UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

HUGO GUSTAVO DE LIRA GOMES

O SABER ÂNGULO EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Recife
2023

HUGO GUSTAVO DE LIRA GOMES

O SABER ÂNGULO EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica. **Área de concentração**: Didática da Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos

Recife

2023

Catalogação na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

G633s Gomes, Hugo Gustavo de Lira
O saber ângulo em uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático / Hugo Gustavo de Lira Gomes –2023.
152 f.

Orientação de: Marilene Rosa dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2023.
Inclui Referências.

1. Matemática. 2. Didática. 3. Educação. I. Santos, Marilene Rosa dos (Orientação). II. Título.

371 (23. ed.) UFPE (CE2024-013)

HUGO GUSTAVO DE LIRA GOMES

O SABER ÂNGULO EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 28/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos
(Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
(Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Luciana Silva dos Santos Souza
(Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. André Pereira da Costa
(Examinador Externo)
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Dedico este trabalho a Deus, pois em sua infinita misericórdia me capacitou e fortaleceu em todo o percurso, fazendo com que a realização desse sonho fosse possível. Obrigado, Senhor!

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em sua infinita bondade me deu forças para concluir, à Nossa Senhora Virgem Maria por ser uma intercessora e mãe que acolhe e acalma guiando ao caminho do Senhor. A todos os santos, em especial a Santa Faustina, que tenho tanto apreço.

Aos meus pais Maria José Farias de Lira (Nina) e Severino da Costa Gomes (Gomes), que me apoiam, e para toda a minha família, que impulsiona dando todo suporte e força para a realização dessa conquista.

À minha orientadora Marilene Rosa dos Santos (Mari), que se tornou uma amiga. Admiro demais seu profissionalismo e maneira na qual acolhe as pessoas. Obrigado, Mari, por além de ser tão humana, gentil e prestativa, me conduzir tão bem no desenvolver dessa pesquisa.

À minha companheira de todas as horas, Lay. Você é luz, obrigado por me ajudar em tudo e ainda aturar meus estresses e compreender minhas faltas, sendo meu ombro amigo nos dias mais difíceis e felizes também; para você todo meu amor, carinho e gratidão.

Às minhas madrinhas Zilda, Patrícia e Rosa por todo amor, zelo, carinho e colo nos momentos em que precisei e por todo o apoio durante a caminhada. Assim como também agradeço às minhas tias Dany, Rosa e Neves por serem tão generosas, especiais e fazerem meus gostos nos momentos de mais estresse.

À minha dupla do mestrado e de linha de pesquisa, Gleicy Kelly, que desde a graduação nos apoiamos e não nos largamos mais. Seu apoio foi muito importante para a conclusão deste ciclo. Para todos os meus amigos: Danyla, Karol, Tiago, Thais, Mirelly, Tassia, Gelza, Rafa e Júnior por toda ajuda e apoio para que essa realização fosse possível.

Aos amigos e colegas do mestrado: Gaby, Edielson, Ayrtton, Wanuza, José Vitor, Daianny, Diana, Helton, Rosy e Kariny, por compartilharem momentos tão proveitosos e tornarem o caminho mais leve. Agradeço também aos amigos do grupo de pesquisa e de estudos que contribuíram com este trabalho: Almir, Anderson, Franklin, Katy, Valéria, Danubia e Mayara. Toda minha gratidão e carinho pelas considerações.

A todas as minhas professoras e professores, em especial a que me alfabetizou, Tia Ana (*In Memoriam*), que não desistiu e me apoiou bastante no caminho da docência.

A todos os professores do Programa Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - PPGEdumatec, em especial aos da linha de Didática da Matemática: Iranete, Jadilson, Katia, Iracema, Paula e Rosinalda.

Agradeço demais aos professores da banca examinadora, à Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain, que me acompanhou durante todo o processo na disciplina de seminários, sempre com comentários e recomendações de leituras pertinentes para a realização desta pesquisa. Ao Prof. Dr. André Pereira da Costa, que desde o grupo de pesquisa sempre colaborou com este estudo para que tudo ocorresse da melhor forma. À Profa. Dra. Luciana Silva dos Santos Souza, que prontamente atendeu nosso convite e abrilhantou ainda mais este estudo com suas contribuições.

Às amizades construídas no estágio docência, Wirlândia e Wellison. Agradeço por me apoiarem, compreenderem e ajudarem nesse processo.

Aos meus afilhados Bernardo e Bia, que são aconchego e leveza. Vocês são especiais em minha vida.

E, por fim, para mim por superar todos os limites e obstáculos encontrados durante o percurso.

Se pensar é o destino do ser humano,
continuar sonhando é o seu grande desafio.
E isto, é lógico, implica em trajetórias com riscos,
em vitórias, com muitas lutas,
e não poucos obstáculos pelo caminho.
Apesar de tudo, seja ousado.
Liberte sua criatividade.
E nunca desista de seus sonhos,
pois eles transformarão sua vida em uma grande aventura.
(Augusto Cury, 2009, n. p.).

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo geral analisar a abordagem de uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental aprovada no Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2020, em relação ao saber ângulo. Para tanto, apoiou-se teórica e metodologicamente na Teoria Antropológica do Didático – TAD, na qual visou de forma mais específica caracterizar as organizações matemáticas e didáticas em relação ao saber ângulo. Para isso, utilizou-se como percurso metodológico a pesquisa qualitativa de caráter documental, na qual analisou uma coleção de livros mais adotada no Brasil do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Os resultados indicaram que a coleção apresenta 226 tarefas que apontaram para cinco tipos de tarefas, sendo elas: T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região, T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal, T_I – Identificar ângulos em figuras, T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas e T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida de abertura. Associados a esses tipos foram encontrados 21 subtipos de tarefas. Em relação à organização didática da coleção, percebemos que no livro didático do 6º ano o saber ângulo está relacionado com as ideias de giro, abertura e inclinação. Essas ideias são observadas a partir de situações do cotidiano. Também trabalha o ângulo como região e discute sobre a medida da abertura elaborando uma técnica voltada ao uso do transferidor. No 7º ano, o saber ângulo é ampliado e trabalhado por meio de diferentes classificações como: enquanto a medida de sua abertura, giro, ângulos relacionados a geometria, a soma das suas medidas, região e ângulos formados por retas paralelas e cortados por uma transversal. Neste ano escolar, também é encontrado o subtipo de maior expressão que é T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos, e essa predominância é vista também nos anos posteriores. Com relação ao livro do 8º ano, percebemos que a bissetriz de um ângulo é explorada no ambiente tecnológico-teórico, porém não há nenhuma tarefa relativa a esse assunto. Também é nesse ano escolar que se explora a classificação de ângulos retos, agudos e obtusos. No livro do 9º ano é realizado o resgate de outros tipos de tarefas exploradas em anos anteriores, a exemplo de ângulos formados por retas cortados por uma transversal e classificação de tipos de ângulos. Portanto, ao analisar a coleção percebemos que os primeiros encontros com o saber no 6º e 7º anos acontecem de maneira contextualizada, já no 8º e 9º anos os reencontros com o saber ângulo acontecem já nos momentos de constituição do ambiente tecnológico-teórico e de institucionalização. Existe uma diversidade de tarefas e as técnicas evoluem partindo do uso do transferidor para a determinação da medida através dos processos algébricos. A constituição do ambiente tecnológico-teórico e a institucionalização ocorrem de maneira simultânea. Não identificamos avaliação praxeológica na coleção, no entanto, os autores retomam alguns tipos de tarefas na tentativa de realizar avaliação da aprendizagem.

Palavras-chave: teoria antropológica do didático. livro didático. ângulos.

ABSTRACT

This research aimed to analyze the approach of a collection of mathematics textbooks for the final years of elementary school approved in the National Textbook and Teaching Material Program - PNLD 2020, in relation to the concept of angles. The theoretical and methodological framework was based on the Anthropological Theory of the Didactic – TAD, with the specific goal of characterizing the mathematical and didactic organizations related to the concept of angles. The methodology employed was qualitative, using documentary research to analyze a collection of textbooks widely adopted in Brazil for the 6th to 9th grades. The results indicated that the collection includes 226 tasks categorized into five types: T_D – Determining the measure of the angle opening of a figure or region, T_V – Solving propositions involving angles formed by two lines cut by a transversal, T_I – Identifying angles in figures, T_R – Recognizing representations of angles in everyday situations, and T_{CL} – Classifying angles according to the measure of the opening. Associated with these types, 21 subtypes of tasks were identified. Regarding the didactic organization of the collection, it was observed that, in the 6th-grade textbook, the concept of angles is related to the ideas of rotation, opening, and inclination. These ideas are explored through everyday situations, and the angle is also treated as a region, discussing the measure of the opening and elaborating a technique using the protractor. In the 7th grade, the concept of angles is expanded, considering different classifications such as the measure of the opening, rotation, angles related to geometry, the sum of their measures, region, and angles formed by parallel lines cut by a transversal. This year also introduces the predominant subtype T_{D6} – Determining the measure of the angle opening through algebraic processes, a dominance that continues in subsequent years. In the 8th-grade textbook, it was observed that the bisector of an angle is explored in the technological-theoretical environment, although no tasks related to this subject are found. This year also explores the classification of right, acute, and obtuse angles. In the 9th-grade textbook, there is a retrieval of task types explored in previous years, such as angles formed by lines cut by a transversal and the classification of types of angles. In conclusion, the analysis of the collection reveals that initial encounters with the concept in the 6th and 7th grades occur in a contextualized manner, while in the 8th and 9th grades, the reencounters with the concept of angles occur during the construction of the technological-theoretical environment and institutionalization. There is a diversity of tasks, and techniques evolve from using the protractor to determining the measure through algebraic processes. The construction of the technological-theoretical environment and institutionalization occur simultaneously. No praxeological evaluation was identified in the collection; however, the authors revisit some task types in an attempt to assess learning. Keywords: anthropological theory of the didactic, textbook, angles.

Keywords: anthropological theory of the didactic. textbook. angles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das unidades temáticas trabalhadas na matemática da educação básica é a geometria. Este domínio envolve uma gama de conceitos, procedimentos e propriedades. Sendo assim, como mencionado em documentos brasileiros oficiais, a geometria tem o intuito de resolver problemas do mundo físico, desenvolver o senso espacial e pensamento geométrico que irão possibilitar por exemplo, classificar figuras geométricas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018, p. 272), para a unidade temática de geometria desde os anos iniciais são previstas algumas características que os estudantes precisam desenvolver ao longo da escolaridade, como: identificar e estabelecer pontos de referência para localização e deslocamento de objetos, construir representações, indicar características das formas geométricas, associar figuras espaciais, nomear e comparar polígonos relativos aos lados, vértices e ângulos. Assim, o campo da geometria na educação básica tem o papel de auxiliar o estudante desenvolvendo variadas formas de compreensão, relacionando o contexto a sua volta e utilizando representações.

Ainda sobre o ensino de geometria escolar, ressaltamos a ideia discutida por Rogenski e Pedroso (2009), no qual pontuam que a geometria é trabalhada em segundo plano nas escolas, pois os professores acabam dando prioridade e maior importância aos conteúdos que envolvem a álgebra.

Aliada a ideia expressa anteriormente, buscamos referências mais atualizadas que discutem sobre o ensino da geometria. Assim, observamos Barros e Pavanello (2022), que mencionam dados encontrados em pesquisas recentes e mostram que o ensino da geometria é apontado como ineficiente e precário, sendo notáveis as dificuldades tanto de professores, quanto dos estudantes em todos os segmentos da educação básica.

Dessa forma, entendemos que é importante discutir tópicos da geometria escolar, perpassando até mesmo a formação de professores visto que este campo do conhecimento promove a compreensão de outros conteúdos matemáticos. Assim, um dos conteúdos abordados que possui bastante significado é o ângulo, que além de ser um objeto de estudo serve também como elemento base para a compreensão de outros conteúdos estudados pela geometria, como triângulos e polígonos.

O estudo de ângulos envolve uma complexidade de ideias e funções em sua definição, como revelam as pesquisas de Vieira (2010) e Albuquerque (2017) que serão abordados com detalhes na seção de ângulos. Nessa perspectiva, é necessário observar que o saber ângulo tem sua importância, pois além de ajudar a entender outras definições, está presente nas noções de espaço e do campo de visão.

Em nossa vida cotidiana, mesmo que de maneira corriqueira, ângulo como noção de abertura, por exemplo, pode ser observado a partir dos passos de uma pessoa em relação ao movimento de suas pernas, ou seja, quando se está andando a abertura que suas pernas fazem é menor do que quando se está correndo ou realizando uma atividade física que envolva velocidade.

Outro motivo para o estudo do saber ângulo é a maneira na qual algumas concepções relatadas por Magina (1988), Diniz e Smole (1996) e Lima (2000) são resgatadas por estudos mais atuais como o de Vieira (2010) e de Albuquerque (2017). Estes ainda são motivos de atenção, algo que reflete o tempo para a compreensão do saber ângulo e a visão estática que dificulta sua percepção, principalmente no aspecto de que os estudantes confundem o comprimento dos segmentos do ângulo com sua medida de abertura.

Portanto, voltando ao que se propõe a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), este documento situa na matemática cinco unidades temáticas: álgebra; geometria; números; grandezas e medidas; probabilidade e estatística. Em relação ao saber ângulo, este é mencionado em duas unidades temáticas, que são a de grandezas e medidas e a de geometria. Percebemos que ângulo, enquanto objeto geométrico, está inserido na unidade temática da geometria, enquanto a abordagem do ângulo em relação a sua medida de abertura encontra-se em grandezas e medidas.

Em relação ao saber ângulo estar ligado às grandezas e medidas, percebemos que essa associação é dada através da medida de sua abertura, que é denotada por meio de um valor numérico acompanhado pelo grau, que é uma das unidade-padrão mais utilizadas para medição. Cabe ressaltar que radianos também é uma unidade de medida que pode ser usada ao medir um ângulo.

Outro fato importante a ser destacado é a questão de ângulo fazer parte das grandezas geométricas, como pontua Lima e Bellemain (2010). Por isso, este objeto pode ser trabalhado com o seu foco voltado tanto para as grandezas e medidas como para a geometria.

É válido salientar também que as grandezas e medidas compõem uma unidade temática do currículo de matemática proposta pela BNCC (Brasil, 2018), que está vinculada com a ideia de almejar que os estudantes façam o reconhecimento de comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas que estão associadas às figuras geométricas. Assim, essas relações serão exploradas posteriormente no capítulo que é abordado o saber ângulo.

Nesse sentido, consideramos importante o estudo de ângulo, pois além de ser um saber básico da geometria, como também das grandezas e medidas, está presente no cotidiano. E, além de servir como suporte para outros conteúdos e outras disciplinas do currículo, contribui para o desenvolvimento intelectual. Por isso sua presença e abordagem nas propostas curriculares se torna necessária. Com isso, surge a necessidade de pesquisas que busquem investigar a abordagem de ângulos em livros didáticos.

Em relação ao Livro Didático – (LD), este é um recurso importante para estudantes e professores, pois se configura como um material que consiste em uma rica fonte de informações, como mencionam Carvalho e Lima (2010) ao atestar qye é importante não apenas o que traz o livro do aluno, mas também as orientações e os textos informativos incluídos no manual do professor.

Desse modo, o livro didático contribui para a organização do conhecimento escolar, como já orientavam os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) de matemática. Esta organização se deve ao Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD (Brasil, 2019) que está em constante reformulação no sentido de garantir possíveis melhorias na elaboração e uso desses materiais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) orientavam sobre a importância da utilização de livro didático nas escolas brasileiras. O uso frequente desse recurso de ensino e aprendizagem é uma realidade, por isso é preciso ter cautela no momento de utilizá-la. O próprio documento alerta para isso, afirmando que o livro didático tem forte influência na prática pedagógica e acrescenta que não deve ser o único material a ser utilizado, uma vez que para se ter uma visão ampla do conhecimento é necessário a variedade nas fontes de informação.

Recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) menciona que a utilização dos recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Com isso, entendemos a importância do livro como apontado pela BNCC: este material, quando bem trabalhado, pode ser bastante explorado para a compreensão de significados matemáticos.

Por ser um recurso de auxílio ao ensino e à aprendizagem, o livro didático se caracteriza como uma fonte de acesso ao saber matemático numa linguagem capaz de ser compreendida pelo estudante. Nesse sentido, faz-se necessário o estudo, pois várias pesquisas relatam a importância da utilização do LD, como mencionam Costa e Allevato (2010), inferindo que o livro tem a função de interlocutor entre o professor e o aluno, pois serve de apoio para ambos.

A partir do livro didático podemos observar a importância da organização curricular através dos conteúdos que são trabalhados com atenção voltada para o saber ângulo que também é notado através da proposta curricular desde os parâmetros curriculares. Desse modo, é necessário observar as orientações da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) que situam a abordagem de ângulos dos anos iniciais ao ensino médio. Contudo, nesta pesquisa, o foco está nos anos finais do ensino fundamental, ou seja, do 6º ao 9º ano, pois de acordo com as orientações curriculares são nesses anos que ângulo é associado a outros conteúdos matemáticos.

Para contribuir com a análise a ser realizada, recorremos às contribuições da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas institucionais que pode ser modelizada por uma ferramenta teórico-metodológica denominada praxeologia. No âmbito da praxeologia existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra, a práxis e o logos. A primeira é constituída pelas tarefas e as técnicas e, a segunda, pela tecnologia e pela teoria (Chevallard; Bosch; Gascón, 2001).

É necessário também nesta pesquisa observar como a teoria antropológica do didático pode contribuir por meio de sua abordagem na análise dos livros didáticos de matemática. E será através desta compreensão que poderemos fazer algumas considerações e inferências, no modo em que o saber ângulo está expresso no livro.

Com o intuito de compreender a abordagem de ângulos em livros didáticos através da Teoria Antropológica do Didático, procuramos analisar o saber ângulo em uma coleção de livros didáticos evidenciando os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias empregadas, bem como os momentos didáticos. Logo, surge o seguinte problema: Como uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental aborda o saber ângulo?

Na perspectiva de responder ao nosso questionamento, temos por objetivo geral analisar a abordagem de uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental aprovada no Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD (Brasil, 2019) em relação ao saber ângulo. De forma mais específica, caracterizar a organização matemática presente na coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental em relação ao saber ângulo e caracterizar a organização didática presente na coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental em relação ao saber ângulo.

Portanto, essa dissertação está estruturada da seguinte forma: pela fundamentação teórica composta pelo saber ângulo, e pela Teoria Antropológica do Didático, pela metodologia que destaca o percurso a ser desenvolvido, pela análise dos resultados que estão baseados na análise da organização matemática e pela análise da organização didática e, por fim, pelas considerações finais.

No capítulo 1, discutimos sobre o saber ângulo através da perspectiva etimológica, como também a sua história desde a geometria primitiva até as suas definições mais atuais. Evidenciamos, ainda, reflexões acerca da definição matemática de ângulo por diversos autores, propondo nossa definição para o ensino de ângulos. Discutimos também sobre as classificações de ângulo e, por fim, destacamos como ocorre a relação do saber ângulo e o currículo da educação básica.

Já no capítulo 2, dialogamos sobre a transposição didática e o surgimento da Teoria Antropológica do Didático analisando sobre os elementos que compõem a teoria e como são estruturadas as organizações matemáticas e didáticas. Em seguida, apresentamos uma revisão de literatura relacionada a esta temática.

Em relação ao capítulo 3, neste evidenciamos os procedimentos metodológicos desenvolvidos que possuem características de uma pesquisa qualitativa, de caráter documental, com a finalidade de investigar os livros didáticos e caracterizar as praxeologias matemáticas e didáticas em relação ao saber ângulo que irão funcionar como nossas lentes para fazermos a análise

No capítulo 4, fizemos a análise dos resultados por meio da discussão da análise da organização matemática, que através do nosso olhar destacamos os tipos de tarefas que encontramos e atrelados a elas montamos os subtipos de tarefas. Em seguida, realizamos a descrição das técnicas com suas respectivas tecnologias e teorias em que se apoiam. Ainda neste capítulo, abordamos a análise da organização didática por meio dos momentos de estudo propostos por Chevallard (1999). Estes, por sua vez, são: primeiro encontro, exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica, constituição do ambiente tecnológico-teórico, trabalho da técnica, institucionalização e avaliação.

Consequentemente, finalizamos com as nossas considerações finais, na qual realizamos os apontamentos e análises dos resultados encontrados na organização matemática e didática de toda a coleção, sinalizando também questões e direcionamentos que podem nos guiar em pesquisas futuras.

2 O SABER ÂNGULO

O interesse do homem em compreender melhor o meio em que vive estimulou o desenvolvimento dos primeiros conhecimentos geométricos. Neste capítulo, o enfoque será voltado para o saber ângulo com o olhar para a sua etimologia, um breve histórico, definição matemática, considerações sobre o ensino, o currículo da educação básica e ao final a revisão de literatura sobre o tema.

2.1 ETIMOLOGIA

Do ponto de vista etimológico a palavra ângulo, segundo Vieira (2020), tem origem do latim *angulus* e quer dizer canto, recanto. Por mais que se tenha indícios do surgimento através dos povos babilônios, ainda assim encontramos a origem da palavra vinculada ao latim.

Dessa forma, quando partimos para o significado de ângulo em alguns dicionários da língua portuguesa, percebemos uma pluralidade de sentidos em relação a este objeto do saber. Sentidos estes atrelados aos seguintes campos como o da geometria, do sentido figurado, da fotografia e das gírias do futebol. Com isso, quando pensamos ou falamos sobre ângulos, nem sempre remetemos de fato ao objeto de estudo da matemática.

2.2 BREVE HISTÓRICO

Em relação a sua história, temos que a geometria usada pelos povos antigos de maior importância, foi potencializada na Babilônia. Foram encontrados registros na tábula babilônica Plimpton 322, de aproximadamente 1900 a 1600 a.C., com caracteres que representam os valores das medidas dos catetos e da hipotenusa de triângulos retângulos.

O uso da geometria como ciência surgiu no vale do rio Nilo com registros que marcam por volta de 1850 a.C. De acordo com Eves (1997), a geometria teve origem no Egito por causa da necessidade de realizar novas medidas de terra, devido às inundações anuais do rio Nilo. Outra corrente de pensamento é defendida por Mlodinow (2005), na qual segundo o autor, a motivação do surgimento da geometria veio a partir da cobrança de impostos da terra, pois o governo se baseava na altura da enchente a cada ano de acordo com a área de superfície das terras[1], ou seja, as propriedades.

Segundo Boyer (1974) os povos egípcios tinham muitas habilidades na delimitação das terras, com isso se utilizavam de cordas com nós equidistantes para fazer a divisão de terrenos. Apesar de utilizar princípios geométricos, assim como as civilizações vistas anteriormente, as sociedades pré-helênicas, por volta de 1400 a.C., já possuíam a noção intuitiva de ângulo.

> Os babilônios antigos, [...] diferentemente dos egípcios, conheciam de fato que o ângulo inscrito num semicírculo é reto, proposição geralmente conhecida como teorema de Tales, apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônios terem conhecido e usá-la (Boyer, 1974, p. 30).

Contudo, é com os gregos que vamos encontrar pela primeira vez um estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) em um círculo e os comprimentos das cordas que os subtendem (Morey, 2001).

Várias pesquisas se apoiam nesses autores citados anteriormente, e com isso apontam questionamentos e tentam investigar o conceito de ângulo. Entram nessa gama o trabalho de alguns autores como: Vieira (2010), Fraga (2016), Albuquerque (2017), Rocha (2017a), Rocha (2017b) e Carvalho (2019), que tecem suas reflexões sobre essa importância. Assim, esta discussão vem sendo explorada por vários autores, que definem o saber ângulo de formas diferentes, ou criticam a forma em que esse saber é assinalado em outros trabalhos.

Apesar de não ter registros sobre quando o estudo de ângulo surge na história da geometria especificamente, pesquisadores concedem ao matemático e filósofo Tales de Mileto o surgimento desse pensamento matemático no período entre 624 e 527 a.C., pelo advento que ficou conhecido como Teorema de Tales.

Este, por sua vez, diz: "**todo ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto**". Entretanto, Boyer (1974) aponta que essa definição de ângulo percorreu cerca de 3500 anos de história, pois documentos mostram que os babilônios já tinham conhecimento dessa definição e supostamente Tales pode ter aprendido durante viagens à Babilônia.

---

[1] Entendemos que atualmente trechos como "medidas de terra", "área de superfície" são termos que compõem o campo das Grandezas e Medidas (e não Geometria). Epistemologicamente, as Grandezas e Medidas nascem a partir da Geometria.

A definição de ângulo mais antiga que se tem conhecimento foi descrita por Euclides, que em seu primeiro livro Os Elementos, escrito a mais de 2300 anos, pontua o conceito como: "**Um ângulo plano é a inclinação entre elas (retas), de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta**", como mostra na obra Os Elementos, traduzida por Bicudo (Euclides, 2009, p. 97, **grifo nosso**).

Conforme Boyer (1974), o matemático e professor David Hilbert (1862-1943) publicou o livro *Grundlagen der Geometrie*, que define o ângulo da seguinte forma:

> Seja α um plano qualquer, e sejam h, k duas semirretas quaisquer, diferentes, no plano α, que partem do ponto O e que pertencem a retas distintas. Ao sistema destas semirretas h, k chamamos ângulo e representamo-lo por (h,k) ou (k,h) (Hilbert, 2003, p. 10-11).

De acordo com Calado (1955 *apud* Gomes; Ralha, 2005, p. 8), ao estruturar a definição de ângulo, tem-se que este é "uma rotação, operação que transforma uma semirreta em outra semirreta com mesma origem".

Das definições apresentadas até aqui, então, percebemos que a de Euclides e a de Hilbert apresentam uma concepção mais estática sobre ângulo. Já a definição proposta por Gomes e Ralha (2005) traz a ideia de rotação, que também pode ser compreendida como giro, dando uma visão mais dinâmica do objeto ângulo.

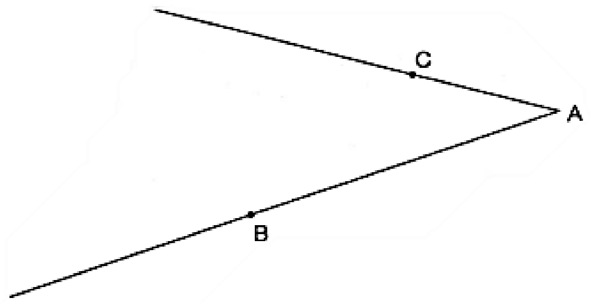
2.3 AXIOMA SOBRE ÂNGULOS

Em relação as definições que permeiam o estudo de ângulos na academia, é notório perceber que este tipo de definição é formalmente mais discutido nas disciplinas de geometria euclidiana, proposta pelas instituições de ensino superior. Neste sentido, é importante observar os axiomas[2] que estão relacionados ao saber ângulo que servirão de base para a composição da praxeologia. Sendo assim, de início, é valido observar como Barbosa (1995) faz a representação deste objeto.

---

[2] Como afirma Santos (2014, p. 1-2), axiomas são verdades inquestionáveis universalmente válidas, muitas vezes utilizadas especificamente na matemática como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação. A palavra axioma deriva da grega *axios*, cujo significado é digno ou válido muitos contextos, axioma é sinônimo de postulado, lei ou princípio.

Figura 1 – Representação gráfica de um ângulo



Fonte: Barbosa (1995, p. 22).

Deste modo, alguns axiomas envolvem o estudo deste saber como é o caso do primeiro que trata da medida de ângulo, que diz: “Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semirretas[3] coincidentes” (Barbosa, 1995, p. 24). Um diálogo aqui importante e que se deseja deixar evidente é que a medida de um ângulo é dada pela medida de sua abertura[4]. E isso é dado pelo fato de as semirretas do ângulo terem comprimentos infinitos.

Logo, Queiroz e Rezende (2008, p. 22) acrescentam a este axioma anterior duas definições: “a cada ângulo corresponde um único número real entre 0° e 180°”. Posteriormente, reiteram-se as seguintes definições. “(a) O número correspondente ao axioma anterior é chamado medida do ângulo. (b) Ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos congruentes” (Queiroz; Rezende, 2008, p. 22). Com isso, conforme as definições citadas acima, percebemos que o saber ângulo é constituído de outras propriedades que serão mencionadas posteriormente e irão ampliar a discussão sobre este tema.

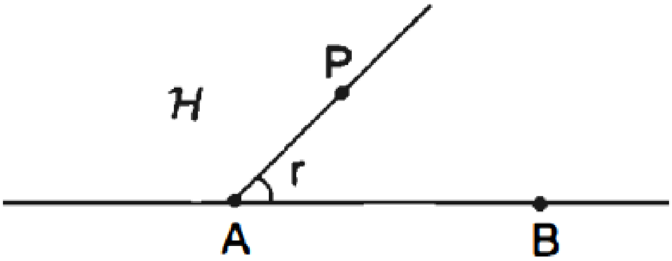
Em relação à forma em que o ângulo é construído, há um postulado próprio, que é o axioma da construção de ângulo, como afirmam Queiroz e Rezende (2008, p. 23, **grifo nosso**) “seja **AB** uma semi-reta contida na reta origem de um semiplano ʽ**H**. Para cada número r entre 0° e 180° existe exatamente uma semi-reta **AP** com **P** em ʽ**H**, tal que medida de PAB = r”, como mostra a figura a seguir.

---

[3] Como propõe Queiroz e Rezende (2008, p. 18-19). A semirreta de origem A contendo o ponto B, a qual é denotada por AB, é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que A - B - X. O ponto A é denominado origem da semirreta. Ou seja, é uma linha que apresenta apenas uma direção e sentido, partindo de seu ponto de origem

[4] É importante ressaltar que os axiomas citados não pontuam a medida da abertura de um ângulo e sim, a medida de um ângulo. Ou seja, a concepção de abertura é proposta e está associada ao ensino do saber ângulo na educação básica.

Figura 2 – Representação do axioma da construção de ângulos



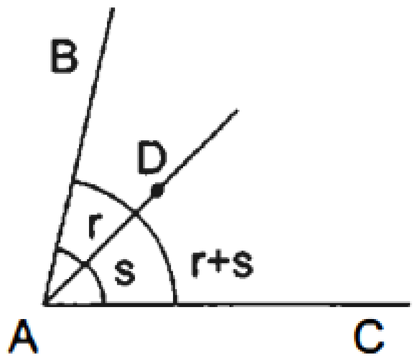
Fonte: Queiroz e Rezende (2008, p. 23).

Outro axioma importante, que também é abordado como postulado, é o que dialoga com a questão da adição de ângulos, como afirmam Queiroz e Rezende (2008) através do axioma da adição de ângulos. Nesse contexto, é dito que:

> Se D é um ponto interior do BÂC, então mBÂC (lê-se medida do ângulo BÂC e assim respectivamente) = mBÂD + mDÂC" na figura abaixo "r denota a medida do ângulo BÂD, s denota a medida do ângulo DÂC e r + s; denota a medida do ângulo BÂC (Queiroz; Rezende, 2008, p. 23).

Ainda, vale lembrar que a medida de um ângulo é dada pela medida de sua abertura, embora os autores citados não se atentem a isto. Consequentemente, tem-se a figura abaixo.

Figura 3 – Representação do axioma da adição de ângulos



Fonte: Queiroz e Rezende (2008, p. 23).

Deste axioma também seguem outras duas definições, como a de ângulos complementares e suplementares. Para ângulos complementares, Queiroz e Rezende (2008, p. 23) dizem "se a soma das medidas de dois ângulos é 90, então os ângulos são chamados complementares, e cada um é o complemento do outro"; e para ângulos suplementares, "se a soma das medidas de dois ângulos é 180°, então dizemos que os ângulos são suplementares e que cada um é o suplemento do outro".

Ainda do axioma de adição de ângulos seguem as definições de ângulo reto e obtuso. Para Barbosa (1995, p. 27), “um ângulo cuja medida é 90° é chamado de ângulo reto” e para Queiroz e Rezende (2008, p. 24) “um ângulo com medida menor que 90° é chamado ângulo agudo, e um ângulo com medida maior que 90° é chamado ângulo obtuso”. A partir destes axiomas, seguimos agora para as outras definições que estão relacionadas ao saber ângulo.

2.4 OUTRAS DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS RELACIONADAS AO SABER ÂNGULO

Nos livros de geometria plana utilizados nos ensinos básico e superior, a definição de ângulo segue, por vezes, concepções distintas. Autores como Barbosa (1995), Queiroz e Rezende (2008); Muniz Neto (2013) e Dolce e Pompeo (2005), sendo os dois primeiros voltados ao ensino superior e os dois últimos ao ensino básico, expressam visões de perspectivas distintas em relação a definição de ângulos, no qual observamos a seguir.

Para Barbosa (1995), a definição de ângulo é observada enquanto objeto da geometria sendo baseado em uma perspectiva axiomática, apresentado como: “Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem” (Barbosa, 1995, p. 22). Ainda sobre a medida de ângulos, o autor ressalta a ideia de que “todo ângulo tem uma medida em graus maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes. Todo ângulo raso mede 180°” (Barbosa, 1995, p. 25).

Para Dolce e Pompeo (2005, p. 20), adota-se a seguinte definição para ângulos: “chama-se ângulo a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares)”.

Já Queiroz e Rezende (2008, p. 21) trazem a seguinte definição de ângulos:

> Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CAB e representado por BÂC ou CÂB, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por Â.

Neste sentido, a definição apresentada por Barbosa (1995) difere das outras uma vez que não acrescenta o fato de as semirretas não estarem contidas numa mesma reta. Já a de Dolce e Pompeo (2005), mesmo sendo um livro da educação básica, vai de encontro com a definição proposta por Queiroz e Rezende (2008), que trabalha ângulo através das semirretas. Vale destacar que a medida da abertura de um ângulo pode ser feita em radianos ou em graus, como afirmam esses autores. “Embora em Análise seja usada a medida de ângulos em radianos, na Geometria Elementar ela pode ser feita tanto em radianos como em graus” (Queiroz; Rezende; 2008, p. 22).

Com isso, devido as contribuições de Euclides em sua obra Os elementos, as definições de ângulo vão se ampliando para de fato expressarem a sua função geométrica. Outro autor que aborda um outro sentido das definições já mencionadas é Muniz Neto (2013, p. 11) que pontua ângulo como região angular e diz: “dadas, no plano, duas semirretas OA e OB, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados OA e OB é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas OA e OB”.

Essa última definição apresenta uma ideia diferente das outras, pois agora o ângulo se mostra como região do plano. Nisto, podemos perceber como o objeto ângulo é multifacetado no próprio contexto matemático, visto que se comporta de maneira bastante versátil.

2.5 DEFINIÇÃO DO SABER ÂNGULO VOLTADA AO ENSINO

A pesquisa de Balacheff (1988) é um grande ganho para entender este saber. Então, em seus estudos, este autor indica quatro ideias para a definição de ângulo. Primeiro, define como a inclinação de uma linha reta para outra; segundo, como uma figura formada por duas semirretas; depois como região do plano; e, por fim, como rotação.

No entanto, Balacheff (1988) aborda a questão do ângulo como inclinação baseado na ideia de Kayas (1978, p. 1) que diz: "o plano do emaranhado é a inclinação mútua de duas linhas coplanares que se encontram sem serem colineares". Porém, pontua algumas contradições em relação a essa definição, ou seja, o ângulo enquanto inclinação, consideraria apenas ângulos de medidas inferiores a 180°?

Para ângulo como uma figura formada por duas semirretas, Balacheff explora a ideia de Hilbert (1899, p. 21) já mencionada que diz: “sejam h e k duas semirretas diferentes de um plano x, provenientes de um ponto O se pertencentes a linhas diferentes o conjunto de semirretas h e k é chamado de ângulo”. Sendo assim, Hilbert reflete que ao utilizar esta definição excluiria ângulos planos e côncavos. Então, para isso, insere as noções de interior e exterior de um ângulo.

Em relação ao ângulo enquanto região do plano, Balacheff traz a concepção de quando o plano é dinâmico e quando o plano é estático. Para o plano dinâmico, se apoia em Carroll (1885, p .74): "a parte de um lápis de semi-raios (meio raio), descrita por um semi-raio (meio raio) girando em torno de seu ponto final de uma posição para outra é chamada de ângulo". E quando o plano é estático traz a compreensão de Fourrey (1938, p. 44): "a parte do plano limitada por duas linhas retas que partem do mesmo ponto é chamada de ângulo".

Já para o ângulo enquanto rotação ou giro, Balacheff se apoia na ideia de Choquet (1964) afirmando que para identificar ângulos com rotações sobre um ponto, a escolha desse ponto não influencia. Com isso, é válido observar o saber ângulo com atenção para o currículo em relação aos anos finais da escolarização refletindo sobre o pensamento de Balachef (1988).

2.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE A DEFINIÇÃO PROPOSTA POR BALACHEFF

Neste tópico não temos a pretensão de desenvolver uma definição matemática para ângulo, até porque muitos pesquisadores propõem variadas definições para este saber e nosso foco está voltado para o ensino. Porém, matematicamente, nos apoiamos na definição de Barbosa (1995), que aborda ângulo da seguinte forma: “chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo”.

Portanto, com o intuito de trazer um olhar voltado para o ensino e diante dos questionamentos levantados por Balacheff (1988) para definir ângulo, se faz necessário compreender que será através da abertura de um ângulo que o campo da geometria irá se associar com as grandezas e medidas, ou seja, a grandeza geométrica como discutiremos posteriormente. Porém, essa questão não fica evidente em sua definição.

Então, para compor nossas considerações sobre a definição para o ensino é preciso entender que ao mencionarmos o ângulo como abertura fica evidente que será associado à sua medida sendo representada por um número e pela unidade de medida (graus ou radianos), como também a sua representação geométrica formada pelo par de semirretas e o vértice.

