UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

LEONARDO BERNARDO DE MORAIS

GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL BRASILEIRO

Recife

2022

LEONARDO BERNARDO DE MORAIS

GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL BRASILEIRO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Paula Moreira Baltar Bellemain

Coorientador: Prof°. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecário Bruno Márcio Gouveia, CRB-4/1788

M828g Morais, Leonardo Bernardo
Grandezas e medidas no ensino fundamental brasileiro / Leonardo Bernardo Morais. –2023.
185 f.

Orientação de: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Coorientação de: Paulo Figueiredo Lima.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2023.
Inclui Referências e anexos.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Didática. 3. Ecologia. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar (Orientação). II. Lima, Paulo Figueiredo (coorientação) III. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2023-101)

LEONARDO BERNARDO DE MORAIS

GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL BRASILEIRO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 13/06/2022

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente da Banca)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Coorientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Examinadora interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Lúcia de Fátima Durão Ferreira (Examinadora externa)
Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Marilena Bittar (Examinadora externa)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias (Examinador externo)
Universidade Federal da Bahia

À minha esposa, Luciana, e ao meu filho Théo.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me encorajar, do início ao fim, na realização deste estudo.

Aos meus pais, responsáveis pelo incentivo incessante, pelo exemplo de pessoas éticas e pelo amor dedicado em todos os momentos.

À minha esposa Luciana, que durante todo esse período esteve comigo nessa empreitada, bloqueando, de alguma maneira, as interferências externas para que eu pudesse me dedicar integralmente à pesquisa.

Ao meu filho Théo, por compartilhar do seu tempo, cedendo-me o precisava para realizar esta pesquisa.

Aos meus irmãos Wellington, Michele, Maria e Jaqueline pela força e incentivo.

Aos meus orientadores, Paula Baltar e Paulo Figueiredo, por acreditarem em mim, por dedicarem um pouco do precioso tempo de suas vidas, sempre muito ocupadas, apoiando-me em cada etapa e proporcionando a oportunidade e o suporte de que eu precisava para seguir.

À professora Rosinalda, pelas inestimáveis contribuições nesta pesquisa, pelos ensinamentos proporcionados ao longo da minha trajetória acadêmica e por sua disponibilidade e prontidão em colaborar, sempre da melhor maneira possível.

A Lúcia Durão, pelas valiosas contribuições nas bancas de Qualificação e de Defesa, pela sua disponibilidade e pelo suporte em todas as etapas da minha vida profissional.

A Marcelo Câmara, por contribuir na construção desta pesquisa desde as aulas de Seminários até o momento da defesa, e também por suas contribuições na minha formação inicial enquanto professor.

A Marilena Bittar, por seus ensinamentos nos diversos momentos de minha formação e por suas inestimáveis contribuições nas bancas de Qualificação e de Defesa.

A Luiz Márcio, pelas ricas contribuições nas bancas de Qualificação e de Defesa, colocadas, ao mesmo tempo, de maneira clara, precisa e suave.

A Franklin Pacheco, Alan Ferreira, Andreza Santana e Jaílson Cavalcante, pelos momentos de estudos compartilhados.

Aos técnicos administrativos do EDUMATEC pelas orientações e atenção dispensada.

Ao Instituto Federal do Sertão Pernambucano, por assegurar minha inteira dedicação à pesquisa.

A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (CARAÇA, 1951, p. III).

RESUMO

Esta pesquisa investigou a relação entre a grandeza e sua medida na Matemática do ensino fundamental brasileiro e visou compreender as razões que levaram à ênfase na medida em detrimento da grandeza. A fundamentação está ancorada no modelo didático-matemático para o conceito de área (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), em aportes da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990) e em construtos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1991). A mesma está organizada em três estudos. No primeiro, problematizou-se a relação entre grandeza e medida na educação básica, à luz da TCC. No segundo, fez-se uma análise ecológica de grandeza na matemática do ensino fundamental brasileiro e no terceiro, analisou-se do ponto de vista epistemológico o conceito de grandeza no saber sábio. Com a TCC e à luz do modelo didático-matemático, constatou-se, tanto em pesquisas mais recentes, como em outras realizadas há mais de uma década, que estudantes de diferentes países e de diferentes etapas de escolarização apresentam dificuldades em distinguir a grandeza de sua medida e, no caso de comprimento, de área e de volume, persiste a não dissociação entre a grandeza e o objeto geométrico. Sob o arcabouço da TAD, constatou-se a prevalência da medida nos documentos curriculares nacionais (RCNEI, PCN, BNCC) e em uma coleção de livros didáticos. A análise epistemológica revelou que o conceito de grandeza esteve filiado inicialmente às práticas sociais e à ideia de fenômeno associado a objetos e, mais tarde, a uma estrutura matemática, com realce para a medida. Com isso, a ênfase nos aspectos numéricos e algébricos no ensino do domínio das grandezas e medidas enquanto saber a ser ensinado na matemática do ensino fundamental brasileiro está relacionada a fatores tais como: evolução do conceito de grandeza enquanto saber sábio ao longo da história da matemática, usos sociais das grandezas e medidas e ecologia das grandezas e medidas nas demais etapas da educação básica.

Palavras-chave: ecologia; grandeza; medida; modelo epistemológico de referência.

ABSTRACT

This research investigated the relationship between magnitude and its measure in brazilian elementary school mathematics and aimed to understand the reasons that led to the emphasis on measure to the detriment of magnitude. The theoretical basis is anchored in the didactic-mathematical model for the concept of area (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), in contributions from the Conceptual Field Theory (CFT) (VERGNAUD, 1990) and in constructs from the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) (CHEVALLARD, 1991). It is a theoretical research organized into three studies. In the first one, the relationship between magnitude and measure in basic education was problematized, based on CFT. In the second, an ecological analysis of magnitude in brazilian school mathematics was carried out and in the third, the concept of magnitude in so called *savoir savant* (ATD) was analyzed from an epistemological point of view. With the ATD and based on the didactic-mathematical model, it was found, both in more recent researches, as in others carried out since a decade ago, that students from different countries and different stages of schooling have difficulties in dissociating the magnitude of its measurement and, in the case of length, area and volume, do not dissociate between the magnitude and the geometric object persists. Under the ATD framework, the prevalence of the measure was found in national curriculum documents (RCNEI, PCN, BNCC, PCN+) and in a collection of textbooks. The epistemological analysis revealed that the concept of magnitude was initially linked to number, social practices and the idea of phenomenon associated with objects, and later to a mathematical structure, with highlighting for measure. Thus, the emphasis on numerical and algebraic aspects in teaching the domain of quantities and measures as knowledge to be taught in mathematics in Brazilian elementary school is related to factors such as: evolution of the concept of magnitude as wise knowledge throughout the history of mathematics, the social uses of magnitudes and measures and the ecology of magnitudes and measures in the other stages of basic education.

Key-words: ecology. magnitude; measure; epistemological reference model.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AF	Anos finais do ensino fundamental
AI	Anos iniciais do ensino fundamental
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
EF	Ensino fundamental
EI	Educação infantil
EM	Ensino médio
Ibid.	Na mesma obra
LD	Livro didático
LE	Livro do estudante
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MP	Manual do professor
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
RCNEI	Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TD	Transposição Didática
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa problematizou o ensino e a aprendizagem de grandezas e medidas na matemática do ensino fundamental brasileiro, considerando para isso suas articulações com outros saberes da matemática, com outras disciplinas, com atividades cotidianas, com práticas profissionais e com o saber sábio. Os conceitos de grandeza e de medida assumem múltiplos usos e essa diversidade traz implicações nos processos de ensino e de aprendizagem, o que nos levou a investigar a relação que se estabelece entre esses conceitos na etapa de ensino mencionada acima.

A escolha por investigar grandezas e medidas decorreu de um interesse anterior, sobre o qual se confundem vivências acadêmicas e profissionais. Minha experiência com esse campo se deu, de início, nos semestres finais da graduação, concomitantemente com minha inserção no grupo de pesquisa *Pró-grandezas: Ensino-aprendizagem das grandezas e medidas*[1] e, mais sistematicamente, durante o curso de Mestrado.

Inicialmente, dediquei-me ao estudo das grandezas geométricas, particularmente à grandeza volume, quando investigamos (MORAIS; BELLEMAIN, 2010) a abordagem desse conceito em livros didáticos voltados para os anos finais do ensino fundamental. Nesse estudo, observamos evidências nítidas da ênfase em procedimentos numérico-algébricos, bem como o uso injustificado da fórmula. Neste caso, justificava-se a validade da fórmula para medidas naturais, mas a passagem para as medidas racionais fracionárias era feita abruptamente sem nenhum alerta de que essa extensão é matematicamente válida.

Posteriormente, continuei a estudar a grandeza volume e a analisar livros didáticos, temas sobre os quais dissertei (MORAIS, 2013), agora no âmbito do ensino médio, que assumia nos documentos curriculares (BRASIL, 2002) da época, uma perspectiva diferente da que ocorria na etapa escolar anterior. Nos anos finais do ensino fundamental, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) é destinado um campo próprio às grandezas, o que não acontece no ensino médio (BRASIL, 2002). Com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) se manteve uma unidade temática denominada grandezas e medidas, mas no ensino médio, esses saberes estão organizados em torno de competências e habilidades, sem a existência de um lugar específico.

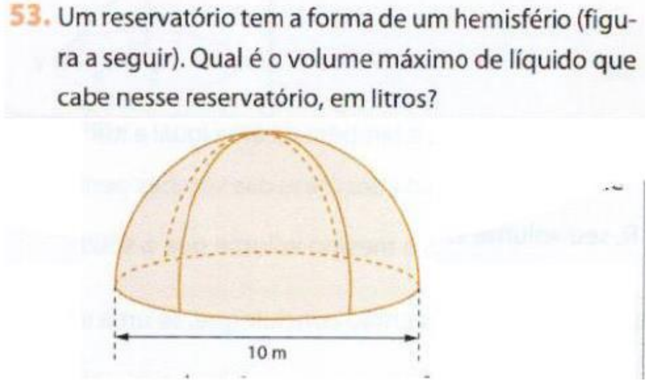
[1] Grupo de pesquisa que se debruça, desde os anos 2000, sobre questões relativas ao ensino e à aprendizagem de grandezas.

Em se tratando da organização curricular para o ensino fundamental nos PCN (BRASIL, 1998), o conceito de volume está inserido no bloco grandezas e medidas, enquanto no ensino médio (BRASIL, 2002), no eixo geometria e medidas. Logo, a inexistência no ensino médio de um lugar dedicado às grandezas nos levou a refletir sobre a abordagem desses conceitos nessa etapa de ensino.

