



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

GUSTAVO LENIN SOUZA SANTOS PACHECO

**UMA FORMULAÇÃO VERDADEIRAMENTE MULTIDIMENSIONAL E DE ALTA
ORDEM PARA A SIMULAÇÃO DO DESLOCAMENTO ÓLEO-ÁGUA EM
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS**

Recife

2023

GUSTAVO LENIN SOUZA SANTOS PACHECO

**UMA FORMULAÇÃO VERDADEIRAMENTE MULTIDIMENSIONAL E DE ALTA
ORDEM PARA A SIMULAÇÃO DO DESLOCAMENTO ÓLEO-ÁGUA EM
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Tecnologia e Geociência da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Energia.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras.

Recife

2023

Catálogo na fonte:
Bibliotecária Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

P116f

Pacheco, Gustavo Lenin Souza Santos.

Uma formulação verdadeiramente multidimensional e de alta ordem para a simulação do deslocamento óleo-água em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos / Gustavo Lenin Souza Santos Pacheco. – 2023.

80 f.: il., fig., abrev. e siglas.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Recife, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia mecânica. 2. Simulação de reservatórios. 3. Deslocamento água-óleo. 3. Efeito de orientação de malha (GOE). 4. Aproximação de fluxo por múltiplos pontos baseada em pontos harmônicos (MPFA-H). 5. Alta ordem. 6. Fluxo do transporte corrigido (FCT). I. Carvalho, Darlan Karlo Elisiário de (Orientador). II. Contreras, Fernando Raul Licapa (Coorientador). III. Título.

UFPE

621 CDD (22. ed.)

BCTG/2024-14

GUSTAVO LENIN SOUZA SANTOS PACHECO

**UMA FORMULAÇÃO VERDADEIRAMENTE MULTIDIMENSIONAL E DE ALTA
ORDEM PARA A SIMULAÇÃO DO DESLOCAMENTO ÓLEO-ÁGUA EM
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Tecnologia e Geociência da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Energia.

Aprovada em: 29/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

Participação por videoconferência
Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Participação por videoconferência
Profa. Dra Rita de Cássia Fernandes de Lima (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Participação por videoconferência
Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO

A simulação numérica do fluxo de fluidos multicomponentes e multifásicos em reservatórios de petróleo é um grande desafio e requer a elaboração de formulações numéricas robustas e eficientes. A abordagem clássica da aproximação do fluxo por dois pontos (*Two Point Flux Approximation - TPFA*) para a descrição de fluxos difusivos e o método Upwind de primeira ordem (*First Order Upwind - FOU*) para a descrição dos fluxos advectivos nas equações de fluxo de fluidos são amplamente utilizados em simuladores de reservatórios. Em certos casos, especialmente com alta taxa de mobilidade entre o fluido injetado e o fluido deslocado, pode haver o fenômeno do efeito da orientação de malha (*Grid Orientation Effect - GOE*), que consiste na forte dependência da solução numérica da direção da malha computacional. Este fenômeno está ligado à distribuição anisotrópica de erro de truncamento associado à aproximação numérica do transporte. Além disso, o método TPFA padrão pode não convergir para uma solução adequada em malhas não k-ortogonais. Neste trabalho, é proposto uma formulação de volumes finitos centrado na célula para a simulação numérica de deslocamentos entre água-óleo em reservatórios de petróleo usando uma formulação segregada em malhas 2D não estruturadas e não k-ortogonais. Utiliza-se uma Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos baseada em Pontos Harmônicos (*Multi-Point Flux Approximation with Harmonic Points - MPFAH*), capaz de lidar com fluxos heterogêneos e meios altamente anisotrópicos, para a descrição dos fluxos difusivos, além disso, propõe-se uma versão da abordagem do Fluxo do Transporte Corrigido (*Flux Corrected Transport - FCT*) de 2ª ordem para a descrição do termo de transporte, a fim de reduzir a difusão numérica artificial. Ademais, empregou-se um esquema orientado pelo escoamento (*Flow Oriented Scheme - FOS*) no cálculo das aproximações de baixa ordem utilizadas em nosso esquema FCT modificado. A filosofia FOS consiste em usar pesos que capturem corretamente a direção do fluxo, tornando o esquema uma aproximação verdadeiramente multidimensional para reduzir o GOE. O desempenho da estratégia proposta foi avaliado através da resolução de problemas de referência relevantes na literatura, obtendo resultados precisos com difusão numérica artificial reduzida e GOE reduzido.

Palavras-chave: simulação de reservatórios; deslocamento água-óleo; efeito de orientação de malha (GOE); aproximação de fluxo por múltiplos pontos baseada em pontos harmônicos (MPFA-H); alta ordem; fluxo do transporte corrigido (FCT).

ABSTRACT

The numerical simulation of the flow of multicomponent and multiphase fluids in oil reservoirs is a great challenge and requires the elaboration of robust and efficient numerical formulations. The classical two-point flow approach (TPFA) for describing diffusive flows and the first-order Upwind (FOU) method for describing advective flows in fluid flow considerations are widely used in reservoir simulators. In certain cases, especially with a high rate of mobility between the injected fluid and the displaced fluid, there may be the phenomenon of the mesh orientation effect (GOE), which consists of the strong dependence of the numerical solution on the direction of the computational mesh. This phenomenon is linked to the anisotropic distribution of truncation error associated with the symbolic transport approximation. Furthermore, the standard TPFA method may not converge to an adequate solution on non-k-orthogonal meshes. In this work, a cell-centered finite volume formulation is proposed for the numerical simulation of water-oil displacements in oil reservoirs using a segregated formulation on unstructured, non-k-orthogonal 2D meshes. A Multi-Point Flow Approximation based on Harmonic Points (MPFA-H), capable of dealing with heterogeneous flows and highly anisotropic media, is used to describe the diffusive flows, in addition, a version of the Flux approach is proposed. 2nd order Corrected Transport (FCT) for the description of the transport term in order to reduce artificial numerical diffusion. In addition, a flow-oriented scheme (FOS) was used to calculate the low-order approximations used in our modified FCT scheme. The FOS philosophy consists of using weights that correctly capture the flow direction, making the scheme a real multidimensional approximation to reduce the GOE. The performance of the proposed strategy was evaluated by solving relevant reference problems in the literature, obtaining accurate results with reduced artificial numeric diffusion and reduced GOE.

Keywords: reservoir simulation; water-oil displacement; grid orientation effect (GOE); harmonic point-based multipoint flow approximation (MPFA-H); high order; flux corrected transport (FCT).

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFL	<i>Courant-Friedrichs-Levy</i>
FCT	<i>Flux Corrected Transport</i>
FVM	<i>Finite Volume Method</i>
GOE	<i>Grid Orientation Effects</i>
HOFCT	<i>High Order Flux Corrected Transport</i>
HOMFV	<i>High Order MUSCL Finite Volume</i>
IMPES	<i>Implicit Pressure-Explicit Saturation</i>
LLF	<i>Local Lax-Friedrichs</i>
LOFV	<i>Low Order Finite Volume</i>
MPFA-H	<i>Multi-Point Flux Approximation</i>
MUSCL	<i>Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws</i>
SMU	<i>Smooth Multidimensional Upstream</i>
STDR	Formulação padrão
TMU	<i>Tight Multidimensional Upstream</i>
TPFA	<i>Two-Point Flux Approximation</i>
VPI	Volume Poroso Injetado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	OBJETIVOS	16
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	18
3	MODELO MATEMÁTICO.....	22
3.1	CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	22
3.1.1	Porosidade.....	22
3.1.2	Saturação.....	23
3.1.3	Permeabilidade	23
3.1.4	Viscosidade.....	24
3.1.5	Mobilidade	24
3.1.6	Massa específica.....	25
3.2	EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE MASSA E A LEIA DE Darcy	25
3.3	EQUAÇÕES DE PRESSÃO E SATURAÇÃO	26
3.4	MODELOS SIMPLIFICADOS	27
3.4.1	Modelo de Buckley-Leverett.....	27
4	FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....	30
4.1	ESTRATÉGIA IMPES.....	30
4.2	DISCRETIZAÇÃO IMPLÍCITA DA EQUAÇÃO DE PRESSÃO	31
4.2.1	Método numérico TPFA.....	32
4.2.2	Método numérico MPFA-H.....	34
4.2.2.1	Interpolação dos pontos harmônicos	37
4.2.2.2	Construção do fluxo único	38
4.2.2.3	Tratamento do fluxo nas faces de contorno para os métodos MPFA-H.....	39
4.3	DISCRETIZAÇÃO EXPLÍCITA DA EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO ..	39
4.3.1	Tratamento de poços	40
4.3.2	Formulação multidimensional para o fluxo numérico.....	41
4.3.3	Aproximações de alta ordem via Transporte do Fluxo Corrigido (<i>Flux Corrected Transport</i>).....	46

4.3.4	Limitadora multidimensional do FCT.....	48
4.3.5	Alternativas para a construção e limitação dos fluxos	49
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	51
5.1	PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT.....	51
5.1.1	Resultados do experimento.....	52
5.2	PROBLEMA SIMÉTRICO DE TRÊS POÇOS	55
5.2.1	Resultados do experimento.....	57
5.3	ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UM RESERVATÓRIO ALTAMENTE HETEROGÊNEO.....	62
5.4	RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM UM TENSOR DE PERMEABILIDADE CHEIO E ANISOTRÓPICO.....	69
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS....	73
	REFERÊNCIAS.....	75

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os aspectos dos problemas de engenharia de reservatórios são resolvidos, em sua maioria, com simuladores de reservatórios, desde testes de poço até a previsão de recuperação aumentada de petróleo (ISLAM *et al.*, 2016). Segundo Ewing (1983), a modelagem matemática e física do transporte de fluidos multifásicos e multicomponentes em meios porosos é desafiadora, devido à complexidade dos processos físicos e químicos envolvidos. A simulação de fluxo em reservatórios de petróleo é altamente importante econômica e socialmente, cujo objetivo principal é gerar informações para o gerenciamento eficiente da produção, previsão do desempenho do reservatório e maximização do retorno econômico (CHEN, 2007); (EWING, 1983); (PEACEMAN, 2007).

Na literatura, existem inúmeros métodos numéricos disponíveis para simular o fluxo de água e óleo em reservatórios de petróleo, mas ainda há desafios matemáticos e físicos que tornam a simulação computacional complexa (KOZDON; MALLISON; GERRITSEN, 2011). Em problemas com razão de mobilidade adversa, é comum a ocorrência de instabilidades na solução, conhecidas como "*numerical fingers*", resultando na formação de barreiras e canais não físicos (TODD; O'DELL; HIRASAKI, 1972); (YANOSIK; MCCRACKEN, 1979).

Em simuladores comerciais, é frequente encontrar a abordagem "monolítica" para as equações governantes, mas uma alternativa proposta por Peaceman (2007) consiste em separar as equações diferenciais parciais em uma equação hiperbólica para a saturação das fases e uma equação elíptica para a pressão, dessa forma, torna-se possível escolher a melhor ferramenta para a solução de cada uma destas duas equações (PEACEMAN, 2007); (EWING, 1983); (CARVALHO, 2005); (SOUZA, 2015).

Na solução de equações relacionadas a simulação de fluxo de água e óleo em reservatórios de petróleo, é comum utilizar o método *Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES). Esta estratégia é fácil de implementar e eficaz para uma ampla variedade de problemas, entretanto uma desvantagem é que o método explícito é condicionalmente estável, dessa forma o cálculo do passo de tempo deve se sujeitar à condição de *Courant Friedrichs Lewy* (CFL) levando a uma limitação no passo de tempo da simulação.

Apesar de existirem tecnologias avançadas que permitem a modelagem de ambientes geológicos desafiadores, a indústria petrolífera ainda segue formulações numéricas tradicionais (MOOG, 2013). Por exemplo, é comum usar *Two Point Flux Approximation* (TPFA) para discretização do termo difusivo e *First Order Upwind* (FOU) para a discretização do termo advectivo (AAVATSMARK *et al.*, 1998). No entanto, o TPFA só é preciso em malhas k-ortogonais ou cartesianas, o que limita a sua aplicação (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Assim, simuladores que utilizam este método apenas produzem resultados precisos em malhas estruturadas e tensores de permeabilidade diagonais ou alinhados com a malha computacional (CMG, 2006).

O uso de malhas não estruturadas tem sido uma abordagem cada vez mais popular na representação de estruturas geológicas complexas em simulações de reservatórios de petróleo. A vantagem desse tipo de malha é a necessidade de um menor número de células para representação acurada da estrutura, comparada ao que seria necessário com malhas estruturadas.

A utilização de métodos de primeira ordem (FOU) fornece soluções de baixa resolução, especialmente em situações onde se espera descontinuidades na solução e malhas pouco refinadas são tradicionalmente utilizadas (SOUZA, 2015). É comum que métodos de primeira ordem causem uma dissipação numérica excessiva, o que resulta em uma solução suavizada em regiões de descontinuidade. Na simulação de reservatórios de petróleo, isso pode levar a erros na avaliação do tempo de irrupção de água no poço produtor, o conhecido como "*breakthrough*".

Outro problema comum ao utilizar uma construção unidimensional para aproximação do método de primeira ordem é a dependência excessiva da solução com relação à orientação da malha escolhida. Segundo Lamine e Edwards (2010), esses efeitos são ainda mais relevantes em situações onde a razão de mobilidades é adversa, bem como quando o escoamento do fluido ocorre de forma transversal à orientação da malha.

Diante desse contexto, nas últimas décadas, houve um grande esforço na comunidade acadêmica para encontrar soluções mais robustas, precisas e acuradas para a simulação de escoamentos de fluidos em reservatórios de petróleo. Isso se deve às limitações apontadas em relação aos simuladores existentes que ainda não permitem modelos mais complexos e realistas.

Dessa forma, neste trabalho tem como objetivo aprimorar a eficiência, precisão e acurácia dos simuladores de escoamento em reservatórios de petróleo, por meio de estratégias recentes encontradas na literatura. Os avanços tecnológicos e científicos da última década têm permitido o desenvolvimento de simuladores cada vez mais robustos. No entanto, ainda existem muitos desafios a serem superados e este trabalho pretende dar sua contribuição para a evolução do campo.

Nos últimos anos, houve uma dedicação para aprimorar a precisão e acurácia das soluções numéricas obtidas na engenharia de reservatórios de petróleo, bem como a conexão entre os dados geológicos e sua representação nos simuladores aplicados à indústria petrolífera. Algumas iniciativas na literatura têm proposto ajustes entre as malhas usadas nas simulações e as informações obtidas das análises geológicas.

A simulação é uma técnica que permite prever o comportamento esperado de fenômenos da natureza por meio de modelos matemáticos. Estes modelos podem ser físicos, como os experimentos em escala reduzida, ou matemáticos, baseados em equações que descrevem os processos envolvidos. Um exemplo de modelo físico foi desenvolvido por Darcy em 1856, que utilizou um filtro vertical com amostras de areia e manômetros para medir o potencial hidráulico e, portanto, chegar à equação conhecida como Lei de Darcy.

Na engenharia de reservatórios de petróleo, a simulação de fluxo multifásico em meios porosos tem como objetivo fornecer informações para o gerenciamento efetivo das estratégias de produção. De acordo com Silva (2008), as metas a serem alcançadas na exploração de petróleo são: estimativa precisa das reservas; redução das incertezas; otimização da produção, incluindo a determinação do número e localização ideal de poços produtores e injetores, assim como a identificação das técnicas mais eficientes para maximizar a produção. Dessa forma, busca-se maximizar a recuperação dos hidrocarbonetos tendo como referência a viabilidade econômica do processo. Portanto, muitas decisões na engenharia de reservatórios são baseadas nos resultados obtidos pelos simuladores e a indústria petrolífera é uma das maiores usuárias de modelos computacionais para prever resultados.

Diante desse cenário, conforme mencionado anteriormente, sabe-se que o TPFA e o FOU, são amplamente utilizados na indústria petrolífera. Além disso, foram abordados também as desvantagens da aplicação desses métodos. Dessa forma,

para a modelagem adequada do fluxo em reservatórios heterogêneos e anisotrópicos, muitos métodos diferentes foram propostos na literatura.

O método dos Elementos Finitos (MEF), originalmente formulado por Raviart e Thomas, é amplamente utilizado na literatura por sua robustez. Neste método, pressões e velocidades são as variáveis principais, permitindo obter fluxos mais precisos ao utilizar técnicas Eulerianas ou Lagrangeanas, como *Front Tracking* ou *Level Set Method* (CARVALHO, 2005).

Na década de 1990, Crumpton, Shaw e Ware (1995) apresentaram uma fórmula numérica coerente para lidar com tensores não diagonais em questões de difusão com coeficientes descontínuos. Isso possibilitou obter soluções convergentes em problemas em que o TPFA falhava. Além disso, a fórmula proposta por Crumpton, Shaw e Ware (1995) reproduz exatamente soluções por partes lineares, o que não é garantido por outras fórmulas numéricas (Citado por (CARVALHO, 2005); (LIPNIKOV *et al.*, 2007); (QUEIROZ *et al.*, 2014).

No final da década de 1990, surgiu uma nova categoria de métodos localmente conservativos, o *Multi-Point Flux Approximation* (MPFA), inspirados nas propostas de Crumpton, Shaw e Ware (1995), Aavatsmark *et al.* (1998), Edwards e Rogers (1998). Estes métodos são fundamentados no Método de Volumes Finitos (*Finite Volume Method* - FVM) e tem a capacidade de lidar com tensores completos de difusão e malhas não-estruturadas e não-ortogonais. Duas características marcantes do MPFA são: a aproximação dos fluxos nas superfícies de controle baseadas em múltiplos pontos; a imposição da continuidade dos fluxos nas superfícies de controle.

A análise de monotonicidade é importante em métodos numéricos de simulação de fluxo em meios porosos, pois garante que as soluções obtidas são físicas e não produzem resultados espúrios ou não físicos, como oscilações espúrias na solução.

Uma das soluções propostas para resolver o problema de monotonicidade no MPFA é a modificação dos volumes de controle, de modo que o sistema de equações discretizadas se torne uma M-Matriz, garantindo a monotonicidade Eigestad, Aavastmark e Espedal (2002), Qian-Yong, Jing e Mifflin (2008) propuseram outra solução através do método *Enriched Multipoint Flux Approximation* (EMPFA), que utiliza uma aproximação enriquecida do gradiente de pressão nas superfícies de

controle, produzindo resultados não oscilatórios em meios fortemente heterogêneos e anisotrópicos.

Keilegavlen e Aavatsmark (2011) propuseram condições suficientes de monotonicidade para o método MPFA, as quais vem sendo amplamente testadas em malhas poligonais e distorcidas. Essas soluções e formulações ajudam a garantir que as simulações de fluxo em meios porosos sejam fisicamente consistentes e produzam resultados confiáveis.

Em diversos simuladores comerciais, o método de ponderação a montante de primeira ordem, também conhecido como *First Order Upwind* (FOU), é empregado para discretizar a equação de saturação. Esse método tem a característica de produzir soluções não oscilatórias próximas às regiões de choque, conforme observado por Hirsch (1990). Entretanto, uma desvantagem do método FOU é a geração de soluções com difusão numérica excessiva, algo natural em métodos de primeira ordem. Além disso, o método FOU é sensível a efeitos de orientação de malha, especialmente quando a razão de mobilidade é bastante adversa, como apontado por Keilegavlen, Kozdon e Mallison (2012). Essas limitações podem resultar em previsões totalmente equivocadas sobre o comportamento de variáveis relevantes, como o tempo de início de produção de água nos poços ou a produção acumulada de óleo.

Para superar as desvantagens mencionadas anteriormente, é necessário recorrer a métodos de ordem mais alta e multidimensionais. Uma alternativa é o método *Flux Corrected Transport* (FCT). Este método proposto por Boris e Book (1973) permite a utilização de uma aproximação de baixa ordem em regiões de choque e aproximação de alta ordem nas regiões suaves (KUZMIN; MÖLLER; TUREK, 2003). Zalesak (1979) propôs uma generalização ao FCT original tornando-o multidimensional, com isso obteve uma grande melhoria (KUZMIN; MÖLLER; TUREK, 2003).

Este método vem sendo empregado em diversas áreas e através de diversas formulações. No contexto de elementos finitos, o FCT foi introduzido pela primeira vez por Parrott e Christie (1986) Jha e Ahmed (2021) apresentou uma análise de estabilidade e estimativas de erros para versões lineares e não lineares de métodos FCT utilizando elementos finitos aplicados à problemas de convecção-difusão-reação, enquanto isso Chatterjee e Schunk (2020) aplicou o FCT no estudo do reabastecimento de plasma após uma tempestade geomagnética. Além disso,

deve-se destacar Hurtado, Maliska e Silva (2007) na aplicação ao contexto de simulação em reservatórios de petróleo utilizando formulação via volumes finitos. Após isso, Patricio *et al.* (2016) propuseram a utilização de um método FCT visando acompanhar o movimento de um dispositivo, chamado PIG, em um duto. O PIG é bastante utilizado no transporte de petróleo com o objetivo de garantir a desobstrução da tubulação através da raspagem da sujidade aderida à parede interna do duto. Dessa forma, nota-se que a simulação numérica auxilia no desenvolvimento de estratégias para elevação da eficiência e produtividade no transporte de gases por dutos. Em Sondermann *et al.* (2016), os autores apresentam os excelentes resultados obtidos através da utilização de um método FCT 1D em comparação com os resultados advindos de um software comercial, conhecido como OLGA, bastante aplicado na indústria de óleo e gás.

Nesse trabalho, para a solução do campo de pressão, foi utilizado o método MPFAH, enquanto empregou-se o FCT para solução do campo de saturação. Até onde o autor conhece, essa é a primeira vez que se utiliza essa combinação de métodos. Dessa maneira, usufrui-se da robustez adquirida por esta combinação para lidar com meios heterogêneos e anisotrópicos; bem como reduzir a difusão excessiva e efeito de orientação de malha. O fluxo de baixa ordem utilizado no método FCT é obtido através da aplicação de uma formulação multidimensional desenvolvida por Souza (2015), com isso promove-se ainda mais redução no efeito de orientação de malha. A estratégia IMPES foi aplicada com intuito de realizar o acoplamento entre o MPFA-H e FCT, nessa técnica ocorre a solução da equação de fluxo e transporte de forma segregada e sequencial (CONTRERAS, 2012).

