uma faísca também nas pontas da antena receptora. Portanto, como descrito anteriormente, o experimento de Hertz é equivalente ao circuito apresentado na Figura 2

Figura 2 – Circuito do experimento feito por Hertz.



Fonte: GUALTIERI, D. M., 2014. Disponível

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hertz_Transmitter_Receiver.svg>. Acesso em 05 fevereiro 2024.

Para a reprodução de um modelo equivalente ao experimento de Hertz, utilizamos a modelagem computacional, que é um recurso usado para simular condições reais de fenômenos químicos e/ou físicos (FREITAS-FILHO, P. J., 2008). O experimento faz uso de um circuito *RLC*, visto que é um circuito oscilante, para assim gerar as ondas eletromagnéticas.

Para a simulação, foi utilizado o método de Euler-Cromer, que é uma modificação do método de Euler (HENTZ; BRUNET). Toda a simulação foi realizada em um *software* de livre acesso conhecido como *Octave*.

Com isso, o objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é, a partir de simulações computacionais, fazendo uso do *Octave*, assim como de cálculos analíticos, refazer o experimento de Hertz através de modelagem computacional.

Os objetivos específicos são:

- Resolver a Equação Diferencial do circuito *RLC* descrito por Hertz tanto numericamente como analiticamente;
- Analisar como a tensão, a corrente e a carga variam em função do tempo;
- Analisar como se comportam os campos elétricos e magnéticos, para assim analisar potência.

Por fim, este TCC está organizado da seguinte maneira:

Capítulo 1 – Introdução: Aborda a história do experimento de Hertz de ondas eletromagnéticas, e o quanto ele foi importante para o nosso entendimento de hoje.

Capítulo 2 – Fundamentação teórica: Esse capítulo vai abordar as teorias e métodos usados neste TCC, e que, para melhor entendimento é dividido em 4 partes, sendo elas:

2.1 Ondas Eletromagnéticas: Vai descrever o que são ondas eletromagnéticas, e a importância delas para o cotidiano;

2.2 Circuito *RLC*: Vai descrever o funcionamento desse circuito, que foi usado no experimento de Hertz;

2.3 Transformada de Laplace: Vai descrever o método utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias presentes neste TCC;

2.4 Método de Euler-Cromer: Vai descrever o método de resolver equações diferenciais ordinárias numericamente.

Capítulo 3 – Resultados obtidos e discussão: Vai expor todos os resultados analítico, numérico e experimental, e discuti-los.

Capítulo 4 – Considerações finais.

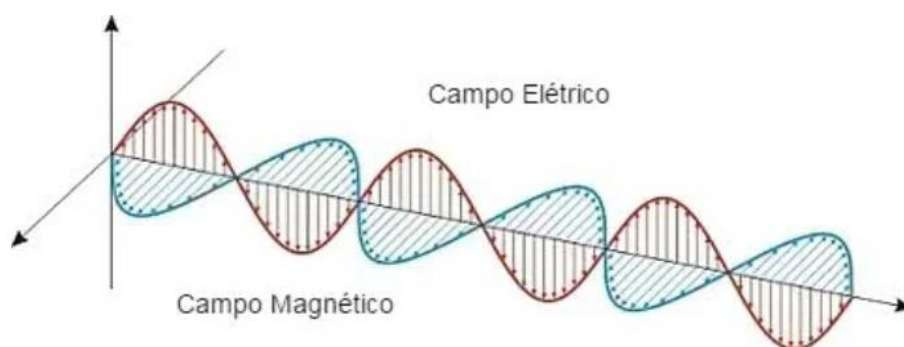
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão abordadas todas as teorias e métodos que fundamentam este TCC. Para isso, ele foi dividido em seções, onde, na Seção 2.1, são abordadas as Ondas Eletromagnéticas, na Seção 2.2, a descrição do Circuito *RLC*, e, finalmente, nas Seções 2.3 e 2.4, são descritas a Transformada de Laplace e o Método de Euler-Cromer.

2.1 Ondas eletromagnéticas

De forma simplificada, ondas eletromagnéticas são perturbações periódicas geradas pela variação do campo elétrico e magnético (ALEXANDER; SADIKU, 2013), como ilustra da Figura 3. Além disso, as ondas eletromagnéticas podem se propagar em qualquer meio material e no vácuo. Essas ondas são usadas em muitas tecnologias, como sinal de wi-fi, Raio-x, Sinal de Rádio, entre outros.

Figura 3 – Composição de uma onda eletromagnética.



Fonte: ASTH, R. C., 2024. Disponível em <<https://www.todamateria.com.br/ondas-eletromagneticas/>>

Acesso em: 10 fevereiro 2024.

James Clerk Maxwell formulou um conjunto de equações que descreveu perfeitamente para o comportamento e como são geradas as ondas eletromagnéticas, equações essas que estão descritas a seguir em sua forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

A partir das equações de Maxwell descritas nas Equações (1-4), obtém-se as equações da onda para o campo elétrico e para o campo magnético no espaço livre ou vácuo (ALEXANDER; SADIKU, 2013), como sendo:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 ; \quad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 , \quad (6)$$

onde os campos elétricos e magnéticos variam espacialmente, em um sistema de coordenadas cartesiano, especificamente, e também temporalmente. Além disso, as Equações (5) e (6) dependem das propriedades elétrica e magnética no espaço livre, dados pela permeabilidade magnética e permissividade elétrica. Por fim, essas equações descrevem o comportamento e propagação da onda, separadamente, para o campo magnético e campo elétrico, onde sua junção forma o campo eletromagnético.