Em ambos os estudos acima mencionados, apoiamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1991), buscando evidenciar se as atividades presentes nas obras didáticas analisadas possibilitavam compreender volume como uma grandeza. Para tanto, consideramos como unidades de análise, relativas à grandeza volume, as propriedades matemáticas, as representações simbólicas, as articulações com outros saberes e os conhecimentos necessários e passíveis de serem mobilizados pelos estudantes para dominar os problemas propostos.

Sob a ótica desse aporte teórico, analisei (MORAIS, 2013) sete coleções de livros didáticos brasileiros aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático para o ensino médio - PNLD (BRASIL, 2011), em que constatei que o tratamento de volume recaía predominantemente em fórmulas e números e quase nunca na grandeza, ou seja, focava-se, em última instância, na obtenção de uma medida (número), sem problematizar, por exemplo, que volume é uma grandeza específica e que tem estreita relação com outras grandezas como massa e densidade. Essa constatação decorreu da ênfase em problemas de cálculo de volume, da presença reiterada nos títulos das seções dos termos “cálculo de volume”, “calculando o volume” e “determinando o volume”, além da abordagem frequente de medidas (números) irracionais e de representações simbólicas em conflito com contextos sociais, como no excerto seguinte.

Figura 1 - Exemplo de representação de um sólido em contraste com o cotidiano



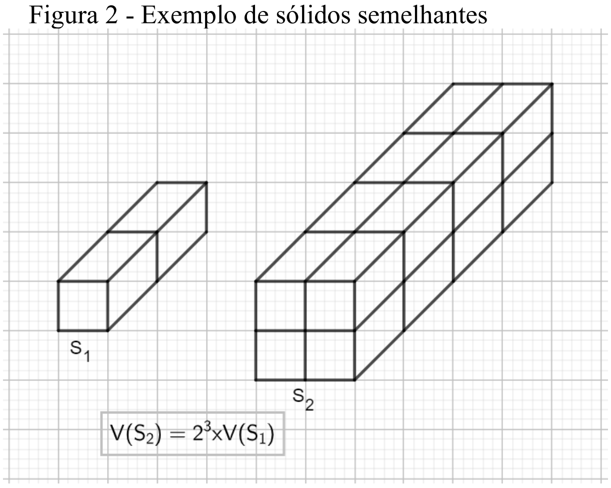
Fonte: Morais (2013, p. 93)

A representação simbólica está em desacordo com situações cotidianas, pois não são usuais modelos concretos de recipientes com esse formato e nessa posição. Por se tratar de uma semiesfera, consequentemente o número π será utilizado. Porém, a atividade não explora, por exemplo, as noções de medida aproximada e margem de erro na medição, o que retiraria a ênfase da fórmula e do cálculo.

A não explicitação dessas questões, bem como a ênfase em procedimentos algébrico-numéricos contribuem para o amálgama da grandeza volume com o sólido, com a medida (número) e até mesmo com as fórmulas. Ao longo da minha investigação observei também uma concentração sistemática desse conceito na segunda metade do livro na maioria das coleções, o que, de certo modo, pode provocar o abandono ou um tempo curto de dedicação ao estudo desse conteúdo em sala de aula. Já nessa ocasião, emergiu minha inquietação pela excessiva valorização, nos livros didáticos, de atividades que exploravam essencialmente procedimentos numérico-algébricos, ou seja, aqueles envolvendo apenas cálculos com fórmulas e números, quando se deveria atribuir à grandeza um lugar mais nítido, sendo ela propulsora do desenvolvimento matemático (D'ALEMBERT et al., 1784).

Por outro lado, em se tratando da minha atuação profissional como professor de matemática do ensino médio, ao abordar, por exemplo, a relação entre os volumes de dois blocos retangulares semelhantes, os estudantes afirmavam que o volume de um deles é o volume do outro multiplicado pela razão de semelhança, desconsiderando, portanto, a trilinearidade da grandeza.

Figura 2 - Exemplo de sólidos semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Também observei, em sala de aula, que a grandeza é frequentemente confundida com o objeto geométrico, o que leva os estudantes a acreditarem que objetos diferentes não podem ter mesmo volume, ou ainda, que volume é a medida resultante da aplicação de uma fórmula. A primeira observação sugere que esses estudantes não compreendem claramente volume como uma grandeza trilinear, em que o volume desse sólido depende do comprimento de três arestas que concorrem em um mesmo vértice, para o caso do bloco retangular. Essa dificuldade está relacionada aos problemas investigados por Vergnaud et al., (1983a), que tratam do conceito de homotetia e que remetem à trilinearidade do volume. Na segunda observação, em que os estudantes confundem o volume com o sólido, reside o fato de que, por exemplo a grandeza volume não se distigue do sólido e por isso ela é compreendida como tal. Por último, volume é considerado como um número e toda a caracterização da grandeza se reduz a operações algébrico-numéricas. Nesse sentido, não é incomum serem observados procedimentos de estudantes em que uma grandeza é representada tão somente pela medida, omitindo-se a unidade. Dessa maneira, por exemplo, é comum os estudantes efetuarem os cálculos utilizando apenas as medidas e acrescentarem a unidade ao final. Nesse caso, em particular, é possível também que não se trate de uma omissão casual, mas uma revelação de como o sujeito conceitua grandeza.

A omissão ou abandono da unidade de medida para representar uma grandeza pode ainda ter razões outras, pois há modelos matemáticos que legitimam a operacionalização algébrica de grandezas, como adicionar dois comprimentos, multiplicar comprimentos ou comprimento por área, multiplicar velocidade por duração de intervalo de tempo, entre outras (WHITNEY, 1968a; WHITNEY, 1968b; FREUDENTHAL, 1983; ROUCHE, 1992; CHEVALLARD; BOSCH, 2002; BELLEMAIN; LIMA, 2002). De outro modo, é legítimo, nesse contexto, adicionar dois comprimentos, assim como multiplicar os comprimentos de lados adjacentes de um retângulo. A primeira operação resulta em um comprimento, enquanto a segunda, em uma área. Portanto, não é necessário realizar essas operações somente sobre as medidas, abandonando-se as unidades, ainda que eventualmente estas possam ser inseridas ao final.

Outro aspecto que contribuiu para minha incursão no campo das grandezas foi sua forte relação com o meio social. Atividades frequentes, como medição da temperatura corporal, preparo de receitas culinárias, estimativa da duração de intervalo de tempo de uma viagem, preparação da dosagem de um medicamento e compras em feiras livres revelam os diferentes usos sociais de saberes desse campo. Algumas dessas atividades remetem a diferentes sociedades e culturas, nas quais o conhecimento empírico motivou o desenvolvimento de conhecimentos científicos.

Com vistas à formação do sujeito como um agente crítico-reflexivo, os conceitos do campo das grandezas e medidas possibilitam compreender fenômenos que nos cercam constantemente no ambiente familiar, nos meios de comunicação e no trabalho. Por exemplo, afirmações como “em duas horas choveu 40 mm” e “Em maio de 2022 o desmatamento na Amazônia Legal foi de 1 476 mil quilômetros quadrados[2]” são recorrentes e a incompreensão dos conceitos comprimento, área e volume limita uma interpretação apropriada dessas informações.

O índice pluviométrico, por exemplo, é um comprimento, que decorre da razão entre outras duas grandezas, volume e área, respectivamente, usualmente expresso em milímetros. Do ponto de vista conceitual, representar esse índice por meio da grandeza comprimento permite comparar diferentes volumes de chuvas, considerando as áreas de incidência dessas chuvas. Além das grandezas geométricas mencionadas, esse índice considera também a grandeza duração de intervalo de tempo. Em se tratando de grandes extensões territoriais, como no exemplo acima, costuma-se utilizar a área de um campo de futebol, que mede $0{,}0108\ km^2$, como unidade de medida de área. Nesse caso, a á área de desmatamento acima mencionada corresponde à área de aproximadamente 137 campos de futebol. Assim, essas duas situações evidenciam a relevância das grandezas e indicam por que é necessário a existência de um campo próprio de estudo, o que permite ao estudante compreender e se posicionar criticamente ao se deparar com informações desse tipo.

Diante da relevância dos conceitos envolvendo grandezas e medidas para a formação do indivíduo, as discussões sobre esse tema na educação básica se fortaleceram nas últimas duas décadas no Brasil e em outros países. Pesquisas científicas (HART; BOOTH, 1984; BALTAR, 1996; BARBOSA, 2002; BELLEMAIN; LIMA, 2002; OLIVEIRA 2002; BARROS, 2002; BRITO, 2003; TELES, 2007; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; FERREIRA, 2010; KOSPENTARIS; SPYROU; LAPPAS, 2011; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; FREITAS, 2015; entre muitos outros) e documentos de orientação curricular nacionais e de Pernambuco, por exemplo, (BRASIL, 1997; 1998; 2000; 2002; 2002b; 2017; 2018; PERNAMBUCO, 2012) destacam a sua importância sociocultural e científica. Além disso, a emergência do grupo de pesquisa *Pró-grandezas: ensino-aprendizagem das grandezas e medidas*, bem como de eventos científicos específicos sobre a temática, fortaleceram a discussão sobre o ensino e a aprendizagem em torno desse ramo de estudo.

Institucionalmente, o ensino brasileiro reconhece a importância das grandezas e medidas, uma vez que sua abordagem está presente nos documentos curriculares que permeiam a educação básica (BRASIL, 1998; 2002b; 2017; 2018) e que lhe é concedido, em alguns desses

[2] Fonte: https://imazon.org.br/publicacoes/sistema-de-alerta-de-desmatamento-sad-maio-de-2022/. Acesso em 28 dez 2022.

documentos, um domínio próprio denominado grandezas e medidas. Essa institucionalização foi um marco importante, pois atribuiu às grandezas um status antes reservado apenas a outros domínios da matemática, como números e geometria. Com isso, paulatinamente as grandezas e suas medidas foram adquirindo o seu lugar em pesquisas, nos livros didáticos e em sala de aula.

A emergência desse domínio provocou alguns avanços no processo de ensino, de modo que as grandezas, por vezes, já aparecem, por exemplo em livros didáticos, como um atributo de um objeto ou de fenômenos passíveis de serem distinguidos e quantificados. Além disso, atividades dedicadas apenas à conversão de unidades ou ao uso de fórmulas e procedimentos puramente numéricos vêm perdendo ênfase (SILVA, 2011; SANTOS, 2019). Nos livros didáticos, contudo, ainda existe um excesso de atividades do tipo medir grandezas (comprimento, área, volume, duração de intervalo de tempo, entre outras), o que revela a persistência no aspecto numérico.

