UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

LUDMILA WANDERLEY MARTINS

O SINAL DE IGUAL E NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÃO NO PRIMEIRO SEGMENTO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Recife
2023

LUDMILA WANDERLEY MARTINS

O SINAL DE IGUAL E NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÃO NO PRIMEIRO SEGMENTO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Ensino das ciências e da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida

Recife
2023

Catalogação na fonte
Bibliotecário Bruno Márcio Gouveia, CRB-4/1788

M386s Martins, Ludmila Wanderley
O sinal de igual e noções iniciais de de equação no primeiro segmento da educação de jovens e adultos : uma experiência didática a luz da teoria da objetivação / Ludmila Wanderley Martins. – 2023.
88 f.

Orientação de: Jadilson Ramos de Almeida.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2023.
Inclui Referências e apêndices.

1. Educação matemática. Educação de jovens e adultos. 3. Álgebra. I. Almeida, Jadilson Ramos de (Orientação). II. Título.

512 (23. ed.) UFPE (CE 2024-017)

LUDMILA WANDERLEY MARTINS

O SINAL DE IGUAL E NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÃO NO PRIMEIRO SEGMENTO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, como requisito para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Ensino das ciências e da Matemática.

Aprovado em: 22/12/2023

BANCA EXAMINADORA

____
Profº. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Drª. Cristiane Pessoa (Examinadora Interna ao Programa)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Drª. Maria Alves Azeredo (Examinadora Externa ao Programa)
Universidade Federal da Paraíba

____
Profª. Drª. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva (Examinadora Externa ao Programa)
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Durante os anos da pós-graduação conheci a seguinte composição de Leoni:

> Alegria é a prova dos nove
> Se ela falta, não há vida que valha
> Longe dela desprezo as medalhas
> E triunfo nenhum me comove (Hime; Siqueira Jr., 2022)

Ao ouvi-la, além de remeter a questões próprias da matemática, lembrei-me de minha amiga Rosália, que sempre dizia: “você anda muito feliz pra quem está fazendo mestrado!” Fui feliz enquanto a “regra” parecia dizer que pós-graduando tem que ser estressado, infeliz. Fui feliz por estar num programa que me acolheu (chegou ali uma pedagoga amedrontada em estar entre matemáticos, em sua maioria homens).

Luis Radford diz que as emoções, incluindo a felicidade, são construções culturais, socialmente organizadas e historicamente constituídas. Logo, essa felicidade que não se apagou durante o mestrado, mas antes, se intensificou, foi fruto dos tantos encontros que aconteceram na caminhada: com saberes, com pessoas e comigo mesma.

Sou toda gratidão aos meus alunos, Ronaldo, Marlene, Severa e Josué, que participaram desta pesquisa. Empenhamo-nos juntos e esta não é minha dissertação. É nossa obra comum!

Dentre tantos encontros, dois deles foram os mais bonitos: com um orientador generoso, gentil e gigante (de corpo, de alma e de sabedoria); e com uma grande amiga que também tem como virtude a generosidade. Professor Jadilson e Simone, obrigada por trilhar comigo esta jornada. Jadilson, agradeço até mesmo (talvez seja principalmente) quando você, mesmo sabendo a resposta, respondeu “não sei” as minhas dúvidas e me fez ler até entender algo. Simone, seu companheirismo, do começo ao fim, tornou tudo mais leve.

Foi felicidade também fazer parte de dois grupos de pesquisa coesos e comprometidos. Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra, muito obrigada. Em especial, quero agradecer à Alaíde e Marcelo, pela parceria e solidariedade. Aos que compõem o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática nos Anos Iniciais, muito obrigada. Yasmim, obrigada pela sua amizade dentro e fora da seara acadêmica.

Aos colegas de turma do Edumatec, muito obrigada também. Maria, Roan e Rúbia, a vocês os agradecimentos são ainda mais especiais.

À banca examinadora, Maria, Cristiane e Jussara, pela leitura atenciosa, sugestões e principalmente pela doçura nas correções, muito obrigada! Professora Maria Azeredo merece um pouquinho mais de linhas, já que minha admiração por ela tem quase 20 anos, quando do nosso encontro ainda na graduação. Foi sob sua orientação que entendi que a Educação Matemática poderia ser “minha praia”. Obrigada, Maria, por apontar esse caminho (a mim e a todas(os) pedagogas(os)).

A minha família: painho, mainha, Maitê, Milton, Dan, Leo, Juliana e Ana, muito obrigada! Eu me orgulho de pouco ter ficado ausente em suas vidas por conta dos estudos. Uma das minhas escolhas foi nunca trancar-me para estudar. Enquanto estudava, fiquei pela sala ou no quarto de portas abertas porque a presença de vocês me alegra sempre.

Aos amigos, muito obrigada! Rosália e Dandara, pelas tantas vezes que vocês se orgulharam de mim e demonstraram isso em palavras, gestos, sorrisos, abraços e olhares. Aline Anjos e Tia Luzia, por me acolher na casa de vocês tantas foram as vezes que precisei ficar em Recife. Aline e Janson, obrigada pelos escapes (frevo, forró e praia) quando eu estava cansada demais. Felipe Roberto, obrigada por ter sido conforto também nos dias de cansaço. Gracy Martins, minha referência no mundo acadêmico, obrigada pelos direcionamentos.

Aos meus colegas de trabalho, obrigada! Luciana Tavares, Adriana Frazão, Gioconda Azevedo, Zeuma Neves, Karina Soares e Josy Gabriely gratidão por segurar as pontas sempre que precisei.

O maior dos agradecimentos é para Dan. Ajudou-me tanto que se tornou um estudioso da Teoria da Objetivação! Pelas horas despendidas para registrar e gravar os encontros da pesquisa e organizar os dados junto comigo, obrigada! Pela paciência e por assumir toda responsabilidade da casa nesse período, muito obrigada!

Sem os sorrisos, os meus e de vocês que comigo estiveram nessa jornada, nada teria valido a pena!

(...) Mas há sempre qualquer coisa que escapa. E é isso: exatamente aquilo que escapa, aquilo que é indizível, aquilo que pertence a categoria do inefável, aquilo que não se pode expressar só por palavras. E aí que está! É aí que está o amor (Saramago *apud* Mendes, 2011, p. 67).

RESUMO

Esta pesquisa de cunho qualitativo surge com a emergência dos estudos acerca dos processos de ensino-aprendizagem de álgebra e do desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no contexto educacional brasileiro. O estudo tem por objetivo geral analisar os indícios de pensamento algébrico que emergem à medida que estudantes do primeiro segmento da Educação de Jovens e Adultos exploram coletivamente atividades de ensino-aprendizagem que abordam as equações e o sinal de igual em seu caráter relacional. Adotamos como aporte teórico a Teoria da Objetivação, uma teoria educacional histórico-cultural desenvolvida por Luis Radford, inspirada no materialismo dialético de Hegel, no conceito freiriano de educação e na escola de pensamento de Vygotski. Segundo esta teoria, o saber algébrico já está instituído culturalmente, não é algo puramente interno ao estudante, mas um saber histórico em potencial, que pode ser alcançado por meio de um trabalho conjunto e interativo dos sujeitos. Segundo Luis Radford, três condições caracterizam o pensamento algébrico: (1) a indeterminação de grandezas, (2) a denotação e (3) a analiticidade. É também nos pressupostos metodológicos da Teoria da Objetivação que embasamos a produção dos dados, seguindo a configuração proposta para atividades de ensino-aprendizagem. Nossa atividade foi pensada a partir dos seguintes princípios pedagógicos: (1) a criação de um espaço social de interação para resolver equações, por meio de formação de um pequeno grupo; (2) o delineamento das tarefas e de um sistema semiótico concreto. A atividade promoveu a tomada de consciência de conceitos necessários para resolver equações. Quanto à análise dos dados, por entender que o pensamento algébrico pode ser revelado por linguagem que não seja exclusivamente simbólica, mas também pela linguagem natural, gestual e pictórica durante o processo de objetivação, o método de análise dos dados é o multissemiótico. Os dados produzidos apontaram que, no processo de introdução à álgebra, os estudantes seguiram uma trajetória em que as formas algébricas de pensar as equações emergiram progressivamente na atividade conjunta com a professora. Nossas análises evidenciam que adultos com pouca escolarização são capazes de desenvolver processos de reflexão algébricas e que o fato de não serem leitores não é um fator limitante. Inferimos também o importante papel dos sinais, artefatos, linguagem e gestos no desenvolvimento do pensamento algébrico, o que nos leva a entender que a álgebra não pode ser reduzida a uma notação simbólica.

Palavras-chave: pensamento algébrico; educação de jovens e adultos; noções iniciais de equação; sinal de igual; teoria da objetivação.

ABSTRACT

This qualitative research arises from the emergence of studies on algebra teaching-learning processes and the development of algebraic thinking in the Early Years of Primary School in the Brazilian cultural context. The general aim of the study is to analyze the signs of algebraic thinking that emerge as four students from the First Segment of Youth and Adult Education collectively explore teaching-learning activities that address equations and the equal sign in their relational character. Our theoretical framework is the Objectification Theory, a cultural-historical educational theory developed by Luis Radford, inspired by Hegel's dialectical materialism, Freire's concept of education and Vygotski's school of thought. According to this theory, algebraic knowledge is already culturally instituted, it is not something purely internal to the student, but a potential historical knowledge that can be achieved through the joint and interactive work of the subjects, known as joint labor. According to this theory, three conditions characterize algebraic thinking: (1) the indeterminacy of quantities, (2) denotation and (3) analyticity. It is also on the methodological assumptions of the Objectivation Theory that we base the production of the data, following the configuration proposed for teaching-learning activities. Our activity was designed on the basis of the following pedagogical principles: (1) the indeterminacy of quantities, (2) denotation and (3) analyticity.It is also on the methodological assumptions of Objectivation Theory that we base the production of the data, following the configuration proposed for teaching-learning activities.Our activity was designed based on the following pedagogical principles: (1) the creation of a social space for interaction to solve equations, through the formation of a small group; (2) the design of tasks and visual semiotic systems that promoted awareness of the concepts needed to solve equations.With regard to data analysis, because I believe that algebraic thinking can be revealed through language that is not exclusively symbolic, but also through natural, gestural and pictorial language during the objectification process, the method used to analyze the data is multisemiotic.The data produced showed that, in the process of introducing algebra, the students followed a process in which algebraic ways of thinking about equations emerged progressively in the joint activity with the teacher.Our analysis also highlighted the important role of signs, artifacts, language and gestures in the development of algebraic thinking.

Keywords: algebraic thinking; youth and adult education; initial notions of equation; equal sign; objectification theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AEA	Atividade de Ensino-aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EJA	Educação de Jovens e Adultos
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
PNAIC	Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa
PNAD	Pesquisa Nacional de Amostra d Domicílios
MSOs	Meios Semióticos de Objetivação
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
TO	Teoria da Objetivação
SARESP	Sistema de avaliação do rendimento escolar de São Paulo
SSC	Sistema Semiótico Concreto

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O interesse pelo ensino de álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico vem ocupando espaço de destaque em pesquisas no campo da Educação Matemática (Radford, 2017, 2018, 2020, 2021; Kaput, 2008; Kieran, 2007; Ponte; Branco; Matos, 2009; Vergel, 2015). Tais pesquisas apontam para uma nova maneira de se pensar a álgebra escolar: o foco desse processo deixa de ser a manipulação mecânica de expressões simbólicas e sua linguagem e passa a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir do trabalho com a generalização, focando nos modos de pensar (Ponte; Branco; Matos, 2009).

Esses estudiosos que têm repensado a álgebra escolar defendem que o pensamento algébrico deve estar presente nos currículos escolares desde os primeiros anos de escolarização. Além disso, segundo a *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), a álgebra, como vertente dos currículos desde a Educação Infantil, colabora para que os estudantes construam uma base sólida de compreensão e experiência, preparando-os para trabalhos mais sofisticados em álgebra nas séries mais avançadas.

No Brasil, essa nova forma de conceber a álgebra no processo de ensino-aprendizagem tem sido tema de pesquisas e discussões nas formações docentes nas últimas décadas e promovido mudanças nos documentos que norteiam as propostas curriculares. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997), por exemplo, já apontavam para o estudo da álgebra como "um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (Brasil, 1997, p. 115).

Recentemente, mudanças curriculares vêm sendo feitas para a introdução da álgebra desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Em 2012, com o Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), que estruturava o ensino de Matemática por direitos de aprendizagens e eixos estruturantes, sendo o pensamento algébrico um desses, ganhava destaque as discussões sobre o fomento dessa forma de pensar desde o Ciclo de Alfabetização (1°, 2° e 3° anos). Na continuidade das reformas curriculares, em 2018, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) apresenta a álgebra como unidade temática de ensino para os Anos Iniciais.

Segundo esses dois documentos, a finalidade desse eixo é o desenvolvimento de uma forma específica de pensar: o pensamento algébrico.

Embora publicada em meio a muita controvérsia no que se refere ao grau de direcionamento e normatização, evidenciando a disputa de projetos e concepções sobre o currículo, a BNCC, ao propor essa nova unidade temática de ensino da Matemática para os Anos Iniciais, tem incidido diretamente nos currículos das escolas de todo o país, nos materiais didáticos, na formação inicial e continuada de professores, bem como no processo de ensino-aprendizagem.

Tais mudanças também vêm ocorrendo nas propostas curriculares para a Educação de Jovens e Adultos (EJA). Mesmo que neste documento a orientação para construção de propostas que atendam as especificidades desta modalidade de ensino seja muito incipiente, a BNCC vem sendo tomada como referência pelos sistemas educacionais municipais e estaduais para elaboração de matrizes curriculares para EJA[1].

Essas mudanças curriculares, que incluem o ensino de álgebra nos primeiros anos de escolarização, concebendo-a para além da manipulação simbólica, surgem como respostas ao baixo desempenho dos estudantes neste campo do conhecimento matemático e buscam mitigar as dificuldades no processo de aprendizagem que estes têm apresentado.

Por muito tempo, discutia-se que essas dificuldades decorriam de uma possível imaturidade cognitiva dos estudantes e ao caráter inerentemente “abstrato” da álgebra. Segundo Lins e Gimenez (1997), alguns países, como o Reino Unido, fundamentados nessas ideias, adiaram a introdução da álgebra, implicando em resultados nada positivos. Para esses autores, certos de que estudantes em fase inicial de escolarização já apresentam indícios de pensamento algébrico, para a superação de tais dificuldades, deve ser feito exatamente o contrário: “é preciso começar mais cedo o trabalho com Álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra” (Lins; Gimenez, 1997, p 10).

1 No documento é percebido um silenciamento quanto à EJA e outras modalidades de ensino como Educação do Campo, Indígena, Quilombola, entre outras. A BNCC apenas sugere que estados e municípios façam adaptações e incorporem conteúdos nos currículos educativos e projetos pedagógicos da EJA. Isso reitera a nossa compreensão de um apagamento da modalidade nas políticas públicas nos últimos anos.

Fiorentini, Miorin e Miguel (2016), corroborando com essa afirmação, também apontam que as dificuldades têm relação com iniciação relativamente tardia do ensino-aprendizagem da álgebra e, é por tal motivo, que há a defesa de que o pensamento algébrico deve estar presente nos currículos escolares desde os primeiros anos de escolarização.

Dentre os objetos de aprendizagem da álgebra, a ideia de equivalência e as propriedades de igualdade, com ênfase em seu caráter relacional, figuram na BNCC para o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência (Brasil, 2018, p. 295).

Nesse sentido, a escola deve promover experiências nas quais os estudantes explorem situações em que o sinal de igual surja com significados distintos: como operador (uma operação a realizar), como indicativo de uma equivalência entre dois objetos matemáticos ou expressões (significado relacional) ou para definir uma relação funcional (Ponte; Branco; Matos, 2009).

Para que os estudantes desenvolvam pensamentos de natureza algébrica, como defendem Ponte, Branco e Matos (2009) e Schliemann e Carraher (2016), é preciso um trabalho sistemático com este símbolo enquanto uma relação. Outrossim, pensar sobre a relevância e o significado do símbolo de igualdade em seu caráter relacional é essencial para o ensino e planejamento de estudos que envolvam noções iniciais de equação. O não reconhecimento da igualdade enquanto uma relação tem estreita ligação com as dificuldades dos estudantes em reconhecer os conceitos necessários para resolução algébrica de equações (Radford, 2022a), como apontam também as pesquisas a seguir.

Ponte, Branco e Matos (2008) afirmam que estudantes não reconhecem que a igualdade representada numa equação permanece, mesmo quando transformações iguais são efetuadas dos dois lados deste símbolo, o que implica em dificuldades na resolução de equações ao se depararem com esse objeto matemático. Para esses autores, isso se dá pelo fato de não compreenderem o significado das condições de equivalência e a interpretação restrita do símbolo de igualdade como mero indicador de ações, consequência da pouca experiência ao longo da vida escolar com atividades que explorem o significado relacional deste símbolo.

Em pesquisa realizada por Ribeiro (2001) para verificar o desempenho de estudantes do Ensino Fundamental que lidam com objetos de aprendizagem da álgebra[2], verificou-se que as estratégias utilizadas eram basicamente procedimentais (mecânicas e técnicas) e que estes apresentavam dificuldade ainda maior ao resolver questões que envolviam situações contextualizadas. Observou-se que o uso incorreto dos princípios de equivalência e uso indevido de regras como “muda de lado - muda de sinal” conduziam os alunos a muitos erros na resolução de equações algébricas, até mesmo as mais simples.

Ribeiro e Cury (2021) concluem que os alunos ao final da escolaridade básica não reconhecem as estruturas de entes matemáticos, como o conceito de equação, e “não são capazes de apresentar uma caracterização para esse conceito e somente evocam os procedimentos e técnicas de resolução” (p. 18), mesmo tendo vivenciado processos de aprendizagem desse conceito algébrico.

As três pesquisas apresentam valiosas contribuições para o campo da Educação Matemática ao apontar em seus resultados o que os alunos pensam sobre a igualdade e conceitos primordiais na resolução de equações. No entanto, nossa pesquisa toma um caminho diferente: nosso foco é como os alunos em fase inicial de escolarização aprendem formas algébricas de simplificar equações em sala de aula.

Dentre as pesquisas que tomam o sinal de igualdade e noções de equação como objeto de estudo[3], grande parte foca no processo de aprendizagem de crianças, sendo parcas as pesquisas que abordam o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA)[4], modalidade de ensino que requer um currículo que considere a diversidade e as especificidades de seu público.

Isto nos alerta sobre a necessidade do desenvolvimento de pesquisas com foco no pensamento algébrico em processos educativos por meio dos quais os estudantes da EJA começam a compreender as equações e tornam-se conscientes dos conceitos envolvidos na resolução algébrica de equações, especificamente com os que estão no primeiro segmento (que corresponde aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental). Nesse sentido, esta pesquisa situa-se num espaço que tenta unir as

2 Com base nos dados do Sistema de Avaliação do rendimento escolar de São Paulo (SARESP)
3 Para Radford (2021), as equações ainda não despertaram o interesse que merecem na álgebra inicial e foco das investigações tem sido em atividades com sequências e padrões.
4 Na revisão de literatura, detalhada mais adiante no tópico sobre o ensino de Álgebra na EJA, apresentamos as produções encontradas: 12 dissertações e 1 artigo científico.

crescentes pesquisas que vêm orientando o universo da álgebra escolar e do pensamento algébrico com o campo da educação de adultos.

É diante desse cenário que surge o interesse de responder à seguinte questão: “No processo de introdução à Álgebra, que indícios de pensamento algébrico emergem quando estudantes do primeiro segmento da Educação de Jovens e Adultos lidam com situações que envolvem o sinal de igual em seu caráter relacional e simplificação de equações?”.

Nesse projeto de pesquisa, traçamos como objetivo geral analisar os indícios de pensamento algébrico que emergem à medida que estudantes do Primeiro Segmento da Educação de Jovens e Adultos exploram atividades que abordam o sinal de igual em seu caráter relacional e resolução de equações.

Para atingir o objetivo e encontrar respostas à questão da pesquisa, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (1) analisar os meios semióticos de objetivação dos estudantes ao resolverem de forma colaborativa problemas envolvendo equações; (2) identificar a presença (ou não) dos vetores que caracterizam o pensamento algébrico na Teoria da Objetivação (indeterminação, denotação e analiticidade) nas respostas dos estudantes; (3) compreender a maneira como os estudantes em seu trabalho com o professor encontram e refinam os significados algébricos do sinal de igual e os conceitos necessários para simplificação de equações.

Por assumirmos que a Educação Matemática vai além de uma atividade cognitiva, mas a enxergamos como uma prática social, voltada para o desenvolvimento integral dos sujeitos, nesta pesquisa de cunho qualitativo, o pensamento algébrico é compreendido a partir dos princípios da Teoria da Objetivação (TO), uma teoria histórico-cultural de ensino-aprendizagem, inspirada no materialismo dialético de Hegel, no conceito freiriano de educação e na escola de pensamento de Vygotsky. A TO compreende “a educação matemática como um esforço político, societário, histórico e cultural que visa à criação de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionem criticamente em discursos e práticas matemáticas” (Radford, 2021a, p. 38). Essa ideia de Educação Matemática implica numa forma diferente de conceber o saber e o conhecimento, professores e alunos, bem como os processos de ensino-aprendizagem, que serão discutidos ao longo desta dissertação.