Pela teoria do eletromagnetismo, é possível relacionar parâmetros fundamentais de circuitos, tensão e corrente elétrica, com campos elétricos e magnéticos, como mostram as seguintes equações:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} ; \quad (7)$$

$$I = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} . \quad (8)$$

Sendo assim, tem-se que a intensidade da onda eletromagnética em *RMS* é dada pelo módulo do vetor de Poynting, que, para uma onda transversal eletromagnética, tem-se

$$S = \frac{E_{RMS} B_{RMS}}{\mu_0} = \frac{E_{RMS}^2}{\mu_0 c} \quad (9)$$

e

$$\frac{E_{RMS}}{B_{RMS}} = c , \quad (10)$$

onde *c* é a velocidade da luz no espaço livre (vácuo). Como a potência elétrica *RMS* (potência irradiada) na antena é dada por $P_{RMS} = V_{RMS} \cdot I_{RMS}$. Sendo assim, os campos elétrico e magnético gerado pela fonte podem ser descritas como sendo

$$E_{RMS}(d) = \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{\mu_0 c P_{RMS}}{\pi}} \quad (11)$$

e

$$B_{RMS}(d) = \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{\mu_0 P_{RMS}}{\pi c}}, \quad (12)$$

onde d é a distância de propagação da onda eletromagnética no espaço livre.

2.2 Circuito *RLC*

Diferentemente de um circuito *LC*, onde temos um indutor e um capacitor, e com isso a energia total é dada por (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009):

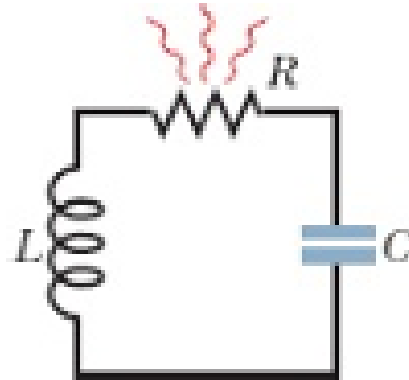
$$U = U_E + U_B, \quad (13)$$

onde U_E e U_B são as energias armazenadas do campo elétrico no capacitor e do campo magnético no indutor, respectivamente. Isso mostra que a energia total é conservada, visto que não temos resistência elétrica para dissipar a energia.

O circuito *RLC* é um circuito do tipo oscilante, composto por um resistor (*R*), responsável por dificultar a passagem da corrente elétrica pelo circuito, ocasionando assim, dissipação da energia elétrica em forma de energia térmica. Um capacitor (*C*), responsável por armazenar carga em seu interior, através de transferência de elétrons de uma carga para a outra. Por fim, o indutor (*L*), responsável por armazenar energia em seu campo magnético (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

O circuito *RLC* pode ser caracterizado como subamortecido, criticamente amortecido ou super amortecido, a depender dos valores da resistência elétrica, da capacitância e da indutância dos elementos do circuito (ALEXANDER; SADIKU, 2013). A Figura 4 mostra um esquema do circuito *RLC* em série.

Figura 4 - Circuito RLC , formado por um indutor, um capacitor e uma resistência.



Fonte: HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2009, p.1).

O circuito RLC é descrito pela seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (14)$$

onde L , C , R e q são a indutância, a capacitância, a resistência e a carga, respectivamente. Além disso, a derivada da carga q em função do tempo pode ser reescrita como sendo a corrente elétrica do circuito. Ou seja, cada termo da equação corresponde a tensão em cada componente elétrico. Sabendo disso, é possível calcular a tensão em cada componente pelas seguintes equações:

$$V_L = L \frac{d^2 q}{dt^2}; \quad (15)$$

$$V_R = Ri = R \frac{dq}{dt}; \quad (16)$$

$$V_C = \frac{1}{C} q, \quad (17)$$

onde as Equações (15-17) descrevem, respectivamente, as tensões no indutor, no resistor e no capacitor.

Como esperado, a solução da Equação (14) diz que as oscilações são amortecidas e descritas por (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009):

$$q(t) = q_0 \exp(-Rt/2L) \cos(\omega' t + \alpha); \quad (18)$$

$$i(t) = \frac{q_0 R \omega'}{2L} \exp(-Rt/2L) \sin(\omega' t + \alpha), \quad (19)$$

onde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}, \quad (20)$$

sendo a frequência angular. Onde o valor dessa frequência caracteriza o tipo de circuito *RLC*, que pode ser subamortecido, criticamente amortecido ou super amortecido. Na análise do circuito *RLC* deste TCC, a condição dele é subamortecido.

Usando os valores *RMS* das Equações (16) e (19), é obtido a potência *RMS* gerada na antena, e, conseqüentemente, os campos elétricos e magnéticos de propagação da onda, bem como a potência de propagação dela no espaço livre.

2.3 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é um método para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), em particular, Problemas de Valor Inicial (PVI), que são problemas onde são conhecidas as condições iniciais do problema proposto.