Em se tratando do ensino médio, o trabalho com grandezas no âmbito das aulas de matemática se volta para as grandezas geométricas comprimento, área e volume, situadas, segundo os PCN (BRASIL, 2002b), no eixo geometria e medidas. Por consequência, de certa maneira, isso faz com que o número, a forma e os procedimentos algébricos sejam evidenciados em detrimento do atributo grandeza, conforme se verificou em boa parte das coleções de livros didáticos presentes no PNLD 2012 (MORAIS, 2013; FREITAS, 2015). Desde então, aconteceram os PNLD de 2018 e 2021 e, dessa maneira, é possível que essas abordagens tenham sofrido modificações, o que leva à necessidade de novas análises.

No âmbito das grandezas e medidas se situam diversos conceitos (comprimento, área, volume, massa, densidade, velocidade, temperatura, peso, capacidade, aceleração, duração de intervalo de tempo, força, trabalho, energia, entre muitos outros), que possibilitam fazer inter-relações com outros domínios da matemática, a saber, números, geometria e álgebra, bem como outras disciplinas como física, química, geografia e história. Números e grandezas têm uma estreita relação. Com efeito, a criação dos números racionais e irracionais decorreu de problemas envolvendo medição de grandezas.

Segundo Caraça (1951), a existência da medida foi colocada sob dois pontos de vista: o prático e o teórico. No primeiro caso, afirma ele, é sempre possível exprimir uma medida, que está associada à precisão limitada dos instrumentos de divisão da unidade e de medida. Portanto, tem-se ainda medições concretas, cujo domínio numérico é o conjunto dos números racionais positivos.

Do ponto de vista teórico, surge um caso embaraçoso, que consistiu na impossibilidade de expressar com um número racional a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, tomando o comprimento de um dos catetos como unidade. Neste caso, dizemos que a hipotenusa é incomensurável com o cateto. A solução desse problema se deu com a criação de um novo domínio numérico, a saber, o conjunto dos números irracionais, que representam uma medida teórica, em contraposição às medições práticas, ou seja, aquelas que resultam, necessariamente em um número racional. Assim, uma medida teórica pode ser racional ou irracional e, portanto, é o conjunto dos números reais que vai permitir efetuar qualquer medição teórica. Em resumo, grandeza está no cerne do surgimento e ampliação dos conjuntos numéricos e por isso é uma fonte de ligação entre esses diferentes ramos da Matemática.

A articulação entre Matemática e Física pode ser observada na relação existente entre as grandezas volume e densidade e no uso que se faz da grandeza duração de intervalo de tempo em ambas as disciplinas. Esta última, inclusive, permite ainda relacionar Matemática e História, por meio de construções de linhas temporais no desenvolvimento da humanidade e, em particular, no da Matemática nas diferentes épocas e culturas. Em suma, vê-se o quão relevante é o papel das grandezas no ensino e na aprendizagem não apenas da matemática, mas das ciências da natureza e das ciências humanas.

Não menos importante é a imbricação entre os domínios grandezas e medidas e o da geometria, propiciada pelo estudo das grandezas comprimento, área, volume e abertura de ângulo. Estas, denominadas grandezas geométricas, ocupam um lugar de destaque no ensino brasileiro, estendendo-se dos anos iniciais até o ensino superior, notadamente, nessa última etapa, em cursos voltados para as ciências exatas e correlatas. Além disso, esses conceitos têm um domínio de validade para além das atividades cotidianas, com aplicações em meios técnicos e científicos. Agricultura e engenharia, por exemplo, dois dos mais importantes setores econômicos demandam rotineiramente conhecimentos das referidas grandezas.

Considerando, portanto, a abrangência e a relevância do conceito de grandeza, bem como indícios de seu abandono em favor da medida, optamos por investigar esse fenômeno, em razão de observarmos evidências da ênfase no numérico na abordagem de determinadas grandezas, e ao agrupá-las, constatamos que essa ênfase acontece no domínio das grandezas e medidas. Para nós, trata-se de um fenômeno ainda não investigado no sentido que aqui percorremos, ao menos por três razões. Primeiro, os estudos já realizados sobre grandezas focaram, em última análise, uma grandeza em particular, como comprimento (BARBOSA, 2002; 2007; BRITO, 2003), área (TELES, 2007; KOSPENTARIS; SPYROU; LAPPAS, 2011; ARAÚJO, 2018) ou volume (VERGNAUD et al., 1983; BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2007; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; FREITAS, 2015), ou mais de uma grandeza (HART; BOOTH, 1984; BARROS, 2006; FERREIRA, 2010; SILVA, 2011), mas sem sair do âmbito de uma grandeza, ou seja, não se perdeu de vista o olhar sobre cada grandeza investigada. Neste estudo focamos o conceito de grandeza em sentido mais amplo, cujo olhar se volta, em último plano, para um conjunto de grandezas e não apenas para uma dada grandeza específica.

Segundo, apesar de existirem indícios robustos de que há uma ênfase no numérico, não encontramos estudos que explicitem as razões por que isso acontece, mesmo diante de indicações de relevo, de que esse destaque na medida provoca consequências prejudiciais para aprendizagem do conceito de grandeza na escola. Na verdade, em sentido contrário, deparamo-nos, de maneira recorrente, com documentos curriculares e coleções de livros didáticos que reforçam esse fenômeno.

Por fim, buscaremos explicar a ênfase no número como um fenômeno presente na matemática do ensino fundamental brasileiro e acreditamos que para entendê-lo e explicá-lo, faz-se necessário tomar distância do nível de ensino considerado, bem como buscar as interrelações entre esse nível e as demais etapas da educação básica, assim como com as práticas sociais, com a história da matemática, com a matemática acadêmica contemporânea, com a educação matemática e com a matemática dos anos iniciais, dos anos finais e de ensino médio da educação básica. Além disso, tendo em vista as consequências prejudiciais, buscaremos evidenciar alternativas possíveis para superá-las.

Conforme já mencionado, esta investigação está vinculada ao grupo de pesquisa Pró-Grandezas, que há mais de vinte anos desenvolve pesquisas e extensão envolvendo o ensino e a aprendizagem de grandezas e suas medidas, notadamente as geométricas. Nesse percurso, adotou-se um modelo didático-matemático (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) que legitimou a conceituação de área como uma grandeza, que consiste em distinguir três quadros: o numérico, o geométrico e o das grandezas. A palavra quadro, segundo Douady (1986, pp. 10-11 tradução nossa): “deve ser entendida no sentido usual que tem quando falamos de um quadro algébrico, um quadro aritmético, um quadro geométrico, mas também um quadro qualitativo ou um quadro algorítmico”. Ela, então, define quadro:

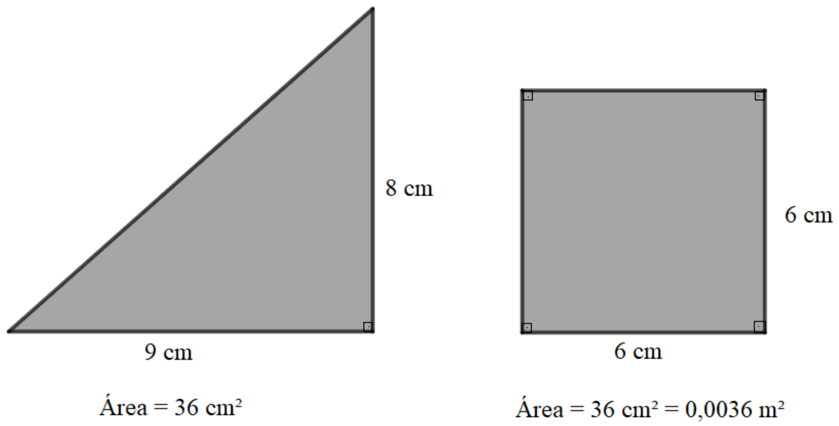
> Digamos que um quadro é feito dos objetos de um ramo da matemática, as relações entre os objetos, suas possivelmente várias formulações e as imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens desempenham um papel essencial no funcionamento como ferramenta dos objetos do quadro. Dois quadros podem incluir os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e pela problemática desenvolvida. Por outro lado, a familiaridade, a experiência podem levar a conflitos entre o que se espera e o que realmente acontece e, consequentemente, renovar as imagens ou fazê-las evoluir. Vemos a noção de quadro como uma noção dinâmica. A

> *mudança de quadros* é uma forma de obter diferentes formulações de um problema que, sem necessariamente serem inteiramente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas e a implementação de ferramentas e técnicas que não eram necessárias na primeira formulação (DOUADY, 1986, pp. 10 -11 tradução nossa).

Para o caso das grandezas geométricas, há, portanto, três quadros, que possuem, cada um, seus objetos, relações e imagens mentais associadas a esses objetos. O quadro numérico, envolve as medidas, que resultam do processo de medição, sendo, portanto, o conjunto dos números reais não negativos. O quadro geométrico contempla os objetos geométricos, entre eles, segmentos de reta, superfícies planas e sólidos geométricos. Por último, no quadro das grandezas, têm-se, entre outras, as classes de equivalência de superfícies de mesma área, ou seja, a partição do conjunto de superfícies em subconjuntos que satisfazem a relação *ter mesma área*.

Ao considerar área como grandeza, Douady e Perrin-Glorian (1989) evidenciaram a distinção da grandeza em relação à medida e à superfície, que de outro modo, pode ser expressa como superfícies diferentes podem ter mesma área e que a medida se estabelece em função da unidade escolhida, podendo mudar, mas preservando a área. Por exemplo, um triângulo cujos comprimentos do lado e da altura relativa a esse lado medem, respectivamente, 9 cm e 8 cm, tem a mesma área de um quadrado, cujo comprimento do lado mede 6 cm. Além disso, a área desse quadrado tem medida 36, se a unidade escolhida for o cm^2, e medida $0{,}0036$, se a unidade escolhida for o m^2. Portanto, medidas diferentes $(36 \neq 0{,}0036)$ para uma mesma área $(36\ cm^2 = 0{,}0036m^2)$.