Para a Teoria da Objetivação, o saber algébrico já está instituído culturalmente, não é algo puramente interno ao estudante, mas um saber histórico em potencial que pode ser alcançado por meio de um trabalho conjunto e interativo dos sujeitos, denominado de labor conjunto.

Ainda ancorados nessa teoria, o método de análise dos dados será o multissemiótico ou multimodal (Radford, 2015a), uma vez que entende que o pensamento algébrico é um processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas por meio de um discurso argumentativo, e que este pensamento pode ser revelado por linguagem que não seja exclusivamente a simbólica formal, mas também pela linguagem natural, gestual, pictórica (Radford, 2020).

No que diz respeito à organização deste trabalho, ele se divide em seis capítulos. Neste capítulo introdutório, foram apontadas as características gerais desta investigação e de maneira sintética seus aspectos teóricos e metodológicos. Além disso, explicitamos a justificativa, as motivações de estudo e a questão de pesquisa, bem como um panorama de pesquisas relacionadas ao tema. Em seguida, são delineados os objetivos geral e específicos.

Nas seções seguintes, buscamos situar esta pesquisa no campo da Educação Matemática e do ensino de álgebra no Primeiro Segmento da Educação de Jovens e Adultos e apresentaremos uma revisão da literatura. Na continuidade, serão tecidas reflexões teóricas pautadas na Teoria da Objetivação: abordaremos os elementos fundamentais desta teoria para esta pesquisa. Em princípio, apresentaremos sua definição e serão discutidas as concepções de saber, conhecimento, atividade, professor e aluno e processo de ensino-aprendizagem.

Já nos capítulos seguintes, traremos algumas considerações sobre pensamento algébrico sob diferentes perspectivas, enfatizando o que é defendido na TO. Reflexões sobre o ensino de equações e compreensão do sinal de igual também figurarão nesta seção.

Na sequência, descreveremos o contexto em que a pesquisa foi realizada, destacando os procedimentos metodológicos para a organização da atividade de ensino-aprendizagem e da produção de dados. Por fim, com os dados coletados, apresentaremos os episódios interativos e suas análises.

Esperamos que esta pesquisa contribua para repensarmos nossas práxis em sala de aula e ofereça novos elementos para discussões inerentes à pesquisa sobre ensino-aprendizagem relacionados ao conhecimento matemático e, de forma específica, ao campo da álgebra inicial.

2 O ENSINO DE MATEMÁTICA E DE ÁLGEBRA NO PRIMEIRO SEGMENTO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

A Constituição Federal de 1988 é um importante marco temporal para a modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA). Isso porque, em seu Artigo 208, ao estabelecer a obrigatoriedade e a gratuitidade da oferta do Ensino Fundamental, “inclusive para os que a ele não tiveram acesso na idade própria” (Brasil, 1988, Art. 208), garante aos sujeitos com escolarização incompleta ou jamais iniciada o acesso à educação formal. É esse mesmo ordenamento jurídico que assegura a “oferta de ensino noturno regular, adequada às condições do educando” (Brasil, 1988, Art. 208).

A EJA surge como resposta às reivindicações dos movimentos sociais na luta pela erradicação do analfabetismo e pela conscientização política e social de jovens e adultos (Santos; Pereira; Amorim, 2018). Estes sujeitos são milhões de brasileiros que nunca estudaram ou estudaram pouco, não por vontade própria, mas por não encontrarem condições sociais para usufruir desse direito. Sampaio e Hizim (2022), ao analisarem os dados levantados em 2019 pela Pesquisa Nacional de Amostra de Domicílios Contínua (Pnad Contínua) e pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), se depararam com um contingente de mais de 73,5 milhões de brasileiros com 18 anos ou mais sem educação básica concluída

Segundo Fonseca (2002), ainda que essa modalidade de ensino nos remeta à questão etária daqueles que são atendidos (jovens e adultos), o grande traço definidor da EJA é a identidade de seus sujeitos, delineada por processos de exclusão sociocultural. São sujeitos advindos das camadas populares, que têm seus saberes pautados nas experiências vividas.

No entanto, definir estes jovens, adultos e idosos que retornam aos espaços de educação formal apenas sob o viés desses processos de exclusão social, por suas trajetórias escolares interrompidas e pela origem socioeconômica, é enxergá-los de maneira homogênea (Haddad; Di Pierro, 2000). Segundo Oliveira (1999), é preciso atentarmos para além dessas similaridades existentes em classes da EJA e percebermos também o que os tornam sujeitos diversos: as questões de gênero e orientação sexual, étnico-racial, geracional, de origem e os contextos sociais em que estão inseridos. Nesse sentido, ter um olhar que considere o que cada um desses estudantes almeja ao retornar para a escola, a diversidade de experiências, de representações, as diferenças e, infelizmente, as desigualdades, possibilita pensar em processos educativos mais significativos e que valorizam tais sujeitos.

Essa especificação da EJA deve nortear as reflexões e ações no âmbito da Educação Matemática voltadas para esses estudantes, bem como as propostas curriculares para o ensino de Matemática, de maneira que garantam não apenas o acesso à educação, mas também a sua permanência e sucesso. Freire (2013) aponta sobre a importância de conhecermos e valorizarmos o contexto social, cultural, político, econômico e educacional desses sujeitos que regressam ao chão das escolas para, então, pensarmos num currículo "vivo", que contemple as suas particularidades e vivências.

Mas a realidade é que muitas das atuais propostas curriculares da EJA vêm sendo balizadas por currículos pensados para crianças e adolescentes (Catelli Jr, 2019). Tomemos, por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o mais recente documento norteador para elaboração de propostas curriculares. A BNCC não faz referência às especificidades dessa modalidade de ensino e aos sujeitos que a compõem, limitando-se a informar que eixos e objetos do conhecimento se aplicam a crianças, adolescentes, jovens e adultos, mas, mesmo assim, tem sido referência para definir currículos. Para Catelli Jr. (2019), isso é um grande equívoco:

> Não faz sentido reproduzir um mesmo rol de conteúdos desenvolvidos ao longo de anos para crianças e adolescentes, uma vez que estas etapas já não se fazem da mesma forma para as aprendizagens de adultos, que não precisam aprender da mesma forma que as crianças. (...) Não são os sujeitos que devem se adaptar às instituições e às políticas, mas o inverso, ou seja, as instituições precisam criar propostas e programas que se adaptem às possibilidades e às condições de vida dos sujeitos (Catelli Jr., 2019, p. 317).

No que diz respeito ao ensino de Matemática, também é preciso reconhecer o universo cultural e as experiências desses sujeitos para pensar em currículos que visem uma Educação Matemática emancipatória, crítica, autônoma, democrática e que dê sentido aos processos educativos. Muitos desses jovens e adultos, ao adentrarem os espaços formais de educação, já dominam noções matemáticas que foram aprendidas de forma intuitiva e informal ao longo da vida: procedimentos de contagem, cálculo mental, estimativas, estratégias de aproximação. Para Fonseca (2002):

> Todo processo de construção de conhecimento, marcadamente do adulto, do aluno da EJA, é permeado por suas vivências, cuja lembrança é mobilizada em determinados momentos das interações

> de ensino-aprendizagem escolar, não porque se refiram a fatos de interesse exclusivamente pessoal, mas porque são justamente lembranças que se encaixam no marco aportado por nossas instituições sociais, caso contrário, não se recordariam (Fonseca, 2002, p. 26).

No entanto, apesar do conhecimento matemático desenvolvido ao longo da vida a partir de suas vivências, muitos desses sujeitos ao se depararem com processos educativos formais da matemática (representações simbólicas e linguagem matemática) assumem um discurso de dificuldade e de impossibilidade de aprendê-la. Isso porque, segundo Fasheh (1998), a cultura influencia o modo pelo qual as pessoas veem as coisas e compreendem conceitos, logo influencia também como os jovens e adultos concebem o conhecimento matemático: na maioria das vezes como algo exato, pronto, acabado, de alto grau de complexidade e que marca o processo de exclusão que sofreram durante os anos de escola regular. Para Fonseca (2002):

> O discurso sobre a dificuldade da Matemática, incorporado pelos alunos da EJA, mesmo pelos que iniciam ali sua experiência escolar, deixa-se, pois, permear por mais uma marca da ideologia, que faz com que sejam raras as alusões a aspectos sociais, culturais, didáticos, ou mesmo de linguagem ou da natureza do conhecimento matemático como eventuais responsáveis por obstáculos no seu aprendizado. Pelo contrário, os alunos parecem devotar às limitações ao próprio aprendiz - incluídas aí as limitações definidas por sua idade avançada e inadequada ao aprendizado -, os percalços no fazer e no compreender matemáticos, liberando as instituições e suas práticas, as sociedades, os modelos socioeconômicos e as (o)pressões culturais, e chamando para si - e para uma condição irreversível- a responsabilidade por um provável fracasso nessa nova ou primeira empreitada escolar (Fonseca, 2002, p. 21).

Para superar esse discurso, se faz necessário que o ensino-aprendizagem de Matemática esteja imbuído de significado e que haja uma conexão entre o que os alunos já sabem e o saber sistematizado escolar. Logo, a atividade matemática na EJA deve estar orientada para integrar de forma equilibrada seu papel formativo e seu papel funcional (Brasil, 2002). Ou seja, é preciso que as práticas educativas matemáticas estejam voltadas tanto para o desenvolvimento de capacidades intelectuais para a estruturação do pensamento e do raciocínio lógico, quanto para atender às necessidades da vida prática desses sujeitos. Além disso, devem tomar as situações do cotidiano que envolvem notações matemáticas como ponto de partida para uma aprendizagem significativa.

No entanto, isso não deve significar que o currículo de matemática para jovens e adultos deve restringir-se apenas a conteúdos utilitários e iniciais, que implique na exclusão do ensino de objetos matemáticos, como ocorre com a álgebra no Primeiro Segmento. Por exemplo, na Matriz de Referência Curricular 2021/2022 da EJA do município de João Pessoa[5], lócus da nossa pesquisa, a exclusão da álgebra nos Ciclos I e II[6] pode ser percebida ao analisarmos os eixos de ensino propostos para esse componente. A proposta está centrada apenas nos eixos "números" e "geometria", deixando de fora, por exemplo, objetos do conhecimento referentes aos eixos da álgebra, probabilidade e estatística e grandezas e medidas. Estes eixos aparecem somente na Proposta Curricular para o Segundo Segmento.

Destarte, quando o fio condutor da escolaridade na EJA é a ênfase no caráter instrumental das noções matemáticas, o que, a nosso ver, caracteriza incoerência com relação ao equilíbrio colocado anteriormente entre o papel formativo e o papel funcional, temos como resultado o fortalecimento do mito de que é preciso estabelecer uma linearidade do conhecimento matemático: "primeiro se garante tantos e tais requisitos para só depois seguir adiante" (Fonseca, 2002, p. 67). Assentado nesse discurso, muitos educadores justificam a organização, sequenciamento, seleção e exclusão de conteúdos de ensino, como a álgebra, nos primeiros anos de escolarização.

A superação desse mito passa pela não exclusão do trabalho com álgebra no Primeiro Segmento da EJA. Na verdade, perpassa muito mais por uma questão de gradação de dificuldades das tarefas, dos conceitos matemáticos e das experiências com as quais propiciaremos que nossos alunos se deparem. A pesquisa realizada por Nunes, Carraher e Schliemann (2011)[7], sobre a compreensão matemática fora do contexto escolar, que deu origem à famosa obra "Na vida dez, na escola zero", aponta mais do que o aprendizado de uma técnica: adultos com pouca escolarização são capazes de desenvolver processos de reflexão algébricas, rompendo a dicotomia entre a tomada de consciência sobre os objetos matemáticos e as formas mecânicas de operar. Tal pesquisa revela que conceitos algébricos relacionados a equações são acessíveis a adultos com pouca ou nenhuma escolaridade, o que nos mostra que não

[5] A Matriz de Referência Curricular 2021/2022 direcionada à modalidade da EJA foi pensada como um reordenamento curricular face às novas necessidades e exigências do cenário educacional decorrente do enfrentamento à pandemia da COVID 19.

[6] Os Ciclos I e II correspondem aos Anos Inicias do Ensino Fundamental

[7] O estudo em questão consistia na resolução de situações representadas em balanças de dois pratos para determinar o peso de mercadorias com feirantes com pouca ou nenhuma escolarização, em analogia a equações com variáveis nos dois lados da igualdade.

há razões para que o ensino de álgebra seja excluído dos currículos escolares do Primeiro Segmento de ensino da EJA.

Nesse sentido, a nossa preocupação não deve residir em não ensinar conteúdos demais e, consequentemente, não ensinar álgebra, mas ensinar cuidadosamente aquilo que se propõe. O professor deve ter um olhar cuidadoso sobre as propostas curriculares produzidas pelas redes oficiais de ensino e analisar junto aos seus pares, educadores e educandos, a pertinência de determinadas recomendações e exclusões, buscando uma prática docente que possibilite aos alunos uma formação matemática consistente e significativa. Para que essa tomada de decisão ocorra, se faz necessária uma formação inicial e continuada que qualifique os docentes.

2.1 REVISÃO DE LITERATURA

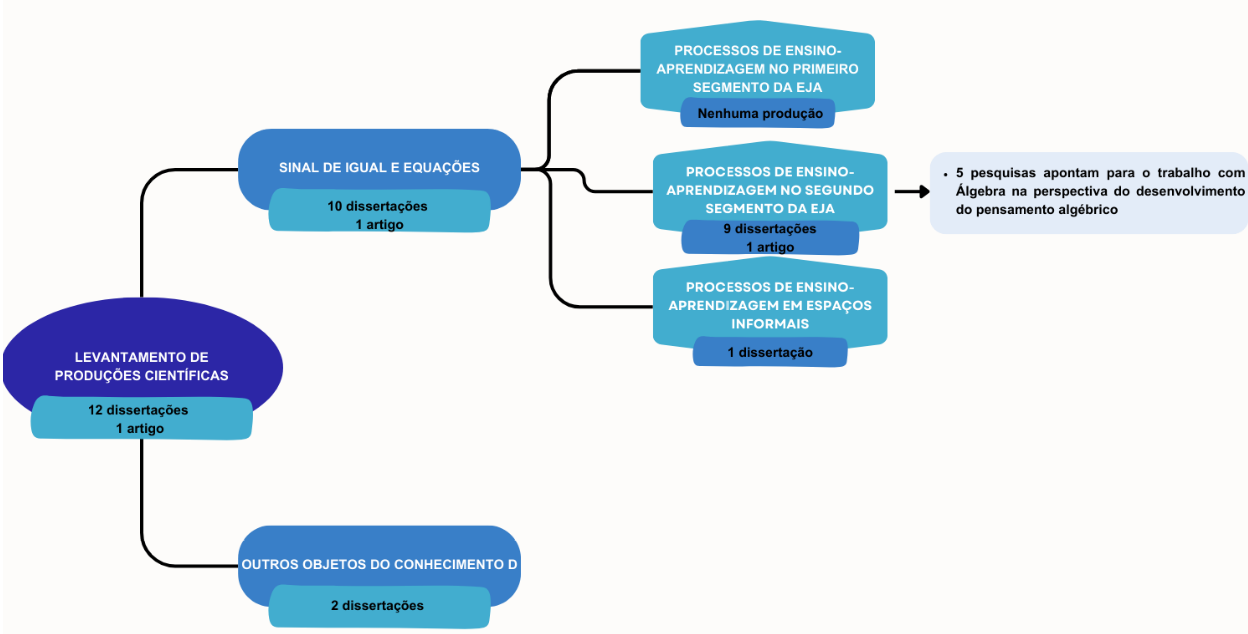
Para compor nossa revisão sistemática de literatura, tendo por finalidade o levantamento de pesquisas correlatas que possam apontar caminhos para nossa investigação, realizamos buscas por produções científicas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Portal da Capes (teses, dissertações e artigos), realizadas entre os anos 2001 e 2023[8], que abordassem o ensino de álgebra na Educação de Jovens e Adultos.

Usamos como critérios de inclusão as palavras-chave “álgebra e Educação de Jovens e Adultos” e, posteriormente, “pensamento algébrico e Educação de Jovens e Adultos” e “*Early Algebra* e Educação de Jovens e Adultos”. Doze dissertações de mestrado e um artigo atenderam a esses critérios[9]. Realizamos a leitura de seus resumos no intuito de compreender seus focos de interesse e organizá-las em agrupamentos. Quando identificado forte relação com nosso interesse de pesquisa (pensamento algébrico, a compreensão do sinal de igual e o ensino-aprendizagem das equações), procedemos com a leitura na íntegra das pesquisas. A Figura 1 ilustra a organização das pesquisas encontradas.

[8] O ano de 2001 foi estabelecido como marco inicial para Revisão Sistemática de Literatura devido à promulgação da Proposta Curricular para Educação de Jovens e Adultos.

[9] Como a Educação de Jovens e Adultos é uma política pública nacional, não encontramos pesquisas internacionais.

Figura 1 - Agrupamento das publicações e pesquisas encontradas



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Dentre as 12 pesquisas, 10 dissertações e 1 artigo apresentam as equações como objeto das pesquisas. Nove produções envolvem práticas pedagógicas com estudantes do segundo segmento da EJA e uma com estudantes que já concluíram a Educação Básica. Não foi encontrada nenhuma pesquisa com foco no ensino-aprendizagem de álgebra voltada para os primeiros anos de escolarização dessa modalidade de ensino. Isso se dá pelo fato de a maioria dessas pesquisas ter sido desenvolvida entre os anos 2002 e 2013, período em que as orientações curriculares apontavam que o ensino de álgebra deveria ser foco apenas nos anos finais de escolarização.

Desse escopo, apenas a pesquisa desenvolvida por Silva (2022) está voltada para a formação e conhecimentos de professores que ensinam álgebra nessa modalidade de ensino. O objetivo deste estudo consistiu em investigar as concepções dos professores que ensinam álgebra nos anos finais da EJA. Em seus resultados, revelaram-se concepções dos professores de que a álgebra é uma generalização da aritmética.

As pesquisas de Souza (2012), Flores (2013), Fidelis (2021) e Alves (2020) dedicam-se à análise de materiais e recursos didáticos. Nas pesquisas realizadas por Souza (2012), Fidelis (2021) e Alves (2020), buscou-se analisar se sequências didáticas ou sequências de tarefas favorecem a aprendizagem de conceitos algébricos de estudantes do Segundo Segmento da EJA. Já Flores (2013) apresenta em seu estudo um conjunto de jogos como estratégia para a introdução ao estudo de equações com alunos do 4° ciclo da EJA[10].

A pesquisa de Souza (2012) indica que os estudantes se valem de estratégias aritméticas para solucionar problemas de cunho algébrico e, ainda assim, apresentam dificuldades para resolvê-los. Alves (2020) aponta como resultado da pesquisa que, ao se engajarem nas tarefas propostas, os estudantes apropriaram-se da linguagem algébrica em sua forma mais simples e da representação matemática. Para Flores (2013), os jogos contribuem para produção e interpretação de expressões algébricas.

Azevedo (2002) investigou a aprendizagem de equações por alunos jovens e adultos do segundo segmento ao transitar por diferentes registros de representação semiótica apresentados pelo professor. O estudo concluiu que o trânsito pelos diferentes tipos de registros de representação favoreceu a compreensão do sinal de igual em seu sentido relacional, mas não o conceito de incógnita.

Num estudo de caso desenvolvido por Borges (2011), foram investigadas as ideias explicitadas por estudantes jovens e adultos que já haviam concluído a Educação Básica, matriculados num cursinho popular, ao vivenciarem situações-problemas que envolviam a linguagem algébrica.

Em seu trabalho, Pavanelo (2004) buscou analisar as reações apresentadas por estudantes adultos ao se envolverem numa atividade que abrangia o ensino e aprendizagem de Álgebra Elementar. De acordo com a autora, foi possível identificar resistência por parte dos alunos em relação à atividade proposta por meio da indiferença e a contestação nas falas.

Silva (2007) investigou uma abordagem de ensino dos conceitos de incógnita, variável e equação do 1° grau, pautada na modelagem matemática e nos estudos da Etnomatemática com alunos do Módulo IV[11] da EJA. Em seu estudo Pepece Junior (2011) tinha como objetivo investigar os indícios de pensamento algébrico e de possíveis erros na produção escrita de estudantes do 9° ano da EJA em atividades que envolviam equações do primeiro grau.

É relevante destacar que apenas as pesquisas de Pavanelo (2004), Silva (2007), Borges (2011), Pepece Junior (2011) e Alves (2020) apontam o trabalho com álgebra numa perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico.

[10] Correspondente aos 8° e 9° anos do Ensino Fundamental.
[11]Correspondente aos 8° e 9° anos do Ensino Fundamental.