Então, admitindo que o saber ângulo pode se portar de diferentes maneiras, principalmente quando observado na educação básica, então organizamos nosso olhar com base nos estudos de Balacheff (1988) da seguinte forma: Ângulo como inclinação, ângulo como giro, ângulo como região, ângulo como abertura (grandeza geométrica). Assim, faremos a discussão por meio das ideias de Balacheff e de outros autores com o intuito de dar sustentação e compreender essas ideias relativas ao ensino.

Ângulo como inclinação: Nesta ideia temos com base a definição de Kayas (1978) que pontua ângulo da seguinte forma: o plano do emaranhado é a inclinação mútua de duas linhas coplanares que se encontram sem serem colineares, como também afirma Euclides na obra dOs Elementos com tradução de Bicudo (Euclides, 2009, p. 117). Nessa obra, é dito que “um ângulo plano é a inclinação entre elas (retas), de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta”.

Ângulo como giro: Para a ideia de giro exploramos atráves de Choquet (1964) que sugere que ângulo é a rotação sobre um ponto, e Heath (1956), que complementa ao afirmar que a natureza essencial de um ângulo está intimamente ligada à rotação. E, por fim, trazemos Longen (1999, p. 205), que atesta que “essa ideia de abertura associada ao giro denominamos ângulo”.

Ângulo como região: Em relação a ideia de ângulo como região, Balacheff (1988) propõe duas concepções relacionados à região do plano, sendo elas dinâmica e estática. A partir disso, Papa Neto (2017, p. 47) complementa a ideia como “um ângulo é a interseção de dois semiplanos, que são conjuntos convexos do plano, logo um ângulo é uma região convexa do plano delimitada por suas semirretas.”

Ângulo como abertura (grandeza geométrica): Esta ideia é abordada por Hilbert (1899, p. 21), que afirma “sejam h e k duas semirretas diferentes de um plano x, provenientes de um ponto O, e pertencentes a linhas diferentes o conjunto de semirretas h e k é chamado de ângulo”, como também defende Barbosa (1995). Logo, podemos entender da seguinte maneira: duas semirretas distintas e não opostas, de mesma origem, definem um ângulo.

Para complementar esta ideia nos baseamos em Lobo da Costa (1997, p. 30) que diz “lidar com ângulo significa lidar com suas medidas” e em Barbosa (1995), que afirma que todo ângulo tem uma medida em graus maior ou igual a zero, ou seja, em outras palavras, nesta ideia ângulo é visto como a medida da abertura entre as duas semirretas de mesma origem.

Então, é necessário a compreensão de qual ideia está sendo associada a ângulo para se ter a melhor noção de como este objeto se comporta quando trabalhado de diferentes formas na educação básica, principalmente nos anos finais do ensino fundamental.

Portanto, para o entendimento das definições que permeiam o estudo do saber ângulo é preciso observar como se comportam suas devidas divisões. Por isso, organizamos da seguinte forma: classificação dos ângulos enquanto a medida de sua abertura, relações de comparação, soma das medidas, posição de ângulos, concepção de ângulo enquanto giro e relações entre ângulos determinados por retas cortadas por uma transversal.

2.6.1 Classificação dos ângulos quanto à medida de sua abertura

Com o objetivo de classificar a abertura de um ângulo, é necessário inicialmente conhecer as unidades de medida da abertura. Então, para medir um ângulo existem as unidades que são conhecidas como grau e radianos. Em relação ao grau, Queiroz e Rezende (2008, p. 28) pontuam que:

> Os antigos babilônios [...] desenvolveram também um sistema numérico de base 60, usando a ideia de valor posicional para frações e para números inteiros. Por que 60? Há muitas teorias a respeito. É possível que tenha sido pela facilidade de se dividir a circunferência em 6 partes iguais, usando seu raio como corda, e daí 60 seria 1/6 de 360. A ideia de 360 partes em uma circunferência poderia também ser resultado de uma estimativa errônea de que o ano teria 360 dias.

Logo, o grau decorre do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios, no qual a própria subdivisão do grau é adotada até os dias atuais. Por exemplo, o minuto é 1/60 do grau, e o segundo é 1/60 do minuto.

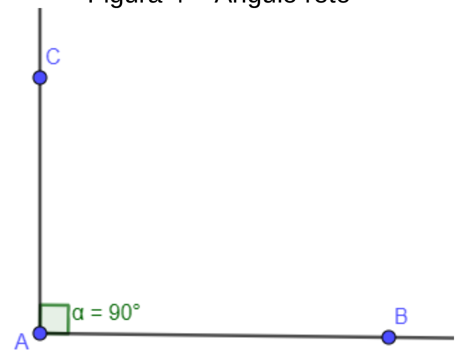
Em seguida, observa-se a unidade radiano que foi adotada com o intuito de simplificar as equações (ou relações) matemáticas e físicas. Segundo Queiroz e Rezende (2008, p.118).

> Ao que parece, a necessidade dessa nova medida angular foi considerada independentemente pelo matemático Thomas Muir e pelo físico James T. Thomson. Posteriormente, discutiram sua necessidade e adotaram para ela o nome de radian (radiano) como urna combinação de radial ângulo.

Então, por mais que o grau e o radiano sejam as unidades de medida angular, é válido observar que o grau é a unidade de medida mais usual para a medição de ângulos. Desta forma, se faz importante entender como se comportam os ângulos quanto à sua medida. Portanto, estes se dividem em: reto, agudo, obtuso, raso e nulo, dos quais discutiremos a seguir.

Ângulo reto é um ângulo cuja medida de sua abertura é 90°, como afirma Barbosa (1995), e sua representação é da seguinte forma:

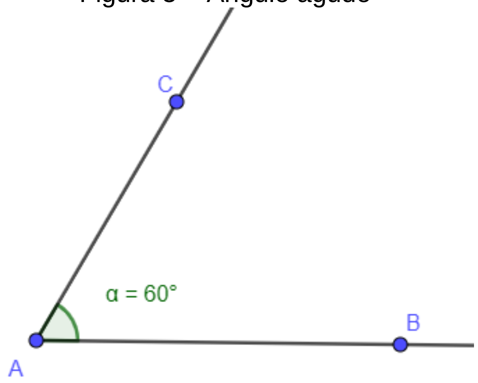
Figura 4 – Ângulo reto



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ângulo agudo é um ângulo com a medida de sua abertura menor que 90°, segundo Queiroz e Rezende (2008), com representação a seguir:

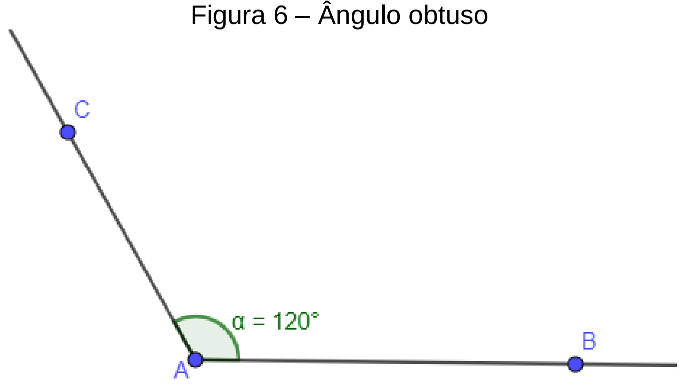
Figura 5 – Ângulo agudo



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ângulo obtuso é um ângulo com a medida de sua abertura maior que 90°, segundo Queiroz e Rezende (2008), como representado a seguir:

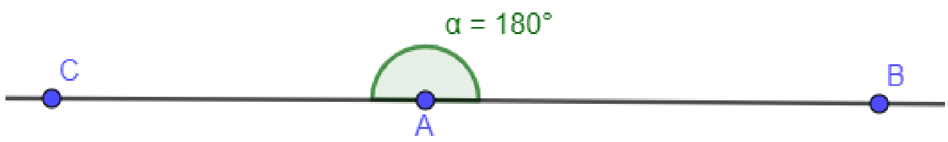
Figura 6 – Ângulo obtuso



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ângulo raso é todo ângulo que mede 180º, segundo Barbosa (1995), e se apresenta do seguinte modo:

Figura 7 – Ângulo raso



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

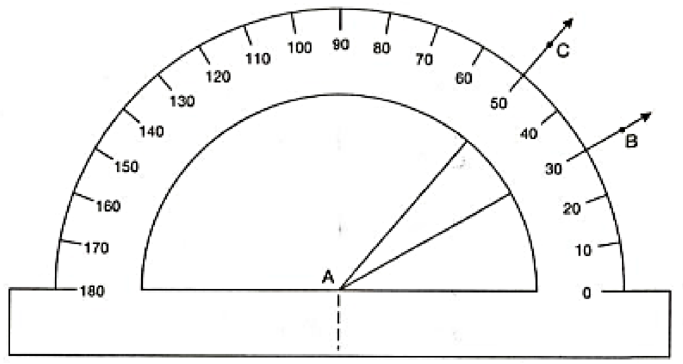
Ângulo nulo é um ângulo no qual as semirretas são coincidentes, como afirma Machado (2012), como representado abaixo:

Figura 8 – Ângulo nulo

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Assim como existem as unidades de medidas, também há um instrumento que é utilizado para medir ângulos em graus, conhecido como transferidor. Este pode ser representado conforme a figura a seguir:

Figura 9 – Representação de transferidor de 180º



Fonte: Barbosa (1995).

O transferidor é dividido com as marcações referentes a cada grau e para o seu uso Barbosa (1995) diz que é necessário posicionar o seu centro no vértice do ângulo como também o lado do transferidor deve coincidir com um dos lados do ângulo.

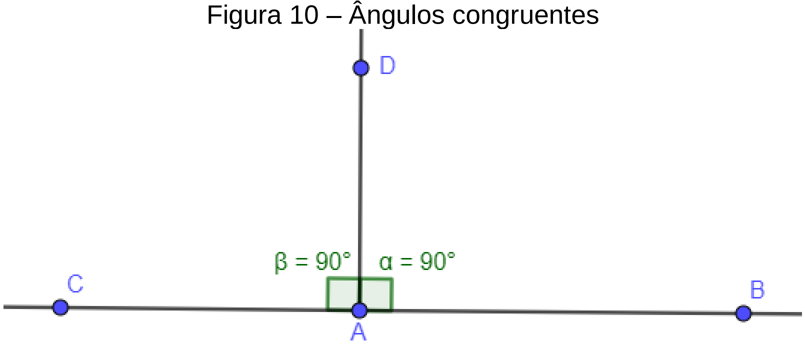
2.6.2 Relação entre ângulos

Para este tópico, foi proposto a necessidade de reflexão sobre as relações que são propostas ao observar dois ângulos. Assim, dividimos essa subseção da seguinte maneira: relação de comparação entre ângulos, relação entre a soma das medidas de ângulos e a relação entre a posição de ângulos.

2.6.2.1 Relação de comparação entre ângulos

No que se refere a relação de comparação, esta é observada através dos **ângulos congruentes**, que por sua vez são caracterizados como ângulos que têm a mesma medida, segundo Queiroz e Rezende (2008), como o que serão apresentados a seguir.

Figura 10 – Ângulos congruentes

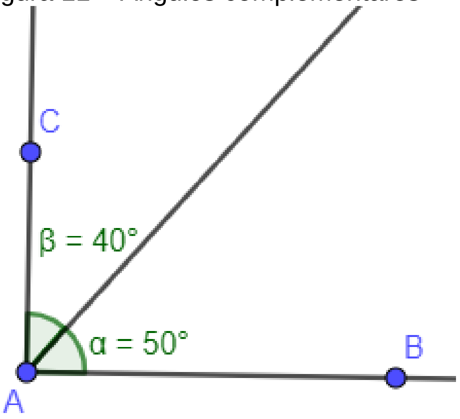


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

2.6.2.2 Relação entre a soma das medidas de ângulos

Iniciamos observando através da relação entre a soma das medidas dos ângulos que podem ser complementares ou suplementares. **Ângulos complementares** se a soma das medidas de dois ângulos é 90°, sendo cada ângulo o complemento um do outro (Queiroz; Rezende, 2008).

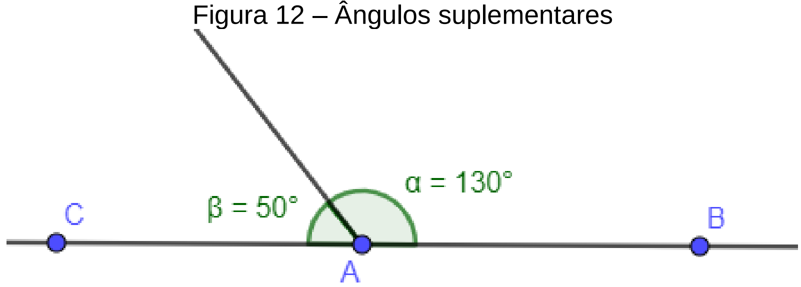
Figura 11 – Ângulos complementares



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ângulos suplementares se a soma das medidas de dois ângulos é 180, sendo cada ângulo o suplemento do outro (Queiroz; Rezende, 2008).

Figura 12 – Ângulos suplementares



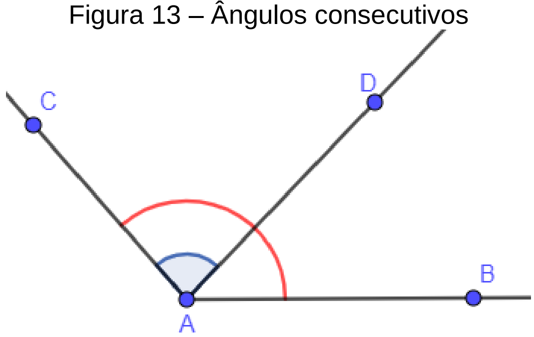
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

2.6.2.3 Relação entre a posição de ângulos

Já para a relação entre a posição de ângulos que estão associados à geometria, podemos dividi-los entre ângulos consecutivos e ângulos adjacentes.

Ângulos consecutivos são ângulos que correspondem a vértices consecutivos, ou seja, compartilham de um vértice e de um lado em comum, como afirma Machado (2012). Como observado na figura abaixo, os ângulos CÂD e CÂB são consecutivos.

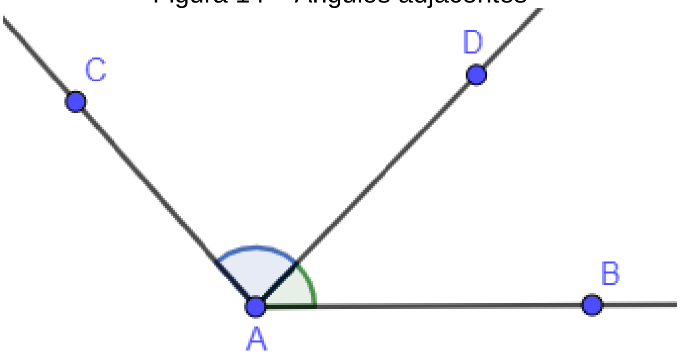
Figura 13 – Ângulos consecutivos



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Já os ângulos adjacentes são muito parecidos com os ângulos consecutivos, tendo uma pequena diferença que é não possuir pontos internos em comum. Ou seja, **ângulos adjacentes** são dois ângulos consecutivos que possuem um lado comum e com os outros dois lados em semiplanos distintos em relação à reta que contém o lado comum, como afirma Pinho, Batista e Carvalho (2010). Esse exemplo pode ser observado na figura a seguir, com os ângulos CÂD e DÂB adjacentes.

Figura 14 – Ângulos adjacentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

2.6.3 Concepção de ângulo enquanto giro

Para ângulos relacionados a giro, são caracterizados em três tipos mais usuais: giro completo ou uma volta, meio giro ou meia volta e um quarto de giro ou um quarto de volta. Vale ressaltar que o giro acontece através de uma semirreta fixa por meio do deslocamento de outra que se movimenta.

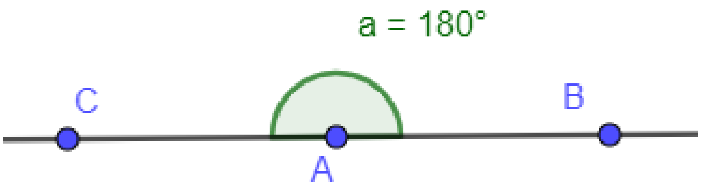
Em relação a um **giro completo ou uma volta**, o ângulo é associado à medida de 360°, de acordo com Lima e Bellemain (2010), como na figura a seguir

Figura 15 – Ângulo de uma volta

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Meio giro ou meia volta, o ângulo é associado a medida de 180°, segundo Lima e Bellemain (2010), como é representado a seguir

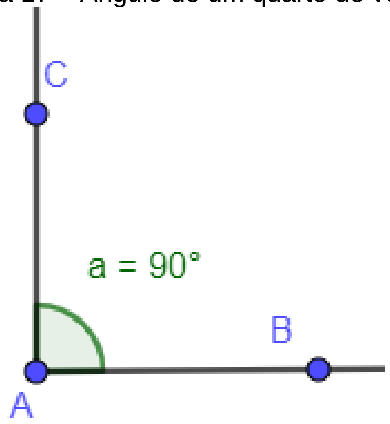
Figura 16 – Ângulo de meia volta



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em um **quarto de giro ou um quarto de volta**, o ângulo é associado a medida de 90°, como afirmam Lima e Bellemain (2010), na figura a seguir.

Figura 17 – Ângulo de um quarto de volta

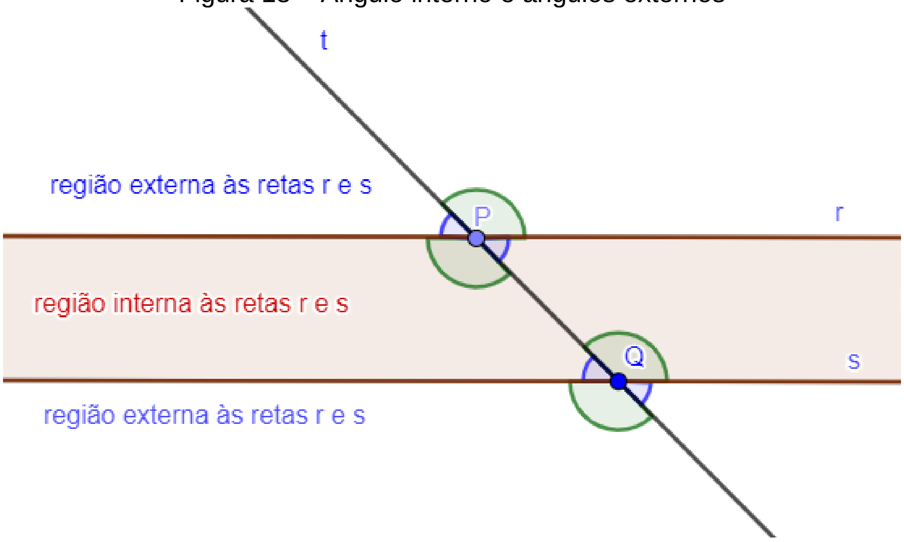


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

2.6.4 Relações entre ângulos determinados por retas cortadas por uma transversal

Essa estrutura, especificamente, se condiciona para facilitar o trabalho com ângulos partindo de uma reta transversal a duas retas, que dividem o plano em três regiões. É valido, inicialmente, compreender o ângulo com o olhar voltado para a concepção de região. Neste sentido, os pontos que estão entre as duas retas serão a região interior, e os que não estiverem serão a região exterior.

Figura 18 – Ângulo interno e ângulos externos



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

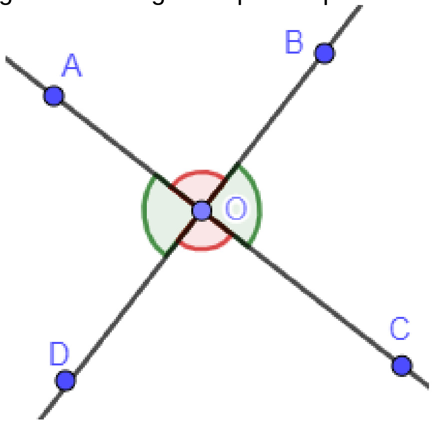
Portanto, de acordo com Papa Neto (2017), se um ângulo está na região interior, ele é chamado de ângulo interno, e se um ângulo está em uma das regiões exteriores, ele é chamado de ângulo externo. Como observa-se na figura anterior.

Já em relação aos ângulos formados por retas, sabemos que podemos encontrar três tipos de retas mais usuais que se relacionam com ângulos, são as retas paralelas, retas concorrentes e retas perpendiculares. Portanto, "duas retas são paralelas se não se interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas" (Queiroz; Rezende, 2008, p. 16).

No caso das retas concorrentes, Queiroz e Rezende (2008, p. 16) mencionam que "duas retas distintas que se interseccionam são chamadas retas concorrentes". E para as retas perpendiculares pontuam dizendo que "dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semirreta, ou um segmento, são perpendiculares se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta r é perpendicular a uma reta s, isso será denotado por r ⊥ s" (Queiroz; Rezende, 2008, p. 24).

Dando continuidade, começamos abordando os **ângulos opostos pelo vértice** que são definidos da seguinte forma “os ângulos de mesmo vértice e cujos lados são semirretas opostas com mesmas retas suporte são denominados ângulos opostos pelo vértice, abreviado por ângulos O.P.V.” como diz Machado (2012, p. 42). Estes, por sua vez, podem ser representados da seguinte forma.

Figura 19 – Ângulos opostos pelo vértice

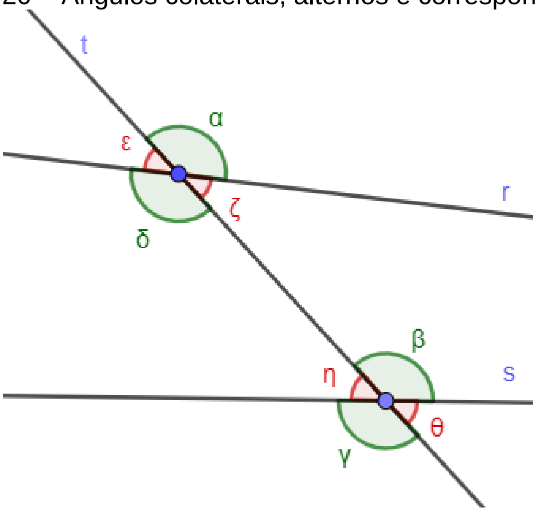


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Já em relação aos ângulos colaterais, alternos e correspondentes, trazemos estes através de uma reta transversal que divide o plano em outras duas regiões. Então, temos que se dois ângulos estão em um mesmo semiplano, dos determinados por uma reta transversal, dizemos que são **ângulos colaterais**, como aborda Papa Neto (2017).

E no caso dos ângulos estarem em semiplanos distintos dos determinados pela reta transversal, dizemos que são **ângulos alternos**, segundo reafirma Papa Neto (2017). Podemos visualizar estes na figura a seguir.

Figura 20 – Ângulos colaterais, alternos e correspondentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observando a figura anterior podemos destacar que dentre os ângulos colaterais e alternos, estes se dividem em internos e externos. Logo, baseado em Papa Neto (2017), teremos **ângulos colaterais internos** quando estiverem em um mesmo semiplano do que está determinado pela reta transversal e se são internos (estão na região interna), assim ζ e β, η e δ são colaterais internos.

Consequentemente, teremos **ângulos colaterais externos** quando estes estiverem no mesmo semiplano do que está determinado pela reta transversal e se são externos (estão na região externa), portanto, α e θ, ε e γ são colaterais externos.

Para **ângulos alternos internos** é preciso que os ângulos estejam em semiplanos diferentes do que está determinado pela reta transversal e se são internos (estão na região interna), logo ζ e δ, β e η são alternos internos.

Concluindo com **ângulos alternos externos**, é necessário que os ângulos estejam em semiplanos diferentes do que está determinado pela reta transversal e se são externos (estão na região externa), sendo assim ε e θ, α e γ são alternos externos.

Por fim, temos os correspondentes, que de acordo com Papa Neto (2017), **ângulos correspondentes** são aqueles que estão no mesmo semiplano dos que estão determinados pela reta transversal e não tem o mesmo vértice, ou seja, quando um deles é interno o outro é externo. Como podemos observar na figura anterior, os ângulos ζ e θ, α e β, ε e η, δ e γ são correspondentes.

2.7 O SABER ÂNGULO E O CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

O desenvolvimento do saber ângulo em estudos anteriores, como o de Diniz e Smole (1996), revelaram duas motivações importantes para a abordagem deste tema à educação básica. A primeira corresponde ao conceito de ângulo levar um longo tempo a ser compreendido e o segundo é sobre a visão estática do ângulo dificultar a percepção do conceito. Como afirmam Lima e Bellemain (2010, p. 193): “A noção de ângulo parece simples. No entanto, quando procuramos criar um modelo matemático para este conceito, com preocupação de ensiná-lo, a tarefa não se mostra nada fácil”.

Em relação aos documentos oficiais, o trabalho com ângulos é abordado a partir do quarto ano do ensino fundamental, como orienta a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) na unidade temática de geometria com o seguinte objeto do conhecimento: ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares e como habilidade o reconhecimento destes. No quinto ano, a temática ângulos é trabalhada associada às figuras geométricas planas e figuras poligonais.

Observando os documentos oficiais como a BNCC, o objeto do conhecimento ângulo tem sua introdução nos anos iniciais do ensino fundamental, perpassando os anos finais até o ensino médio. Ou seja, é estudado desde o início da escolarização, se firmando como um saber de grande importância para outros conteúdos matemáticos.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), portanto, ângulo é trabalhado em conjunto a outros conteúdos. Por exemplo, no sexto ano que é visto associado a polígonos, no sétimo ano é abordado junto a triângulos e no nono ano ângulo é trabalhado associado às relações entre arcos e ângulos na circunferência.

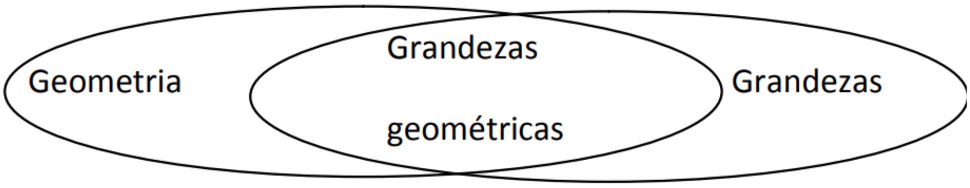
Quadro 1 – Abordagem do saber ângulo segundo a BNCC

Abordagem do saber ângulo segundo a BNCC nos anos finais do ensino fundamental		
Ano	**Unidade temática**	**Objeto do conhecimento**
6º	Grandezas e medidas	Ângulos: noção, usos e medida
7º	Geometria	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal
8º	Geometria	Construções geométricas: ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares
9º	Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados pro retas paralelas intersectadas por uma transversal

Fonte: Adaptado da BNCC (Brasil, 2018).

Uma discussão importante também é feita com relação a ângulos nas unidades temáticas de grandezas e medidas e geometria, pois ao observar as unidades temáticas da BNCC (Brasil, 2018) percebemos que o saber ângulo no 6º ano, aparece enquanto objeto do conhecimento de grandezas e medidas e nos demais anos escolares aparece em geometria. Essa conexão, caso não seja articulada de maneira coerente, pode acabar confundindo os estudantes. Assim, percebe-se que este saber se enquadra no que corresponde às grandezas geométricas, como apontam Carvalho e Lima (2010) na coleção Explorando o Ensino.

Figura 21 – Grandezas geométricas



Fonte: Carvalho e Lima (2010).

Neste sentido, se faz necessário olhar para as duas unidades temáticas que também são mencionadas na BNCC (Brasil, 2018), uma vez que o objeto do saber ângulo se encontra na fronteira e possui relação com ambas as unidades. Assim, se consolida como uma grandeza geométrica, uma vez que a unidade de grandezas e medidas trabalha a definição de outras grandezas de maneira geral, e não apenas as grandezas geométricas, assim como a unidade de geometria trabalha outras propriedades.

2.8 REVISÃO DE LITERATURA

Neste estudo, foi realizada a revisão da literatura que tem como foco o levantamento das pesquisas sobre os objetos explorados. Logo, este processo foi feito por meio de consultas aos repositórios de instituições federais, periódicos da Coordenação Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, além das plataformas *online*: Google Acadêmico, repositórios de universidades, Biblioteca Eletrônica Científica Online – SciELO e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Para a seleção das fontes foram considerados:

a) Dissertações e teses publicadas no período de 2010 a 2022. Essa escolha foi adotada com o intuito de analisar os estudos mais recentes;

b) Dissertações e teses que abordam propostas sobre ângulos e trabalhos que envolvem este objeto como ferramenta norteadora da pesquisa.

Quanto ao objeto matemático foram encontrados nove trabalhos.

arcos e ângulos na circunferência.

Quadro 2 – Abordagem do saber ângulo segundo a BNCC

Título do trabalho	Autoria	Natureza	Ano
O conceito de ângulo: reflexões com estudantes ingressantes no	Ivan Araújo Cordeiro de Albuquerque	Tese	2017

curso de licenciatura em matemática			
O ensino do conceito de ângulo: limites e possibilidades	Kléber Mendes Vieira	Dissertação	2010
Significado do ângulo: indícios do conceito em atividades de localização	Moisés Alves Fraga	Dissertação	2016
Produção de conjecturas e provas de propriedades de ângulos de polígonos: um estudo com alunos do oitavo ano do ensino fundamental	Liana Krakecker	Dissertação	2016
Construindo o conceito de ângulo a partir da sua mobilização em diversos contextos e da utilização de materiais manipulativos	Mariana Rodolfo Rocha	Dissertação	2017
Programação em Scratch na sala de aula de matemática: investigações sobre a construção do conceito de ângulo	Kátia Coelho da Rocha	Dissertação	2017
Reflexões sobre uma formação inicial de professores que ensinam matemática discutindo o conceito de ângulo	Viviane Espinosa de Carvalho	Dissertação	2019
A inclusão de estudantes autistas no ensino remoto: uma proposta de ensino de conceitos relativos a ângulos	Viviane Pegoraro	Dissertação	2021
Movimento do pensamento em nível teórico do conceito de ângulo: uma proposta de ensino desenvolvimental em articulação com a atividade orientadora de ensino no sexto ano do ensino fundamental	Tiago Back	Dissertação	2022

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A pesquisa de Albuquerque (2017) apresenta um estudo exploratório sobre o conceito de ângulo na formação inicial dos estudantes de licenciatura em matemática. Conta com a exposição de uma linha histórica do ensino de matemática no Brasil, destacando o avanço da geometria na educação matemática e a investigação tem como ponto de partida as definições de ângulo na geometria euclidiana plana elementar. A partir destas, a pesquisa propõe identificar as ambiguidades e incoerências apresentadas.

Após a pesquisa foi possível constatar as dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de estudantes para compreender e chegar a um consenso a respeito da definição de ângulos. Os dados revelaram que esse saber é complexo tanto do ponto de vista matemático, como pela grande quantidade de definições em uso. Com base nesse estudo, foi proposta uma definição isenta das dificuldades apontadas, “angulo é qualquer subconjunto convexo do plano, delimitado por duas semirretas com mesma origem, cujo complementar, com relação ao plano é não convexo" (Albuquerque, 2017, p. 94).

No entanto, acreditamos que essa definição ainda por si só não consiga provocar a superação de todas as dificuldades que envolvem o saber ângulo na análise dos dados obtidos. Nesta definição proposta por este autor notamos que não é contemplada a ideia de giro, que está presente na educação básica. Logo, não cumpre o objetivo de propor uma definição com o intuito de atender melhor às necessidades dos futuros professores de matemática.

Outra pesquisa que reforça a complexidade do conceito de ângulos é a de Vieira (2010), que realizou uma investigação exploratória experimental para compreender como procede o ensino de ângulos em turmas do 6° ano do ensino fundamental e sua ótica nos livros didáticos com a finalidade de desenvolver uma abordagem didática em relação ao conceito de ângulo baseada na abstração progressiva (classificação, semelhança, abstração e conceito) por Michelmore e White (2000).

Levando em consideração que para o autor algumas práticas de ensino induzem o estudante a desenvolver certas definições, existem indícios de que os processos de ensino e aprendizagem do saber ângulo apresentam lacunas. Assim é necessário que professores e futuros professores de matemática desenvolvam através desta pesquisa uma metodologia que permita o aluno construir um significado de ângulo que abranja todas as noções. Após a análise dos resultados, notou-se que o ângulo não é abordado pela maioria dos professores no ano recomendado. Em relação a análise dos livros didáticos, Vieira (2010) verificou que apenas um estava de acordo com os descritores da Prova Brasil. A partir disso foi elaborada uma intervenção didática, na qual após alguns ajustes mostrou-se viável para ser aplicada e desenvolvida em sala de aula.

A pesquisa de Fraga (2016), por outro lado, teve por objetivo caracterizar a organização do ensino do conceito de ângulo e de localização a partir dos documentos oficiais que norteiam o ensino da escola básica brasileira. Com a análise desses documentos aliados às fontes históricas, buscou-se encontrar alguma influência nas dificuldades apresentadas pelos estudantes na apropriação da definição de ângulo. Para a elaboração da pesquisa foi utilizado como referencial teórico a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e os princípios da Atividade Orientadora de Ensino.

A pesquisa empírica foi realizada com estudantes dos 4º e 5º anos do ensino fundamental do Clube de Matemática e Ciências da Faculdade de Educação da USP. A análise de propostas curriculares governamentais, o movimento lógico-histórico do conceito apreendido em fontes bibliográficas e a Teoria Histórico-Cultural orientaram a elaboração de atividades de ensino que foram desenvolvidas com as crianças, de modo que possibilitassem a análise de suas ações em busca de indícios de formação do conceito de ângulo. Após a análise, foi possível observar que a identificação da organização do ensino de ângulo possibilitou conhecer algumas razões para as dificuldades dos estudantes, como a apropriação da definição de ângulo. E a Teoria da Atividade contribuiu para a investigação sobre os indícios para esta apropriação no desenvolvimento das atividades de ensino que visaram a significação de ângulo e de localização. A articulação desses elementos foi fundamental para indicar novas ações na organização do saber ângulo (Fraga, 2016).

O estudo de Krakecker (2016) busca analisar por meio de uma sequência didática as justificativas dos estudantes do 8º ano de ensino fundamental sobre questões que envolvam os ângulos de polígonos observando as afirmações, análises e estratégias realizadas, bem como as dificuldades e superações por eles apresentadas. Diante disso, a sequência didática teve como objetivo privilegiar os aspectos referentes à validação de propriedades de ângulos de polígonos. Foram utilizadas como base teórica para a construção da sequência didática a teoria das situações didáticas de Brousseau, por meio da elaboração e análise das atividades, articulada com a Engenharia Didática descrita por Artigue para o desenvolvimento da parte experimental da pesquisa. Em conjunto, a perspectiva de Ponte foi empregada para a elaboração de conjecturas e o modelo estabelecido por Balacheff para a elaboração das provas.

A sequência traz atividades que envolvem as noções de ângulos suplementares, ângulos de uma volta, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas interceptadas por uma transversal, soma dos ângulos internos de triângulos, quadriláteros e outros polígonos convexos, bem como da soma dos ângulos externos de polígonos. Após a aplicação da sequência didática e a análise dos resultados, foi possível identificar que durante as atividades experimentais e em trabalhos o uso do transferidor foi uma ferramenta importante para a elaboração de conjecturas. Houve uma evolução nas argumentações realizadas, além de conseguirem estabelecer relações entre o que já foi trabalhado anteriormente e as novas situações propostas. Entretanto, ainda apresentaram dificuldades na compreensão dos enunciados.

A pesquisa de Rocha (2010b) tem por objetivo expor uma abordagem do conceito de ângulo a partir de sua mobilização em diversos contextos, com a utilização de diferentes materiais manipulativos. Para isso foram desenvolvidas e analisadas atividades exploratórias utilizando diferentes contextos e diversos materiais manipuláveis. Como base teórica para o desenvolvimento do conceito de ângulo por abstração progressiva foi usada a proposta de Michael Mitchelmore e Paul White que se apoia na teoria da abstração reflexionante de Jean Piaget.

A pesquisa foi desenvolvida com estudantes do sétimo ano do ensino fundamental e a coleta de dados aconteceu através de gravações em áudio e vídeo, fotografias das produções dos alunos e anotações em um diário de bordo. Após a análise dos resultados foi possível identificar que a mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a utilização de materiais manipulativos contribuíram para a construção do pensamento geométrico e conceito de ângulo pelos estudantes.

O estudo de Rocha (2017b) busca identificar quais são as evidências de pensamentos matemáticos e como os alunos as expressam em atividades de programação envolvendo o conceito de ângulo. Como base teórica foi utilizada para a análise dos resultados a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud e na busca por aproximações e distanciamentos na psicogênese das condutas cognitivas da criança em interação com o mundo do computador, observadas por Léa Fagundes. O estudo foi realizado com estudantes do 6º ano do ensino fundamental por meio de encontros semanais que estimulavam os estudantes a solucionarem variadas situações e produzirem um jogo. As atividades foram desenvolvidas no Scratch, visando a compreensão do conceito de ângulo e de conceitos básicos de programação.

Para a análise dos resultados durante a realização das atividades, os alunos eram observados e entrevistados. As entrevistas foram inspiradas no método clínico, criado por Piaget, que busca auxiliar na compreensão do curso do pensamento dos sujeitos. Além disso, também foram utilizados como material de análise vídeos, arquivos produzidos no Scratch e registros dos alunos em uma página na internet. Após a análise dos resultados observou-se que houve uma evolução na compreensão do conceito de ângulo, permitindo identificar como os alunos apresentam seus esquemas em relação ao ângulo e apropriação da linguagem de programação do software.