Figura 3 - Superfícies diferentes de mesma área



Fonte: Elaboradas pelo autor (2022)

Ao conceber esse modelo, as pesquisadoras já apontavam que a ênfase no numérico provocava distorções na aprendizagem do conceito de área e que por isso era necessário compreender área e sua medida (número), assim como área e a superfície como noções distintas. Inspiradas em Douady e Perrin-Glorian (1989), desenvolveram-se várias pesquisas (BALTAR, 1996; TELES, 2007; FERREIRA, 2010) que não apenas ratificaram o modelo por elas elaborado, como também o ampliaram para as grandezas comprimento (BRITO, 2003; BARBOSA, 2002; 2007) e volume (BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; FIGUEIREDO, 2013), o que permitiu inferir que o fenômeno da ênfase no número era transversal à grandeza área. Desse modo, assumimos como modelo teórico, o construto proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) e seus desdobramentos, os quais serão retomados e aprofundados nos capítulos seguintes.

Para além do modelo matemático-didático acima mencionado, recorremos à Teoria dos Campos Conceituais para analisar e compreender os conceitos em torno das grandezas geométricas. Se por um lado o mencionado modelo organizou o ensino de área enquanto grandeza, por outro, a TCC permitiu questionar quais *situações*, *invariantes operatórios* e *representações simbólicas* dão sentido a esse conceito. Portanto, recorremos a esse referencial teórico, que para nós serviu como um motor de ampliação (FERREIRA, 2018) do modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Ancoramo-nos também nos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1991), desenvolvida sob a direção de Yves Chevallard, que, entre outras coisas, situa o saber considerando suas múltiplas inserções e usos nos diferentes espaços (CHEVALLARD, 1997), a exemplo da escola e de outras práticas sociais, dos currículos, entre outros, ou seja, tem em vista o “ambiente” no qual ele se apresenta. Além disso, esse marco teórico coloca as atividades matemáticas no âmbito das atividades humanas, possibilitando ao pesquisador modelá-las em termos de *tarefas* a desempenhar, das *técnicas* que resolvem essas tarefas, das *tecnologias* que explicam as técnicas e das *teorias* que legitimam essas *tecnologias*. Portanto, ao considerarmos o fenômeno da ênfase no numérico observado no ensino básico brasileiro, a referida teoria traz subsídios para problematizarmos esse fenômeno no ensino fundamental, sem perder de vista as influências internas e externas que recaem sobre essa etapa de ensino.

A interface entre teorias não é uma novidade na pesquisa em Educação Matemática, em particular na didática francesa, segundo Michèle Artigue, em sua apresentação no VIII Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Para ela, com quem concordamos, ao abordar interfaces entre teorias, faz-se necessário pensar sobre essas ligações sem distorcê-las e ir além de uma perspectiva de sistemas articulados de conceitos, considerando o propósito e as funcionalidades de cada marco teórico. Não se trata, portanto, de comparar teorias, mas utilizar, cada uma, para interpretar os fenômenos observados sob diferentes perspectivas, mas que se complementam.

Nesse sentido, deparamo-nos com as pesquisas de Anwandter-Cuellar (2008) e Ferreira (2018), que além de buscarem interfaces entre TCC e TAD, tiveram como objetos do saber, as grandezas volume e área, respectivamente. A primeira utilizou a TCC para identificar e classificar um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de volume, como também para classificar e descrever os procedimentos matemáticos dos alunos por meio do estudo dos *teoremas-em ação* e *conceitos-em-ação* utilizados por eles em situações de resolução de problemas. No caso da TAD, ela a utilizou como uma ferramenta para analisar matematicamente os problemas propostos aos alunos e realizar análises a priori e a posteriori, em complementação à cognitiva no âmbito da TCC.

Em se tratando de Ferreira (2018), ela utilizou a TCC para investigar "o modo como os alunos lidam com as situações que dão sentido à área e ao perímetro" (p. 72), e no caso da TAD, "o modo como as instituições lidam com esse objeto".

Em nossa pesquisa, adotamos os referidos marcos teóricos considerando as perspectivas de interface postas por Michèle Artigue e considerando as confluências das pesquisas de Anwandter-Cuellar (2008) e Ferreira (2018), que, em nosso entender, têm em comum, por um lado, a organização do conceito de área em torno de um campo conceitual e, por outro, as diferentes práticas desenvolvidas em torno de uma grandeza geométrica.

Portanto, em resumo, partimos do modelo didático-matemático, que foi ampliando sob uma perspectiva didático-cognitiva, cujo saber em evidência foi inserido em uma *realidade institucional.*

Douady e Perrin-Glorian (1989) focaram no conceito de área, e que a ampliação para comprimento (BARBOSA, 2002; BRITO, 2003) e volume (ANWANDTER-CUEELAR, 2008; FIGUEIREDO, 2013) se mostrou pertinente. Portanto, consideraremos a adaptação do referido modelo incluindo as grandezas geométricas comprimento, volume e abertura de ângulo, ditas, juntamente com área, grandezas geométricas. Sobre abertura de ângulo, não encontramos estudos nessa perspectiva, levando-nos a considerar apenas as demais grandezas geométricas.

Ao estudar comprimento, área, volume e abertura de ângulo, inevitavelmente os entes geométricos linhas simples abertas e fechadas, linhas não simples, semirretas, círculos, circunferências, regiões poligonais e sólidos são explorados, pois a eles se associam essas grandezas. Comprimento pode ser associado a linhas simples abertas e fechadas, abertura de ângulo a ângulos, área a superfícies e volume a sólidos. Logo, por um lado, tem-se as grandezas e por outro, os objetos geométricos. Somam-se a isso os objetos manipuláveis, que embora tenham natureza distinta dos anteriores, podem ser modelados matematicamente pelos entes geométricos e que recebem uma atenção destacada nos anos iniciais de escolarização, em razão de suas propriedades físicas. É o caso, por exemplo, de palitos, caixas, recipientes, entre outros. No entanto, como veremos adiante, o conceito de grandeza não é trivial, o que conduz a uma análise minuciosa capaz de trazer respostas para as seguintes questões:

- O que é grandeza?
- O que é medida?
- Que relações existem entre grandeza e medida?
- Por que se ensina grandeza nos anos finais do ensino fundamental? O que se ensina? Como se ensina? O que não se ensina? Por quê?

Para compreender a relação entre a grandeza e sua medida, entendemos ser necessário compreender o conceito da primeira e como ela se estrutura em termos de modelos matemáticos e didáticos.

Para isso, estruturamos esta tese em cinco capítulos. O primeiro corresponde à introdução, com a construção da problemática e da apresentação dos elementos principais que serão aprofundados ao longo da pesquisa.

No segundo capítulo anunciamos um modelo didático-matemático para o conceito de área, adotado como referência para analisar o ensino e a aprendizagem desse saber e, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, problematizamos a relação entre grandeza e medida na educação básica. Nele, também evidenciamos a ênfase das grandezas em detrimento do número, bem como explicitamos efeitos negativos dessa ênfase.

No capítulo três apresentamos os pressupostos teóricos da Teoria Antropológica do Didático sobre os quais nos apoiamos, para analisar o saber grandeza no âmbito da matemática do ensino fundamental. Optamos por fazer um resgate histórico, ainda que breve, dos elementos de base da Teoria Antropológica do Didático (TAD), tendo em vista que nosso objetivo é também compreender o processo de transposição das grandezas no seu decurso histórico para, com isso, compreendê-la no âmbito do ensino fundamental brasileiro. Assim, entendemos que não se pode, ao mesmo tempo, perder de vista a gênese dessa teoria, bem como as noções que a colocam no âmbito antropológico.

No capítulo 4 realizamos uma análise sistemática de grandeza, sob a ótica da TAD, nos documentos curriculares nacionais e em uma coleção de livros didáticos, considerando diferentes etapas da educação básica.

No capítulo 5 analisamos o saber grandeza sob uma perspectiva epistemológica e didática. Nessa incursão, elencamos questões que explicam a complexidade do conceito de grandeza e também anunciamos um modelo epistemológico de referência por meio do qual se pode questionar a abordagem desse saber na matemática do ensino fundamental.

Por fim, apresentamos as considerações finais, com a retomada dos objetivos, dos achados principais, da anunciação da tese e finalizamos com indicações de pesquisas futuras.

2 PROBLEMATIZANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS GRANDEZAS E MEDIDAS

Neste capítulo, confirmamos a hipótese de que existe uma ênfase no numérico, no ensino das grandezas geométricas e que essa tendência perdura há décadas. Também indicamos algumas consequências dessa ênfase. Para isso, apoiamo-nos em estudos que investigaram questões acerca da aprendizagem e/ou do ensino de grandezas geométricas desde os anos 1980, tanto no Brasil como em outros países (HART; BOOTH, 1984; MOREIRA-BALTAR; COMITI, 1994; BALTAR, 1996; BELLEMAIN; LIMA, 2002; BARROS 2002; BARROS, 2006; OLIVEIRA, 2007; TELES, 2007; FERREIRA, 2010; KOSPENTARIS; SPYROU; LAPPAS, 2011; SILVA, 2011; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; ARAÚJO, 2018; BALTAR, 2021), muitos dos quais dão continuidade às investigações desenvolvidas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian a partir da década de 1980.

Também buscamos lançar luz sobre aspectos cognitivos e didáticos em torno das grandezas - notadamente as geométricas - e das medidas, para melhor compreender tanto maneiras de organização do ensino de conceitos desse domínio como origens de dificuldades e erros manifestados por estudantes.

Nesse sentido, organizamos este capítulo em cinco tópicos. No primeiro, apresentamos o modelo didático-matemático desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), que estabelece a perspectiva de grandeza que adotamos. O tópico 2 traz alguns construtos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), com base na qual foi realizada uma primeira ampliação do referido modelo, com foco em aspectos cognitivos relativos às grandezas geométricas comprimento, área e volume. O terceiro tópico é dedicado ao estudo de um conjunto amplo e diverso de pesquisas que se debruçaram sobre grandezas, especialmente as geométricas, cuja leitura foi realizada sob a ótica da TCC, ainda que algumas delas não tenham adotado esse marco teórico. Nesse tópico, combinado com os dois anteriores, evidenciamos a ênfase no numérico e suas consequências. O tópico 4 discute pesquisas sobre a abordagem de comprimento, área e volume em livros didáticos, sobretudo os brasileiros. Por fim, no tópico 5, explicitamos a questão de pesquisa que buscamos responder nesta tese.

2.1 ESBOÇANDO UM MODELO DIDÁTICO-MATEMÁTICO EM TORNO DA ÁREA DE

SUPERFÍCIES PLANAS

Na década de 1980, Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian se debruçaram sobre o ensino e a aprendizagem de área de figuras geométricas planas e publicaram alguns estudos em que defenderam a abordagem desse conceito como grandeza. Entre eles, encontra-se o artigo intitulado "Um processo de aprendizagem do conceito de área de superfície plana[3]" (tradução nossa), publicado na revista *Educational Studies in Mathematics* em 1989, no qual apresentaram um modelo didático-matemático, em que defendem a abordagem da grandeza área, distinguindo a área tanto da superfície como do número que expressa sua medida numa determinada unidade.