3 ASPECTOS CONCEITUAIS DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Neste capítulo abordamos os elementos fundamentais da Teoria da Objetivação (TO) para esta pesquisa. Em princípio, apresentamos sua definição e na continuidade são discutidas as concepções de saber, conhecimento, atividade, professor e aluno e o papel dos signos e artefatos na aprendizagem. A compreensão de tais conceitos e a articulação entre eles embasam não só nossa abordagem teórica, mas também metodológica, já que tomamos os pressupostos da TO para a produção dos dados, seguindo desde a configuração das atividades de ensino-aprendizagem (aspecto estrutural e na concepção relacional dos sujeitos) até o delineamento das tarefas, bem como o método multimodal na análise dos mesmos.

3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Surgindo em meados da primeira década do século XXI e ainda em desenvolvimento, a Teoria da Objetivação (TO), de Luis Radford, trata de compreender os fenômenos de ensino-aprendizagem e se inspira no materialismo dialético de Hegel, na escola de pensamento de Vygotsky e no conceito de educação de Paulo Freire (Radford, 2017).

A TO busca superar a compreensão individualista dos processos educativos, ora centrados no professor, ora nos estudantes, e, por isso, não está interessada em compreender como os estudantes recebem ou como constroem o conhecimento, nem como o professor ensina (Radford, 2021a). Ela busca estudar as maneiras como os estudantes se conscientizam de formas de pensar e agir e interessa-se em compreender como alunos e professores, num trabalho conjunto, encontram e produzem o saber em sala de aula e se coproduzem como sujeitos (Radford, 2021). Esta teoria, ao assumir uma perspectiva semiótica-cultural (Vergel, 2021), também procura entender qual o papel que desempenham os signos, a cultura, a história e a sociedade nas maneiras de pensar o mundo.

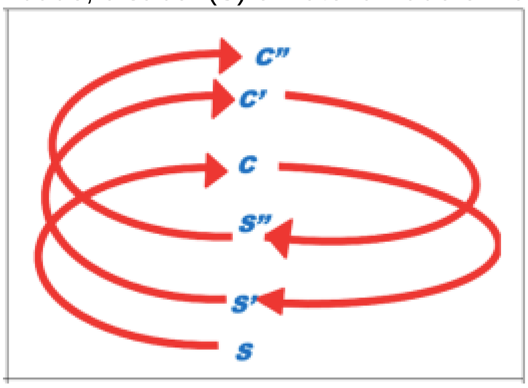
Nesse sentido, acredita num projeto de educação que está preocupado com a formação não-alienante dos sujeitos (Radford, 2023), no qual os conceitos de saber, conhecimento, aluno, professor, ensino-aprendizagem são ressignificados, a partir da perspectiva histórico-cultural de Vygotsky e do projeto educativo freiriano. Para Radford (2020),

> [...] a teoria da objetivação situa-se num projeto educativo diferente: vê o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural que visa a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas histórica e culturalmente constituídas, e que ponderam novas possibilidades de ação e pensamento (Radford, 2020, p. 38).

Essa ideia geral de Educação Matemática redefine as noções de professores e alunos, dos processos de ensino-aprendizagem e aponta para uma concepção materialista dialética do saber e do conhecimento.

Ao dizer que esta teoria concebe o saber e o conhecimento numa lógica materialista dialética, Radford (2021a) aponta para uma distinção entre eles. Enquanto o saber é definido como uma potencialidade, uma capacidade geradora de ações e reflexões, o conhecimento é a materialização do saber. O saber é uma entidade histórico-cultural: “uma produção cultural das pessoas por meio de seu trabalho, de suas ações, suas reflexões, suas alegrias, seu sofrimento e suas esperanças” (Radford, 2021a, p. 68). Já o conhecimento é algo tangível, que pode ser percebido e sentido pelos indivíduos, logo, pode ser apreendido pela consciência humana por meio de uma atividade sensorial cultural-histórica humana (Radford 2021a). Na atividade, “o saber começa a se mover e a se mostrar; o saber começa a tomar forma e se materializar. E o que materializa é o conhecimento” (Radford, 2021a, p. 79). A Figura 2 sintetiza a relação dialética entre saber (S), atividade (A) conhecimento (C).

Figura 2 - Na atividade, o saber (S) é materializado em conhecimento (C)



Fonte: Radford (2021a, p. 82)

O esquema apresentado na Figura 2 pode ser explicado da seguinte maneira: O saber (S) é colocado em movimento pela atividade (simbolizado pelas setas) e atualizado como conhecimento (C). Novas sistematizações acontecem, levando a uma expansão do saber. O novo saber (S’) resulta num novo conhecimento (C’), e assim sucessivamente (Radford, 2021a). O esquema também nos leva a compreender que a aprendizagem consiste em “um encontro sempre inacabado e crítico com o saber” (Radford, 2021a, p. 257).

Para clarear os conceitos de saber e conhecimento, tal como é entendida na Teoria da Objetivação, tomemos como exemplo o saber algébrico e sua materialização. O saber algébrico é uma potencialidade presente na cultura: capacidades que são ofertadas aos indivíduos para pensar, refletir, colocar e resolver problemas de uma forma específica (Radford, 2022a). Por exemplo, a possibilidade de resolução da seguinte equação $5n + 3 = 3n + 19$ por estratégias algébricas. Para resolvê-la, os alunos precisam materializar uma forma cultural de ação e reflexão já posta, já existente no mundo. Essa materialização se dá por meio de uma atividade. É da atividade que emerge o conhecimento: por exemplo, procedimentos para a simplificação e resolução de equações por meio de estratégias genuinamente algébricas.

Como dito, para que haja a emergência do conhecimento, é necessário um esforço humano: a atividade. Destarte, esse encontro com o saber só pode vir a acontecer “em e através da atividade prática e coletiva, isto é, uma atividade com outros” (Radford, 2021a, p. 53). Para essa teoria, a atividade não é vista como uma simples série de ações nas quais os sujeitos se ocupam com alguma tarefa, mas como um sistema dinâmico onde os indivíduos interagem coletivamente para a satisfação de suas necessidades coletivas e operam dentro de uma divisão específica de trabalho.

> A atividade é um sistema em evolução (uma forma de energia que se desdobra) dialeticamente incorporando o fluxo de relações emocionais, afetivas, sociais e éticas, e processos intelectuais, discursivos e materiais que os indivíduos produzem ao lidar com um problema ou situação comum (Radford, 2022b, p. 3).

No caso dos espaços educativos, trata-se de uma atividade de ensino-aprendizagem. Para a TO, numa sala de aula, a produção coletiva de ideias e os processos de tomada de consciência dos estudantes estão enredados com o desenvolvimento da atividade de ensino-aprendizagem entre os indivíduos e, professores e alunos, embora realizando ações distintas, empenham-se juntos para produzi-las e se comprometem de forma responsável. Na TO essa atividade conjunta de professores e alunos, alicerçada sob uma ética comunitária, é denominada de

Labor Conjunto. No Labor Conjunto é dado um novo significado ao papel exercido por esses sujeitos.

> O conceito de trabalho conjunto permite-nos conceber o ensino e aprendizagem em sala de aula não como duas atividades separadas, um feito pelo professor (atividade do professor) e um pelo aluno (atividade do aluno), mas como a mesma e única atividade: o trabalho conjunto de professores e alunos. O professor não aparece como um possuidor do conhecimento que está entregando ou transmitindo aos alunos; ou como alguém que está ajudando os alunos a configurar estratégias de aprendizagem. Nem os alunos aparecem como sujeitos passivos que recebem conhecimento (Radford, 2020, p. 24).

Desta forma, os estudantes não são vistos simplesmente como sujeitos cognoscentes, nem os professores como detentores ou facilitadores do conhecimento. O professor também não é considerado um mediador (Radford, 2021a). A TO tem a pretensão de afastar-se da ideia de que, na prática educacional, só há duas possibilidades para considerar a relação professor/aluno: ou a aprendizagem emana das ações dos estudantes ou os estudantes recebem o saber do professor[12]. Do ponto de vista da TO, é preciso compreender que a "interação do professor e dos alunos aparece como uma "dança de consciência, tentando captar algo em conjunto" (Radford, 2021a, p. 45). Nesse ato de interação, alunos e professores não fazem a mesma coisa, no entanto, estão empenhados num genuíno trabalho coletivo.

Ao ressignificar o papel e a interação do professor e do estudante, a TO enxerga o ensino-aprendizagem em sala de aula não como duas atividades separadas, uma realizada pelo professor e outra realizada pelo aluno, mas como "uma única e mesma atividade: o mesmo labor conjunto de professores-estudantes" (Radford, 2021a, p. 55) para a elaboração de uma obra comum.

Com efeito, nesse processo coletivo reflexivo, o saber não é construído, muito menos transmitido, mas pode ser encontrado por todos os sujeitos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. É no trabalho conjunto de alunos e professores, postados lado a lado, que a aprendizagem acontece, já que é por meio dele que "o saber se materializa, se reproduz, torna-se algo tangível, passível de ser pensado, ou seja, torna-se objeto de consciência" (Radford, 2020, p. 26).

Em suma, o que a TO nos diz é que a aprendizagem não é uma construção, apropriação ou assimilação, é antes, um encontro com os saberes. Moretti, Panossian e Radford (2018) alertam que compreender a aprendizagem como um encontro "não

---

[12] No modelo pedagógico transmissivo, o saber é conceituado como algo que os indivíduos possuem ou não, que pode ser transmitido de um indivíduo para outro.

se trata de um simples jogo de palavras acadêmicas. Se trata de uma mudança de paradigma” (Moretti; Panossiam; Radford, 2018, p. 265) .

Na Teoria da Objetivação a aprendizagem é conceituada em termos de dois eixos, que são, ao mesmo tempo, processos de objetivação e processos de subjetivação: saber e conhecimento, por um lado, e ser e vir a ser, por outro, respectivamente. Ou seja, aprender é entendido no sentido dialético-materialista, como “se tornar consciente de algo e transformado por esse algo” (Radford, 2021a, p 100).

> Há sempre dois eixos que organizam toda atividade de ensino-aprendizagem: o eixo das formas de produção de saberes e os das formas de colaboração humana. Na TO, as formas de produção de saberes são impulsionadas por esforços coletivos baseados na história e na cultura. As formas de colaboração humana são apoiadas por uma ética comunitária em sintonia com o projeto educativo geral freiriano.(Radford, 2022, p. 54).

O processo de tomada de consciência, no qual os objetos do saber se transformam progressivamente em objetos da consciência, são denominados de processos de objetivação. Ou seja, são aqueles processos sociais por meio dos quais os alunos se encontram com as formas historicamente constituídas de saber e compreendem a lógica cultural com a qual os objetos de conhecimento foram forjados. É um processo, pois é inacabado e sem fim, e é social porque ocorre quando estamos com o outro ou por meio da linguagem ou de artefatos, ou seja, em espaços onde há interação social. O que resulta de um processo de objetivação é a aprendizagem.

Já os processos de subjetivação são aqueles em que professores e estudantes se produzem mutuamente ao posicionar-se na atividade por meio de redes de relações sociais que se materializam por meio da ação, do corpo, do discurso e da materialidade da cultura (Radford, 2021a). Nos processos de subjetivação, professores e estudantes “tornam-se presença no mundo” (Radford, 2022a). Vale lembrar que esses dois processos andam de mãos dadas, numa relação dialética, e ocorrem de forma simultânea. Segundo Radford,

> [...] a ocorrência simultânea desses dois processos resulta do fato que eles estão entrelaçados um com o outro. A razão de seu entrelaçamento é encontrada na própria natureza do aprendizado matemático: em um processo de subjetivação, tentando se posicionar em uma prática matemática, os estudantes recorrem ao saber matemático. (...) Esse entrelaçamento de processos de objetivação e subjetivação é apenas uma expressão prática do fato de que aprender é inevitavelmente saber e se tornar (Radford, 2021a, p. 259).

É dessa ideia de que a aprendizagem (conhecer e tornar-se) acontece no encontro com o outro, e não posiciona o “eu” como a origem da cognição, que a teoria toma emprestado o nome:

> Este encontro é sentido como uma diferença: o encontro com algo que objeta (etimologicamente falando, algo que se opõe) ao indivíduo.(...) A objetivação não é a criação do Outro (que ainda é uma forma de assimilação do Outro ao Eu), mas o encontro com o Outro (Radford; Salinas; Sacristán, 2023, p. 612).

Sendo assim, a concretização dos processos de objetivação e subjetivação só é possível em práticas educativas assentadas no diálogo, no qual os sujeitos estejam dispostos a falar e ouvir o outro, se posicionem criticamente diante dos saberes.

Esses conceitos aqui apresentados (saber e conhecer, estudantes e professores, ensino-aprendizagem, processos de objetivação e subjetivação) nos auxiliarão na análise do pensamento algébrico suscitado pelos participantes dessa pesquisa ao explorarem em labor conjunto tarefas que abordam o sinal de igual no seu caráter relacional e as noções iniciais de equação.

3.2 OS MEIOS SEMIÓTICOS NOS PROCESSOS DE OBJETIVAÇÃO

Na Educação Matemática, a questão do significado tem sido muitas vezes estudada com foco nas modalidades escrita ou oral e, por vezes, ambas. Porém, para além da escrita e da oralidade, numa abordagem teórica cultural semiótica, como a Teoria da Objetivação, “a sensação, os sentidos e a matéria são considerados uma parte importante dos fundamentos da cognição e de qualquer atividade psíquica” (Radford, 2022c, p. 255). Assim, a cognição humana é concebida como cognição sensorial: “uma forma cultural e histórica sensível e multimodal de pensar, agir, imaginar, sentir, transformar e dar sentido ao mundo” (Radford, 2002c, p. 277). Nesse sentido, o papel que o corpo, o discurso, signos e artefatos desempenham, quando estudantes se referem a objetos matemáticos, é de suma importância, haja visto que são considerados “partes integrais (constitutivos, não periféricos) dos processos cognitivos” (Vergel, 2021, p. 80).

Numa entrevista realizada pela professora Dra. Shirley Gobara (UFMS), durante o seminário intitulado “Teoria da Objetivação: fundamentos e aplicações para o ensino de Ciências e Matemática” (Radford; Gobara, 2019), Luis Radford foi questionado sobre a conexão entre a semiótica e a Teoria da Objetivação e qual seria a perda caso a semiótica fosse retirada do quadro teórico. Sua resposta aponta que, sem a semiótica, a TO perderia sua essência, uma vez que a teoria está interessada na produção de saberes histórico-culturais e nos encontros das novas gerações com esses saberes, encontros estes que se dão em atividade semiotizada. Ele diz o seguinte:

> Se nos desprendemos da semiótica, se nos permitimos simplesmente ver a aprendizagem de um ponto de vista puramente interacional, o que perderíamos é essa possibilidade que temos, através da semiótica, de dar conta da historicidade e culturalidade dos saberes. Seria uma perda muito grande, não? Uma das escolhas que teríamos que fazer, dentro da elaboração da Teoria da Objetivação, seria uma prática que incluísse símbolos e a materialidade da cultura. Então, dessa maneira, nossa pedra angular é a atividade, mas uma atividade semiotizada. Uma atividade que não poderia ter a riqueza que para nós tem se não fosse através da semiótica que a acompanha (Radford; Gobara, 2019, n.p., tradução nossa).

Em sua resposta, Radford deixa claro que a atividade ocupa o importante papel de categoria ontológica organizadora central na TO, diferentemente de outras teorias de abordagens histórico-culturais, nas quais a linguagem e o discurso estão no cerne. Convém frisar que assumir a atividade como categoria central não implica que a linguagem torna-se menos importante. Na verdade, ao utilizar o termo semiotizada para descrever a atividade, o teórico aponta para a linguagem como um elemento de extrema importância, reconhecendo que atividade e linguagem estão em relação dialética.

Por assumir esse papel proeminente da linguagem e, por isso, dos signos, é importante aqui explicitar como essas categorias são compreendidas na TO. Na entrevista já mencionada, Radford chama atenção para as diferentes possibilidades de se entenderem os signos e a linguagem. Quando, por exemplo, a linguagem é concebida meramente como um canal de condução da ideia, os signos são vistos como algo posterior ao pensamento: primeiro tenho a ideia e logo a expresso. No entanto, inspirado no conceito vygotskyano de signo[13], a TO toma um caminho diferente. Os signos não são caracterizados por sua natureza representacional do

[13] Na sua fase instrumental, Vygotsky não considerou os signos como meios para representar as coisas. Porém, defendia que os signos serviam para cumprir operações psicológicas, implicando em alteração da cognição humana. Já no fim da vida, Vygotsky muda sua ideia acerca do papel dos signos. Estes passam a ser considerados como ferramenta psicológica e como mediador cultural (Radford, 2021).

pensamento. Ao contrário, pensamento e linguagem são consubstanciais e, por isso, não há a primazia da ideia sob os signos, ou vice-versa.

Nacarato e Custódio (2018) sintetizam bem essa relação entre pensamento e linguagem, do ponto de vista da TO, ao dizerem que “o primeiro não se exprime por meio da segunda, mas nela se realiza, em um movimento dialético do pensamento à palavra e da palavra ao pensamento” (Nacarato; Custódio, 2018, p. 17).

Entretanto, por mais poderosos que sejam, os dispositivos linguísticos (falados ou escritos) não são suficientes para entender as minúcias envolvidas na aprendizagem (Radford, 2003). Para além da linguagem, a atividade é corporificada e, por isso, inclui outros meios físicos e sensoriais: o corpo ou a carne e a materialidade do mundo (Radford, 2022c). Nesse sentido, o pensamento é composto de “unidades material e ideacional” (Radford, 2011, p. 23). Gestos, linguagem, atividade perceptiva, signos e ritmo constituem a parte material, enquanto imaginação e a fala interior constitui a parte ideacional (Mogollón, 2020).

No âmbito da Teoria da Objetivação, os meios ou recursos que estudantes utilizam nesse processo de significação durante a atividade matemática para materializar o saber são chamados de meios semióticos de objetivação (MSOs) (Radford, 2021a). Esses MSOs “não aparecem como mediadores da atividade, como é o caso de outras abordagens socioculturais: são considerados parte integrante do pensamento e atividade humana” (Radford, 2021a, p. 52).

São exemplos de meios semióticos de objetivação os artefatos, objetos, os gestos, a linguagem natural, prosódia e ritmo nas falas, posicionamento e postura corporal. Radford (2003) explica que os MSOs são:

> [...] todos os meios semióticos utilizados pelos indivíduos que se encontram em um processo de produção de significados, para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar presentes suas intenções e para organizar suas ações e assim adquirir as metas de suas ações (Radford, 2003, p. 41).

Em atividades de ensino-aprendizagem, professores e estudantes recorrem aos meios semióticos de objetivação para fazer “algo” aparecer na frente deles. Segundo Mogollón (2020),

> [...] os meios semióticos de objetivação determinam tanto a maneira como as coisas aparecem para os sujeitos quanto o processo de construção de significados sociais para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar evidentes as suas intenções e para cumprir as suas ações para atingir o objetivo de suas atividades. Esses meios semióticos de objetivação podem ser símbolos matemáticos, gestos,

> artefatos, atividade perceptiva, palavras, gráficos, ritmo, etc. (Mogollón, 2020, p. 74, tradução nossa).

Em pesquisas que se fundamentam na Teoria da Objetivação, esses MSOs não são analisados isoladamente, mas, sim, em conjunto, uma vez que não dizem ou mostram a mesma coisa e também não significam da mesma maneira. Por serem provenientes de diferentes modalidades semióticas, os recursos mencionados conferem à atividade um caráter multimodal. Os momentos da atividade no qual os MSOs de diferentes tipos passam a desempenhar um papel crucial, evidenciando que os saberes estão se tornando claros para os estudantes, são chamados de nó semiótico (Radford, 2021a).

> Em termos mais precisos, um nó semiótico é uma parte do labor conjunto, onde os signos corporificados e outros signos de vários sistemas semióticos são colocados para trabalharem juntos nos processos de objetivação. Um nó semiótico refere-se a segmentos da atividade em que estudantes e professores apresentam possíveis interpretações matemáticas e modos de ação contra o pano de fundo de formas de pensar e fazer cultural, e historicamente constituídas (Radford, 2021a, p. 138).

Na atividade de ensino-aprendizagem, os momentos em que há uma refinada ligação dos MSOs, apontando evidências de objetivação e de um nível mais profundo de consciência, são denominados de contração semiótica (Radford, 2006, 2021a).

Em investigações centradas em processos de objetivação, a identificação dos meios, nós e contrações semióticas mobilizadas pelos estudantes e professores proporcionam uma espécie de janela para investigação dos processos de objetivação. Radford e Sabena (2015) denominam estes momentos de segmentos salientes. São os segmentos salientes que nos permitem chegar a uma compreensão sensorial histórico-cultural da cognição (Radford, 2013, 2014, 2015).

4 O SINAL DE IGUAL E IDEIAS INICIAIS DE EQUAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Um conceito fundamental da álgebra que tem recebido considerável atenção das pesquisas é a igualdade e, em particular, a compreensão do sinal de igual (Knuth; Sthepens; Mcneil; Alibali, 2006). Mas por que entender o sinal de igual é tão importante? E de que forma a compreensão deste símbolo implica na compreensão relacional de equações e formar os conceitos envolvidos na simplificação algébrica de equações?