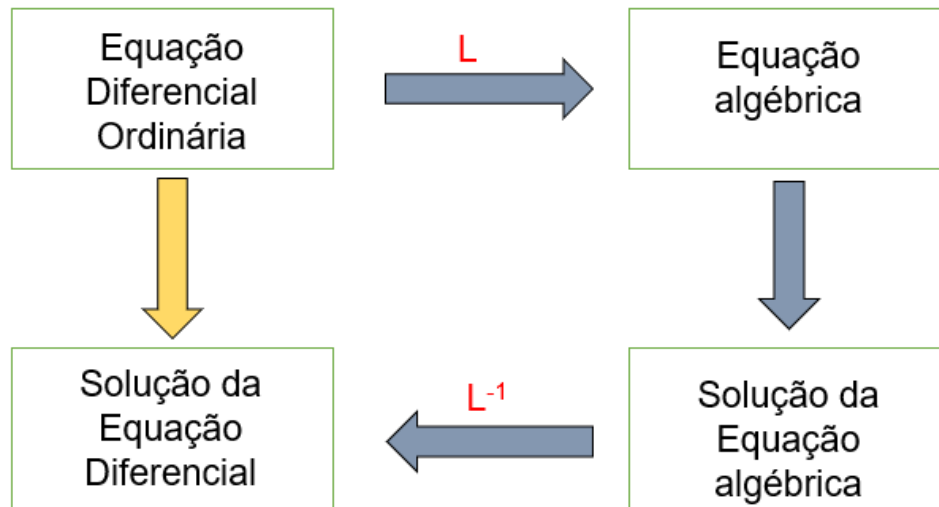
O método consiste em, a partir de uma EDO, por exemplo $f(t)$, fazer uso da Transformada de Laplace, que é dada por:

$$\ell \{ f(t) \} = F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt. \quad (21)$$

Com isso, a EDO é transformada em uma função algébrica, que é mais simples de resolver. Após resolver a equação algébrica, é feito uso da transformada inversa para recuperar a função de interesse, que é a solução da Equação Diferencial (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

A Figura 5 mostra o esquema para resolver uma EDO pela Transformada de Laplace, onde a EDO é transformada em uma equação algébrica, que, conseqüentemente, gera a solução da equação algébrica. Fazendo sua inversa, obtém-se a solução da EDO. Note que, se o parâmetro de análise da EDO é o domínio do tempo, pode-se obter a solução algébrica no domínio da frequência, e, com a sua função inversa, ter a solução no domínio do tempo, e vice-versa.

Figura 5 – Esquema da Transformada de Laplace.



Fonte: o autor (2024).

Para auxiliar na utilização da Transformada de Laplace, tem-se acesso a uma tabela das transformadas, que está destacada na Tabela 1. Essa tabela é muito útil, principalmente, no processo de obtenção da transformada inversa de Laplace.

Tabela 1 – Transformadas de Laplace.

N	Função	$\ell\{f\}$	N	Função	$\ell\{f\}$	Condição
01	$u(t) \equiv 1$	$1/s$	02	t	$1/s^2$	$s > 0$
03	t^2	$2/s^3$	04	t^n	$n!/s^{n+1}$	$s > 0$
05	$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$1/(s-a)$	06	$e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$1/(z-a)$	$\text{Re}(z-a) > 0$
07	$\cos(at)$	$s/(s^2 + a^2)$	08	$\sin(at)$	$a/(s^2 + a^2)$	$s > 0$
09	$e^{at} \cos(bt)$	$s-a/\left[(s-a)^2 + b^2\right]$	10	$e^{at} \sin(bt)$	$b/\left[(s-a)^2 + b^2\right]$	$s > a$
11	$\cosh(at)$	$s/(s^2 - a^2)$	12	$\sinh(at)$	$a/(s^2 - a^2)$	$s > a$
13	$t \cosh(at)$	$s^2 - a^2/(s^2 + a^2)^2$	14	$t \sinh(at)$	$2as/(s^2 + a^2)^2$	$s > 0$

Fonte: o autor (2024).

Apesar de não ser um método usual no curso de Física Licenciatura, é um método bastante usado na área de engenharias, além disso é um método interessante, e simples de usar. Por isso, ele foi adotado na resolução da EDO. Além disso, segundo Tonidandel e Araújo (2012):

“A vantagem mais interessante desta transformação é que as integrações e derivações tornam-se multiplicações e divisões. Ela permite fazer a resolução

de equações diferenciais em forma de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver.”

2.4 Método de Euler-Cromer

Resoluções numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias são muito úteis, visto que algumas EDOs não podem ser resolvidas analiticamente, e os métodos numéricos dão uma boa aproximação da solução da EDO. Por isso, métodos numéricos podem ser considerados experimentos virtuais, devido ao grau de complexidade de análise do modelo físico estudado, que muitas vezes é caracterizado por experimentação física. Sendo assim, para este TCC, é usado o método de Euler-Cromer, que é uma variação do método de Euler para resolução numericamente de EDOs, e pode ser usado em EDOs que resultam em oscilações amortecidas (HENTZ; BRUNET, 2015).

O método de Euler-Cromer consiste em discretizar a EDO, como, por exemplo, a segunda Lei de Newton define que a força é igual a massa vezes a aceleração, ou seja, em uma dimensão, por simplicidade, tem-se que

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (22)$$

Discretizando a EDO da Equação (22), obtém-se que

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (23)$$

e

$$\frac{dv}{dt} = a(t, x, v). \quad (24)$$

Com isso, o método de Euler-Cromer é aplicado na seguinte discretização (HENTZ; BRUNET, 2015):

$$v_{n+1} = v_n + a(t_n, x_n, v_n) \Delta t \quad (25)$$

e

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \Delta t, \quad (26)$$

onde Δt é o passo temporal e $t_n = t_0 + n\Delta t$ é o tempo depois dos passos dados por n . O método de Euler-Cromer permite que a energia total do sistema físico durante o cálculo permaneça praticamente constante, diferentemente do método de Euler, onde aumenta com a quantidade de passos temporais.