Em relação ao estudo de Carvalho (2019), este tem por objetivo principal investigar de que forma acontece uma formação de futuros professores que ensinam matemática durante a discussão do conceito de ângulo para os anos iniciais do ensino fundamental. Como base teórica foi utilizada a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e Atividade Orientadora de Ensino.

A pesquisa foi realizada com acadêmicos dos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia que já tinham cursado a disciplina de educação matemática. Foi desenvolvido um projeto com a finalidade de discutir sobre o ensino de ângulo nos anos iniciais do ensino fundamental através de situações desencadeadoras de aprendizagem na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino. Após a aplicação do projeto e a análise dos resultados foi possível concluir que houve uma apropriação do conceito matemático estudado, uma mudança na compreensão do que é ser professor e um entendimento da significância do fazer coletivo.

A pesquisa de Pegoraro (2021) tem por objetivo contribuir com os processos de ensino e aprendizagem do conceito de ângulo. Assim, a proposta didática foi elaborada retomando o conceito de ângulo com o intuito de contribuir com a prática docente, com as reflexões sobre os desafios da educação e da inclusão e auxiliar a encontrar meios que garantam a efetivar os objetivos do ensino. Logo, a pesquisa foi realizada através de um estudo de caso com três estudantes com Transtorno do Espectro Autista (TEA), matriculados no 9° ano do ensino fundamental. As sugestões de atividades foram realizadas de acordo com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dos Referenciais Curriculares Municipais. Então, como a pesquisa se baseou em uma proposta, o autor acredita que possa contribuir com a prática docente, com as reflexões sobre os desafios da educação e da inclusão e efetivar os objetivos do ensino, seja no modo presencial ou remoto.

Finalizamos com o estudo de Back (2022), que tem por objetivo investigar um modo de organização de ensino do conceito científico de ângulo em nível teórico, fundamentado na Teoria do Ensino Desenvolvimental e na Atividade Orientadora de Ensino. Para isso, a pesquisa visou compreender o movimento do pensamento matemático em nível teórico-científico do conceito de ângulo, por meio do desenvolvimento de um experimento didático em uma escola da rede estadual de ensino situada na cidade de Tubarão/SC, com 6 estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Então foram desenvolvidas quatro Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) em articulação com as seis ações de Davídov. As quatro primeiras ações foram desenvolvidas através de dois jogos sensoriais, um jogo no computador e uma história virtual do conceito. A quinta e a sexta ação foram contempladas durante todo o experimento formativo por meio de análises, intervenções e orientações (Back, 2022).

Desse modo, os resultados da análise apontaram que os estudantes do 6º ano, com base na necessidade de localização, abstraíram a gênese do conceito de ângulo: o movimento de rotação. Pela aprendizagem dos elementos que compõem o sistema conceitual, os participantes desenvolveram a apropriação do conceito da grandeza ângulo por meio da relação que fizeram entre esses elementos e a necessidade de quantificar esse movimento (Back, 2022).

As pesquisas encontradas nesta revisão apontam, portanto, que ainda há muito o que se explorar e discutir sobre o ensino de ângulos na educação básica. Pois, há muitas lacunas, principalmente na maneira em que este saber é proposto. Sendo assim, é válida a realização deste estudo que visa investigar o saber ângulo.

Logo, dentre os diversos estudos já mencionados, esta pesquisa se aproxima das demais, sendo o primeiro ponto importante a ser discutido a dificuldade de compreensão do saber ângulo por estudantes, como afirma Albuquerque (2017). Com isso, à necessidade do desenvolvimento de pesquisa.

O segundo ponto é por existirem poucas pesquisas em relação ao objeto matemático em questão, no caso ângulos, pois, ainda existem poucas dissertações e teses na área. Outro ponto que se destaca dos demais trabalhos é a observação em uma coleção de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Assim, nesta pesquisa, apresentaremos um novo olhar que será atrelado a teoria antropológica do didático que discutiremos no próximo capítulo.

3 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo, iremos discorrer sobre a teoria adotada no estudo observando o surgimento, a trajetória dos saberes, elementos que a compõem, as organizações matemáticas e didáticas, e, por fim, a revisão de literatura que envolve esta temática.

Dentre as teorias que envolvem a didática da matemática e de acordo com algumas pesquisas, a teoria antropológica do didático vem se destacando e ocupando uma posição de grande importância na investigação não apenas na matemática, mas, em diversas áreas do conhecimento.

A teoria antropológica do didático (TAD) provém a partir da expansão da transposição didática[5] com o intuito de estudar a relação do homem com o saber matemático. Para isso, Yves Chevallard, autor dessa teoria, caracteriza alguns conceitos chaves para este estudo. Para uma melhor compreensão da TAD, se faz preciso uma visitação à transposição didática na qual estão presentes algumas noções básicas dessa teoria. Como relata Almouloud (2007, p. 112):

> Levando em consideração o modelo proposto pela TAD, pode-se interpretar a transposição didática como uma noção que desenvolve, segundo Chevallard (1999) a tripla ruptura epistemológica provocada pela teoria das situações, pois a noção de transposição didática mostra que o saber matemático (saber científico, ensinado ou a ensinar) está no centro de toda problematização didática. Em consequência, esse saber jamais pode ser considerado como algo inquestionável.

A teoria da transposição didática, como menciona Santos (2015), tem o intuito de mostrar que o saber não chega à sala de aula da maneira como foi produzido no contexto científico. Ele passa por um processo de transformação que implica em lhe dar uma roupagem didática, para que ele tenha condições de ser ensinado.

Em relação ao percurso da trajetória dos saberes, como propõe a transposição didática, o saber sábio é o conhecimento produzido a partir de atividades científicas que têm por objetivo comprovar a veracidade de fatos e informações através de pesquisas e experimentos. Segundo Chevallard (1991), o saber sábio é produzido por pesquisadores, que nesse caso seriam os matemáticos, mas para ser legitimado é necessário que seja publicado em formato de livros, artigos, dissertações ou teses, sendo escrito no modo impessoal e organizado com início, meio e fim.

---

[5] Que surge através da tese do sociólogo francês Michel Verret, sendo denominada por Yves Chevallard, como transposição didática.

O saber a ensinar é uma adaptação do saber sábio no qual as transformações que ocorrem não são executadas pelos cientistas, conforme Santos (2015, p. 29) essas adaptações do saber sábio para o saber a ensinar é realizada por “consultores na área, os especialistas da disciplina e técnicos governamentais e, até mesmo, a opinião pública em geral influência de alguma forma no processo de transformação do saber.”

Assim como no saber sábio, existem regras para serem validados. O saber a ensinar também passa por uma avaliação que determina se o texto está apropriado para o contexto escolar. Essas normas configuram um processo de preparação didática e das aprendizagens (Chevallard, 1991). Podemos ver um exemplo desse trabalho na Base Nacional Comum Curricular, nas propostas curriculares estaduais e municipais, no Guia do Livro Didático e outros.

O saber escolar é aquele que procura transformar os conteúdos científicos e trazê-los para uma linguagem mais acessível que os tornem compreensíveis pela sociedade. Ele nasce a partir de uma nova transformação. Por meio dos documentos oficiais que são produzidos os livros didáticos, paradidáticos e apostilas, que são algumas das principais fontes de orientação do professor para a preparação da aula. Para García (2002), o saber escolar está formado pela associação da diversidade de conhecimentos presentes na nossa sociedade e a inclusão de perspectivas ideológicas e críticas devido a distância que o saber escolar tem do saber sábio.

Dessa forma, a distância entre o saber sábio e o saber escolar aumenta consideravelmente e isso poderá ocasionar uma deformação do saber. Com relação a esse problema, Chevallard (1991) afirma que é necessário realizar uma vigilância epistemológica, para que essas deformações, supressões e adaptações do conteúdo não desfigurem o saber original. Para Araújo (2009), a vigilância epistemológica é o principal objetivo da transposição didática, pois ela é responsável pela análise das transformações que o saber sábio passa desde o processo de criação, pela comunidade científica, até o momento que será vivenciado pelos estudantes em sala de aula na forma do saber ensinado.

O professor é orientado através do currículo sobre o saber que será ensinado em cada ano escolar, porém, fica a seu critério como poderá ser feita essa seleção e pode também determinar qual o momento e a forma ideal de introduzir os saberes definidos pela noosfera (Chevallard, 1991). A noosfera é uma instituição pensante, invisível, que tem como responsabilidade selecionar os saberes científicos que farão parte do currículo. Logo, em sala de aula, seu o compromisso é fazer a recontextualização do conteúdo sem alterar seu significado original.

É dessa forma que surge o saber preparado de Ravel (2003). Para a autora, o saber preparado é o resultado das escolhas didáticas e matemáticas feitas por um professor para ensinar um objeto do saber matemático dado. Quando o professor faz o planejamento das aulas acompanhando o conteúdo do livro didático escolhido pela instituição de ensino, ele toma a decisão sobre qual a melhor forma de organizar e expor os saberes que determinam as propostas curriculares nacionais, estaduais e municipais. Segundo Ravel (2003, p. 7), “ele também faz as suas escolhas no texto do saber se projetando em sua sala de aula (surgem então as limitações temporais, de organização, de interação com os alunos, etc.) e com base em seus conhecimentos didáticos”.

No momento que o professor põe em prática o seu planejamento, ele transforma o saber preparado em saber ensinado[6]. De acordo com Santos (2015, p. 33,) esse processo de transformação é fundamental, pois:

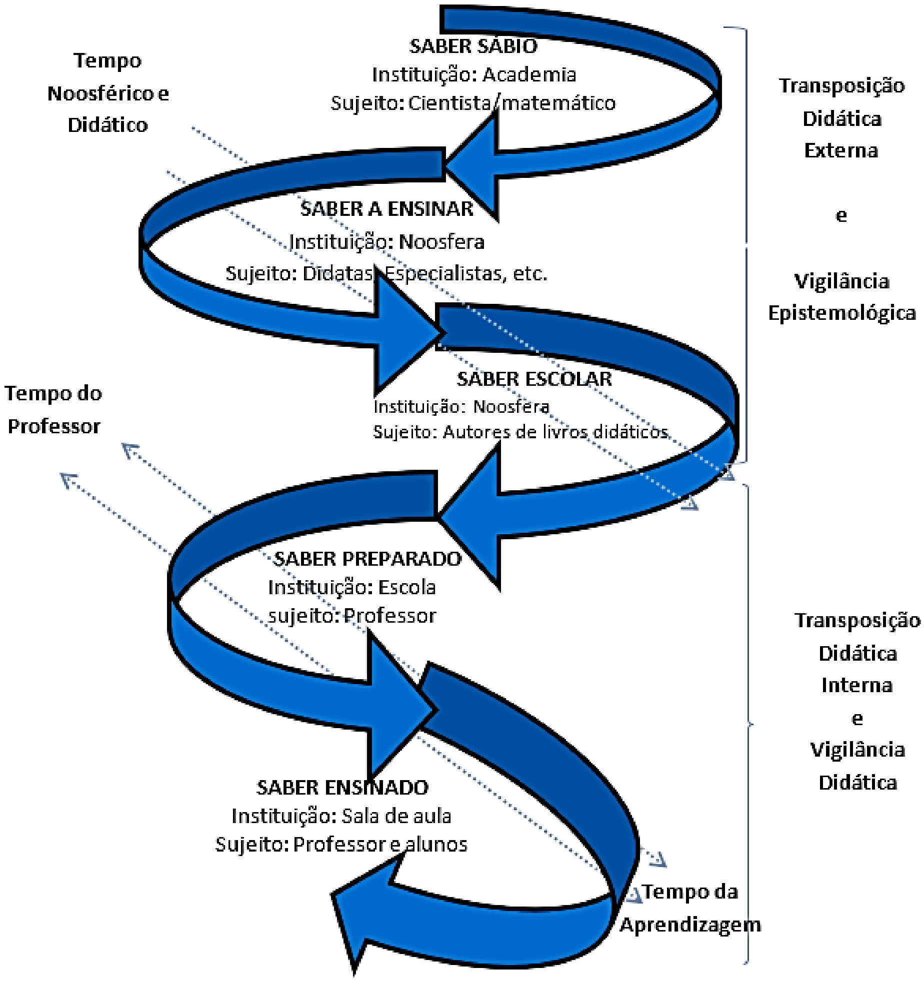
> Se por um lado o saber científico não foi produzido com o objetivo primeiro de ser ensinado, por outro, o saber preparado precisa ser adaptado à realidade do aluno daquela instituição, considerando que os saberes apresentam uma relação mútua, mas não se sobrepõem.

Com relação ao saber ensinado, Chevallard (1991) sugere que deve haver um equilíbrio com o saber sábio, pois, mesmo com as transformações sofridas para facilitar a compreensão dos estudantes, os cientistas devem considerá-lo suficientemente próximo do saber sábio a fim de não provocar a desautorização deles.

Nesse processo de comunicação dos saberes existem aqueles que são selecionados como saberes que devem ser ensinados, que devem adentrar a sala de aula e serem socializados naquela instituição, como podemos observar no esquema da figura a seguir.

[6] Que em nosso caso a dissertação está preocupada na transposição do saber a ser ensinado que é representado pelo livro didático.

Figura 22 – Trajetórias dos saberes na transposição didática



Fonte: Santos (2020, p. 27).

A transformação dos saberes proposta por Chevallard (1991) aponta que todo saber não aparece do nada, pois está relacionado a um contexto social e sustentado por pelo menos uma instituição, e para isso o autor já mencionado salienta que é necessário que esse saber, após adentrar em uma instituição, se sujeite às exigências da mesma para permanecer nela.

Nesse sentido, Chevallard (1999), após observar a relação de troca entre o saber e a instituição, faz a ampliação da teoria da transposição didática, que segundo Santos (2020), agora o olhar é voltado para as situações nas quais há uma intencionalidade de modificar a relação ao saber, porém com o olhar antropológico.

Desse ponto então surge a teoria antropológica do didático, conforme Chevallard (1999), que situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais e propõe um postulado básico, admitindo que toda atividade humana pode ser representada através de um modelo único, ou seja, uma praxeologia.

Neste sentido, a teoria permite, a princípio, investigar situações de ensino e de aprendizagem em que caracteriza a relação entre os elementos primitivos formados por uma tríade: objeto O, as pessoas X e a instituição I. Para Chevallard (1998), o objeto O tem sua condição de existência satisfeita quando é identificado por uma pessoa X em uma instituição I. Nesta pesquisa podemos considerar, então, o objeto como ângulo, a pessoa como o professor e o estudante que utilizam o livro didático e a instituição como o ensino fundamental anos finais. Então a relação pessoal entre pessoa e objeto será identificada por R(X,O) e a relação institucional entre instituição e objeto por R(I,O), De acordo com Chevallard (1998, p. 93):

> Do ponto de vista da «semântica» da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I) se existir um objeto, que denotarei por R (X, O) (resp. R(O)), a que chamarei de relação pessoal de X com O (resp. relação institucional de I com O).

A teoria antropológica do didático considera praxeologias complementares da atividade humana: uma que descreve a praxeologia matemática que veremos a seguir, e outra que pode ser abordada por meio dos momentos didáticos para as praxeologias didáticas.

É importante destacar que a TAD concebe os momentos de estudo como vivências necessárias para que um indivíduo consiga dominar um determinado conhecimento, pois somente a partir da experiência destes momentos é que o indivíduo consegue construir a praxeologia matemática sobre o saber em questão (Chevallard; Bosch; Gascón, 2001).

3.1 PRAXEOLOGIA

Para compreender o que vem a ser praxeologia ou organização praxeológica, inicialmente é necessário conhecer os elementos que a compõem, são eles: tipos de tarefas (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ) que se relacionam conjuntamente. Chevallard (1998, p. 34) menciona o papel da praxeologia dentro da teoria.

> A noção de praxeologia é o coração da TAD, esta noção generaliza diferentes noções culturais comuns a de saber e de saber-fazer [...] deve permitir designar, sem afetações epistemológicas-culturais (isto é saber, isto não é um saber, é um ‘simples’ saber-fazer etc.), sem juízos de valor a priori ou a posteriori, toda estrutura de conhecimento possível.

Os tipos de tarefas (T) surgem com o intuito de caracterizar tarefas a serem resolvidas e geralmente são expressos por verbos de ação como: classificar, calcular, somar e outros verbos, seguidos de um complemento, por exemplo, classificar ângulos conforme a medida de sua abertura.

Assim, segundo Chevallard (1999), para realizar a resolução de um tipo de tarefa, é preciso que ocorra a formalização de uma estratégia que seja capaz de resolver a tarefa. Deste modo, o autor acrescenta que a maneira ou modo de fazer uma tarefa é nomeada como técnica (τ).

Nesse sentido, para resolver o tipo de tarefa como classificar ângulos conforme a medida de sua abertura, podemos seguir a seguinte técnica, verificar se a medida (x) da abertura do ângulo pertence aos intervalos: $0 < x < 90$; $x > 90$, ou se $x = 90$. Se x pertence ao intervalo $0 < x < 90$, o ângulo é agudo; se $x = 90$, o ângulo é reto; se $x > 90$, o ângulo é obtuso.

Com isso, é necessário que haja uma justificativa para o uso de uma ou mais técnicas. Sendo assim, Chevallard (1999) define a noção de tecnologia (θ) como um discurso racional sobre a técnica, que conforme o autor possui três funções que são as seguintes: a primeira é justificar a técnica, a segunda é explicar por que a técnica funciona e a terceira é referente a produção de novas técnicas.

No exemplo anterior, a técnica é justificada pela seguinte tecnologia: “um ângulo cuja medida é 90 é chamado de ângulo reto” como afirma Barbosa (1995, p. 27), e “um ângulo com medida menor que 90 é chamado ângulo agudo, e um ângulo com medida maior que 90 é chamado ângulo obtuso” segundo Queiroz e Rezende (2008, p. 24).

Para finalizar o quarteto praxeológico, temos a teoria (Θ), que tem o intuito de justificar e fundamentar a tecnologia e segundo Chevallard (1999), tem um nível elevado de explicação e desempenha um papel idêntico entre as relações de influência da tecnologia sobre à técnica. O que para o exemplo mencionado acima a teoria está relacionada aos campos da geometria e das grandezas e medidas.

Com isso podemos entender que segundo Chevallard (1999), em uma determinada instituição, uma tarefa (t) de determinado tipo T pode apresentar vários modos de realização que são chamadas de técnica (τ), que são justificadas e produzidas por um discurso denominado de tecnologia (θ) que recebe um amparo por um fundamento último, a teoria, encarregada de explicar por que se faz e é correto fazer daquela forma. A reunião desses quatro componentes constitui uma praxeologia que quando está relacionada a um saber matemático temos uma praxeologia matemática.

Chevallard (1999) diz que as praxeologias ou organizações praxeológicas podem ser pontuais, locais, regionais ou globais, a depender do foco de análise. Uma praxeologia é dita pontual quando esses elementos estão organizados em torno de um tipo de tarefa (T). A união de praxeologias pontuais gera praxeologias locais quando suas técnicas são justificadas por uma mesma tecnologia (θ). Já a praxeologia regional reúne várias praxeologias locais cujas tecnologias são justificadas por uma mesma teoria (Θ). E a reunião de praxeologias regionais com foco em mais de uma teoria formam uma praxeologia global.

Para compreender as organizações praxeológicas relativas a um objeto do saber na instituição ensino de matemática no ensino fundamental, faz-se necessário olhar para a materialização de sua abordagem nessa instituição através da verbalização do professor e da transposição realizada pelos livros didáticos em que se apoiam. No caso da nossa pesquisa, nos debruçaremos sobre a análise dos livros didáticos.

3.2 PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA

Com isso podemos compreender a organização matemática ou praxeologia matemática como aquela que irá se debruçar sobre situações vivenciadas em uma instituição, com relação ao saber matemático em questão, conforme evidenciam Santos e Menezes (2015, p. 661):

> Chamaremos de praxeologia matemática ou organização matemática, toda realidade matemática que está envolvida na resolução de um tipo de tarefa T. Para isso, serão exigidas técnicas τ, amparadas por um conjunto teórico-tecnológico [θ; Θ]. A organização matemática tem sua origem nas análises efetuadas pelos professores, dos documentos oficiais existentes (tais como programas e manuais escolares, além do livro didático), dos quais saem os saberes matemáticos escolhidos a serem ensinados.

Neste sentido, é importante ressaltar que de acordo com Chevallard (1997), para a realização da organização matemática é necessário que a princípio o pesquisador faça uma análise do saber em questão. Deste modo será preciso observar os documentos curriculares e os livros didáticos com o propósito de apresentar e explicar tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria.

Outro fator importante para entendermos como funcionam as praxeologias matemáticas é o papel do professor que é representado pelo livro didático em nossa pesquisa, como cita Dias e Santos Júnior (2018, p. 540) ao pontuar que:

> As organizações matemáticas que correspondem às tarefas de concepção e organização de dispositivos de estudo e de gestão de seu ambiente, que na realidade são as praxeologias de natureza matemática. Assim, cabe ao professor identificar, nas indicações das propostas institucionais, as organizações matemáticas a serem estudadas, associando-as a um conteúdo preciso, aos tipos de tarefas matemáticas nelas contidos e ao grau de desenvolvimento que se deseja dar às componentes técnica, tecnológica e teórica.

Com isso, o papel dos autores de livros didáticos é de grande importância, sendo necessário fazer a realização da análise dos assuntos e atividades que irão ser estudados, pois será ele o responsável pela condução. Nesse sentido, deve-se observar a transposição da praxeologia matemática inserida refletindo como ensinar.

3.3 PRAXEOLOGIA DIDÁTICA

A organização didática ou praxeologia didática corresponde à forma em que o saber é transformado, ou seja, passando de saber sábio para saber a ser ensinado, focando em como a realidade matemática pode ser estudada e se preocupando na maneira de fazer este estudo. Como pontua Chevallard (1999, p. 238):

> Por organização didática podemos entender, a priori, o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta. O enfoque clássico em didática da matemática tem ignorado em geral os aspectos mais genéricos de uma organização de estudo de um tipo dado de sistemas didáticos.

Munidos das noções que abarcam esta teoria, podemos voltar à abordagem de ângulos proposta em uma coleção de livros didáticos, dos anos finais do ensino fundamental, para identificar as praxeologias matemáticas que são mobilizadas e as praxeologias didáticas analisadas pelos momentos didáticos.

Os momentos didáticos ou momentos de estudo são divididos em seis, segundo Chevallard (1999). O primeiro momento vai ser o qual é realizado o encontro inicial ou primeiro encontro com a organização matemática, que pode ser produzido de duas maneiras, a primeira corresponde ao encontro mimético-cultural, no qual ocorre por meio de uma investigação do tema em estudo no nosso caso ângulos, sendo subdividido na parte cultural que trabalha o tema através do imaginário e o mimético que trabalha com a manipulação real do tema.

A segunda maneira de produção do primeiro encontro é através das situações fundamentais, que é o inverso do anterior, pois irão afastar as referências já existentes, ou seja, corresponde à proposta de um sistema de situações nas quais o estudante é considerado como protagonista e a organização matemática permite a produção de respostas a uma ou mais questões do sistema.

O segundo momento didático será voltado para a exploração do tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica, mesmo conhecendo que para um tipo de tarefa existe uma ou mais técnicas para resolver. Como afirmam Dias e Santos Júnior (2018), o estudo de tarefas se torna um meio de criar e exercitar uma técnica, que poderá resolver de maneira quase automática tarefas deste tipo.

O terceiro momento didático será aquele em que acontece a constituição do ambiente tecnológico-teórico [ϴ/Θ] relativo à técnica desenvolvida no segundo momento, que por sua vez possui uma ligação com o bloco tecnológico-teórico (saber) [ϴ/Θ] com o intuito de justificá-la. É valido afirmar também que este momento pode ser associado aos outros anteriores.

O quarto momento é pensado para o trabalho da técnica que tem por objetivo observar como acontece a construção e verificar a confiabilidade tornando mais eficiente na tentativa de aprimorar ou criar técnicas. Como menciona Santos (2020), esse momento tem por objetivo pôr em prova o alcance da técnica.

O quinto momento é voltado para a institucionalização que visa reconhecer a organização matemática desenvolvida. Neste momento devemos distinguir os elementos da construção dos que serão vinculados à organização matemática.

E por fim, o sexto momento, o da avaliação, que está associado também com o momento da institucionalização com o intuito de refletir o que foi desenvolvido a partir da organização matemática elaborada observando se o bloco tecnológico-teórico foi justificado. É importante destacar que esses momentos didáticos não têm uma ordem cronológica, ou seja, eles não precisam acontecer na ordem que foi mencionada.

Em relação aos critérios avaliativos estabelecidos por Chevallard (1999) para a organização matemática temos (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria) e para a organização didática (momentos de estudos ou momentos didáticos) relativos a um objeto do saber. Sendo assim, através dos momentos didáticos iremos notar a abordagem do saber em questão, no nosso caso ângulos. Com isso, irão servir de instrumento de análise e identificação de problemas.

3.4 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE ESTUDOS QUE UTILIZARAM A TAD NO CAMPO DA GEOMETRIA E DAS GRANDEZAS E MEDIDAS

Neste estudo, a revisão da literatura teve como intuito o levantamento das pesquisas que abordam os objetos aqui explorados. Sendo assim, foi realizada por meio de consultas aos repositórios de instituições federais, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), periódicos da Coordenação Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES além das plataformas online: Google Acadêmico e Biblioteca Eletrônica Científica Online – SciELO.

Para a seleção das fontes foram considerados:

a) Dissertações e teses publicados no período de 2010 a 2022. Essa escolha foi adotada com o intuito de analisar pesquisas mais atuais;

b) Dissertações e teses que abordam propostas sobre “análise praxeológica” e relacionadas à matemática com o foco para “geometria” e “grandezas e medidas”. As palavras em aspas foram utilizadas como palavras chaves para a pesquisa.

Quadro 3 – Trabalhos encontrados na revisão de literatura (TAD)

Título do trabalho	**Autoria**	**Natureza**	**Ano**
Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos	Márcia Varella	Dissertação	2010
Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique	Jacinto Ordem	Dissertação	2010
Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projovem urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático	Dierson Gonçalves de Carvalho	Dissertação	2012
Polígonos regulares inscritos no círculo: uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental	Gladiston dos Anjos Almeida	Dissertação	2012

Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental	Danielly Regine Kaspary dos Anjos	Dissertação	2014
A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático	Marilene Rosa dos Santos	Tese	2015
Geometria analítica no espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos	Acylena Coelho Costa	Tese	2015
Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área	Lucia de Fátima Carneiro Ferreira Lessa	Dissertação	2017
Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro	Lúcia de Fátima Durão Ferreira	Tese	2018
Uma análise praxeológica da proposta de ensino de probabilidade em livros didáticos da educação básica	Janielly Taila dos Santos Versbick	Dissertação	2019
Abordagem de volume e capacidade em uma coleção de livros didáticos: uma análise à luz da teoria antropológica do didático	Katy Wellen Meneses Leão	Dissertação	2020

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Durante nossa pesquisa percebemos que alguns trabalhos se aproximam da proposta deste estudo. Quanto à teoria, foram encontradas 11 pesquisas, sendo quatro na área de geometria: Varella (2010), Ordem (2010), Almeida (2012) e Costa (2015); e cinco relacionadas a grandezas: Carvalho (2012), Santos (2015), Lessa (2017), Ferreira (2018) e Leão (2020). Outras duas pesquisas, de Anjos (2014) e Verbisck (2019), sendo de campos diferentes, foram incluídas pela forma de como utilizam a teoria antropológica em seus estudos. Pois, mesmo não trabalhando com objetos relacionados à geometria e às grandezas e medidas, a maneira na qual apresentam o estudo se faz interessante para a discussão.

Seguindo ordem cronológica, a pesquisa de Varella (2010) buscou observar quais organizações matemáticas e didáticas envolvendo prova e demonstração são propostas por materiais didáticos do ensino médio, no conteúdo de geometria analítica. Neste sentido, foi analisado como os autores dos materiais didáticos organizaram as atividades propostas referentes ao estudo da equação geral da reta. Com aporte teórico da teoria antropológica do didático, o estudo se desenvolveu através da pesquisa qualitativa de enfoque documental. Constatou-se nesta pesquisa que alguns livros didáticos evidenciam a apresentação de demonstrações de teoremas da geometria analítica e que termos como: propriedade, axioma, teorema, demonstração e prova não são explicitadas nos livros didáticos analisados.

Em relação ao estudo de Ordem (2010), este visa a compreensão da prova e da demonstração de propriedades de triângulos como a soma dos ângulos internos, a relação entre um ângulo externo e os internos não adjacentes, bem como a relação de congruência entre triângulos presentes nos livros didáticos da 6ª a 8ª série (atualmente 7º ao 9º ano no Brasil) de Moçambique. Como base teórica para o estudo foram utilizados trabalhos de Nicolas Balacheff, Raymond Duval e Yves Chevallard.

Após a análise dos livros didáticos foi possível identificar que são predominantes provas pragmáticas e os registros figurais e discursivos em línguas natural e simbólica são comumente apresentados. Além disso, os livros trazem tarefas com o discurso tecnológico-teórico disponível. Entretanto, as conversões não foram exploradas da melhor forma no estudo dos triângulos e ainda a reconfiguração não é aproveitada para produzir argumentos que poderiam fundamentar provas intelectuais.

Já a pesquisa de Carvalho (2012) teve como objetivo analisar, de um ponto de vista ecológico, a abordagem do objeto área de figuras geométricas planas na instituição Projovem Urbano. Neste sentido, foi utilizada a abordagem da teoria antropológica do didático com caráter teórico e metodológico. Os resultados dessa pesquisa indicaram que a palavra área aparece no material com diversos sentidos e em vários momentos tanto no estudo da matemática como nos demais componentes curriculares como o uso frequente no contexto da construção civil nos problemas de cálculo de área.

O trabalho de Almeida (2012), consequentemente, teve por objetivo discutir a abordagem do conteúdo de polígonos regulares inscritos na circunferência presentes nos livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental do PNLD/2011. Para isso, como base teórica para o estudo, utilizou-se a teoria antropológica do didático. Então foram realizados estudos preliminares sobre a história e o ensino da geometria euclidiana em livros didáticos de matemática e discussões realizadas em um grupo de estudo sobre livros didáticos de matemática para posteriormente realizar a análise dessas mesmas obras.

Após a análise, observou-se que os LDs exploram o objeto de pesquisa com aplicação de diferentes tipos de tarefas, já em relação ao conteúdo de polígonos regulares inscritos na circunferência que aparecem nos livros, é constatado que ao se resolver os diferentes tipos de tarefas é preciso articular as organizações matemáticas e as organizações didáticas as quais compõem o bloco prático-técnico (saber-fazer) [T/τ], constituído pelos tipos de tarefas (T) e pelas técnicas (τ), e o bloco tecnológico-teórico (saber) [ϴ/Θ], constituído pelas tecnologias (ϴ) e teorias (Θ). Sendo assim, a articulação desses blocos compõem as diferentes praxeologias pontuais. Então, após a análise, foi possível informar como foi organizado e apresentado o estudo do conteúdo de polígonos regulares inscritos na circunferência presentes nos livros didáticos.

A pesquisa de Anjos (2014) tem por objetivo analisar uma coleção de livros didáticos do 1º ao 5º ano do ensino fundamental aprovada pelo PNLD/2013. A análise foi realizada sob a ótica da organização praxeológica e o referencial teórico e metodológico pela teoria antropológica do didático. Estes foram utilizados para auxiliar na análise dos livros didáticos e nos estudos sobre as estruturas aditivas desenvolvidas pelo viés da Teoria dos Campos Conceituais, a fim de caracterizar o ensino das operações adição e subtração dos números naturais.

Após a investigação, foi possível identificar que o uso da teoria antropológica do didático foi fundamental para a construção e a compreensão da proposta de ensino em discussão. As noções de organização praxeológica e dos momentos didáticos possibilitou focar nas características essenciais para uma visão panorâmica e ao mesmo tempo detalhada da praxeologia. Foram identificados 18 tipos de tarefas mobilizadas ao longo dos cinco volumes e 28 maneiras de se trabalhar em situações de adição e de subtração (Anjos, 2014).

O estudo de Santos (2015) buscou analisar o distanciamento entre a prática docente do professor de matemática e a abordagem do livro didático adotado por ele, no 6º ano do ensino fundamental, em relação ao conceito de área de figuras geométricas planas. Para isso, fundamentou o trabalho na proposta de área enquanto grandeza e na teoria da transposição didática e teoria antropológica do didático.

Através da pesquisa de abordagem qualitativa de cunho etnográfico, Santos (2015) analisou as organizações matemática e didática do livro didático e da prática docente do professor de matemática de uma escola pública municipal. Os resultados indicaram que existe relação entre a abordagem do livro didático e a prática docente. Porém, essa relação diverge em aspectos relativos à organização matemática e didática, e converge em pontos como a definição e abordagem conceitual da área de figuras planas.

Em relação ao estudo desenvolvido por Costa (2015), este teve o intuito de investigar as organizações matemática e didática que podem estar presentes em livros didáticos para o ensino superior, no que se refere ao estudo da reta e do plano no espaço, para isso buscou analisar como os autores de livros didáticos organizaram as atividades propostas em relação ao estudo da reta e do plano, partindo das variáveis didáticas desenvolvidas por Lebeau para o ensino da geometria analítica no espaço.

Assim, o estudo de Costa (2015) se apoiou na pesquisa documental com caráter qualitativo descritivo, e mapeou quatro livros de geometria analítica do ensino superior, observando-os através da análise de manuais desenvolvidas por Chaachoua. Em relação a análise praxeológica, foram identificados seis tipos de tarefas, com isso a pesquisa fez perceber que os autores adotam a modelização algébrica e as técnicas utilizadas estão situadas na álgebra linear e na geometria analítica.

O trabalho de Lessa (2017) aborda a construção de um Modelo Epistemológico de Referência com a finalidade de contribuir com o processo de formação docente. Para o desenvolvimento da pesquisa foi levado em consideração o trabalho incompleto da instituição de ensino com relação ao objeto matemático área, por esse motivo buscou-se integrar elementos do modelo epistemológico de referência na bagagem praxeológica de professores de matemática do 6° ano do ensino fundamental. Como aporte teórico, foram utilizadas a TAD e a Teoria das Situações Didáticas.

Para o desenvolvimento do estudo foi realizada uma pesquisa de campo com estudantes do 6° ano do ensino fundamental, além disso, foram observadas as praxeologias dos professores na etapa das aulas. Diante da necessidade de complementar as informações presentes no conteúdo de Área foi desenvolvida uma revisão de literatura do estudo de área como grandeza e a partir disso construiu-se uma sequência didática baseada nas organizações matemáticas debatidas na revisão de literatura. A partir da análise dos resultados foi possível constatar que existe a possibilidade de realizar modificações nas praxeologias matemáticas e didáticas dos professores com relação às escolhas das tarefas e técnicas tomadas para a sequência didática (Lessa, 2017).

A pesquisa de Ferreira (2018) tem por objetivo a investigação de fatores de natureza epistemológica, cognitiva, didática e pedagógica relacionados à transição entre a primeira e a segunda etapa do ensino fundamental e aos objetos de saber (área e perímetro) e sua possível influência sobre o modo como os alunos do 6º ano lidam com esses objetos. A teoria utilizada fundamentou-se na abordagem do conceito de área como grandeza, na teoria dos campos conceituais, na teoria antropológica do didático e no conceito de retomada. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes do 5º, 6º e 7º ano, diretoras, coordenadoras dos anos iniciais e dos anos finais e professores de matemática das turmas do 5º e 6º ano.

Foi realizada análise comparativa das instituições 5º e 6º ano com base na escala de níveis de codeterminação, nos documentos oficiais e nas entrevistas. Foi visto que as praxeologias ensinadas pelos professores se aproximam daquelas dos livros adotados e os tipos de tarefas predominantes são medir uma área e medir um perímetro. Com relação ao domínio pedagógico, observou-se que existem pressões internas e externas nos níveis da sociedade, escola e pedagogia, que contribuem para compreender rupturas e continuidades na transição entre o 5º e 6º ano relativas aos objetos de saber área e perímetro (Ferreira, 2018).

A pesquisa de Verbisck (2019) teve como objetivo analisar coleções de livros didáticos do ensino fundamental escritos por Luís Roberto Dante aprovados pelo PNLD/ 2016, 2017 e 2018 e a partir disso caracterizar a proposta de ensino da probabilidade ao longo da educação básica. Como referencial teórico e metodológico foi utilizada a teoria antropológica do didático como forma de mapear, modelar e analisar as escolhas matemáticas e as escolhas didáticas das coleções.

Após a análise foi possível observar que na coleção dos anos iniciais o estudo de probabilidade apresentou-se por meio de atividades envolvendo noções de possibilidade e situações de aleatoriedade, já a partir do 5º ano a noção de probabilidade é introduzida, em quase todos os livros dos anos finais do ensino fundamental, ocorrendo a ampliação dos conceitos de probabilidade. Algo que não ocorre no 6º ano. A coleção de livros do ensino médio traz no segundo ano as justificativas teóricas consolidadas.

O estudo de Leão (2020) aborda o uso da teoria antropológica do didático como método para análise das propostas de coleções de livros didáticos do 1° ao 6° ano do ensino fundamental sobre o ensino das grandezas volume e capacidade. Para essa investigação foram avaliadas duas coleções de LDs. Posteriormente, a autora fez definição das categorias de análise baseadas na seleção de uma série de elementos elencados como importantes para a compreensão destas grandezas. Essas categorias foram estabelecidas a partir dos estudos descritos ao decorrer do trabalho. Assim, foi possível desenvolver uma modelação praxeológica dos capítulos e seções acerca da capacidade e volume nos livros.