Para desenvolvimento deste estudo, pioneiro no grupo de pesquisa em Processamento de Alto Desempenho em Mecânica Computacional (PADMEC), utilizou-se o resolver de pressão desenvolvido por Contreras (2017) e a formulação multidimensional proposta por Souza (2015). Além disso, destaca-se como contribuição deste trabalho a elaboração de um resolvedor de saturação inspirado na formulação FCT que emprega no fluxo de baixa ordem um fluxo multidimensional conforme em Souza (2015). Ademais, foram criadas variantes destas formulações e, deve-se mencionar também, o acoplamento entre esta formulação e o MPFA-H herdado de Contreras (2017).

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar, formular e implementar formulações numéricas robustas e com alta resolução para o modelo matemático que governa o escoamento de fluido bifásico entre água e óleo em reservatórios de petróleo anisotrópicos e heterogêneos utilizando malhas não-estruturadas em 2-D. Visando cumprir o objetivo geral são descritos alguns objetivos específicos:

- a) Desenvolver e implementar um método de volumes finitos linear do tipo TPFA e MPFA-H para a solução aproximada do problema elíptico de pressão;
- b) Desenvolver e implementar métodos de alta ordem e verdadeiramente multidimensionais para a solução do problema de saturação visando diminuir o efeito de orientação de malha;
- c) Realizar experimentos numéricos e verificar acurácia e robustez dos métodos;
- d) Validar as formulações numéricas por meio da comparação de ensaios experimentais extraídos da literatura.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Divide-se a presente dissertação em cinco capítulos, além da referência bibliográfica. No Capítulo 1 apresenta-se a introdução onde são detalhadas a motivação, justificativas e objetivos do trabalho. No Capítulo 2, o referencial teórico utilizado.

No Capítulo 3, o modelo matemático é abordado de maneira que as propriedades da rocha e fluido são apresentadas de forma breve e em seguida são descritas as equações constitutivas e suas hipóteses simplificadoras, as quais são utilizadas para derivar as equações governantes (equação de pressão e a equação de saturação).

No Capítulo 4, são desenvolvidas as técnicas numéricas empregadas na solução das equações governantes introduzidas no Capítulo 2. Primeiramente são abordadas as formulações numéricas utilizadas para discretizar a equação de pressão: nesta seção introduzimos a descrição de métodos de volumes finitos lineares (TPFA e MPFA-H). Em seguida, apresentam-se as formulações numéricas aplicadas para discretização da equação de saturação focando no FCT.

No Capítulo 5, são resolvidos alguns problemas benchmark, com o objetivo de validar as formulações numéricas propostas. Os resultados são interpretados e comparados com outros métodos clássicos disponíveis na literatura. A robustez das formulações propostas (MPFA-H e FCT) são avaliadas utilizando malhas poligonais e meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, além disso, analisa-se o fenômeno do efeito de orientação de malha (GOE) com alta razão de mobilidade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nos últimos anos, houve uma dedicação para aprimorar a precisão e acurácia das soluções numéricas obtidas na engenharia de reservatórios de petróleo, bem como a conexão entre os dados geológicos e sua representação nos simuladores aplicados à indústria petrolífera. Algumas iniciativas na literatura têm proposto ajustes entre as malhas usadas nas simulações e as informações obtidas das análises geológicas.

A simulação é uma técnica que permite prever o comportamento esperado de fenômenos da natureza por meio de modelos matemáticos. Estes modelos podem ser físicos, como os experimentos em escala reduzida, ou matemáticos, baseados em equações que descrevem os processos envolvidos. Um exemplo de modelo físico foi desenvolvido por Darcy em 1856, que utilizou um filtro vertical com amostras de areia e manômetros para medir o potencial hidráulico e, portanto, chegar à equação conhecida como Lei de Darcy.

Na engenharia de reservatórios de petróleo, a simulação de fluxo multifásico em meios porosos tem como objetivo fornecer informações para o gerenciamento efetivo das estratégias de produção. De acordo com Silva (2008), as metas a serem alcançadas na exploração de petróleo são: estimativa precisa das reservas; redução das incertezas; otimização da produção, incluindo a determinação do número e localização ideal de poços produtores e injetores, assim como a identificação das técnicas mais eficientes para maximizar a produção. Dessa forma, busca-se maximizar a recuperação dos hidrocarbonetos tendo como referência a viabilidade econômica do processo. Portanto, muitas decisões na engenharia de reservatórios são baseadas nos resultados obtidos pelos simuladores e a indústria petrolífera é uma das maiores usuárias de modelos computacionais para prever resultados.

Diante desse cenário, conforme mencionado anteriormente, sabe-se que o TPFA e o FOU, são amplamente utilizados na indústria petrolífera. Além disso, foram abordados também as desvantagens da aplicação desses métodos. Dessa forma, para a modelagem adequada do fluxo em reservatórios heterogêneos e anisotrópicos, muitos métodos diferentes foram propostos na literatura.

O método dos Elementos Finitos (MEF), originalmente formulado por Raviart e Thomas, é amplamente utilizado na literatura por sua robustez. Neste método, pressões e velocidades são as variáveis principais, permitindo obter fluxos mais

precisos ao utilizar técnicas Eulerianas ou Lagrangeanas, como *Front Tracking* ou *Level Set Method* (CARVALHO, 2005).

Na década de 1990, Crumpton, Shaw e Ware (1995) apresentaram uma fórmula numérica coerente para lidar com tensores não diagonais em questões de difusão com coeficientes descontínuos. Isso possibilitou obter soluções convergentes em problemas em que o TPFA falhava. Além disso, a fórmula proposta por Crumpton, Shaw e Ware (1995) reproduz exatamente soluções por partes lineares, o que não é garantido por outras fórmulas numéricas (Citado por (CARVALHO, 2005); (LIPNIKOV *et al.*, 2007); (QUEIROZ *et al.*, 2014).

No final da década de 1990, surgiu uma nova categoria de métodos localmente conservativos, o *Multi-Point Flux Approximation* (MPFA), inspirados nas propostas de Crumpton, Shaw e Ware (1995), Aavatsmark *et al.* (1998), Edwards e Rogers (1998). Estes métodos são fundamentados no Método de Volumes Finitos (*Finite Volume Method* - FVM) e tem a capacidade de lidar com tensores completos de difusão e malhas não-estruturadas e não-ortogonais. Duas características marcantes do MPFA são: a aproximação dos fluxos nas superfícies de controle baseadas em múltiplos pontos; a imposição da continuidade dos fluxos nas superfícies de controle.

A análise de monotonicidade é importante em métodos numéricos de simulação de fluxo em meios porosos, pois garante que as soluções obtidas são físicas e não produzem resultados espúrios ou não físicos, como oscilações espúrias na solução.

Uma das soluções propostas para resolver o problema de monotonicidade no MPFA é a modificação dos volumes de controle, de modo que o sistema de equações discretizadas se torne uma M-Matriz, garantindo a monotonicidade Eigestad, Aavastmark e Espedal (2002), Qian-Yong, Jing e Mifflin (2008) propuseram outra solução através do método *Enriched Multipoint Flux Approximation* (EMPFA), que utiliza uma aproximação enriquecida do gradiente de pressão nas superfícies de controle, produzindo resultados não oscilatórios em meios fortemente heterogêneos e anisotrópicos.

Keilegavlen e Aavatsmark (2011) propuseram condições suficientes de monotonicidade para o método MPFA, as quais vem sendo amplamente testadas em malhas poligonais e distorcidas. Essas soluções e formulações ajudam a garantir

que as simulações de fluxo em meios porosos sejam fisicamente consistentes e produzam resultados confiáveis.

Em diversos simuladores comerciais, o método de ponderação a montante de primeira ordem, também conhecido como *First Order Upwind* (FOU), é empregado para discretizar a equação de saturação. Esse método tem a característica de produzir soluções não oscilatórias próximas às regiões de choque, conforme observado por Hirsch (1990). Entretanto, uma desvantagem do método FOU é a geração de soluções com difusão numérica excessiva, algo natural em métodos de primeira ordem. Além disso, o método FOU é sensível a efeitos de orientação de malha, especialmente quando a razão de mobilidade é bastante adversa, como apontado por Keilegavlen, Kozdon e Mallison (2012). Essas limitações podem resultar em previsões totalmente equivocadas sobre o comportamento de variáveis relevantes, como o tempo de início de produção de água nos poços ou a produção acumulada de óleo.

Para superar as desvantagens mencionadas anteriormente, é necessário recorrer a métodos de ordem mais alta e multidimensionais. Uma alternativa é o método *Flux Corrected Transport* (FCT). Este método proposto por Boris e Book (1973) permite a utilização de uma aproximação de baixa ordem em regiões de choque e aproximação de alta ordem nas regiões suaves (KUZMIN; MÖLLER; TUREK, 2003). Zalesak (1979) propôs uma generalização ao FCT original tornando-o multidimensional, com isso obteve uma grande melhoria (KUZMIN; MÖLLER; TUREK, 2003).

Este método vem sendo empregado em diversas áreas e através de diversas formulações. No contexto de elementos finitos, o FCT foi introduzido pela primeira vez por Parrott e Christie (1986) Jha e Ahmed (2021) apresentou uma análise de estabilidade e estimativas de erros para versões lineares e não lineares de métodos FCT utilizando elementos finitos aplicados à problemas de convecção-difusão-reação, enquanto isso Chatterjee e Schunk (2020) aplicou o FCT no estudo do reabastecimento de plasmafera após uma tempestade geomagnética. Além disso, deve-se destacar Hurtado, Maliska e Silva (2007) na aplicação ao contexto de simulação em reservatórios de petróleo utilizando formulação via volumes finitos. Após isso, Patricio *et al.* (2016) propuseram a utilização de um método FCT visando acompanhar o movimento de um dispositivo, chamado PIG, em um duto. O PIG é bastante utilizado no transporte de petróleo com o objetivo de garantir a

desobstrução da tubulação através da raspagem da sujidade aderida à parede interna do duto. Dessa forma, nota-se que a simulação numérica auxilia no desenvolvimento de estratégias para elevação da eficiência e produtividade no transporte de gases por dutos. Em Sondermann *et al.* (2016), os autores apresentam os excelentes resultados obtidos através da utilização de um método FCT 1D em comparação com os resultados advindos de um software comercial, conhecido como OLGA, bastante aplicado na indústria de óleo e gás.

Nesse trabalho, para a solução do campo de pressão, foi utilizado o método MPFAH, enquanto empregou-se o FCT para solução do campo de saturação. Até onde o autor conhece, essa é a primeira vez que se utiliza essa combinação de métodos. Dessa maneira, usufrui-se da robustez adquirida por esta combinação para lidar com meios heterogêneos e anisotrópicos; bem como reduzir a difusão excessiva e efeito de orientação de malha. O fluxo de baixa ordem utilizado no método FCT é obtido através da aplicação de uma formulação multidimensional desenvolvida por Souza (2015), com isso promove-se ainda mais redução no efeito de orientação de malha. A estratégia IMPES foi aplicada com intuito de realizar o acoplamento entre o MPFA-H e FCT, nessa técnica ocorre a solução da equação de fluxo e transporte de forma segregada e sequencial (CONTRERAS, 2012).

Para desenvolvimento deste estudo, pioneiro no grupo de pesquisa em Processamento de Alto Desempenho em Mecânica Computacional (PADMEC), utilizou-se o resolver de pressão desenvolvido por Contreras (2017) e a formulação multidimensional proposta por Souza (2015). Além disso, destaca-se como contribuição deste trabalho a elaboração de um resolvedor de saturação inspirado na formulação FCT que emprega no fluxo de baixa ordem um fluxo multidimensional conforme em Souza (2015). Ademais, foram criadas variantes destas formulações e, deve-se mencionar também, o acoplamento entre esta formulação e o MPFA-H herdado de Contreras (2017).

3 MODELO MATEMÁTICO

Neste Capítulo, serão discutidas as equações governantes do escoamento de bifásico, entre água e óleo, em um reservatório de petróleo. Estas equações são obtidas a partir da Equação de conservação da massa, bem como da lei de Darcy, levando em consideração as seguintes hipóteses simplificadoras: o meio poroso é rígido (1); os fluidos são incompressíveis e Newtonianos (2); o escoamento é laminar e isotérmico (3); a permeabilidade absoluta independe da temperatura, da pressão e do escoamento (4); efeitos de capilaridade e gravitacionais são desconsiderados (5).

O modelo matemático que representa este escoamento de fluido bifásico contém uma Equação elíptica para a pressão e uma Equação hiperbólica para a saturação. A velocidade de Darcy é utilizada para realizar o acoplamento entre essas duas equações. Para solução destas equações tornam-se necessárias condições de contorno e/ou condições iniciais, ambas são dependentes da existência de poços injetores ou produtores e das características geológicas da vizinhança do reservatório.

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O objetivo desta seção é realizar uma breve discussão a respeito de conceitos importantes relativos à simulação em reservatórios de petróleo.

3.1.1 Porosidade

A porosidade (ϕ) é definida como a razão entre o volume total de espaços vazios (V_{vazios}) e o volume total do reservatório ($V_{\text{reservatório}}$) tal como pode-se notar a seguir (AZIZ; SETTARI, 1979):

$$\phi = \frac{V_{\text{vazios}}}{V_{\text{reservatorio}}} \quad (1)$$

Consideram-se que os espaços vazios possuem distribuição uniforme na rocha.

3.1.2 Saturação

A saturação de um componente no meio poroso é definida como a razão entre o volume ocupado por determinado componente (V_{Si}) e o volume de vazios da rocha, podendo se expressar da seguinte forma (AZIZ; SETTARI, 1979):

$$S_i = \frac{V_{S_i}}{V_{\text{vazios}}} \quad (2)$$

onde $i = o$ (óleo) e w (água).

Assume-se que os fluidos ocupam totalmente o volume de vazios da rocha, portanto a Equação a seguir se torna válida.

$$S_w + S_o = 1 \quad (3)$$

O ambiente do reservatório de petróleo faz surgir um efeito de interação entre o fluido e a rocha. Este efeito faz com que haja um valor de saturação onde a água e o óleo não possuem mais capacidade para se mover, para a água dá-se o nome de saturação irreduzível de água (S_{wi}), já no caso do óleo nomeia-se por saturação residual de óleo (S_{or})

3.1.3 Permeabilidade

Segundo Thomas (2001), a permeabilidade pode ser definida como a capacidade de uma rocha possibilitar o fluxo de fluidos em seu interior. Quando se tem duas fases saturando o meio poroso, há tanto a permeabilidade absoluta quanto a relativa, nos casos em que se considera apenas uma única fase a mobilidade se faz unitária e, portanto, há somente a permeabilidade absoluta (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Esta propriedade pode variar conforme a posição, quando se considera um reservatório altamente heterogêneo, e é comumente representada por um tensor, tal qual a seguir:

$$K(\vec{x}) = \begin{bmatrix} k_{xx}(\vec{x}) & k_{xy}(\vec{x}) \\ k_{yx}(\vec{x}) & k_{yy}(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde \vec{x} representa o vetor posição. Este tensor deve ser simétrico ($k_{xy}(\vec{x}) = k_{yx}(\vec{x})$) e satisfazer as condições de elipticidade, isto é, o produto da sua diagonal principal deve ser maior ou, no mínimo, igual ao produto da sua diagonal secundária

(CRUMPTON; SHAW; WARE, 1995; EDWARDS; ROGERS, 1998; AAVATSMARK *et al.*, 1998; CONTRERAS; LYRA; CARVALHO, 2019).

A permeabilidade relativa, por sua vez, é uma grandeza adimensional que representa a facilidade com que uma fase tem de escoar no meio poroso na presença das demais fases. Visando quantificá-la é muito comum utilizar o modelo de Brook e Corey (HELMIG *et al.*, 1997) da seguinte forma:

$$k_{rw} = \left(\frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^{n_w} \quad (5)$$

$$k_{ro} = \left(\frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^{n_o} \quad (6)$$

onde os expoentes n_w e n_o são constantes que podem assumir diversos valores (AZIZ; SETTARI, 1979; HELMIG *et al.*, 1997).

3.1.4 Viscosidade

A viscosidade (μ) é uma propriedade do fluido que correlaciona a tensão de cisalhamento aplicada ao escoamento do fluido e representa a resistência ao escoamento decorrente do atrito interno que ocorre em função das interações intermoleculares (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006).

3.1.5 Mobilidade

Sabendo do conceito de viscosidade se torna possível o entendimento da mobilidade. Esta grandeza representa o quão móvel uma fase é em relação a outra e pode ser obtida através da razão entre a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase, como nota-se a seguir (FANCHI, 2001):

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \quad (7)$$

onde $i = o$ (óleo) e w (água)

Somando as mobilidades de cada uma das fases obtém-se a mobilidade total do fluido (λ_T):

$$\lambda_T = \lambda_w + \lambda_o \quad (8)$$

3.1.6 Massa específica

A massa específica ou densidade (ρ) é definida como uma propriedade média do fluido calculada a partir de uma razão entre a sua massa (m) e o volume (V) ocupado por este fluido (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006).

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (9)$$

3.2 EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE MASSA E A LEI DE DARCY

A Equação de conservação da massa para o escoamento bifásico de água (w) e óleo (o) é delimitado sobre o domínio $\Omega \times [0, t]$. Considerando as hipóteses simplificadoras apresentadas na seção 2, pode-se apresentar esta Equação na forma diferencial como a seguir (CHEN, 2006; HELMIG *et al.*, 1997):

$$\frac{\partial (\phi \rho_i S_i(t))}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i(x)) + q_i, i = w, o \text{ em } \Omega \times [0, t] \quad (10)$$

onde ϕ representa a porosidade da rocha, ρ_i é a massa específica da fase i , S_i corresponde à saturação da fase i , ∇ representa o operador gradiente, \vec{v}_i é a velocidade de Darcy da fase i e q_i corresponde ao termo fonte ou sumidouro, onde a velocidade de Darcy é dada por (FANCHI, 2001):

$$\vec{v}_i = -\lambda_i K(\nabla P) \quad (11)$$

A Equação para a velocidade total é definida a seguir:

$$\vec{v}_T = -\lambda K(\nabla P) \quad (12)$$

Na Equação anterior, \vec{v}_T representa a velocidade total, a qual pode ser obtida da seguinte forma:

$$\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_o \quad (13)$$

As variáveis \vec{v}_w e \vec{v}_o e as presentes na Equação (13) correspondem as velocidades das fases água e óleo, respectivamente.

3.3 EQUAÇÃO DE PRESSÃO E SATURAÇÃO

A partir das equações (10) e (12), realizando algumas manipulações algébricas como podem ser observadas em Aziz e Settari (1979), é obtida a Equação de pressão para o escoamento de fluido bifásico.

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = Q_T \quad \text{com} \quad \vec{v}_T = -\lambda_T K \nabla P \quad (14)$$

onde Q_T representa a vazão volumétrica total dada pela seguinte expressão:

$$Q_T = Q_w + Q_o \quad (15)$$

onde Q_w e Q_o são as vazões volumétricas da fase água e da fase óleo, respectivamente.

Visando obter a Equação de saturação, em função da fase água, utilizam-se as equações (3), (10) e (12), além das hipóteses simplificadoras. Após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\varphi \frac{\partial(S_w)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) + Q_w \quad (16)$$

onde o fluxo $\vec{F}(S_w)$ é calculado pela seguinte Equação:

$$\vec{F}_w(S_w) = f_w \vec{v}_T \quad \text{com} \quad f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \quad (17)$$

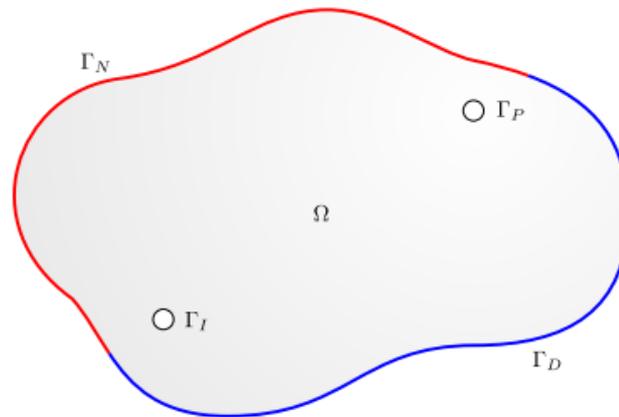
Na Equação (16), o termo corresponde ao fluxo fracionário de água (f_w), uma função da saturação de água que representa a fração de massa da fase molhante que está sendo transportada no meio poroso (SOUZA, 2015).

Para descrever de forma completa a Equação de pressão e saturação faz-se necessário especificar as condições de contorno e iniciais. Considerando o domínio de um reservatório representado por Ω , se torna possível definir o seu contorno Γ da seguinte forma:

$$\Gamma = \Gamma_I \cup \Gamma_P \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad (18)$$

onde Γ_I e Γ_P representam, respectivamente, os poços injetores e produtores; Γ_D e Γ_N são as fronteiras de Dirichlet (pressão prescrita) e de Neumann (fluxo prescrito), nesta ordem. A figura 1 ilustra o domínio computacional de um reservatório, com as condições de contorno.

Figura 1 – Domínio computacional de um reservatório representado por Ω



Fonte: O Autor (2023)

Essas condições de contorno para pressão podem ser definidas da seguinte forma (CONTRERAS, 2017):

$$\begin{aligned}
 p(\vec{x}, t) &= g_D, \text{ em } \Gamma_D \times [0, t] \\
 \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N, \text{ em } \Gamma_N \times [0, t] \\
 S_w(\vec{x}, t) &= \bar{S}_w, \text{ em } \Gamma_I \times [0, t] \\
 S_w(\vec{x}, 0) &= \bar{S}_w^0, \text{ em } \Omega
 \end{aligned} \tag{19}$$

onde \bar{S}_w^0 representa a distribuição de saturação inicial no domínio.

Segundo Chen (2006) mesmo que sejam dadas condições iniciais suaves para se obter a solução da Equação (16), perfis descontínuos de saturação podem ser obtidos. Isso se deve à natureza hiperbólica desta Equação. Além disso, em função da dependência de f_w , \vec{v}_T e λ com a saturação de água S_w gera uma forte não linearidade nesta Equação, se tornando mais um desafio para solução.

3.4 MODELOS SIMPLIFICADOS

Nesta Seção será apresentado um modelo simplificado que é obtido através de um caso particular do modelo matemático segregado descrito nas equações (14) e (16).