Carpenter *et al.* (2003) dão resposta a essas perguntas de forma bastante clara: "uma concepção limitada do que significa o sinal de igual é um dos principais obstáculos no aprendizado de álgebra. Praticamente todas as manipulações em equações requerem a compreensão de que o sinal representa uma relação" (p. 22).

É a partir desse argumento, que confere importância ao sinal de igual, que Pontes, Branco e Matos (2009) realizaram um estudo que buscou identificar os significados que alunos atribuem a este símbolo. Uma das principais conclusões foi a identificação de significados procedimentais e relacionais. O significado procedimental, que aparece majoritariamente nas respostas dos estudantes, leva à ideia deste sinal como uma inscrição que incita a realizar um cálculo, compreendendo-o apenas como indicador do resultado de determinada operação matemática. Em contraste, uma compreensão relacional leva a vê-lo como um atributo de mesmice das partes equacionadas, envolvendo a ideia de equivalência, evidenciado pelo sentido de equilíbrio entre os membros de determinada igualdade. Este último significado, no entanto, figurou menos nas respostas dos estudantes.

A pesquisa de Knuth, Stephens, McNeil e Alibali (2006) também se concentra na compreensão sobre o sinal de igual por alunos do Ensino Médio e como esse entendimento se relaciona com o desempenho na resolução de equações. Os resultados sugerem que relativamente poucos alunos do Ensino Médio têm uma visão relacional deste símbolo, e, segundo os autores, isto tem implicado em dificuldades na resolução de equações baseadas em estratégias algébricas, uma vez que tal entendimento de fato suporta uma concepção estrutural das equações.

Os autores das pesquisas acima mencionadas concordam que a incompreensão do sinal de igual em seu aspecto relacional é fruto da falta de foco explícito nos currículos escolares. Tomemos como exemplo, nos Anos Iniciais, a grande preocupação quanto ao ensino das operações básicas e ao significado dos símbolos operatórios (+, -, x e ÷), enquanto ao sinal de igual (=) é dada uma importância secundária. Knuth *et al.* (2006) nos dizem que:

> [...] para agravar ainda mais a falta de oportunidades dos alunos para desenvolver sua compreensão do sinal de igual, está o fato de que muito pouca atenção é dada ao símbolo em materiais curriculares - apesar de sua onipresença. Além disso, análises de materiais curriculares sugerem que usos relacionais são menos comuns do que usos operacionais (Knuth *et al.*, 2006, p. 309 - tradução nossa).

O que estes autores querem nos dizer é que é comum encontrarmos predominantemente nos livros didáticos e nas práticas pedagógicas atividades que contemplem o sinal de igual como uma orientação do tipo "resolva esta operação" ou "faça isto" (foco no campo aritmético). Isso contribui para o entendimento de um único significado da igualdade, o operacional, e, por deixar de desenvolver um senso estrutural da igualdade, cujo resultado é a dificuldade na aprendizagem de álgebra, mais especificamente na resolução de equações.

Para Oaks (2010), outro fator que também contribui para a compreensão do sinal de igual apenas em seu aspecto procedimental é o fato de usarmos um vocábulo único para todos os seus significados. Em português, por exemplo, usamos apenas a palavra "igual" e seu símbolo "=" para igualar todos os tipos de objetos matemáticos. Em contraste, Oaks (2010) aponta que os algebristas árabes medievais usavam termos distintos para denotar igualdade: *sawiya* (ser equivalente, ser igual), *mithl* (ser semelhante, do mesmo tipo) e '*adala* (ser igual e bem equilibrado) (Oaks, 2010). Entre esses três termos, os matemáticos árabes medievais usavam *'adala* para transmitir o significado relacional de igual em equações algébricas. Para Radford (2022ª),

> [...] por meio de diferentes palavras, esses matemáticos deixaram clara uma distinção conceitual entre vários aspectos da igualdade. O que hoje chamamos de significado processual de igualdade cairia na categoria *sawiya*. Em contraste, o significado relacional de igualdade cairia no *'adala*. Em muitas línguas, o discernimento desses diferentes significados é turvo e todos eles se decompõem em uma única palavra, a saber, a palavra igual (Radford, 2022a, p. 1153, tradução nossa).

Nesse sentido, é preciso que as diferentes compreensões do símbolo de igual (significados procedimental e relacional) sejam partes centrais da matemática escolar (Radford, 2022b), desde os Anos Iniciais até o Ensino Médio, pois isso pode compensar em melhor desempenho em álgebra. A forte relação entre o entendimento do caráter relacional do símbolo aqui discutido e a construção do conceito de equação e a sua resolução/simplificação exige um trabalho em que os estudantes acumulem experiências com a igualdade.

Bandarra (2011) sugere que, para se alcançar o entendimento algébrico do sinal de igual, é imprescindível que o professor proponha tarefas nas quais os alunos sejam motivados a usar o pensamento relacional, enxergando as partes equacionadas em uma relação estrutural: comparações de expressões aritméticas (identificar se uma igualdade é falsa ou verdadeira) e a descoberta de números desconhecidos (completar sentenças de modo a tornar a igualdade verdadeira, por exemplo 5+__=7+3).

Para Ponte, Branco e Matos (2009), a ocorrência de situações deste gênero permite que paulatinamente os estudantes tomem consciência que uma equação é uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos, levando-os também a desenvolver o conceito de igualdade da maneira como é exigida na álgebra. No entanto, para que isto aconteça, importa que o foco não seja exclusivamente o cálculo, mas antes, a observação de padrões que envolvem as operações aritméticas de maneira não calculada. São essas experiências que promovem, segundo Filloy e Rojano (1989), uma ruptura entre maneiras aritméticas e algébricas para simplificação e resolução de equações.

No Brasil, as orientações curriculares mais recentes, como a BNCC, apontam para esta mesma direção: a necessidade desde os anos iniciais de explorar situações em que o sinal de igual surja com significados distintos.

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (Brasil, 2018, p. 226).

Essas experiências com a noção de equivalência, por meio do estudo dos seus princípios, se constituem como uma estratégia de fomento ao desenvolvimento do pensamento algébrico e, segundo Radford (2022b), abre caminhos para a introdução de equações simples. Ao dar ênfase ao estabelecimento e a análise de relação entre os números e as operações, ofertamos ferramentas que implicam numa possibilidade de superação da compreensão da álgebra como aplicação de “regras práticas” e manipulação simbólica.

Nesse sentido, temos como desafio pedagógico conceber atividades de ensino-aprendizagem que promovam o encontro significativo dos estudantes com as regras algébricas que sustentam a simplificação das equações (discutidas no tópico 4.2) e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para Radford (2022a), para além desses tipos de tarefas como sentenças aritméticas abertas ou equações alfanuméricas, uma excelente estratégia na compreensão dos significados do sinal de igual e das equações e conceitos necessários para simplificá-las é a resolução de problemas.

Por tratarmos de uma investigação que se dá em torno do pensamento algébrico, é essencial que explicitamos nossa compreensão sobre a temática. Mas, afinal, o que é e o que caracteriza o pensamento algébrico?

4.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO

No senso comum, o saber algébrico está relacionado às sentenças matemáticas com a presença de incógnitas. Tal concepção tem relação intrínseca com as experiências escolares desenvolvidas nas últimas décadas no ensino de álgebra, que a reduziam ao formalismo das representações simbólicas e a aplicação de regras e macetes para manipular símbolos na simplificação de equações. Lins e Gimenez (1997) caracterizam como superficial esse ato redutivo de descrever a atividade algébrica, como “calcular com letras” ou simplesmente associá-la com conteúdos (ao que eles chamam de “coisas da álgebra”: equações, cálculo literal, funções). Isso porque, ao caracterizar o que é ou não do campo da álgebra apenas por conteúdo ou por notação literal, deixamos de fora “coisas” que podemos conferir *status* de atividade algébrica.

Já na literatura científica, não existe uma concordância sobre o que seja pensamento algébrico. Porém, há um consenso em muitas pesquisas: o ensino de álgebra não é “cálculo literal” e, por isso, não deve ter sua ênfase na manipulação de símbolos, no transformismo algébrico, em que o foco é essencialmente na linguagem simbólica algébrica. Antes, é entendido como o desenvolvimento de uma forma especial de pensar (Almeida; Câmara, 2017).

Essa forma específica de pensar inclui a capacidade de manipulação de símbolos, porém vai muito além disso. Trata-se de um conjunto de habilidades que antecedem o uso da linguagem algébrica e que possibilitam pensar para generalizar e compreender as relações e as estruturas dos números e operações (Almeida, 2016). Como diz Canavarro (2007, p. 88), “no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão. Trata-se de olhar através dos símbolos e não de olhar os símbolos”. Nesse sentido, enxerga-se a possibilidade de utilizar outros sistemas de representação que não seja apenas o simbólico para expressar essa forma de pensamento.

Se tomarmos, por exemplo, os princípios de equivalência e as ideias iniciais de equação, dependendo de que perspectiva assumimos, teremos práticas pedagógicas distintas. Se pensarmos num processo de ensino-aprendizagem que não está fundamentado numa perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico, ele assume a forma de memorização de “regras práticas” e resume-se à tendência letrista (Lins; Gimenez, 1997). Logo, um dos princípios de equivalência que indica que, por exemplo, se pode somar ou subtrair a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação, deixa de ser enunciado dessa forma e passa a ser encarado como uma regra de transposição que permite mudar um termo de membro, trocando-lhe o sinal.

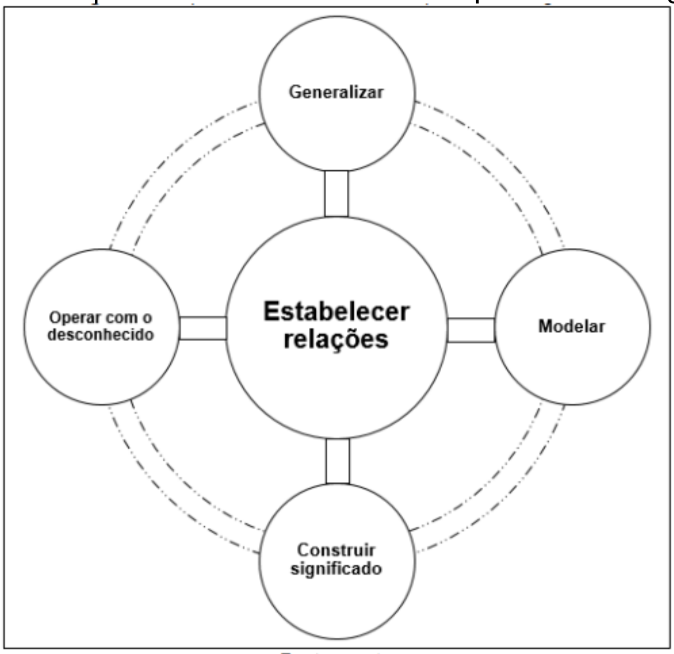
Para Blanton e Kaput (2005), pensar algebricamente emerge da atividade humana e se manifesta quando, mediante conjecturas e argumentos, se estabelece uma generalização. Estes autores caracterizam o pensamento algébrico como:

> [...] o processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso argumentativo e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade (Blanton; Kaput, 2005, p. 413).

Lins (1992) nos diz que pensar algebricamente é uma maneira de produzir significados para os objetos da álgebra. Por exemplo, é possível dizer que um estudante está pensando algebricamente quando é capaz de perceber regularidades em operações aritméticas ou quando identifica que um símbolo representa indeterminação numa equação.

Baseado nas definições de Kaput (1999, 2008), Lins (1992,1994) e Radford (2006, 2009), Almeida (2016) definiu o pensamento algébrico como a capacidade de “estabelecer relações, generalizar, modelar, construir significados e operar com o desconhecido” (Almeida, 2016, p. 78). O esquema a seguir (Figura 3), desenvolvido por Almeida (2016), mostra como essas características se comunicam e inter-relacionam entre si.

Figura 3 - Esquema das características do pensamento algébrico



Fonte: Almeida (2016, p. 80)

Alguns estudiosos têm conceituado o pensamento algébrico numa perspectiva histórico-cultural. É o caso de Luis Radford, que compreende o pensamento algébrico como "um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual" (Radford, 2011, p. 139). Radford compreende a aprendizagem da álgebra como a tomada de consciência acerca dos seus objetos, que se dá dentro de um processo histórico-cultural coletivo de reflexão, no qual os indivíduos, para a satisfação de suas necessidades comunitárias, trabalham juntos, e, na maioria das vezes, com tensões, conflitos e contradições (Radford, 2020). Além disso, Radford aponta três condições essenciais que caracterizam o pensamento algébrico: a expressão semiótica, a indeterminação e o pensamento analítico-dedutivo.

4.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO NA PERSPECTIVA DA LUIS RADFORD

Numa perspectiva em que o pensamento algébrico supera a abordagem das representações simbólicas e acreditando num projeto de educação que está preocupado com a formação não-alienante dos sujeitos, nesta pesquisa optamos por caracterizar o pensamento algébrico na perspectiva de Luis Radford (*Laurentian University*, Canadá). De acordo com este autor, o pensamento algébrico difere das demais correntes contemporâneas nos seguintes aspectos: o pensamento algébrico não deve estar associado apenas ao simbolismo alfanumérico e não deve ser visto como uma aritmética generalizada (Radford, 2021b).

O teórico defende que o reduzir ao simbolismo “pode revelar-se muito limitante, em particular às abordagens da álgebra inicial. Tal exigência pode levar ao fracasso em reconhecer formas não-simbólicas de pensamento como genuinamente algébrico” (Radford, 2018, p. 6). Para Radford, o simples fato da presença de linguagem alfanumérica numa atividade matemática “não é condição necessária nem suficiente para pensar algebricamente” (Radford, 2021b, p. 175).

Outrossim, do ponto de vista Radford (2018), é preciso distinguir a aritmética da álgebra, posto que pensar algebricamente pressupõe operar dedutivamente, a partir de premissas, e tratar grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas, abrindo mão de estratégias intuitivas, como a tentativa e erro, tão comuns no pensamento aritmético.

Ao propor uma ruptura entre pensamento algébrico e aritmético, Radford apresenta três condições que delineiam o que é essencialmente característico do pensamento algébrico: a indeterminação de grandezas, a denotação das grandezas (que podem ser nomeadas ou simbolizadas) e a analiticidade (operar dedutivamente) (Radford, 2021b). Nesse sentido, a caracterização do pensamento algébrico não se resume à natureza da grandeza (a presença de grandezas não conhecidas ou não determinadas), mas no tipo de raciocínio que é feito. Não são as representações simbólicas que estão no cerne do pensar algebricamente, mas, sim, as formas analíticas de pensar as quantidades desconhecidas. A situação a seguir, explicitada por Radford, ilustra de forma clara tal distinção:

> Considera-se frequentemente que a solução para a equação $2x + 2 = 10$ automaticamente requer raciocínio algébrico, já que a equação envolve o uso de letras, independentemente das especificidades do raciocínio seguido pelo estudante. No entanto, como temos notado muitas vezes em nossas pesquisas nas escolas, os estudantes muitas vezes procedem por tentativa e erro: eles substituem o valor de x por 1, depois por 2, e assim por diante, até encontrar o valor $x = 4$ que torna a igualdade verdadeira. Este método de tentativa e erro satisfaz a primeira e a segunda condição de nossa caracterização do pensamento algébrico, mas não satisfaz a terceira condição: o

> raciocínio seguido não é dedutivo. Dentro de nossa caracterização do pensamento algébrico, esta forma de pensar e resolver o problema não é algébrica: é aritmética (Radford, 2021b, p. 175).

Nesse exemplo mencionado por Radford, pensar algebricamente conduziria o aluno a agir de forma analítica a partir da premissa de que símbolo de igualdade é uma indicação de equivalência. Assim, todas as ações subsequentes do aluno deveriam manter a igualdade de ambos os termos, o que implica a visualização da equação em sua totalidade, bidirecionalmente. Radford explica que “se os alunos deduzirem que $2x + 2 = 10$ equivale a $2x = 8$ (subtraindo 2 de ambos os lados da equação), podemos dizer que os alunos estão pensando algebricamente” (Radford, 2018, p. 9). Eles estão trabalhando por meio das consequências de assumir que $2x + 2$ é igual a 10. Esse procedimento, baseado na relação de equivalência, é, em sua essência, algébrico.

Quanto aos procedimentos para a simplificação de equações por meio de estratégias genuinamente algébricas, a pesquisa de Oaks e Alkthateed (2007) aponta algumas ideias básicas. Estas estratégias se baseiam na compreensão de três operações simplificadoras: *al-jabr*, *al-muqabalah e raad*[14]*. Al-Jabr* é a operação que reduz ou elimina termos iguais a ambos os membros da equação; enquanto *al Muqabalah* é a operação que combina termos iguais em ambos os membros da igualdade; já a operação *raad* implica na redução do coeficiente do termo de maior potência para um (Oaks, 2010). Tais operações estão intrinsecamente ligadas à compreensão bidirecional do sinal de igual, o que implica em diferentes maneiras de simplificar e resolver equações[15]: “remover ou acrescentar” (eliminar ou adicionar termos semelhantes de ambos os lados da equação) e “separar” (isto é, reduzir o coeficiente do desconhecido a 1).

Ao estabelecer essas três condições, Radford (2021b) evidencia que a analiticidade é o núcleo do pensamento algébrico e condição primordial para o distinguir de outras formas de pensar. O que queremos dizer com formas analíticas de pensar são maneiras de conseguir deduzir algo sobre quantidades a partir de situações que envolvem quantidades conhecidas e desconhecidas, tomando as indeterminações como se fossem conhecidas. A dedução é uma estratégia de

[14] Tais regras são explicadas por Mohammed Ben Musa Al-Khwarizmi, num dos livros árabes sobre álgebra mais importantes da Idade Média: Tratado sobre o cálculo de Al-jabr e Al-muqabala.
[15] Radford (2021) afirma que tais regras não precisam ser introduzidas em salas de aula por meio de seus próprios nomes e significados históricos, mas que é preciso que compreendamos a natureza epistemológica cultural-histórica das ideias algébricas que os alunos são convidados a encontrar.

pensamento a partir de premissas, por isso, não faz uso da “tentativa e erro” e de outros métodos aritméticos, porquanto se fundamenta em uma sequência ou ordem de certezas.

Essa ruptura mencionada entre esses tipos de pensamento, o algébrico e o aritmético, é particularmente interessante e necessária na resolução de equações, posto que para alguns tipos de equação, estratégias aritméticas não são suficientes para resolvê-las. Tomemos como exemplo estratégias de simplificação para os seguintes tipos de equação: $AX + B = C$ e $AX + B = CX + D$. Segundo Filloy e Rojano (1989), para o primeiro tipo de equação, a resolução pode ser obtida simplesmente desfazendo, uma a uma, as operações dadas. Logo, o estudante pode se apoiar em uma estratégia puramente aritmética. Entretanto, tal estratégia não é suficiente na resolução de equações do segundo tipo. Para esta, é necessário estar consciente de alguns elementos de uma sintaxe algébrica propriamente dita, uma vez que sua resolução envolve operações extraídas de fora do domínio da aritmética – ou seja, operações sobre o desconhecido. Operar no desconhecido se revela como uma ação essencial no pensamento algébrico, pois não basta inverter as operações sobre os coeficientes para solucioná-la.

Radford apresenta uma tipologia de formas de pensamento algébrico com base na capacidade de generalização: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão (Radford, 2009). No Pensamento Algébrico Factual ou Concreto o aluno pensa algebricamente a indeterminação e o desconhecido, porém, de forma implícita, e ancora suas descobertas num processo de mediação sensorial (se utiliza de gestos, palavras, representações gráficas e ritmos para expressar o pensamento), evidenciando a natureza multimodal dessa forma de pensar. No Pensamento Algébrico Contextual, o nível de objetivação é mais profundo e o aluno é capaz de construir uma fórmula para expressar generalizações; assim, gestos e ritmos são substituídos por um discurso explícito. Quando o aluno atinge nível do Pensamento Algébrico Padrão ou Simbólico passa a usar fórmulas alfanuméricas, ou seja, uma linguagem simbólica algébrica para expressar o pensamento (Radford, 2009).

As diferentes formas de pensar algebricamente mencionadas acima têm uma relação intrínseca com a maneira como os estudantes representam seus pensamentos, se apoiam-se ou não em artefatos e se são capazes de traduzir o que pensam numa linguagem simbólica. Essa é uma importante característica do pensamento algébrico na teoria desenvolvida por Radford (2021b): a representação do pensamento a partir de diversos sistemas semióticos. Em processos de objetivação, geralmente, professores e alunos recorrem a uma variedade de artefatos, signos ou outros dispositivos linguísticos para que os saberes historicamente constituídos tornem-se progressivamente notados.

> Os objetos, ferramentas, dispositivos linguísticos e signos que os indivíduos usam intencionalmente nos processos de criação de significados sociais para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar claras suas intenções e para realizar suas ações a fim de atingir o objeto de suas atividades, são chamados de meios semióticos de objetivação (Radford, 2021a, p. 136).