O modelo proposto seguiu as atribuições de um gerador de tarefas incluindo diversas variáveis como a grandeza, volume ou capacidade, aspecto dimensional, unidimensional ou tridimensional, as técnicas utilizadas para a realização das tarefas, entre outras. Nesse estudo observou-se que nos livros didáticos tarefas relacionadas ao volume e capacidade são escassas ou inexistentes, relacionando-as com a outros campos do saber (Leão, 2020).

Portanto, como já pontuado anteriormente, sabemos que existe uma necessidade sobre a pesquisa em relação ao objeto matemático ângulo, que através do aspecto teórico-metodológico da TAD, irá possibilitar um olhar panorâmico para nossa pesquisa.

Já em relação a trabalhos que abordem a associação da teoria antropológica com o objeto do saber ângulo, foram encontradas duas pesquisas, sendo uma no formato de artigo de Costa e Santos (2018) e outra em um capítulo de livro de Santos e Costa (2022).

Com base na pesquisa de Costa e Santos (2018), o objetivo foi analisar a abordagem do conceito de ângulo presente em um livro didático do 8º ano do ensino fundamental, utilizando como aporte a TAD, que possibilitou por meio dos dados encontrados observaram que o tipo de tarefa mais frequente é determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região, o que corresponde a aproximadamente 68,4% do total de tarefas investigadas. E após a análise indicaram que esse conceito tem uma forte tendência a ser explorado por meio da medida da abertura do ângulo.

Já o capítulo do livro de Santos e Costa (2022) tem como objetivo analisar o estudo de ângulo em uma coleção de livros didáticos com o olhar para os elementos da praxeologia matemática, que com o apoio da TAD os pesquisadores identificaram 209 itens distribuídos em 8 tipos de tarefa. Após isso, perceberam novamente a ênfase em tarefas do tipo determinar, como também notaram que a compreensão de ângulo como conceito geométrico é pouco contemplada no livro didático.

Dessa forma, as pesquisas encontradas nesta revisão apontam que a teoria antropológica do didático é uma importante aliada nas análises de livros didáticos, o que casa com a nossa proposta. E quando se trata principalmente do objeto de estudo da matemática, podemos ainda mais investigar e explorar como o saber ângulo é abordado na educação básica e, assim, evidenciar através dos documentos oficiais lacunas e percalços que podem estar atrelados a este saber.

Portanto, essas pesquisas são as que mais se aproximam do objetivo dessa dissertação, porém, apresentam dados de maneira bem simples e não realizam toda a organização matemática, abordam apenas os elementos voltados aos tipos de tarefas. Logo, nesta dissertação analisaremos toda a organização matemática e didática proposta pela coleção mais adotada a nível nacional e aprovada pelo PNLD. Sendo assim, a seguir discutiremos sobre o processo metodológico desenvolvido neste estudo.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

Este capítulo tem por finalidade apresentar o percurso metodológico adotado para realização desse trabalho, que tem como objetivo geral analisar a abordagem de uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental, aprovada no PNLD 2020 em relação ao saber ângulo. Nesse sentido, A abordagem da pesquisa é qualitativa, pois:

> O método qualitativo de pesquisa é aqui entendido como aquele que se ocupa do nível subjetivo e relacional da realidade social e é tratado por meio da história, do universo, dos significados, dos motivos, das crenças, dos valores e das atitudes dos atores sociais (Minayo, 2013 *apud* Taquette; Minayo, 2015, p. 418).

Entende-se a pesquisa também como qualitativa, pois não há intenção de buscar verdades absolutas, mas sim uma compreensão detalhada na perspectiva do contexto em estudo. A pesquisa também tem um caráter documental, como afirmam Ruckstadter e Ruckstadter (2011, p. 113), pois "há que se considerar ainda que o pesquisador que analisa essas fontes não é imparcial, e não está isento de que as determinações de sua própria formação influenciem na interpretação das fontes de maneira indireta". Por outro lado, como característica da pesquisa documental temos a fonte de coleta de dados através de documentos, como menciona Gil (2017, p. 36)

> A modalidade mais comum de documento é a constituída por um texto escrito em papel, mas estão se tornando cada vez mais frequentes os documentos eletrônicos, disponíveis sob os mais diversos formatos. O conceito de documento, por sua vez, é bastante amplo, já que este pode ser constituído por qualquer objeto capaz de comprovar algum fato ou acontecimento.

Dessa forma, o delineamento deste projeto se baseia através do estudo de ângulos como tema de pesquisa, a teoria antropológica do didático como o marco teórico e os livros didáticos que serão os documentos analisados com o objetivo de modelizar as praxeologias matemática e didática no saber a ser ensinado.

Assim, o livro didático, como aponta Santos (2015), é um recurso no qual se encontram estruturados os saberes a serem ensinados aos estudantes. Esses saberes são escolhidos e organizados pela noosfera e passam por uma transformação a fim de torná-los ensináveis, essa transformação materializa-se nos documentos de orientações e nos critérios do PNLD.

Logo, de posse dos saberes a serem ensinados, os autores elaboram os livros didáticos que serão impressos e divulgados na comunidade escolar. Essa transformação carrega consigo uma organização matemática e didática que contribuirá, ou não, para a aprendizagem do aluno e poderá facilitar, ou não, a aula do professor como pontua Santos (2015).

Diante do exposto, para a análise do livro tomaremos dois focos: a praxeologia matemática e a praxeologia didática referentes ao estudo do saber ângulo.

4.1 PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA DO LIVRO DIDÁTICO

Aqui nosso olhar está voltado para os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, referente a ângulos, sejam eles no domínio da geometria ou no das grandezas e medidas. Inspiramo-nos em critérios definidos por Chevallard (1999) e que são apresentados no quadro a seguir.

palavras chaves para a pesquisa.

Quadro 4 – Critérios adotados na análise da praxeologia matemática dos livros didáticos

Elementos da Praxeologia	**Critérios adotados**
Tipo de tarefa	Identificação; representatividade; razão de ser; importância; pertinência; fáceis de utilização e confiáveis.
Técnicas	Abrangentes; bem elaboradas e possíveis de evoluir.
Tecnologia e teoria	Explicitação do conceito; apresentação e justificativa do enunciado; tipo e forma de justificativa; validade de argumentação e expiração do bloco tecnológico-teórico.

Fonte: Santos (2015, p. 100).

4.2 PRAXEOLOGIA DIDÁTICA DO LIVRO DIDÁTICO

Os critérios de análise da praxeologia didática irão se basear nos momentos de estudos descritos por Chevallard (1999) e adaptados por Santos (2015), conforme quadro a seguir:

Quadro 5 – Categorias e critérios de análise da praxeologia didática

Categorias (momentos)	**Critérios de análise**
Primeiro encontro	Como inicia o assunto de ângulos no livro didático?
Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica	Como o livro explora os tipos de tarefas referentes a ângulos? Como se dá a elaboração de técnicas?
Constituição do ambiente tecnológico-teórico	Como é realizada a construção de justificativas?
Trabalho da técnica	Quando acontece a construção do domínio da técnica? E da precisão da técnica? Há criação de novas técnicas?

Institucionalização	Como se concretiza a institucionalização (no início, meio e/ou fim da abordagem do livro)?
Avaliação	Como acontece a avaliação: no início, meio e/ou no fim da abordagem do livro?

Fonte: Santos (2015, p. 100).

4.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com isso, a pesquisa pode ser dividida em três etapas, sendo a primeira composta pelo mapeamento e seleção da coleção de livros didáticos que será utilizada, a segunda pela caracterização de praxeologias matemáticas e a terceira e última etapa irá consistir na análise das praxeologias didáticas por meio dos momentos didáticos.

A primeira etapa será realizada em duas partes: a primeira corresponde ao mapeamento das coleções de livros didáticos, como mostra o quadro a seguir, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD 2020), e o segundo a seleção da coleção de livros didáticos mais adotada no Brasil.

Quadro 6 – Critérios adotados na análise da praxeologia matemática dos livros didáticos

Coleção	**Editorial**	**Autoria**
A Conquista da Matemática	FTD – 4/2018	José Ruy Giovanni Junior, Benedicto Castrucci
Apoema - Matemática	Editora do Brasil 1/2018	Adilson Longen
Araribá Mais - Matemática	Moderna 1/2018	Marina Regina Garcia Gay e Outros
Convergências - Matemática	SM 2/2018	Eduardo Rodrigues Chavante
Geração Alpha - Matemática	SM 2/2018	Felipe Fugita, Andrezza Guarsoni Rocha, Carlos Nely C. de Oliveira
Matemática - Bianchini	Moderna 9/2018	Edwaldo Roque Bianchini
Matemática – Compreensão e Prática	Moderna 5/2018	Enio Ney de Menezes Silveira
Matemática Essencial	Scipione 1/2018	Patricia Rosana Moreno Pataro, Rodrigo Dias Balestri
Matemática – Realidade & Tecnologia	FTD – 1/2018	Joamir Roberto de Souza
Teláris Matemática	Ática 3/2018	Luiz Roberto Dante
Trilhas da Matemática	Saraiva Educação 1/2018	Fausto Arnaud Sampaio

Fonte: Santos (2015, p. 100).

O segundo momento da primeira etapa corresponde à seleção da coleção de livros didáticos mais adotada no Brasil, este critério foi baseado na representatividade da coleção que foi escolhida a nível nacional e por meio desta análise podemos contribuir com um número maior de professores que vierem a utilizar essa coleção, como mostra a tabela a seguir, que aponta a quantidade de exemplares distribuídos por coleção a nível nacional.

Assim, as escolhas das coleções de livros didáticos partiram de uma consulta no site do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), na parte que corresponde a área de dados estatísticos do PNLD, através da planilha “Valores de aquisição anos finais do ensino fundamental” que é disponibilizada. Consequentemente, com a ajuda do Excel realizamos alguns filtros selecionamos os mais adquiridos na área de matemática.

Este quantitativo representa cerca de 80% do total de solicitações de livros didáticos, no qual a coleção matemática “A Conquista da Matemática” foi a mais adotada.

Tabela 1 – Distribuição das coleções de matemática do PNLD 2020

Título	Tipo	Quantidade de Exemplares
A Conquista da Matemática	**Manual do professor**	**10.208**
	Livro do aluno	**5.033,531**
Apoema	Manual do professor	6.855
	Livro do aluno	345.904
Araribá Mais – Matemática	Manual do professor	15.371
	Livro do aluno	620.824
Convergências - Matemática	Manual do professor	3.879
	Livro do aluno	192.738
Geração Alpha - Matemática	Manual do professor	5.387
	Livro do aluno	223.150
Matemática – Bianchini	Manual do professor	19.939
	Livro do aluno	899.923
Matemática – Compreensão e Prática	Manual do professor	11.880
	Livro do aluno	514.953
Matemática Essencial	Manual do professor	11.480
	Livro do aluno	507.969
Matemática - Realidade & Tecnologia	Manual do professor	10.398
	Livro do aluno	520.972
Teláris Matemática	Manual do professor	20.181
	Livro do aluno	1.025,496
Trilhas da Matemática	Manual do professor	5.568
	Livro do aluno	218.718

Fonte: Dados extraídos do FNDE referentes ao PNLD 2020 (Brasil, 2019).

Em seguida, a segunda etapa consiste em caracterizar as praxeologias matemáticas, na qual iremos obter os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias mais presentes no livro, e que ao final de todo o processo será possível perceber se poderá ou não influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem dos estudantes.

A terceira etapa é proposta por meio da caracterização das praxeologias didáticas relativas à abordagem do saber ângulo, através da coleção de livros didáticos do 6º ao 9º ano. Ou seja, iremos analisar segundo os momentos de estudo como propõe a teoria antropológica do didático.

4.4 CARACTERIZAÇÃO DA COLEÇÃO

A coleção de livros didáticos a ser analisada é aquela mais adotada no Brasil, ou seja, "A Conquista da Matemática", aprovada no PNLD 2020 da editora FTD com autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci em livros do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, correspondentes a 4ª edição de 2018.

Os livros estão divididos em unidades, que por sua vez estão subdivididas em capítulos, nos quais apresentam seções em destaque como: **Pense e responda**; **Nós**; **Retomando o que aprendeu*; Atualidades em foco*** e intercala atividades à medida que desenvolve os assuntos.

Um destaque interessante é apresentado no manual do professor, que além de trazer as competências e habilidades de acordo com a BNCC, evidencia as orientações didáticas que tem o intuito de levantar questões sobre o modo que o professor pode abordar o conteúdo em sala de aula.

Tecendo uma análise geral em relação aos capítulos destinados a ângulos na coleção de livros didáticos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, percebemos que geralmente a unidade correspondente vem nas páginas presentes na metade do livro. É importante mencionar que em todos os livros dos anos finais os capítulos referentes a ângulos estão sempre localizados no primeiro e/ou no segundo capítulo de uma determinada unidade e para a realização do mapeamento das tarefas serão apenas observados os capítulos referentes ao objeto do saber ângulo. Podemos perceber a estrutura no quadro abaixo.

Quadro 7 – Estrutura da coleção analisada referente ao saber ângulo

Ano	Unidade	Título dos capítulos	Quant. de páginas
6º	7 – Ângulos e polígonos	Cap. 1 – Giro, abertura e inclinação; Cap. 2 – O ângulo.	8
7º	6 – Figuras geométricas planas	Cap. 1 – Ângulos; Cap. 2 – Retas.	18
8º	3 – Ângulos e triângulos	Cap. 1 – Ângulo.	4
9º	4 – Relação entre ângulos	Cap. 1 – Ângulos determinados por retas transversais.	7

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação ao livro do 6º ano, este apresenta nove unidades e o conteúdo referente a ângulos está presente na unidade sete, "Ângulos e polígonos", nos capítulos um e dois. O primeiro se refere a "Giro, abertura e inclinação" e o segundo aborda "O ângulo", Nesse último, o livro traz a conceituação, a medida de um ângulo e como usar o transferidor. O ângulo também é trabalhado como propriedade geométrica no capítulo cinco relacionado a "Triângulos e quadriláteros".

O livro do 7º ano é composto por nove unidades e o conteúdo referente a ângulos está presente na unidade seis, intitulada "Figuras geométricas planas", nos capítulos um e dois. No capítulo um, nomeado "Ângulos", o livro traz a definição e medida de um ângulo, classificação de ângulos, ângulos congruentes, ângulos consecutivos e ângulos adjacentes, ângulos complementares e ângulos suplementares.

Já o capítulo dois é destinado ao conteúdo de retas, que aborda a questão das retas paralelas e retas concorrentes, com isso apresenta os ângulos opostos pelo vértice. Em seguida, o livro se refere a retas paralelas cortadas por uma transversal, logo, trabalha com ângulos correspondentes, alternos e colaterais. Por fim, trabalha construções geométricas de triângulos e polígonos com ênfase em ângulos nos capítulos três, quatro e seis.

Em relação ao livro do 8º ano, este apresenta nove unidades e o conteúdo referente a ângulos está presente na unidade três, nomeada "Ângulos e triângulos", cujo capítulo um é intitulado "Ângulos". Neste, são trabalhados os adjacentes, a bissetriz, os complementares, os suplementares e ângulos opostos pelo vértice. Finalizando, nosso objeto de saber é trabalhado mais uma vez como propriedade geométrica nos capítulos dois e cinco relacionado a triângulos e construções geométricas.

O livro do 9º ano, consequentemente, é composto por nove unidades e o conteúdo referente a ângulos é trabalhado na unidade quatro “Relações entre ângulos”, no capítulo um, que aborda “Ângulos determinados por retas transversais”, no qual é trabalhado ângulos opostos pelo vértice, adjacentes, correspondentes, alternos e colaterais. No capítulo dois, ângulo é trabalhado em relação a circunferência através do ângulo inscrito, central e cujos vértices não pertencem à circunferência. A seguir, apresentamos o capítulo da análise dos dados.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta sessão, discutiremos toda a análise do livro didático realizada por meio da organização matemática e da organização didática, que será pautada nos estudos de Chevallard (1999), e nos critérios mencionados no percurso metodológico, no qual os livros adotados são dos anos finais do ensino fundamental. Por isso, dividiremos essa análise em dois momentos, a saber: análise da organização matemática e análise da organização didática.

5.1 ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Nosso intuito nessa pesquisa foi analisar a abordagem do saber ângulo em uma coleção de livros intitulada “A Conquista da Matemática”, quarta edição dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, código da coleção 0377P20022, editora FTD, 2018. Dessa forma, dividiremos esse subtópico em quatro etapas, cada uma representada por um ano escolar da coleção.

5.1.1 Análise da organização matemática do livro didático do 6º ano do ensino fundamental

No livro do 6º ano a abordagem de ângulos encontra-se na unidade sete, com o tema Ângulos e Polígonos, localizados nos capítulos um e dois situados da página 200 até à 207. Em relação ao formato desta obra, as introduções das unidades são indicadas por uma imagem, que está relacionada ao tema que será estudado, QUE também é acompanhado por algumas questões que contextualizam a discussão inicial.

Em seguida, vem os capítulos, que contam com diferentes discussões e recursos. Um fato interessante são os *boxes* e seções que exploram e aprofundam o conteúdo em questão. Os *boxes* são **pense e responda***,* **saiba qu***e* e **nós**. Além disso, apresenta as seções que englobam as atividades, fórum, tecnologias, atualidades em foco e retomando o que aprendeu. Logo, para a realização do mapeamento das tarefas no livro foi observado que apenas os capítulos um e dois correspondentes ao objeto do saber ângulo.

Quanto à quantidade de tarefas observadas, foram identificadas 16 tarefas, nas quais descartamos duas por ser de cunho pessoal, assim, justificamos essa exclusão pela ausência dos elementos da praxeologia no manual do professor, o que não nos possibilita realizar a sua praxeologia. No entanto, consideramos importante a sua inserção nos processos de ensino e de aprendizagem. Durante a análise identificamos que as tarefas rastreadas pertencem a dois tipos de tarefas, nos quais apresentamos na tabela a seguir:

Tabela 2 – Distribuição dos tipos de tarefas presentes no livro didático do 6º ano do ensino fundamental

Tipos de tarefas	Quantidade	Percentual
T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas	7	50%
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	7	50%
Total	14	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação a tabela anterior, percebe-se que por mais que existam dois tipos de tarefas que estão equilibradas, não foi notada nenhuma tarefa que explora a construção de representações de ângulos. Essa ausência pode ocasionar problemas de ensino e aprendizagem, pois é preconizada no currículo. Em seguida, ao analisarmos as tarefas do tipo de tarefa **T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas**, constatamos quatro elementos que configuram em subtipos[7] de tarefa, como observa-se a seguir.

Tabela 3 – Distribuição das tarefas por subtipos referentes a T_R presentes no livro didático do 6º ano

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	T_{R1} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos com a ideia de giro, abertura e inclinação	3
	T_{R2} – Reconhecer em situações cotidianas de ângulos retos	2
	T_{R3} – Determinar a quantidade de giros completos de um objeto em uma situação cotidiana	1
	T_{R4} – Descrever um percurso realizado por um objeto utilizando comandos	1

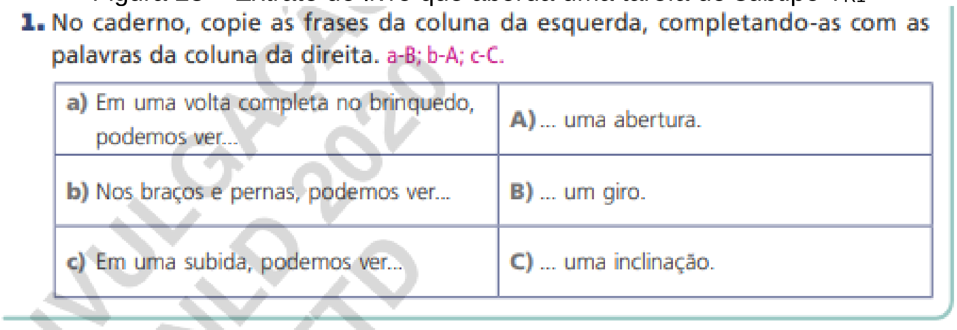
[7] Chaachoua (2010) afirma que um subtipo é um subconjunto do tipo de tarefa. Santos (2015) amplia pontuando que um subtipo de tarefa apresenta a mesma natureza em termos de objetivos, porém tem uma dimensão mais específica do ponto de vista matemático.

Total	7

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como exposto na tabela acima, percebemos ao que tudo indica uma preocupação por parte dos autores, que visam por meio das tarefas explorar diferentes ideias a associadas ao saber ângulo. Em relação ao subtipo T_{R1}, localizamos no exemplar analisado a situação proposta na figura 23, a seguir.

Figura 23 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{R1}



1. No caderno, copie as frases da coluna da esquerda, completando-as com as palavras da coluna da direita. a-B; b-A; c-C.

a) Em uma volta completa no brinquedo, podemos ver...	**A)** ... uma abertura.
b) Nos braços e pernas, podemos ver...	**B)** ... um giro.
c) Em uma subida, podemos ver...	**C)** ... uma inclinação.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 202).

Assim, em relação a esse subtipo de tarefa, modelizamos a seguinte praxeologia, que está descrita através do quadro a seguir:

Quadro 8 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{R1}

Subtipo de tarefa	**Técnica**	**Tecnologia/ Teoria**
T_{R1} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos com a ideia de giro, abertura e inclinação	Analisar cada situação do cotidiano associando às ideias de giro, abertura e inclinação, de modo que: a) se estiver vinculada a volta, tem-se a ideia de giro; b) se estiver relacionada a semirretas de mesma origem, tem-se a ideia de abertura; c) se estiver vinculada a ângulo com aberturas menores que 90º, têm-se a ideia de inclinação	Definição de ângulo como giro, abertura e inclinação Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

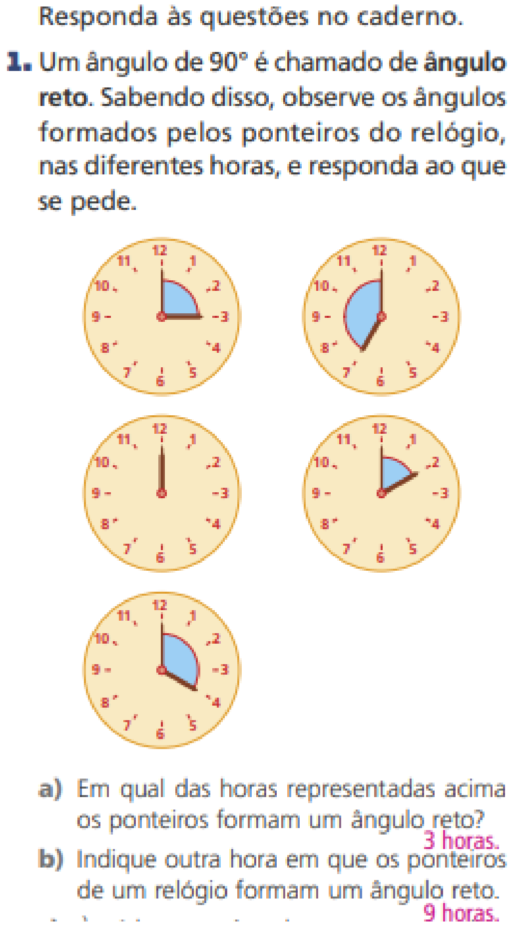
Quanto à tecnologia do subtipo T_{R1}, percebemos após a descrição do nosso referencial uma conformidade com as definições propostas por alguns autores como, Choquet (1964), Hilbert (1899) e Kayas (1978).

Para Choquet (1964) em relação à ideia de giro, é dito que para identificar ângulos com rotações sobre um ponto, a escolha desse ponto não influencia. Quanto à ideia de abertura, segundo Hilbert (1899, p. 21), “sejam h e k duas semirretas diferentes de um plano x, provenientes de um ponto O, e pertencentes a linhas diferentes o conjunto de semirretas h e k é chamado de ângulo".

Já com respeito à inclinação, Kayas (1978, p. 1) atesta que "o plano do emaranhado é a inclinação mútua de duas linhas coplanares que se encontram sem serem colineares". Por fim, consideramos que todo o desenvolvimento da técnica, justificada por uma tecnologia está apoiada por uma teoria, neste caso, a geometria.

Para as tarefas do subtipo **T_{R2} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos retos**, é necessário analisar cada situação do cotidiano identificando visualmente ângulos retos. Como podemos observar na figura a seguir.

Figura 24 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{R2}



Responda às questões no caderno.

1. Um ângulo de 90° é chamado de **ângulo reto**. Sabendo disso, observe os ângulos formados pelos ponteiros do relógio, nas diferentes horas, e responda ao que se pede.

a) Em qual das horas representadas acima os ponteiros formam um ângulo reto?
3 horas.

b) Indique outra hora em que os ponteiros de um relógio formam um ângulo reto.
9 horas.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 206).

Para o subtipo de tarefa T_{R2}, identificamos que a tecnologia proposta está em conformidade com o que se baseia o axioma de construção de ângulos, que segundo Queiroz e Rezende (2008, p. 23) é marcado por uma "uma semirreta contida na reta origem de um semiplano. Para cada número entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta", neste sentido a teoria que está baseada é a geometria.

Quadro 9 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{R2}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/ Teoria
T_{R2} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos retos	Analisar cada situação do cotidiano identificando visualmente ângulos retos, ou seja, aqueles que têm a abertura igual a 90º	Definição de ângulo reto Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação ao subtipo **T_{R3} – Determinar a quantidade de giros completos de um objeto em uma situação cotidiana**, é preciso contar a quantidade de giros de um objeto em um ponto, observe a figura a seguir.

Figura 25 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{R3}

d) Das 2 horas às 3 horas, quantas voltas completas dá o ponteiro grande? 1 volta.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 206).

A tecnologia que justifica essa técnica está pautada na definição de ângulo como giro segundo Calado (1955), que menciona o ângulo como uma rotação, que está associada a uma operação que transforma uma semirreta em outra com a mesma origem. Também evidenciamos que essa praxeologia está baseada na geometria, como apresentado no quadro a seguir:

Quadro 10 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{R3}

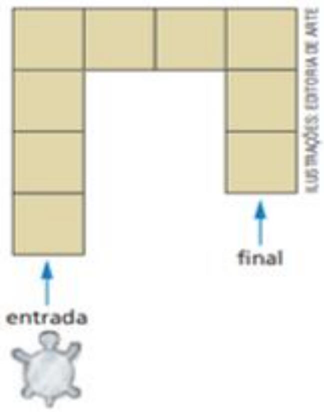
Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{R3} – Determinar a quantidade de giros completos de um objeto em uma situação cotidiana	Contar a quantidade de giros de um objeto fixo em um ponto	Definição de ângulo por meio da ideia de giro Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação ao subtipo **T_{R4} – Descrever um percurso realizado por um objeto utilizando comandos**, a técnica consiste em realizar um percurso a partir de comandos. Entre eles, avançar, virar à direita e virar à esquerda, percebendo a formação de ângulos retos.

Figura 26 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{R4}

2. (Saresp-SP) Imagine que você tem um robô tartaruga e quer fazê-lo andar num corredor sem que ele bata nas paredes. Para fazer isso, você pode acionar 3 comandos: **avançar** (indicando o número de casas), **virar à direita** e **virar à esquerda**. Para que você acione de forma correta o comando, imagine-se dentro do robô.



Seus comandos, para que o robô vá até o final, deverão ser: Alternativa a.

a) avançar 4, virar 90° à direita, avançar 3, virar 90° à direita, avançar 2.

b) avançar 4, virar 90° à esquerda, avançar 3, virar 90° à esquerda, avançar 2.

c) avançar 4, virar 90° à direita, avançar 3, virar 90° à esquerda, avançar 2.

d) avançar 4, virar 90° à esquerda, avançar 3, virar 90° à direita, avançar 2.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 206).

E como tecnologia, temos a ideia de Barbosa (1995, p. 27), que afirma “um ângulo cuja medida é 90 é chamado de ângulo reto”, na qual consideramos a teoria da praxeologia apoiada na geometria.

Quadro 11 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{R4}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{R4} – Descrever um percurso realizado por um objeto utilizando comandos	Realizar um percurso a partir de comandos, entre eles avançar, virar à direita e virar à esquerda, percebendo a formação de ângulos retos	Definição de ângulo reto e noção de lateralidade Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Já para as tarefas pertencente ao segundo tipo de tarefa **T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região**, identificamos elementos que permite associá-las a três diferentes subtipos de tarefa, como podemos observar a seguir.

Tabela 4 – Distribuição dos subtipos da tarefa T_D do capítulo do livro didático do 6º ano destinado ao saber ângulo

Tipos de tarefas	**Subtipos**	**Quantidade**
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	T_{D1} – Determinar a medida da abertura do ângulo através de elementos da figura ou região	1
	T_{D2} – Determinar por meio da comparação de ângulos a medida de sua abertura	1
	T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor	5
Total		7

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como podemos perceber na tabela anterior, a ênfase maior está na determinação da medida da abertura do ângulo utilizando um instrumento de medição. Consideramos que este tipo de tarefa é importante nos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que outros saberes e aptidões vão estar envolvidos durante o desenvolvimento da tarefa.

Para melhor caracterizar à praxeologia matemática do subtipo T_{D1}, suas características são apresentadas no quadro as seguir.

Quadro 12 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D1}

Subtipo de tarefa	**Técnica**	**Tecnologia/ Teoria**
T_{D1} – Determinar a medida da abertura do ângulo através de elementos da figura ou região	Tomar como referência uma das semirretas fixadas na origem. Em seguida, observar o ângulo formado pelo movimento realizado pela outra semirreta e, por fim, determinar visualmente a medida da abertura do ângulo que foi formado	Axioma da medição de ângulos Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

No exemplo da figura 27 é necessário desenvolver uma técnica, na qual os autores não deixam explícita. Logo, são as nossas inferências a partir da tarefa.

Figura 27 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D1}

e) Das 12 horas às 12 horas e 30 minutos, o ponteiro grande gira quantos graus?
180°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 206).

Diferente do que foi posto como teoria (Θ), para os subtipos T_R, ou seja, geometria, percebemos agora que em relação aos subtipos T_D entram em cena as grandezas e medidas, uma vez que o foco a ser estudado é a designação da abertura do ângulo. Quanto ao subtipo T_{D2}, caracterizamos a praxeologia matemática como observada no quadro a seguir.

Quadro 13 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D2}

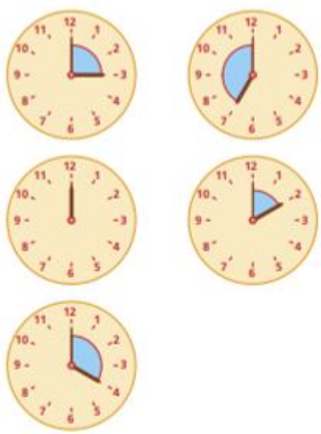
Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/ Teoria
T_{D2} – Determinar por meio da comparação de ângulos a medida de sua abertura	Dado a representação gráfica de um ângulo reto e outra representação gráfica de um ângulo obtuso, deve-se comparar, visualmente, qual o ângulo que apresenta a maior abertura	Axioma da medição de ângulos Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como podemos observar no exemplo da figura a seguir, tem-se na prática uma tarefa que aborda o subtipo T_{D2}.

Figura 28 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D2}

1. Um ângulo de 90° é chamado de **ângulo reto**. Sabendo disso, observe os ângulos formados pelos ponteiros do relógio, nas diferentes horas, e responda ao que se pede.



c) Às 4 horas, o ângulo entre os ponteiros é maior ou menor que um ângulo reto?
Maior.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 206).

Em relação à tarefa proposta pelos autores, no subtipo T_{D2} percebemos que ao fazer as representações gráficas, os autores embaralham as figuras e não colocam em evidência qual estão se referindo. Então, ao fazer a comparação com a representação de uma figura que não seja a que foi pedida, pode se abrir espaços para outras interpretações e respostas.

Para o subtipo T_{D3}, a praxeologia matemática está caracterizada da seguinte forma, como mostra o quadro a seguir.

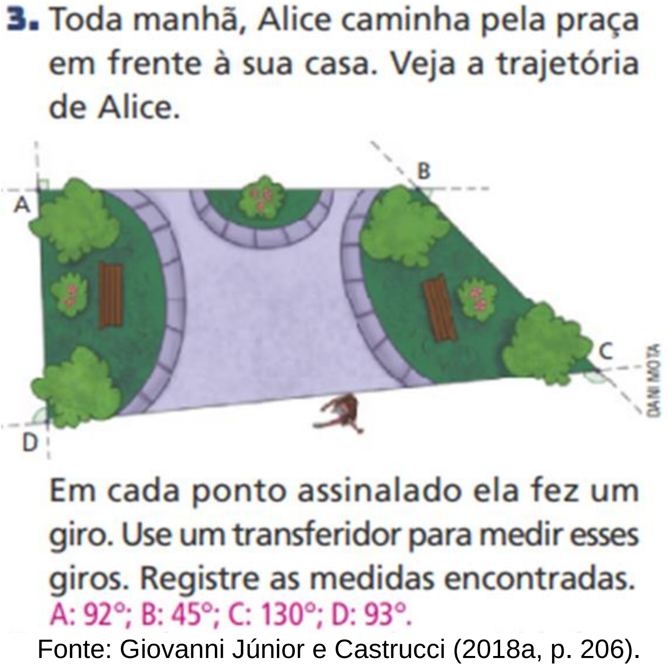
Quadro 14 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D3}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/ Teoria
T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor	Posicionar o transferidor de maneira que o seu centro coincida com o vértice do ângulo. Em seguida, posicionar a escala correspondente ao zero, sobre um dos lados do ângulo e, por fim, identificar na escala do transferidor o número interceptado pelo outro lado do ângulo	Axioma da medição de ângulos Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para o subtipo de tarefa T_{D3}, é utilizado um instrumento de medida, o transferidor. Este, foi utilizado na técnica mencionada acima, conforme pode-se observar na tarefa representada pela figura a seguir.

Figura 29 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D3}



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 206).

Portanto, percebemos que a tecnologia utilizada para justificar a técnica aplicada em cumprimento da tarefa do tipo T_D está em conformidade com a ideia do axioma da medição de ângulos que defendida por Queiroz e Rezende (2008, p. 22), em que “a cada ângulo corresponde um único número real entre 0 e 180”.

Em relação a teoria, os percursos justificam e evidenciam as tecnologias. Estas são a Geometria e as Grandezas e Medidas. Assim, corrobora com o que preconiza a BNCC (Brasil, 2018) quanto às tarefas que envolvem a posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais podendo desenvolver o pensamento geométrico[8] dos estudantes.

E estará associada às grandezas e medidas, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), quando estiver relacionado ao estudo das medidas e das relações entre elas, ou seja, as relações métricas, favorecendo a integração da matemática a outras áreas de conhecimento.

5.1.2 Análise da organização matemática do livro didático do 7º ano do ensino fundamental

Em relação a organização matemática do livro didático do 7º ano referente ao saber ângulo, o livro da coleção aborda ângulos na unidade seis, com o tema figuras geométricas planas.

O saber ângulo está presente nos capítulos um e dois. O capítulo um é intitulado ângulos e, o dois, retas, localizados da página 166 até à 181. O formato da obra sempre traz o início da unidade através de uma imagem associando a um contexto que se relaciona ao tema em estudo, como também pode acompanhar algumas questões que visam discutir e aprofundar o tema.

Na sequência, são apresentados os capítulos que se apropriam de diferentes abordagens e recursos. Assim como no ano anterior, a obra apresenta as seções que englobam as atividades, fórum, tecnologias, atualidades em foco e retomando o que aprendeu.

Para a realização do mapeamento das tarefas no livro foram observados apenas os capítulos relacionados ao saber ângulo. Em relação a quantidade de tarefas observadas, identificou-se 145 tarefas, e duas sendo de cunho pessoal, cujo o manual não evidencia os elementos da praxeologia. Assim, identificamos as tarefas

[8] Como define Costa (2019), o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas.

analisadas como pertencente a três tipos, conforme apresentaremos na tabela a seguir:

Tabela 5 – Distribuição dos tipos de tarefas presentes no livro didático do 7º ano do ensino fundamental

Tipos de tarefas	Quantidade	Percentual
T_I – Identificar ângulos em figuras	15	9,8%
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	112	72,7%
T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	27	17,5%
Total	154	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ao fazer a análise do tipo de tarefa **T_I – Identificar ângulos em figuras**, percebemos diferentes elementos que nos permitiram reunir em quatro diferentes subtipos de tarefa, como podemos observar a seguir.

Tabela 6 – Distribuição das tarefas por subtipos referentes a T_I presentes no livro didático do 7º ano

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_I – Identificar ângulos em figuras	T_{I1} – Nomear ângulos presentes em figuras	3
	T_{I2} – Quantificar ângulos presentes em figuras	1
	T_{I3} – Identificar elementos de um ângulo	1
	T_{I4} – Associar um ângulo à medida da sua abertura em graus	10
Total		15

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como podemos observar na tabela anterior, para o tipo de tarefa de identificar ângulos em figuras a relevância maior está na associação de um ângulo à medida da sua abertura em graus. Em seguida, veremos tarefas pertencentes aos subtipos que foram encontrados no livro didático e organização praxeológica correspondente. Em relação ao primeiro subtipo encontrado, caracterizamos da seguinte forma, como podemos observar a seguir.