3.4.1 Modelo de Buckley-Leverett

O modelo de Buckley Leverett consiste em uma simplificação da Equação (16), após algumas considerações, sendo elas: o escoamento da fase molhante tem

característica unidimensional; este escoamento ocorre em uma rocha disposta horizontalmente; a permeabilidade da rocha é homogênea; o gradiente de pressão é constante ao longo do reservatório; efeitos gravitacionais, capilares e termos fonte são desprezíveis. Dessa forma, obtém-se a Equação de transporte que rege o modelo de Buckley Leverett (LEVEQUE, 1992; HELMIG *et al.*, 1997; DAKE, 2001; FANCHI, 2001).

$$\frac{\partial(S_w)}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial(f_w \vec{v}_T)}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

Sabendo que o campo de velocidades é conhecido em todos os pontos do domínio, percebe-se que não é necessário solucionar a Equação de pressão. Segundo LeVeque (1992) a forma conservativa conforme apresentada na Equação (20) é ideal visando a discretização através de formulações numéricas, entretanto a forma não conservativa possibilita determinar a velocidade característica da Equação hiperbólica. Após algumas manipulações algébricas, conforme podem ser vistas em Helmig *et al.* (1997), pode-se expressar a Equação (20) através da velocidade característica como a seguir:

$$\frac{\partial(S_w)}{\partial t} + \alpha(S_w) \frac{\partial(S_w)}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

A Equação anterior representa a propagação da saturação de massa de água ao longo de linhas características, segundo LeVeque (1992) e Helmig *et al.* (1997) nessas linhas a referida variável é constante. A velocidade característica α apresentada na Equação (21) é calculada da seguinte forma:

$$\alpha(S_w) = \frac{v}{\varphi} \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial S_w} \quad (22)$$

Para definir completamente o problema de transporte apresentado na Equação (20) faz-se necessário delimitar as condições de contorno e iniciais, conforme a seguir:

$$S_w(x, 0) = \begin{cases} 1 - S_{ro} & \text{para } x \leq x_0 \\ S_{wi} & \text{para } x > x_0 \end{cases} \quad (23a)$$

$$S_w(x_0, t) = \bar{S}_w \quad (23b)$$

Na Equação (23), os termos S_{wi} e S_{ro} representam as saturações irreduzível de água e residual de óleo, nesta ordem. Essas equações caracterizam um problema de Riemann (HELMIG *et al.*, 1997). Esse problema é definido pelo

transporte de uma quantidade de substância de forma descontínua ao longo do domínio (LEVEQUE, 1992)

4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

A equações governantes apresentadas no capítulo referente ao modelo matemático admitem soluções analíticas ou semi analíticas apenas para modelos bastante simplificados (CHEN, 2006; PINDER; GRAY, 2008; SOUZA, 2015). Dessa forma, para a maioria das aplicações, se torna necessário a utilização de formulações numéricas (HELMIG *et al.*, 1997). Além disso, algumas características inerentes da física deste fenômeno estudado como a presença de alta heterogeneidade e anisotropia da rocha, bem como a não convexidade do fluxo advectivo, não ocorrem em outras áreas, a exemplo da aerodinâmica, tornam necessário o emprego de ferramentas numéricas adequadas para tratar especificidades de cada equação governante que constitui o modelo matemático abordado (SOUZA, 2015). Por fim, outro desafio numérico é a forte não linearidade presente na equação de saturação e no seu acoplamento com a equação de pressão.

No presente capítulo, as estratégias adotadas para solução numérica do modelo matemático apresentado no capítulo anterior são apresentadas, com base em uma abordagem *cell-centered* do Método dos Volumes Finitos (PATANKAR, 1980; VERSTEEG, 1995). Inicialmente, a estratégia *Implicit Pressure-Explicit Saturation* utilizada para tratar o acoplamento entre a equação de pressão e a equação de saturação será descrita. Em seguida, os esquemas numéricos adotados para solucionar essas equações são apresentados.

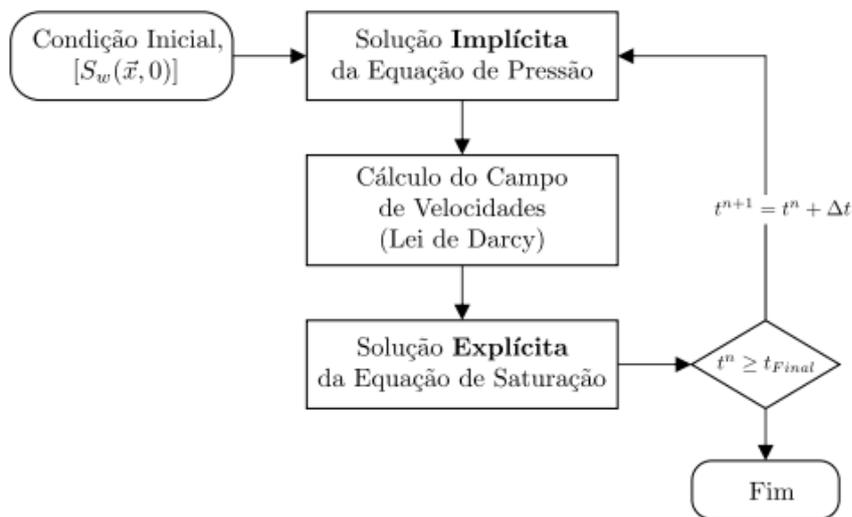
4.1 ESTRATÉGIA IMPES

Neste trabalho, a estratégia *Implicit Pressure-Explicit Saturation* (IMPES), inicialmente propostas por Sheldon e Cardwell (1959) e Stone e Garder (1961), é utilizada para resolver o modelo matemático segregado apresentado no capítulo anterior. A facilidade de implementação e a robustez proporcionada para aplicação em casos de escoamentos incompressíveis ou levemente compressíveis são os principais pontos fortes para utilização desta estratégia (CHEN, 2006). Entretanto, a desvantagem é a limitação do passo de tempo, uma vez que, para garantir a estabilidade deve-se utilizar um pequeno passo de tempo, com base na condição de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL). Segundo Chen, Huan e Li (2004), um passo de

tempo pequeno pode se tornar prejudicial em problemas cuja simulação envolva um longo tempo ou quando o domínio contínuo é discretizado por malhas muito refinadas.

A estratégia IMPES é muito utilizada na indústria petrolífera para solução de problemas de baixa e média complexidade (AZIZ; SETTARI, 1979; EWING, 1983; CHEN; HUAN; LI, 2004; CONTRERAS *et al.*, 2016). Além disso, o algoritmo utilizado na solução desses problemas é demonstrado de forma esquemática na figura 2.

Figura 2 – Algoritmo esquemático da estratégia IMPES



Fonte: Adaptado de Souza (2015)

A partir de um campo inicial de saturação determinado pela condição inicial pode-se obter a mobilidade total em cada uma das faces dos volumes de controle, em seguida é calculado implicitamente o campo de pressão. Após isso, determina-se o campo de velocidades explicitamente através da lei de Darcy, posteriormente utiliza-se o campo de velocidades para obtenção do novo campo de saturação. Tendo o campo de saturação pode-se obter a nova mobilidade total e o ciclo se repete até o instante de tempo desejado (EWING, 1983; CARVALHO, 2005; CONTRERAS *et al.*, 2016).

4.2 DISCRETIZAÇÃO IMPLÍCITA DA EQUAÇÃO DE PRESSÃO

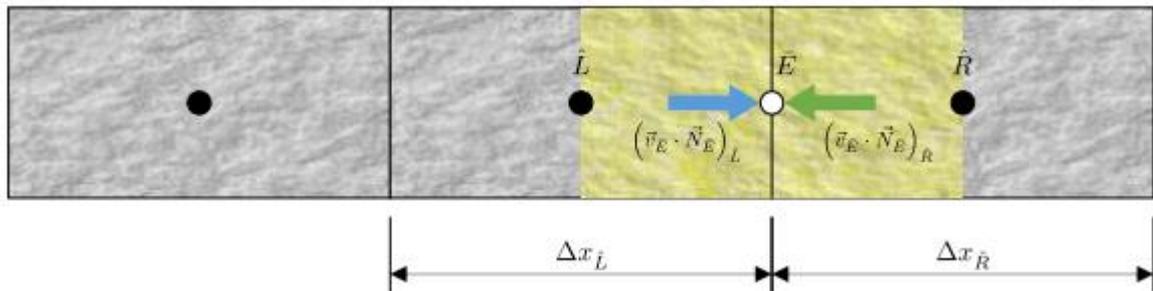
Nesta seção será apresentada a discretização implícita da equação elíptica de pressão. Dessa forma, os métodos numéricos TPFA e MPFA-H são detalhados e

através disso, se torna possível compreender o processo de construção de cada um, além de identificar as vantagens e desvantagens dos mesmos quando comparados entre si.

4.2.1 Método numérico TPFA

O método TPFA (*Two-Point Flux Approximation*), idealizado originalmente para malhas estruturais ortogonais, é bastante utilizado em softwares comerciais direcionados para a indústria petrolífera e de simulação de aquíferos. Além disso, os métodos numéricos de aproximação do fluxo por múltiplos pontos (MPFA) são generalizações do TPFA e em virtude disto estes métodos possuem diversas características em comum. A figura 3 ilustra um fragmento de malha unidimensional, iremos utilizá-la para demonstrar a forma como o TPFA aproxima o fluxo em uma superfície de controle.

Figura 3 – Fragmento de uma malha unidimensional



Fonte: Adaptado de Souza (2015)

Assumindo meio homogêneo e saturado por apenas uma única fase, com o objetivo de aproximar o fluxo na superfície de controle bastaria empregar uma aproximação linear tendo como referência os valores de pressão nos pontos de colocação \hat{L} e \hat{R} . Entretanto, quando há mudança de permeabilidade entre os volumes de controle, algo bem comum em reservatórios de petróleo, surge a necessidade de realizar um tratamento diferente. Para derivação da formulação utilizada faz-se necessário a aplicação da Lei de Darcy bem como a aproximação do gradiente através de diferenças finitas.

$$\left(\vec{v}_E \cdot \vec{N}_E\right)_{\hat{L}} = -2K_{\hat{L}} \frac{p_E - p_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} \quad (24)$$

$$\left(\vec{v}_E \vec{N}_E\right)_{\hat{R}} = -2K_{\hat{R}} \frac{p_{\hat{R}} - p_E}{\Delta x_{\hat{R}}} \quad (25)$$

Note que foram apresentadas uma equação para cada volume de controle que compartilha a superfície de controle avaliada. As variáveis p_E , $p_{\hat{L}}$ e $p_{\hat{R}}$ são respectivamente a pressão no ponto auxiliar e as pressões nos pontos de colocação \hat{L} e \hat{R} . Além disso, $\Delta x_{\hat{L}}$ e $\Delta x_{\hat{R}}$ representam as dimensões em x para o volume de controle à esquerda e à direita da superfície de controle em questão. As permeabilidades dos volumes de controle \hat{L} e \hat{R} são indicadas por $K_{\hat{L}}$ e $K_{\hat{R}}$, nesta ordem. Através da imposição da continuidade dos fluxos na interface avaliada pode-se expressá-los em função das pressões nos pontos de colocação \hat{L} e \hat{R} , com o objetivo de eliminar a dependência da pressão no ponto auxiliar p_E , a saber:

$$\left(\vec{v}_E \vec{N}_E\right)_{\hat{L}} = -\left(\vec{v}_E \vec{N}_E\right)_{\hat{R}} \quad (26)$$

Logo, a equação (26) é escrita novamente da seguinte maneira:

$$-2K_{\hat{L}} \frac{p_E - p_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} = 2K_{\hat{R}} \frac{p_{\hat{R}} - p_E}{\Delta x_{\hat{R}}} \quad (27)$$

Agora, a pressão no ponto auxiliar é escrita a partir da equação (27):

$$p_E = \left(\frac{K_{\hat{L}} p_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} + \frac{K_{\hat{R}} p_{\hat{R}}}{\Delta x_{\hat{R}}} \right) \left(\frac{K_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} + \frac{K_{\hat{R}}}{\Delta x_{\hat{R}}} \right)^{-1} \quad (28)$$

Finalmente, a pressão no ponto auxiliar é substituída na equação (24) para obter os fluxos. Como resultado, obtém-se a seguinte equação:

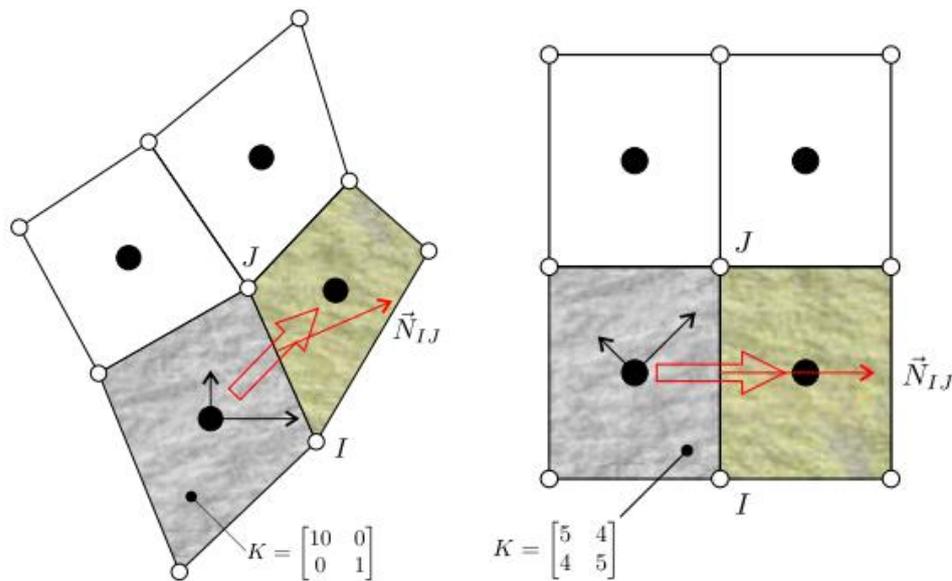
$$\vec{v}_E \vec{N}_E = -\frac{2K_{\hat{L}} K_{\hat{R}}}{K_{\hat{R}} \Delta x_{\hat{L}} + K_{\hat{L}} \Delta x_{\hat{R}}} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) \quad (29)$$

Nota-se que a utilização de formulações fundamentadas na continuidade dos fluxos, imposta em cada interface entre os volumes de controle promove o surgimento de uma média harmônica para a permeabilidade na superfície de controle. Embora a aproximação utilizada no TPFA seja simples, robustas e bastante utilizadas em simuladores comerciais (AAVATSMARK, 2002), algumas restrições são observadas quanto a sua aplicabilidade. Na figura 4, duas dessas situações são ilustradas. Na figura 4a, o tensor de permeabilidade é diagonal, entretanto as direções principais desse tensor estão desalinhadas com a orientação do fragmento de malha ilustrado. Na figura 4b, apesar da malha ser cartesiana, o tensor de

permeabilidade adotado não é diagonal (tensor completo). Dessa forma, o fluxo calculado na face IJ, inevitavelmente, também produz termos de difusão cruzada.

Figura 4 – Situações em que o TPFA produz soluções não convergentes

(a) Tensor diagonal, porém não alinhado (b) Tensor não diagonal, com malha cartesiana



Fonte: Adaptado de Souza (2015)

Em muitos casos, a representação da permeabilidade da rocha é restrita a tensores diagonais e as malhas empregadas na discretização dos reservatórios são, em geral, cartesianas. Segundo Ponting (1989), malhas não ortogonais são permitidas em simuladores fundamentados em aproximações do tipo TPFA desde que para a discretização correta dessas aproximações sejam utilizadas malha do tipo “corner point” com as direções principais do tensor de permeabilidade alinhadas localmente com a orientação da malha adotada.

4.2.2 Método numérico MPFA-H

A formulação de volumes finitos utilizada neste trabalho para aproximar a equação de pressão dada em (14) é um método centrado na célula inicialmente proposto por Gao e Wu (2014). Primeiro, o domínio Ω é particionado em N_{cv} volumes de controle $\Omega_{\hat{L}}$, onde \hat{L} refere-se a uma célula computacional genérica. Então,

integra-se a Eq. (14) em cada célula \hat{L} e aplica-se o Teorema da Divergência de Gauss no lado direito da igualdade:

$$\int_{\Omega_{\hat{L}}} \nabla \cdot \vec{v}_t \, d\Omega_{\hat{L}} = \int_{\Gamma_{\hat{L}}} \vec{v}_t \cdot \vec{n} \, d\Gamma_{\hat{L}} = \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} \int_{IJ} \vec{v}_t \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega_{\hat{L}}} Q \, d\Omega_{\hat{L}} \quad (30)$$

onde $\Gamma_{\hat{L}}$ é a fronteira \hat{L} da célula, e IJ é a face (aresta em 2D) da célula. Em seguida, o Teorema do Valor Médio é aplicado em ambos os lados da Eq. (30) da seguinte forma:

$$\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} \int_{IJ} \vec{v}_t \cdot \vec{n} \, ds = \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} |IJ| \bar{v}_{tIJ} \cdot \vec{n}_{IJ} \quad (31)$$

$$\int_{\Omega_{\hat{L}}} Q \, d\Omega_{\hat{L}} = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}} \quad (32)$$

onde $|IJ|$ é a área da face da célula (comprimento da aresta em 2D), \vec{n}_{ij} é o vetor externo normal unitário e $\bar{v}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}$ é o fluxo de Darcy através de IJ . Além disso, $\bar{Q}_{\hat{L}}$ é a taxa específica total média de acumulação na célula \hat{L} . Para garantir a continuidade do fluxo através de IJ , primeiro precisamos definir o fluxo unilateral na célula \hat{L} :

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} = -\lambda_{IJ} K_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} = -\lambda_{IJ} \nabla p \cdot K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} \quad (33)$$

onde $K_{\hat{L}}$ é a permeabilidade na célula e $K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{ij}$ é conhecido como o vetor co-normal. Além disso, λ_{ij} é definido como:

$$\lambda_{IJ} = \frac{\lambda_{\hat{L}}^{\hat{L}} V_{\hat{L}} + \lambda_{\hat{R}}^{\hat{R}} V_{\hat{R}}}{V_{\hat{L}} + V_{\hat{R}}} \quad (34)$$

onde \hat{R} refere-se à célula vizinha a \hat{L} que compartilha IJ .

Para derivar o esquema de volumes finitos usado neste trabalho, primeiro o vetor co-normal $K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{ij}$ é decomposto através de uma decomposição convexa da seguinte forma:

$$\underline{K}_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \quad (35)$$

onde $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}$ e $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}$ são vetores auxiliares que conectam o centro da célula $x_{\hat{L}}$ aos pontos auxiliares $x_{\hat{L},i(IJ)}$ e $x_{\hat{L},j(IJ)}$ respectivamente. A decomposição convexa é necessária na construção de muitos esquemas de volumes finitos lineares e não lineares (POTIER, 2005; LIPNIKOV *et al.*, 2007; GAO; WU, 2013; GAO; WU, 2014; CONTRERAS; LYRA; CARVALHO, 2019). Os pontos auxiliares escolhidos no

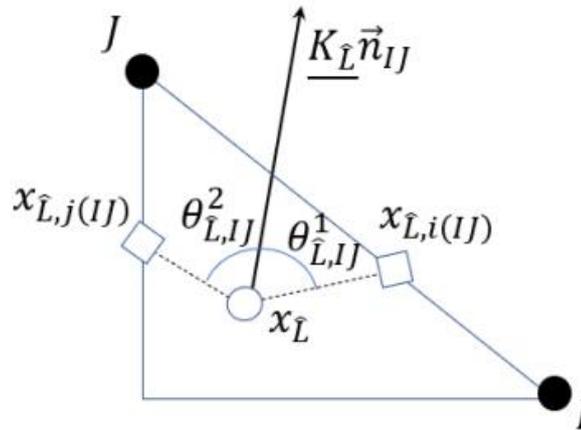
presente trabalho são os chamados Pontos Harmônicos. O Ponto Harmônico é um ponto pertencente à face da célula IJ tal que o valor da pressão neste ponto pode ser expresso em função apenas das duas células, \hat{L} e \hat{R} , que compartilham IJ.

Para garantir $\alpha_{\hat{L},i(IJ)} \geq 0$ e $\alpha_{\hat{L},j(IJ)} \geq 0$, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Os ângulos $\theta_{\hat{L},IJ}^1$ (entre $K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}$ e $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}$) e $\theta_{\hat{L},IJ}^2$ (entre $K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}$ e $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}$) deve respeitar $0 \leq \theta_{\hat{L},IJ}^1, \theta_{\hat{L},IJ}^2 \leq \pi$ e $0 \leq \theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2 \leq \pi$.
- $(K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \vec{e}_z) \geq 0$ e $(K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}, \vec{e}_z) \geq 0$, onde (\cdot, \cdot, \cdot) representa o produto misto entre três vetores \vec{e}_z e o vetor unitário na direção z.

O par de Pontos Harmônicos pertencentes a $\Gamma_{\hat{L}}$ que satisfaçam as condições mencionadas anteriormente são os pontos escolhidos para construir o fluxo aproximado correspondente ao método MPFA-H. Os coeficientes $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$ e $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$ são:

Figura 5 – Pontos Harmônicos utilizados na aproximação MPFA-H



Fonte: O Autor (2023)

$$\alpha_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\left(K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}, \vec{e}_z \right)}{\left(\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}, \vec{e}_z \right)} \quad (36)$$

$$\alpha_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\left(K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \vec{e}_z \right)}{\left(\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}, \vec{e}_z \right)} \quad (37)$$

Em seguida, substituímos a Eq. (35) na Eq. (33):

$$\nabla p \cdot \underline{K}_L^T \vec{n}_{IJ} = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \quad (38)$$

Então, usando as aproximações $\nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} = p_{\hat{L},i(IJ)} - p_{\hat{L}}$ e $\nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} = p_{\hat{L},j(IJ)} - p_{\hat{L}}$, Eq. (33) torna-se:

$$\vec{\nabla}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} = \lambda_{IJ} \left[\alpha_{\hat{L},i(IJ)} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},i(IJ)}) + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},j(IJ)}) \right] \quad (39)$$

onde $p_{\hat{L}}$ é o valor da pressão em $x_{\hat{L}}$ e $p_{\hat{L},i(IJ)}$ e $p_{\hat{L},j(IJ)}$ são, respectivamente, os valores de pressão nos Pontos Harmônicos $x_{\hat{L},i(IJ)}$ e $x_{\hat{L},j(IJ)}$. Seguindo procedimento semelhante, pode-se escrever o fluxo unilateral, em relação a \hat{R} como:

$$\vec{\nabla}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ} = \lambda_{IJ} \left[\alpha_{\hat{R},i(IJ)} (p_{\hat{R},i(IJ)} - p_{\hat{R}}) + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} (p_{\hat{R},j(IJ)} - p_{\hat{R}}) \right] \quad (40)$$

com $\alpha_{\hat{R},i(IJ)}$ e $\alpha_{\hat{R},j(IJ)}$ sendo o coeficiente da decomposição convexa de $K_{\hat{R}}^T \vec{n}_{IJ}$, $p_{\hat{R}}$ sendo o valor da pressão no centróide $x_{\hat{R}}$ da célula \hat{R} , e com $p_{\hat{R},i(IJ)}$ e $p_{\hat{R},j(IJ)}$ sendo os valores de pressão nos pontos harmônicos $x_{\hat{R},i(IJ)}$ e $x_{\hat{R},j(IJ)}$ respectivamente.