Essa teoria, que discute a unicidade entre a linguagem e o pensamento, caracteriza o pensamento como uma prática social, cultural e multimodal, e que por isso pode ser expresso por meio de múltiplas linguagens, não só a simbólica. Gomes e Noronha (2020) explicam que na perspectiva da TO podemos visualizar o pensamento algébrico materialmente de diferentes formas:

> O pensamento algébrico não consiste apenas no que é mental, mas é formado também por componentes externos e corporais, se constituindo como multimodal. Ele diz que é possível o sujeito pensar com e através do corpo, por isso, pondera a relevância dos meios semióticos manifestos pelos alunos para se referirem ao indeterminado, o que requisita uma análise multimodal por parte do professor-pesquisador (Radford, 2014) que trabalha com essa perspectiva (Gomes; Noronha, 2020, p. 145).

Ou seja, embora o pensamento possa ser expresso pelo simbolismo alfanumérico, ele também pode ser revelado/emergir por outros meios e sistemas semióticos, sem que isto comprometa a natureza algébrica do pensamento. É consenso entre os teóricos que a linguagem simbólica constitui um poderoso sistema semiótico, uma vez que possibilita a execução de cálculos de forma muito eficiente, mas não limita o pensamento algébrico a ela. Entretanto, numa perspectiva inicial da álgebra, o simbolismo pode ser desnecessário.

Radford (2022b) defende que nesse processo inicial de formação do conceito de equações e do significado relacional do sinal de igual, os estudantes podem recorrer a sistemas semióticos concretos visuais, que se valem de objetos concretos e desenhos icônicos. Tanto a linguagem quanto os artefatos são imprescindíveis para que esses conceitos tornem-se paulatinamente notados e para que os estudantes sejam capazes de apropriar-se da linguagem simbólica. Ribeiro e Cury (2021) destacam a potencialidade de sistemas semióticos concretos nos estudos introdutórios da álgebra:

> [...] efetivamente, no início do trabalho com álgebra, podemos expressar um problema em linguagem corrente, pensamos sobre ele, tentamos expressá-lo com ajuda de símbolos – que, dependendo da faixa etária dos alunos, podem ser figuras ou letras – e chegamos à linguagem algébrica que, por sua vez, por meio da generalização, nos permite utilizar o mesmo pensamento em outras situações-problemas (Ribeiro; Cury, 2021, p. 14).

É importante frisarmos que, de acordo com o que propõe a TO, o uso desses sistemas semióticos concretos acontece num contexto no qual as tarefas propostas são de investigação de situações reais.

Radford (2022b), ao discutir o processo de ruptura do pensamento aritmético para o algébrico, a transição dos níveis de pensamento algébrico (até atingir o pensamento algébrico simbólico), alerta que mudanças profundas nos hábitos e conceitos aritméticos não ocorrem espontaneamente no momento em que o aprendiz se depara com a necessidade de tal mudança e que por isso intervenções adequadas do professor no ponto de transição e o uso de sistemas semióticos podem ser cruciais para os alunos que estão aprendendo álgebra pela primeira vez. Pesquisa realizada por Radford (2022a, 2022b) mostra esse processo de tomada de consciência por meio da criação de dois sistemas semióticos concretos. Esses sistemas semióticos pretendiam trazer à tona os conceitos algébricos elementares necessários para resolver equações e preparar os alunos para o encontro com o simbolismo alfanumérico.

Nesse sentido, entendemos que um sujeito inicia seu processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, no caso desta pesquisa, na resolução de equações, lançando mão de múltiplas linguagens e uma variedade de artefatos e signos, apoiados em sistemas semióticos, que precisam ser percebidos por meio do trabalho conjunto de estudantes e professores. Sem necessariamente fazer uso de linguagem simbólica (simbolismo alfanumérico), estudantes podem expressar o que pensam sobre objetos matemáticos e referir-se às indeterminações por meios semióticos, como gestos, postura corporal, desenhos, língua natural, artefatos.

Corroborando com a ideia de que o pensamento algébrico apresenta múltiplas formas de expressão e de representação e que tal expressão semiótica é um componente essencial do pensar algébrico, interessa-nos, nesta pesquisa, analisar os indícios de pensamento algébrico que emergem à medida que quatro estudantes do

Primeiro Segmento da Educação de Jovens e Adultos exploram coletivamente atividades de ensino-aprendizagem que abordam as equações e o sinal de igual em seu caráter relacional. Para isso, tentaremos compreender a maneira como os estudantes do primeiro segmento da Educação de Jovens e Adultos em seu trabalho com o professor encontram e refinam os significados algébricos do sinal de igual e os conceitos e estratégias algébricas necessárias para resolução de equações. Buscaremos também identificar o modo como os estudantes se referem ao indeterminado e se operam dedutivamente a partir de premissas. Neste sentido, estaremos atentos na atividade ao modo como o saber algébrico pode ser alcançado pelos estudantes, às problematizações, à valorização dos raciocínios suscitados e às relações dos sujeitos dentro desse processo.

5 PERCURSO METODOLÓGICO

A percepção de que as relações e as concepções nas pesquisas em Educação Matemática vão além do ato de quantificar e mensurar dados nos levam à escolha por uma pesquisa com enfoque qualitativo, na qual serão consideradas as seguintes características: situação como fonte de dados, sendo o investigador instrumento-chave da produção dos mesmos; preocupação com a descrição e só secundariamente a análise dos dados; atenção a todo o processo, ou seja, o que acontece, bem como o produto e o resultado final (Bogdan; Biklen, 2015).

Segundo Radford (2015a), uma metodologia só pode fazer sentido por meio de sua inter-relação com um conjunto de princípios teóricos e as questões de pesquisa que buscamos responder. Logo, “os princípios teóricos e o método que produz fatos e interpretações devem encaixar-se mutuamente” (Radford, 2021a, p. 27).

Nesse sentido, para estruturar o percurso metodológico desta pesquisa, seguimos as orientações metodológicas da Teoria da Objetivação (Radford, 2015a; Radford, 2021a), no que diz respeito à produção, registro e posterior análise crítica dos dados. Para isso, elaboramos um experimento que buscou colocar estudantes e professora em atividade de ensino-aprendizagem (AEA), atividade esta que revelou formas algébricas de pensar o sinal de igual e a simplificação de equações.

O método de análise dos dados será o multissemiótico (Radford, 2015a).

Nas subseções a seguir, buscamos caracterizar os sujeitos e o campo da pesquisa e detalhamos cada uma das orientações metodológicas da TO mencionadas acima: elencamos os princípios pedagógicos seguidos para o desenho da atividade de ensino-aprendizagem, a configuração das tarefas, os processos para a produção e coleta de dados e as especificidades das suas análises.

5.1 CAMPO E SUJEITOS DA PESQUISA

Participaram desta pesquisa quatro estudantes matriculados no Ciclo 2[16] de uma escola pública da cidade de João Pessoa-PB, turma em que a pesquisadora atua como professora titular e é composta por 14 alunos, sendo 12 idosos e apenas 2

[16] O ciclo 2 é a série da Educação de Jovens e Adultos que corresponde aos 4° e 5° anos do Ensino Fundamental.

jovens. O convite para participar da pesquisa foi direcionado a toda turma, mas apenas quatro estudantes, Severa (59), Marlene (54), Josué (62) e Ronaldo17 (61) aceitaram.

Apesar de estar situada em Manaíra, a escola atende majoritariamente moradores do Bairro São José, uma comunidade que surgiu sob forma de assentamento espontâneo às margens do Rio Jaguaribe, marcada por graves problemas de infraestrutura e sociais (falta de saneamento básico, enchentes em épocas de chuvas, deslizamento de terra, péssimas condições de moradia, violência, criminalidade, desemprego).

Esses quatro estudantes nunca frequentaram a escola, nem mesmo na infância, sendo essa a primeira vez que vivenciam processos educativos em espaços formais. O ingresso nesta instituição de ensino ocorreu em 2021, após o período de isolamento social (devido à pandemia da COVID-19). É um traço comum entre eles o fato de não serem leitores. Ao ingressarem na escola, sequer reconheciam/nomeavam as letras. Com avanços no processo de alfabetização e letramento, no momento da pesquisa encontravam-se na hipótese silábico-alfabética de escrita[18].

Todos eles trazem consigo as marcas de experiências degradantes enquanto trabalhadores, incluindo trabalhos não remunerados e forçados no campo ou exercendo funções domésticas durante a infância. Atualmente trabalham em atividades informais. Três deles têm como principal fonte de renda a coleta de resíduos recicláveis. Outro faz serviços que ele denomina “bico” (faxinas, diárias em restaurantes e bares), no entanto, também costuma coletar material reciclável como fonte de renda extra. O trabalho com coleta seletiva inspirou a elaboração da atividade de ensino-aprendizagem desta pesquisa.

A escolha por desenvolver esta pesquisa com estudantes da EJA se deu por dois motivos principais: a vivência da autora enquanto docente nesse segmento tem apontado que as limitações e dificuldades dos estudantes podem ser superadas quando se pensa em um projeto pedagógico significativo; e muitas pesquisas no campo do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais têm se voltado para crianças, não sendo realizadas ainda pesquisas com estudantes jovens e adultos em fase inicial de escolarização, como apontado em nossa revisão de literatura.

[17] Nomes fictícios.
[18] De acordo com a Teoria da Psicogênese da Língua Escrita, de Emília Ferreiro e Ana Teberosky.

5.2 PROCESSO DE CONSTITUIÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

Com base na teoria materialista dialética da Objetivação que fundamenta esta pesquisa, a cognição só pode ser estudada em movimento; ou seja, por meio da atividade que se desenrola. Nesta teoria, no contexto da aprendizagem escolar, essa atividade é a atividade de ensino-aprendizagem em sala de aula (Radford, 2021a). Por essa razão, a atividade de ensino-aprendizagem constitui nossa unidade metodológica de análise.

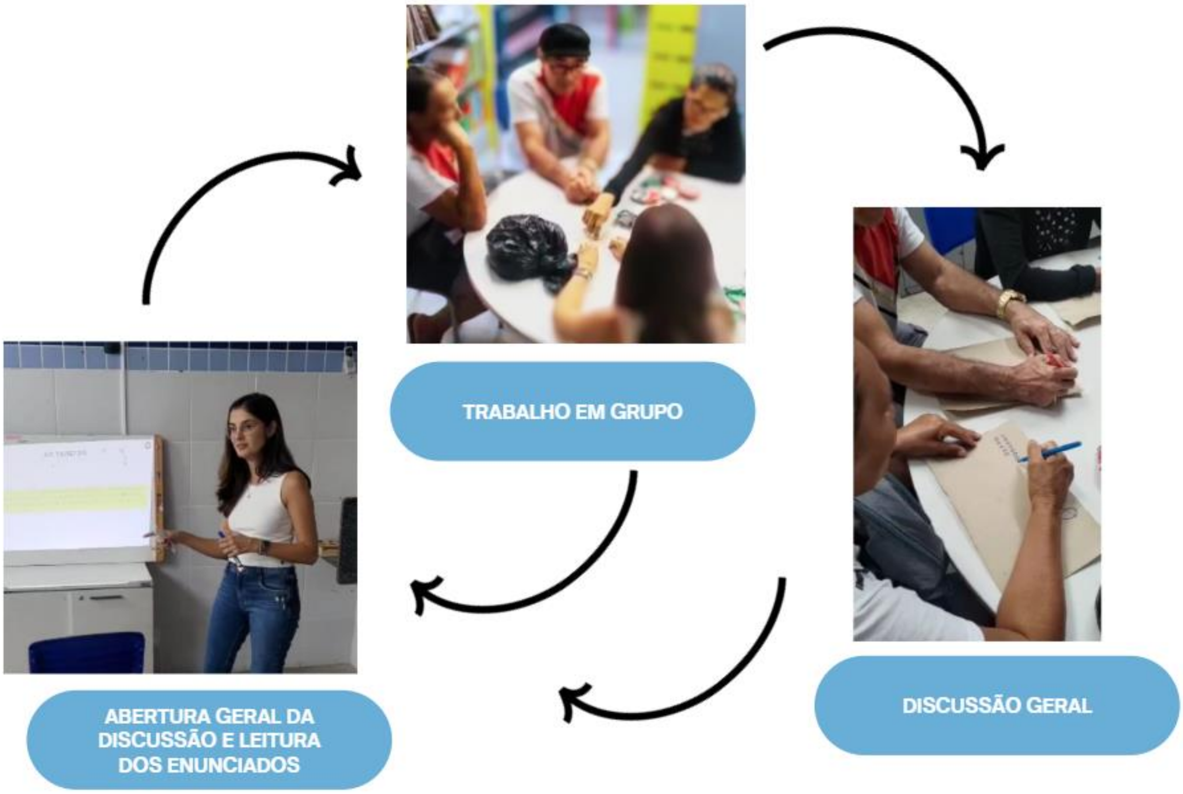
Como mencionado anteriormente, o processo de aprendizagem ocorre no labor conjunto, num processo de cooperação em que professor e aluno são agentes culturais e trabalham ombro a ombro em busca da realização de uma obra comum (Radford, 2021a). Por tal razão, todas as atividades de ensino-aprendizagem propostas nesta pesquisa serão realizadas seguindo dois princípios pedagógicos organizadores, explicitados na subseção a seguir.

5.2.1 Princípios pedagógicos de organização da atividade

Por entender a aprendizagem como um fenômeno social, o primeiro princípio pedagógico organizador da atividade tem relação com a estruturação de um espaço de colaboração e interação entre os sujeitos (alunos e professores), com a formação de um pequeno grupo para resolução de equações. Radford (2020) alerta que esta interação não deve ser compreendida em termos de “negociação de significados, mas como uma cooperação entre os indivíduos na produção coletiva de ideias em sala de aula” (Radford, 2022a, p. 1153), o que ele denomina de produção de um trabalho em comum.

Os estudantes foram organizados em um grupo e a atividade de ensino-aprendizagem (AEA) dividida em três fases (Figura 4). Inspirada na estrutura do labor conjunto, seguimos algumas de suas etapas: 1). a abertura da discussão geral; 2) trabalho em grupo (estudantes e professor); e 3) discussão geral.

Figura 4 - Fases da atividade e estruturação do espaço de interação entre estudantes e professora

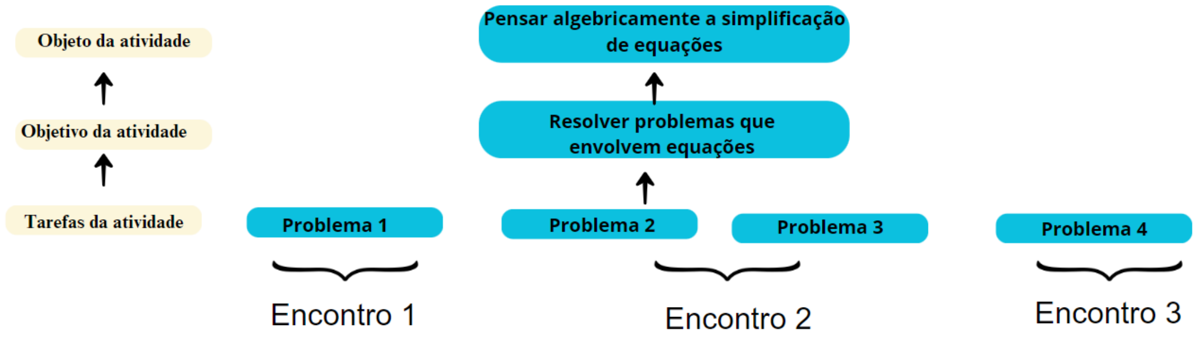


Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Já o segundo princípio pedagógico organizador tem relação com a organização didática da atividade de ensino-aprendizagem: trata da escolha e organização das tarefas e dos problemas matemáticos a serem resolvidos, bem como das estratégias para resolvê-los. Para o delineamento da AEA, nos baseamos na estrutura geral proposta na Teoria da Objetivação: as tarefas alinhadas com o objetivo da atividade, que, por sua vez, está alinhada com o objeto da atividade.

O objeto refere-se aos saberes matemáticos que serão mobilizados, o objetivo traz a intencionalidade do professor e a tarefa se configura como as ações e problemas sequenciais que devem ser solucionados pelos discentes durante a execução da atividade em sala de aula. Nesta pesquisa, o objeto da atividade de ensino-aprendizagem é o encontro dos estudantes com formas histórico-culturais de pensar algebricamente sobre equações. Para que a atividade se desenvolva na direção desse objeto, estabelecemos como objetivo a resolução de problemas que envolvam ideias iniciais de equação de forma algébrica. Para atingir o objetivo da atividade, uma tarefa específica foi concebida: uma sequência de quatro problemas dotados de uma dificuldade conceitual crescente (Figura 5).

Figura 5 - Estrutura geral da atividade de ensino-aprendizagem

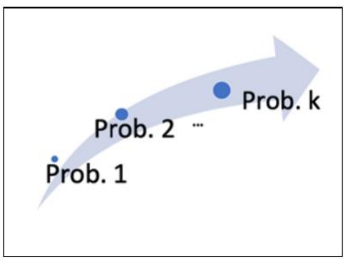


Fonte: Adaptado de Radford (2021a, p. 125)

5.2.2 Projeto das tarefas

Tratados os princípios organizadores da atividade de ensino-aprendizagem, elucidaremos agora a caracterização das tarefas propostas. Segundo esta teoria, ao pensar nas tarefas, é preciso atentar para as seguintes questões: levar em conta os que os alunos já sabem e envolver, na medida do possível, o uso de artefatos; quanto aos problemas matemáticos em si, estes devem ser interessantes do ponto de vista dos estudantes; ser organizados de acordo com uma unidade conceitual e contextual e ter uma complexidade conceitual crescente (Radford, 2021a). A Figura 6 apresenta como os problemas devem ser elaborados do ponto de vista da Teoria da Objetivação. A seta que liga os problemas os conecta em termos de uma unidade conceitual e contextual e sua crescente complexidade conceitual.

Figura 6 - Desenho dos problemas baseado em uma unidade conceitual e contextual e em uma crescente complexidade conceitual



Fonte: Radford (2021a, p. 177)

Os problemas foram formulados a partir de uma história narrativa (Quadro 1), que faz alusão à coleta de resíduos recicláveis, e organizados de acordo com uma complexidade conceitual crescente (Quadro 2) – em princípio, problemas menos complexos e, posteriormente, problemas mais complexos (a saber: X + 4 = 13; 7 = 2 + X; 2X = X + 6; 3X + 1 = X + 5).

Quadro 1 - Unidade contextual (História narrativa)

Dois agentes de coleta de materiais recicláveis do Bairro São José, João e Luiza, costumam recolher latas nas redondezas. O material coletado é entregue na ASCARE-JP, uma associação de coletores.

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Quadro 2 - Problemas

Encontros	Problemas
Encontro 1	**Problema 1:** João e Luiza coletaram a mesma quantidade de latas. João entregou 4 latas e uma sacola. Já Luiza entregou 13 latas. Quantas latas havia na sacola?
Encontro 2	**Problema 2:** Luiza coletou 7 latas. João coletou 2 latas e mais algumas que estão na sacola. A quantidade de latas de Luiza e João são iguais. Quantas latas há na sacola? **Problema 3:** Agora Luiza tem 2 sacolas e uma lata. João tem 1 sacola e mais 6 latas. Sabendo que eles coletaram a mesma quantidade e o número de latas na sacola é sempre o mesmo, quantas latas há em cada sacola?
Encontro 3	**Problema 4:** Por duas semanas, João coletou a mesma quantidade de latas. Na primeira semana ele tinha 3 sacolas mais 1 lata. Na semana seguinte, 5 latas e 1 sacola. Quantas latas havia em cada sacola? Lembre-se que há a mesma quantidade de latas nas sacolas.

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Esses problemas foram traduzidos e resolvidos a partir de um Sistema Semiótico Concreto (SSC). Tal sistema era composto pelos seguintes objetos culturais materiais:

- Sacolas contendo um número desconhecido de latas;
- latas;
- um cartão com o sinal de igual.

As sacolas desempenham o papel de incógnitas, enquanto as latas desempenham o papel dos números conhecidos (constantes).

5.3 REGISTROS DOS DADOS

Para que fosse possível uma análise multimodal dos dados, a atividade de ensino-aprendizagem foi registrada por meio de gravação de áudios e vídeos. Além disso, coletamos registros escritos das estratégias dos participantes (folhas de atividades dos estudantes) (Radford; Sabena, 2015).

Nesse sentido, adaptamos e executamos as etapas sugeridas por Radford (2015a):

Fase 1: Gravação de vídeo e áudio:

Uma câmera de vídeo e um gravador de voz foram direcionados para o pequeno grupo durante o labor conjunto de cada encontro. Para operar a câmera, optamos por convidar uma pessoa que já possuía vínculo com os estudantes, com a intenção de dirimir o estranhamento. O foco das gravações alternou, à medida que os participantes se engajaram na atividade.

Fase 2: Folha de atividade dos alunos:

Ao final de cada encontro, cada estudante recebeu uma folha de papel na qual anotou suas ideias e escreveu as respostas do problema por meio do Sistema Semiótico Icônico (registros pictóricos).