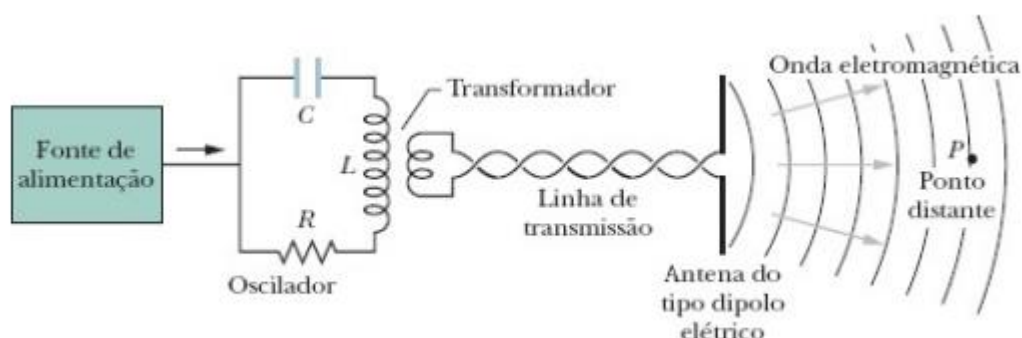
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão abordados os resultados obtidos através das simulações computacionais feitas a partir do *software* de acesso livre, *Octave*, do experimento de Hertz sobre ondas eletromagnéticas. Sendo assim, na Seção 3.1, é destacada a modelagem analítica do circuito *RLC*, na Seção 3.2, a modelagem numérica, e, por fim, na Seção 3.3, são analisados os resultados analíticos e numéricos em conjunto com resultados experimentais desenvolvidos por (FACCIO; CLARICI; TAMBUCHI, 2006).

3.1 Modelagem analítica do circuito *RLC*

O circuito equivalente ao experimento de Hertz é representado na Figura 6. Esse sistema consiste de uma fonte de alimentação alternada (gerador de funções), gerando sinais elétricos da ordem de *Volts*, conectada ao circuito primário, contendo um resistor, um capacitor, e uma bobina primária do autotransformador elevador de tensão com 220V. Pelo autotransformador, é gerado uma força eletromotriz induzida, da ordem de *kV*, na bobina secundária, que, por sua vez, é conectada a uma antena do tipo dipolo. Como previsto por Maxwell, cargas elétricas oscilando geram ondas eletromagnéticas. Portanto, tal fenômeno é gerado na antena, onde o sinal da onda eletromagnética é detectado por outra antena conectada a um capacitor, um resistor e um equipamento de medição elétrico, em um dado ponto *P* no espaço.

Figura 6 – Circuito equivalente ao experimento de Hertz.



Fonte: HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2009, p.1).

Fazendo uma análise física do circuito oscilador, pela lei das malhas, tem-se que

$$V = V_C + V_R + V_L , \quad (27)$$

onde

$$V = \frac{1}{C} q + Ri + L \frac{di}{dt} . \quad (28)$$

Escrevendo a Equação (28) em função da carga q , tem-se

$$V = \frac{1}{C} q + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} . \quad (29)$$

Agora, resolvendo a EDO da Equação (29), por meio da Transformada de Laplace, e utilizando o esquema exposto na Figura 6, obtém-se

$$V \ell \{1\} = \frac{1}{C} \ell \{q\} + R \ell \left\{ \frac{dq}{dt} \right\} + L \ell \left\{ \frac{d^2 q}{dt^2} \right\} \quad (30)$$

ou

$$V \ell \{1\} = \frac{1}{C} \ell \{q\} + R \ell \{q'\} + L \ell \{q''\} . \quad (31)$$

Utilizando a Tabela 1 e as condições iniciais, como sendo $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$, tem-se

$$Q(s) = \frac{V}{s(Ls^2 + Rs + 1/C)} , \quad (32)$$

onde s é a frequência no modelo físico proposto na Figura 6.

Voltando para o domínio do tempo, basta aplicar a transformada inversa de Laplace na Equação (32), como esperado na Equação (18). Por fim, o cálculo detalhado da Equação (32), e sua inversa, está no Apêndice A.

3.2 Modelagem numérica do circuito *RLC*

Como abordado nos capítulos anteriores, foi utilizado o método de Euler-Cromer para resolução da EDO expressa na Equação (28). Sendo assim, primeiramente, isolando o termo de grau 2 na EDO, tem-se

$$q'' = -\frac{R}{L} q' - \frac{q}{LC} - V . \quad (33)$$

Agora, discretizando a Equação (33), obtém-se

$$i_{k+1} = i_k + a_k \Delta t ; \quad (34)$$

$$q_{k+1} = q_k + i_{k+1} \Delta t ; \quad (35)$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t; \quad (36)$$

$$q_{k+1} = -\frac{R}{L} i_{k+1} - \frac{1}{LC} q_{k+1} + \frac{V}{L}. \quad (37)$$

Note que foi utilizado a igualdade $q'=i$ (derivada da carga em função do tempo igual a corrente elétrica), para facilitar na extração dos resultados, as equações (34-37) são, respectivamente, a discretização da corrente elétrica, da carga elétrica, do tempo e da EDO. Os códigos dos programas analíticos e numéricos estão no Apêndice B.