4.2.2.1 Interpolação dos pontos harmônicos

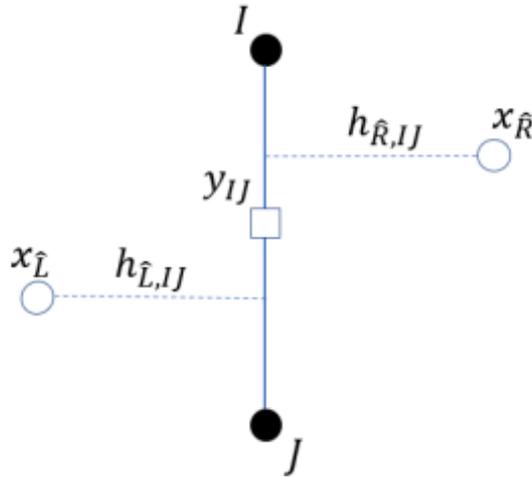
Conforme mencionado anteriormente, os pontos auxiliares utilizados no presente trabalho para construir a aproximação de fluxo são os chamados Pontos Harmônicos. Um Ponto Harmônico é um ponto pertencente à face da célula IJ tal que o valor da pressão neste ponto pode ser expresso como uma função apenas das pressões correspondentes às duas células, \hat{L} e \hat{R} , que compartilham IJ.

Definindo $h_{\hat{L},IJ}$ e $h_{\hat{R},IJ}$, respectivamente, como a distância dos centros das células $x_{\hat{L}}$ e $x_{\hat{R}}$ à IJ, a coordenada do Ponto Harmônico y_{IJ} pode ser definida como:

$$y_{IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L}}^{(n)} x_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R}}^{(n)} x_{\hat{R}} + h_{\hat{L},IJ} h_{\hat{R},IJ} (K_{\hat{L}}^T - K_{\hat{R}}^T) \vec{n}_{IJ}}{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L}}^{(n)} + h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R}}^{(n)}} \quad (41)$$

onde $K_{\hat{L}}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^T K_{\hat{L}} \vec{n}_{IJ}$, $K_{\hat{R}}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^T K_{\hat{R}} \vec{n}_{IJ}$.

Figura 6 – Distância da aresta IJ ao centróide $x_{\hat{L}}$ e $x_{\hat{R}}$



Fonte: O Autor (2023)

Em alguns casos, a definição da Eq. (41) pode resultar em um ponto fora de IJ. Nesse caso, um novo ponto de interpolação é definido da seguinte forma:

$$y_{IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L}}^{(n)}x_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R}}^{(n)}x_{\hat{R}}}{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L}}^{(n)} + h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R}}^{(n)}} \quad (42)$$

O valor de pressão p_{IJ} no Ponto Harmônico y_{IJ} é calculado com a seguinte expressão:

$$p_{IJ} = w_{\hat{L},IJ}p_{\hat{L}} + w_{\hat{R},IJ}p_{\hat{R}} \quad (43)$$

onde:

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L}}^{(n)}}{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L}}^{(n)} + h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R}}^{(n)}} \quad (44)$$

$$w_{\hat{R},IJ} = \frac{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R}}^{(n)}}{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L}}^{(n)} + h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R}}^{(n)}} \quad (45)$$

4.2.2.2 Construção do fluxo único

Para garantir a conservação local, um fluxo único através de IJ deve ser construído. No volume finito definido neste artigo, o fluxo único através de IJ é uma

combinação convexa dos fluxos unilaterais $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ}$ e $\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ}$, usando os pesos $w_{\hat{L},IJ}$ e $w_{\hat{R},IJ}$:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ} = w_{\hat{R},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} + w_{\hat{L},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ} \quad (46)$$

Além disso, usando as definições de fluxo na Eq. (39) e Eq. (40), juntamente com alguma manipulação algébrica, pode-se escrever:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ} = |IJ| \lambda_{IJ} \left[\mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R},IJ} p_{\hat{R}} + \mathcal{D}_{IJ} \right] \quad (47)$$

onde:

$$\mathcal{D}_{IJ} = \sum_{\gamma=i,j} \left(w_{\hat{L},IJ} \alpha_{\hat{R},\gamma(IJ)} p_{\hat{R},\gamma(IJ)} - w_{\hat{R},IJ} \alpha_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)} \right) \quad (48)$$

$$\mathcal{A}_{\hat{L},IJ} = w_{\hat{R},IJ} \left(\alpha_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad (49)$$

$$\mathcal{A}_{\hat{R},IJ} = w_{\hat{L},IJ} \left(\alpha_{\hat{R},i(IJ)} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \right) \quad (50)$$

4.2.2.3 Tratamento do fluxo nas faces de contorno para o método MPFA-H

No limite de Dirichlet Γ_D , o fluxo desconhecido através de IJ é aproximado pelo fluxo unilateral na Eq. (39):

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ} = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} \quad (51)$$

com o valor da pressão em IJ sendo o valor prescrito $p_{IJ} = g_D$.

No limite de Neumann Γ_N , o fluxo através de IJ tem o valor prescrito:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ} = g_N \quad (52)$$

4.3 DISCRETIZAÇÃO EXPLÍCITA DA EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO

Esta seção é dedicada à discussão da solução numérica da equação de saturação que rege o escoamento de fluido bifásico entre água e óleo em um meio poroso. Na seção 2, há uma introdução a respeito desta equação (16). Após a integração da equação de saturação sobre um volume de controle arbitrário $\hat{L} \in \Omega$, com superfície de controle Γ deve-se aplicar o Teorema da divergência de Gauss, dessa forma, pode-se escrever a equação da saturação para um volume de controle genérico $\hat{L} \in \Omega$ da seguinte forma:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega_L} \phi_L \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_L \partial t = - \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_L} \vec{F}(S_w) \cdot \vec{n} \partial \Gamma_L \partial t + \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_L} Q_w \partial \Omega_L \partial t \quad (53)$$

Após utilizar o teorema do valor médio na equação anterior, bem como aplicar algumas manipulações algébricas, conforme visto em Souza (2015), pode-se escrever a equação da saturação para um volume de controle genérico na forma semi-discreta:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial t = - \frac{1}{\phi_L \Omega_L} \int_{t_0}^t \sum_{IJ \in \Gamma_r} \vec{F}(S_w) \cdot \vec{N}_{IJ} \partial t + \frac{1}{\phi_L \Omega_L} \int_{t_0}^t \bar{Q}_w \partial t \quad (54)$$

Neste trabalho, para a discretização temporal da equação de saturação, utilizou-se o método de Euler explícito. Dessa forma integrando a equação 3.31 sobre o intervalo de tempo $[t_0, t]$ obtém-se a forma discreta da equação 2.16 no tempo e no espaço:

$$S_w^{n+1} = S_w^n - \frac{\Delta t}{\phi_L \Omega_L} \sum_{IJ \in \Gamma_r} \vec{F}_{IJ}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t Q_w}{\phi_L \Omega_L} \quad (55)$$

onde n e $n + 1$ representam, respectivamente, o estágio de tempo atual e o próximo estágio de tempo. O passo de tempo Δt é expressado por $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ e deve respeitar a condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (SOUZA *et al.*, 2018).

4.3.1 Tratamento de poços

Em formulações explícitas, em virtude das bruscas variações na variável primária, se torna necessário utilizar uma escala temporal nos volumes de controle que contém poços produtores diferente do passo temporal para o restante do domínio (LEVEQUE, 1992). Dessa forma, altas taxas de injeção, produção ou volumes de controle muito pequenos podem ocasionar oscilações severas nos volumes de controle associados aos poços, ainda que atendam à condição de CFL (SOUZA, 2015). Embora aplicar a formulação implícita torne desnecessária a utilização de diferentes escalas temporais ao longo do domínio exige um maior custo computacional em razão das resoluções das não linearidades inerentes à formulação.

Neste trabalho, conforme visto anteriormente, utiliza-se uma formulação explícita a qual é adotada para todo o domínio, nos volumes de controle associados

aos poços produtores emprega-se a estratégia da utilização de um passo fracional. A estratégia mencionada foi descrita em LeVeque (1992) e adaptada para simulação de escoamento em reservatórios de petróleo por Carvalho (2005). O procedimento é definido pela utilização de uma equação preditora na qual o termo fonte é desconsiderado e em seguida aplicação da equação corretora contendo a contribuição do termo fonte.

$$S_{w_L}^* = S_{w_L} - \frac{r\Delta t}{\phi\Omega_L} \left[\sum_{IJ \in \Gamma_L} \bar{F}_{IJ}(S_{w_L}) \cdot \bar{N}_{IJ} \right] \quad (56)$$

$$S_{w_L}^{n+1} = S_{w_L}^* + \frac{r\Delta t \bar{Q}_w(S_{w_L})}{\phi\Omega_L} \quad (57)$$

As equações preditora e corretora são respectivamente 56 e 57 onde r é um parâmetro de relaxação (DATE, 2005), baseado em Souza (2015) neste trabalho este parâmetro assume valor 0,5.

Além disso, ainda no que se diz respeito ao tratamento de poço, realizou-se um "fatiamento" do passo de tempo global, isso pois conforme mencionado nos poços produtores a mudança da variável primária acontece em uma escala de tempo diferente do restante do domínio. Dessa forma, neste caso, um passo de tempo auxiliar é utilizado de modo que a solução "marche", partindo do estágio de tempo local, até atingir o estágio de tempo global conforme pode ser visto em Souza (2015). Portanto, ocorre um processo iterativo onde o passo de tempo global é subdividido de forma uniforme em 5 passos auxiliares e a solução é atualizada a cada iteração.

4.3.2 Formulação multidimensional para o fluxo numérico

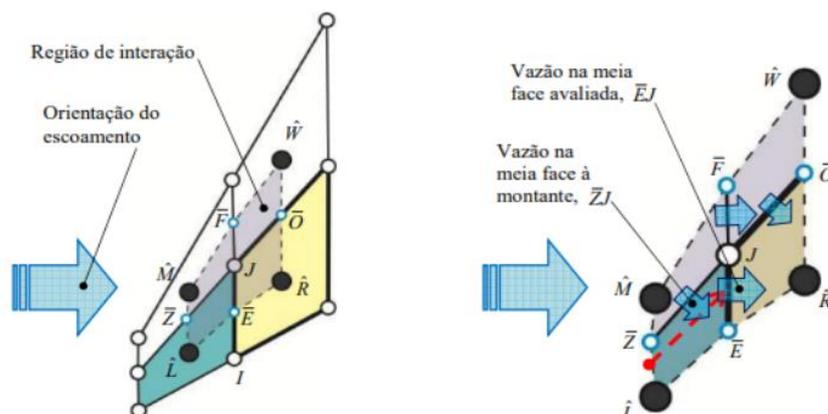
Tradicionalmente, os fluxos numéricos em equações hiperbólicas discretizadas são definidos através da ponderação da variável de interesse levando em consideração apenas um dos volumes de controle, que compartilham à aresta avaliada, baseando-se na direção do escoamento (LEVEQUE, 1992; CHEN, 2006). Essa forma unidimensional utilizada para aproximação do fluxo produz resultados suscetíveis aos efeitos decorrentes da orientação da malha.

No contexto de simulação em reservatórios de petróleo, o efeito de orientação de malha ou *grid orientation effect* (GOE) foi notado pela primeira vez em Todd, O'dell e Hirasaki (1972) em um problema de um quarto de cinco poços. De acordo com Brand, Heinemann e Aziz (1991), em situações onde a razão de mobilidade é maior que um, o efeito de orientação de malha fica ainda mais evidente. Deve-se mencionar que o refinamento da malha não reduz a instabilidade gerada e, dessa forma, a solução não converge (YANOSIK; MCCRACKEN, 1979). Portanto, quanto mais refinada a malha mais severo é o GOE (BRAND; HEINEMANN; AZIZ, 1991).

Neste cenário, surge a formulação multidimensional com o objetivo de produzir soluções com minimização do GOE. Dessa forma, busca-se gerar soluções que não contenham nenhum tipo de viés decorrente da malha escolhida. As primeiras formulações consideradas multidimensionais aplicadas ao contexto de simulação de escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo foram feitas por Edwards (2003), entretanto se restringiam apenas às malhas estruturadas e utilizando aproximação de primeira ordem. Em seguida, se baseando no proposto por Colella (1990), Lamine e Edwards (2010) generalizou para malhas quaisquer e Lamine e Edwards (2013) estendeu para alta ordem.

[Diferentemente de Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011), mas consoante com Souza (2015), neste trabalho, a saturação foi a variável escolhida para se realizar a combinação convexa oriunda da formulação multidimensional. Dessa forma, o fluxo numérico de baixa ordem multidimensional considera que o fluxo fracionário em uma determinada meia aresta leva em consideração contribuições de fluxos fracionários à montante da meia aresta avaliada, conforme pode-se notar na figura a seguir:

Figura 7 – Região de interação



Fonte: Souza (2015)

Dessa forma, a saturação de água na meia aresta $\bar{E}J$ é dado por:

$$\check{S}_{w_{\bar{E}J}} = (1 - \omega_{\bar{E}J})S_{w_{\hat{L}}} + \omega_{\bar{E}J}S_{w_{\bar{Z}J}} \quad (58)$$

conforme pode-se observar, a saturação é calculada através de uma combinação convexa entre a saturação conhecida associado ao volume de controle \hat{L} , obtido a partir da condição inicial ou do passo de tempo anterior, e uma outra saturação desconhecida definido no ponto de quadratura da meia face à montante $\bar{Z}J$. O parâmetro de ponderação, ω , é obtido a partir da razão Λ definida entre as vazões calculadas nas meias faces à montante e a avaliada, da seguinte forma:

$$\Lambda = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{N})_{\text{à montante}}}{(\vec{v} \cdot \vec{N})_{\text{avaliada}}} \quad \text{e} \quad \Lambda_{\bar{E}J} = \frac{\vec{v}_{\bar{Z}J} \cdot \vec{N}_{\bar{Z}J}}{\vec{v}_{\bar{E}J} \cdot \vec{N}_{\bar{E}J}} \quad (59)$$

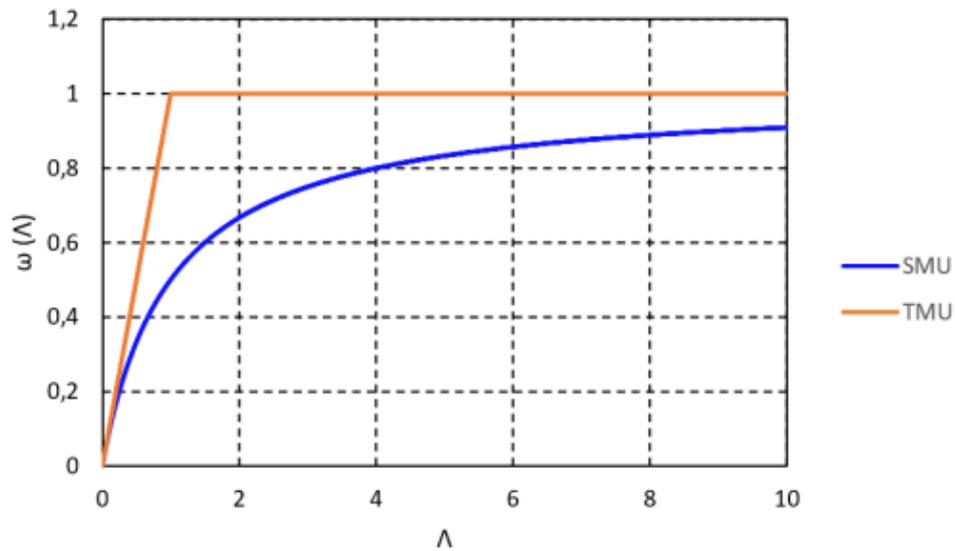
Visando garantir que a combinação vista na Eq. 58 seja de fato convexa é utilizada uma função de controle que produz um valor normalizado entre 0 e 1 para o parâmetro ω . Existem diversas propostas para a função de controle conforme pode-se notar em Hurtado (2005), Hurtado, Maliska e Silva (2007), Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011). Neste trabalho, serão adotadas duas funções de controle, *Tight Multidimensional Upstream* (TMU) (KOZDON; MALLISON; GERRITSEN, 2011) e *textitSmooth Multidimensional Upstream* (SMU) (HURTADO, 2005). As funções TMU e SMU são definidas da seguinte forma:

$$\omega_{\text{TMU}}(\Lambda) = \min(1, \beta\Lambda) \quad (60)$$

$$\omega_{\text{SMU}}(\Lambda) = \frac{\Lambda}{(\Lambda + 1)} \quad (61)$$

Tradicionalmente na literatura, o parâmetro β presente na equação 60 assume o valor 1 conforme visto em Hurtado, Maliska e Silva (2007), Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011), Keilegavlen, Kozdon e Mallison (2012). A seguir está disposto um gráfico que mostra o comportamento de ambas as funções de controle:

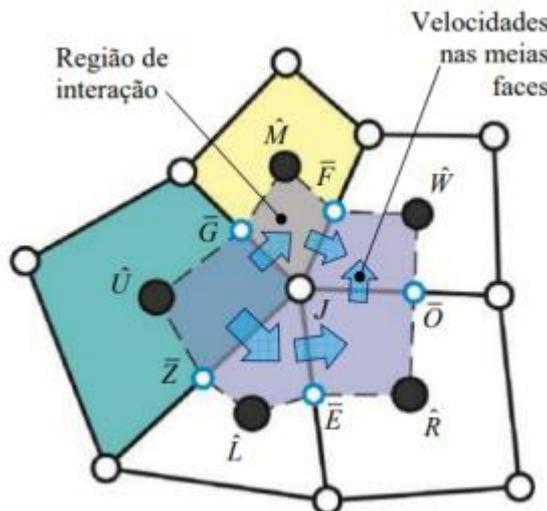
Figura 8 – Gráfico das funções limitadoras TMU (KOZDON, MALLISON; GERRITSEN, 2011) e SMU (HURTADO; MALISKA; SILVA, 2007)



Fonte: O Autor (2023)

Deve-se pontuar que em alguns casos não há apenas uma meia aresta à montante da meia aresta avaliada tal como será mostrado a seguir:

Figura 9 – Regiões de interação J com distribuição de velocidades entre as meias faces



Fonte: Souza (2015)

Nestes casos, faz-se necessário levar em consideração as contribuições das vazões referentes a todas as meias arestas à montante da meia aresta avaliada. Portanto, as equações para a saturação de água para a região de interação J ficaria da seguinte forma:

$$\check{S}_{w_{\overline{OJ}}} = (1 - \omega_{\overline{OJ}})S_{w_{\overline{R}}} + \omega_{\overline{OJ}}S_{w_{\overline{EJ}}} \quad (62)$$

$$\check{S}_{w_{\overline{EJ}}} = (1 - \omega_{\overline{EJ}})S_{w_{\overline{L}}} + \omega_{\overline{EJ}}S_{w_{\overline{ZJ}}} \quad (63)$$

$$\check{S}_{w_{\overline{ZJ}}} = S_{w_{\hat{U}}} \quad (64)$$

$$\check{S}_{w_{\overline{FJ}}} = (1 - \omega_{\overline{FJ}})S_{w_{\overline{M}}} + \omega_{\overline{FJ}}S_{w_{\overline{GJ}}} \quad (65)$$

$$\check{S}_{w_{\overline{GJ}}} = S_{w_{\hat{U}}} \quad (66)$$

Nota-se que com exceção das meias arestas: \overline{GJ} e \overline{ZJ} todas possuem pelo menos uma meia aresta à montante da meia aresta avaliada. As setas presentes na figura 9 indicam a direção do escoamento. Dessa forma, analisando a meia aresta \overline{ZJ} verificase que não há nenhuma meia aresta anterior a ela que possua a mesma direção de escoamento (anti-horário), portanto a saturação para a meia aresta \overline{ZJ} se reduz a uma aproximação unidimensional dependendo apenas da contribuição referente ao volume de controle \hat{U} . De forma análoga quando se analisa a meia aresta \overline{GJ} nota-se que também se reduz a uma aproximação unidimensional.

Assim para cada meia face em uma dada região de interação, a saturação pode ser calculada com aproximação de primeira ordem, de acordo com a orientação do escoamento, através da seguinte equação:

$$\check{S}_{w_i} = \frac{1}{(1 - \prod_{J=1}^{N_{HE}} \omega_J)} \left[(1 - \omega_i) S_{w_{\hat{C}}} + \sum_{k=1}^{\max(1, N_{UHE})} \left(\prod_{m=0}^{k-1} \omega_{i-m} \right) (1 - \omega_{i-k}) S_{w_{\hat{C}-k}} \right] \quad (67)$$

onde i representa cada meia aresta pertencentes à região de interação avaliada, \hat{C} corresponde ao volume de controle imediatamente à montante, adjacente à meia aresta avaliada, N_{UHE} é o número de meias arestas à montante em uma região de interação e N_{HE} corresponde ao número de meia arestas em uma região de interação. Deve-se notar que $i - 1, i - 2, \dots, i - N_{UHE}$ são as meias arestas à montante da meia aresta i . De forma análoga, $\hat{C} - 1, \hat{C} - 2, \dots, \hat{C} - N_{UHE}$ são os volumes de controle à montante da meia aresta \hat{C} . As saturações de água $S_{w_{\hat{C}}}, S_{w_{\hat{C}-1}}, \dots, S_{w_{\hat{C}-N_{UHE}}}$ são aproximações de primeira ordem cujo valor é projetado sobre todo o volume de controle.

Neste trabalho, a formulação multidimensional adotada foi proposta por Souza (2015) e utilizada também em Souza *et al.* (2018), dessa forma, maiores detalhes a respeito da dedução das equações expostas nesta seção poderão ser encontrados nestes trabalhos.