Fase 3: Notas de campo:

A professora-pesquisadora usou um caderno para criar notas de campo ao longo e após cada encontro. Essas notas de campo contêm observações sobre o que aconteceu na atividade, com destaque aos segmentos salientes que mereceram maior atenção no momento da análise de dados.

Ao final de cada encontro, as folhas foram digitalizadas e junto aos materiais de áudio e vídeo foram armazenados em *drive* eletrônico, compondo, então, o acervo de imagens, áudios e vídeos. Entretanto, apenas as situações interativas registradas nas videogravações e audiogravações foram analisadas. Quanto à organização, os dados foram armazenados em três pastas, uma para cada encontro.

6 O MÉTODO MULTISSEMIÓTICO DE ANÁLISE DOS DADOS

Como mencionado anteriormente, na TO a cognição humana é concebida como cognição sensorial: "uma senciente forma cultural e histórica sensível e multimodal de pensar, agir, imaginar, sentir criativamente, transformar e dar sentido ao mundo" (Radford, 2022c, p. 277), "em que corpo, mente e mundo são concebidos como entidades entrelaçadas" (Radford, 2021a, p. 147).

Partindo dessa concepção acerca da cognição e do princípio de que o pensamento algébrico possui esta natureza multimodal, utilizamos como base para a análise dos dados o método multissemiótico. Nossa análise gira em torno do papel dos signos, da linguagem, dos artefatos e do corpo (gestos, postura corporal, ações cinestésicas, percepções). Aqui, também queremos destacar que a cognição acontece na e em atividade, e, por tal razão, a atividade é para nós a unidade metodológica de análise.

Nesta pesquisa, ao investigar como, juntos, os estudantes aprendem e os professores ensinam, uma série de recursos discursivos e não discursivos foram levados em conta. Logo, nossa atenção esteve voltada aos diferentes meios semióticos de objetivação por meio dos quais os sujeitos expressaram significados e estratégias de pensamento algébrico.

Pautamos nossa análise de dados em três etapas, como sugerida por Radford (2015a)[19]. Em princípio, realizamos uma primeira análise das videogravações para seleção dos episódios que aparentaram ter evidências de pensamento algébrico. Uma vez identificados estes momentos, realizamos uma transcrição da atividade discursiva. Só então demos início à análise minuciosa e mais cuidadosa dos episódios, focados numa observação das atividades discursiva e não discursiva (gestos, apontamentos, posturas corporais, silenciamentos, entonação, hesitações...) conjunta dos estudantes e professora. Nesta etapa buscamos principalmente identificar momentos em que há a articulação entre diferentes meios semióticos de objetivação.

[19] Nossas etapas de análise são uma adaptação de Radford (2015). Em "*Methodological Aspects of the Theory of Objectification*" (Radford, 2015), é sugerido que a análise seja realizada em três etapas: 1) seleção dos segmentos salientes; 2) análise dos segmentos selecionados por meio das lentes e princípios teóricos; 3) inserção da cadência dos diálogos e outros gestos indexicais nas transcrições dos diálogos.

Após essa explanação do método envolvendo a pesquisa, nas próximas subseções deste capítulo apresentaremos as análises dos episódios com o propósito de identificar os indícios de pensamento algébrico, a saber: a) a existência do indeterminado; b) a referência a indeterminação por meios semióticos; c) as estratégias demonstradas pelas estudantes que apontam características do pensamento analítico. Nossa análise, então, se baseia nos três vetores do pensamento algébrico indicados por Radford (2021b).

6.1 EPISÓDIO DE ANÁLISE 1: a percepção da relação de igualdade

Iniciamos as análises dos dados com um episódio marcante do primeiro encontro que aponta um nó semiótico da atividade: a percepção dos quatro estudantes acerca do sinal de igual em seu caráter relacional, tão primordial para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para resolução de equação (Ponte; Branco; Matos, 2009). Habituados a encarar o símbolo de igualdade como um indicador operacional, durante a atividade, compreendê-lo como uma condição de equivalência exigiu certo empenho, um trabalho ombro a ombro de estudantes e professora.

A tarefa teve início com a leitura e discussão da história narrativa realizada pela professora[20] (ver Quadro 1). Em seguida, Severa, Marlene, Josué e Ronaldo foram convidados a resolver coletivamente o primeiro problema matemático (Quadro 3).

Quadro 3 - Primeiro problema (4 + X = 13)

João e Luiza coletaram a mesma quantidade de latas. João entregou 4 latas e uma sacola. Já Luiza entregou 13 latas. Quantas latas havia na sacola?

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Para que os estudantes encontrassem resposta para o problema, estavam dispostos sobre a mesa objetos materiais culturais que compunham o Sistema Semiótico Concreto (SSC): uma sacola contendo um número desconhecido de latas, várias latas e um cartão com o sinal de igual. Radford (2022a; 2022b) aponta que sistemas semióticos visuais, apesar de suas limitações, facilitam o primeiro contato

[20] Haja vista que os estudantes participantes da pesquisa não são leitores.

com o pensamento algébrico e podem garantir que estudantes tomem consciência das ações necessárias para simplificação algébrica de equações. Nas tarefas desta pesquisa, o SSC surgiu como uma peça-chave para o encontro dos estudantes com o pensamento algébrico, uma vez que estão vivenciando pela primeira vez processos educativos em espaços formais e tendo o primeiro contato com equações.

A intenção da professora era que, após a leitura e discussão do problema, os estudantes pudessem modelar a resolução a partir do SSC. Entretanto, manusear os artefatos não foi a primeira escolha para descobrir o número de latas da sacola. Mal a professora concluiu a leitura do problema, os estudantes, empregando estratégias aritméticas (cálculo mental e tentativa e erro), buscaram descobrir o número de latas da sacola. Segundo Fonseca (2002), a preferência por tais estratégias e a recusa pelos artefatos podem ser explicadas pelo fato de que estudantes adultos, ao adentrarem aos espaços formais de educação, já dominam noções matemáticas que foram aprendidas de forma intuitiva e informal ao longo da vida.

A professora percebeu que, para atribuir o número de latas da sacola, Severa, Josué, Marlene e Ronaldo igualaram as quantidades dentro e fora da sacola que pertenciam à Luísa. Ou seja, não compreenderam que a relação de igualdade deveria ser estabelecida entre o número de latas dos dois agentes de coleta (dois membros da equação). Nesse momento, todo o esforço da professora se voltou para que esta informação fosse levada em conta: gesticulou para espaços vazios que deveriam estar ocupados pelos artefatos, coordenando a ação com a fala:

> **1) Professora**: Uma entregou 13 latas e o outro 4 latas e uma sacola. (ao se referir a quantidade de cada agente, apontou para dois espaços vazios em lados distintos da mesa).

Os gestos de apontamentos para objetos ausentes realizados pela professora, denominados dêiticos *am phantasma*[21], "são cruciais na constituição de uma nova forma de reflexão psíquica: a imaginação” (Radford, 2021, p. 162). Diante da recusa dos estudantes em manipular os objetos, a ação tinha como propósito tornar evidente a igualdade entre as partes equacionadas do problema.

Após os apontamentos da professora, os estudantes fizeram um breve silêncio, quebrado pela retomada das ideias de Marlene:

> **2) Marlene:** Ele entregou 4 (ao dizer, aponta para um espaço vazio na mesa). Aí na bolsa tinha… latinhas! (ficou hesitante: balança a cabeça,

[21] Segundo Radford (2021a) , *dêiticos am phantasma* são aqueles gestos de apontamentos para o nada no campo da percepção.

> gesticula com indignação e cruza os braços). A gente não sabe a quantidade que tinha! Ele não falou que tinha 13! Só 4 e uma sacola.
>
> **3) Professora:** No problema tem uma informação importante para descobrir quantas latinhas tinha dentro da sacola.

A situação aparentou gerar desconforto entre os estudantes e a professora. Josué pouco falou e manteve os dedos entrecruzados sob a mesa; Marlene demonstrou inquietude, remexendo-se na cadeira e afirmando “não tem como saber”, “eu nunca aprendi matemática”, “é muito difícil”. Enquanto isso, Severa permaneceu em silêncio, agarrando firmemente a mochila que estava sob seu colo.

Queremos dar destaque ao engajamento da professora narrado neste episódio. Ficou evidente nas falas de Marlene (“não tem como saber”, “eu nunca aprendi matemática”, “é muito difícil”) e nas descrições das posturas corporais de Josué e Severa um sentimento de desânimo e de impossibilidade de aprender algo novo. Tais sentimentos reverberam também na professora: tensa e preocupada, ela busca um caminho que não seja o de apontar o que devem fazer. Ao contrário, ela tenta, por meio da leitura repetida do enunciado, articulando com gestos, envolver os estudantes e não os deixar desistir.

Após repetir a leitura e sinalizar que no enunciado há uma informação relevante, Severa, então, anuncia:

> **4) Severa:** Tinha 8! É que ele vinha com… (Não conclui pois foi interrompida por uma indagação de Ronaldo)
>
> **5) Ronaldo:** Quatro na mão e quatro na sacola? (parece não concordar)

A fim de que os estudantes percebessem o equívoco, a professora, então, repetiu o enunciado. Severa, por sua vez, desfez a expressão austera, esboçou um sorriso e disse:

> **6) Severa:** Ah! 13 e 13! (uniu as pontas dos dedos de cada mão, fez um movimento de aproximação e afastamento, articulando fala e movimento (Figura 7(a)). 13 e 13! (repete o movimento das mãos, agora com os dedos indicadores em riste (Figura 7 (b)). Se ele já tinha na mão quatro, quantas tinha na sacola pra completar as 13?
>
> **7) Ronaldo:** Tinha 9.
>
> **8) Severa:** (realiza uma contagem de dedos (Figura 7 (c)) Tinha 10!
>
> **9) Ronaldo:** Na mão tinha 4. Na sacola tinha quanto? (pergunta retórica) 9 com 4, 13.

Figura 7 - Severa executa gestos que fazem referência a ideia de equivalência e uma contagem com os dedos

(A) (B) (C)

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Nesse excerto da atividade é importante notar que o pensamento de Severa é composto a partir da seguinte ação: articulação entre gestos e palavras. Aqui queremos apontar como os movimentos das mãos de Severa constituem um recurso semiótico crucial para tornar aparente a percepção de que as duas partes da equação são equivalentes: sua ideia não ficaria clara, se não se valesse do corpo, uma vez que esta não é perfeitamente articulada em palavras.

Assim, nos damos conta do que Radford (2022c) aponta como "mente corporificada" (Radford, 2022c, p. 249). Isto é, na perspectiva teórica que fundamenta esta pesquisa, "o pensamento não é um fenômeno puramente mental" (Radford, 2022c, p. 250), mas, pelo contrário, pensar "inclui o corpo ou a carne e a materialidade do mundo (signos, artefatos, etc.)" (Radford, 2022c, p. 250). Neste e nos próximos episódios veremos constantemente essa relação dialética entre a mente e o corpo.

Ronaldo e Severa, apoiados num procedimento comparativo, descobriram a quantidade de latas na sacola. Essa estratégia não dá conta de operar com quantidades conhecidas e desconhecidas, ou seja, não demanda uma forma dedutiva de pensar soluções para o problema. No entanto, o reconhecimento da equivalência entre os membros da equação é um importante marco para que haja o encontro com as maneiras algébricas histórica e culturalmente instituídas para simplificar equações.

Então, a professora sugeriu que Ronaldo e Severa tentassem explicar usando os artefatos sob a mesa. Por trás dessa sugestão havia uma intencionalidade: o reconhecimento do símbolo de igual em seu sentido relacional e a denotação da indeterminação e, a partir daí, o encontro de um caminho que abandonasse as estratégias aritméticas e passasse a operar dedutivamente.

> **10) Professora:** A gente tem disponível latinhas, sacola e esse sinal (apontou para a tarja com o sinal de igual). Vocês já sabem o que esse sinal significa?

Os estudantes se entreolharam, fizeram um breve silêncio e arriscaram respostas, demonstrando insegurança.

> **11) Ronaldo:** De igual! A gente usa nas contas que vai fazer, para dar resultados.
>
> **12) Professora:** Em contas, usamos para indicar o resultado (concordou com Ronaldo). Mas nesse problema das latas e sacola, ele pode indicar outra coisa. Ele indica uma condição. Prestem atenção ao que falei. Eu disse que João e Luísa tinham exatamente a mesma coisa. Esse sinal indica uma igualdade e não um resultado. Ele serve pra dizer que coisas são equivalentes.

Fica evidente na fala de Ronaldo (fala 11) uma compreensão processual do sinal de igual (Ponte; Branco; Matos, 2009). A professora, então, apontou para outra perspectiva: uma compreensão relacional, apoiando-se na situação que estava sendo discutida na tarefa. Após o diálogo, a professora propôs mais uma vez que os estudantes traduzissem o problema para o SSC.

> **13) Professora:** Sabendo disso, organizem esse material.
>
> **14) Severa:** A quantidade tem que ser iguais dos dois camaradas.
>
> **15) Professora:** Essa informação é bem importante: a quantidade de um é exatamente igual à do outro (tornou a gesticular, alternando as mãos entre dois espaços vazios na mesa).
>
> **16) Severa:** O problema é que ninguém sabe quanto tem na bolsa!
>
> **17) Ronaldo:** Se uma tem treze e o outro tem 4… Pra completar as 13, faltam 9!

A maneira pretendida pela professora para organizar os artefatos e, posteriormente, descobrir o número de latas ainda não ocorreu. Então, a professora sugeriu novamente, tentando enfatizar a igualdade e a forma como eles podem arranjar as latas, para que o problema seja traduzido no SSC.

> **18) Professora:** Usando as latas, a sacola e o cartão de igual, como posso chegar a essa resposta? Pensem a partir do cartão (ao dizer isso, posicionou o cartão com sinal de igual no centro da mesa). Aqui serão as latas de Luiza (apontou para um espaço vazio à direita do cartão) e aqui as de João (apontou para um espaço vazio à esquerda do cartão). Coloquem aí: as latas de João e de Luiza.

Nas falas 13 e 18, a professora interagiu com os estudantes, convidando-os a pensar em outra possibilidade de resolução do problema. Prontamente, os estudantes responderam ao convite e, trabalhando coletivamente, se esforçaram para dar sentido a essa nova estratégia. Marlene, então, começou um procedimento de contagem ritmado:

> **19) Marlene:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (arrastou 13 latas para um canto da mesa (Figura 8 (a)) e posicionou o sinal de igual (Figura 8 (b)). Do outro lado, 4 latas (Figura 8 (c))

Figura 8 - Sequência de ações feitas por Marlene para estabelecer o problema no SSC

(A) (B) (C)

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

> **20) Severa:** Não! Desse lado são 4 latas e uma sacola (não manuseou os artefatos, apenas olhou para a sacola e direcionou o olhar para o espaço vazio onde a sacola deveria ser posicionada)
>
> **21) Professora:** Isso! Então botamos a sacola aqui (levou a sacola para o lado da equação no qual estão representadas as latas de Luísa).

Na fala 19, Marlene apontou para o princípio da igualdade entre os dois termos da equação. Mas, se na ideia proposta por Marlene (fala 19) notamos uma referência apenas aos números conhecidos do problema, na fala de Severa (fala 20) podemos notar sua atenção à indeterminação, denotando-a por meio do artefato sacola, o que aponta indícios de pensamento algébrico: a indeterminação e a denotação.

Percebemos também que a aprendizagem aparece como um esforço coletivo. A produção de ideias teve origem na atividade prática e sensorial dos estudantes e professora, mas não de maneira individual e isolada. O que vemos é um empenho coletivo, por meio de uma complexa organização de interação, o que torna os produtos da atividade também coletivos (Radford, 2021).

Os excertos desse episódio não indicam nenhum indício que satisfaça à condição da analiticidade. Conforme Radford (2018a), a analiticidade, principal vetor que caracteriza o pensamento algébrico, consiste em: 1) operar com o indeterminado e 2) fazer uso de deduções nessa operação.

Vejamos a síntese dos vetores do pensamento algébrico que aparecem neste episódio no Quadro 4.

Quadro 4 - Síntese dos indícios de pensamento algébrico no Episódio 1

Indeterminação	As falas 16 e 20, de Severa, apontam para um número desconhecido que precisa ser descoberto.
Denotação	Na fala 20, a grandeza indeterminada é denotada pela sacola.

Fonte: Elaborado pela autora

Na continuidade desse primeiro encontro, os estudantes começam a encontrar uma nova maneira de deduzir o número de latas na sacola, fruto do trabalho conjunto de estudantes e professores.

6.2 EPISÓDIO DE ANÁLISE 2: denotando a indeterminação e o encontro com uma nova estratégia para deduzir o número desconhecido

Este episódio de análise ainda diz respeito à resolução do problema 1 durante o primeiro encontro.

Com a equação estabelecida no SSC, a professora propôs a descoberta do número de latas da sacola por meio da manipulação dos objetos, sem contar ou intuitivamente. É solicitado que partam da premissa de que é preciso manter sempre a igualdade entre os dois lados da sentença, indicado pelo cartão com o sinal de igual. Passados um pouco mais de 4 minutos, os estudantes não encontraram uma maneira de descobrir o número de latas como solicitado. Esse fato gerou certa tensão entre a professora e os estudantes, identificada no desânimo e na possibilidade de desistência. Logo, a professora recorreu à metáfora da balança de dois pratos na esperança de encorajar os estudantes e que alguma ideia surgisse.

> **22) Professora:** Vamos pensar na ideia da balança de dois pratos. Quando ela está equilibrada, o que significa?
>
> **23) Josué:** Que os dois pratos têm o mesmo peso.
>
> **24) Severa:** Que tá igual.

> **25) Professora:** É isso também que esse sinal nos diz (apontando para tarja com o símbolo que está sob a mesa). Que há um equilíbrio, uma equivalência.
>
> **26) Marlene:** Pode tirar? Igual faz na feira? Pra ficar igual?
>
> **27) Professora:** Pode! É uma boa ideia. Mas lembre de manter sempre a igualdade, o equilíbrio.
>
> **28) Ronaldo:** A sacola… Pode mexer na sacola?
>
> **29) Severa:** Não! A sacola é o que a gente quer saber.

Nesse momento, Severa sinalizou a importância do desconhecido, simbolizado pela sacola, e que, por isso, é preciso mantê-la. Mais uma vez, a fala de Severa (fala 29) aponta para dois dos vetores de caracterização do pensamento algébrico: a indeterminação e a denotação (Radford, 2018). O modo que o indivíduo menciona o indeterminado, seja pela linguagem oral, escrita ou por outro meio, sinaliza o vetor da expressão semiótica defendida por Radford (2018) quanto à caracterização do pensamento algébrico.

Logo, o trabalho da professora se empreendeu na intenção de que o outro vetor do pensamento algébrico, a analiticidade, emergisse na atividade conjunta. Para pensar analiticamente a resolução do problema, os estudantes deveriam agir a partir da premissa de que o símbolo de igualdade é uma indicação de equivalência e que, por isso, toda ação executada deveria manter a igualdade de ambos os termos (Radford, 2022a). Então, retoma a ideia dada por Marlene sobre a possibilidade de tirar algo.

> **30) Professora:** Pensem a partir da ideia de Marlene.
>
> **31) Severa:** Ah! (começou a remover as latas do lado de Luísa, sentiu-se insegura e parou) Tem que tirar pra ficar só a sacola?

Agora, aparece pela primeira vez a ideia de isolar a indeterminação (fala 31). No entanto, Severa não vai adiante posto que os demais estudantes não validaram a sua ideia, uma vez que ainda não estava enquadrada no tipo de ações e regras que os alunos reconheciam como legítimas para resolver o problema.

Ainda no ato de Severa descrito na fala 31, queremos destacar a dificuldade do trabalho de forma coletiva e colaborativa, como é definido na Teoria da Objetivação (Radford, 2021a). Na TO, o trabalho coletivo exige um esforço para que todos os estudantes se envolvam de forma responsável com as ideias uns dos outros. É preciso que todos se esforcem para compreender o outro e, também, serem compreendidos (Radford, 2021a). O espaço de discussão "é um local de crescimento coletivo, de produzir um trabalho comum, de compartilhar maneiras de pensar procedimentos para resolver o problema" (Radford, 2021b, p. 186).

Josué, sem estar atento à ideia proposta por Severa, apresenta uma sugestão:

> **32) Josué:** Se eu tirar três daqui? (removeu três latas de Luísa ao acaso)

Apesar de a ação de remover latas para isolar a sacola proposta por Josué ser a esperada pela professora, ela foi tomada ao acaso, sem uma estratégia específica ou um pensamento dedutivo. Um pouco mais de 4 minutos da ação de Josué e nenhuma nova ideia surgiu. Marlene, então, percebe a necessidade de manter a igualdade:

> **33) Marlene:** Aqui tem 10? (apontou para um dos lados da equação (Figura 9 (a)) Ali tem 9? (apontou para a sacola) Então tira essas e tira essa (coordenando a fala com o movimento de remover primeiro 2 latas (Figura 9 (b) e em seguida remover mais 1 lata (Figura 9 (c)). Aí fica 10. 9 na sacola mais 1 lata. Igualou: 10 e 10.