3.3 Resultados das modelagens computacionais

Em resumo, o experimento de geração de ondas eletromagnéticas por (FACCIO; CLARICI; TAMBUCHI, 2006) faz uso de um autotransformador elevador de tensão (220V/6kV). Esse autotransformador alimenta um capacitor conectado a uma antena, que possui resistência e indutância, formando, assim, o circuito *RLC*. A energia elétrica armazenada no capacitor alimenta a antena, onde é gerada a onda eletromagnética, por meio da oscilação dos elétrons na antena. A Tabela 2 mostra os parâmetros de entrada utilizados na simulação computacional, que são obtidos no próprio experimento. Por fim, fazendo uso dos dados da Tabela 2, a proposta da simulação é comparar os resultados obtidos com o resultado do experimento realizado por (FACCIO; CLARICI; TAMBUCHI, 2006).

Tabela 2 – Parâmetros de entrada da simulação.

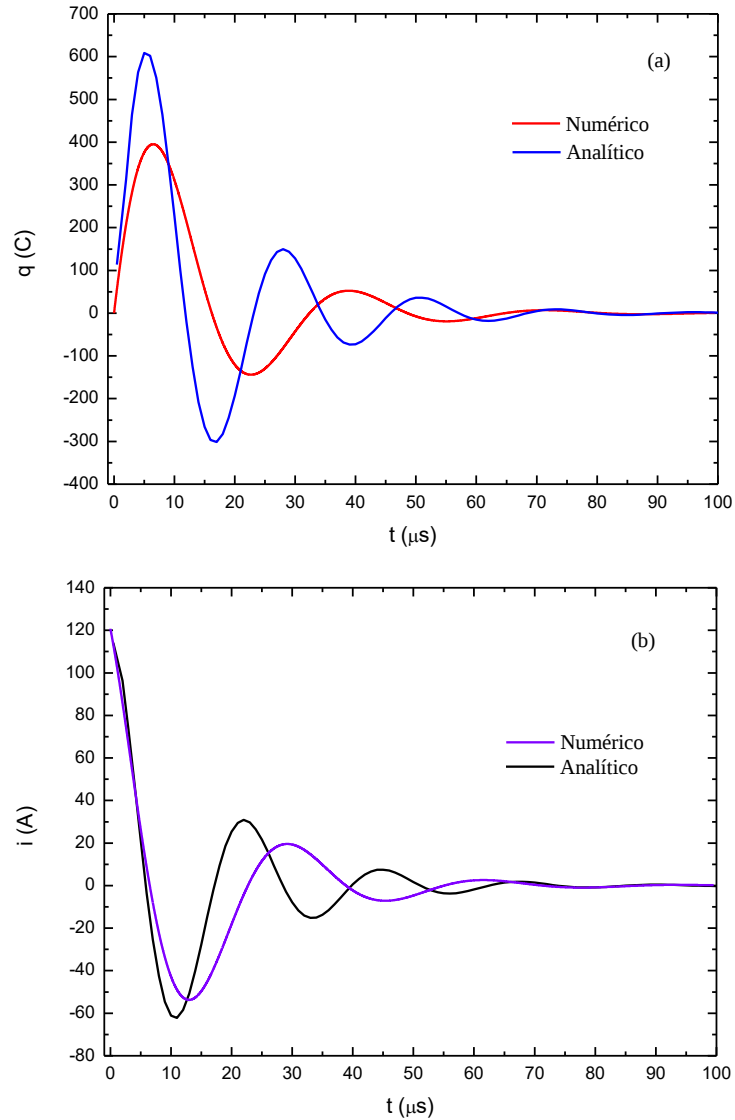
<i>V (tensão)</i>	6 kV
<i>f (frequência)</i>	2,3 MHz
<i>R (Resistência)</i>	6,1 Ω
<i>C (Capacitância)</i>	1 nF
<i>L (Indutância)</i>	4,9 μH

Fonte: FACCIO; CLARICI; TAMBUCHI (2006, p.1).

Usando os dados dos parâmetros de entrada da Tabela 2, é possível analisar as curvas analítica e numéricas da carga e corrente elétrica do circuito *RLC* no domínio do tempo, como mostra a Figura 7. Note que os comportamentos da oscilação da carga elétrica nas modelagens analítica e numérica são equivalentes. Contudo, o erro relativo da curva numérica com a curva analítica, usada para validar o resultado

numérico é de 33,3%, para a carga elétrica. Já para corrente elétrica, esse erro relativo é de 8,3%, o que mostra maior confiabilidade.

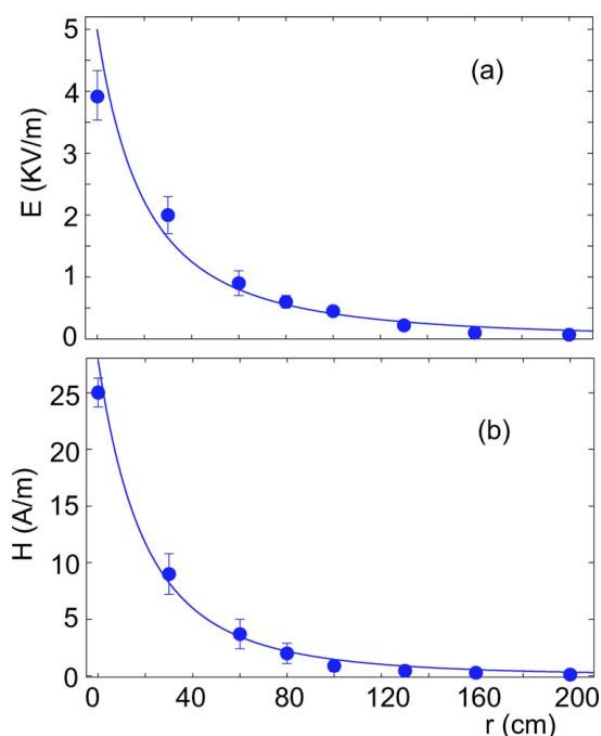
Figura 7 – Comparação da solução da EDO analiticamente e numericamente.