4.3.3 Aproximações de alta ordem via transporte do fluxo corrigido (*Flux Corrected Transport*)

Neste trabalho, pioneiro no PADMEC, alcança-se precisão espacial de alta ordem através do Transporte do Fluxo Corrigido (FCT) (BORIS; BOOK, 1973; ZALESK, 2005). Através desse método se torna possível obter soluções com resolução de alta ordem levando em consideração a multidimensionalidade do escoamento (ZALESK, 1979).

O FCT será aplicado no fluxo numérico da Eq. 55 para simulação numérica de escoamentos bifásicos em meios porosos. Normalmente, o seguinte procedimento é utilizado para construir o FCT (ZALESK, 1979; HURTADO; MALISKA; SILVA, 2007; KUZMIN; LÖHNER; TUREK, 2012):

- a) Calcule $\vec{F}_{IJ}^{lo}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ}$, os fluxos de baixa ordem dados por um método que garante uma solução sem oscilações ou valores não físicos, mas com alguma difusão numérica.
- b) Calcule $\vec{F}_{IJ}^{hi}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ}$, os fluxos de alta ordem dados por um método que é matematicamente mais preciso em regiões suaves.
- c) Defina fluxos antidifusivos (HURTADO; MALISKA; SILVA, 2007):

$$\vec{F}_{IJ}^{ad}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ} = - \left[\vec{F}_{IJ}^{hi}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ} - \vec{F}_{IJ}^{lo}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ} \right] \quad (68)$$

onde \vec{F}^{hi} e \vec{F}^{lo} representam, respectivamente, os fluxos de alta e baixa ordem. A forma clássica do FCT utiliza a aproximação *Upwind* como fluxo de baixa ordem, enquanto para o fluxo de alta ordem diversas estratégias são abordadas (YU; DOUGHERTY, 1998; HURTADO; MALISKA; SILVA, 2007). Neste trabalho, o fluxo de baixa ordem é obtido através do *Local Lax-Friedrichs* (LLF), (CONTRERAS *et al.*, 2016; SOUZA *et al.*, 2018), utilizando formulação multidimensional proposta por Souza (2015) e apresentada na seção anterior. O fluxo numérico LLF é dado por:

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\vec{F}_{w_{IJ}}(S_{w_L}) + \vec{F}_{w_{IJ}}(S_{w_R}) \right] \cdot \vec{N}_{IJ} - \max |\alpha_{IJ}| (S_{w_R} - S_{w_L}) \right\} \quad (69)$$

Na Eq. 69, S_{w_L} e S_{w_R} denotam os valores de saturação de água nos volumes de controle adjacentes a aresta $IJ \in \Gamma_L$ enquanto $\vec{F}_{w_{IJ}}(S_{w_L})$ e $\vec{F}_{w_{IJ}}(S_{w_R})$ são os fluxos numéricos correspondentes. Finalmente, o termo α é a dissipação artificial necessária para estabilizar o esquema e a velocidade característica da onda na superfície de controle é aproximada por:

$$\alpha_{IJ} = \left(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N} \right) \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \quad (70)$$

Em relação ao fluxo de alta ordem, neste trabalho, assim como em (YU; DOUGHERTY, 1998), empregou-se expansão em série de Taylor visando obter uma aproximação espacial de segunda ordem, da seguinte forma:

$$S_w(x,y) = S_w(x_I, y_I) + \nabla S_{w_I} \cdot \Delta r + O(\Delta r^2) \quad (71)$$

onde I corresponde ao centróide de um volume de controle genérico. O gradiente de saturação, ∇S_{w_I} , neste trabalho, é obtido a partir da técnica de mínimos quadrados conforme proposto por Souza (2015). Essa técnica leva em consideração dados referentes ao próprio volume de controle avaliado bem como à vizinhança próxima. Essa técnica, conforme mencionado anteriormente, é fundamentada na expansão em série de Taylor e permite a obtenção de um polinômio reconstrutor utilizado para extrapolação da variável avaliada até o ponto de quadratura e através desse processo o grau da aproximação espacial é determinado.

- d) Calcule a solução intermediária usando um método de baixa ordem que preserva a solução monotônica:

$$S_w^* = S_w^n - \frac{\Delta t}{\phi \Omega_L} \left[\sum_{IJ \in \Gamma_L} \vec{F}_{IJ}^{lo}(S_w^n) \cdot \vec{N}_{IJ} \right] \quad (72)$$

- e) Limite $\vec{F}_{IJ}^{ad} \cdot \vec{N}_{IJ}$, os fluxos antidifusivos, para obter fluxos corrigidos de modo que a solução de saturação não ultrapassa nem ultrapassa os valores garantidos, de acordo com a seguinte expressão:

$$\vec{F}_{IJ}^c \cdot \vec{N}_{IJ} = \beta_{IJ} \left(\vec{F}_{IJ}^{ad} \cdot \vec{N}_{IJ} \right), \quad 0 \leq \beta_{IJ} \leq 1 \quad (73)$$

- f) Finalmente, adicione os fluxos antidifusivos corrigidos à solução intermediária de baixa ordem para obter uma nova solução da saturação:

$$S_W^{n+1} = S_W^* + \frac{\Delta t}{\phi \Omega_{\hat{L}}} \left[\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} \beta_{IJ} \left(\vec{F}_{IJ}^{ad} \cdot \vec{N}_{IJ} \right) \right] \quad (74)$$

4.3.4 Limitadora multidimensional do FCT

Em relação à limitação de fluxo antidifusivo, uma abordagem clássica do limitador de fluxo de volume de controle foi proposta por Zalesak (1979), como uma alternativa multidimensional do limitador proposto por Boris e Book (1973). O limitador de Zalesak (1979) é um esquema genuinamente multidimensional de alta resolução (KUZMIN; MÖLLER; TUREK, 2003). O seguinte procedimento é usado para limitar fluxos antidifusivos (ZALESAK, 2005).

- a) Calcule os limites superior e inferior para cada $\hat{L} \in \Omega$, respectivamente, $S_{W_{\hat{L}}}^{max}$ e $S_{W_{\hat{L}}}^{min}$. Esses limites são determinados considerando a solução intermediária S_W^* e os valores máximo e mínimo de um estêncil nodal associado a cada \hat{L} .
- b) Para o limite superior, calcule $P_{\hat{L}}^+$, $Q_{\hat{L}}^+$ e sua razão $R_{\hat{L}}^+$ a cada $\hat{L} \in \Omega$:

$$P_{\hat{L}}^+ = \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} \left| \min \left(0, \vec{F}_{IJ}^{ad} (S_W^n) \cdot \vec{N}_{IJ} \right) \right| \quad (75)$$

$$Q_{\hat{L}}^+ = \left(S_{W_{\hat{L}}}^{max} - S_{W_{\hat{L}}}^* \right) \quad (76)$$

$$R_{\hat{L}}^+ = \min \left(1, \frac{Q_{\hat{L}}^+}{P_{\hat{L}}^+} \right) \text{ se } P_{\hat{L}}^+ > 0, 1 \text{ senão.} \quad (77)$$

- c) Para limite inferior, calcule $P_{\hat{L}}^-$, $Q_{\hat{L}}^-$ e sua razão $R_{\hat{L}}^-$ a cada $\hat{L} \in \Omega$:

$$P_{\hat{L}}^- = \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} \left| \max \left(0, \vec{F}_{IJ}^{ad} (S_W^n) \cdot \vec{N}_{IJ} \right) \right|, \quad (78)$$

$$Q_{\hat{L}}^- = \left(S_{W_{\hat{L}}}^* - S_{W_{\hat{L}}}^{min} \right), \quad (79)$$

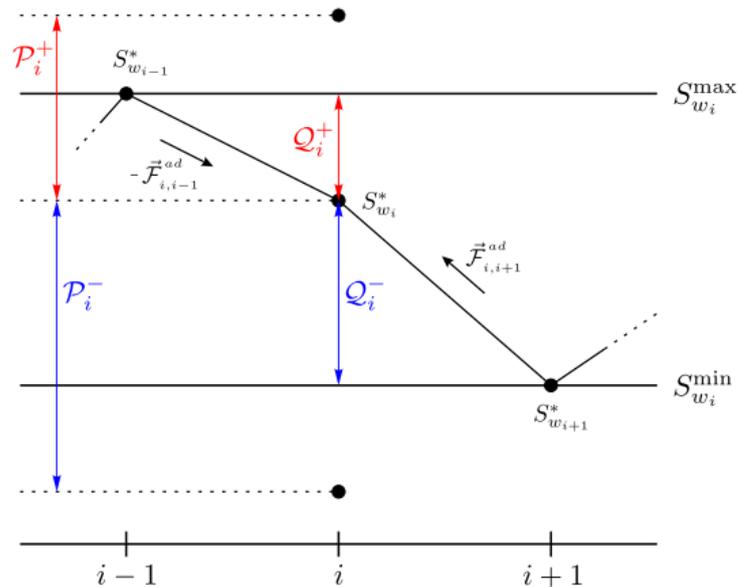
$$R_{\hat{L}}^- = \min \left(1, \frac{Q_{\hat{L}}^-}{P_{\hat{L}}^-} \right) \text{ se } P_{\hat{L}}^- > 0, 1 \text{ senão.} \quad (80)$$

- d) Calcule o β_{IJ} e selecione o mínimo:

$$\beta_{IJ} = \begin{cases} \min \left(R_{\hat{L}}^+, R_{\hat{R}}^- \right) & \text{se } \vec{F}_{IJ}^{ad} (S_W^n) \cdot \vec{N}_{IJ} \geq 0 \\ \min \left(R_{\hat{R}}^+, R_{\hat{L}}^- \right) & \text{se } \vec{F}_{IJ}^{ad} (S_W^n) \cdot \vec{N}_{IJ} < 0 \end{cases} \quad (81)$$

Na Eq. 81, o volume de controle genérico \hat{L} compartilha uma face $IJ \in \Gamma_{\hat{L}}$ com o volume de controle \hat{R} . Além disso, adotamos o fluxo positivo na face IJ apontando para fora da superfície de controle $\Gamma_{\hat{L}}$. A Figura 10 ilustra esquematicamente o procedimento de limitação de fluxo unidimensional do limitador clássico proposto por (ZALESAK, 1979).

Figura 10 – O limitador de Zalesak em uma dimensão. Adaptado de (KUZMIN; MÖLLER; TUREK, 2003)



Fonte: O Autor (2023)

4.3.5 Alternativas para a construção e limitação dos fluxos

Nesta seção serão propostas modificações nos procedimentos de construção e limitação do fluxo corrigido para melhorar a precisão da estratégia FCT convencional.

Com relação ao procedimento de construção do fluxo corrigido, observa-se uma atualização retrógrada dos fluxos de ordem baixa e de ordem alta por meio da solução inicial da saturação. No entanto, a seguinte estratégia de construção modificada usa a solução intermediária como uma etapa preditora para o cálculo dos fluxos antidifusivos, de forma resumida, a saber:

- Calcule a solução do preditor de saturação S_w^* , conforme demonstrado no procedimento convencional;

- b) Calcule $\vec{F}_{IJ}^{lo}(S_w^*) \cdot \vec{N}_{IJ}$ empregando a solução intermediária;
- c) Calcule $\vec{F}_{IJ}^{hi}(S_w^*) \cdot \vec{N}_{IJ}$ empregando a solução intermediária;
- d) Defina os fluxos antidifusivos:

$$\vec{F}_{IJ}^{ad}(S_w^*) \cdot \vec{N}_{IJ} = - \left[\vec{F}_{IJ}^{hi}(S_w^*) \cdot \vec{N}_{IJ} - \vec{F}_{IJ}^{lo}(S_w^*) \cdot \vec{N}_{IJ} \right] \quad (82)$$

Já no procedimento limitante, as razões R_i^+ são reescritas neste trabalho da seguinte forma:

$$r_i^\pm = \frac{S_i^\pm + \xi}{F_i^\pm + \xi} \quad (83)$$

$$R_i^\pm = \min(1, r_i^\pm) \quad (84)$$

onde as razões r_i^\pm são os fatores de suavização dos fluxos antidifusivos e o parâmetro $\xi = 10^{-16}$ é um pequeno número usado apenas para evitar a divisão por zero.

Eq. (84) representa a função limitadora do procedimento FCT convencional. Pois dependendo da estratégia adotada, a função limite pode inserir uma difusão numérica mais ou menos artificial na aproximação de alta ordem.

Neste trabalho, empregamos uma função limitante alternativa inspirada na modificação do limitador e empregada no contexto do Processo de Limitação Multidimensional, conforme a seguinte expressão (BARTH; JESPERSEN, 1989; VENKATAKRISHNAN, 1995; SOUZA *et al.*, 2018):

$$R_i^\pm = \frac{(r_i^\pm)^2 + 2r_i^\pm}{(r_i^\pm)^2 + r_i^\pm + 2} \quad (85)$$

Em contraste com o limitador empregado no procedimento FCT convencional, este limitador proposto é suave e diferenciável.

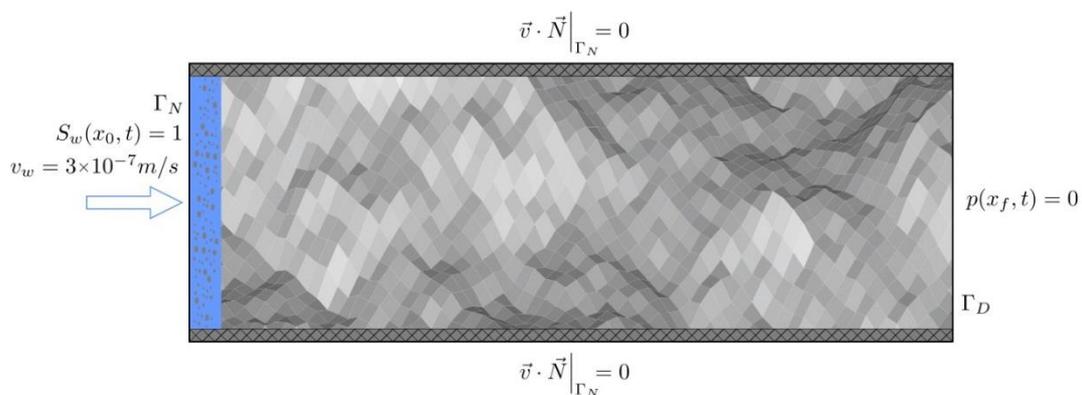
5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção serão apresentados os experimentos computacionais realizados a fim de validar a robustez da formulação numérica proposta.

5.1 PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT

O problema de Buckley-Leverett é obtido de Bastian (2003). O experimento consiste basicamente no deslocamento imiscível unidimensional de óleo e água ao longo de um meio poroso, homogêneo e isotrópico. Na Figura (11) observa-se de forma esquemática a geometria do reservatório de petróleo e as condições de contorno adotadas no modelo. Na face esquerda, a água é injetada no reservatório, com velocidade $v_w = 3 \times 10^{-7}$ m/s e a saturação de água unitária. Ademais, fluxo nulo é prescrito nas faces superior e inferior do reservatório e na face direita, a pressão conhecida é igual a zero.

Figura 11 – Modelo esquemático do reservatório com domínio de $[0, 300] \times [0, 75]$ m



Fonte: O Autor (2023)

Nesse reservatório de petróleo, a porosidade e a permeabilidade são dadas por, respectivamente, $\phi = 0,2$ e $\tilde{K} = \tilde{I}$, onde \tilde{I} é um tensor identidade 2×2 . Já as saturações irreduzíveis de água e residual de óleo são $S_{wi} = S_{or} = 0$. Além disso, a razão de mobilidade é $M = \mu_o/\mu_w = 1$ e o modelo permeabilidade relativa é dado pelo modelo de Brooks-Corey (HELMIG *et al.*, 1997), a saber:

$$k_{rw} = (S_w)^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}}; \quad k_{ro} = (1 - S_w)^2 \left(1 - S_w^{\frac{2+\zeta}{\zeta}} \right) \quad (86)$$

onde o parâmetro $\zeta = 2$ é fixado em 2. O escoamento é avaliado para o tempo de 1500 dias, com o número de Courant $C = 0,3$.

Na discretização do domínio empregou-se malhas do tipo estruturada com elementos quadrilaterais, com 8 a 1024 subdivisões na direção longitudinal para verificação de convergência dos resultados em relação a solução semi-analítica de Weldge obtida em Aziz e Settari (1979).

5.1.1 Resultados do experimento

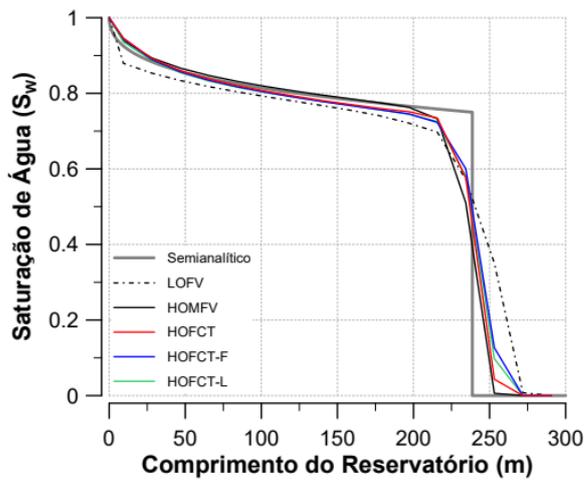
As curvas de saturação versus comprimento do reservatório para análise dos resultados foram obtidas experimentalmente. Pode-se notar que mesmo diante da malha mais grosseira com somente 16 subdivisões ao longo do eixo x, nenhum dos métodos utilizados apresentou algum tipo de oscilação espúria. Deve-se destacar também que todos os métodos convergem para a solução analítica à medida em que se refina a malha computacional.

Observando os resultados fica claro evidenciar que a utilização dos métodos de ordem mais alta promoveram uma melhoria significativa na acurácia em comparação ao método de primeira ordem. O custo benefício da utilização destes métodos é extremamente positivo uma vez que o aumento no custo computacional é relativamente baixo e o incremento na acurácia é consideravelmente significativo (LYRA, 1994).

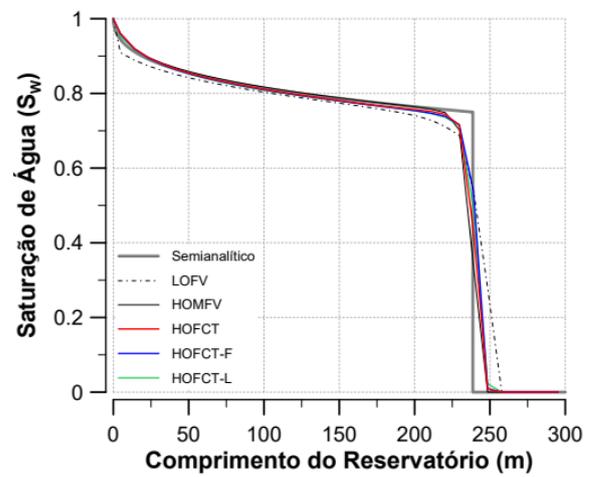
No resultado para a malha mais refinada foi aplicado um zoom com o objetivo de obter uma visualização mais detalhada do desempenho dos métodos na região próxima ao choque de saturação. Nota-se mais uma vez que todos os métodos de alta ordem apresentaram melhor resolução que o método de ordem mais baixa e, além disso, o HOFCT teve um comportamento bem similar ao HOMFV.

Figura 12 – Curva saturação–comprimento das análises semi-analítica e numérica

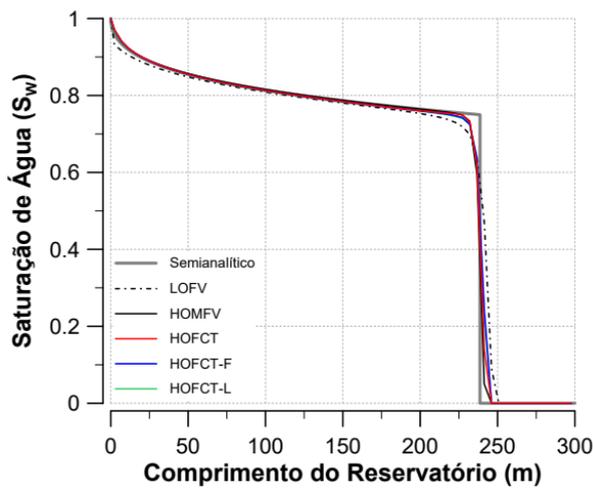
(a) Malha 16



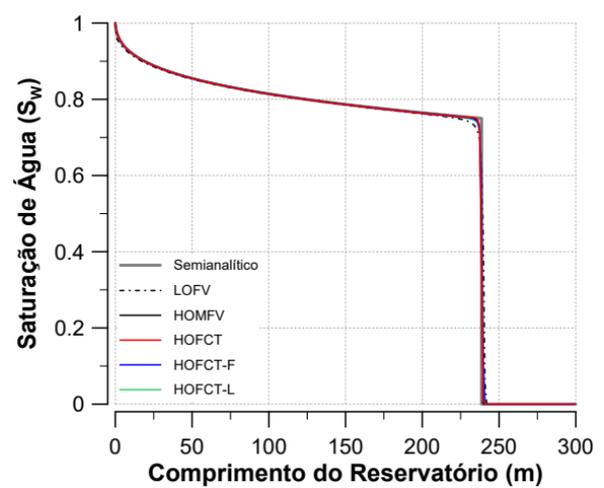
(b) Malha 32



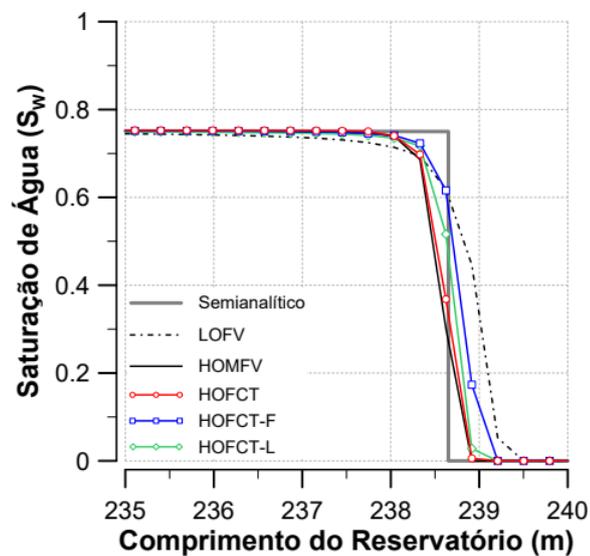
(c) Malha 64



(d) Malha 256



(e) Malha 1024 – Zoom na região de choque



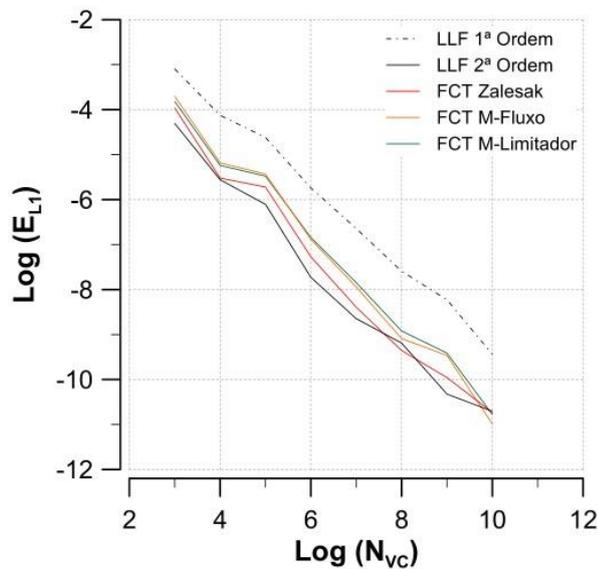
Fonte: O Autor (2023)

Os erros são calculados através da norma L_1 cuja expressão é definida a seguir:

$$E_{L_1}^{S_w} = \frac{\sum_{i=1}^N |S_w(x) - \bar{S}_w(x)| \Omega_i}{\sum_{i=1}^N \Omega_i} \quad (87)$$

onde $S_w(x)$ e $\bar{S}_w(x)$ são os valores semi-analítico e numérico, respectivamente, da saturação de água na posição x do reservatório. A figura 13 apresenta os erros obtidos com a norma L_1 para diferentes densidades de malha adotadas, e as aproximações de 1ª a 2ª ordem são comparadas para diferentes abordagens.