As autoras elaboraram e aplicaram sequências didáticas com estudantes franceses com idades entre 09 e 12 anos, buscando validar as seguintes hipóteses:

> - desenvolver o conceito de área como grandeza ajuda os alunos a estabelecerem relações entre os quadros geométrico e numérico.
> - uma identificação precoce entre grandezas e números conduz os alunos a fazerem confusões entre comprimento e área (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 387, tradução nossa)[4].

Segundo as pesquisadoras, algumas dificuldades eram frequentemente observadas entre alunos dos anos iniciais ao resolverem problemas sobre a área. Entre elas, destacamos:

> - a superfície unitária sendo uma superfície com certa forma faz com que a possibilidade de medida de uma superfície dependa de S ser efetivamente ladrilhável com elementos daquela forma. Assim, os alunos encontram dificuldade para representar a área de um triângulo em cm² dada a impossibilidade de cobri-lo com um número finito de quadrados.
> - a área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície (…) (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 394 tradução nossa)[5].

Logo, para alguns alunos duas superfícies de mesma área têm necessariamente o mesmo perímetro, e se o perímetro de uma superfície se altera, sua área também se modifica (e reciprocamente). As autoras observaram ainda a extensão de certas fórmulas para casos em que

[3] Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane.

[4] - developing the concept of area as a magnitude helps the pupils to establish relations between the geometrical and the numerical setting; - early identification between magnitudes and numbers induces confusion between length and area.

[5] La surface unité étant une surface avec une certaine forme, la mesure d'une surface S est tributaire de la possibilité de paver effectivement S avec cette forme. Ainsi des élèves rencontrent des difficultés pour exprimer l'aire d'un triangle en cm² puisqu'on ne peut pas le paver avec des carrés. L'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas d'autres caractéristiques de cette surface (…).

elas não são válidas, como multiplicar os comprimentos dos lados de um triângulo ou multiplicar os comprimentos de lados adjacentes de um paralelogramo para obter a área dessas figuras (em analogia ao modo de calcular a área de um retângulo). Esses erros, para elas, parecem ser originários do ensino de área considerando apenas dois aspectos: a superfície e a medida.

Do mesmo modo, na resolução de problemas envolvendo área de superfícies planas, os alunos mobilizam, por vezes, o que as autoras chamam de concepção forma ou uma concepção número e, em alguns casos, ambas as concepções, mas dissociadas uma da outra, sem interrelacionar superfície e número.

Uma concepção forma pode levar os alunos a compreenderem que para diminuir a área de uma superfície plana é preciso reduzi-la mantendo sua forma (o que traz como consequência que o perímetro também fica menor). Já a mobilização de uma concepção numérica leva a considerar relevantes somente os aspectos necessários para o cálculo, o que ocasiona, por exemplo, a extensão indevida da validade das fórmulas anteriormente mencionada.

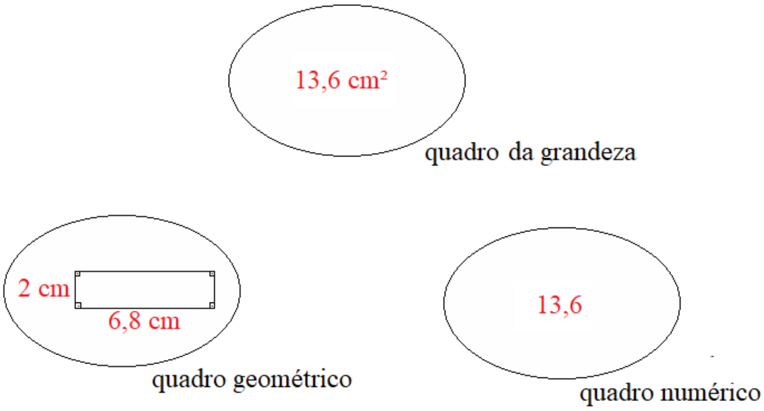
Douady e Perrin-Glorian (1989) argumentam que os problemas de área devem invocar essencialmente as relações entre os aspectos geométricos e numéricos e defendem que esse conceito é um "elemento de ligação entre as superfícies e os números". (Ibid., p. 395).

Nesse sentido, assumir esses pressupostos implica, segundo elas, em

> - liberar a área da forma e estabelecer a diferença entre área e superfície: duas superfícies de formas diferentes podem ter áreas iguais.
> - distinguir a área do número controlando a correspondência superfícies → números: a uma mesma superfície podem corresponder números diferentes segundo a unidade escolhida, mas a área não muda (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 394 tradução nossa).

Portanto, o modelo didático para conceituar área como grandeza, por elas estabelecido, perpassa pela distinção de três quadros: o das superfícies, o das grandezas e o dos números. Sob essa perspectiva, área não é a superfície, uma vez que superfícies distintas podem ter áreas iguais. Tampouco área é um número, pois a mudança da unidade provoca uma mudança na medida da área, embora a área seja invariante.

Figura 4 - Quadros associados à grandeza área



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Um dos objetivos de aprendizagem das sequências didáticas implementadas pelas autoras foi associar um número ao máximo de superfícies possíveis, para com isso efetuar comparações e cálculos. Porém, as pesquisadoras consideravam que, antes disso, era necessário que os alunos distinguissem área de superfície, assim como área de número, o que se apoia na hipótese de que o desenvolvimento da área como grandeza favorece o estabelecimento das relações entre os quadros geométrico e numérico.

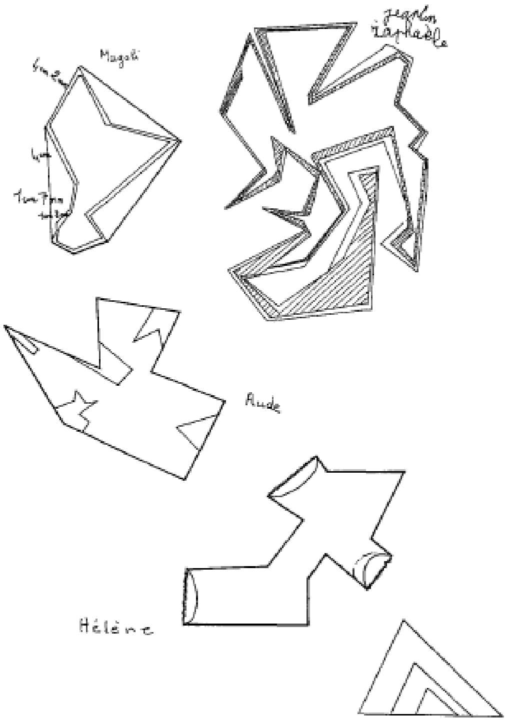
Outro objetivo era distinguir comprimento e área, antes mesmo de ter meios para medir a área, pois “(...) uma identificação precoce entre grandezas e números favorece o amálgama entre as diferentes grandezas em jogo (no caso área e comprimento)”. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, pp. 387-388).

Assumindo essas hipóteses, as pesquisadoras conceberam e experimentaram uma engenharia didática com crianças de idades de 09 e 10 anos e de 11 e 12 anos das classes CM1 e CM2, equivalentes no Brasil, aos 4° e 5° anos, respectivamente. Além das produções dos alunos em sala, foram coletados dados também por meio de testes escritos e entrevistas.

As sessões se encadearam, no CM1, com experimentos envolvendo comparação de área, independência entre perímetro e área e ladrilhamento de superfícies. Na classe de CM2, seguiram-se os mesmos experimentos da CM1 com o acréscimo de outras sessões dedicadas ao trabalho com medidas.

Os resultados mostraram, durante a implementação das sequências didáticas, indícios da mobilização da concepção forma, bem como do amálgama perímetro - área. A concepção forma foi observada por exemplo, em uma atividade que requeria a modificação de uma superfície para obter outra com área menor e perímetro maior do que aqueles da superfície dada. Neste caso, alguns estudantes ficaram presos à forma, conforme figura seguinte:

Figura 5 - Modificação de uma superfície mantendo a forma.



Fonte: Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 407).

Por exemplo, o aluno que recebeu um triângulo desenhou essa mesma figura no interior da original, buscando obter área menor, mas ao perceber que o perímetro também diminuiu, ele desenhou mais um triângulo, o que mostra seu aprisionamento à forma.

Nas atividades que envolveram medidas, as autoras relataram que,

> Os alunos não encontram dificuldade para associar números diferentes à mesma superfície, os quais expressam resultados de ladrilhamento com unidades diferentes ou de medidas obtidas indiretamente. O recurso aos números para comparar as superfícies e a necessidade de utilizar a mesma unidade para medir as superfícies a comparar não causaram problemas. As únicas dificuldades foram relativas aos números quando se tratavam de números fracionários (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 409, tradução nossa)[6].

De um modo geral, segundo as pesquisadoras, a medição da área de superfícies, bem como a comparação por meio de medidas não se mostraram problemáticas. Porém, esse desempenho não se manteve quando os números estiveram ausentes.

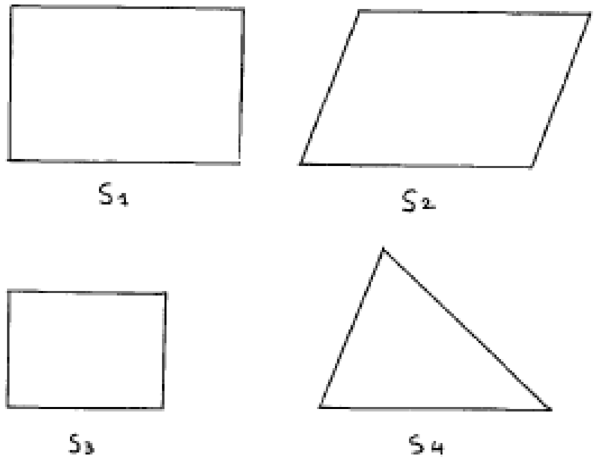
---

[6] Traduzido do original em francês: Les élèves n'ont pas recontré de difficulté pour associer des nombres différents à la même surface, que ce soit pour exprimer le résultat de pavages avec des unités différentes ou des mesures obtenues indirectement. Le recours aux nombres pour comparer des surfaces et la nécessité d'utiliser une même unitè pour mesurer les surfaces à comparer n'ont posé de problème pour personne. Les seules difficultés ètalent sur les nombres dans le cas où ils étaient fractionnaires.