Fonte: o autor (2024).

A Figura 8 mostra os resultados experimentais dos campos elétrico, Figura 8a, e magnético, Figura 8b, detectados por uma antena localizada a 2 m do gerador de onda eletromagnética. Nos resultados experimentais apresentados, os decaimentos dos campos são da ordem de $1/r^2$ e $1/r^3$, pelos ajustes de curvas, respectivamente. Contudo, na abordagem teórica, são esperados decaimentos da ordem de $1/r$, como mostram as Equações (11-12).

Figura 8 – Resultados experimentais dos campos elétrico e magnético da onda eletromagnética propagada no espaço livre.



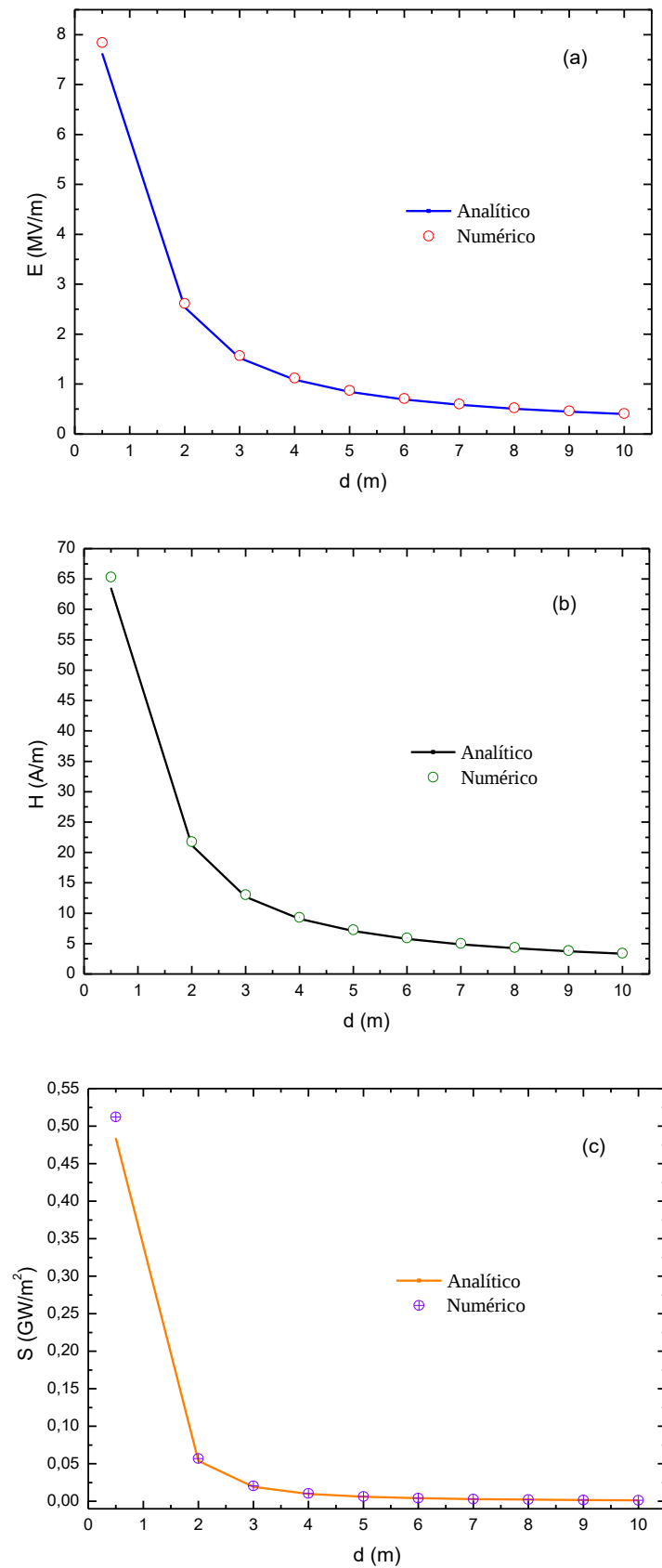
Fonte: FACCIO; CLARICI; TAMBUCHI (2006, p.1).

Usando os dados experimentais do circuito *RLC* proposto por (FACCIO; CLARICI; TAMBUCHI, 2006), são analisados os resultados analíticos e numéricos, os campos elétrico e magnético, assim como a intensidade da onda eletromagnética propagada no espaço livre, como ilustra a Figura 9. Ainda nessa figura, é possível observar a concordância entre os resultados numéricos e analíticos.

Contudo, analisando esses resultados com os resultados experimentais da Figura 8, é possível dizer que ambos têm o mesmo comportamento de decaimento. Contudo, no experimento, isso acontece mais rápido. Além disso, os níveis de sinais de campo elétrico e magnético estão na mesma ordem de grandeza. Por fim, dada as condições analítica e numérica, usando os parâmetros de entrada do experimento, pode-se dizer que os resultados possuem o mesmo comportamento do experimento, como esperado.

Sendo assim, as discrepâncias geradas entre os resultados apresentados na Figura 9 com os resultados da Figura 8 podem estar associados a outros fatores experimentais, que demandaram mais perdas energéticas, onde não são previstos nas modelagens computacionais.

Figura 9 – Análises analítica e numérica dos campos elétrico e magnético, além da intensidade da onda eletromagnética.