Figura 13 – Taxas de convergência das soluções numéricas



Fonte: O Autor (2023)

O problema de Buckley-Leverett é caracterizado por uma descontinuidade na solução, o que pode degradar a taxa de convergência nominal esperada para cada ordem de aproximação espacial (BASTIAN; HELMIG, 1999) (BASTIAN, 2002). Isso significa que, mesmo que se espere que a solução convirja para um valor específico com a utilização de uma determinada ordem de aproximação, essa taxa pode ser comprometida devido à natureza do problema em questão.

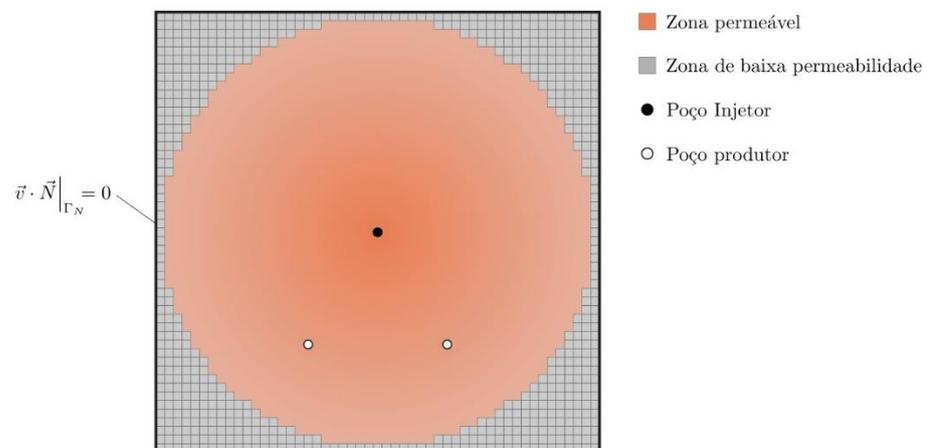
Observando os gráficos da figura 13 pode-se notar que, em geral, os erros diminuem com o refinamento da malha. No texto em questão, o parâmetro de

avaliação de desempenho entre as ordens de aproximação é o valor do erro na norma adotada obtido com as várias densidades de malha utilizadas. É importante ressaltar que todas as aproximações de alta ordem produzem resultados mais acurados do que os obtidos com a aproximação de 1ª ordem.

5.2 PROBLEMA SIMÉTRICO DE TRÊS POÇOS

O problema simétrico de três poços é obtido de Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011). O experimento consiste no escoamento bifásico e imiscível ao longo de um meio isotrópico cuja porosidade é unitária. Na Figura (15) observa-se de forma esquemática a geometria do reservatório de dimensões $[-0,5; 0,5]^2$, inicialmente saturado por óleo, com um poço injetor no centro do domínio e dois produtores em $(x, y) = [\pm 0,3 \cos(\pi/6), -0,3 \sin(\pi/6)]$. Condição de contorno de fluxo nulo é imposta em todo o contorno, vazão unitária é prescrita no poço injetor e pressão nula é prescrita nos poços injetores.

Figura 14 – Representação do Reservatório



Fonte: Adaptado de Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011)

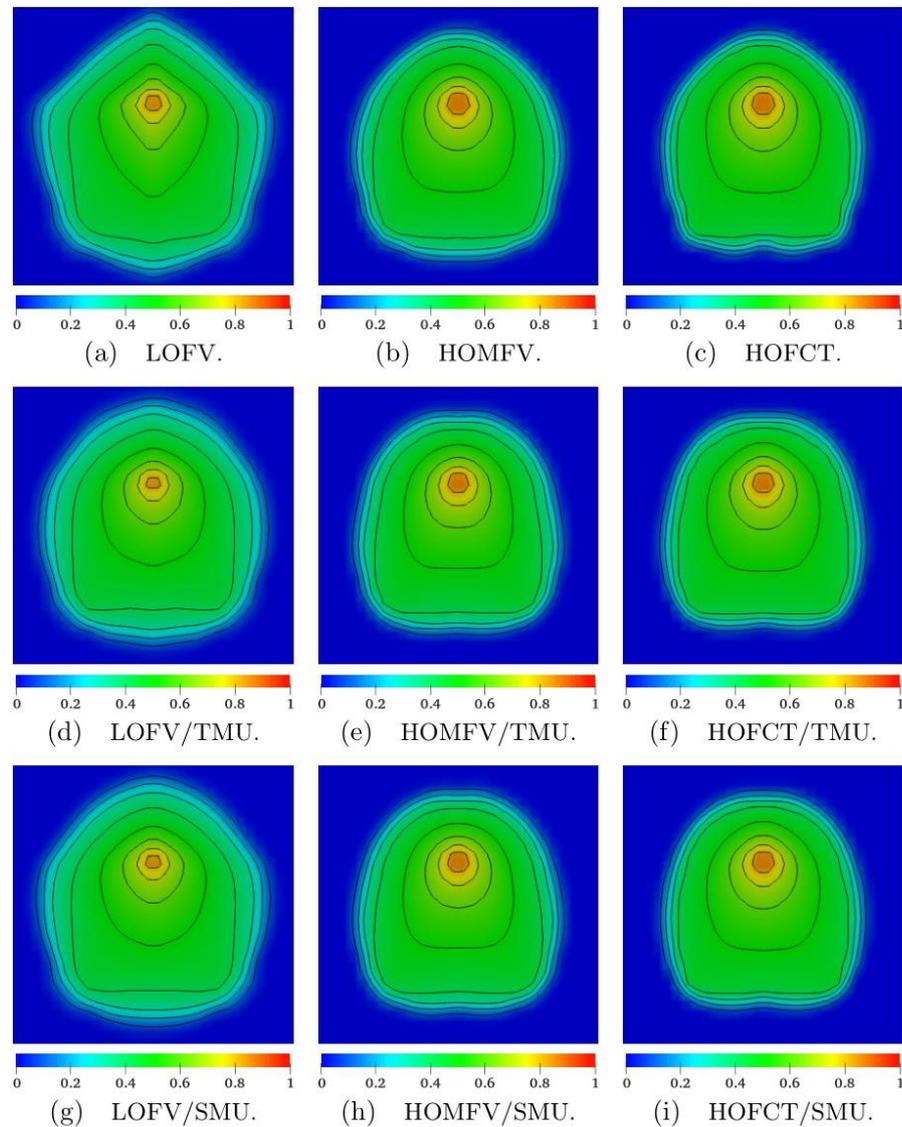
1. Deve-se destacar ainda que a razão de viscosidade entre as duas fases equivale a 100.

A frente de saturação de água idealmente deve ser a mesma independentemente do ângulo de rotação da malha computacional, uma vez que a localização dos poços é simétrica. Ademais, é esperado que a curva de corte de água seja exatamente igual para ambos os poços produtores, de modo que qualquer diferença entre essas curvas prova a ocorrência do efeito de orientação de malha.

5.2.1 Resultados do experimento

No primeiro momento, obtiveram-se os campos de saturação de água em domínio computacional sem rotações para diferentes estratégias de aproximação, conforme pode ser visto na Figura (16).

Figura 16 – Saturação de água em domínio sem rotação ($\theta = 0^\circ$) para diferentes estratégias de aproximação e esquemas de FCT



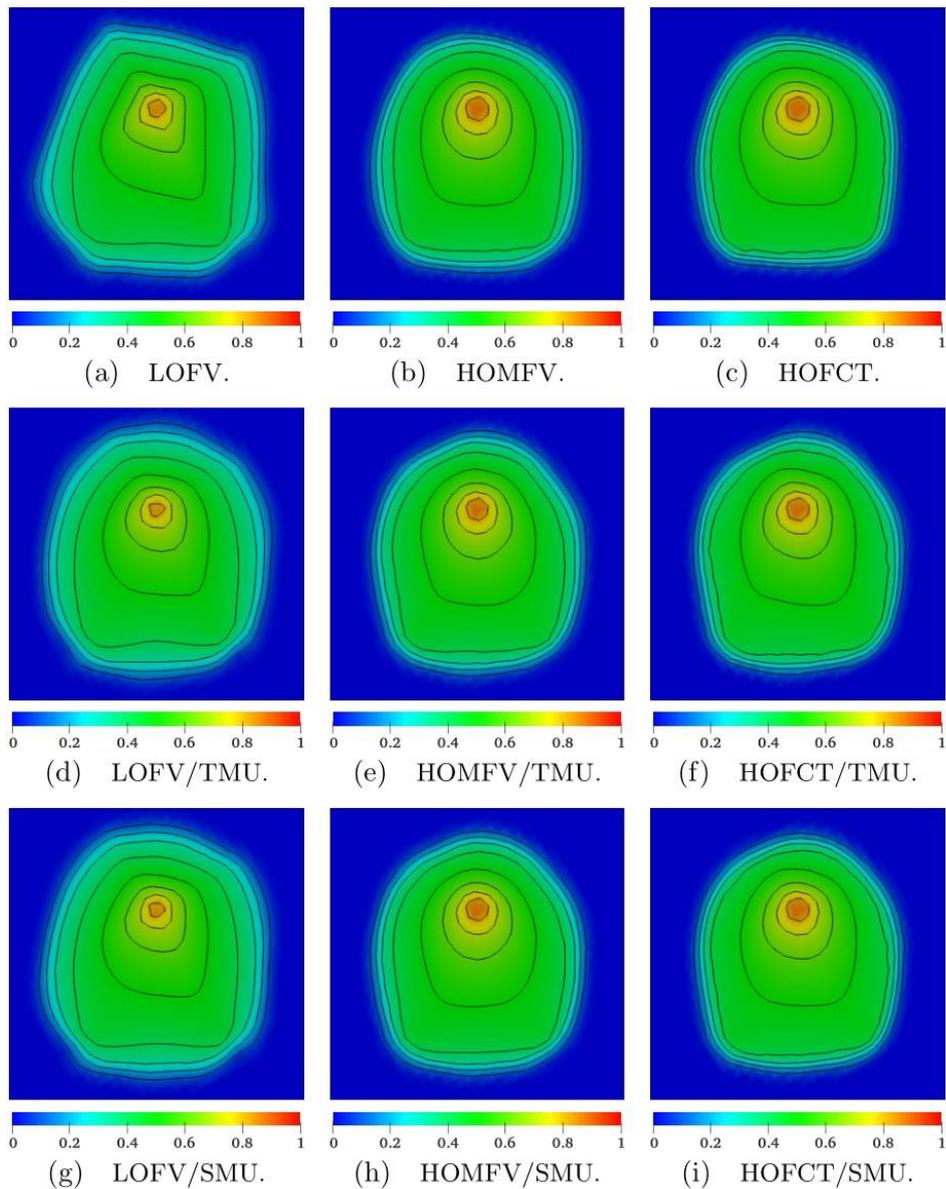
Fonte: O Autor (2023)

Como observa-se os métodos de alta ordem apresentaram difusão numérica bem menor quando comparados aos métodos de baixa ordem. Além disso, nota-se que os perfis de saturação obtidos através do método HOFCT bem como após aplicação das funções de controle TMU e SMU apresentam um comportamento bem parecido com os perfis oriundos do método HOMFV.

Em seguida, obtiveram-se os campos de saturação de água em domínio computacional rotacionada ($\theta = 30^\circ$), com o objetivo de verificar a existência do efeito de orientação de malha, conforme pode ser visto na Figura (17).

Como solução de referência, visando a comparação de resultados, utilizou-se a mesma que (SOUZA *et al.*, 2018). Para isso fez-se uso de uma malha triangular não estruturada contendo 37966 volumes de controle, com MPFA-O para resolver a equação de pressão e *Upwind* padrão de primeira ordem para resolver a equação de saturação.

Figura 17 – Saturação de água em domínio com rotação ($\theta = 30^\circ$) para diferentes estratégias de aproximação e esquemas de FCT



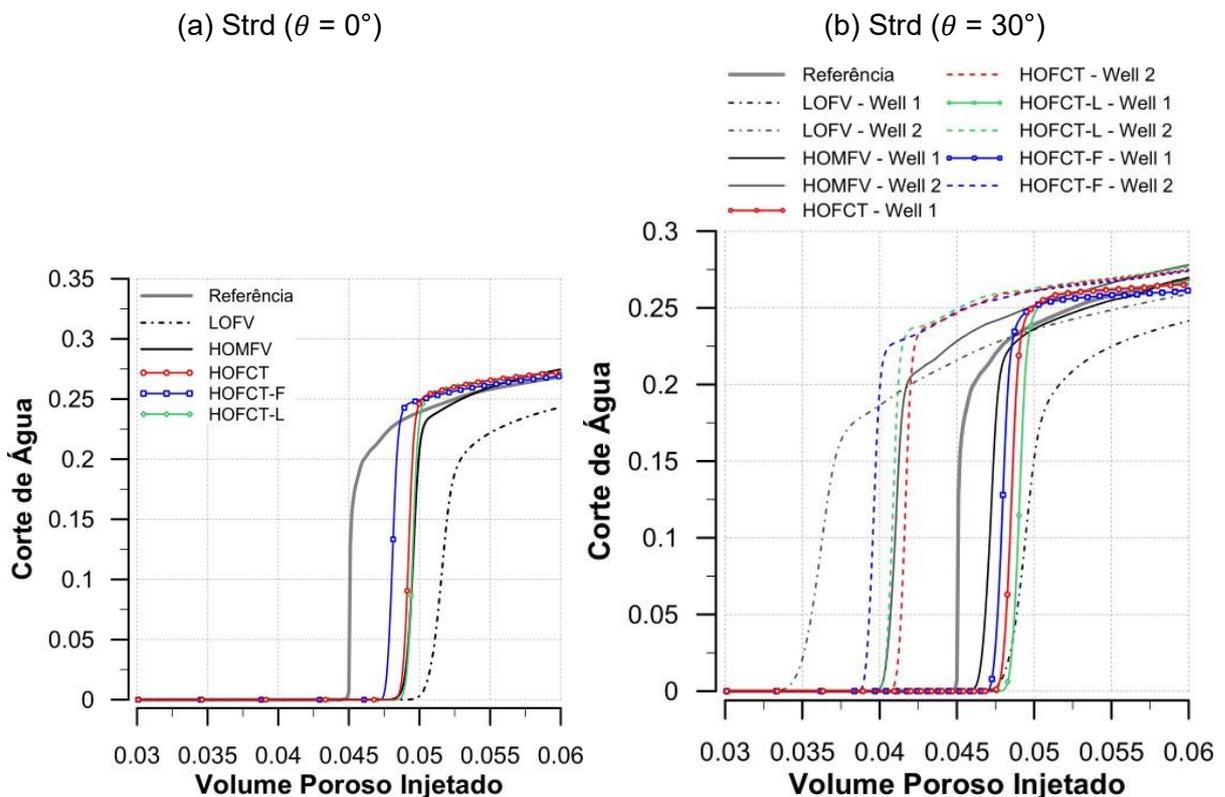
Fonte: O Autor (2023)

Assim como visto na figura 16, na figura 17, pode-se notar que todas as variações de métodos de alta ordem apresentaram melhor resolução que as

soluções de baixa ordem. Além disso, nota-se que quando utilizadas aproximações de 2ª ordem os campos de saturação de água apresentam um menor “espalhamento” em comparação aos perfis de saturação obtidos através de formulações de 1ª ordem. Analisando as figuras anteriores é possível verificar que quando empregadas aproximações verdadeiramente multidimensionais há uma redução considerável no GOE. A diminuição do efeito de orientação de malha fica ainda mais evidenciada para o método de baixa ordem após aplicação das funções de controle TMU ou SMU.

Após análise dos perfis de saturação, neste momento, são analisadas as curvas de produção de água. Deve-se destacar que as curvas de produção em cada um dos poços deveriam ser idênticas, dessa maneira quanto mais sensível a formulação é ao GOE, maior diferença entre as curvas é observada.

Figura 18 – Corte de água para a aproximação Strd, com domínio sem rotação e rotacionado em $\theta = 30^\circ$



Fonte: O Autor (2023)

Figura 19 – Corte de água para a aproximação TMU, com domínio sem rotação e rotacionado em $\theta = 30^\circ$

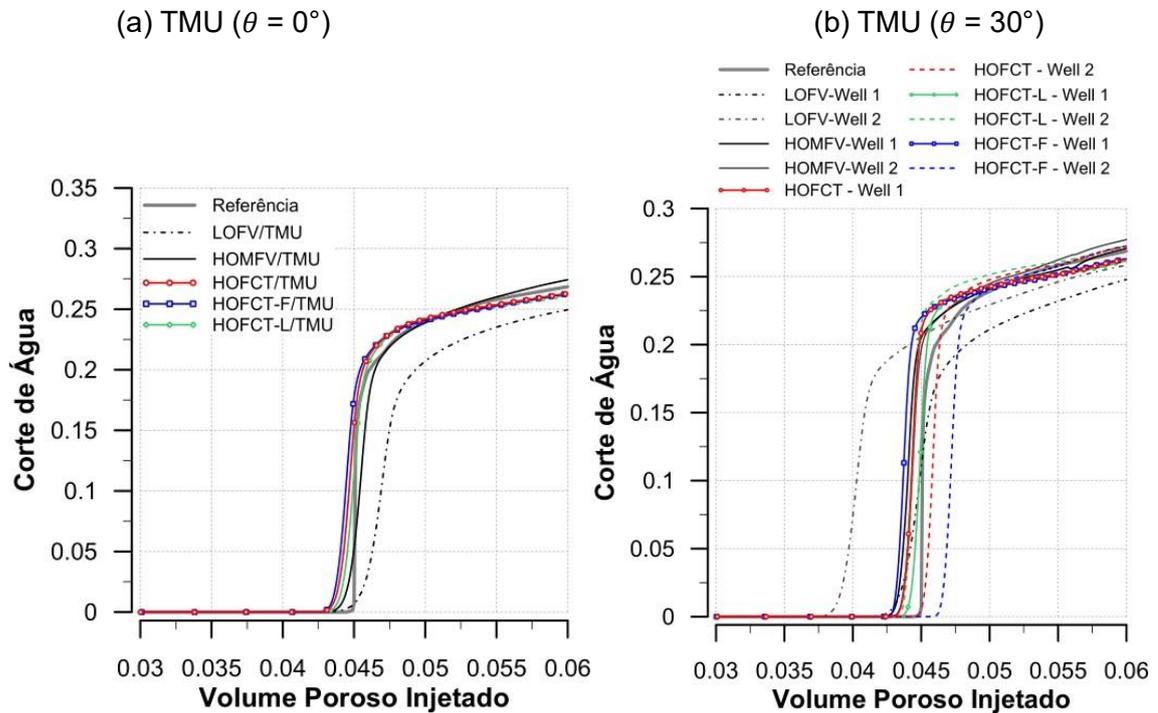
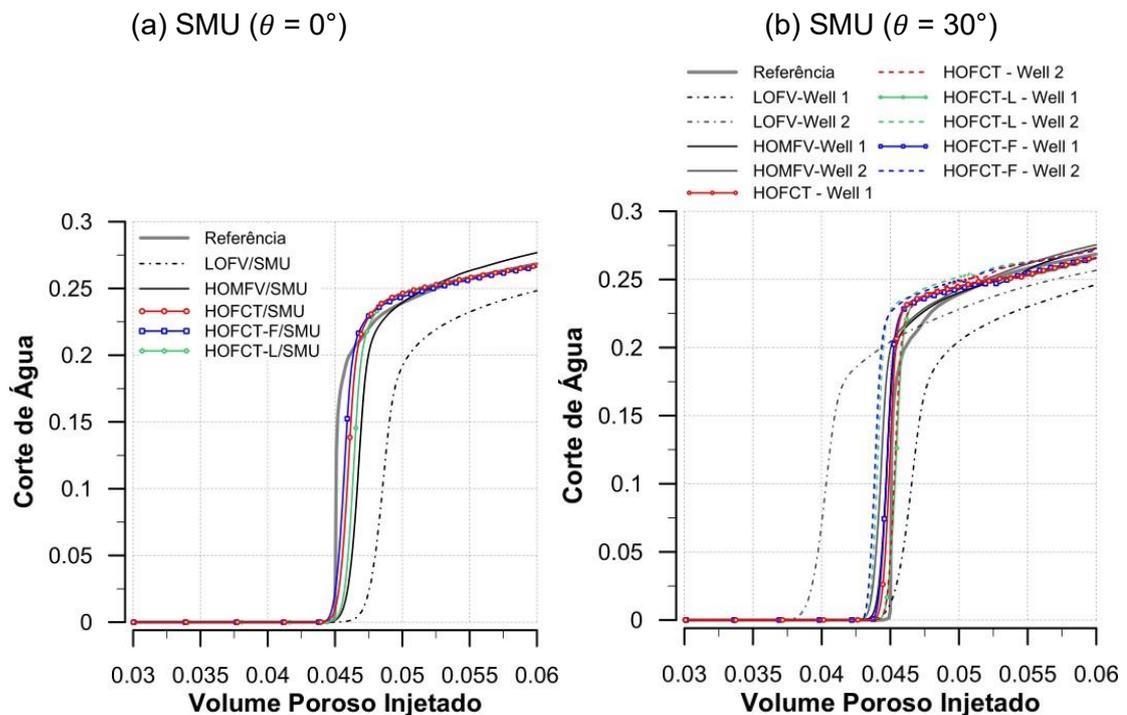


Figura 20 – Corte de água para a aproximação SMU, com domínio sem rotação e rotacionado em $\theta = 30^\circ$



Pode-se notar que devido à assimetria do escoamento tendo como referência a orientação da malha computacional foi possível perceber uma diferença em relação as curvas de corte de água dos dois poços produtores. Esse comportamento é não físico isso pois o meio além de ser homogêneo é isotrópico. Além disso, deve-se mencionar que o comportamento observado é ainda mais perceptível para formulações numéricas sujeitas ao efeito de orientação de malha.