Quadro 15 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{I1}

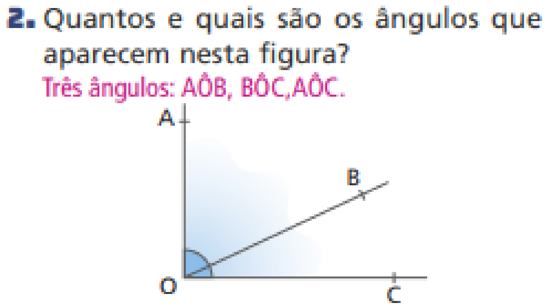
Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{I1} – Nomear ângulos presentes em figuras	Localizar o vértice e os lados dos ângulos. Em seguida, nomear a partir das letras dadas aos lados, de forma que o ponto vértice fique no meio	Definição de ângulo e de elementos que compõem um ângulo, o vértice e as semirretas Geometria

	do trio de letras que foi encontrado	

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como exposto acima percebemos que o subtipo de tarefa T_{I1} tem como intuito colocar em prática a definição de ângulo, nomeando o vértice e as semirretas encontradas como se pode observar na figura abaixo.

Figura 30 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{I1}



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Deste modo, ao retomar a tecnologia, como afirma Barbosa (1995), que sustenta o subtipo T_{I1}, é válido notar que suas definições estão ligadas ao campo da geometria, que neste caso se faz pertinente como teoria.

Para o subtipo de tarefa T_{I2}, temos que quantificar ângulos, como podemos ver a seguir no quadro a seguir

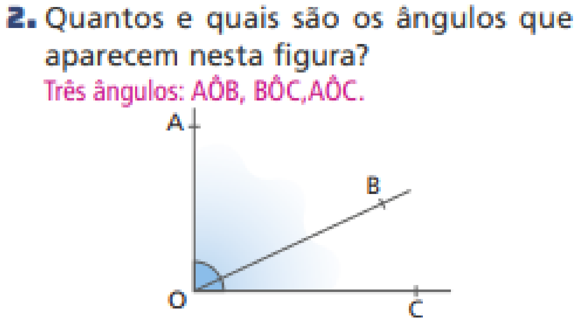
Quadro 16 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{I2}

Subtipo de tarefa	**Técnica**	**Tecnologia/Teoria**
T_{I2} – Quantificar ângulos presentes em figuras	Realizar a contagem dos ângulos presentes em uma figura	Princípio aditivo da contagem Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Podemos notar que a técnica utilizada para o cumprimento da tarefa desse subtipo está relacionada a identificação e realização da contagem dos ângulos, que como exemplo pode ser representada pela figura a seguir.

Figura 31 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{I2}



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Sendo assim, a tecnologia se volta ao princípio aditivo da contagem "que permite determinar o número de elementos do conjunto A ∪ B em função do número de elementos dos conjuntos A e B", como afirmam Vasconcelos e Rocha (2019, p. 21). E com isso sua teoria está inserida na geometria, por neste subtipo estarmos estudando a natureza do objeto geométrico.

Outro subtipo encontrado é direcionado a identificar os elementos de um ângulo como mencionado no quadro seguinte.

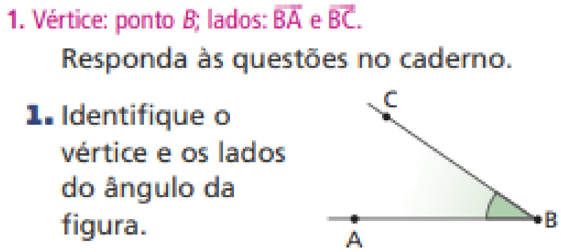
Quadro 17 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{I3}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{I3} – Identificar elementos de um ângulo	Localizar o vértice e os lados do ângulo. Em seguida, identificar o ponto de vértice e as semirretas que estão em cada um dos lados do ângulo	Definição de ângulo e elementos que compõem um ângulo, o vértice e as semirretas Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Assim como o subtipo de tarefa T_{I1}, o subtipo T_{I3} tem sua técnica muito parecida, pois buscam os elementos de um ângulo. O que muda é que neste subtipo não estamos interessados em nomear, mas apenas identificar os elementos componentes do ângulo, conforme figura de exemplo a seguir.

Figura 32 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{I3}



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Portanto, se analisarmos a tecnologia de ambos os subtipos T_{I1} e T_{I3}, estes irão se encontrar na definição matemática de ângulos assim como também a sua teoria estará voltada à geometria.

No caso do subtipo T_{I4}, que é o de maior expressão para este tipo de tarefa, sua associação está baseada na medida de abertura de um ângulo, como representado no quadro a seguir:

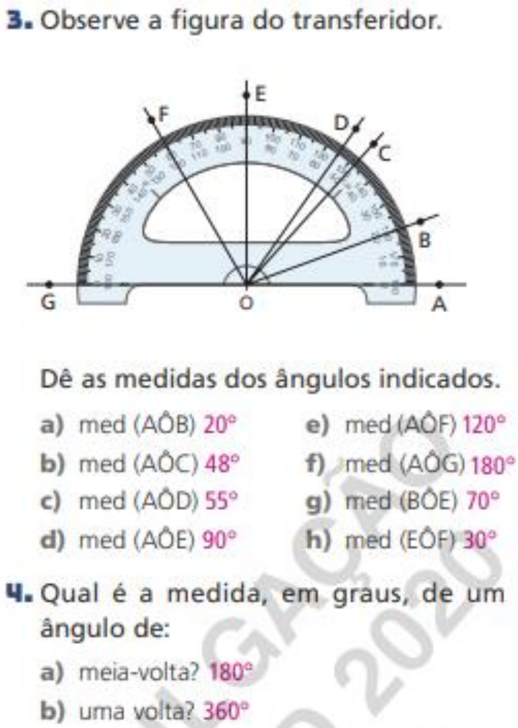
Quadro 18 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{I4}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{I4} – Associar um ângulo à medida da sua abertura em graus	Identificar o ângulo dado, seja através da sua classificação ou da medida de abertura. Em seguida, associar ângulo à sua medida em graus e, por fim, determinar o grau do ângulo	Axioma da medição de ângulos, medida da abertura em graus e ângulos como giro. Geometria; Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Então, para associar um ângulo à sua medida, como aborda este subtipo, é preciso observar como se descreve a técnica, ou seja, identificar o ângulo em questão e na sequência analisar o que se pede para poder fazer a associação ao seu número em graus. Esse exemplo é destacado na figura a seguir.

Figura 33 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{I4}


3. Observe a figura do transferidor.

Dê as medidas dos ângulos indicados.

a) med (AÔB) 20°
b) med (AÔC) 48°
c) med (AÔD) 55°
d) med (AÔE) 90°
e) med (AÔF) 120°
f) med (AÔG) 180°
g) med (BÔE) 70°
h) med (EÔF) 30°

4. Qual é a medida, em graus, de um ângulo de:

a) meia-volta? 180°
b) uma volta? 360°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Com isso, a tecnologia deste subtipo se associa ao do subtipo de tarefa T_{D1}, T_{D2} e T_{D3}, que foram encontrados no livro do 6º ano. Como mencionam Queiroz e Rezende (2008), cada ângulo irá corresponder a um número entre 0° e 180°.

No entanto, se amplia a tecnologia quando o ângulo é observado como giro e tem sua medida associada a 360º como uma volta e 180° como meia volta, segundo afirma Lima e Bellemain (2010). Logo, suas teorias são voltadas às ligações entre a geometria e as grandezas e medidas.

Para o próximo tipo de tarefa T_D, percebemos que com base na versão criada para o 6° ano, os autores se preocupam com a evolução da exploração do tipo de tarefa e descobrimos outros subtipos de tarefas pertencentes a este tipo, como podemos observar na tabela abaixo.

Tabela 7 – Distribuição das tarefas por subtipos referentes a T_D presentes no livro didático do 7º ano

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	T_{D4} – Determinar a medida de abertura do ângulo através do seu comportamento e/ou suplemento	9
	T_{D5} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de ângulos opostos pelo vértice	14
	T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	42
	T_{D7} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico	23
	T_{D8} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de ângulos alternos, colaterais e correspondentes	24
Total		112

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na tabela acima percebemos uma continuidade dos subtipos encontrados no ano anterior, o que é um fato bastante interessante para o nosso mapeamento. Com isso, em relação ao subtipo T_{D4}, que é o primeiro subtipo de T_D para o 7° ano, temos que fazer a determinação da medida da abertura do ângulo com foco para o seu complemento e suplemento. Para isso, observemos o quadro a seguir.

Quadro 19 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D4}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D4} – Determinar a medida da abertura do ângulo através do seu complemento e/ou suplemento	Localizar o ângulo complementar e/ou suplementar e determinar a medida do ângulo da seguinte forma: a) se a medida a ser determinada for um ângulo complementar, a medida de seu complemento será 90° - x.	Definição de ângulos complementares e ângulos suplementares

	b) se a medida a ser determinada for um ângulo suplementar, a medida de seu suplemento será 180° - x.	Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com isso, a técnica desenvolvida visa encontrar a medida de abertura quando o ângulo for complementar ou suplementar. Como exemplo podemos visualizar a figura a seguir.

Figura 34 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D4}

6. Determine a medida do:

a) complemento do ângulo de 47°. 43°

b) suplemento do ângulo de 119°. 61°

c) complemento do ângulo de 22°. 68°

d) suplemento do ângulo de 67°. 113°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 172).

Assim, temos como tecnologia as definições de ângulo complementar e suplementar. Como mencionam Queiroz e Rezende (2008), dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90º, e sobre os ângulos suplementares, dois ângulos são dessa forma quando a soma de suas medidas é igual a 180°. E, por fim, a teoria está ligada a grandezas e medidas.

Para o cumprimento das tarefas do subtipo de tarefa T_{D5}, é preciso determinar a medida de ângulos opostos pelo vértice, como nota-se no quadro a seguir.

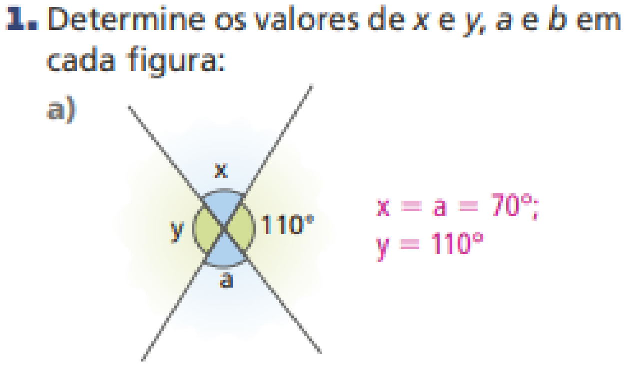
Quadro 20 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D5}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D5} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de ângulos opostos pelo vértice	Identificar a medida do ângulo dado, igualar essa medida a medida do ângulo que a ele é oposto pelo vértice	Ângulos opostos pelo vértice Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A técnica utilizada visa fazer a aplicação da propriedade de ângulos opostos pelo vértice e, em seguida, determinar a sua medida, como segue o modelo proposto na figura a seguir. Vale ressaltar que os valores de y e de a podem ser encontrados através dessa técnica e para o valor de x aplicamos a técnica proposta em T_{D4}.

Figura 35 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D5}



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 175).

Em relação à tecnologia, percebemos conformidade com Machado (2012), no qual dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma abertura, e escolhendo uma mesma unidade apresentam a mesma medida. Já no caso da teoria, se localiza no domínio das grandezas e medidas.

No caso do subtipo de tarefa T_{D6} que busca determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos, montamos o quadro a seguir.

Quadro 21 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D6}

Subtipo de tarefa	**Técnica**	**Tecnologia/Teoria**
T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	Identificar a classificação de ângulo solicitada na tarefa (congruentes, suplementares, complementares, opostos pelo vértice, correspondentes, alternos e colaterais). Em seguida, aplica a propriedade de igualdade e realiza as operações algébricas correspondentes a cada caso, feito isso, determina-se o valor numérico das incógnitas. E, por fim, quando solicitado, determina a medida da abertura do ângulo a partir da substituição do valor da incógnita na expressão algébrica e/ou reconhece como o valor da incógnita	Propriedades algébricas tais como: expressões algébricas, equações, igualdade ou através de congruência Grandezas e medidas, geometria e álgebra

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A técnica para este subtipo de tarefa depende do tipo de ângulo, ou seja, como é classificado. E depende de como se solicita a tarefa. Feito isso, partimos para a operação algébrica solicitada, pelo exemplo observado na figura a seguir.

Figura 36 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D6}

5. Dois ângulos congruentes têm as medidas expressas, em graus, por $(7x + 30)°$ e $(13x - 30)°$, respectivamente. Nessas condições determine o valor de x. 10°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Em relação a tecnologia, apoiamo-nos no que afirma Cunha (2009, p. 45), que "na equação $X + a = 0$, queremos transpor o termo a do primeiro para o segundo membro (para termos o valor da incógnita x isolado), adicionamos -a em ambos os membros da equação". Ou seja, adicionamos o inverso em cada membro. E entendemos que a teoria deste subtipo tem ligações com três campos da matemática: as grandezas e medidas, geometria e álgebra.

O subtipo de tarefa T_{D7} tem o intuito de determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 22 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D7}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D7} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico	Identificar o ângulo a ser encontrado. Em seguida, utilizar as medidas ou informações dadas para calcular, aplicando as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e/ou potenciação. E, por fim, determinar a medida do ângulo	Cálculo numérico, princípio aditivo e multiplicativo Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A técnica que está relacionada a esse subtipo de tarefa T_{D7} visa a aplicação das operações aritméticas, como sugere a figura a seguir.

Figura 37 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D7}

8. Quantos graus tem um ângulo que mede:

a) a terça parte da medida do ângulo de meia-volta? 60°

b) $\frac{2}{5}$ da medida do ângulo de uma volta? 144°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Portanto, a tecnologia que está atrelada é mencionada por Cunha e Castro (2010, p. 10) que diz "um método numérico é constituído por uma sequência finita de operações aritméticas que, sob certas condições, levam a uma solução ou a uma aproximação de uma solução do problema". E podemos associar a teoria deste subtipo com a natureza sendo trabalhada através das relações entre geometria e grandezas e medidas.

Já o subtipo de tarefa T_{D8} busca determinar a medida da abertura do ângulo em uma figura por meio de ângulos alternos, colaterais e correspondentes, como mostra o quadro abaixo.

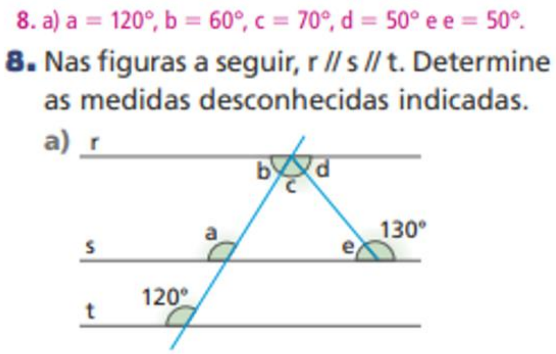
Quadro 23 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D8}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D8} – Determinar a medida da abertura do ângulo em uma figura por meio de ângulos alternos, colaterais e correspondentes	Localizar o ângulo dado. Feito isso, é preciso identificar a classificação de ângulo solicitada, que poderá ser ângulos alternos, correspondente e/ ou colaterais. Em seguida, aplicar a que está sendo trabalhada na figura fazendo o reconhecimento. E por fim determinar a medida da abertura do ângulo em questão	Congruência de ângulos, alternos e colaterais por meio de retas paralelas cortadas por uma transversal Geometria, Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com relação a técnica, é preciso identificar qual a classificação do ângulo em questão para em seguida fazer sua aplicação, como temos o exemplo na figura abaixo.

Figura 38 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D8}


8. a) a = 120°, b = 60°, c = 70°, d = 50° e e = 50°.

8. Nas figuras a seguir, r // s // t. Determine as medidas desconhecidas indicadas.

a)

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 181).

Para a caracterização da tecnologia é necessário compreender, de acordo com Papa Neto (2017), as definições de ângulos colaterais, ângulos alternos e ângulos correspondes. Sendo a teoria, nesse caso, associada às conexões entre geometria e grandezas e medidas.

Para o próximo tipo de tarefa, a T_V, percebemos que os ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal podem ser observados através de sua região, como também da classificação dos ângulos que são formados por essas retas.

É válido ressaltar que quando falamos de ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal, as retas nas quais nos referimos podem ser paralelas ou não. Por isso dividimos este tipo em dois subtipos de tarefa, que seguem na tabela abaixo.

Tabela 8 – Distribuição das tarefas por subtipos referentes a T_V presentes no livro didático do 7º ano

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	T_{V1} – Identificar a posição de ângulos nas diferentes regiões formadas por duas retas cortadas por uma transversal	18
	T_{V2} – Estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e ângulos alternos e colaterais	9
Total		27

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com relação ao subtipo T_{V1}, temos que identificar a posição dos ângulos nas diferentes regiões formadas por duas retas cortadas por uma transversal, como expresso pelo quadro a seguir.

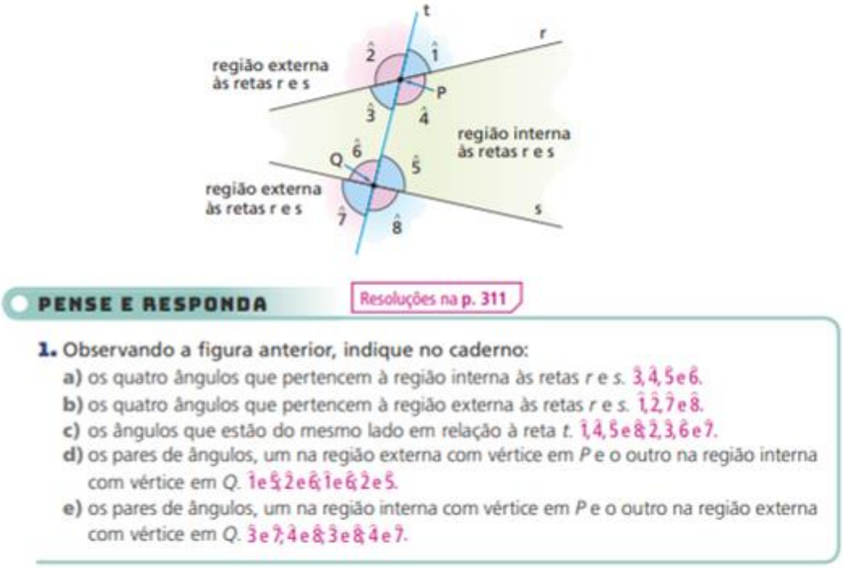
Quadro 24 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{V1}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{V1} – Identificar a posição de ângulos nas diferentes regiões formadas por duas retas cortadas por uma transversal	Diferenciar os ângulos que correspondem às regiões internas e externas a duas retas cortadas por uma transversal, assim como diferenciar os ângulos que estão à direita ou à esquerda dela. Em seguida, identificar ângulos nas suas regiões internas e/ou externas mediante a um ponto dado	Definição de retas paralelas cortadas por uma transversal, definição de ângulo como região Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para a técnica utilizada no subtipo de tarefa T_{V1}, é preciso perceber se o ângulo em questão está na região interna ou externa, ou seja, localizar os ângulos internos e os ângulos internos na região dada.

Figura 39 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{V1}



1. Observando a figura anterior, indique no caderno:

a) os quatro ângulos que pertencem à região interna às retas *r* e *s*. $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{6}$.
b) os quatro ângulos que pertencem à região externa às retas *r* e *s*. $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$.
c) os ângulos que estão do mesmo lado em relação à reta *t*. $\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{8}$; $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$ e $\hat{7}$.
d) os pares de ângulos, um na região externa com vértice em *P* e o outro na região interna com vértice em *Q*. $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{1}$ e $\hat{6}$; $\hat{2}$ e $\hat{5}$.
e) os pares de ângulos, um na região interna com vértice em *P* e o outro na região externa com vértice em *Q*. $\hat{3}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$; $\hat{3}$ e $\hat{8}$; $\hat{4}$ e $\hat{7}$.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 176).

O conjunto de tarefas acima trabalha ângulos internos e externos através das regiões internas e externas, como justifica Papa Neto (2017). Com relação a teoria que dá embasamento, tem-se a geometria.

Para concluir o 7º ano, temos o último subtipo de tarefa, a T_{V2}, que tem o intuito de estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal por meio do uso de software.

Quadro 25 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{V2}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{V2} – Estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de ângulos alternos e colaterais	Construir por meio do software retas paralelas cortadas por uma transversal. Em seguida, marcar e medir ângulos alternos internos e externos, assim como os ângulos colaterais internos e externos. Em seguida, verificar se as medidas das aberturas dos ângulos são congruentes. Depois, deve-se mover a reta transversal e verificar a congruência dos ângulos. Por fim, deve se alterar as retas paralelas para verificar se os ângulos ainda são congruentes	Congruência de ângulos, alternos e colaterais, por meio de retas paralelas cortadas por uma transversal Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação a técnica desenvolvida para o subtipo de tarefa T_{V2}, temos a construção através de um software para verificar características dos ângulos alternos e colaterais. Sendo assim, podemos observar esse contexto na figura a seguir.

Figura 40 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{V2}

PENSE E RESPONDA Resoluções na p. 311

Vamos fazer investigações utilizando o GeoGebra. Depois, responda às questões no caderno.

1. Com a ferramenta *Reta* trace uma reta qualquer e com a ferramenta *Reta Paralela* trace uma reta paralela à primeira. Em seguida, usando novamente a ferramenta *Reta* trace uma reta transversal às duas primeiras.

Por último, com a ferramenta *Ângulo* marque e meça os pares de ângulos alternos internos.

a) Comparando as medidas dos ângulos alternos internos, o que é possível verificar? **1. a)** Os ângulos alternos internos são congruentes.

b) Faça a mesma investigação para os ângulos alternos externos. O que é possível observar? Os ângulos alternos externos são congruentes.

c) Mova a reta transversal de tal forma que os ângulos determinados se alterem. As conclusões anteriormente observadas se mantiveram? **1. c)** Sim, os ângulos alternos internos continuam congruentes, assim como os alternos externos.

2. Faça o mesmo experimento, mas dessa vez as duas primeiras retas construídas não devem ser paralelas. O que observamos na atividade anterior pode ser verificado nesta? Não. Quando as retas não são paralelas, os ângulos alternos internos não são congruentes, assim como os alternos externos também não o são.

FOTOS: GEOGEBRA 2018

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 176).

Neste sentido, a tecnologia que apoia esse contexto é a classificação dos ângulos determinados por retas cortadas por uma transversal, como afirma Papa Neto (2017), com a teoria abordada sendo a geometria.

Como um ponto interessante na análise da organização matemática do livro do 7º ano, é perceptível que não precisamos fazer inferências no que diz respeito às suas técnicas, uma vez que o livro para este ano apresenta de forma explícita as técnicas a serem utilizadas.

Assim, justificamos a teoria mencionada pela geometria e pelas grandezas e medidas de maneira isolada no ano anterior, agora percebemos que neste ano ocorre uma interligação com os diferentes campos da matemática, inclusive o da geometria e das grandezas que se relacionam entre si.

Os subtipos T_{I4}, T_{D7} e T_{D8} estarão associados à geometria e às grandezas e medidas de acordo com Carvalho e Lima (2010), que abordam as grandezas geométricas como alguns dos temas desse contexto que se sobressaem como centrais. É o caso, também, do processo de medição, que abrange a escolha das unidades, o conhecimento das relações entre elas, além do emprego dos instrumentos de medição. E relacionado a este fato os autores reafirmam que questões como essas não seriam o foco da atenção se observadas através de um olhar puramente geométrico (Carvalho; Lima, 2010).

Já para as relações entre geometria, grandezas e medidas e álgebra, percebemos que atrelado ao fato das grandezas geométricas ainda se faz necessário o olhar expressivo para a álgebra. Como é proposto na BNCC (Brasil, 2018), há uma finalidade com o desenvolvimento do pensamento algébrico[9], por este ser essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

5.1.3 Análise da organização matemática do livro didático do 8º ano do ensino fundamental

A organização matemática do livro didático do 8º ano do ensino fundamental em relação ao saber ângulo está localizada na unidade três, com o título de Ângulos e Triângulos, e tem ângulo como objeto do saber no capítulo um, situados da página 64 até a 69.

Em relação ao formato desta obra, assim como nos outros exemplares anteriores, a abertura da unidade é introduzida por uma imagem, que está relacionada ao tema que será estudado. Também é acompanhada por algumas questões que contextualizam a discussão inicial.

Em seguida, vem o capítulo sobre ângulos, que além disso, assim como no 7° ano, apresenta as seções que abordam as atividades, fórum, tecnologias, atualidades em foco e retomando o que aprendeu.

Para a realização do mapeamento das tarefas no livro didático foi observado apenas o capítulo correspondente ao objeto do saber ângulo. E em relação a quantidade de tarefas observadas foram identificadas 32 tarefas. Durante a análise, identificamos dois tipos de tarefas, nos quais apresentamos na tabela a seguir:

Tabela 9 – Distribuição dos tipos de tarefas presentes no livro didático do 8º ano do ensino fundamental

Tipos de tarefas	Quantidade	Percentual
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	31	97%
T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	1	2%
Total	32	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

[9] Segundo Almeida e Santos (2020, p. 1), o pensamento algébrico é composto pelas seguintes características: “estabelecer relações”; “modelar”; “generalizar”; “operar com o desconhecido”; e “construir significado”.

Na tabela anterior, podemos perceber que se compararmos ao ano anterior temos uma queda brusca na quantidade total de tarefas referentes ao saber ângulo, ou seja, o livro didático do 8º ano se mostra com um número de tarefas bastante inferior. Assim, ao analisarmos o tipo de tarefa **T_D – Determinar a medida da abertura de ângulos de uma figura ou região**, constatamos que alguns subtipos de tarefas que foram identificados no ano anterior aparecem novamente, como mostra a tabela abaixo.

Tabela 10 – Distribuição das tarefas por subtipos referentes a T_D presentes no livro didático do 8º ano

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_D – Determinar a medida da abertura de ângulos de uma figura ou região	T_{D4} – Determinar a medida da abertura do ângulo através do seu complemento e/ou suplemento	17
	T_{D5} –Determinar a medida de ângulos por meio de ângulos opostos pelo vértice	5
	T_{D6} –Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	9
Total		31

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Então, para o primeiro subtipo de tarefa do 8° ano, retornarmos ao subtipo **T_{D4} – Determinar a medida da abertura do ângulo através do seu complemento e/ou do seu suplemento**, que como mencionando anteriormente, é descrito como o modelo a seguir.

Quadro 26 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D4}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D4} – Determinar a medida da abertura do ângulo através do seu complemento e/ou do seu suplemento	Localizar o ângulo complementar e/ou suplementar e determinar a medida do ângulo da seguinte forma: Se a medida a ser determinada for um ângulo complementar, a medida de seu complemento será 90° - x.; se a medida a ser determinada for um ângulo suplementar, a medida de seu suplemento será 180° - x	Ângulos complementares, ângulos suplementares Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Percebemos que este subtipo aborda tarefas como já mencionadas no ano anterior, na qual a técnica a tecnologia e a teoria se reafirmam.

Figura 41 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D4}

2. Determine a medida do complemento de um ângulo de:

a) 66° 24° **c)** 22° 68°

b) 74° 16° **d)** 47° 43°

3. Determine a medida do suplemento de um ângulo de:

a) 78° 102° **c)** 135° 45°

b) 67° 113° **d)** 139° 41°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 69).

Desse modo, percebemos um resgate no subtipo de tarefa ofertada no ano anterior, assim como na técnica, tecnologia e teoria. Logo, traçando um comparativo, percebemos que a mudança está na quantidade que passa de 9 (nove) no 7º ano e avança para 17 (dezessete), sendo este subtipo mais explorado no 8º ano.

Outro subtipo que se repete é o **T_{D5} - Determinar a medida da abertura de ângulos por meio de ângulos opostos pelo vértice**, como pode ser observado no quadro a seguir.

Quadro 27 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D5}

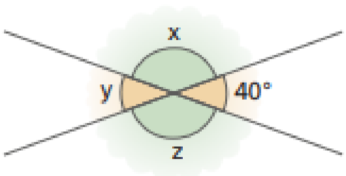
Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D5} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de ângulos opostos pelo vértice	Identificar a medida do ângulo dado, igualar essa medida a medida do ângulo que a ele é oposto pelo vértice	Ângulos opostos pelo vértice Geometria, Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para este subtipo, assim como o anterior, sua organização se mantem a mesma e de forma idêntica, os ângulos opostos pelo vértice estão ligados ao complemento ou suplemento de um ângulo.

Figura 42 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D5}

10. Na figura abaixo, calcule as medidas *x*, *y* e *z* indicadas.



x = 140°, y = 40° e z = 140°.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 69).

E em relação ao comparativo com o ano anterior percebemos que a quantidade de tarefas varia passando de 14 (catorze) no sétimo ano para 5 (cinco) no 8º ano com o intuito de relembrar como se comportam os ângulos opostos pelo vértice, sendo este subtipo mais trabalhado no ano anterior.

Em seguida, outro subtipo que aparece novamente é o **T_{D6} – Determinar a medida da abertura de ângulos por meio de processos algébricos**, que será apresentado a seguir.

Quadro 28 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D6}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	Identificar a classificação de ângulo solicitada na tarefa, que poderá ser ângulos opostos pelo vértice, complementares e suplementares. Em seguida, aplicar a propriedade e realizar as operações algébricas correspondentes a cada caso. Feito isso, determinar o valor numérico das incógnitas. E, por fim, quando solicitado, determinar a medida da abertura do ângulo e/ou reconhecer o valor da incógnita	Propriedades algébricas tais como: expressões algébricas, equações, igualdade, ou através da congruência. Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para este subtipo, percebemos que a técnica se reduz no que corresponde a classificação de ângulos, que para este ano escolar só explora ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e suplementares, como podemos notar no exemplo abaixo.

Figura 43 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D6}

1. (UFMA) Dois ângulos opostos pelo vértice medem 3x + 10° e x + 50°. Um deles mede:

a) 20° **c)** 30° **e)** 50°

b) 70° **d)** 80°

Alternativa *b*.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 92).

Portanto, é valido observar que a tecnologia e teoria se mantém e em comparação com a quantidade de tarefas deste subtipo com o ano anterior, temos que no 7º ano foram 33 (trinta e três) tarefas passando para 9 (nove) no 8º ano. Essa diferença pode se dar em decorrência de no oitavo ano o livro só explorar tarefas que mencionem a classificação de ângulos opostos pelo vértice e o complemento e suplemento de um ângulo.

Para o tipo de tarefa **T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal**, identificamos um novo subtipo como mostra a tabela a seguir.

Tabela 11 – Distribuição dos subtipos da tarefa T_V do capítulo do livro didático do 8º ano destinado ao saber ângulo

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	T_{V3} – Validar proposições de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de processos algébricos	1
Total		1

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação ao subtipo **T_{V3} - Validar proposições de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de processos algébricos**, estruturamos a praxeologia da seguinte maneira:

Quadro 29 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{V3}

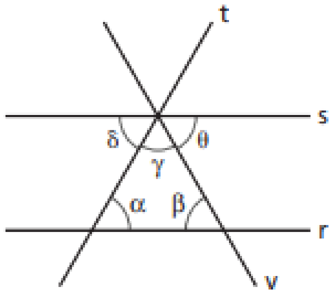
Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{V3} –Validar proposições de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de processos algébricos	Analisar a maneira como os ângulos estão dispostos que podem ser ângulos correspondentes, alternos e colaterais. Em seguida, verificar se as proposições são verdadeiras ou falsas a partir das relações entre os ângulos formados por essas retas	Propriedade de retas paralelas cortadas por uma transversal, através dos ângulos correspondentes, alternos e colaterais. Geometria

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com relação a sua técnica, percebemos que tem o objetivo de explorar as proposições dadas, no sentido de verificar a sentença verdadeira, e com isso analisar de maneira geral todas as questões propostas, baseando-se nas definições e propriedades dos ângulos correspondentes, alternos e colaterais, como observa-se na figura seguinte.

Figura 44 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{V3}

2. (Saresp-SP) Na figura abaixo as retas paralelas *r* e *s* são cortadas pelas transversais *t* e *v*.



É correto afirmar que:

a) $\alpha + \beta = \delta + \theta$ **c)** $\beta + \gamma + \theta = 180°$

b) $\gamma + \beta = 90°$ **d)** $\gamma + \theta = \beta$

Alternativa *a*.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 92).

Assim, a teoria que dá suporte é a geometria, com o intuito de explicar as questões voltadas às retas paralelas cortadas por uma transversal e, em seguida, analisar os ângulos que podem ser formados que por sua vez são encontrados na figura em questão.

5.1.4 Análise da organização matemática do livro didático do 9º ano do ensino fundamental

O livro didático do 9º ano apresenta na unidade quatro relações entre ângulos, especificamente no capítulo um, que se localiza da página 118 até a 126. Uma ressalva importante a ser feita sobre esta unidade é que ela contém dois capítulos. O primeiro aborda ângulos determinados por retas transversais e o segundo explora a circunferência. Portanto, optamos em analisar apenas o primeiro, que tem ângulo como objeto do saber, pois o segundo capítulo não está associado estritamente ao saber em estudo.

O capítulo dois em questão também se volta às posições relativas de uma reta e uma circunferência e ao seu arco. Contudo, compreendemos a importância do ângulo central e do ângulo inscrito que se relacionam com a circunferência neste estudo, porém, estão associados a outra figura geométrica que agora passa a ser visto como uma ferramenta da própria circunferência. Este mesmo posicionamento foi seguido quando trabalhamos com os polígonos, em especial os triângulos e quadriláteros.

O formato desta obra se mantém de forma idêntica como nos outros exemplares dos anos anteriores, trazendo na abertura da unidade uma imagem que está relacionada ao tema que será estudado, no qual é acompanhada por algumas questões que irão contextualizar a discussão inicial.

No primeiro capítulo sobre ângulos, que se intitula **ângulos determinados por retas transversais**, vale ressaltar que assim como nos anos anteriores, o livro apresenta as seções que abordam as atividades, fórum, tecnologias, atualidades em foco e retomando o que aprendeu.

O mapeamento das tarefas no livro foi realizado observando o objeto do saber ângulo. Por meio dele identificamos 25 tarefas. Durante a análise constatamos que as tarefas pertenciam a dois tipos, nos quais apresentamos na tabela a seguir:

Tabela 12 – Distribuição das tarefas por tipos presentes no livro didático do 9º ano do ensino fundamental

Tipos de tarefas	Quantidade	Percentual
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	22	84,6%
T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida da abertura	4	15,4%
Total	26	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ao analisarmos o tipo de tarefa **T_D – Determinar a medida da abertura de ângulos de uma figura ou região**, retoma-se o subtipo também explorado no sétimo e oitavo ano, como mostra o quadro a seguir. Consideramos essa retomada importante para o processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que torna o currículo em movimento.

Tabela 13 – Distribuição dos subtipos da tarefa T_D do capítulo do livro didático do 9º ano destinado ao saber ângulo

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	22
Total		22

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para o primeiro subtipo de tarefa do 9° ano, voltamos ao subtipo **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**, que é descrito como o modelo abaixo.

Quadro 30 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{D6}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	Identificar a classificação de ângulo que será utilizada na tarefa, que poderá ser ângulos opostos pelo vértice, adjacentes, correspondentes, alternos e/ ou colaterais. Em seguida, aplicar a propriedade correspondente realizando as operações algébricas encontradas em cada caso. Feito isso, determinar o valor numérico das incógnitas. E, por fim, quando solicitado, determinar a medida da abertura do ângulo e/ou reconhecer o valor da incógnita	Propriedade de retas, propriedades algébricas tais como: expressões algébricas, equações, igualdade ou através da congruência. Grandezas e medidas, geometria e álgebra

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para o subtipo acima, percebemos que de acordo com a técnica mencionada, temos que realizar o processo algébrico, que por sua vez está associado a encontrar medida da abertura do ângulo. Neste caso, irá depender de qual classificação a tarefa irá adotar para fazer uso da propriedade destacada, que na figura seguinte mostra que são os ângulos opostos pelo vértice, no qual é retomado com o intuito de resgatar as expressões algébricas. Essa proposta é realizada pelos autores do livro visando fazer a associação ao conteúdo trabalhado no capítulo anterior do LD.

Figura 45 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{D6}

2. Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x - 75°$ e $x + 15°$. Determine o valor de x. 45°

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 122).

Em relação a esse subtipo, notamos que perpassa o 7°, 8° e 9° anos, no qual sua quantidade é respectivamente 42 tarefas para o 7° ano, 9 tarefas para o 8° ano e 22 tarefas para o 9° ano. Com isso, o resgate deste subtipo estará associado às classificações abordadas no determinado ano escolar, que por sua vez estarão relacionadas às habilidades referentes ao saber ângulo.

Por isso, a sua tecnologia também se volta às propriedades algébricas como as expressões algébricas, equações igualdade e congruência. Já a sua teoria se correlaciona com as grandezas e medidas, geometria e álgebra.

O próximo tipo de tarefa é **T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida da abertura**, que tem o intuito de reconhecer a classificação do ângulo que determinada figura se refere, como observa-se na tabela a seguir.

Tabela 14 – Distribuição dos subtipos da tarefa T_{CL} do capítulo do livro didático do 9º ano destinado ao saber ângulo

Tipos de tarefas	Subtipos	Quantidade
T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida de abertura	T_{CL1} – Classificar ângulos conforme a medida de sua abertura	3
	T_{CL2} – Classificar ângulos conforme a soma das medidas de sua abertura	1
Total		4

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com relação ao primeiro subtipo da tabela acima, temos que classificar os ângulos conforme a medida de sua abertura, como retrata o quadro abaixo

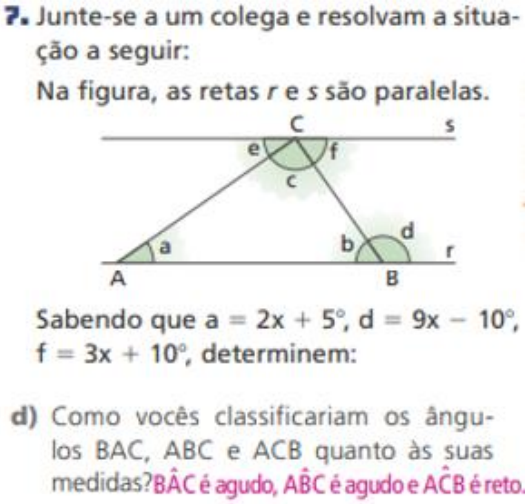
Quadro 31 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{CL1}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{CL1} – Classificar ângulos conforme a medida de sua abertura	Verificar se a medida (x) da abertura do ângulo pertence aos intervalos: 0º < x < 90º; x > 90º, ou se x = 90º. Se x pertence ao intervalo 0º < x < 90º, é agudo; se x = 90º, é reto; se x pertence ao intervalo x > 90º, é obtuso	Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso Geometria, Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Dessa forma, a técnica se volta a verificar entre qual medida o ângulo mencionado se encontra para poder observar se sua classificação está entre reto, agudo ou obtuso, como segue a figura abaixo.