Fonte: o autor (2024).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PRETENSÕES FUTURAS

Como visto anteriormente, as simulações analítica e numérica feitas do experimento de Hertz se comportaram como o esperado com o resultado experimental. Contudo, em termos de precisão, as curvas analítica e numérica dos campos elétrico e magnéticos, além da intensidade da onda eletromagnética, estão em boas aproximações, mas não condizentes com os decaimentos de $1/r^2$ e $1/r^3$, dadas pelas curvas de ajustes dos dados experimentais. Nesse caso, as simulações estão seguindo a previsão teórica, e, provavelmente, há outros fatores no experimento que não são implementados nas simulações, como justificativa dessa divergência na precisão entre os resultados.

Para pretensões futuras, reproduzir o experimento de Hertz de maneira real, otimizando as medições, assim como, refazer novas simulações, usando os métodos apresentados neste TCC, com o objetivo de auxiliar alunos e professores de componentes curriculares experimentais, diminuindo o risco de danos de equipamentos, e otimizando estratégias de tentativa e erro.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- ASTH, R. C. **Blog sobre Ondas Eletromagnéticas**, 2024. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/ondas-eletromagneticas/>. Acesso em 10 fevereiro 2024.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- FACCIO, D.; CLERICI, M.; TAMBUCHI, D. Revisiting the 1888 Hertz experiment. American journal of physics, v. 74, n. 11, p. 992-994, 2006.
- FREITAS-FILHO, P. J. **Introdução à modelagem e simulação de sistemas**. Ed. Arena, 2008.
- GUALTIERI, D. M. **File:Hertz Transmitter Receiver.svg**. Wikimedia Commons, 2014. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hertz_Transmitter_Receiver.svg. Acesso em 05 fevereiro 2024.
- GUAZZARONI, C. **Blog Espacio de Cesar**, 2024. Disponível em <https://espaciodecesar.com/>. Acesso em 05 fevereiro 2024.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física vol. 3**. 8ªed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009. vol. 3.
- HENTZ, A.; BRUNET, L. **Nota de Aula de Métodos Computacionais de Física B**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS Instituto de Física Porto Alegre-RS, 2015. Disponível em: http://pcleon.if.ufrgs.br/~leon/metcomp/notas_de_aula.pdf. Acesso em 05 fevereiro 2024.
- MANGILI, A. I. **Heinrich Rudolf Hertz e o efeito fotoelétrico**. Dissertação de mestrado. São Paulo, SP: PUC, 2011.
- TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, p. 2601, 2012.

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EDO PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Resolvendo pela Transformada de Laplace, tem-se que

$$V = \frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2},$$

dividindo por L , obtém-se

$$\frac{V}{L} = \frac{1}{LC}q + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{LC}q + \frac{R}{L}q' + q'',$$

e, aplicando a Transformada de Laplace, observa-se que

$$\frac{V}{L}\ell\{1\} = \frac{1}{LC}\ell\{q\} + \frac{R}{L}\ell\{q'\} + \ell\{q''\}.$$

Assim, tem-se

$$\frac{V}{Ls} = \frac{1}{LC}Q(s) + \frac{R}{L}[sQ(s) - q(0)] + s^2[Q(s) - sq(0) - q'(0)].$$

Usando as condições iniciais dadas por $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ e $q'(0) = 0$, tem-se

$$\frac{V}{Ls} = \frac{1}{LC}Q(s) + \frac{R}{L}sQ(s) + s^2Q(s),$$

onde, colocando $Q(s)$ em evidência, obtém-se

$$\frac{V}{Ls} = Q(s)\left(\frac{1}{LC} + \frac{R}{L}s + s^2\right).$$

Por fim, isolando $Q(s)$, tem-se a Equação (34), dada por:

$$Q(s) = \frac{V}{s(Ls^2 + Rs + 1/C)}.$$

Agora, fazendo um procedimento algébrico na parte direita da Equação (34), tem-se

$$\frac{V}{s(Ls^2 + Rs + 1/C)} = \frac{a}{Ls} + \frac{bs + c}{1/LC + R/Ls + s^2},$$

onde

$$\frac{V}{sL(s^2 + Rs/L + 1/LC)} = \frac{a(s^2 + Rs/L + 1/LC) + Ls(bs + c)}{Ls(1/LC + R/Ls + s^2)} \therefore$$

$$V = a(s^2 + Rs/L + 1/LC) + Ls(bs + c).$$

Agora, atribuindo valores convenientes para s , têm-se os seguintes pontos:

- $s = 0$:

$$V = a \left(\frac{1}{LC} \right) \therefore$$

$$a = VLC;$$

- $s = 1$:

$$V = a(1 + R/L + 1/LC) + L(b + c) \therefore$$

$$V = -\frac{L(b + c)}{C(R + L)};$$

- $s = -1$:

$$V = a(1 - R/L + 1/LC) - L(-b + c) \therefore$$

$$b = -2VC.$$

Por fim, para c , usando os valores de $s = \pm 1$, tem-se

$$c = \frac{VC(L - R)}{L}.$$

Agora, substituindo os valores de a , b e c na Equação (34), e fazendo produtos notáveis, e adicionando um deslocamento do produto notável, tem-se

$$Q(s) = VC \left[\frac{1}{s} - \frac{2s + R/L}{(s + R/2L)^2 + (1/\sqrt{LC} - R/2L)^2} \right].$$