Nota-se que para as malhas não rotacionadas ($\theta = 0^\circ$) o HOFCT e suas variações obtiveram os melhores resultados tendo em vista a curva de referência. Percebe-se também que o método LOFV teve o pior desempenho. Avaliando a malha rotacionada ($\theta = 30^\circ$) mais uma vez se observa que os métodos de alta ordem tiveram soluções mais acuradas quando comparados ao método de baixa ordem novamente considerando a solução de referência. Além disso, percebe-se que a utilização de formulações multidimensionais ocasionou a redução do GOE. Destaca-se a inserção das funções de controle TMU e principalmente SMU gerando elevada redução no efeito de orientação de malha para todos os métodos.

5.3 ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UM RESERVATÓRIO ALTAMENTE HETEROGÊNEO

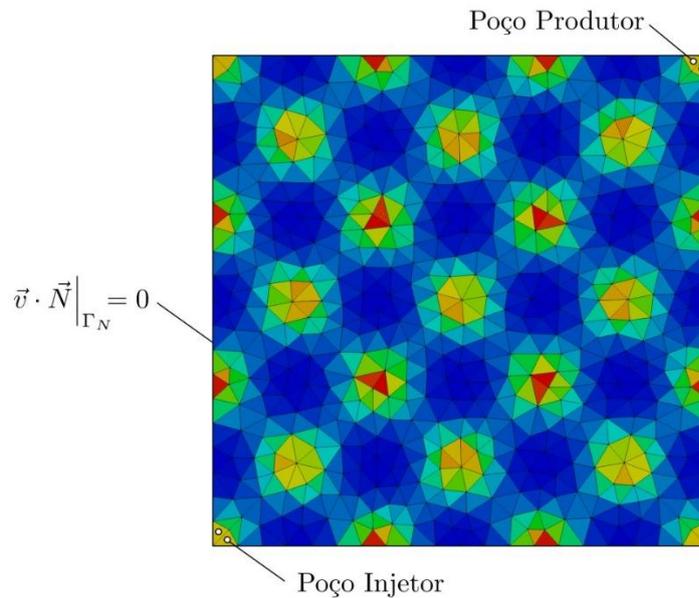
Esse problema consiste em uma adaptação adimensionalizada de um 1/4 five-spot em que o domínio consiste em que o domínio consiste em um reservatório isotrópico altamente heterogêneo cuja porosidade é irrelevante. A razão de mobilidade é dada por: $M = \mu_o/\mu_w = 4$, além disso adotamos o modelo Brooks-Corey para avaliar a permeabilidade relativa portanto $k_{irw} = S_w^2$ e $k_{ro} = (1 - S_w)^2$. A saturação irreduzível de água e a saturação residual de óleo são iguais a zero. Além disso, a saturação de água no poço injetor é um e a pressão do poço produtor é zero cujas localizações são apresentadas na Figura 6. O tensor de permeabilidade é definido como:

$$K(x,y) = k(x,y)I \quad \text{em que} \quad k(x,y) = e^{\sqrt{4} \cos(6\pi x) \cos(6\pi y)} \quad (88)$$

A Figura 21 apresenta a malha não estruturada triangular que contém 1024 volumes de controle e foi utilizada nas simulações computacionais. Nesta figura, pode-se notar também a condição de contorno, bem como as localizações dos poços e o campo de permeabilidade que adotados nas análises numéricas. A

simulação é realizada para os tempos de 0,24 e 0,4 PVI, com número de Courant = 0,1 para todos os casos.

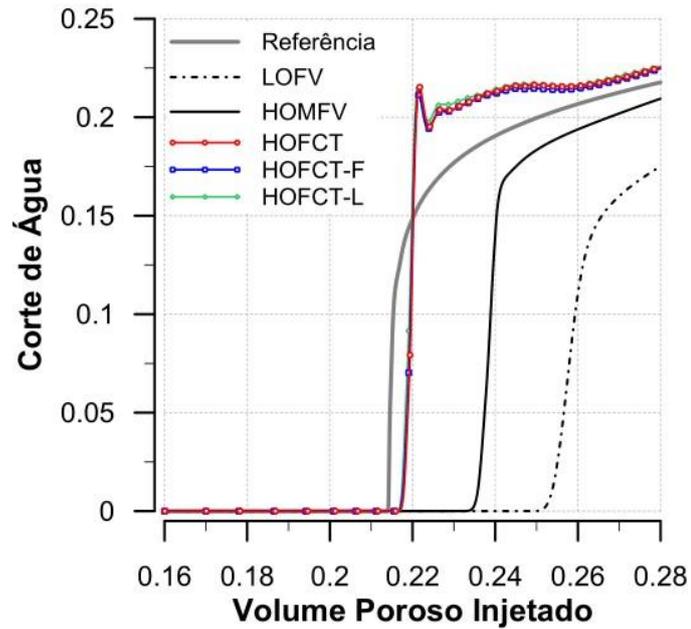
Figura 21 – Campo de permeabilidade e localização dos poços



Fonte: O Autor (2023)

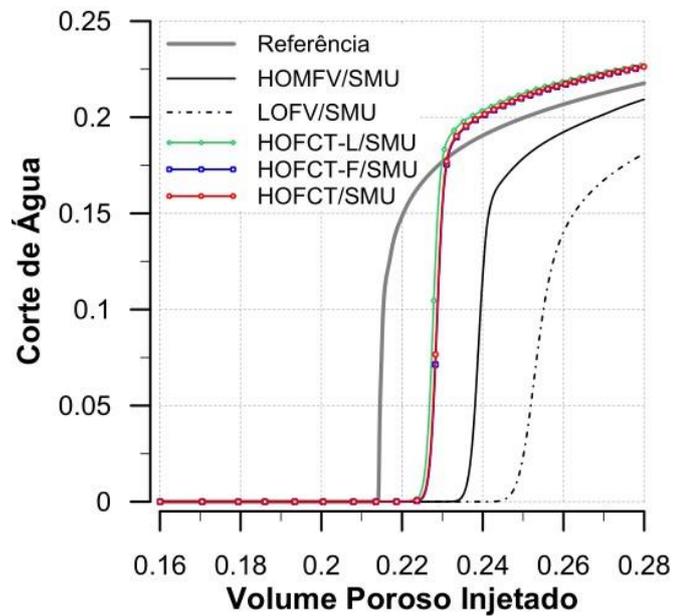
Inicialmente, avaliou-se uma solução de referência visando a comparação de resultados. Para isso utilizou-se uma malha triangular não estruturada contendo 67456 volumes de controle, com MPFA-H para resolver a equação de pressão e LOFV para 54 resolver a equação de saturação. Em seguida, avaliaram-se as curvas de corte de água obtidas com as formulações apresentadas neste trabalho, em contraste com a solução de referência, como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 22 – Curva de corte de água para a formulação padrão



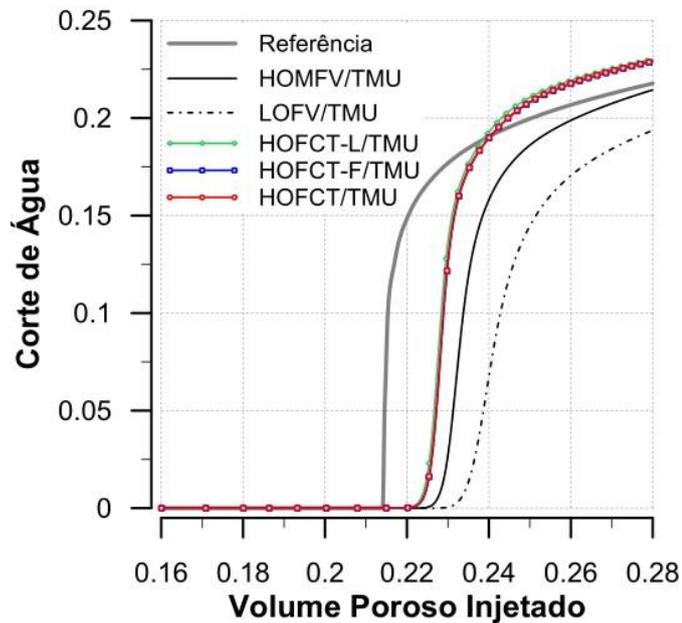
Fonte: O Autor (2023)

Figura 23 – Curva de corte de água para a formulação multidimensional com função de controle SMU



Fonte: O Autor (2023)

Figura 24 – Curva de corte de água para a formulação multidimensional com função de controle TMU



Observa-se que os métodos de alta ordem apresentaram resultados melhores quando comparados ao método de baixa ordem. Além disso, verifica-se que o HOFCT e as variações propostas neste trabalho obtiveram os melhores resultados para este problema, mesmo comparando com o HOMFV. Ademais, nota-se o aumento de acurácia para todos os métodos após utilização das estratégias SMU e TMU, destacando-se que para este problema a função de controle TMU gerou os melhores resultados. Em seguida, foram obtidos os perfis de saturação para cada um dos métodos em diferentes PVI's.

Figura 25 – Campo de Saturação de água obtido para 0.24 PVI (Solução de Referência)

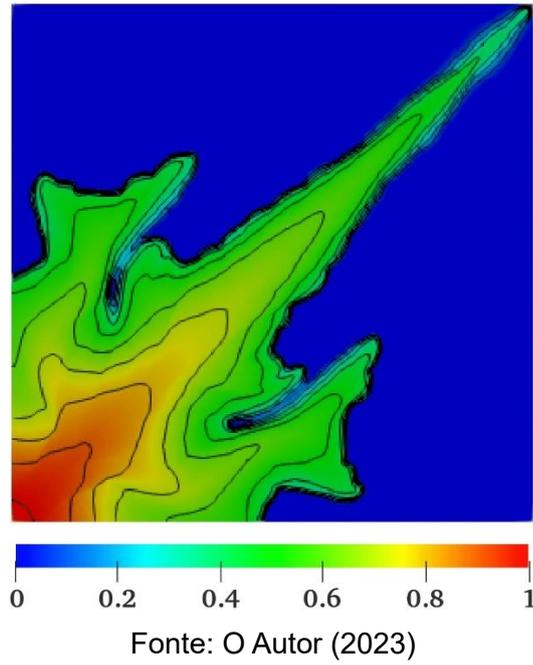


Figura 26 – Campo de Saturação de água obtido para 0.40 PVI (Solução de Referência)

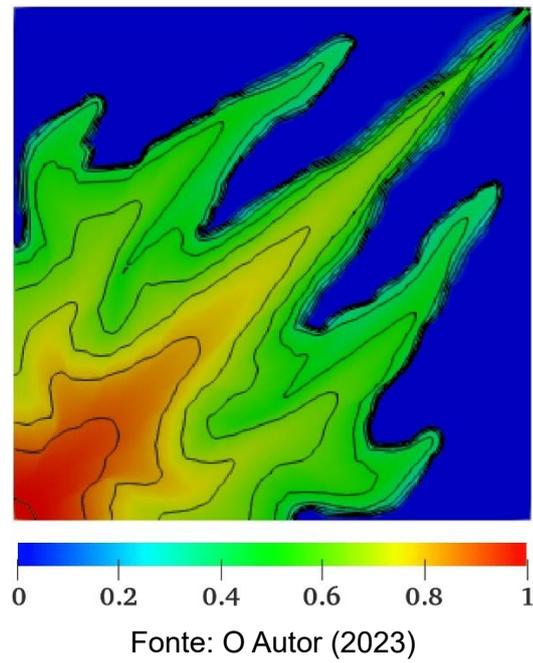
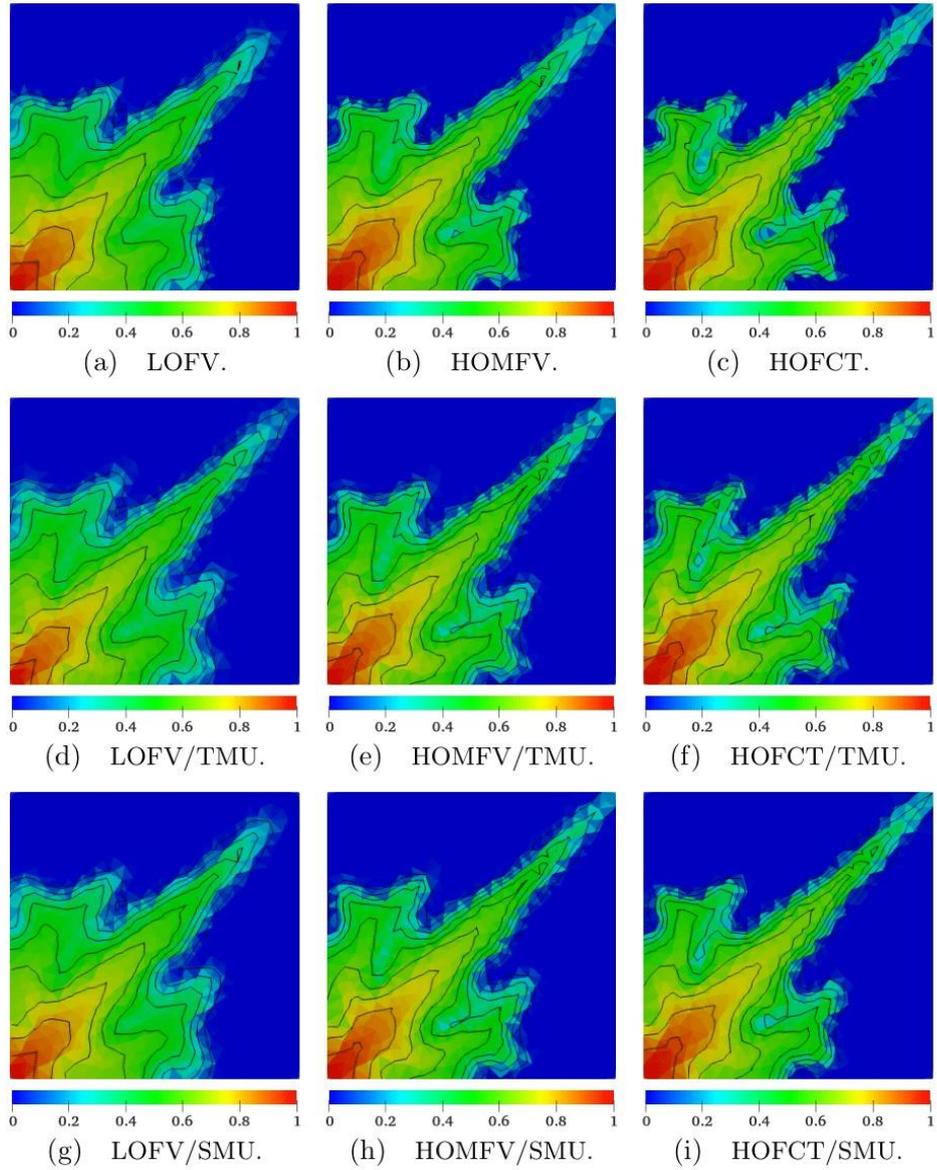
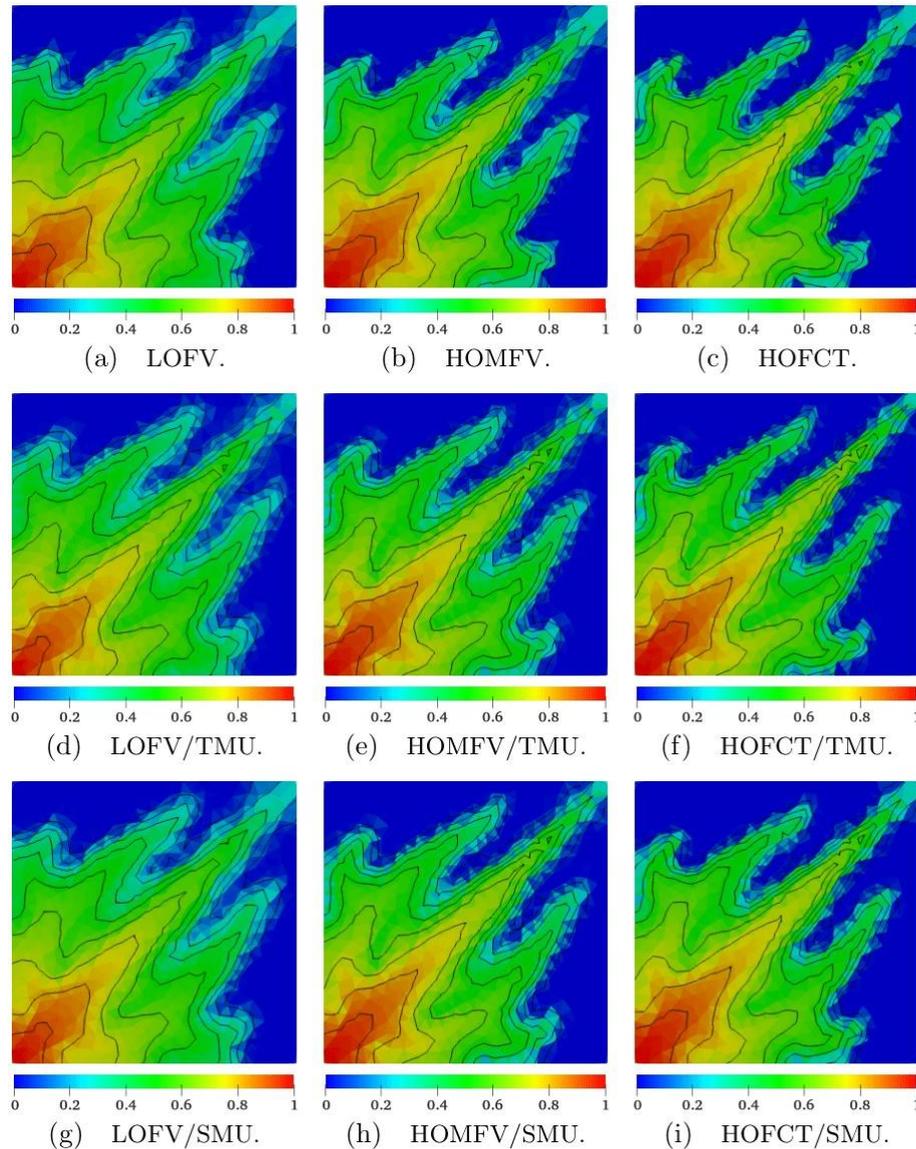


Figura 27 – Campo de Saturação de água obtido para 0.24 PVI



Fonte: O Autor (2023)

Figura 28 – Campo de Saturação de água obtido para 0.40 PVI



Fonte: O Autor (2023)

Em relação aos perfis de saturação, pode-se notar que todas as soluções incluem a formação dos "dedos viscosos". Segundo Chueh *et al.* (2010), quando uma fase com menor viscosidade (por exemplo, água) é injetada em um reservatório heterogêneo promovendo o deslocamento da fase de maior viscosidade (por exemplo, óleo), devido à heterogeneidade da distribuição do campo de permeabilidade, o fluido com mais mobilidade avança com maior facilidade para as zonas de alta permeabilidade formando "dedos de viscosidade". Além disso, destaca-se o menor espalhamento do campo de saturação no caso das soluções de alta ordem em relação às soluções de baixa ordem.

Além disso, analisando as figuras 27 e 28 pode-se notar também que em ambos os casos o método HOFCT clássico assim como após a inserção das funções de controle SMU e TMU capturaram com melhor resolução a solução de referência quando comparado aos demais métodos.

5.4 RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM UM TENSOR DE PERMEABILIDADE CHEIO E ANISOTRÓPICO

O problema atual foi proposto por Nikitin; Terekhov (2014) e posteriormente adaptado por Contreras *et al.* (2016). O exemplo consiste no deslocamento de óleo e água ao longo de um meio heterogêneo formado por uma região inclinada composta por camadas, conforme mostrado na Fig.29 (a). Este reservatório é composto por quatro regiões nas quais o tensor de permeabilidade descontínua é anisotrópico e é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (89)$$

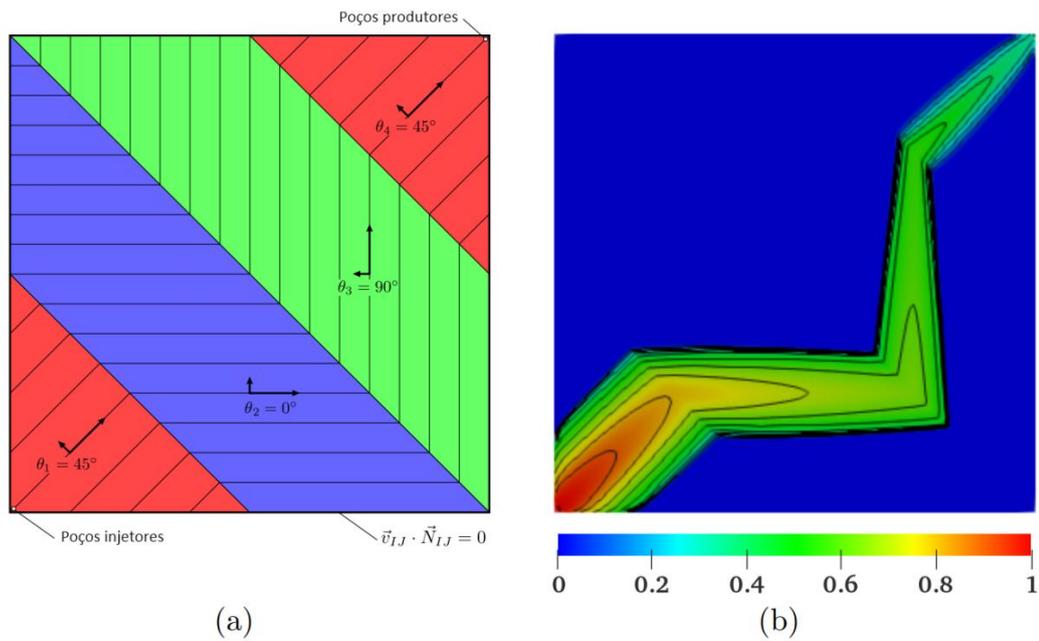
onde os ângulos de rotação $\theta = \{45^\circ; 0^\circ; 90^\circ; 45^\circ\}$ definem as camadas de permeabilidade partindo da região inferior esquerda até a região superior direita do domínio. Neste problema, tanto a saturação irreversível de água quanto a saturação residual de óleo são dadas iguais a zero. A permeabilidade relativa é dada pelo modelo de Brooks-Corey portanto $k_{irw} = S_w^2$ e $k_{ro} = (1 - S_w)^2$.