Figura 46 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{CL1}



7. Junte-se a um colega e resolvam a situação a seguir:

Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas.

Sabendo que a = 2x + 5°, d = 9x − 10°, f = 3x + 10°, determinem:

d) Como vocês classificariam os ângulos BAC, ABC e ACB quanto às suas medidas? $B\hat{A}C$ é agudo, $A\hat{B}C$ é agudo e $A\hat{C}B$ é reto.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 126).

Com o intuito de explicar a tecnologia, consideramos ângulo reto como aquele cuja medida da abertura é 90º, ângulo agudo como o que tem a medida da abertura menor que 90º e ângulo obtuso é um ângulo com medida da abertura maior que 90º. Com relação a teoria, esta está relacionada à geometria e às grandezas e medidas.

Para finalizar o último subtipo de tarefa, temos **T_{CL2} – Classificar ângulos conforme a soma de suas medidas**, que tem como intuito observar os ângulos e classificá-los de acordo com a sua medida, como mostra a tabela abaixo.

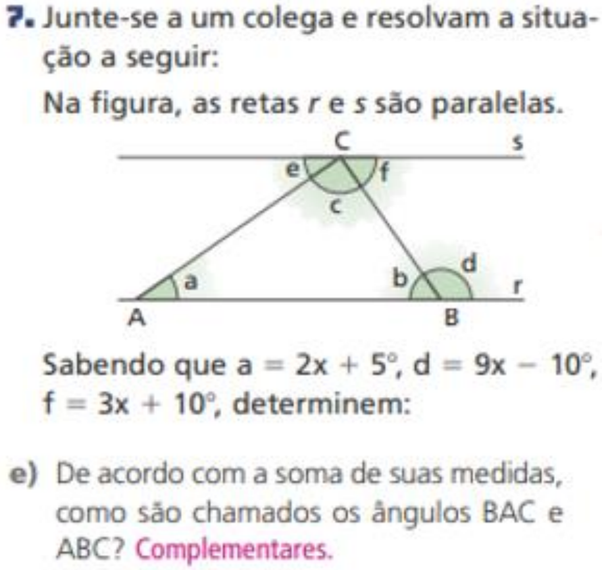
Quadro 32 – Praxeologia matemática do subtipo de tarefa T_{CL2}

Subtipo de tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
T_{CL2} – Classificar ângulos conforme a soma das medidas de suas medidas	Identificar os ângulos solicitados. Em seguida, observar as medidas dos ângulos e classificar de acordo com a soma das suas medidas como ângulos complementares e/ou suplementares	Ângulos complementares e ângulos suplementares Grandezas e medidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para a técnica utilizada neste subtipo, é preciso fazer a identificação do ângulo em questão, para em seguida, após a soma das medidas, poder classificar em ângulos complementares ou suplementares de acordo com a figura abaixo.

Figura 47 – Extrato do livro que aborda uma tarefa do subtipo T_{CL2}


7. Junte-se a um colega e resolvam a situação a seguir:

Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas.

Sabendo que a = 2x + 5°, d = 9x − 10°, f = 3x + 10°, determinem:

e) De acordo com a soma de suas medidas, como são chamados os ângulos BAC e ABC? Complementares.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 126).

Por fim, a tecnologia que sustenta são os ângulos complementares que afirma que dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90º e os ângulos suplementares quando a soma das medidas é igual a 180°. Com essas considerações percebemos que a teoria se apoia nas grandezas e medidas.

5.1.5 Síntese da análise da praxeologia matemática na coleção de livros

Para sintetizar toda esta análise da organização matemática, construímos uma tabela sobre o mapeamento geral com todos os tipos de tarefas e subtipos encontrados na coleção e suas respectivas quantidades.

Tabela 15 – Distribuição de tarefas por tipos e subtipos encontrados na coleção analisada

Tipos	Subtipos	Quant.	Total	Percen.
T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas	T_{R1} – Classificar ângulos conforme a medida de sua abertura	3	7	3,1%
	T_{R2} – Classificar ângulos conforme a soma das medidas de sua abertura	2		
	T_{R3} – Determinar a quantidade de giros completos de um objeto em uma situação cotidiana	1		
	T_{R4} – Descrever um percurso realizado por um objeto utilizando comandos	1		
T_I – Identificar ângulos em figuras	T_{I1} – Nomear ângulos presentes em figuras	3	15	6,6%
	T_{I2} – Quantificar ângulos presentes em figuras	1		
	T_{I3} – Identificar elementos de um ângulo	1		

	T_{I4} – Associar um ângulo à medida da sua abertura em graus	10		
T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	T_{D1} – Determinar a medida da abertura do ângulo através de elementos da figura ou região	1	172	76,1%
	T_{D2} – Determinar por meio da comparação de ângulos a medida de sua abertura	1		
	T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor	5		
	T_{D4} – Determinar a medida de abertura do ângulo através do seu comportamento e/ou suplemento	26		
	T_{D5} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de ângulos opostos pelo vértice	19		
	T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos	73		
	T_{D7} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico	23		
	T_{D8} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de ângulos alternos, colaterais e correspondentes	24		
T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	T_{V1} – Identificar a posição de ângulos nas diferentes regiões formadas por duas retas cortadas por uma transversal	18	28	12,4%
	T_{V2} – Estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e ângulos alternos e colaterais	9		
	T_{V3} – Validar proposições de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de processos algébricos	1		
T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida de abertura	T_{CL1} – Classificar ângulos conforme a medida de sua abertura	3	4	1,8%
	T_{CL2} – Classificar ângulos conforme a soma das medidas de sua abertura	1		
Total			226	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Dentre todos os tipos e subtipos encontrados, percebemos uma maior quantidade para o tipo de tarefa que visa **determinar a medida do ângulo de uma figura ou região**, com isso, podemos perceber uma priorização por parte dos autores da coleção em explorar tarefas dessa natureza.

Essa priorização poderá fazer com que os estudantes e professores não explorem com tanto afinco os outros tipos de tarefas, que também são importantes para o processo de ensino e aprendizagem. Logo, neste tipo T_D foram encontrados oito subtipos de tarefa que no somatório final de toda a coleção ocupa um lugar de representatividade de 76% em relação aos demais.

Esses resultados apontam para um enorme protagonismo referente ao tipo **T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região**. Como podemos notar na tabela seguinte.

Tabela 16 – Tipo de tarefa de maior predominância em cada ano

Ano	Tipo de tarefas	Tipo predo.	Quant. do tipo	Total p/ ano	Perc. ano
6º	T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	7	14	50%
7º	T_I – Identificar ângulos em figuras T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	112	154	72,7%
8º	T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	31	32	97%
9º	T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida da abertura	T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região	22	26	84,6%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Logo, podemos perceber que os outros tipos de tarefas aparecem como coadjuvantes, mediante tamanha representatividade do tipo citado, o que fica ainda mais evidente se observarmos através de cada ano representado no livro didático.

Então, por mais que o objeto ângulo seja quase sempre associado ao ensino da geometria, percebemos que através das tarefas mencionadas nesta coleção que sua ligação com as grandezas e medidas se propaga para além do 6º ano, com isso é possível notar que os autores da coleção avançam na proposta do trabalho com ângulo enquanto uma grandeza geométrica. Logo, conforme orienta a BNCC para o ensino de ângulos, a proposta precisa ser ampliada para que em todo o decorrer dos anos finais o saber ângulo como uma grandeza geométrica seja contemplado e abordado nas unidades temáticas de geometria e grandezas e medidas.

Portanto, a partir das tabelas exploradas é perceptível identificarmos que o subtipo de tarefa que está em mais evidência nesta coleção é o T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos.

Uma observação importante é que este subtipo aparece no 7º, 8º e 9º ano, que são anos finais do ensino fundamental. Isso acontece devido a proposta do livro alinhado com o currículo, ou seja, a BNCC, que neste caso resgata e associa ângulos ao conteúdo da álgebra, por exemplo, através das expressões algébricas.

6.2 ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção, iremos retomar o que foi proposto pelas categorias e critérios de análises da praxeologia didática, através dos momentos de estudo proposto por Chevallard (1999) e adaptados por Santos (2015), Estes, por sua vez, configuram-se como: o primeiro encontro, exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica, constituição do ambiente tecnológico-teórico, trabalho da técnica, institucionalização e avaliação. Um destaque importante é que esses momentos não acontecem necessariamente nesta ordem, então nossa análise buscou localizar de que forma eles aparecem na abordagem do saber ângulos nos livros destinados ao professor.

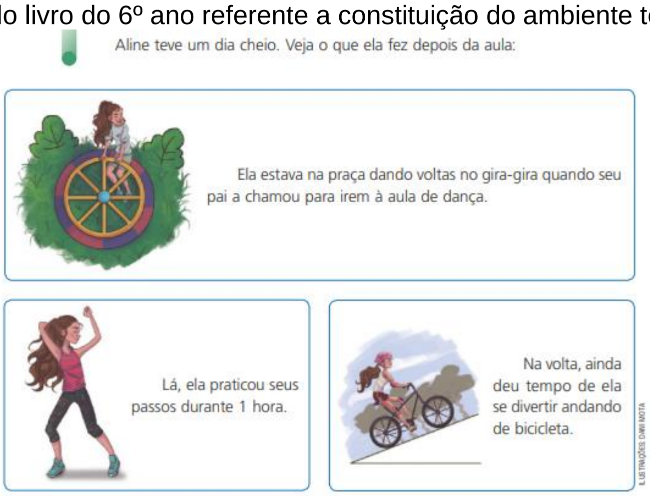
Para tanto, dividimos esse subtópico em quatro etapas, cada uma representada por um ano escolar da coleção.

6.2.1 Análise da organização didática do livro didático do 6º ano do ensino fundamental

Em relação ao livro do 6° ano, o saber ângulo é apresentado no início da unidade sete e está presente em dois capítulos, das páginas 200 à 207, sendo assim, se inicia através de uma situação do cotidiano que retrata por meio de um mapa que marca três lugares e o estudante precisa responder questões de ordem pessoal. Para isso, deve usar alguns comandos como: gire 45° à direita ou à esquerda, caminhe por um quarteirão e gire 90° à direita ou à esquerda, sendo assim, é preciso fazer o percurso até chegar à localização desejada. Para este contexto, percebemos que o momento de estudo é descrito pelo primeiro encontro.

Logo em seguida, o livro faz a introdução do capítulo um, referente ao saber ângulo a partir de três ideias: giro, abertura e inclinação. Assim, é perceptível que o autor apresenta de maneira coerente as concepções com as pesquisas de Balacheff. Porém, a abordagem proposta ainda aparece de maneira bastante superficial. Com isso, o livro propõe um personagem em três situações distintas, na qual percebemos a ligação do ambiente tecnológico-teórico com a exploração do tipo de tarefa do tipo, no caso com o subtipo T_{R1} na primeira figura que mostra uma menina brincando no gira-gira com o objetivo de explorar a ideia de giro.

Figura 48 – Extrato do livro do 6º ano referente a constituição do ambiente tecnológico-teórico



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 202).

Em seguida, a próxima situação relatada é referente a aula de dança que associa o movimento dos braços e pernas, com o intuito de trabalhar a ideia de abertura. E na última situação, mostra a personagem subindo uma ladeira de bicicleta para se referir a ideia de inclinação, conforme indica a figura anterior.

O momento que caracteriza toda essa contextualização, ainda que de forma superficial, é a constituição do ambiente tecnológico – teórico, uma vez que o interesse é justificar como acontece a associação das ideias de giro, abertura e inclinação correspondentes a ângulo para as determinadas situações vivenciadas pela personagem Aline.

Continuando no momento de estudo anterior, percebemos que em seguida o livro traz na seção “pense e responda” o encontro do saber ângulo com uma tarefa pertencente ao subtipo de tarefa **T_{R1} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos com a ideia de giro, abertura e inclinação**, na qual os estudantes precisam relacionar situações do cotidiano com o que foi trabalhado por meio da conexão entre a constituição do ambiente tecnológico-teórico e a exploração do tipo de tarefa, ou seja, referentes as ideias de giro, abertura e inclinação que estão relacionadas ao ângulo.

Porém, mesmo o momento estando relacionado à constituição do ambiente tecnológico-teórico e fazendo a associação ao subtipo de tarefa, em seguida, o que se percebe é uma necessidade de inferências nossas, uma vez que ao expor as situações o livro não deixa evidente qual técnica deverá ser aplicada para a resolução do subtipo de tarefa em questão. Observe o exemplo a seguir:

Figura 49 – Extrato do livro do 6º ano referente a exploração do tipo de tarefa

PENSE E RESPONDA Resoluções na **p. 317**

1. No caderno, copie as frases da coluna da esquerda, completando-as com as palavras da coluna da direita. a-B; b-A; c-C.

a) Em uma volta completa no brinquedo, podemos ver...	**A)** ... uma abertura.
b) Nos braços e pernas, podemos ver...	**B)** ... um giro.
c) Em uma subida, podemos ver...	**C)** ... uma inclinação.

Um giro, uma abertura e uma inclinação nos dão ideias de **ângulo**.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 202).

Em relação ao capítulo dois, o saber ângulo é trabalhado de maneira direta, ou seja, já apresenta a parte matemática sem fazer associação com situações do cotidiano, por exemplo. Nesse sentido, este capítulo começa com uma figura de um plano dividido por duas semirretas e com isso aborda a questão de região convexa e não convexa. Em seguida menciona a definição de ângulo como região, que é outra ideia associada, feito isso destaca a notação, o vértice e as semirretas que corresponde aos lados. Então, após abordar a definição relacionada a região, o autor poderia retomar as ideias iniciais do saber ângulo, porém, como não faz essa menção a partir desse momento, apenas considera ângulo enquanto região.

Figura 50 – Extrato do livro do 6º ano referente a constituição do ambiente tecnológico-teórico

CAPÍTULO 2 O ÂNGULO

Considere agora a figura de um plano, dividido em duas regiões por semirretas como estas.

Na região azul, dois pontos quaisquer sempre determinam um segmento contido nessa região; por isso, a região azul é chamada de **região convexa**.

Observe que na região vermelha é possível representar dois pontos que são extremidades de um segmento que não está totalmente contido na região vermelha; por isso, essa região é chamada de região **não convexa**.

Ângulo é toda região, convexa ou não, do plano determinada por duas semirretas de mesma origem.

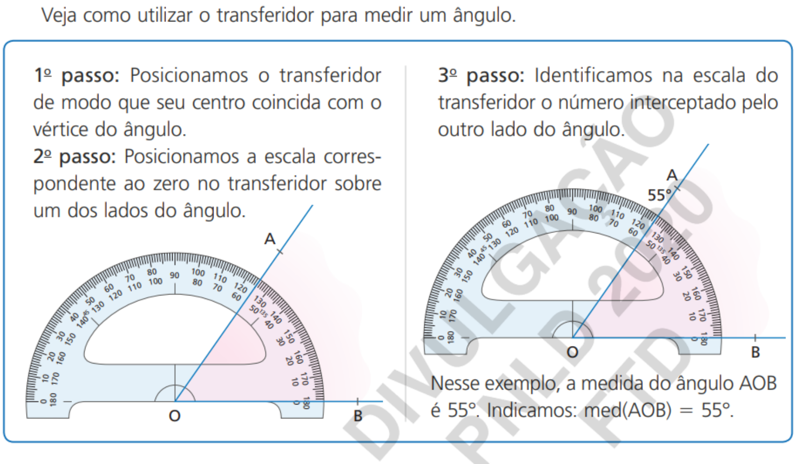
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 203).

Com base na definição exposta na figura anterior, podemos notar que está associada com a concepção de ângulo enquanto região proposta por Balacheff, que é mencionada no capítulo de ângulos. Em seguida, na continuação do capítulo, a temática é abordada através da medida da abertura de ângulo, no qual os autores discorrem sobre o viés da história da matemática para explorar a questão do grau, que é a unidade padrão de medida da abertura de um ângulo.

A argumentação apresentada sobre o saber ângulo no livro didático pode ser associada a dois momentos de estudo, sendo eles: o momento de institucionalização, que tem o objetivo de oficializar e explicitar os objetos que irão constituir a organização matemática e, o outro, o da constituição do ambiente tecnológico-teórico, pois é realizado através da construção da justificativa, uma vez que no manual do professor é informado e visível o interesse e recomendação de explicar e justificar a construção do objeto ângulo. Vale ressaltar que esses momentos acontecem de forma simultânea durante a abordagem do saber.

Posteriormente, é discutido sobre a utilização do transferidor para medir um ângulo. Neste sentido, é realizado a elaboração da técnica de medir com o uso do instrumento, com o livro didático realizando todo o passo a passo para encontrar a medida da maneira correta. Esta técnica se relaciona ao subtipo **T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor**, como podemos ver a seguir.

Figura 51 – Extrato do livro do 6º ano referente a elaboração da técnica do subtipo T_{D3}



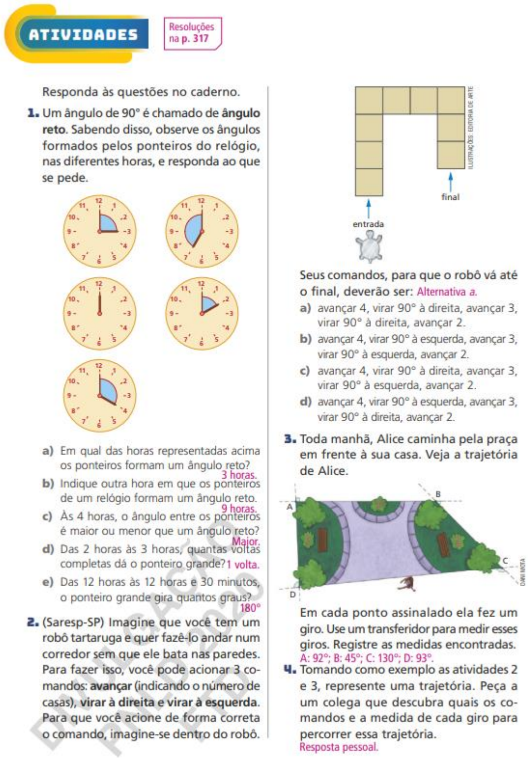
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 205).

Após a explicitação de como medir a abertura de um ângulo através do uso do transferidor, o livro didático apresenta uma seção de tarefas que tem o intuito de explorar tudo o que foi vivenciado. É nessa parte em que é apresentado o tipo de tarefa **T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas mediante tarefas** pertencentes aos subtipos: **T_{R2} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos retos; T_{R3} – Determinar a quantidade de giros completos de um objeto em uma situação cotidiana** e **T_{R4} – Descrever um percurso realizado por um objeto utilizando comandos**.

Nessa seção também é explorado o tipo **T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região**, através de tarefas pertencente aos subtipos: **T_{D1} – Determinar a medida da abertura do ângulo através de elementos da figura ou região**; **T_{D2} – Determinar por meio da comparação de ângulos a medida de sua abertura** e **T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor**.

Deste modo, esse trecho do livro busca verificar o que foi compreendido e coloca em prática os conhecimentos sobre o saber em tela. Nesta parte, o livro também lança a proposta de quatro tarefas, sendo uma delas de cunho pessoal. Vejamos, como mostra a figura a seguir.

Figura 52 – Extrato do livro do 6º ano referente a exploração de tarefas


ATIVIDADES

Resoluções na p. 317

Responda às questões no caderno.

1. Um ângulo de 90° é chamado de **ângulo reto**. Sabendo disso, observe os ângulos formados pelos ponteiros do relógio, nas diferentes horas, e responda ao que se pede.

a) Em qual das horas representadas acima os ponteiros formam um ângulo reto? 3 horas.

b) Indique outra hora em que os ponteiros de um relógio formam um ângulo reto. 9 horas.

c) Às 4 horas, o ângulo entre os ponteiros é maior ou menor que um ângulo reto? Maior.

d) Das 2 horas às 3 horas, quantas voltas completas dá o ponteiro grande? 1 volta.

e) Das 12 horas às 12 horas e 30 minutos, o ponteiro grande gira quantos graus? 180°

2. (Saresp-SP) Imagine que você tem um robô tartaruga e quer fazê-lo andar num corredor sem que ele bata nas paredes. Para fazer isso, você pode acionar 3 comandos: **avançar** (indicando o número de casas), **virar à direita** e **virar à esquerda**. Para que você acione de forma correta o comando, imagine-se dentro do robô.

Seus comandos, para que o robô vá até o final, deverão ser: Alternativa a.

a) avançar 4, virar 90° à direita, avançar 3, virar 90° à direita, avançar 2.

b) avançar 4, virar 90° à esquerda, avançar 3, virar 90° à esquerda, avançar 2.

c) avançar 4, virar 90° à direita, avançar 3, virar 90° à esquerda, avançar 2.

d) avançar 4, virar 90° à esquerda, avançar 3, virar 90° à direita, avançar 2.

3. Toda manhã, Alice caminha pela praça em frente à sua casa. Veja a trajetória de Alice.

Em cada ponto assinalado ela fez um giro. Use um transferidor para medir esses giros. Registre as medidas encontradas. A: 92°; B: 45°; C: 130°; D: 93°.

4. Tomando como exemplo as atividades 2 e 3, represente uma trajetória. Peça a um colega que descubra quais os comandos e a medida de cada giro para percorrer essa trajetória. Resposta pessoal.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 205).

Observando as tarefas acima, na terceira, percebemos que para o estudante realizá-la deve aplicar a técnica mencionada pelos autores do livro, como mostra a figura 51 referente a elaboração da técnica do subtipo T_{D3}. Assim, inferimos que a tarefa foi proposta com o intuito de verificar se a técnica descrita no livro realmente é aplicável.

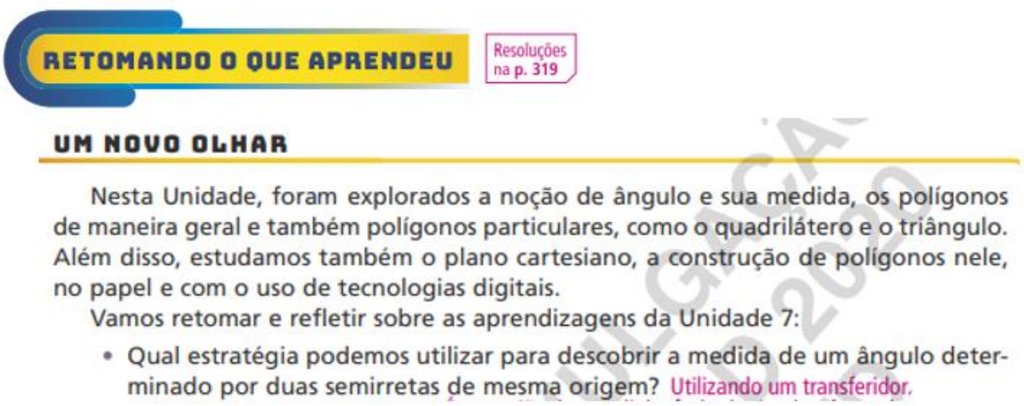
Em algumas tarefas, inclusive, notamos que o momento de constituição do ambiente tecnológico-teórico dá condições para que o estudante possa resolver. Já em outras, como na tarefa mencionada pela questão dois, é observado que sua proposta não se vincula com a constituição do ambiente tecnológico-teórico abordada no livro.

Já na página seguinte do livro didático, é proposta a seção de “fórum” em que os autores exploram a questão do ângulo associado ao campo de visão e com isso abordam alguns elementos como polegada da televisão e altura correta. Sendo assim, é preciso refletir que se apenas com uma forma de atividade esse “fórum” é possível trabalhar toda a habilidade mencionada na BNCC: “(EF06MA26) **Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão**” como proposto no documento curricular (Brasil, 2018, p. 303, **grifo nosso**). Deste modo, a não amplitude do trabalho com a referida habilidade poderá gerar lacunas e dificuldades na aprendizagem dos estudantes.

Ao final da unidade também é proposta a seção de “retomando o que aprendeu”, na qual percebemos um indício da avaliação da aprendizagem, que não consideramos a mesma que compõe os momentos de estudos propostos por Chevallard (1999), pois a avaliação da aprendizagem no contexto do processo avaliativo visa refletir o que foi aprendido sobre o saber, ou seja, não tem a intenção de verificar com o apoio dos elementos da praxeologia. Já o momento de avaliação praxeológica tem o intuito de retomar, criar e avaliar as técnicas, a constituição do ambiente tecnológico-teórico e o resgate da institucionalização.

Assim, referente a avaliação da aprendizagem temos que é trabalhada por meio do subtipo de tarefa **T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor**, que visa trabalhar e verificar a medida de um ângulo por meio do uso do transferidor, como mostra a figura a seguir.

Figura 53 – Extrato do livro do 6º ano referente a avaliação da aprendizagem


RETOMANDO O QUE APRENDEU

Resoluções na p. 319

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, foram explorados a noção de ângulo e sua medida, os polígonos de maneira geral e também polígonos particulares, como o quadrilátero e o triângulo. Além disso, estudamos também o plano cartesiano, a construção de polígonos nele, no papel e com o uso de tecnologias digitais.

Vamos retomar e refletir sobre as aprendizagens da Unidade 7:

- Qual estratégia podemos utilizar para descobrir a medida de um ângulo determinado por duas semirretas de mesma origem? Utilizando um transferidor.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 233).

Como mostra a figura anterior, nesta parte o livro questiona sobre qual estratégia podemos utilizar para descobrir a medida da abertura de um ângulo determinado por duas semirretas de mesma origem. E para finalizar, percebemos que ao decorrer do LD do 6º ano, o momento de trabalho da técnica não é trabalhado no livro didático, porém, percebemos um indício na resolução de umas das tarefas que fica a cargo do estudante e do professor.

Dessa forma, podemos propor como sugestão ao livro didático que o trabalho da técnica e a constituição do ambiente tecnológico-teórico façam menção aos ângulos retos, uma vez que essa descrição é citada no bloco de tarefas e poderia ser retomada neste ano para auxiliar o estudante. Outra questão corresponde ao momento de avaliação que deve ser melhor trabalhado, buscando englobar esses pontos mencionados acima.

6.2.2 Análise da organização didática do livro didático do 7º ano do ensino fundamental

Em relação ao livro didático do 7º ano, o saber ângulo é apresentado na introdução da unidade seis, que trabalha as figuras geométricas planas iniciando pelos ângulos e dando continuidade com os triângulos, polígonos regulares, circunferência e as construções geométricas. O início da unidade é proposto por meio de uma situação envolvendo o relógio do sol, na qual se observa o movimento da luz do sol e o deslocamento da sombra de um corpo que é projetado sobre uma superfície plana.

Neste sentido, o livro utiliza do movimento de rotação para informar que o planeta terra gira 360 graus em 24 horas, logo descreve que um observador na terra vê o sol “se deslocar” 15 graus a cada uma hora.

Após dizer que o sol se desloca 15 graus a cada uma hora é apresentada cinco tarefas pertencentes ao subtipo **T_{D7} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico**, pois há o intuito de que a partir das horas mencionadas encontre-se o deslocamento do sol em graus, utilizando o princípio multiplicativo. Logo, este é o momento do reencontro do saber ângulo a partir do subtipo de tarefa mencionado.

Figura 54 – Extrato do livro do 7º ano referente ao reencontro

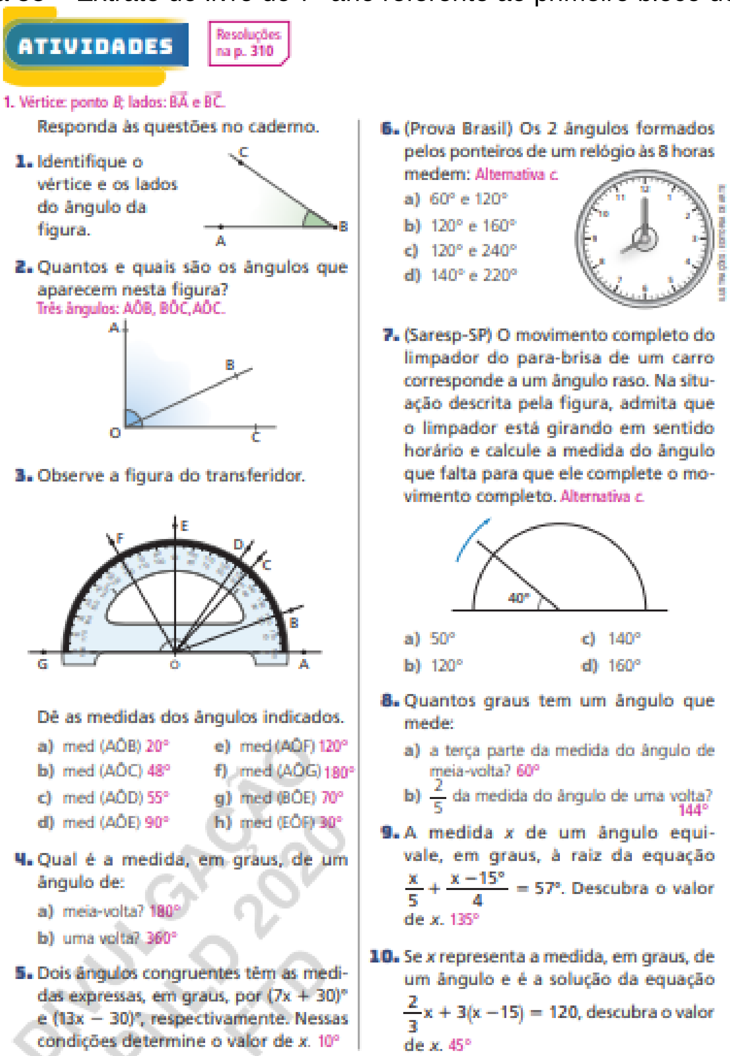
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 164-165).

É válido ressaltar que no 7º ano o saber ângulo é trabalhado nos capítulos um e dois da unidade seis. O primeiro inicia explorando a definição de ângulo enquanto região e à medida de sua abertura, destacando, então, a importância do grau e do uso do transferidor como instrumento de medida.

Na sequência, apresenta a classificação dos ângulos em raso, nulo e de uma volta. Dessa forma, é perceptível que os autores utilizam a noção de giro para justificar a classificação dos ângulos, mas também usa o transferidor para indicar que abertura eles apresentam. Nesse caso, essa classificação passa pelos significados de giro e abertura, que irão se relacionar com os momentos da constituição do ambiente tecnológico-teórico e da institucionalização, que por sua vez são realizados concomitantemente, tal como no livro do 6º ano.

Dando continuidade ao momento citado anteriormente, o LD discute os ângulos congruentes, ângulos consecutivos e ângulos adjacentes e, em seguida, traz um bloco de tarefas pertencentes a dois tipos, sendo o **primeiro T_I – Identificar ângulos em figuras**, pertencentes aos subtipos: **T_{I1} – Nomear ângulos presentes em figuras; T_{I2} – Quantificar ângulos presentes em figuras; T_{I3} – Identificar elementos de um ângulo**; e **T_{I4} – Associar um ângulo a medida da sua abertura em graus**.

Figura 55 – Extrato do livro do 7º ano referente ao primeiro bloco de tarefas



ATIVIDADES Resoluções na p. 310

1. Vértice: ponto B; lados: $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Responda às questões no caderno.

1. Identifique o vértice e os lados do ângulo da figura.

2. Quantos e quais são os ângulos que aparecem nesta figura? Três ângulos: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}C$.

3. Observe a figura do transferidor.

Dê as medidas dos ângulos indicados.

a) med ($A\hat{O}B$) 20°
b) med ($A\hat{O}C$) 48°
c) med ($A\hat{O}D$) 55°
d) med ($A\hat{O}E$) 90°
e) med ($A\hat{O}F$) 120°
f) med ($A\hat{O}G$) 180°
g) med ($B\hat{O}E$) 70°
h) med ($E\hat{O}F$) 30°

4. Qual é a medida, em graus, de um ângulo de:

a) meia-volta? 180°
b) uma volta? 360°

5. Dois ângulos congruentes têm as medidas expressas, em graus, por $(7x + 30)°$ e $(13x - 30)°$, respectivamente. Nessas condições determine o valor de x. 10°

6. (Prova Brasil) Os 2 ângulos formados pelos ponteiros de um relógio às 8 horas medem: Alternativa c

a) 60° e 120°
b) 120° e 160°
c) 120° e 240°
d) 140° e 220°

7. (Saresp-SP) O movimento completo do limpador do para-brisa de um carro corresponde a um ângulo raso. Na situação descrita pela figura, admita que o limpador está girando em sentido horário e calcule a medida do ângulo que falta para que ele complete o movimento completo. Alternativa c.

a) 50°
b) 120°
c) 140°
d) 160°

8. Quantos graus tem um ângulo que mede:

a) a terça parte da medida do ângulo de meia-volta? 60°
b) $\frac{2}{5}$ da medida do ângulo de uma volta? 144°

9. A medida x de um ângulo equivale, em graus, à raiz da equação $\frac{x}{5} + \frac{x - 15°}{4} = 57°$. Descubra o valor de x. 135°

10. Se x representa a medida, em graus, de um ângulo e é a solução da equação $\frac{2}{3}x + 3(x - 15) = 120$, descubra o valor de x. 45°

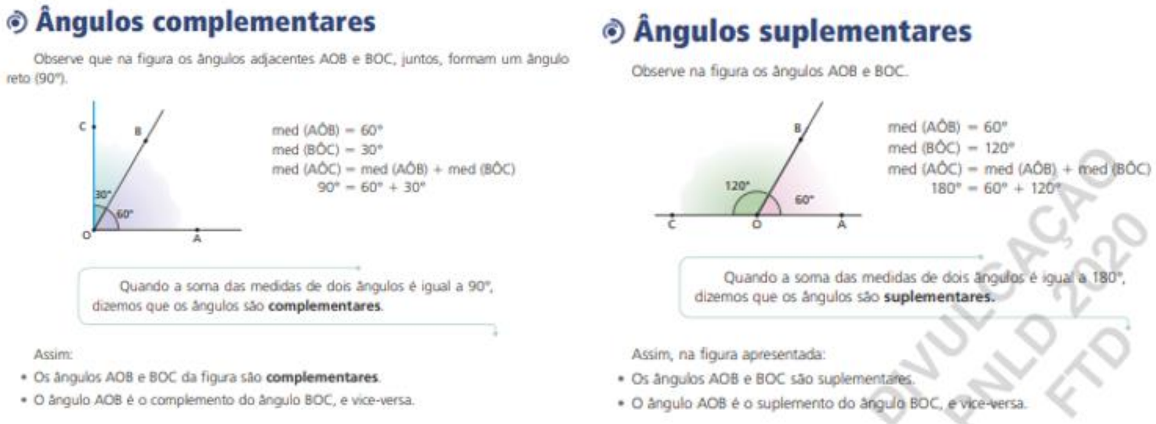
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 170).

Para o segundo tipo de tarefa abordado, o **T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região**, dois subtipos são trabalhados, que são o **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos** e o **TD7 – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico**.

Ao caminhar da continuação do primeiro capítulo, o LD aborda na sequência os ângulos complementares e ângulos suplementares, permanecendo ainda no mesmo momento de institucionalização e constituição do ambiente tecnológico–teórico. Sobre esse aspecto cabe um adendo, pois ao analisar o LD esses dois momentos aparecem tão imbricados que são bastante difíceis de serem dissociados.

Em relação aos ângulos complementares e suplementares, é observado que à medida que são apresentados exemplos, também é feito o uso do momento da exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, como podemos visualizar na figura a seguir.

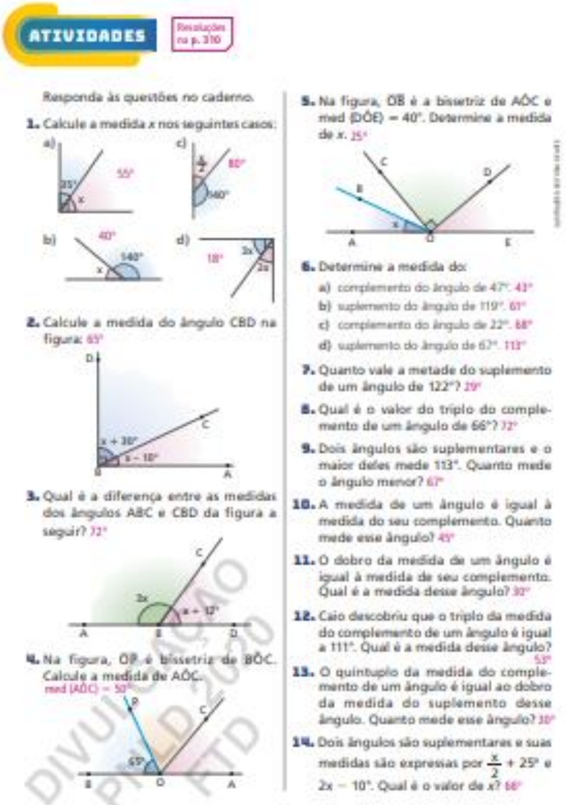
Figura 56 – Extrato do livro do 7º ano referente aos ângulos complementares e suplementares



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 171).