Além disso, apesar de a engenharia didática ser ancorada em hipóteses que confrontavam a compreensão da grandeza área como uma superfície ou um número, ficou evidente para as pesquisadoras que os alunos recorriam a medidas, mesmo quando isso não era necessário, inclusive após a vivência das sequências didáticas.

É o caso, por exemplo, dos procedimentos de resolução apresentados ao longo das entrevistas após a experimentação da sequência didática, em que foi apresentada para alguns estudantes uma atividade de comparação de área, fornecida em papel branco, conforme a figura a seguir:

Figura 6 - Comparação de áreas de figuras planas.



Fonte: Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 404)

Nessa atividade, não foram fornecidas medidas e era possível comparar as áreas das superfícies por meio da sobreposição das figuras ou da decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição. Entretanto, alguns alunos remeteram a comparação das áreas a uma comparação de números, utilizando ladrilhamentos e fazendo uso dos comprimentos dos lados para produzir fórmulas errôneas no caso do triângulo e do paralelogramo. Portanto, a necessidade de remeter aos números era latente, sobretudo para os estudantes que já conheciam a fórmula do cálculo da área do retângulo.

Retomando os objetivos desse estudo, que consistiram em desenvolver a noção de área como grandeza e construir uma função matemática que associasse números a superfícies, de modo a fazer sentido para os alunos, as pesquisadoras constataram que "o jogo entre os quadros geométrico e numérico faz avançar o conhecimento dos alunos sobre a noção de área, sobre a medida, sobre os números." (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, p. 398, tradução nossa)[7]. Ao

[7] Le jeu entre les cadres géométrique et numérique fait avancer la connaissance des élèves sur la notion d'aire, sur la mesure, sur les nombres.

mesmo tempo, elas observaram também que "uma consequência da aprendizagem é o distanciamento da relação da concepção área ligada à forma". (Ibid., p. 418)[8]. Portanto, em resumo, o modelo didático por elas proposto consiste em distinguir área da superfície, assim como área do número.

Em suas conclusões, as autoras destacaram também os aspectos: papel branco, papel quadriculado. Enquanto o papel quadriculado induz à mobilização de uma concepção de área a partir da quantidade de quadrados que constitui uma superfície, o papel branco favorece a mobilização de outra concepção, que independe dos números. Por exemplo, no primeiro caso, duas superfícies representadas em papel quadriculado têm mesma área se são constituídas pelo mesmo número de quadradinhos. No segundo, a comparação de área pode ser feita utilizando sobreposição, corte e colagem. Esse jogo de quadros, que consiste em mostrar que duas superfícies que têm mesma área no papel branco o têm também no quadriculado, permite estender o significado "ter mesma área".

A relação estático-dinâmico foi outro importante aspecto observado, em que a interação dos pontos de vista estático e dinâmico é necessária tanto para compreender área como grandeza, quanto para dissociá-la de perímetro. Nesse sentido, segundo elas,

> Surgiu ao longo das entrevistas, ao final das sequências realizadas, que os alunos levaram em conta nas suas decisões os efeitos de deformações contínuas sobre as superfícies que eles manipulam, sobretudo nos casos onde as superfícies são usuais. Assim, certos alunos olham um paralelogramo como um retângulo deformado, para eles os comprimentos dos lados não variam na transformação, e a área também não – tanto no caso de uma articulação em torno dos vértices (comprimento dos lados conservados) ou do deslizamento de um lado sobre sua reta suporte (área conservada) (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 416)[9].

O excerto acima está ilustrado nas figuras 7 e 8:

[8] une des consequences de l'apprentissage est la prise de distance par rapport à la conception de l'aire liée à la forme.

[9] Il est apparu au cours des entretiens, at la fin des séquences réalisées, que les élèves prennent en compte dans leurs décisions les effets de déformations, en fait continues, sur les surfaces qu'ils manipulent, surtout dans le cas de surfaces usuelles. Ainsi, certains élèves voient un parallélogramme comme un rectangle déformé, pour eux les longueurs des côtés ne varient pas dans la transformation, et l'aire non plus- qu'il s'agisse d'une articulation autour des sommets (longueurs des côtés conserves) ou du glissement d'un côté sur son support (aire conservée).

Figura 7 - Articulação em torno dos vértices

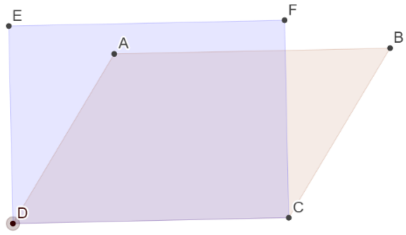
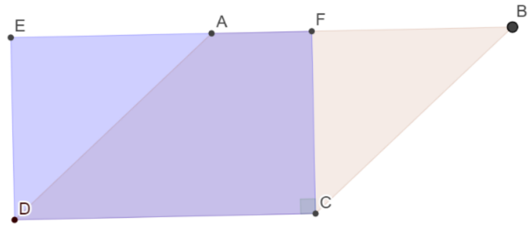


Figura 8 - Deslisamento de um lado sobre sua reta suporte



Fonte: Elaboradas pelo autor (2022)

Essa relação estático - dinâmico amplia o quadro geométrico ao colocar diferentes pontos de vista sobre as superfícies, em que a primeira privilegia o aspecto descritivo, enquanto a segunda, os efeitos de ações sobre elas. Com isso, segundo as autoras, tem-se um novo tipo de objeto, uma família de superfícies, que ao permitir fazer novas perguntas, contribui para que os estudantes rejeitem concepções errôneas. Por exemplo, com o aspecto dinâmico, é possível, questionar como varia a área ao transformar um retângulo em um paralelogramo, inclinando cada vez mais dois de seus lados paralelos e conservando a direção dos outros dois.

Essa dialética estático-dinâmico não foi inicialmente prevista pelas pesquisadoras, o que as levou a estabelecer uma nova hipótese: “no quadro geométrico, uma interação entre os pontos de vista estático e dinâmico é necessária na conceitualização da grandeza área e na sua dissociação do comprimento”. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, p. 417).

O referido modelo inspirou outros estudos, o que não apenas ratificou a pertinência de considerar área como grandeza a partir do jogo de quadros (DOUADY, 1986), como também ampliou seus alcances, observando erros e dificuldades no ensino e na aprendizagem e propondo novos aportes teóricos para conceituar área (DOUADY, 1990; MOREIRA-BALTAR; COMITI, 1993; BALTAR, 1996; MOREIRA BALTAR, 1996b; KOSPENTARIS; FERREIRA, 2010; SPYROU; LAPPAS, 2011). Além destes, outras pesquisas adotaram o modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) para conceituar comprimento e volume, utilizando-o como modelo teórico para organizar o ensino e a aprendizagem dessas grandezas.

Nesse sentido, elencamos um conjunto de pesquisas que se debruçaram sobre as grandezas geométricas, cujas leituras por nós realizadas foram feitas sob a ótica do referido modelo didático. Uma leitura preliminar desses estudos indicou que boa parte deles foi realizado sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, o que nos fez adotar alguns pressupostos dessa teoria, que serão discutidos no tópico seguinte.

2.2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E SEUS APORTES PARA A DIDÁTICA DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS E SUAS MEDIDAS

Ao longo da minha trajetória acadêmica e profissional, esse marco teórico tem norteado meus olhares sobre os fenômenos didáticos manifestados em sala de aula. Com ele, pude, ao mesmo tempo, enxergar e atribuir sentido às ações dos sujeitos ao lidar com conceitos matemáticos.

Ainda que meu objeto de pesquisa tenha me conduzido a adotar como marco teórico central a Teoria Antropológica do Didático, parece-me que a sistematização dos achados de pesquisas anteriores a partir do olhar da Teoria dos Campos Conceituais permite encontrar respostas a meus questionamentos, que, de outra maneira, poderiam permanecer às sombras. Tratam-se de olhares sobre fenômenos didáticos relativos às grandezas geométricas já relatados na literatura. Sobre essas pesquisas, busquei problematizar o ensino e a aprendizagem das grandezas e medidas na educação básica.

Conforme já mencionado, a TCC me permitiu observar questões que enriqueceram o modelo didático-matemático acima descrito (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), sobretudo aqueles manifestados pelos estudantes ao lidarem com problemas envolvendo grandezas. Nesse sentido, em consonância com Ferreira (2018, p. 80), a TCC funciona em nosso estudo como uma "espécie de motor" para alimentar e ampliar o referido modelo didático-matemático.

2. 2. 1 Teoria dos Campos Conceituais

A mencionada teoria foi desenvolvida sob a direção de Gérard Vergnaud (1982, 1990, 1991, 2009), caracterizando-se, segundo ele, como "uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, nomeadamente daquelas que se revelam das ciências e das técnicas". (VERGNAUD, 1991, p. 155). Não se trata de uma teoria exclusiva da Matemática, mas a ela se filiou por se desenvolver no âmbito dessa ciência, na busca de compreender, dentre outros fenômenos, os processos de conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas. Segundo Vergnaud (1991), sua finalidade primeira era compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, os quais, para ele, são entendidos como "tanto o saber fazer como os saberes expressos". (Ibid., p. 155).

Na Teoria dos Campos Conceituais, os conceitos são entendidos para além das suas definições e ganham sentido para o sujeito mediante o enfrentamento de situações e de problemas a resolver.

2.2.1.1 Esquemas

Esquema é um dos conceitos centrais nesse marco teórico, pois é por meio dele que os sujeitos revelam seus conhecimentos, ao enfrentar uma dada situação ou um problema. Segundo Vergnaud (1991), esquema é definido como “a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações”. (Ibid., p. 157). Entre os componentes dos esquemas estão os invariantes operatórios, classificados como conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Trata-se dos conhecimentos-em-ação, ou seja, os conhecimentos mobilizados pelo sujeito ao enfrentar situações, mesmo que não sejam necessariamente capazes de explicitá-los. Os conceitos-em-ação são apenas considerados pertinentes ou não na ação do sujeito, enquanto os teoremas-em-ação podem ser verdadeiros ou falsos, pois se tratam de uma sentença ou proposição em um dado contexto.

Para ilustrar, tomemos uma situação na qual se busca saber o que acontece com a área de um retângulo quando os comprimentos de seus lados são duplicados. Para concluir que a área do novo retângulo é quatro vezes a do retângulo original, mobilizam-se conceitos-em-ação como semelhança e função bilinear e o teorema-em-ação - verdadeiro, na geometria euclidiana - segundo o qual, se a razão de semelhança entre duas figuras é r, a razão entre suas áreas é r^2. Como se sabe, é muito frequente entre alunos da educação básica considerar que em uma ampliação, se os comprimentos dos lados de uma figura são duplicados, a área da nova figura é duas vezes a área da figura original. Nesse caso, inferimos que os alunos estão mobilizando um teorema-em-ação falso, segundo o qual, se a razão de semelhança entre duas figuras é r, a razão entre suas áreas também é r.