Para fins de comparação, utilizou-se uma solução de referência obtida através de uma malha quadrilateral uniforme com 65536 volumes de controle e o esquema padrão LOFV, como pode ser visto na Fig.29(b). Em seguida, utilizou-se uma malha quadrilateral uniforme com 4096 volumes de controle para obter os resultados dos experimentos numéricos. Por fim, as simulações foram realizadas para um tempo de 0,4 PVI e um número de Courant $\mathcal{C} = 0,3$ para todos os casos.

Figura 29 – Reservatório heterogêneo com um tensor de permeabilidade cheio e anisotrópico:

(a) Domínio para um problema de 1/4 de 5 poços

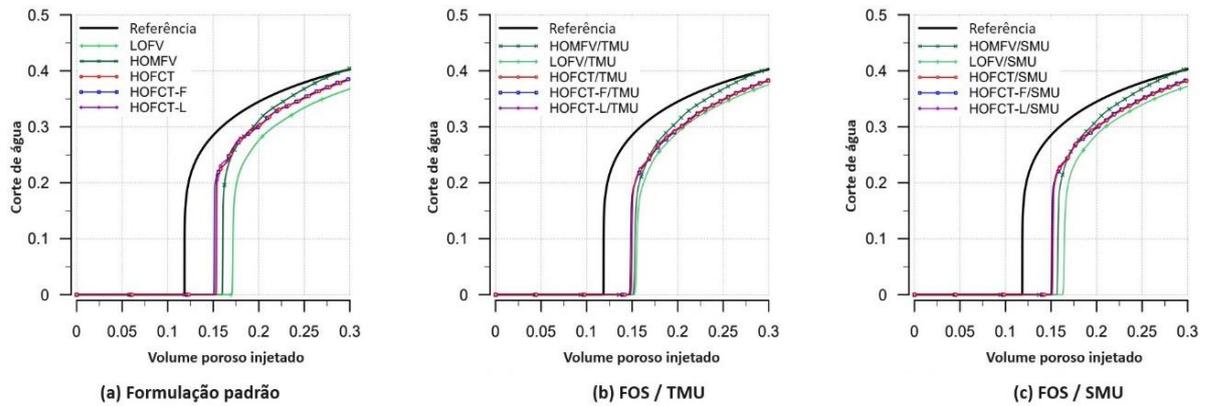
(b) Campo de saturação de água da solução de referência para o tempo de 0,15 PVI



Fonte: O Autor (2023)

Na Figura 30, apresenta-se as curvas de corte de água para as formulações apresentadas neste trabalho. Como pode ser observado, há uma clara melhoria dos esquemas quando utilizados métodos de ordem mais alta. Além disso, não houve diferença significativa entre os métodos unidimensionais e multidimensionais em relação ao tempo de *breakthrough*. Além disso, ao comparar os métodos TMU e SMU, praticamente não há diferença entre as soluções.

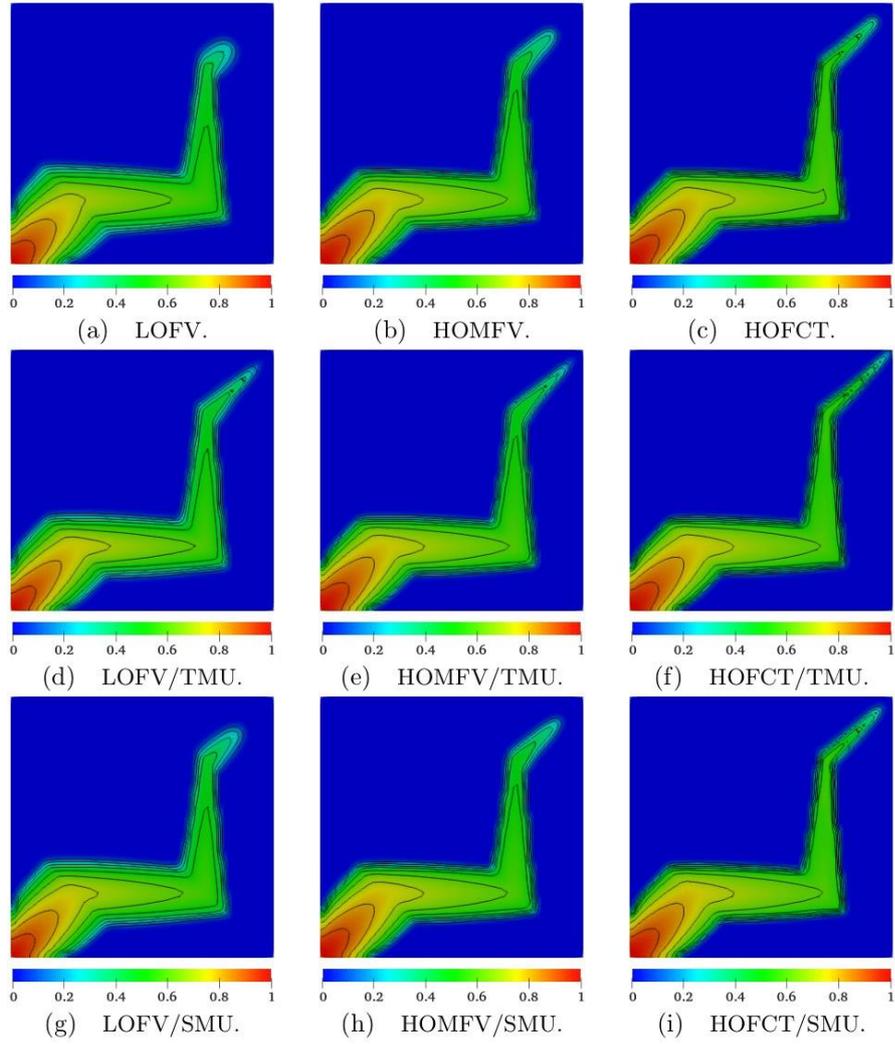
Figura 30 – Curvas de corte de água obtidas com os métodos LOFV, HOMFV, HOFCT, HOFCT-F e HOFCT-L



Fonte: O Autor (2023)

Na Figura 31, apresenta-se os perfis de saturação de água para os diferentes métodos em 0,15 PVI. O método HOFCT com FOS/TMU produziu uma menor difusão em comparação com os resultados obtidos pelos métodos LOFV e HOMFV, especialmente na camada de permeabilidade superior próxima ao poço de produção.

Figura 31 – Campo de saturação de água obtido para 0,15 PVI.



Fonte: O Autor (2023)

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foi proposta uma formulação do Método de Volumes Finitos centrado nas células para a discretização das equações que descrevem o fluxo bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. O modelo adotado aborda o problema por meio de um sistema de equações segregado, envolvendo uma equação de pressão e uma de saturação acopladas por meio da velocidade de Darcy. Para a solução sequencial dessas equações, foi utilizada a estratégia IMPES.

No que diz respeito à discretização da equação de pressão, empregou-se o método MPFA-H, que faz parte de um conjunto de formulações robustas (MPFA) desenvolvidas para lidar com tensores de permeabilidade heterogêneos e anisotrópicos, bem como malhas arbitrárias. Essa formulação foi comparada à abordagem clássica do Método de Volumes Finitos (TPFA), amplamente utilizada em simuladores da indústria petrolífera. Alguns exemplos como modelo foram utilizados para evidenciar o potencial desses métodos na solução de problemas que envolvem malhas estruturadas e não-estruturadas, bem como meios altamente heterogêneos com razão de mobilidade moderada, características frequentemente encontradas em reservatórios de petróleo.

A equação de transporte (saturação) foi discretizada utilizando duas abordagens. Na abordagem mais convencional, em que o fluxo numérico não segue a orientação da onda, foram empregadas aproximações de 1ª e 2ª ordem para o erro de truncamento. Para as aproximações de ordem superior, foi adotada a estratégia FCT. Conforme esperado, ao resolver numericamente o modelo de Buckley-Leverett com características unidimensionais (consulte a seção 5.3.1), não se alcançaram as taxas de convergência nominais das aproximações utilizadas devido à descontinuidade inerente à solução desse problema. No entanto, como reconhecido na literatura, (BASTIAN, 2002), os erros absolutos obtidos com cada ordem de aproximação são um indicador do desempenho das mesmas. Conseqüentemente, verificou-se que todas as aproximações de ordem superior apresentaram desempenho superior à aproximação tradicional de 1ª ordem, como era esperado.

Ademais, é importante ressaltar a notável melhoria nos resultados obtidos ao empregar formulações de ordem superior para todos os problemas avaliados. Além disso, observou-se uma redução significativa do GOE ao utilizar a estratégia FCT,

bem como ao incorporar estratégias como o SMU e o TMU (KOZDON; MALLISON; GERRITSEN, 2011; HURTADO, 2005; SOUZA *et al.*, 2018).

A extensão do presente trabalho pode ser visualizada em várias frentes. Os resultados positivos alcançados por meio das formulações numéricas propostas devem servir de incentivo para a condução de estudos adicionais com o intuito de ampliar a aplicação dessas formulações para problemas mais complexos. Dessa forma, pode-se mencionar as seguintes extensões imediatas deste trabalho:

- a) No que se refere à equação de pressão, novos métodos, com estratégias não lineares, podem ser usados para resolver o problema elíptico conforme visto em Contreras (2017);
- b) Extensão do simulador desenvolvido para geometrias tridimensionais;
- c) Aumento de complexidade do modelo físico através da introdução dos termos de gravidade e capilaridade;
- d) Utilizar formulação Sequencial Implícita: formulação segregada em que, assim como a equação de pressão, a equação de saturação também é resolvida de maneira implícita, permitindo a utilização de intervalos de tempo maiores;
- e) Utilizar formulação Totalmente Implícita: formulação em que as equações de transporte são rearranjadas de maneira que a pressão e a saturação são incógnitas simultâneas das mesmas equações.

REFERÊNCIAS

AAVATSMARK, I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. **Computational Geosciences**, Springer, v. 6, n. 3, p. 405–432, 2002.

AAVATSMARK, I. *et al.* Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: Derivation of the methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 19, n. 5, p. 1700–1716, 1998.

AZIZ, K.; SETTARI, A. **Petroleum reservoir simulation**. London: Applied Science Publishers, 1979. ISBN 0853347875.

BARTH, T.; JESPERSEN, D. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. In: **27th Aerospace sciences meeting**. [S.l.: s.n.], 1989. p. 366.

BASTIAN, P. Higher order discontinuous galerkin methods for flow and transport in porous media. **Challenges in Scientific Computing**, v. 35, p. 1–22, 2002.

BASTIAN, P. Higher order discontinuous galerkin methods for flow and transport in porous media. In: **Challenges in Scientific Computing-CISC 2002**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. p. 1–22. ISBN 978-3-642-19014-8.

BASTIAN, P.; HELMIG, R. Efficient fully-coupled solution techniques for two-phase flow in porous media: Parallel multigrid solution and large scale computations. **Advances in Water Resources**, v. 23, p. 199–216, 1999.

BORIS, J. P.; BOOK, D. L. Flux-corrected transport. i. shasta, a fluid transport algorithm that works. **Journal of Computational physics**, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 38–69, 1973

BRAND, C.; HEINEMANN, J.; AZIZ, K. The grid orientation effect in reservoir simulation. In: ONEPETRO. SPE **Symposium on Reservoir Simulation**. [S.l.], 1991.

CARVALHO, D. K. E. d. **Uma formulação do método dos volumes finitos com estrutura de dados por aresta para a simulação de escoamentos em meios porosos**. Tese (Tese (Doutorado)) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

CHATTERJEE, K.; SCHUNK, R. W. A multiion, flux-corrected transport based hydrodynamic model for the plasmasphere refilling problem. **J. Geophys. Res. Space Phys.**, American Geophysical Union (AGU), v. 125, n. 1, jan 2020.

CHEN, Z. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media**. Philadelphia: SIAM, 2006. ISBN 0898716063; 9780898716061.

CHEN, Z. **Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematic, 2007. ISBN 0898716721.

CHEN, Z.; HUAN, G.; LI, B. An improved impes method for two-phase flow in porous media. **Transport in porous media**, Springer, v. 54, n. 3, p. 361–376, 2004.

CHUEH, C. *et al.* Multi-level adaptive simulation of transient two-phase flow in heterogeneous porous media. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 39, n. 9, p. 1585–1596, 2010.

CMG. **COMPUTER MODELING GROUP Ltd. IMEX, User's Guide**. [S.I.], 2006.

COLELLA, P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**, v. 87, n. 1, p. 171–200, 1990. ISSN 0021-9991.

CONTRERAS, F. *et al.* A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016.

CONTRERAS, F. R.; LYRA, P. R.; CARVALHO, D. K. de. A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (mpfa-ql) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 70, p. 659–676, 2019. ISSN 0307-904X.

CONTRERAS, F. R. L. **Um Método de volumes finitos centrado na célula para a simulação de escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópico**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2012.

CONTRERAS, F. R. L. **Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2017.

CRUMPTON, P.; SHAW, G.; WARE, A. Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. **Journal of Computational Physics**, v. 116, n. 2, p. 343–358, 1995. ISSN 0021-9991.

DAKE, L. P. **The Practice of Reservoir Engineering (Revised Edition)**. Revised. [S.I.]: Elsevier Science, 2001. (Developments in Petroleum Science 36). ISBN 9780080574431.

DATE, A. W. **Introduction to Computational Fluid Dynamics**. [S.I.]: Cambridge, 2005.

Higher Dimensional Wave-Oriented Upwind Schemes With Minimal Cross-Wind Diffusion, All Days de SPE Reservoir Simulation Conference, (SPE Reservoir Simulation Conference, All Days). SPE-79689-MS.

EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. **Computational geosciences**, Springer, v. 2, n. 4, p. 259–290, 1998.

EIGESTAD, G. T.; AAVASTMARK, I.; ESPEDAL, M. Symmetry and m-matrix issues for the o-method unstructured grid. **Computational Geosciences**, v. 6, n. 4, p. 381–404, 2002.

ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J.; KING, G. **Basic Applied Reservoir Simulation**. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 2001. (SPE textbook series). ISBN 9781555630898.

EWING, R. E. **The mathematics of reservoir simulation**. Philadelphia: SIAM, 1983.

FANCHI, J. R. **Principles of Applied Reservoir Simulation**. Boston: Gulf Publishing Company, 2001.

FOX, R.; MCDONALD, A.; PRITCHARD, P. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. ISBN 9788521614685.

GAO, Z.; WU, J. A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2d and 3d meshes. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 250, p. 308–331, 2013.

GAO, Z.-M.; WU, J.-M. A linearity-preserving cell-centered scheme for the anisotropic diffusion equations. In: **Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects**. Cham: Springer, 2014. p. 293–301. ISBN 978-3-319-05684-5.

HELMIG, R. *et al.* **Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems**. Berlin: Springer, 1997. v. 1.

HIRSCH, C. **Numerical computation of internal and external flows**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990. v. 2.

HURTADO, F. S.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. da. Application of flux-corrected transport to an unstructured-grid finite-volume formulation for reservoir simulation. In: **Proceedings of the XXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering CMNE/CILAMCE**. [S.l.: s.n.], 2007.

HURTADO, F. S. V. **Uma formulação de Volumes Finitos Baseada em Elementos para a simulação do Deslocamento Bifásico Imiscível em Meio Poroso**. Dissertação (Tese (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

ISLAM, M. *et al.* **Advanced Petroleum Reservoir Simulation**. Beverly: Scrivener Publishing, 2016. ISBN 9781119038511.

JHA, A.; AHMED, N. Analysis of flux corrected transport schemes for evolutionary convection-diffusion-reaction equations. 03 2021.

KEILEGAVLEN, E.; AAVATSMARK, I. Monotonicity for mpfa methods on triangular grids. **Computational Geosciences**, v. 15, n. 4, p. 3–16, 2011.

KEILEGAVLEN, E.; KOZDON, J. E.; MALLISON, B. T. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport on general grids. **Computational Geosciences**, Springer, v. 16, n. 4, p. 1021–1042, 2012.

KOZDON, J. E.; MALLISON, B. T.; GERRITSEN, M. G. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport in porous media. **Computational Geosciences**, Springer, v. 15, n. 3, p. 399–419, 2011.

KUZMIN, D.; LÖHNER, R.; TUREK, S. **Flux-corrected transport: principles, algorithms, and applications**. [S.l.]: Springer, 2012.

KUZMIN, D.; MÖLLER, M.; TUREK, S. **Multidimensional fem-fct schemes for arbitrary time stepping**. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 42, n. 3, p. 265–295, 2003. 67

LAMINE, S.; EDWARDS, M. G. Multidimensional upwind convection schemes for flow in porous media on structured and unstructured quadrilateral grids. **Journal of computational and applied mathematics**, Elsevier, v. 234, n. 7, p. 2106–2117, 2010.

LAMINE, S.; EDWARDS, M. G. Higher order cell-based multidimensional upwind schemes for flow in porous media on unstructured grids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 259, p. 103–122, 2013. ISSN 0045-7825.

LEVEQUE, R. J. **Numerical methods for conservation laws**. 2. ed. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 1992. (Lectures in Mathematics). ISBN 978-3-7643-2723-1.

LIPNIKOV, K. *et al.* Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 492–512, 2007.

LYRA, P. R. M. **Unstructured Grid Adaptive Algorithms for Fluid Dynamics and Heat Conduction**. Tese (Tese (Doutorado)) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, University of Wales, Swansea, 1994.

MOOG, G. J. E. A. **Advanced discretization methods for flow simulation using unstructured grids**. Tese (Doutorado) — Stanford University, 2013.

NIKITIN K.; TEREKHOV, K. V. Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations and multiphase flows. **Computational Geosciences**, v. 18, p. 311–324, 2014.

FCT applied to the 2-D finite element solution of tracer transport by single phase flow in a porous medium. 609–619 p.

PATANKAR, S. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. 1. ed. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. (Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Science). ISBN 0070487405.

PATRICIO, R. A. *et al.* Numerical simulation of pig motion in gas-flow pipelines using the flux-corrected transport method. In: . [S.l.: s.n.], 2016.

PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of numerical reservoir simulation**. New York: Elsevier Science, 2007. ISBN 0444415785.

PINDER, G. F.; GRAY, W. G. **Essentials of multiphase flow and transport in porous media**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.

PONTING, D. Corner point geometry in reservoir simulation. **Proc. of the 1st European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery**, p. 45–65, 1989.

POTIER, C. L. Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés. **Comptes Rendus Mathématique**, Elsevier, v. 341, n. 12, p. 787–792, 2005.

QIAN-YONG, C.; JING, Y. Y. W.; MIFFLIN, R. T. Enriched multi-point flux approximation for general. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 1701–1721, 2008.

QUEIROZ, L. *et al.* On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2014.

ROSA, A.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. **Engenharia de reservatórios de petróleo**. [S.l.]: Interciência, 2006. ISBN 9788571931350.

SHELDON, J.; CARDWELL, W. One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. **Transactions of the AIME**, OnePetro, v. 216, n. 01, p. 290–296, 1959.

SILVA, R. S. D. **Simulação de Escoamentos Bifásico Oleo-Água em Reservatórios de Petróleo Usando Computadores Parelá de Memória Distribuída**. Tese (Tese (Doutorado)) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.

SONDERMANN, C. *et al.* Numerical simulation of non-isothermal two-phase flow in a pipeline using the flux-corrected transport method. In: . [S.l.: s.n.], 2016. p. V007T09A004.

SOUZA, M. *et al.* A higher-resolution flow-oriented scheme with an adaptive correction strategy for distorted meshes coupled with a robust mpfa-d method for the numerical simulation of two-phase flow in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. **SPE Journal**, OnePetro, v. 23, n. 06, p. 2351–2375, 2018.

SOUZA, M. R. d. A. **Simulação numérica de escoamento bifásico em reservatório de petróleo heterogêneos e anisotrópicos utilizando um método de volumes finitos “verdadeiramente” multidimensional com aproximação de alta ordem.** Tese (Tese (Doutorado)) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

STONE, H.; GARDER, A. Analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, OnePetro, v. 1, n. 02, p. 92–104, 1961.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de engenharia de petróleo.** Rio de Janeiro: Interciência, 2001. ISBN 9788571930469.

TODD, M. R.; O'DELL, P. M.; HIRASAKI, G. J. Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulators. *Society of Petroleum Engineers Journal*, OnePetro, v. 12, n. 6, p. 515–530, 1972.

VENKATAKRISHNAN, V. Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 118, n. 1, p. 120–130, 1995.

VERSTEEG, W. M. H. K. **An introduction to computational fluid dynamics.** The finite volume method. [S.l.]: Longman, 1995.

YANOSIK, J. L.; MCCRACKEN, T. A. A nine-point, finite-difference reservoir simulator for realistic prediction of adverse mobility ratio displacements. *Society of Petroleum Engineers Journal*, OnePetro, v. 19, n. 4, p. 253–262, 1979.

YU, M.; DOUGHERTY, D. E. An fct model of contaminant transport on unstructured meshes. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, WIT Press, v. 23, 1998.

ZALESAK, S. T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 335–362, 1979.

ZALESAK, S. T. The design of flux-corrected transport (fct) algorithms for structured grids. In: KUZMIN, D.; LÖHNER, R.; TUREK, S. (Ed.). **Flux-Corrected Transport: Principles, Algorithms, and Applications.** Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. p. 29–78. ISBN 978-3-540-27206-9.