Figura 9 - Procedimento de remoção realizado por Marlene

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

A resposta de Marlene prezou pela conservação da igualdade entre os dois lados da equação (o conceito relacional do sinal de igual).

> **34) Professora:** Mas eu quero saber só a sacola (diz contundente, segurando a sacola)
>
> **35) Severa:** Tira essa (afastando a única lata que ficou fora da sacola) e fica igual: 9 e 9.
>
> **36) Professora:** Ainda não! Se você tira uma aqui (apontando para um lado da equação), o que tem que fazer? Vejam, Josué tirou 3 de um lado e Marlene disse para tirar 3 do outro também. Ou seja, o que

> fizemos de um lado, também fizemos do outro e mantivemos a igualdade.
>
> **37) Severa:** Tira mais uma (apenas gesticulou como se estivesse removendo uma lata do outro lado da sentença. A ação então é executada por Ronaldo). Agora tem 9 e 9.

A sucessão de ações removendo latas de Marlene e seus colegas levou à descoberta do número de latas na sacola a partir de números conhecidos, afinal Marlene logo apontou que tinha 9 na sacola. Esse modo de pensar não deixa evidente o movimento da analiticidade, defendida por Radford (2018) como um dos princípios para a generalização algébrica que, conforme o autor, é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido. Entretanto, não se trata de um processo simples. Na verdade, ele repousa sobre mecanismos de percepção e uma sofisticada coordenação de gestos, palavras e manejo de artefatos.

Um pensamento analítico, ao que tudo indica, começa a se delinear: 1) na fala 31, quando Severa pensa na possibilidade de isolamento da indeterminação; 2) nas falas 33 a 37, quando é percebido que a mesma operação deve ser realizada em ambos os lados da equação para que a equivalência permaneça. Vergel (2021) salienta que pensar dedutivamente e fazer sentido ao indeterminado não é algo repentino, não é natural. É, na verdade, um processo lento e trabalhoso. Neste segundo episódio da pesquisa, verificamos uma gênese de pensamento dedutivo: para descobrir a indeterminação, é preciso isolá-lo. Essa premissa precisou ser refinada no momento de discussão geral para que se tornasse objeto de percepção e consciência dos estudantes.

No momento da discussão geral, a professora desejou tornar evidente que as operações de remoção e isolamento da indeterminação são regras por meio das quais é possível descobrir o número de latas sem se valer da contagem ou de tentativa e erro. Para isso, repetiu as operações exatamente como executadas pelos estudantes e, a cada movimento, as nomeou.

> **38) Professora:** Podemos descobrir o número de latas na sacola sem contar ou adivinhar. Podemos fazer isso isolando a sacola (disse dando muita ênfase à palavra “isolando”). Para isso, nós fomos removendo quantidades iguais de latas de Luísa e João até que de um lado ficasse apenas a sacola. Primeiro retiramos 3 daqui e três dali (executou a remoção). Só depois Severa percebeu que tinha que remover uma de cada lado para isolar a sacola (executa a remoção).

O ato da professora na fala 38 sinalizou o papel primordial da linguagem natural no processo de formulação do pensamento algébrico. Segundo Radford

(2022a), “a fala não é apenas um instrumento de comunicação, mas também um instrumento de pensamento; a consciência se desenvolve principalmente com o auxílio da fala” (Radford, 2022a, p. 1156, tradução nossa). Logo, as ações incorporadas de remoção e isolamento precisavam ser reconhecidas pelos estudantes como regras de simplificação de equações. Por isso, no momento da discussão geral, essas regras foram nomeadas para torná-las salientes e objeto preciso da consciência e do pensamento. Por trás do ato da professora, estava a ideia de que a linguagem e o corpo não operam isoladamente.

O Quadro 5 apresenta a síntese dos vetores de pensamento algébrico que emergiram neste episódio.

Quadro 5 - Síntese dos indícios de pensamento algébrico no Episódio 2

Indeterminação	Fala 29 - Severa identifica o indeterminado como algo a ser descoberto.
Denotação	Fala 29 - A grandeza indeterminada é denotada pela sacola por meio do Sistema Semiótico Concreto.
Analiticidade	Nas falas 29, 31, 33, 35 e 37, as ações são consequência dos seguintes pensamentos dedutivos: 1. a mesma operação deve ser realizada em ambos os lados da equação para que a equivalência permaneça; 2. para descobrir o desconhecido é preciso isolá-lo. No entanto, não há um processo de generalização, haja vista que a remoção das latas foi ocorrendo por etapas.

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

6.3 EPISÓDIO DE ANÁLISE 3: refinando estratégias algébricas na resolução de equações

No segundo encontro, os estudantes foram convidados a responder os problemas 2 e 3. O problema 2 (Quadro 6), cujas respostas serão analisadas neste episódio, apresentava uma equação do tipo AX + B = C, tal qual o primeiro problema. O encontro teve início com a professora realizando a leitura do segundo problema da tarefa e convidando os estudantes a resolvê-lo de forma colaborativa, a partir da manipulação dos artefatos dispostos sob a mesa. Os estudantes demonstraram estar familiarizados com a tradução de problemas apresentados em linguagem natural para serem resolvidos no SSC.

Quadro 6 - Segundo problema (7 = 2 + X)

Luiza coletou 7 latas. João coletou 2 latas e mais algumas que estão na sacola. A quantidade de latas de Luiza e João são iguais. Quantas latas há na sacola?

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Assim que a leitura do problema foi concluída, os estudantes se puseram a organizar os artefatos. Se no primeiro encontro houve inicialmente uma recusa em utilizar os artefatos e um grande esforço para organizá-los de maneira que traduzisse o problema, nesse segundo encontro observamos mudanças. Rapidamente, em colaboração uns com os outros, os estudantes organizaram o problema no SSC (Figura 10).

Figura 10 - Equação X + 2 = 7 traduzida no SSC

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo Vergel (2021), “as formas que os estudantes pensam sobre o mundo não são naturais, mas culturais” (Vergel, 2021, p. 99). É isso que nos mostra essa discrepância entre uma tarefa e outra (problema 1 e 2), no que se refere ao tempo e à energia gastos para organização e resolução do problema no SSC, posto que um contato inicial com a forma histórico-cultural de pensar as equações de maneira algébrica se deu no primeiro encontro.

No primeiro problema a produção coletiva de ideias foi árdua e lenta. Já no segundo encontro, uma nova maneira de pensar e resolver o problema havia sido objetivada e, por isso, mais rápida. Uma nova forma cultural de ação, percepção e reflexão que sustentam o pensamento algébrico foi encontrada e percebida. Isso foi possível, pois tais formas foram postas em movimento por meio da atividade (Radford, 2021a). Vejamos:

> **39) Professora:** No primeiro problema, encontramos outra forma de descobrir quantas latas tinha na sacola, sem precisar fazer contas.
>
> **40) Ronaldo:** Tiro essas duas (remove duas latas de João, isolando a sacola (Figura 11 (a)). Tiro duas de Luísa também (executou a remoção (Figura 11 (b)). Ficou igual: 5 e 5.

Figura 11 - Operação para simplificação de equação executada por Ronaldo no SSC

(A) (B)

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

> **41) Marlene:** A sacola é o mistério! A sacola fica aí sozinha.
>
> **42) Professora:** Isso, Marlene! Por ser um mistério, é o que queremos descobrir e por isso Ronaldo retirou as latas para isolar a sacola.

Na fala 40 vemos que as ideias emergiram na atividade de forma corporificada, por meio da atividade coordenada e articulada de expressão verbal e manipulação dos artefatos: ao remover as latas, Ronaldo anuncia sua ação: “eu tiro”[22].

Mas, o que nos chama mais atenção, é que há também um refinamento do procedimento de remoção, quando comparados aos acontecimentos do Encontro 1. No episódio anterior, o que vimos foi que o ato de remover e isolar o termo desconhecido se deu por etapas: primeiro removeram três latas de cada uma das partes equacionadas, depois uma. Nesse segundo episódio, nova ideia aparece: vemos que Ronaldo remove duas latas de uma vez de cada lado. Há, portanto, uma generalização da regra: várias latas podem ser removidas de uma só vez; seja *n* o número de latas removidas simultaneamente de ambos os lados da equação (Radford, 2022a).

[22] No dicionário, tirar é o mesmo que remover algo de um lugar.

Em pouco menos de um minuto, Ronaldo encontrou o número de latas na sacola, e, ao que nos parece, por meio de um pensamento analítico, logo, algébrico. O pensamento de Ronaldo envolve um processo de dedução, ou seja, “um processo no qual se parte de certos fatos conhecidos com certeza e que são usados para chegar a certas conclusões” (Vergel, 2021, p. 85). A resposta dada por Ronaldo foi pensada a partir do trabalho conjunto: a professora e os estudantes estiveram produzindo (por meio dos gestos, atividade perceptual, linguagem e artefatos) uma obra comum, que permitiu que os estudantes se tornassem progressivamente conscientes de uma maneira diferente de pensar o problema. Para Vergel (2021), uma atividade de ensino-aprendizagem conceitualizada a partir da Teoria da Objetivação, as afirmações geradas em uma interação social não são especificamente atribuídas a um indivíduo em particular.

Os indícios dessa vez apontam para um pensamento de natureza algébrica, já que satisfaz as três condições, sintetizadas no Quadro 7.

Quadro 7 - Síntese dos indícios de pensamento algébrico no Episódio 3

Indeterminação	Aparece mais uma vez no artefato “sacola”
Denotação	Fala 41 - Referência ao desconhecido por meio de dois meios semióticos diferentes: a sacola e a palavra “mistério”
Analiticidade	Fala 40 - Procedimento para identificar o número de latas na sacola parte de uma sucessão de certezas: é preciso isolar o desconhecido e, para isso, as mesmas quantidades de latas podem ser removidas dos dois membros da equação.

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

6.4 EPISÓDIO DE ANÁLISE 4: os olhos e os sentidos humanos como órgãos intelectuais

Ainda no segundo encontro[23], seguindo a história narrativa, apresentamos o terceiro problema (Quadro 8), um problema mais complexo: havia a presença de incógnitas nos dois membros da equação. Feita a leitura pela professora, os

[23] O segundo e terceiro problema aconteceram no mesmo dia, um após o outro.

estudantes foram convidados para resolvê-lo novamente no Sistema Semiótico Concreto.

Quadro 8 - Terceiro problema (2X + 1 = X + 6)

Agora Luiza tem 2 sacolas e uma lata. João tem 1 sacola e mais 6 latas. Sabendo que eles coletaram a mesma quantidade e o número de latas na sacola é sempre o mesmo, quantas latas há em cada sacola?

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Ao concluir a leitura, os estudantes organizaram a equação com os artefatos facilmente. Logo iniciaram uma negociação entre eles para dizer o número de latas em cada sacola, mais uma vez apoiados em procedimento comparativo e por tentativa e erro.

> **43) Ronaldo:** Acho que tem 6. Porque se eu juntar aqui 6 e 6, mais 1 latinha dá 13. E do outro lado, 12. Eita! Não fica igual (esboça frustração).
>
> **44) Josué:** Eu acho que nessa aqui tem 4 (pondo uma mão sobre uma sacola) e nessa 6 (aponta outra sacola).
>
> **45) Professora:** No problema diz que as sacolas têm a mesma quantidade. Além disso, as latas de Luísa e João também são iguais. Não é isso que esse símbolo indica? (aponta pro sinal de igual)
>
> **46) Marlene:** Tem sacola demais! É mais difícil.

Passaram-se aproximadamente 5 minutos após a leitura e discussão do problema e os estudantes não apresentaram nenhuma proposição. A percepção de Marlene acerca da dificuldade para a resolução dessa equação é explicada por Filloy e Rojano (1989). Segundo esses autores, equações do tipo AX + B = CX + D são mais difíceis pois “envolvem operações extraídas de fora do domínio da aritmética – isto é, operações sobre a incógnita” (Filloy; Rojano, 1989, p. 19). De fato, nos dois problemas propostos anteriormente, a estratégia de substituição da sacola por algum valor até que a igualdade se tornasse verdadeira foi realmente mais fácil.

> **47) Professora:** Sim, é mais difícil. Mas vocês estão falando “eu acho, eu acho” (demonstrou frustração). Lembrem-se que há uma forma de descobrir sem ser tentando adivinhar.
>
> **48) Marlene:** Ah! Tirando a bolsa e ficando só com essas latinhas (articulando a fala com movimentos, afastou a sacola e agarrou as seis latas que pertenciam ao segundo membro da equação (Figura 12).

Figura 12 - Marlene sugerindo procedimento de remoção da sacola

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

A intervenção da professora trouxe a ideia do procedimento de remoção e isolamento do indeterminado de volta à atividade. Mas, se até então os estudantes haviam trabalhado juntos removendo apenas latas, agora se deparam com a necessidade de remover também sacolas para que restasse apenas uma incógnita.

> **49) Ronaldo:** Não, Não! Tira a bolsa (gesticula indicando que a sacola próxima a Marlene deve ser removida (Figura 13 (a)). Daqui, tira todas as bolsas e a latinha (remove as duas outras sacolas e a lata (Figura 13 (b)). Aí pra manter igual, pega três dela e passo pra cá (Figura 13 (c)). Aí… Ficou igual!

Figura 13 - Pensamento corporificado de Ronaldo numa tentativa falha de descobrir o indeterminado por procedimento de remoção

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

> **50) Josué:** E a sacola? Tirou todas e não dá pra descobrir mais nada.

Há menos de uma hora, ao resolver o segundo problema da tarefa, Ronaldo e os colegas deduziram o número de latas na sacola por meio do procedimento de remoção e isolamento do indeterminado. Nos quase 10 primeiros minutos deste encontro, essa possibilidade passa despercebida por eles. Aqui corroboramos com

Radford (2021), quando afirma que os processos de objetivação não são lineares e podem ser interrompidos e iniciados novamente mais tarde.

> **51) Professora:** Vamos voltar? (restabeleceu a organização do problema no SSC). Recomece, Marlene. Você estava sugerindo um processo de remoção.

Com o SSC restabelecido, muitas sugestões foram dadas por Marlene, Ronaldo e Josué, mas nenhuma delas resolveu o problema: eles não sabiam o que fazer com tantas sacolas. Severa permaneceu quieta, batucando os dedos na mesa, olhando fixamente para aquela organização dos artefatos e ouvindo os demais. A professora já havia dado o encontro como encerrado, quando Severa diz[24]:

> **52) Severa:** Espera! Tira uma sacola de cada lado e uma lata de cada lado. Por derradeiro ficou: sacola igual a 5 latas.
>
> **53) Josué:** 5 e 5 dá 10. Com mais uma lata, 11. E aqui 5 na sacola com as seis, 11 também *(*gargalha*)*.

Tomamos a fala de Severa (fala 52) como uma evidência de aprendizagem das ideias algébricas para simplificação de equações. Podemos afirmar também que a linguagem natural serviu de apoio na expressão de uma fórmula em ação (Vergel, 2021).

Os meios semióticos manifestados nos dois problemas anteriores (gestos, apontamentos, manipulação dos objetos, todos eles articulados à fala) deram lugar a uma atividade apenas discursiva. A oralidade, então, tornou-se o princípio organizador da produção de sentido. Isso evidencia que o objeto do conhecimento já se tornou objeto da consciência de Severa. Segundo Romeiro (2023, p. 116), “essa transformação ou redução dos meios semióticos manifestados pelos sujeitos para explicar o objeto do conhecimento é chamada de contração semiótica”.

Os pensamentos até a fala 51 foram manifestados de forma incorporada (Radford, 2022c). O toque (com as mãos) nos artefatos, os apontamentos, gestos e expressões faciais, todos eles entrelaçados, tornaram visíveis as manifestações dos pensamentos. Não obstante, o pensamento é uma unidade dinâmica composta por componentes materiais e ideacionais (Radford, 2009), este último constituído pela imaginação e fala interior (Silva, 2021). Em silêncio, Severa observava a atividade dos demais estudantes. Parecia que estava alheia e ausente do trabalho conjunto, porém seus olhos, voltados para os artefatos sob a mesa, realizavam uma espécie de toque

---

[24] Já havia cessado a gravação. A fala de Severa foi registrada apenas no bloco de notas da professora-pesquisadora.

a distância, como se apalpassem os objetos e uma fala interior (que compõe a parte ideacional do pensamento), inobservável para nós, estava acontecendo. Radford aponta o olho como um órgão de “percepção cultural-teórica” (Radford, 2021a, p. 171), não meros instrumentos receptivos: “os olhos afetam a percepção e a percepção afeta os olhos” (Radford, 2022c, p. 267).

No momento em que se fez ouvir, Severa estava empenhada em organizar as ações de seus colegas, com o objetivo de resolver o problema. Estavam, dessa forma, realizando uma obra comum: os estudantes atuaram, pensaram e sentiram juntos, unindo suas energias, suas habilidades, suas ações e seus modos de pensar. As formas de reflexão e ação a que Severa recorreu, tem estrita relação com os pensamentos materializados por todos durante o trabalho conjunto para resolução dos problemas 1, 2 e 3.

A solução apresentada por Severa aponta um processo de generalização ainda mais sofisticada, posto que a regra para remoção de latas e sacolas não se dá mais por etapas, mas ocorre de uma vez só. É nessa capacidade de operar dedutivamente com quantidades desconhecidas que Radford (2018) aponta a ruptura entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico.

Sintetizamos no Quadro 9 nossa análise referente a este episódio, apontando os indícios de pensamento algébrico.

Quadro 9 - Síntese dos indícios de pensamento algébrico no Episódio 4

Indeterminação	Aparece implicitamente mais uma vez no artefato “sacola”
Denotação	Os estudantes referem-se à indeterminação através do objeto sacola.
Analiticidade	Fala 52 - Procedimento para identificar o número de latas na sacola parte de uma sucessão de certezas: é preciso isolar o desconhecido e, para isso, as mesmas quantidades de latas e sacolas podem ser removidas dos dois membros da equação. Além disso, ficou evidente uma generalização das regras que envolvem a simplificação de equações.

Fonte: Elaborado pela autora

6.5 EPISÓDIO DE ANÁLISE 5: dividindo para descobrir o desconhecido

Este episódio é referente à resolução apresentada para o problema 4 (Quadro 10) no terceiro encontro[25]. Como dito na metodologia, os problemas foram pensados numa ordem de complexidade crescente. Neste sentido, a dificuldade deste problema residiu no fato de que apenas a remoção dos mesmos números de latas e sacolas não era suficiente para solucionar o problema. Era preciso, além do procedimento de remoção, diminuir o número de incógnitas por meio de uma separação igual (divisão) (Radford, 2022a) de latas por sacolas.

Quadro 10 - Quarto problema (3X + 1 = X + 5)

Por duas semanas, João coletou a mesma quantidade de latas. Na primeira semana ele tinha 3 sacolas mais 1 lata. Na semana seguinte, 5 latas e 1 sacolas. Quantas latas havia em cada sacola? Lembre-se que há a mesma quantidade de latas nas sacolas.

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Terminada a leitura do problema, os estudantes mais uma vez buscaram a solução por estratégias aritméticas (tentativa e erro).

> **54) Marlene:** Aqui tem 3, 6, 9 (apontou uma a uma as 3 sacolas de um dos membros da equação, indicando que havia 3 latas por sacola), com mais uma lata: 10. E ali 5 (apontou para as latas) com 5 (apontou para a sacola), 10. E fica igual.
>
> **55) Professora:** “3, 3, 3” (apontou para as três sacolas pertencentes ao primeiro membro) e “5” (apontou para única sacola do segundo membro)?
>
> **56) Marlene:** Não! O tanto de lata nos sacos é igual.
>
> **57) Professora:** Vocês podem tomar outro caminho para resolver… (a professora é interrompida).

Marlene interrompeu a professora ao lembrar que é possível resolver por procedimento de remoção. Severa e Ronaldo acataram sua sugestão. Entendemos neste contexto a manifestação do trabalho conjunto envolvendo a responsabilidade, o compromisso e a escuta atenta uns com os outros. Juntos iniciam a simplificação da equação.

> **58) Severa:** Então tira duas sacolas (anuncia a ideia).

[25] Neste último encontro, Josué não compareceu.

A fala de Severa não deixou claro quais sacolas deveriam ser removidas. Ronaldo, então, se engajou na atividade, executando o sugerido. Seus movimentos coordenados com a fala deram um sentido visual ao que Severa disse.

> **59) Ronaldo:** Tira essa aqui (afastou uma sacola (Figura 14 (a)) e aquela de lá também (apontou a sacola que deveria ser retirada (Figura 14 (b)). Aí aqui fica aqui uma lata e duas sacolas.
>
> **60) Severa:** Aí tira a latinha (removeu a lata Figura 14 (c)).
>
> Imediatamente Ronaldo complementa o pensamento de Severa:
>
> **61) Ronaldo:** Se tira uma daqui, tira uma de lá (aponta para a lata que deve ser removida, pois estava distante. A ação é executada pela professora (Figura 14 (d)).