Não menos importantes, são as representações simbólicas, às quais Vergnaud (2009) atribui relevância no processo de conceitualização e as coloca como um meio possível para analisar e descrever operações mentais de pensamento. No âmbito da Teoria dos Campos Conceituais, situações, invariantes operatórios e representações simbólicas são indissociáveis e são a chave para o desenvolvimento dos conceitos, embora enquanto ferramenta de análise, a TCC permita momentaneamente focar em determinado aspecto como por exemplo, os teoremas-em-ação.

2.2.1.2 Campo conceitual

Um campo conceitual, para Vergnaud (2009),

> É ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos interligados. Com isso, quero dizer que o significado de um conceito não vem de apenas uma situação, mas de uma variedade de situações e que, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada com um único conceito, mas sim com vários conceitos, formando sistemas (VERGNAUD, 2009, p. 86).

Para Vergnaud (1982), um campo conceitual é um organizador do conhecimento, cujo domínio demanda acúmulo de experiência. Trata-se, segundo ele, de "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (VERGNAUD, 2009, p. 40). O campo conceitual das grandezas e medidas envolve, por exemplo, os conceitos de grandeza, de número, de figuras geométricas, de proporcionalidade, de espaço vetorial, assim como situações de medição, de comparação, de produção e de estimativas de grandezas. Conforme dito acima, trata-se de uma teoria cognitivista, por meio da qual se investiga, entre outros fenômenos, como os estudantes aprendem matemática e, portanto, investiga o desenvolvimento cognitivo dos mesmos, particularmente crianças e adolescentes. Por essa razão, a essência desse construto é a conceitualização.

Apoiando-se no modelo didático-matemático proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) e na teoria dos campos conceituais, Baltar (1996) elaborou uma tipologia de situações buscando dar sentido ao ensino e à aprendizagem do conceito de área, a saber, situação de medida, situação de comparação e situação de produção. De acordo com a pesquisadora, as situações de medida de área evidenciam o quadro numérico, como também a transição da grandeza para o número por meio da escolha de uma unidade de medida. Já as situações de comparação situam-se predominantemente no quadro das grandezas, uma vez que permitem construir classes de equivalência de superfícies de mesma área. Por fim, a situação de produção se situa no quadro geométrico, onde se permite construir superfícies associadas a áreas dadas ou com áreas maior/menor. Nesse tipo de situação, a distinção entre a grandeza e a superfície é favorecida.

Os modelos propostos por Douady e Perrin-Glorian e por Baltar (1996) inspiraram e fundamentaram o olhar sobre o ensino e a aprendizagem de área enquanto grandeza, notadamente no Brasil e na França, bem como permitiram investigar as grandezas comprimento e volume, considerando esse pressuposto. Neste último caso, estudos como os de Barbosa (2007), Barros (2002), Anwandter-Cuellar (2008), Figueiredo (2013) e Morais (2013) ampliaram o mencionado modelo e tipologia para as grandezas comprimento e volume. Com isso, tem-se um modelo didático e, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, uma tipologia de situações que permitem observar, descrever e problematizar fenômenos didáticos em torno das grandezas geométricas comprimento, área e volume.

2. 3 ESTUDOS SOBRE A DIDÁTICA DE COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Um conjunto de pesquisas assumiu a perspectiva de área como grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) combinada com a tipologia elaborada por Baltar (1996) para investigar fenômenos didáticos relativos à grandeza área e, mais tarde, às grandezas geométricas comprimento e volume. Entre eles, encontra-se o de Moreira Baltar e Comiti (1994), que investigaram dificuldades encontradas por alunos franceses da classe de Cinquième, equivalente ao 7° ano do ensino fundamental brasileiro, relacionadas à dissociação entre área e perímetro de retângulos.

As pesquisadoras evidenciaram alguns tipos de erros observados nas respostas dos estudantes, entre os quais retemos dois deles, denominados por elas de erros ligados à concepção “superfície” da área; e o da implementação dos teoremas - em - ação TA1 e TA2. O primeiro tipo de erro traz a ideia de que perímetro e área variam necessariamente no mesmo sentido e que dois retângulos de mesma área têm mesmo perímetro. O segundo, evidencia dificuldades dos estudantes em invalidar os teoremas - em - ação “TA1 - se aumentarmos a área (respectivamente o perímetro), então cada lado será aumentado” e “TA 2 - a área (respectivamente o perímetro) não pode aumentar se um dos lados diminui”. Logo, esses erros indicam amálgama entre um retângulo, sua área e seu perímetro.

Já o estudo de Ferreira (2010), investigou a construção do conceito de área e a relação entre área e perímetro por alunos do 6° ano do ensino fundamental brasileiro. Entre os resultados, a pesquisadora observou o uso de procedimentos numéricos mesmo quando não era necessário, bem como a mobilização de invariantes operatórios falsos, tais como, figuras de mesma área têm necessariamente o mesmo perímetro e ao duplicar os comprimentos dos lados de uma figura, sua área é duas vezes maior.

Araújo (2018) observou resultados análogos aos de Ferreira (2010) em estudantes do 8° ano ao lidar com situações envolvendo área do paralelogramo. O pesquisador constatou que mesmo diante de situações de comparação sem uso de medidas, destacaram-se os procedimentos numéricos, o que pode estar na origem de alguns dos erros observados. Segundo ele, os estudantes apresentaram melhor desempenho em situações de comparação e de produção, quando comparadas com as situações de medida. Nesse caso, os erros mais frequentes estão relacionados à

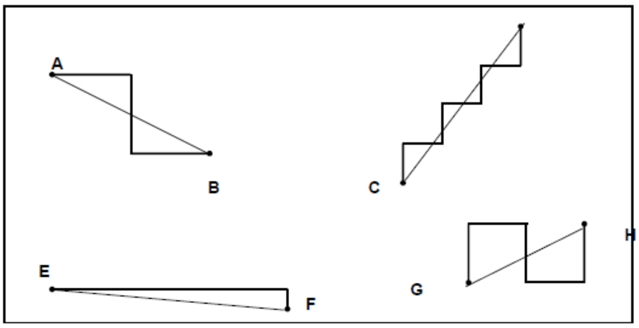
> álgebra das grandezas (multiplicação de números e obter grandezas como resultado, ausência e/ou utilização inadequada das unidades de medida). Alguns erros de cálculo relacional (considerar relação incorreta entre as diferentes malhas, confusão entre área e perímetro, entre outros) e de cálculo numérico também foram observados (ARAÚJO, 2018, p. 147).

Essa constatação evidencia uma tendência dos estudantes em priorizar procedimentos numéricos quando, de outro modo, dever-se-ia operar sobre grandezas.

Em se tratando da grandeza comprimento, Barbosa (2002) investigou os conhecimentos de estudantes com idades entre 10 e 12 anos acerca de comprimento e perímetro de figuras geométricas planas, ancorando-se no modelo didático-matemático de Douady-Perrin-Glorian (1989) e na tipologia de situações propostas por Baltar (1996).

Em seu estudo, Barbosa (2002) observou possíveis interferências de alguns efeitos na comparação de comprimentos de caminhos, denominados por ele de efeitos “projeção horizontal”, “linha imaginária” e “espaço ocupado” (p. 138). O primeiro efeito consiste em considerar a projeção horizontal de uma linha na comparação de seu comprimento. O segundo, consiste em considerar o comprimento do segmento de reta entre as extremidades de um dado caminho, conforme figura seguinte.

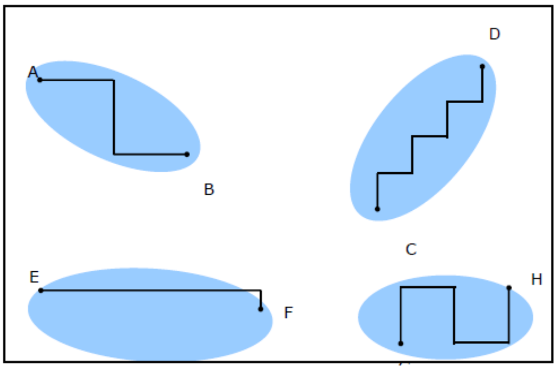
Figura 9 - Efeito linha imaginária.



Fonte: Barbosa (2002, p. 128)

O terceiro efeito considera a região que contém o caminho dado.

Figura 10 - Efeito espaço ocupado.



Fonte: Barbosa (2002, p. 129)

Brito (2003) investigou os conhecimentos-em-ação de alunos do 5° ano do ensino fundamental diante de problemas de comprimento no ambiente papel e lápis e com materiais manipuláveis, buscando revelar se tais materiais favoreciam a conceituação desse saber como uma grandeza. Para ela, comprimento é uma grandeza, alinhando-se, desse modo, a Douady e Perrin-Glorian (1989) e utilizando parte da tipologia de situações desenvolvidas por Baltar (1996) e alguns dos resultados observados por Barbosa (2002).

Seu método consistiu na aplicação de um teste para 35 estudantes da 4ª série (atualmente 5° ano do ensino fundamental) com idades entre oito e 14 anos, sendo que apenas dois deles estavam, um com oito anos, e outro com 14 anos. O dispositivo de coleta de dados consistiu em um teste composto por seis situações-problema para ser resolvidas individualmente, inicialmente, em papel e lápis e, posteriormente, com o auxílio de materiais manipulativos.

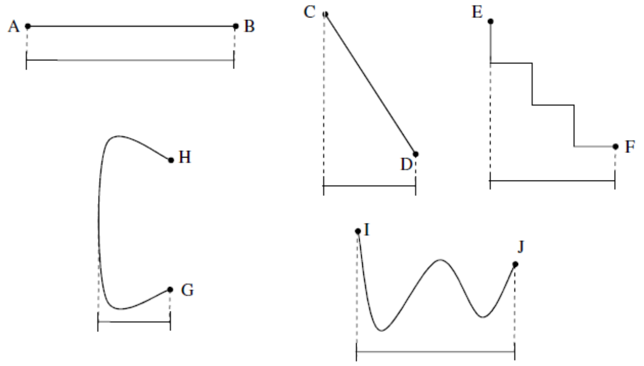
Durante a realização das atividades, foram disponibilizados para as crianças, em ambas as aplicações, réguas não graduadas (plástica e de cartolina), fio fino e flexível, dois cordões de cores diferentes, além de borracha, canetas de cores diferentes, lápis grafite e tesoura. A distinção entre os ambientes foi marcada, em papel e lápis, pelo desenho das figuras no papel e, com materiais manipulativos, pelo uso de palitos, fios e arames para representar tais desenhos.