Por fim, fazendo a transformada inversa de Laplace, e usando os dados da Tabela 1, obtêm-se as Equação (18) e (20), ou seja,

$$q(t) = \ell^{-1} \{Q(s)\} = VC \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \ell^{-1} \left\{ \frac{2s + R/L}{(s + R/2L)^2 + (1/\sqrt{LC} - R/2L)^2} \right\} \therefore$$

$$q(t) = \ell^{-1} \{Q(s)\} = q_0 \exp(-R/2L) \cos(\omega' t),$$

onde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}.$$

APÊNDICE B – CÓDIGO DE PROGRAMAÇÃO REALIZADO EM OCTAVE

```

1 ##Gerador de Onda EM no circuito RLC##
2
3%clear;
4%clc;
5%format short;
6%A=[6.1, 1e-9, 4.9e-6, 100*pi, 5, 1e-2, 2.27e+6, 6000, 3e+8, 4e-7];
7%R=A(1,1); #Resistência da antena de transmissão
8%C=A(1,2); #Capacitância do capacitor que alimenta o circuito RLC
9%L=A(1,3); #Indutância na antena de transmissão
10%tmax=A(1,4); #tempo máximo
11%N=A(1,5); #número de pontos
12%dt=A(1,6); #passo no tempo
13%f=A(1,7); #frequência do RLC
14%Vrms=A(1,8); #tensão RMS do RLC
15%c=A(1,9); #velocidade da luz no vácuo
16%mr=A(1,10); #permeabilidade magnética
17
18 ##Modelagem analítica do circuito RLC##
19
20%w=1/sqrt(L*C);
21%w1=sqrt((w.^2)-(R/2*L).^2);
22%Xc=1/w1*C;
23%T=2/w1;
24%Xl=w1*L;
25%Irms=Vrms/sqrt((R.^2)+(Xl-Xc).^2);
26%Th=atan((Xl-Xc)/R);
27%V=sqrt(2)*Vrms;
28%I=sqrt(2)*Irms;
29%u=R/(2*L);
30%Q=C*V*1e+8;
31%s=2*sqrt(L/C); #Condição subcrítica (pequeno amortecimento) (R<s)
32%q=zeros(100,1);
33%l1=zeros(100,1);
34%t=0.5:100;
35
36%V1(t)=V*exp(-(u*10.^-7)*t).*sin(w1*t);#tensão em função do tempo do RLC
37%l1(t)=-I*exp(-(u*10.^-7)*t).*sin((w1*t)-Th);#corrente em função do tempo do RLC
38%q(t)=Q*exp(-(u*10.^-7)*t).*sin(w1*t);
39
40%l11=max(l1);
41%l11rms=l11/sqrt(2);
42
43%Prms=Vrms*I11rms; #potência da onda EM gerada no RLC em RMS
44%d=0.5:10;
45%Y=sqrt(mr*c*Prms);
46%Y1=sqrt((mr*Prms)/c);

```

```

47%Erms=zeros(10,1);
48%Hrms=zeros(10,1);
49%S=zeros(10,1);
50%Erms(d)=Y./(2*d); #campo elétrico propagado no espaço livre
51%Brms(d)=Y1./(2*d);
52%Hrms(d)=Brms(d)/mr; #campo magnético propagado no espaço livre
53%S=((Erms(d)).^2)/(mr*c); #intensidade da onda EM
54
55 ###Modelagem numérica do circuito RLC##
56
57%n=(R/L)*1e-7;
58%m=1/(C*L)*1e-15;
59%G=floor((100-0.5)/dt)+1; #número de pontos
60%I2=zeros(G,1);
61%q1=zeros(G,1);
62%a=zeros(G,1);
63%t1=zeros(G,1);
64%q1(1)=C*V; I2(1)=I; t1(1)=0.5;
65
66 ## Euler-Cromer (RK de Ordem 2)##
67
68%for k=1:G;
69%t1(k)=k*dt;
70%t1(k+1)=t1(k)+dt;
71%q1(k+1)=I2(k)*(dt-((n*dt.^2)/2))+q1(k)*(1-((m*dt).^2)/2);
72%I2(k+1)=I2(k)*(1+(n-m)*((dt.^2)/2)-n*dt)+q1(k)*(((n*m*dt.^2)/2)-dt*m.^2);
73%endfor
74
75%I22=max(I2);
76%I22rms=I22/sqrt(2);
77
78%figure 1
79%plot(t,q,t1,q1)
80
81%figure 2
82%plot(t,I1,t1,I2)
83
84%save q.txt q
85%save t1.txt t1
86%save q1.txt q1
87%save I1.txt I1
88%save I2.txt I2
89
90%P1rms=Vrms*I22rms; #potência da onda EM gerada no RLC em RMS
91%d=0.5:10;
92%Y1=sqrt(mr*c*P1rms);
93%Y11=sqrt((mr*P1rms)/c);
94%Erms1=zeros(10,1);
95%Hrms1=zeros(10,1);
96%S1=zeros(10,1);

```

```
97%Erms1(d)=Y1./(2*d); #campo elétrico propagado no espaço livre
98%Brms1(d)=Y11./(2*d);
99%Hrms1(d)=Brms1(d)/mr; #campo magnético propagado no espaço livre
100%S1=((Erms1(d)).^2)/(mr*c); #intensidade da onda EM
101
102%figure 3
103%plot(d,Erms,d,Erms1)
104
105%figure 4
106%plot(d,Hrms,d,Hrms1)
107
108%figure 5
109%plot(d,S,d,S1)
110
111%save S.txt S
112%save S1.txt S1
113%save Erms.txt Erms
114%save Erms1.txt Erms1
115%save Hrms.txt Hrms
116%save Hrms1.txt Hrms1
```