Para finalizar o capítulo, é proposto um bloco de tarefas nas quais dois subtipos são explorados, sendo eles: **T_{D4} – Determinar a medida da abertura do ângulo através do seu complemento e/ou suplemento** e **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**.

Figura 57 – Extrato do livro do 7º ano referente ao segundo bloco de tarefas



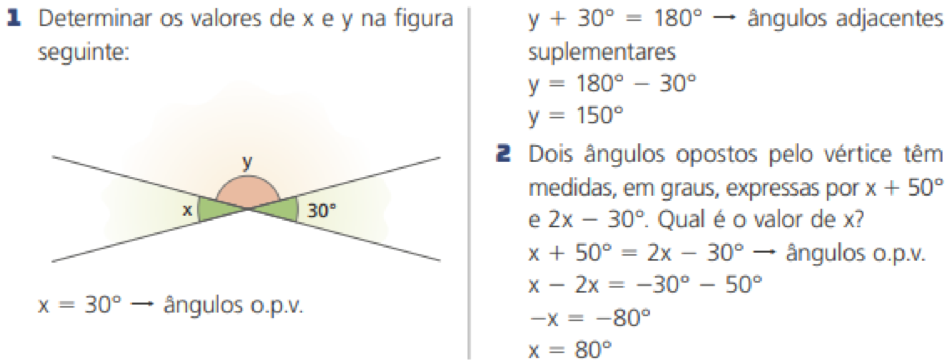
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 171).

Finalizando o primeiro capítulo com os tipos de tarefas mencionados acima, exploramos agora o capítulo dois, que tem como tema retas. Ele começa discutindo as retas paralelas, concorrentes e perpendiculares. Essas retas serão bastante trabalhadas para compreender os ângulos formados por retas cortadas por uma transversal. Vale ressaltar que nesta parte do LD percebe-se que ainda é explorado o momento da institucionalização e da constituição do ambiente tecnológico–teórico.

Em seguida, a abordagem dos ângulos opostos pelo vértice que os autores do livro mencionam são formados por dois ângulos quando um dos lados dos prolongamentos for comum ao lado do outro. Com isso, percebemos os opostos pelo vértice por meio das retas concorrentes e perpendiculares, então o LD apresenta através de exemplos como fazer o uso desta propriedade.

Dessa forma, após a explicação são propostas duas tarefas, que são resolvidas pelo próprio livro fazendo o uso da propriedade mencionada, então, neste momento é realizada a exploração de um tipo de tarefa que está relacionada ao subtipo **T_{D5} – Determinar a medida da abertura de ângulos por meio de ângulos opostos pelo vértice** e elaboração de uma técnica, como podemos visualizar na figura a seguir.

Figura 58 – Extrato do livro do 7º ano referente a exploração do subtipo T_{D5}


1 Determinar os valores de x e y na figura seguinte:

$x = 30° \rightarrow$ ângulos o.p.v.

$y + 30° = 180° \rightarrow$ ângulos adjacentes suplementares
$y = 180° - 30°$
$y = 150°$

2 Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas, em graus, expressas por $x + 50°$ e $2x - 30°$. Qual é o valor de x?
$x + 50° = 2x - 30° \rightarrow$ ângulos o.p.v.
$x - 2x = -30° - 50°$
$-x = -80°$
$x = 80°$

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 175).

Dando continuidade, o LD apresenta na sequência um bloco de tarefas, no qual aborda alguns subtipos específicos. Eles são: **T_{D5} – Determinar a medida da abertura de ângulos por meio de ângulos opostos pelo vértice**, **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos** e **T_{D7} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico**.

Após o bloco de tarefas, o livro retorna ao momento de institucionalização e constituição do ambiente tecnológico–teórico, através da abordagem das retas paralelas cortadas por uma transversal, com o intuito de identificar e estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Em seguida, o LD mais uma vez faz a exploração de um tipo de tarefa, que em nosso esquema é representado pelo subtipo **T_{V1} – Identificar a posição de ângulos nas diferentes regiões formadas por duas retas cortadas por uma transversal**, como podemos observar na figura abaixo.

Figura 59 – Extrato do livro do 7º ano referente a exploração do subtipo T_{V1}

PENSE E RESPONDA Resoluções na **p. 311**

1. Observando a figura anterior, indique no caderno:

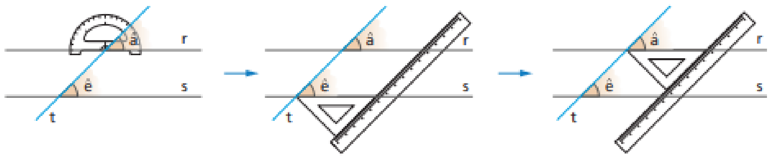
a) os quatro ângulos que pertencem à região interna às retas *r* e *s*. $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ e $\hat{6}$.
b) os quatro ângulos que pertencem à região externa às retas *r* e *s*. $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}$ e $\hat{8}$.
c) os ângulos que estão do mesmo lado em relação à reta *t*. $\hat{1}, \hat{4}, \hat{5}$ e $\hat{8}$; $\hat{2}, \hat{3}, \hat{6}$ e $\hat{7}$.
d) os pares de ângulos, um na região externa com vértice em *P* e o outro na região interna com vértice em *Q*. $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{1}$ e $\hat{6}$; $\hat{2}$ e $\hat{5}$.
e) os pares de ângulos, um na região interna com vértice em *P* e o outro na região externa com vértice em *Q*. $\hat{3}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$; $\hat{3}$ e $\hat{8}$; $\hat{4}$ e $\hat{7}$.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 176).

Posteriormente, após fazer a exploração do tipo de tarefa mencionado, o LD retoma o momento da institucionalização e do ambiente tecnológico–teórico, no qual trabalha os ângulos correspondentes, que além de abordar a definição, faz o resgate dos ângulos congruentes e associa essa união às retas paralelas. Para este momento é realizado também a elaboração de uma técnica que justifica os ângulos que são correspondentes e congruentes simultaneamente. Este exemplo é destacado na figura a seguir.

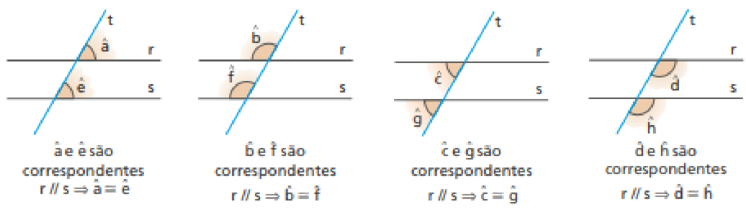
Figura 60 – Extrato do livro do 7º ano referente a elaboração da técnica (ângulos correspondentes congruentes)

Podemos verificar de forma prática que, se dois ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas *r* e *s* serão paralelas (indica-se: *r*//*s*). Para isso, tomemos os ângulos correspondentes $\hat{a}$ e $\hat{e}$, de mesma medida, e verifiquemos o que ocorre com as retas *r* e *s*.



Se a reta transversal corta duas retas determinando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas ($\hat{a} \equiv \hat{e} \Rightarrow r//s$).

A recíproca também é verdadeira: duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos **correspondentes congruentes**.

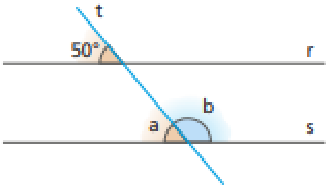


Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 177).

Depois da demonstração da propriedade de ângulos correspondentes congruentes, o LD propõe uma situação em que vai utilizar a propriedade mencionada na figura anterior para resolução, logo, é neste momento que percebemos o trabalho da técnica associada aos ângulos correspondentes, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 61 – Extrato do livro do 7º ano referente ao trabalho da técnica (ângulos correspondentes)

1 Na figura, temos r // s. Vamos determinar as medidas *a* e *b*.
Como r // s, temos:
a = 50° (ângulos correspondentes)



Como *a* e *b* são suplementares, temos:

a + b = 180°
50° + b = 180°
b = 130°
Então, a = 50° e b = 130°.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 177).

Em seguida, o livro retoma ao momento de institucionalização e do ambiente tecnológico–teórico, voltando-se ao estudo dos ângulos alternos, que se dividem em alternos internos e alternos externos. Então, feito isso, o LD parte para outro momento que visa explorar um tipo de tarefa, no nosso caso o subtipo **T_{V2} – Estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e ângulos alternos e colaterais**. Isso pode ser observado na figura a seguir.

Figura 62 – Extrato do livro do 7º ano referente a exploração do subtipo T_{V2} (ângulos alternos)

PENSE E RESPONDA Resoluções na **p. 311**

Vamos fazer investigações utilizando o GeoGebra. Depois, responda às questões no caderno.

1. Com a ferramenta *Reta* trace uma reta qualquer e com a ferramenta *Reta Paralela* trace uma reta paralela à primeira. Em seguida, usando novamente a ferramenta *Reta* trace uma reta transversal às duas primeiras.
Por último, com a ferramenta *Ângulo* marque e meça os pares de ângulos alternos internos.
a) Comparando as medidas dos ângulos alternos internos, o que é possível verificar? **1. a)** Os ângulos alternos internos são congruentes.
b) Faça a mesma investigação para os ângulos alternos externos. O que é possível observar? Os ângulos alternos externos são congruentes.
c) Mova a reta transversal de tal forma que os ângulos determinados se alterem. As conclusões anteriormente observadas se mantiveram? **1. c)** Sim, os ângulos alternos internos continuam congruentes, assim como os alternos externos.

2. Faça o mesmo experimento, mas dessa vez as duas primeiras retas construídas não devem ser paralelas. O que observamos na atividade anterior pode ser verificado nesta? Não. Quando as retas não são paralelas, os ângulos alternos internos não são congruentes, assim como os alternos externos também não o são.

FOTOS: GEOGEBRA 2018

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 177).

Em relação a exploração do subtipo T_{V2}, percebemos que os autores estão conectados com o currículo vigente, pois realizam a ligação com a habilidade proposta pela BNCC para o 7º ano na “(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica” (Brasil, 2018, p.309).

Dessa forma, o LD repete o mesmo formato dos momentos de estudo e da abordagem dos ângulos alternos, iniciando pelo momento de constituição do ambiente tecnológico–teórico e institucionalização, que aborda os ângulos colaterais e faz a divisão entre colaterais internos e colaterais externos. Em seguida, explora um tipo de tarefa, no qual se repete o subtipo **T$_{V2}$ – Estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e ângulos alternos e colaterais**. Vejamos essa organização a seguir.

Figura 63 – Extrato do livro do 7º ano referente a exploração do subtipo T$_{V2}$ (ângulos colaterais)

PENSE E RESPONDA Resoluções na **p. 311**

Vamos fazer novas investigações com o uso do GeoGebra. Depois, responda às questões no caderno.

1. Com a ferramenta *Reta* trace uma reta qualquer e com a ferramenta *Reta Paralela* trace uma reta paralela à primeira. Em seguida, usando novamente a ferramenta *Reta* trace uma reta transversal às duas primeiras. **1. a) 180°; 180°; as duas somas são iguais.**

Por último, com a ferramenta *Ângulo* marque e meça os pares de ângulos colaterais internos.

a) Obtenha a soma das medidas de um dos pares dos ângulos colaterais internos. Qual o valor obtido? Faça o mesmo para o outro par. O que podemos observar?

b) Faça a mesma investigação para os ângulos colaterais externos. O que é possível observar? A soma dos pares de ângulos colaterais externos também é 180°.

c) Mova a reta transversal de tal forma que os ângulos determinados se alterem. As conclusões anteriormente observadas se mantiveram? Sim. Todas as somas continuam iguais a 180°.

2. Faça o mesmo experimento, mas dessa vez as duas primeiras retas construídas não devem ser paralelas. O que observamos na atividade anterior pode ser observado nessa? Não. Quando as retas não são paralelas, as somas não são 180°.

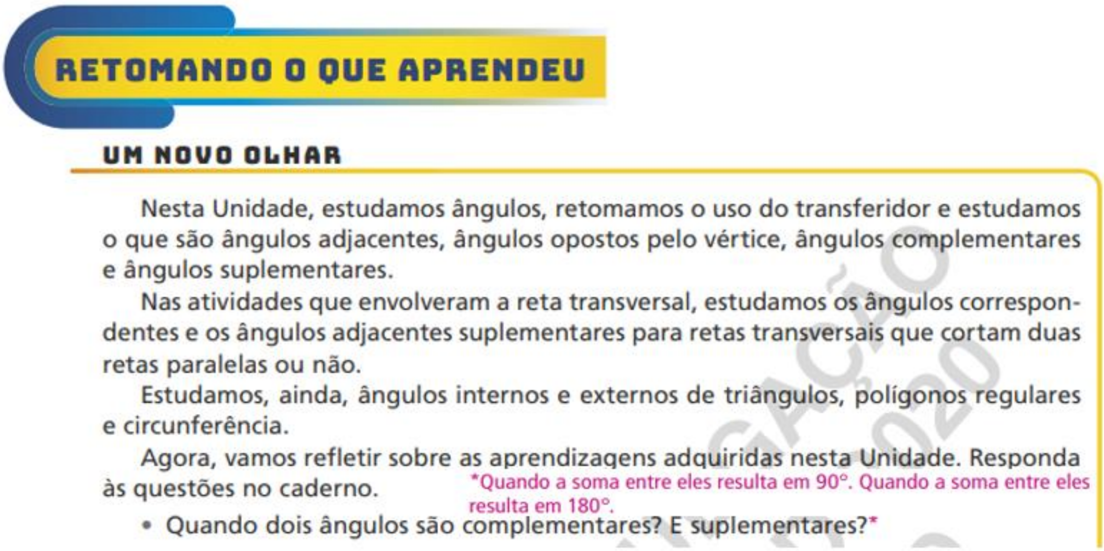
FOTOS: GEOGEBRA 2018

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 179).

Após toda essa discussão, o capítulo é finalizado com um bloco de tarefas sobre tudo o que foi explorado em seu decorrer. Neste sentido, as tarefas rastreadas nesse bloco são pertencentes aos subtipos: **T$_{D5}$ – Determinar a medida de ângulos por meio de ângulos opostos pelo vértice, T$_{D6}$ – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos, T$_{D7}$ – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de cálculo numérico** e **T$_{V2}$ – Estabelecer relações entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e ângulos alternos e colaterais**.

Finalizando a análise da organização didática do 7º ano, percebemos mais uma vez a avaliação da aprendizagem, que se relaciona com os ângulos complementares e suplementares, no qual é feito com o intuito de levar a reflexão, como mostra a figura a seguir.

Figura 64 – Extrato do livro do 7º ano referente a avaliação da aprendizagem



RETOMANDO O QUE APRENDEU

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos ângulos, retomamos o uso do transferidor e estudamos o que são ângulos adjacentes, ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e ângulos suplementares.

Nas atividades que envolveram a reta transversal, estudamos os ângulos correspondentes e os ângulos adjacentes suplementares para retas transversais que cortam duas retas paralelas ou não.

Estudamos, ainda, ângulos internos e externos de triângulos, polígonos regulares e circunferência.

Agora, vamos refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda às questões no caderno.

*Quando a soma entre eles resulta em 90°. Quando a soma entre eles resulta em 180°.

- Quando dois ângulos são complementares? E suplementares?*

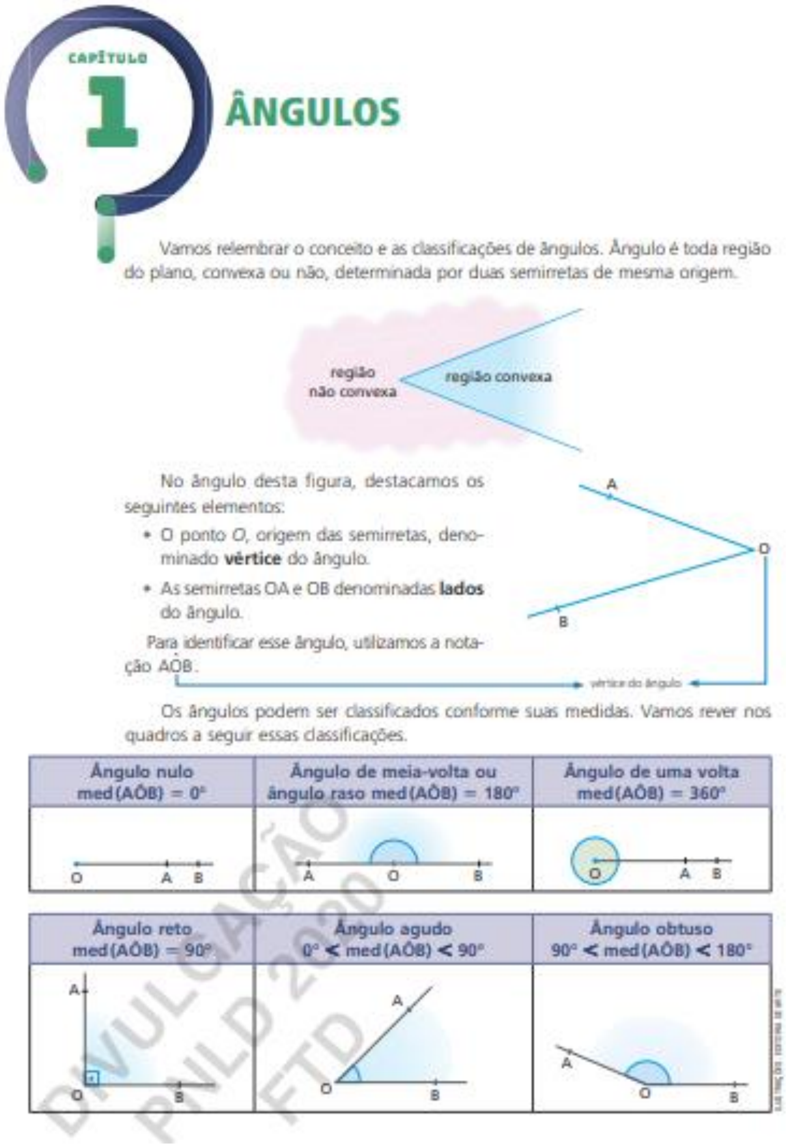
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 197).

Desse modo, ao final da unidade seis, temos outro bloco de tarefas que visa retomar o que foi aprendido durante todos os capítulos que compõem a unidade, no qual o subtipo trabalhado é o **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**. Dito isso, percebemos a grande evidência da unidade temática da álgebra sendo explorada através das expressões algébricas justamente no 7º ano. Inclusive, a unidade anterior trabalha a linguagem algébrica e equações, o que temos por hipótese da razão da grande incidência de tarefas relacionadas a este subtipo.

6.2.3 Análise da organização didática do livro didático do 8º ano do ensino fundamental

Em relação ao LD do 8º ano, o saber ângulo é abordado na unidade três, que é intitulada Ângulos e Triângulos. O capítulo um aborda o estudo do objeto ângulo, no qual tem o seu início voltado ao momento do reencontro com a definição e a classificação. Vale salientar que à medida que é feito o reencontro, também são trabalhados os momentos da constituição do ambiente tecnológico–teórico e o de institucionalização, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 65 – Extrato do livro do 8º ano referente ao reencontro com o saber ângulo



CAPÍTULO 1

ÂNGULOS

Vamos relembrar o conceito e as classificações de ângulos. Ângulo é toda região do plano, convexa ou não, determinada por duas semirretas de mesma origem.

No ângulo desta figura, destacamos os seguintes elementos:

- O ponto *O*, origem das semirretas, denominado **vértice** do ângulo.
- As semirretas OA e OB denominadas **lados** do ângulo.

Para identificar esse ângulo, utilizamos a notação $A\hat{O}B$.

Os ângulos podem ser classificados conforme suas medidas. Vamos rever nos quadros a seguir essas classificações.

Ângulo nulo med($A\hat{O}B$) = 0°	Ângulo de meia-volta ou ângulo raso med($A\hat{O}B$) = 180°	Ângulo de uma volta med($A\hat{O}B$) = 360°
O A B	A O B	O A B

Ângulo reto med($A\hat{O}B$) = 90°	Ângulo agudo 0° < med($A\hat{O}B$) < 90°	Ângulo obtuso 90° < med($A\hat{O}B$) < 180°
A O B	A O B	A O B

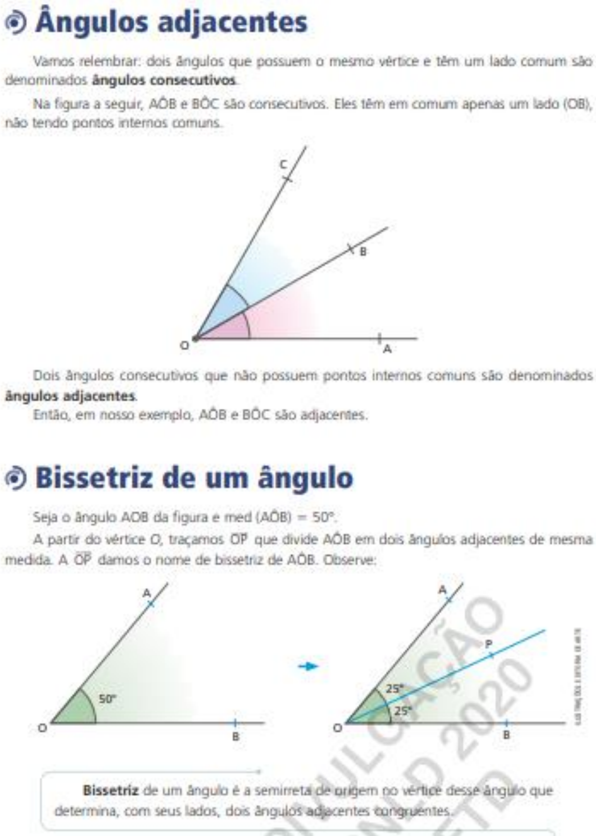
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 66).

Fica evidente que pelo saber ângulo ser trabalhado nos anos anteriores, no início do capítulo, três momentos acontecem simultaneamente: o reencontro com o saber, institucionalização e construção do ambiente tecnológico-teórico.

O reencontro com o saber é realizado através da definição e classificação. Vale observar também que é a primeira vez que é mencionada a classificação de ângulos enquanto abertura voltado aos ângulos reto, agudo e obtuso nessa coleção. Acreditamos que essa exploração deva ter acontecido na coleção referente aos anos iniciais (não analisada nessa pesquisa). No entanto, acreditamos que essa classificação deveria ter sido retomada no livro do 6º ano para que os estudantes pudessem consolidar o saber. Logo, sugerimos ao professor (usuário dessa coleção) que aborde a classificação de ângulos enquanto sua abertura no início dos anos finais do ensino fundamental.

Em seguida, o LD continua com o momento de institucionalizar e constituir o ambiente tecnológico–teórico, sendo assim, relembra os ângulos consecutivos e os ângulos adjacentes com o intuito de identificar quando dois ângulos são consecutivos e quando são adjacentes e como fazer sua representação.

Figura 66 – Extrato do livro do 8º ano referente aos ângulos adjacentes e bissetriz de um ângulo



Ângulos adjacentes

Vamos relembrar: dois ângulos que possuem o mesmo vértice e têm um lado comum são denominados **ângulos consecutivos**.

Na figura a seguir, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos. Eles têm em comum apenas um lado (OB), não tendo pontos internos comuns.

Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns são denominados **ângulos adjacentes**.

Então, em nosso exemplo, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Bissetriz de um ângulo

Seja o ângulo AOB da figura e med $(A\hat{O}B) = 50°$.

A partir do vértice O, traçamos $\overrightarrow{OP}$ que divide $A\hat{O}B$ em dois ângulos adjacentes de mesma medida. A $\overrightarrow{OP}$ damos o nome de bissetriz de $A\hat{O}B$. Observe:

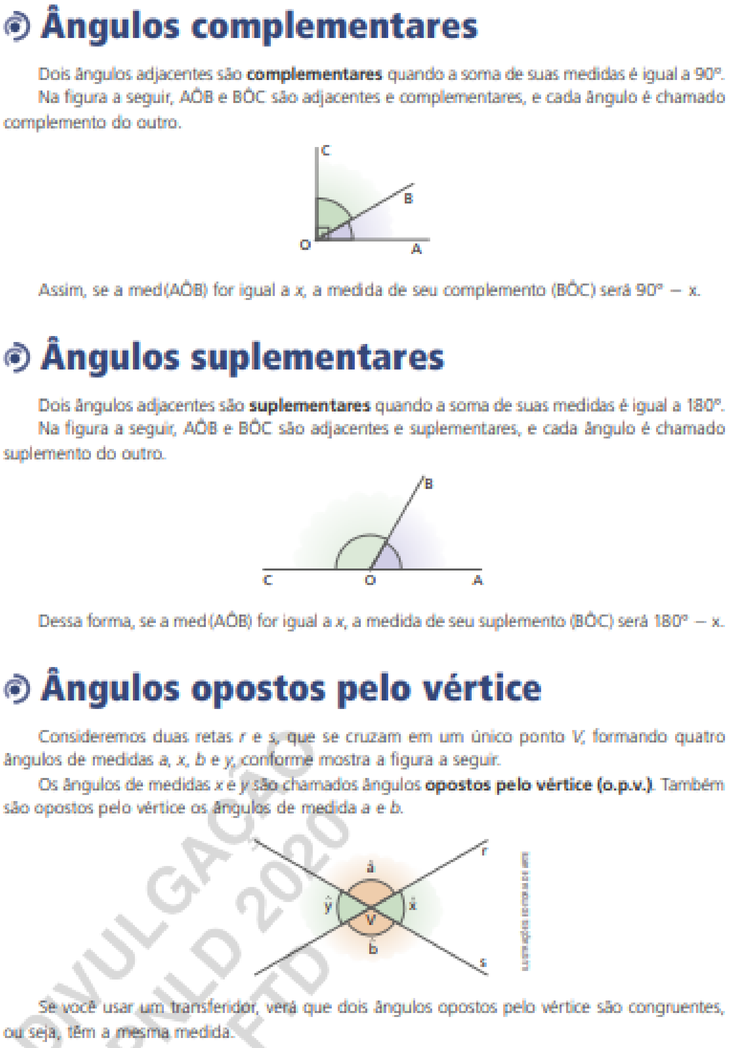
Bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice desse ângulo que determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 67).

Na sequência, o livro didático aborda a bissetriz de um ângulo, porém, não se tem nenhum tipo de tarefa que envolva este conteúdo, o que contraria a proposta dos documentos oficiais como a BNCC (Brasil, 2018). Assim, no livro é apenas esboçada sua representação. Percebemos também que no caminhar do livro, os momentos mencionados anteriormente permanecem e outros conteúdos são relembrados.

Continuando com a análise, o LD, em seguida, discute os ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice. Com isso, percebemos a continuação do momento de constituição do ambiente tecnológico–teórico e de institucionalização.

Figura 67 – Extrato do livro do 8º ano referente aos ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice



Ângulos complementares

Dois ângulos adjacentes são **complementares** quando a soma de suas medidas é igual a 90°.

Na figura a seguir, AÔB e BÔC são adjacentes e complementares, e cada ângulo é chamado complemento do outro.

Assim, se a med(AÔB) for igual a *x*, a medida de seu complemento (BÔC) será 90° − x.

Ângulos suplementares

Dois ângulos adjacentes são **suplementares** quando a soma de suas medidas é igual a 180°.

Na figura a seguir, AÔB e BÔC são adjacentes e suplementares, e cada ângulo é chamado suplemento do outro.

Dessa forma, se a med(AÔB) for igual a *x*, a medida de seu suplemento (BÔC) será 180° − x.

Ângulos opostos pelo vértice

Consideremos duas retas *r* e *s*, que se cruzam em um único ponto *V*, formando quatro ângulos de medidas *a*, *x*, *b* e *y*, conforme mostra a figura a seguir.

Os ângulos de medidas *x* e *y* são chamados ângulos **opostos pelo vértice (o.p.v.)**. Também são opostos pelo vértice os ângulos de medida *a* e *b*.

Se você usar um transferidor, verá que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 68).

Após a finalização deste momento, acontece o bloco de tarefas referente ao que foi abordado, no qual os subtipos explorados são: **T_{D4} – Determinar a medida da abertura do ângulo através do seu complemento e/ ou suplemento; T_{D5} – Determinar a medida de ângulos por meio de ângulos opostos pelo vértice** e **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**.

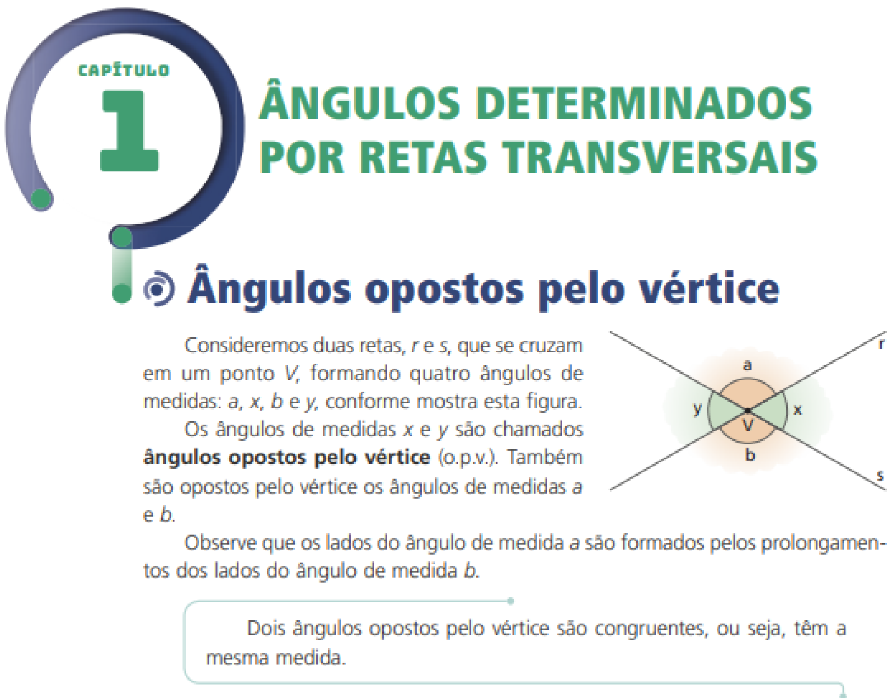
Ao fim da unidade, no *box* retomando o que aprendeu são explorados os subtipos: **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos** e **T_{V3} – Validar proposições de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de processos algébricos**.

No decorrer de todo o LD do 8º ano, os momentos de exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica e o trabalho da técnica não são percebidos. Outro aspecto importante a ser destacado é que se compararmos com os anos anteriores, no 8º ano não é apresentada a avaliação da aprendizagem, como também apenas um capítulo é dedicado a ângulos como objeto do saber. Este fato deve estar atrelado com a BNCC (Brasil, 2018). Temos apenas uma habilidade no 8º ano que aborda a construção de ângulos por meio de softwares de geometria dinâmica, com foco na construção da bissetriz e nos ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°, como propõe a habilidade EF08MA15 (Brasil, 2018).

6.2.4 Análise da organização didática do livro didático do 9º ano do ensino fundamental

Em relação ao LD do 9º ano, o saber ângulo é abordado na unidade quatro, que se intitula Relações entre Ângulos. Após a abertura da unidade, esse saber é trabalhado no primeiro capítulo, no qual inicia com um reencontro com os ângulos determinados por retas transversais, por meio dos ângulos opostos pelo vértice. Percebemos que paralelo ao reencontro, também são explorados os momentos da constituição do ambiente tecnológico–teórico e o de institucionalização, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 68 – Extrato do livro do 9º ano referente ao reencontro com o saber ângulo


CAPÍTULO 1

ÂNGULOS DETERMINADOS POR RETAS TRANSVERSAIS

Ângulos opostos pelo vértice

Consideremos duas retas, *r* e *s*, que se cruzam em um ponto *V*, formando quatro ângulos de medidas: *a*, *x*, *b* e *y*, conforme mostra esta figura.

Os ângulos de medidas *x* e *y* são chamados **ângulos opostos pelo vértice** (o.p.v.). Também são opostos pelo vértice os ângulos de medidas *a* e *b*.

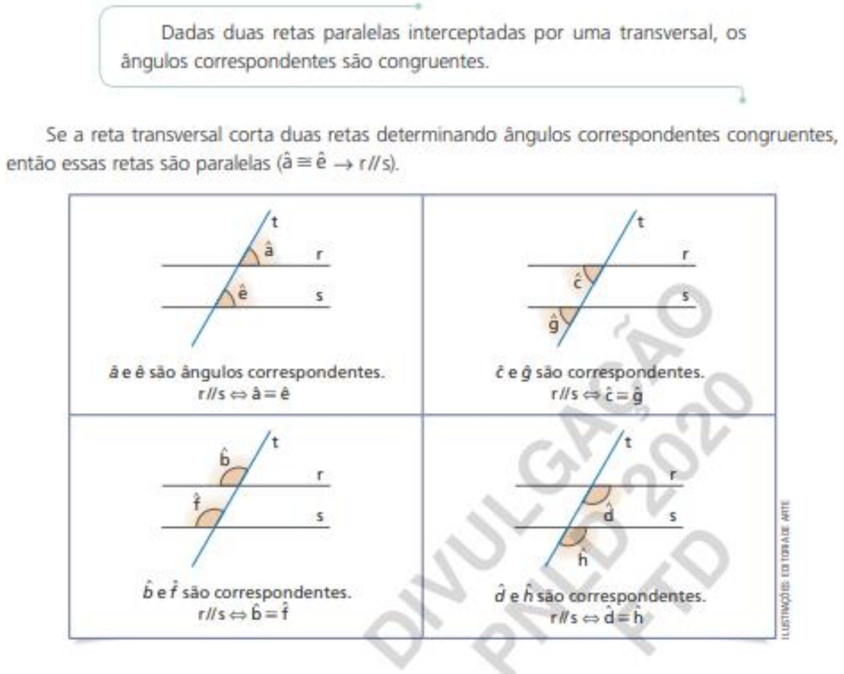
Observe que os lados do ângulo de medida *a* são formados pelos prolongamentos dos lados do ângulo de medida *b*.

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 120).

Na sequência, o LD permanece com o momento de institucionalizar e constituir o ambiente tecnológico–teórico, sendo que ao continuar retoma os ângulos adjacentes e lembra também os consecutivos, para, em seguida, trabalhar com os ângulos correspondentes que são observados em retas paralelas interceptadas por uma transversal. Estes últimos são também classificados como congruentes. Pode-se observar essa prática na figura a seguir.

Figura 69 – Extrato do livro do 9º ano referente aos ângulos correspondentes

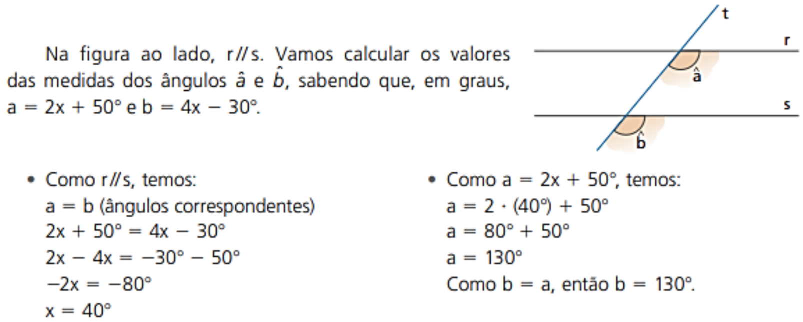

Dadas duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, os ângulos correspondentes são congruentes.

Se a reta transversal corta duas retas determinando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas ($\hat{a} \equiv \hat{e} \rightarrow r /\!/ s$).

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 121).

Além de mostrar como ângulos correspondentes podem ser observados e localizados, o LD propõe o momento de exploração do tipo de tarefa, que em nosso caso se relaciona com o subtipo **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos** e elaboração de uma técnica, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 70 – Extrato do livro do 9º ano referente a exploração do subtipo T_{D6} (ângulos correspondentes)


Na figura ao lado, $r /\!/ s$. Vamos calcular os valores das medidas dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, sabendo que, em graus, $a = 2x + 50°$ e $b = 4x - 30°$.

- Como $r /\!/ s$, temos:
  $a = b$ (ângulos correspondentes)
  $2x + 50° = 4x - 30°$
  $2x - 4x = -30° - 50°$
  $-2x = -80°$
  $x = 40°$
- Como $a = 2x + 50°$, temos:
  $a = 2 \cdot (40°) + 50°$
  $a = 80° + 50°$
  $a = 130°$
  Como $b = a$, então $b = 130°$.

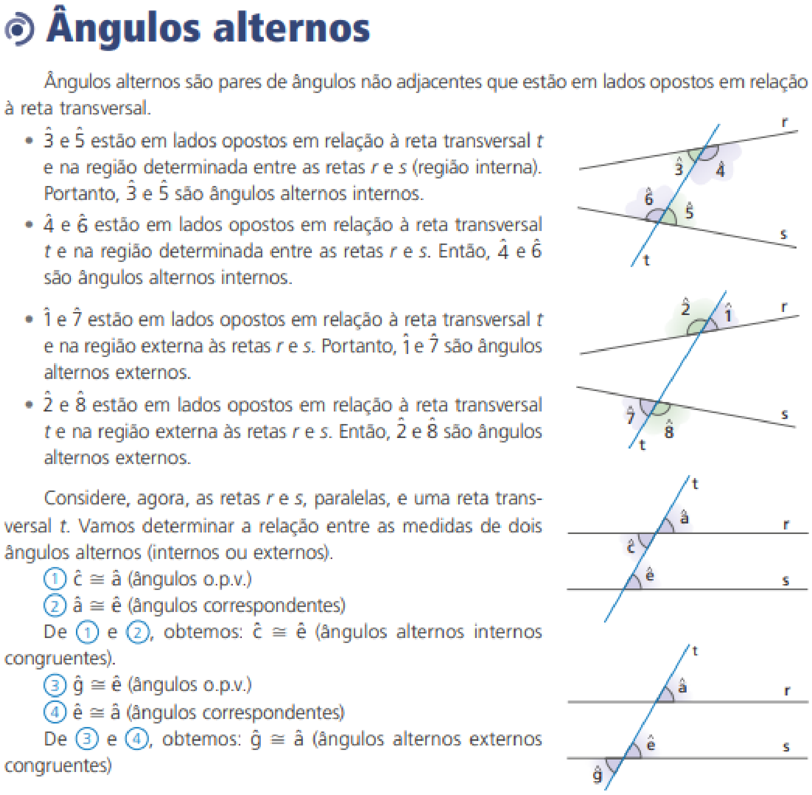
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 122).