Figura 14 - Trabalho conjunto para resolução do problema 4 no SSC

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

As ações realizadas estabeleceram que “duas sacolas é igual a quatro latas” ($2X = 4$). Diante do SSC, Ronaldo parece intrigado. Fica em silêncio por alguns segundos, olhando permanentemente e, hesitante, põe a mão sob uma das sacolas. Em seguida, concluiu:

62) Ronaldo: Um saco pra cá e duas latinhas. O outro saco pra lá e as outras duas latinhas (articula a fala com a ação: deslizou duas latas para perto de cada uma das sacolas (Figura 15). Igualou. São duas latas em cada saco.

Figura 15 - Resolução do problema 4 no SSC

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

O trabalho conjunto dos estudantes e professora levou Ronaldo ao encontro com uma nova regra: diminuir o número de incógnitas por meio de uma separação igual (divisão) (Radford, 2022a). Neste episódio, a generalização realizada pelos estudantes para a resolver a equação, apesar de não ser tão sofisticada quanto uma generalização que emprega signos alfanuméricos, é algébrica a sua maneira (Radford, 2021a). Ela foi pensada de maneira colaborativa e expressa por meio de ações coordenadas com a fala e isto evidencia que: 1) o pensamento algébrico é de natureza multimodal (Radford, 2018); 2) o "uso de linguagem simbólica não é condição necessária nem suficiente para pensar algebricamente" (Radford, 2021, p. 175).

Quadro 11 - Síntese dos indícios de pensamento algébrico no Episódio 5

Indeterminação	Fala 58 - Marlene indica que há um número desconhecido a ser descoberto.
Denotação	Os estudantes referem-se à indeterminação através do objeto sacola.
Analiticidade	Falas 66, 67, 68, 69 e 70 - As operações para simplificação da equação realizadas pelos estudantes partem de uma sucessão de deduções e certezas. Operaram com os números desconhecidos, abandonando a estratégia aritmética de substituição da incógnita até a igualdade se tornar verdadeira.

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Ao analisar este último episódio, é possível perceber que ao longo da atividade de ensino-aprendizagem os estudantes adentraram gradativamente no campo da álgebra e que os pensamentos algébricos manifestados passaram por um refinamento. Isso fica evidente para nós, à medida que notamos um aprimoramento dos meios semióticos de objetivação no processo de objetivação das ideias algébricas que sustentam a simplificação de equações, seja por meio de uma articulação mais bem elaborada entre fala, gestos e manuseio dos artefatos, ou até mesmo pela mudança de pensamentos corporificados por uma atividade mental (fala 52). Segundo Radford (2022b), isso aponta que os estudantes passaram por um processo no qual o pensamento matemático foi reorganizado: “o que antes exigia muitas palavras e ações é rearranjado e contraído: os alunos filtram o necessário do desnecessário e sua atividade semiótica se contrai. Há uma contração semiótica” (Radford, 2022b, p. 594, tradução nossa).

7 CONCLUSÕES

A proposição desta pesquisa surgiu com a emergência do debate em âmbito nacional acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Teve como ideia basilar possibilitar uma discussão centrada na ideia de que este pensamento, para além de uma linguagem simbólica e um conjunto de regras, é um processo pelo qual os estudantes, mesmo aqueles em fase inicial de escolarização, podem generalizar ideias matemáticas por meio de diferentes meios semióticos. Em nossa pesquisa, este pensamento pôde ser materializado por meio de linguagem que não é alfanumérica, mas natural, gestual, corporal. Estas afirmações foram constituídas a partir das muitas leituras e reflexões sobre a definição de pensamento algébrico como é concebida por Luis Radford (2003, 2017, 2018, 2021a, 2021b) e nas informações oriundas dos dados desta investigação.

Traçamos como objetivo analisar os indícios de pensamento algébrico que emergem à medida que quatro estudantes do Primeiro Segmento da Educação de Jovens e Adultos e uma professora exploraram coletivamente atividades de ensino-aprendizagem que abordaram as equações e o sinal de igual em seu caráter relacional. Para alcançá-lo, seguimos as orientações metodológicas da Teoria da Objetivação (Radford, 2015a), desde a estruturação da atividade de ensino-aprendizagem (a organização das tarefas e as formas de cooperação humana), até a análise multissemiótica dos dados.

Dado o papel mediador que a atividade desempenha na transformação do saber em conhecimento (Radford, 2021a), ela foi o componente-chave da nossa investigação. Composta por uma tarefa com uma sequência de quatro problemas, ofereceu aos alunos a oportunidade de compreender o sinal de igual em termos relacionais e resolver equações. Neste sentido, a principal questão metodológica girou em torno da escolha dos problemas, da sequência de sua apresentação, da disponibilidade dos artefatos como ferramentas para resolvê-los e da organização social da sala de aula.

O que nossas análises dos dados apontaram, corroborando com Radford (2021a), é que a aprendizagem é um processo, logo, não se dá de forma repentina, muito menos natural. Por exemplo, na primeira tarefa, a forma algébrica de resolver as equações passou despercebida e os estudantes recorreram a procedimentos aritméticos (tentativa e erro). Ou seja, o saber algébrico para resolver as equações naquele momento era “pura potencialidade” (Radford, 2021a) e ao longo da atividade foi possível materializá-lo, como apontaram os episódios 4 e 5.

Os dados também indicaram o quão árdua é a tarefa de pensar dedutivamente. O que identificamos é que os vetores do pensamento algébrico (a indeterminação, a denotação e a analiticidade) emergiram e foram sendo refinados gradativamente no decorrer das tarefas. O encontro progressivo com as regras para simplificação de equação, por exemplo, que tomamos como evidência de um processo de generalização, logo um indicativo de pensamento analítico, foi sendo pensado e repensado constantemente no Sistema Semiótico Concreto.

Isso nos leva a concluir que o desenvolvimento do pensamento algébrico esteve ancorado, em primeiro lugar, nos objetos imediatamente percebidos, tocados (latas e sacolas). Eles fizeram dos artefatos a matéria-prima para produzir coletivamente suas ideias, manejando-os ou mesmo observando-os, como no pensamento manifestado por Severa no episódio 4 (fala 52). A relação de equivalência, por exemplo, emergiu desde o episódio 1 com a organização dos artefatos. Corroborando com Vergel (2021), que nos diz que o conhecimento torna-se conhecimento com os artefatos culturais, e não por meio deles, destacamos o papel crucial desempenhado por estes e a potencialidade dos Sistemas Semióticos Concretos na materialização do pensamento analítico.

A análise também sugere que, para além dos artefatos, os estudantes mobilizaram outros meios semióticos de objetivação como ações, gestos e fala na constituição do pensamento algébrico, evidenciando sua natureza multissemiótica. Os gestos foram imprescindíveis na resolução dos problemas propostos. Para Radford (2021a), o corpo ajuda na tomada de consciência dos aspectos conceituais dos objetos matemáticos e tornar evidente e visível as intenções dos estudantes. Os gestos realizados por Severa, por exemplo, para indicar a relação entre os números de latas dos agentes (fala 6) evidenciam o entendimento da noção de equivalência.

Inferimos também que a atividade discursiva foi fundamental para identificarmos os indícios de pensamento algébrico. Severa, ao nomear suas ações (fala 52), apontou que as regras de remoção e isolamento do desconhecido haviam se tornado objeto de consciência. Tomamos este segmento da atividade, uma nítida evidência de contração semiótica e de pensamento algébrico, já que aponta com clareza a analiticidade.

Apesar de não ser foco de nossa pesquisa e por isso não constar nas nossas análises, mas entendendo que os processos de objetivação e subjetivação estão imbricados um no outro (Radford, 2101a), o trabalho conjunto ocorrido evidencia que a atividade de ensino-aprendizagem é um movimento coletivo, no qual foi possível observar como os estudantes entraram em contato com outras vozes e perspectivas quando engajaram-se na busca de um trabalho comum.

Dentro do modelo proposto pela TO das formas de colaboração humana, a maneira como a professora se engaja na atividade: ela se envolve no trabalho "com e para os alunos" (Radford, 2021a, p. 283). Sua presença é, a todo tempo, um convite para o encontro com novas possibilidades para descobrir o número de latas na sacola. Diante do discurso de impossibilidade dos estudantes (por muitas vezes ficou perceptível o desânimo e o desejo de desistência, claramente notado nas falas de Marlene), ela os convida e lhes abre espaço para que se engajem em uma forma cultural-histórica de pensar algebricamente.

Queremos também apontar que o fato de os estudantes não serem leitores não foi limitante para a resolução de problemas que envolvem conceitos algébricos. Os dados mostram que é possível desenvolver o pensamento algébrico e que adultos com pouca escolarização são capazes de desenvolver processos de reflexão algébrica.

Dentre as limitações identificadas ao longo desta investigação, apontamos o uso de apenas uma câmera para o registro dos dados, posto que algumas ações poderiam ter sido mais bem captadas.

Por fim, acreditamos ter alcançado nosso objetivo e esperamos que esta pesquisa contribua de maneira positiva com o ensino da álgebra de estudantes em fase inicial de escolarização ao apontar um caminho possível para introdução às equações. Nossa investigação teve interesse em formas não simbólicas do pensamento algébrico numa perspectiva inicial da álgebra e, pela questão temporal, não foi possível visualizar a transição de uma forma não simbólica de pensamento algébrico para uma forma simbólica. Por isso, acreditamos que esta investigação possa ter um desdobramento num estudo longitudinal, com um quantitativo e variedade maior de tarefas, que possam dar conta de compreender como o pensamento algébrico se modifica e refina, focando não apenas em sistemas semióticos concretos, mas também em sistemas semióticos simbólicos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento de pensamento algébrico**: um modelo para problemas de partilha de quantidade. 2016. 200 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Curso de Educação Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R. Álgebra escolar na contemporaneidade: uma discussão necessária. **Em teia**, Recife (PE), v. 8, n. 1, 2017. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.36397/emteia.v8i1.12004. Acesso em: 23 ago. 2023.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. C. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 6, n. 10, p. 34–60, 2017. Disponível em: DOI: 10.33871/22385800.2017.6.10.34-60. Acesso em: 10 mai. 2023.

ALVES, F. C. **Introdução ao ensino de equações na educação de jovens e adultos:** uma experiência didática a partir da abordagem histórico cultural**.** 2020 Dissertação (Mestrado em Matemática) - Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2020.

AZEVEDO, P. M. A. S. **Um processo de ensino-aprendizagem de equações vivido por alunos jovens e adultos em sala de aula:** transitando por registros de representação**.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

BANDARRA, L. O sinal de igual – um estudo vertical. EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da álgebra. **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, p. 305–322.

BLANTON, M; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. **Journal for Research in Mathematics Education**, 36(5), p. 412-446, 2005.

BORGES, A. A. A. G. **Ideias algébricas explicitadas por estudantes da EJA em espaços não formais: o caso do cursinho de Ribeirão Preto.** 2011. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

BRASIL, [Constituição (1988)] **Constituição da República Federativa do Brasil**, Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 2016. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf. Acesso em: 01 mai. 2022.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão revista. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 01 dez. 2022.

BOGDAN, R. BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação** – uma introdução à teoria e aos métodos**.** Porto: Porto Editora.1994.

CANAVARRO, A. P. **O pensamento algébrico na aprendizagem de Matemática nos primeiros anos.** Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf. Acesso em: 25 jul. 2022.

CARPENTER, T. P. FRANKE, M. L. LEVI, L. **Thinking mathematically:** Integrating arithmetic and algebra in the elementary school. Portsmouth, NH. Heinemann. 2003.

CATELLI, R. J. **O não-lugar da Educação de Jovens e Adultos na BNCC**. In: Educação é a base? 23 Educadores Discutem a BNCC. CASSIO, F. CATELLI JR, R. (orgs.). São Paulo: Ação Educativa, 2019.

FASHEH, M. Matemática, cultura e poder**. Zetetiké**, Campinas, Unicamp-FE, Cempem, n. 1, p. 9-30, 1998. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v6i9.8646805. Acesso em: 15 ago. 2023.

FERREIRA, L. C. A Educação de Jovens e Adultos em tempos (im)prováveis e de (in)certezas: A BNCC em discussão. **Revista Augustus**, Rio de Janeiro: Vol. 24, n. 47, p 9 - 27, 2019. Disponível em: https://revistas.unisuam.edu.br/index.php/revistaaugustus/article/view/334/150. Acesso em: 22 mai. 2023.

FIORENTINI, D. MIORIM, M. A. MIGUEL, A. Contribuição para um repensar…a Educação Algébrica Elementar. **Pró-posições**, Campinas, SP, Vol. 4, N. 1, p 78-91, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384. Acesso em: 10 set. 2022.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos: especificidades, desafios e contribuições**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FILLOY, E., ROJANO, T. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra**. For the Learning of Mathematics**, 1989. p 19 - 25. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/40247950. Acesso em: 25 ago. 2022.

FIDELIS, B. F. R. **Atividades investigativas aritméticas e algébricas para Educação de Jovens e Adultos -** Aprendizagem significativa. 158 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino) – Instituição de Ensino: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte Biblioteca Depositária: PUC/MG, 2021.

FLORES, S. R. **Linguagem matemática e jogos:** uma introdução ao estudo de expressões algébricas e equações do 1º grau para alunos da EJA**.** 2013. 39 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 33. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2013.

GOMES, L. P. da S. **Introdução à álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: uma análise a partir da teoria da objetivação. 182f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte – Natal, 2020.

GOMES, L. P. S.; NORONHA, C. A. Caracterização do pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação. *In*: GOROBA, S. T. RADFORD, L. **Teoria da Objetivação: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática**. São Paulo: Editora livraria da física, 2020.

HADDAD, S.; DI PIERRO, M. C. Escolarização de jovens e adultos**. Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, n.14, p.108-130, maio/ago. 2000.

HIME, F.; SIQUEIRA JR., C. L. A alegria é a prova dos nove. Single. Performing: Leoni & Rodrigo Maranhão. Duração: 3,214. Apple Music, nov. 2022.

JUNIOR, A. R. P., SAVIOLI, A. M. P. D. Pensamento algébrico e erros em atividades algébricas de estudantes da EJA**. Revista Iberoamericana de educación matemática**. Novembro, 2015. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/16833/1/Pepece2015Pensamento.pdf. Acesso em: 25 ago. 2023.

KIERAN, C. The early learning of algebra: A structural perspective. In: **Research issues in the learning and teaching of algebra**. Routledge, 2018. p. 33-56.

KNUTH, E. STEPHENS, A. MCNEIL, N. ALIBALI, M. Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving Equations. **Journal of Research in Mathematics Education**. 2006, v. 37, n. 4, p. 297 - 312.

LINS, R. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of philosophy) - School of Education, University of Nothingan, Nothingan, UK, 1992.

LINS, R. C. GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MENDES, M. G. (ed.). Conversas inéditas José e Pilar. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

MORAES DA SILVA, R. de; ALMEIDA, J. R. Os meios semióticos de objetivação e o pensamento algébrico: uma análise à luz da Teoria da Objetivação. **REMATEC**, *[S. l.]*, v. 16, n. 39, p. 19–38, 2021. Disponível em: DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p19-38.id489. Acesso em: 22 jun. 2022.

MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L.; RADFORD, L. Luis Radford - Questões em torno da Teoria da Objetivação. **Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia**

Pedagógica, [S. l.], v. 1, n. 4, p. 251–272, 2018. Disponível em: DOI: 10.14393/OBv2n1a2018-12. Acesso em: 25 ago. 2023.

NACARATO, M. A.; CUSTÓDIO, I. A. **O Desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica:** compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

NCTM. 2000. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. (1. ed. 2000) Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2.ed. Lisboa: APM, 2008.

OLIVEIRA, M. K. Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**. n. 12, p. 59-73. 1999. Disponível em: https://eixovpsicologia.pbworks.com/f/texto+6.pdf. Acesso em: 01 dez. 2023.

OAKS, J. A., ALKHATEEB, H. M. Simplifying equations in Arabic algebra. **Historia Mathematica**, v. 34, Issue 1, 2007, p. 45-61. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.1016/j.hm.2006.02.006.

PAVANELO, E. **Resistências e contribuições em relação a uma proposta de trabalho para o ensino de álgebra elementar, junto a alunos da Educação de Jovens e Adultos.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

JUNIOR, A. R. P. **Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas.** 2011. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **O simbolismo e o desenvolvimento algébrico dos alunos**. Lisboa: DGIDC. Setembro, 2008.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC. Setembro, 2009.

RADFORD, L. Gestures, Speech, and the Sprouting os Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens' Types os Generalization**. Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective**.** In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello, F. (Eds.), **Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)**. p. XXXIII – LIII. Université Claude Bernard, Lyon, France, 2009.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J. KNUTH, E. (Eds.), Early algebraization. **Advances in mathematics education**. Springer. Berlin, Heidelberg. 2011. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17. Acesso em: 22 jun. 2022.

RADFORD, L. he Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking**. Math Ed Res J** 26, p. 257–277. 2014. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2 Acesso em: 22 jun. 2022.
RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *In:* **Perspectivas da Educação Matemática***.* v. 8. n. 18. 2015*.* Disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1463/970. Acesso em: 25 mar. 2018.

RADFORD, L. A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em Educação Matemática. *In:* MORETTI, V. D, CEDRO, W. L. **Educação Matemática e a Teoria Histórico-cultural**: um olhar sobre as pesquisas. Campinas, SP: Mercado das letras, 2017.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. *In* Kieran, C. (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds**; ICME-13 Monographs**. Springer, Cham. 2018. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1. Acesso em: 22 jun. 2022.

RADFORD, L.; GOBARA, S. **Entrevista sobre la semiótica en la teoría de la objetivación**. Campo Grande, 2019. Disponível em: Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/Radford-entrevista.html. Acesso em: 22 jun. 2022.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la Teoria de la objetivación. *In:* GOROBA, S. T. RADFORD, L. **Teoria da Objetivação:** fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Editora livraria da física, 2020.

RADFORD, L. **Teoria da Objetivação:** uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática / Luis Radford; tradução de Bernadete B. Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021a.

RADFORD, L. O Ensino-aprendizagem da Álgebra na Teoria da Objetivação**.** In: MORETTI, V., RADFORD, L.: **Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais:** Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-**Cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021b.

RADFORD, L. Introducing equations in Early Algebra. **ZDM Educação Matemática.** v. 54. 2022a. p 1151 - 1167. Disponível em: DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x. Acesso em: 22 jun. 2023.

RADFORD, L. Early algebra: simplifying equations**.** In: J. HOUDGEN, E. GERANIOU, G. BOLONDI, F. FERRETTI (Eds), **Proceeding of Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematic Education**: 2022b. p 588 - 595.

RADFORD, L. **Body, matter and signs in the constitution of meaning in mathematics.** In C. Houdement, C. de Hosson, & C. Hache (Eds.), Semiotic Approaches in Science Didactic: 2022c. p 247-282.

RADFORD,L. SABENA, C. The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach**.** In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), **Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education**. p. 157-182. New York: Springer. 2015.
RADFORD, L., SALINAS, H., SACRISTÁN, U. A dialogue between two theoretical perspectives on languages and resource use in mathematics teaching and learning. **ZDM Mathematics Education**. v. 55 , p. 611 – 626. 2023. Diponível em: DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01459-y Acesso em: 10 out. 2023

REGO, T. C. **Vygotsky:** uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em álgebra, com base nos dados do SARESP**. São Paulo, 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2001.

RIBEIRO, A. J. CURY, H. N. **Álgebra para a formação de professores:** explorando os conceitos de equação e de função. 2. ed. - Belo Horizonte: Autêntica: 2021.

SAMPAIO, M. C. E.; HIZIM, A. L. A educação de jovens e adultos e sua imbricação com o ensino regular**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 103, n. 264, 2022.

SANTOS, J. S.; PEREIRA, M. V.; AMORIM, A .Os sujeitos estudantes da EJA**:** um olhar para as diversidades. **Revista Internacional de Educação de Jovens e Adultos**, v. 01, n. 01, p. 122-135, 2018.

SCHLIEMANN, A. D., CARRAHER, D. W. O lugar da Álgebra no Ensino Fundamental. In: MARTINS, E., LAUTERT, S. (Orgs.) **Diálogo sobre ensino, aprendizagem e a formação docente**: contribuições da psicologia na Educação Matemática. Rio de Janeiro: Editora Autografia, 2016, p 39 - 76.

SILVA, E. A. **Introdução do pensamento algébrico para alunos do EJA:** uma proposta de ensino. 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, R. M. **Pensamento algébrico em tarefa com padrões:** uma investigação nos anos finais do ensino fundamental. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

SILVA, G. A. R. **Concepções de professores de matemática sobre o ensino de álgebra nos anos finais na modalidade Educação de Jovens e Adultos.** 2022. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal Rural de Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2022.

SOUZA, J. M. S. **Álgebra escolar na EJA:** análise de uma sequência de aulas do Programa Gestar II. 2012. 91 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2012.

TRIVILIN, L. R.. RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade**:** um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 38-59, abr. 2015.

VERGEL, R. Reflexões teóricas sobre a atividade semiótica dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma tarefa de sequenciamento de padrões. In: MORETTI, V., RADFORD, L.: **Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais:** Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-**Cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021.