Após este momento, o LD apresenta um bloco de tarefas que são todas do subtipo **T$_{D6}$ – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**. Essa predominância pode estar relacionada, assim como no 7º ano, à unidade anterior, que por sua vez aborda as equações, em especial as do segundo grau.

Logo, com o intuito de trabalhar as relações entre os ângulos e revisitar as classificações que foram mencionadas, a associação com as propriedades e processos algébricos se tornam uma alternativa bastante pertinente para essa abordagem.

Após o bloco de tarefas, o LD volta ao momento de constituir o ambiente tecnológico–teórico e o de institucionalizar, no qual retoma os ângulos alternos que foram trabalhados no 7º ano. Um fato importante é que no 9º ano ganham destaque os ângulos alternos internos e externos, que se ampliam à medida que são trabalhados em retas paralelas ou não e são associados aos ângulos opostos pelo vértice e aos ângulos correspondentes. Isso pode ser observado na figura a seguir.

Figura 71 – Extrato do livro do 9º ano referente aos ângulos alternos



Ângulos alternos

Ângulos alternos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal.

- $\hat{3}$ e $\hat{5}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna). Portanto, $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são ângulos alternos internos.
- $\hat{4}$ e $\hat{6}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s*. Então, $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos alternos internos.
- $\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Portanto, $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos alternos externos.
- $\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Então, $\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos alternos externos.

Considere, agora, as retas *r* e *s*, paralelas, e uma reta transversal *t*. Vamos determinar a relação entre as medidas de dois ângulos alternos (internos ou externos).

1 $\hat{c} \cong \hat{a}$ (ângulos o.p.v.)
2 $\hat{a} \cong \hat{e}$ (ângulos correspondentes)
De 1 e 2, obtemos: $\hat{c} \cong \hat{e}$ (ângulos alternos internos congruentes).

3 $\hat{g} \cong \hat{e}$ (ângulos o.p.v.)
4 $\hat{e} \cong \hat{a}$ (ângulos correspondentes)
De 3 e 4, obtemos: $\hat{g} \cong \hat{a}$ (ângulos alternos externos congruentes)

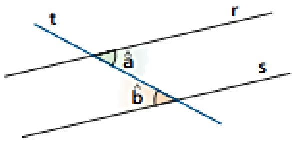
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 123).

Em seguida, retomando aos momentos já mencionados no parágrafo anterior, o LD utiliza de uma propriedade voltada aos ângulos alternos, que quando dispostos em duas retas paralelas cortadas por uma transversal são determinados congruentes, ou seja, os ângulos alternos internos e ângulos alternos externos, quando encontrados em retas paralelas, serão congruentes.

Neste sentido, após a propriedade o LD se volta ao momento de exploração de um tipo de tarefa que identificamos como do subtipo **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos** e elaboração de uma técnica, já que o livro propõe também a sua forma de resolução. Esta pode ser observada na figura a seguir.

Figura 72 – Extrato do livro do 9º ano referente a exploração do subtipo T_{D6} (ângulos alternos)

Usando essa propriedade, podemos resolver a seguinte questão:
Na figura abaixo, $a = 3x - 50°$ e $b = x + 14°$. Qual é a medida, em grau, dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, sendo $r // s$?

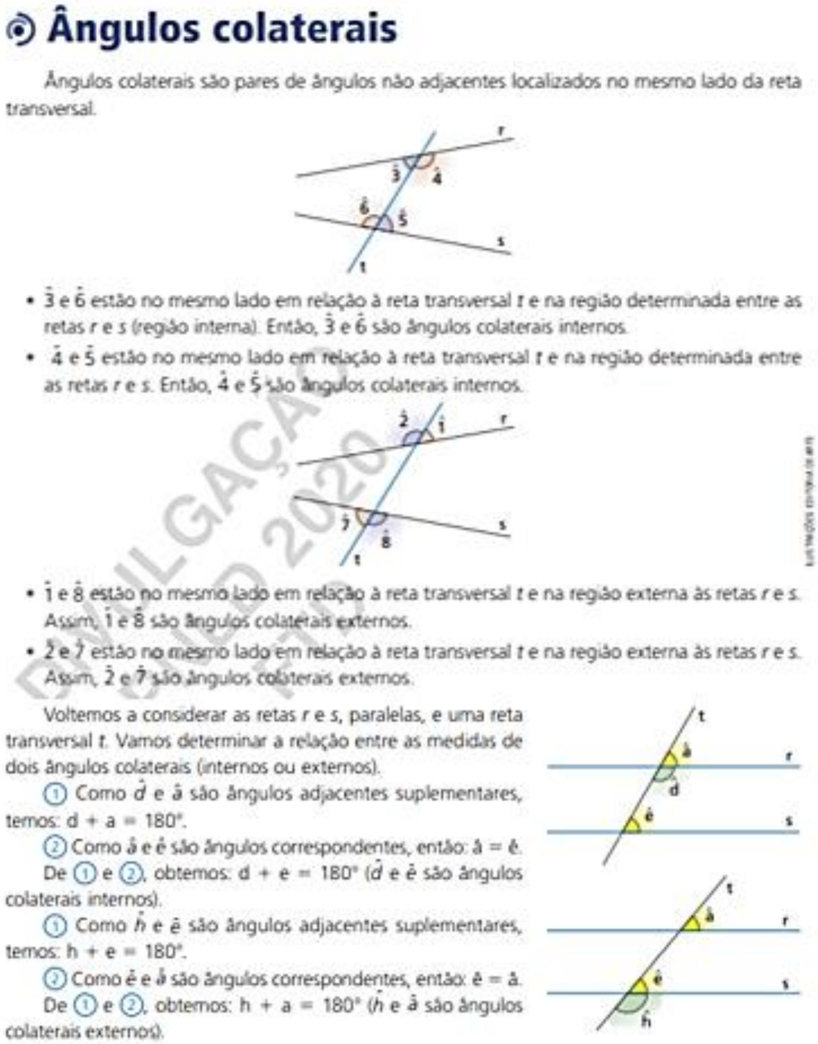


Como $r // s$, $a = b$ (alternos internos). Então:
$3x - 50° = x + 14°$
$3x - x = 14° + 50°$
$2x = 64°$
$x = 32°$
Daí:
$a = 3 \cdot (32°) - 50° = 96° - 50° = 46°$
Portanto, $a = 46°$ e $b = 46°$.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 124).

Na sequência, o LD retorna ao momento de constituir e institucionalizar resgatando, também, os ângulos colaterais que possuem sua abordagem realizada da mesma forma dos ângulos alternos. Logo, retoma os ângulos colaterais como trabalhado no 7º ano, e faz sua ampliação no 9º ano. Esse movimento destaca como estes são trabalhados em retas paralelas ou não, e associa também aos ângulos adjacentes suplementares e aos correspondentes. Observemos na figura a seguir.

Figura 73 – Extrato do livro do 9º ano referente aos ângulos colaterais



Ângulos colaterais

Ângulos colaterais são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.

- $\hat{3}$ e $\hat{6}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna). Então, $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos colaterais internos.
- $\hat{4}$ e $\hat{5}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s*. Então, $\hat{4}$ e $\hat{5}$ são ângulos colaterais internos.
- $\hat{1}$ e $\hat{8}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Assim, $\hat{1}$ e $\hat{8}$ são ângulos colaterais externos.
- $\hat{2}$ e $\hat{7}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Assim, $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são ângulos colaterais externos.

Voltemos a considerar as retas *r* e *s*, paralelas, e uma reta transversal *t*. Vamos determinar a relação entre as medidas de dois ângulos colaterais (internos ou externos).

1 Como $\hat{d}$ e $\hat{a}$ são ângulos adjacentes suplementares, temos: $d + a = 180°$.

2 Como $\hat{a}$ e $\hat{e}$ são ângulos correspondentes, então: $\hat{a} = \hat{e}$.

De 1 e 2, obtemos: $d + e = 180°$ ($\hat{d}$ e $\hat{e}$ são ângulos colaterais internos).

1 Como $\hat{h}$ e $\hat{e}$ são ângulos adjacentes suplementares, temos: $h + e = 180°$.

2 Como $\hat{e}$ e $\hat{a}$ são ângulos correspondentes, então: $\hat{e} = \hat{a}$.

De 1 e 2, obtemos: $h + a = 180°$ ($\hat{h}$ e $\hat{a}$ são ângulos colaterais externos).

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 124-125).

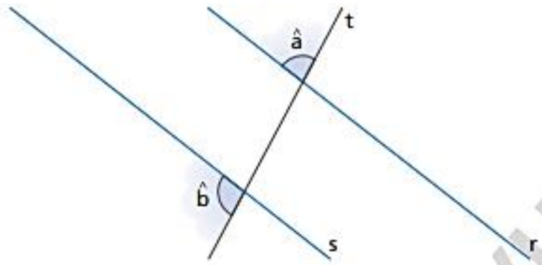
Em seguida, o LD se apropria dos momentos de estudo citados anteriormente e se utiliza de uma propriedade voltada aos ângulos colaterais, que diz que duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal irão determinar ângulos colaterais podendo ser internos ou externos, sendo também suplementares.

Dessa forma, após a explicação da propriedade, o livro propõe o momento de exploração de um tipo de tarefa que mais uma vez é do subtipo **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**, no qual percebemos também a repetição quanto a elaboração da técnica que se associa com a álgebra, como na figura seguinte.

Figura 74 – Extrato do livro do 9º ano referente a exploração do subtipo T_{D6} (ângulos colaterais)

Usando essa propriedade, vamos considerar o seguinte problema:

Na figura a seguir, temos $r // s$. Vamos calcular, em grau, as medidas dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, sabendo que $a = 2x$ e $b = 3x - 20°$.



Como $r // s$, temos:

$a + b = 180°$ (colaterais externos)

$2x + 3x - 20° = 180°$

$5x = 180° + 20°$

$5x = 200°$

$x = 40°$

Como $a = 2x$, vem:

$a = 2 \cdot (40°) = 80°$

Mas como $a + b = 180°$, então:

$b = 180° - 80° = 100°$

Portanto, $a = 80°$ e $b = 100°$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 125).

E para finalizar o capítulo referente ao saber ângulo, é proposto um bloco de tarefas composto pelos subtipos: **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**, **T_{CL1} – Classificar ângulos conforme a medida de sua abertura** e **T_{CL2} – Classificar ângulos conforme a soma das medidas de sua abertura**.

Sendo assim, ao fim da unidade, no *box* retomando o que aprendeu, é trabalhado o subtipo **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos**.

Logo, finalizando a análise da organização didática do 9º ano percebemos a intencionalidade na avaliação da aprendizagem, na qual é feita com o intuito de refletir sobre a abordagem dos ângulos complementares, suplementares, congruentes e correspondentes.

Entendemos que essa avaliação da aprendizagem não se relaciona com o momento avaliativo mencionado por Chevallard (1999, p. 243) ao atestar que “o processo de avaliação deve ser considerado em um sentido mais amplo”, ou seja, é importante também avaliar os elementos da praxeologia. Assim, nem sempre a avaliação da aprendizagem no contexto do processo avaliativo tem propriamente como objetivo avaliar através do olhar praxeológico.

Figura 75 – Extrato do livro do 9º ano referente a avaliação da aprendizagem

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos ângulos e circunferência. Foram abordados os ângulos determinados por retas transversais, os ângulos correspondentes, os ângulos alternos, os ângulos colaterais, as propriedades de uma circunferência, as posições relativas de uma reta e uma circunferência, as posições relativas de duas circunferências, os arcos de circunferência e os ângulos centrais, o ângulo inscrito em uma circunferência e os ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência.

Devido à série de conteúdos abordados nesta Unidade, sugerimos a você que realize um fichamento dos conteúdos expostos, fazendo registros gráficos (desenhos), exemplos e lembretes. Na abertura, foi apresentada uma aplicação da circunferência e do círculo na Arte.

Como você entende que as propriedades que estudamos possam fazer parte de um objeto artístico que utilize esses conceitos?

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda às questões no caderno. *Ângulos complementares são ângulos cujas medidas somam 90°; ângulos suplementares são ângulos cujas medidas somam 180°.

- Quando dois ângulos são complementares? E suplementares?*
- O que são ângulos correspondentes? Qual é a diferença entre ângulo correspondente e ângulo congruente?**

Ângulos correspondentes em retas paralelas são ângulos de mesma medida que coincidem por translação; ângulos congruentes são quaisquer ângulos de mesma medida entre si. Ângulos correspondentes são pares de ângulos congruentes, mas nem todo par de ângulos congruentes são ângulos correspondentes. **143

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 120).

Por fim, ao decorrer do LD do 9º ano, o momento de trabalho da técnica não é percebido, o que deveria acontecer para que pudéssemos avaliar como é realizada a evolução da técnica do ano anterior para o seguinte. Em relação ao tipo de tarefa, é apenas neste ano que são trabalhadas a exploração do tipo T_{CL}.

Portanto, diante de toda a análise da organização didática, compreendemos que o saber ângulo referente aos primeiros encontros é introduzido por meio de textos motivadores e contextualizados com as situações do cotidiano no 6º e 7º ano. Já nos anos posteriores, o saber é trabalhado de maneira associada a outros conteúdos geométricos como triângulos no 8º ano e circunferência no 9º ano.

Com relação a exploração dos tipos de tarefas, percebemos que são trabalhados após os momentos da constituição do ambiente tecnológico-teórico e da institucionalização com o intuito de fundamentar para em seguida realizar a exploração de técnicas que é conduzida por meio de exercícios resolvidos.

A constituição do ambiente tecnológico-teórico é construída por meio da contextualização de situações do cotidiano e da história da matemática no 6º ano. Em seguida, nos anos posteriores, aborda a definição e as classificações relacionadas ao saber ângulo.

O trabalho da técnica, quando percebido, é posto de maneira bem evidente e precisa. Vale destacar que é pouco perceptível quando ocorre a criação de novas técnicas, uma vez que o seu trabalho não é reforçado constantemente.

Em relação a institucionalização, fica bem explícito em toda a coleção que esse momento está relacionado a constituição do ambiente tecnológico-teórico, pois estão associadas às definições e justificativas. E, por fim, não notamos a presença do momento de avaliação, apenas indícios da avaliação da aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo analisar a abordagem de uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental, aprovada no Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2020, em relação ao saber ângulo. Para a realização dessa análise foi necessário nos apoiarmos na teoria antropológica do didático, que possibilitou caracterizar a praxeologia matemática e a praxeologia didática presentes na coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental em relação ao saber ângulo.

Com o intuito de responder a seguinte questão: como uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental aborda o saber ângulo? Traçamos um caminho que teve início com o mapeamento da coleção mais adotada no Brasil em relação ao PNLD 2020, no qual identificamos a coleção A Conquista da Matemática de autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, da editora FTD, quarta edição de 2018.

Após este mapeamento, partimos para a caracterização da praxeologia matemática e didática referente ao saber ângulo. Foi nesta busca que descobrimos subsídios para um olhar mais amplo da perspectiva de ângulo, para que não seja visto apenas como uma ferramenta de suporte a outros conteúdos. Assim, nossa pesquisa se debruçou a partir do olhar teórico e metodológico da TAD, no qual aprofundamos nossas análises.

Na análise da praxeologia matemática foram identificadas em toda a coleção 5 tipos de tarefas que foram atrelados a 21 subtipos. Nesses números o total de tarefas encontrados foi de 226 e a distribuição aconteceu da seguinte forma: 76,1% para T_D – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região; 12,4% para T_V – Resolver proposições envolvendo ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal; 6,6% para T_I – Identificar ângulos em figuras; 3,1% T_R – Reconhecer representações de ângulos em situações cotidianas; e finaliza com 1,8% para T_{CL} – Classificar ângulos conforme a medida de abertura.

Vale ressaltar que esses dados encontrados não revelam apenas sobre a quantificação dessas tarefas, mas também possibilita perceber quais aspectos do saber ângulo foram priorizados em relação a outros, deixando grandes indícios para observarmos como nesta coleção é abordado essa questão.

Logo, observando a análise matemática e didática do livro do 6º ano, é perceptível que a ideia de ângulo inicialmente é associada a giro, abertura e inclinação, sendo trabalhada apenas através de uma situação, que tem seu primeiro encontro explorado a partir do subtipo de tarefa **T_{R1} – Reconhecer em situações cotidianas ângulos com a ideia de giro, abertura e inclinação**. É válido ressaltar que essas ideias não são retomadas nos outros anos escolares em sua plenitude, com isso, seria interessante uma maior exploração, uma vez que as concepções mencionadas por Balacheff podem auxiliar no ensino propondo a construção da definição de ângulo, já que as pesquisas indicam as dificuldades na compreensão do conceito e na visão estática.

Em seguida, o LD aborda a definição de ângulo como região, neste sentido, complementa as ideias associadas a ângulo por meio da definição para o ensino proposta por Balacheff (1988). Na sequência, menciona a medida de abertura do ângulo, destacando o grau como unidade padrão e feito isso evidencia a elaboração da técnica referente ao subtipo **T_{D3} – Determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região utilizando transferidor**.

Outro ponto importante no livro do 6º ano é a questão de como o bloco de tarefas é proposto. Pois, em algumas situações, o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico tem uma articulação diferente da proposta de algumas tarefas. Por exemplo, a tarefa aborda a questão de ângulos retos e ainda assim, o livro neste ano escolar não menciona, nem institucionaliza o que vem a ser um ângulo reto, o que pode ter acontecido nos anos iniciais, mas os autores não retomam. É importante mencionar que as tarefas abordadas neste ano correspondem a 6,2% do total encontrado em toda coleção.

Para o livro didático do 7º ano percebemos que o saber ângulo é bem mais trabalhado, ou seja, tem sua abordagem realizada numa proporção maior em relação a extensão de seu conteúdo. Por possuir um trabalho maior em relação a esse ano escolar alguns apontamentos irão ser destacados.

O primeiro ponto a ser discutido em relação ao livro do 7º ano é a questão do formato que o propõe, pois, traz a definição de ângulo enquanto região e em seguida aborda a classificação de ângulos voltada a ideia de giro. Com isso percebemos que no 7º ano a primeira parte do ambiente tecnológico-teórico é construído através desses dois significados de região e giro e dão sustentação a definição proposta para o ensino de ângulos, visto que as outras ideias como abertura e inclinação são trabalhas no ano anterior. Porém, não são retomadas e a abordagem no 6º ano acaba acontecendo de maneira bastante superficial.

Neste ano, a classificação de ângulo é trabalhada relacionada a diferentes pontos, por isso a constituição do ambiente tecnológico-teórico e sua institucionalização percorrem todos os dois capítulos do livro que estão relacionados a esse saber, assim podemos retomar como pontuado em nosso referencial as seguintes classificações abordadas pelo livro: Classificação enquanto a medida de sua abertura (ângulos raso e nulo), ângulos enquanto giro (uma volta e meia volta), relacionados com a geometria (ângulos consecutivos e adjacentes), em relação a soma das medidas (ângulos congruentes, complementares e suplementares), enquanto a região (ângulo interno e externo), e finaliza-se com os ângulos que são determinados por retas paralelas e cortados por uma transversal (ângulos opostos pelo vértice, colaterais alternos e correspondentes).

Vale ressaltar que o subtipo de tarefa **T_{D6} – Determinar a medida da abertura do ângulo por meio de processos algébricos** é o que possui maior expressão e aparece pela primeira vez no 7º ano, totalizando 42 tarefas apenas no LD deste ano escolar.

Em relação à composição do livro, percebemos também que assim que trabalha algum conteúdo relacionado ao saber ângulo, como por exemplo, os ângulos opostos pelo vértice, em seguida aborda a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração da técnica ou um bloco de tarefas pertinente ao que foi mencionado.

Por fim, no 7º ano há um destaque muito relevante no que se trata da quantidade de tarefas, que são 154 tarefas propostas. Isso corresponde a mais de 68,1% do total em comparação com os outros anos e nota-se também neste ano as interligações entre os campos das grandezas e medidas, geometria e álgebra.

O livro didático do 8º ano retoma o ângulo enquanto região e em seguida trabalha pela primeira vez a classificação de ângulo enquanto a medida de sua abertura, por meio dos ângulos reto, agudo e obtuso, que são vistos como conhecimentos base para o desenvolvimento de outras classificações relacionadas a este saber. Assim, cabe destacar dois pontos importantes: o primeiro se refere a classificação, que neste ano escolar não é trabalhado nenhum tipo de tarefa referente a isso, e o outro é que o livro aborda de maneira bastante trivial a bissetriz de um ângulo.

Em relação à bissetriz de um ângulo, a BNCC (Brasil, 2018) orienta para o estudo da sua construção e o livro didático faz essa abordagem em seu ambiente tecnológico-teórico, porém não aborda na parte do bloco de tarefas a bissetriz de um ângulo, o que neste caso deve ser retomado pelo professor usuário deste livro.

Ainda no 8º ano é válido destacar que são encontradas 32 tarefas que correspondem a 14,2% das que foram encontradas na coleção. É no 8º ano também que o LD apresenta menos momentos de estudos e é o único ano que não percebemos a avaliação da aprendizagem.

Para a análise do 9º ano é possível destacar que a classificação de ângulos é trabalhada como um tipo de tarefa apenas neste ano escolar, por mais que na constituição do ambiente tecnológico-teórico seja recorrente essa abordagem, o que não acontece do mesmo modo nas tarefas dos anos anteriores.

Neste ano são resgatadas as classificações abordadas no sétimo ano, no qual são relembradas a exploração de alguns tipos de tarefas e incorporadas a elaboração das técnicas já mencionadas antes, assim a constituição do ambiente tecnológico-teórico e a institucionalização do saber neste ano estão voltados aos ângulos determinados por retas transversais.

Continuando no 9º ano, percebemos também que por mais que sejam trabalhadas tarefas voltadas à classificação, ainda assim o seu quantitativo é bem baixo, uma vez que dentre o total apenas 4 tarefas são voltadas a classificação, que é uma temática importante já que é vista como um suporte aos conteúdos relacionados ao saber ângulo. É também neste ano que encontramos 26 tarefas que representam 11,5% de toda coleção.

Diante do exposto, no que se refere a análise de toda esta coleção, podemos destacar alguns pontos como: os primeiros encontros e reencontros no 6º e 7º anos ocorrem de maneira contextualizada, já no 8º e 9º anos esses reencontros partem para a constituição do ambiente tecnológico-teórico e da institucionalização, que por sua vez acontecem simultaneamente em toda coleção.

Em relação as tarefas trabalhadas na coleção percebemos que há uma diversidade em seus tipos. Já para as técnicas abordadas nos livros notamos uma evolução, uma vez que por exemplo no 6º ano é usado o transferidor para medir, já no 7º ano a medida é determinada por meio de processos algébricos.

Outra evolução notada é que no 6º ano, há abordagem do ângulo por meio de situações do cotidiano, já os anos posteriores partem para o contexto intramatemático, assim as técnicas abordadas têm seu foco voltado para explorar o que já foi mencionado no ano anterior.

Para a constituição do ambiente tecnológico-teórico, a construção de justificativas é trabalhada juntamente com a institucionalização, que na maioria das vezes esses momentos são realizados a partir ou no próprio reencontro, sendo realizado sempre no início do livro. Vale ressaltar que em grande parte dos momentos destacados anteriormente há blocos de tarefas intercalados que visam quase sempre trabalhar o que está sendo proposto no ambiente tecnológico-teórico e na institucionalização.

Diante do que já foi exposto, observamos também o trabalho da técnica, que é proposta a partir da continuidade do ambiente tecnológico-teórico, sendo modelizado por meio de tarefas resolvidas pelo próprio livro que servem de suporte e são resgatadas nos anos seguintes. Por fim, o momento de avaliação não é notado, o que o livro menciona no final da unidade relacionada ao saber ângulo é através do *box* “um novo olhar”, que acontece a avaliação da aprendizagem que é realizada de maneira bem trivial, sem grandes detalhes.

Dessa forma, perante o que foi exposto nos parágrafos anteriores, percebemos que o referencial teórico e a metodologia adotada possibilitaram uma análise detalhada dos objetivos da pesquisa. Uma questão de extrema importância apontada nesse trabalho é a relação estreita entre os campos da geometria e das grandezas e medidas, que são interligados através das grandezas geométricas. Também, percebemos uma relação estreita entre a geometria, grandezas e medidas e a álgebra. Surgem então novas indagações: como essas grandezas podem ser trabalhadas de maneira unificadas na educação básica?

Assim, deixamos como sugestão para superar essas lacunas o olhar cauteloso para o saber ângulo, pois é necessário compreender que suas nuances vão além da visão que é proposta pelo livro didático. Não que o livro não seja confiável ou não aborde de maneira correta esse saber. Contudo, para que consigamos olhar para o saber ângulo como um objeto de estudo tanto da geometria, como das grandezas e medidas, é preciso propagar isso aos professores, estudantes e pesquisadores.

Outro paralelo importante a ser feito é como estes resultados revelam as relações com os documentos oficiais como a BNCC (Brasil, 2018) e a abordagem do LD na tentativa de observar como estão sendo realizadas essas interligações, ou seja, as conexões dos conteúdos apontados na matriz curricular e como estão postos no livro, o que nos remete a transposição didática.

Vale ressaltar também que por nossa pesquisa ser qualitativa, o olhar do pesquisador tem uma grande influência na hora de fazer as inferências e a análise dos resultados, por isso buscamos retratar através da nossa ótica os achados nesta coleção, que nos fez perceber que o saber ângulo tem um potencial enorme e ao ser trabalhado em outros campos da geometria foi bastante difícil identificar sua hora de ser protagonista no LD. É valido também, após toda essa exposição, mencionar o papel do professor frente a essas possíveis questões encontradas no livro didático.

Assim, nos voltamos para a utilização do LD e surge uma inquietação em relação as praxeologias, no sentido de sugestões e possibilidades para pesquisas futuras. Logo, nos questionamos como e qual praxeologia o professor coloca em prática a partir do uso dessa coleção? E como e qual a praxeologia que alcança os estudantes ao fazer o uso desta coleção?

Para concluir, este trabalho pode ser expandido através de outras questões propostas pela teoria antropológica do didático, seja através do modelo proposto por Gáscon (2003), ou associando aos níveis de co-derterminação proposto por Chevallard (2009) com o intuito de observar a praxeologia em uma determinada instituição. Essas inquietações listadas acima estão relacionadas ao nosso objeto de estudo, podendo ser exploradas em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I. A. C. **O conceito de angulo**: reflexões com estudantes ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. 2017. 165 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.

ALMEIDA, E. A. M. **Progressões aritméticas e geométricas:** praxeologias em livros didáticos de matemática. 2012. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2012.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Matemática.** Ed.1. Paraná: Editora da UFPR, 2007.

ANJOS, D. R. K. **Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2014. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França:** estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático. 2009. 292 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

BACK; T. **Movimento do pensamento em nível teórico do conceito de ângulo:** uma proposta de ensino desenvolvimental em articulação com a atividade orientadora de ensino no sexto ano do ensino fundamental. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Santa Catarina, 2022.

BALACHEFF, N. **Une éstude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège**, Thèse (Doctorat au Education Mathématique) - Université Joseph Fourier et de l' Institut National Polytechnique, Grenoble, 1988.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Ed. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1995.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, vol. 15, n. 1, p. 11-19, Campo Mourão, 2022.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, Ltda., 1974.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular:** (BNCC). Brasília, DF: MEC. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2020:** matemática - guia de livros didáticos/ MEC, SEB, FUNDEB. Brasília, DF: MEC, 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental/MEC: Brasília, DF, 1998.

CALADO, J. J. G. **Compêndio de trigonometria.** Lisboa: Livraria Popular. 1955.

CARROLL, L. 1885, **Euclid and his Modern Rivals**. New York: Dover Publication Inc., 1973

CARVALHO, D. G. **Uma análise da abordagem da grandeza da área no figuras planas no guia de estudo do Projovem Urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático.** Recife, 2012. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes; LIMA. Paulo Figueiredo. *In*: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes (Coord.). **Matemática**: Ensino Fundamental (Coleção Explorando o Ensino). Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica, 2010.

CARVALHO, V. E. **Reflexões sobre uma formação inicial de professores que ensinam matemática discutindo o conceito de ângulo**. 2019. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

CHAACHOUA, H. **La praxéologie comme mdèle didactique pour la problématique EIAH.** Étude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. Unversité Joseph Fourier, Grenoble, 2010.

CHEVALLARD, Y. L. **La Transposición Didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Tradução de Claudia Gilman. São Paulo: Editora AIQUE, 1991.

CHEVALLARD, Y. L’analyse des pratiques enseignantes em Théorie Antropoligie Didactique. *In :* **Recherches em Didactiques des Mathématiques Grenoble**: La Pensée .Sauvage-Editions, 1999.

CHEVALLARD. Y**. La TAD face au professeur de mathématiques**. Yves Chevallard SPIP [*online*], 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162. Acesso em : 25 maio 2023.

CHEVALLARD, Y. L’. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l’approche anthropologique. *In* : L’UNIVERSITE D’ETE. **Actes de l’Université d’été La Rochelle**. Clermont-Ferrand, Franca : IREM, 1998.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHOQUET, G. **L’enseignement de la géométrie.** Paris: Hermann, 1964.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos**. 2015. 113 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

COSTA, A. P.; SANTOS. M. R. A abordagem do conceito de ângulo em um livro didático de matemática do 8º ano do ensino fundamental. EPBEM 2018, Cajazeiras, 2018. *In*: **Anais do [...]**, Cajazeiras, 2018.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, vol. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010.

CUNHA, F. G. M. **Fundamentos de álgebra**: licenciatura em matemática. Fortaleza: Ed. IFCE, 2009.

CUNHA, F. G. M.; CASTRO, J. K. S. **Cálculo numérico**: licenciatura em matemática. Fortaleza: IFCE Ed., 2010.

CURY, A. **De gênio e louco todo mundo tem um pouco**. São Paulo: Ed. Academia, 2009.

DIAS, M. A.; SANTOS JÚNIOR, V. B. Elementos da teoria antropológica do didático para análise das propostas institucionais brasileiras e metodologias de atividades e percursos de estudo e pesquisa. *In*: ALMOULOUD, S. FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático:** princípios e fundamentos. 1 ed. Curitiba: Ed. CRV, 2018.

DINIZ, M. I.; SMOLE, K. **O conceito de Angulo e o ensino de Geometria**. 2ª edição. São Paulo: USP/Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática, 1996.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria plana. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Geometria:** Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FERREIRA, L. F. D. **Um estudo sobre a transição do 5° ano para o 6° ano do ensino fundamental:** o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 2018. 387 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

FOURREY, E. **Curiosités géométriques (Deuxièmeédition)** Paris: Vuibertet Nonyéditeurs, 1938.

FRAGA, M. **A. Significação do ângulo:** indícios do conceito em atividades de localização. São Paulo: Ed. USP, 2016.

GARCÍA, E. A natureza do conhecimento escolar: transição do cotidiano para o científico ou do simples para o complexo? *In*: RODRIGO, María José; ARNAY, José.

(Org.). **Conhecimento cotidiano, escolar e científico**: representação e mudança: a construção do conhecimento escolar. Tradução de Cláudia Schilling. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2002. p. 75-101.

GASCÓN, J. From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programmes. **For the Learning of Mathematics**, vol. 23, n. 4, 2003.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2017.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018c.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018a.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018b.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018d.

GOMES, A.; RALHA, E**. O Conceito de ÂNGULO**: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. São Paulo: Ed. Associação de professores de Matemática, 2005.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Ed 2 - Dover Publications, Inc., New York, 1956.

HILBERT, D. **Fundamentos da Geometria**. Lisboa: Ed. Trajetos Ciência, 2003.

HILBERT, D. **The foundation of geometry** (E. J. Townsend,Trans; Reprintedition, 1950).New York: The Open Court Publishing,1899.

KAYAS, G. J. **Les éléments d'Euclide**. Paris: Editions du CNRS, 1978.

KRAKECKER, L. **Produção de conjecturas e provas de propriedades de ângulos de polígonos**: um estudo com alunos do oitavo ano do ensino fundamental. 2016. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

LEÃO, K. W. M. **Abordagem de volume e capacidade em uma coleção de livros didáticos**: uma análise à luz da Teoria Antropológica do Didático. 2020 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

LESSA, L. F. C. F. **Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área**. 2017 218 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

LIMA, I. M. S**. A construção do conceito de ângulo no terceiro ciclo do ensino fundamental**: um estudo de dificuldades de aprendizagem nos ambientes papel/lápis e cabri-géomètre. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e medidas**.** *In*: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes (Coord.). **Matemática**: Ensino Fundamental. Coleção Explorando o Ensino. Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica, 2010.

LOBO DA COSTA, N. M. **Funções Seno e Coseno:** uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. 1997. 250 f.– Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

LONGEN, A. **Matemática em Movimento**. São Paulo: Ed. do Brasil, 1999.

MACHADO, P. F. **Fundamentos da Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED/UFMG, 2012.

MAGINA, S. **O computador como ferramenta na aquisição e desenvolvimento do conceito de ângulo em crianças**. 1988. 168 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1988.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento**: Pesquisa qualitativa em saúde. São Paulo: Hucitec, 2013.

MITCHELMORE, M. C.; WHITE, P. Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 41, n. 3, p. 209-238, 2000.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides**: A História da Geometria - das Linhas Paralelas ao Hiperespaço. São Paulo: Geração, 2005.

MOREY, B. B. **Tópicos da história da trigonometria**. Natal: Editora SBHMat, 2001.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar:** Geometria Euclidiana Plana. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM Ed., 2013.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria:** uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAPA NETO, A. **Geometria plana e construções geométricas**. Fortaleza: UAB/IFCE Ed., 2017.

PEGORARO, V. **A inclusão de estudantes autistas no ensino remoto:** Uma proposta de ensino de conceitos relativos a ângulos. 2021. 136 f. Dissertação

(Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2021.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM Ed.; 2ª ed., 2010.

QUEIROZ, M. L. B.; REZENDE, E. Q. F. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

RAVEL, L. **Des programmes à la classe: étude de la transposition didactique interne.** Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse (Doctorat au Didatique des Mathematique) - Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

ROCHA, K. C. **Programação em scratch na sala de aula de matemática:** investigações sobre a construção do conceito de ângulo. 2017. 211 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PROFMAT) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017a.

ROCHA, M. R**. Construindo o conceito de ângulo a partir da sua mobilização em diversos contextos e da utilização de materiais manipulativos**. 2017. 141 f. Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Matemática – PROFMAT) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017b.

ROGENSKI, M.L.C.; PEDROSO, S. M. D. O **Ensino da Geometria na Educação Básica**: realidade e possibilidades. Dia a Dia Educação [*online*], 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/ portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 20 fev. 2022.

RUCKSTADTER, F. M. M.; RUCKSTADTER, V. C. M. Pesquisa com fontes documentais: levantamento, seleção e análise. *In*. TOLEDO, C. A. A.; GONZAGA, M. T. C. **Metodologia e técnicas de pesquisa**: nas áreas de ciências humanas. Maringá: Ed. UEM, 2011. p.101-120.

SANTOS, M. C. N. **Principais Axiomas da Matemática**, 2014. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

SANTOS, M. C.; MENEZES, Marcus Bessa. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, vol. 8, n. 18, 648-670, 2015.

SANTOS, M. R. A Teoria Antropológica do Didático: elementos estruturadores. *In*: ROSA DOS SANTOS, M. (Org.) **A Teoria Antropológica do Didático como um recurso teórico-metodológico para análise de conceitos matemáticos em livros didáticos**. Recife, Ed. UFPE, 2020.

SANTOS, M. R. **A Transposição Didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental**: um olhar sob a ótica da

Teoria Antropológica do Didático. 2015. 281 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

SANTOS, M. R.; COSTA, A. P. O estudo de ângulo em uma coleção de livros didáticos de matemática do ensino fundamental. *In*: SANTOS, M. R. **Logos-Práxis**: Diferentes análises de saberes nós domínios da geometria e das grandezas geométricas. Recife: Ed. UFPE, 2022.

TAQUETTE, S. R.; MINAYO, M. C. Análise de estudos qualitativos conduzidos por médicos publicados em periódicos brasileiros entre 2004 e 2013. **Physis**: Revista de Saúde Coletiva, vol. 26, n. 2, 2016.

VASCONCELOS, C. B.; ROCHA, M. A. **Análise Combinatória e Probabilidade**: Matemática. Fortaleza: Ed. UECE, 2019.

VERBISCK, J. T. S. **Uma análise praxeológica da proposta de ensino de probabilidade em livros didáticos da educação básica.** 2019, n. p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande. 2019.

VIEIRA, J. L. **Dicionário Latim – Português**: termos e expressões. 1ª ed. São Paulo: Edipro, 2020.

VIEIRA, K. M**. O ensino do conceito de ângulos**: limites e possibilidades. 2010. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2010.