De acordo com Brito (2003), os problemas propostos abordaram a grandeza comprimento situada nos quadros geométricos e da grandeza, sem relacioná-la com o numérico e assumiram perímetro como sendo o comprimento do contorno de uma figura. Esses problemas contemplaram comparação de comprimentos de segmentos de retas em posições horizontal, vertical, inclinada; linhas poligonais e linhas curvas – abertas e fechadas - além de produções de caminhos tendo como referência uma linha poligonal aberta.

Ainda sobre comprimento e assumindo o modelo epistemológico-didático já mencionado, Barbosa (2007), por sua vez, investigou a percepção de crianças da quarta série (atualmente 5° ano) sobre o efeito da visualização na comparação de comprimentos de linhas abertas, assumindo a hipótese de que os efeitos visuais (BARBOSA, 2002; BRITO, 2003) se manifestavam mesmo quando a comparação de comprimentos se dava apenas entre dois pares de linhas abertas.

O autor denomina de efeitos visuais, certos fenômenos de visualização que interferem no desempenho dos estudantes ao lidar com situações de comprimento, conforme figura seguinte:

Figura 11 - Efeito projeção horizontal



Fonte: Barbosa (2002, p. 116)

Na ilustração acima, Barbosa (2007) destaca o efeito visual denominado por ele de efeito da projeção horizontal, no qual os estudantes consideram as projeções dos caminhos sobre uma linha horizontal.

Esses estudos tiveram em comum o objeto comprimento, estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental e o foco nos quadros geométrico e da grandeza, bloqueando, portanto, o aspecto numérico.

Entre seus resultados, Barbosa (2002) observou possível interferência de efeitos visuais no desempenho dos estudantes e, de certa maneira, evidenciou, em nosso ponto de vista e à luz da TCC, a importância das representações simbólicas no estudo da grandeza comprimento. Nesse sentido, Brito (2003) também observou interferência de efeitos visuais como determinantes para o (in)sucesso dos estudantes diante de uma situação de comparação dos comprimentos de três ou mais caminhos (linhas abertas).

Os efeitos visuais evidenciaram certas complexidades no âmbito do quadro geométrico, o que levou Barbosa (2007) a conjecturar de que eles existem mesmo quando a comparação de comprimentos é feita somente entre dois caminhos.

Esses estudos revelaram também amálgama entre contorno e perímetro, bem como resistência por parte dos estudantes em aceitar que figuras geométricas planas diferentes (retângulo e triângulo) podem ter mesmo perímetro. Tanto Barbosa (2002) quanto Brito (20023) observaram que para alguns alunos, dois retângulos ou dois triângulos têm necessariamente o mesmo contorno. Esses aspectos evidenciam a concepção forma também para comprimento, em comparação às constatações de Douady e Perrin-Glorian (1989) para área.

O aprisionamento à forma da figura geométrica plana observado por Douady e Perrin-Glorian (1989) também esteve presente no estudo de Brito (2003), em relação à grandeza comprimento, quando diante de uma situação em que os alunos deveriam produzir um caminho mais curto, mais comprido e de comprimento igual ao de um caminho dado, "houve uma notável tendência dos alunos, nos dois testes, a produzirem o mesmo tipo de caminho (linha poligonal aberta frequentemente semelhante ou congruente à figura dada) (p. 152)".

No estudo de Barbosa (2007), que assumiu a hipótese de que tais efeitos se manifestam mesmo quando a comparação se dá entre pares de objetos, o autor não apenas confirmou sua hipótese, como um novo efeito foi observado, denominado por ele de efeito *associa número a comprimento*, que em que os alunos consideraram a quantidade de pedaços da linha (quando se tratava de uma linha quebrada) para comparar os comprimentos. Nesse caso, as comparações recaíram na concepção número, ainda que não houvesse medidas. Assim, ele observou o recurso a procedimentos numéricos mesmo nos anos iniciais e em situações que não previam tal uso.

Os estudos de Barbosa (2002; 2007) e de Brito (2003) adotaram o modelo didático-matemático para a grandeza comprimento e consideraram dois tipos de situações: produção e comparação. Ambos os pesquisadores consideram os quadros (DOUADY, 1986) geométrico e da grandeza, bem como a mudança de quadros, o que permite dissociar a grandeza do objeto geométrico (perímetro e contorno, assim como área e superfície). Nesses estudos, os autores observaram que parte dos estudantes não distinguiram a grandeza do objeto geométrico, recorreram a números e sofrem influência pela maneira como as figuras geométricas estavam representadas. Logo, esses autores mostraram que, assim como os estudantes amalgamam área e superfície, o fazem também entre comprimento e contorno da figura geométrica.

Portanto, mesmo os pesquisadores bloqueando o aspecto numérico e focando somente na grandeza e no geométrico, o número emergiu em algumas atividades de comparação de comprimentos, o que revela a ênfase na medida. Além disso, os quadros da grandeza e geométrico também revelaram certas complexidades, e por isso não devem ser ignorados.

No que tange à aprendizagem de volume na perspectiva de grandeza, Anwandter-Cuellar (2008) investigou as concepções de alunos franceses no nível equivalente aos anos finais do ensino fundamental brasileiro. Entre as concepções por ela categorizadas, destacamos a concepção número, a concepção medida e a concepção forma, predominantemente presentes nos conhecimentos mobilizados pelos sujeitos. A primeira concepção indica que volume é entendido como um número resultante da aplicação de uma fórmula, sem qualquer relação com a noção de grandeza. Na segunda, volume é visto como um número resultante da contagem de unidades necessárias para compor um sólido. Na terceira, volume é confundido com o sólido. Com isso, volume é situado ora no quadro numérico, ora no quadro geométrico, mas sem relação entre si, resultado esse análogo àqueles obtidos por Douady e Perrin-Glorian (1989) para o caso de área.

Também sobre volume, Figueiredo (2013) investigou como os estudantes brasileiros do último ano do ensino médio lidam com situações de volume. Para tanto, ela aplicou testes escritos e realizou entrevistas, por meio dos quais constatou que as situações de medida são as que os sujeitos apresentaram melhor desempenho. Ancorando-se nas concepções de Anwandter-Cuellar (2008), Figueiredo (2013) observou também manifestação predominante das concepções 'volume número' e 'volume medida', as quais, segundo ela, não apenas indicam o entendimento de volume como um número, mas também dificultam a compreensão desse saber como uma grandeza. Um resultado evidente para Figueiredo foi o uso de fórmulas para calcular volume, mesmo quando outros esquemas eram favorecidos, sobretudo nas situações de comparação. Por outro lado, diante das situações de produção, nas quais os sujeitos deveriam produzir um sólido a partir de um volume tomado como referência, o desempenho ficou abaixo do esperado. Para esse caso, é possível que o baixo desempenho se justifique por se tratar de uma situação pouco usual na sala de aula e porque não pode ser resolvida por meio de fórmulas. Segundo a pesquisadora, a presença da fórmula é tão forte que alguns estudantes a entendem como sendo o próprio volume.

Pelo exposto, constata-se, de maneira transversal, considerando aspectos temporais e geográficos, quando da realização desses estudos, que ao se estudar as grandezas geométricas os estudantes quase sempre apresentam melhor desempenho diante de situações de medida e, quando confrontados com situações em que os números não aparecem, recorrem a esse elemento. Ao mesmo tempo, os estudantes frequentemente se apoiam em esquemas que fazem uso dos números, como a contagem de unidades e o uso de fórmulas, mesmo quando outros procedimentos são favorecidos. Diante disso, entendemos que o uso de procedimentos numéricos é uma consequência da mobilização da concepção número, que, por sua vez, pode estar associada a um privilégio da medida em detrimento da grandeza, fazendo com que os estudantes desenvolvam a referida concepção (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; ANWANDTER-CUELLAR, 2008).

Em outro polo, os estudos acima mencionados indicaram que os estudantes apontam também uma relação forte entre a grandeza e o objeto geométrico, a ponto de não os dissociar.

É o caso, por exemplo, de confundir comprimento e contorno, a área com a superfície e o volume com o sólido. Essa constatação se evidenciou também na ideia de que superfícies de mesma área são necessariamente iguais, caracterizando-se a concepção forma (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; MOREIRA BALTAR; COMITI, 1994; ANWANDTER-CUELLAR, 2008). Em todo caso, a noção de grandeza, particularmente as geométricas, não é compreendida inteiramente como um objeto autônomo, ou seja, dissociado da medida e do objeto geométrico.

Nessa revisão de literatura, identificamos também um conjunto de pesquisas sobre grandezas que, apesar de não fazerem uso explícito do modelo epistemológico-didático mencionado e/ou da TCC, podem ser analisados a partir desses referenciais. Esses estudos compreendem contextos diversos no que se refere a países, ano de realização do estudo e nível de escolaridade dos sujeitos. É o caso do estudo de Hart e Booth (1984), que investigou a hierarquização do ensino e da aprendizagem das grandezas geométricas comprimento, área e volume.

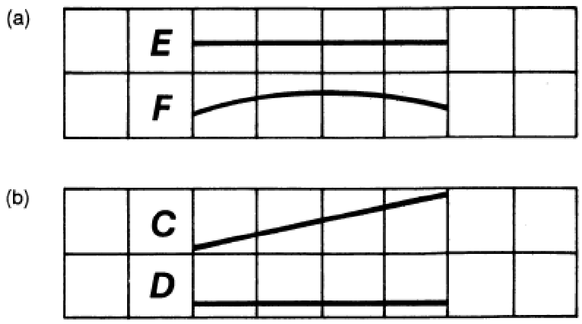
Kathleen Hart e sua equipe publicaram, em 1981, um estudo desenvolvido com crianças e adolescentes ingleses com idades entre 11 e 16 anos sobre a hierarquização de habilidades, conceitos e processos envolvendo conteúdos matemáticos. A publicação Children's Understanding of Mathematics, 11-16, apresenta o estudo amplo e detalhado envolvendo diversos conteúdos matemáticos, entre eles, comprimento, área e volume.

Para a pesquisadora, a ideia de hierarquia no âmbito do processo de ensino e de aprendizagem, não assume um caminho único e linear e deve contemplar, de maneira interdependente, “(i) uma sequência de aprendizagem ou sequência de compreensão, que está essencialmente no aluno; (ii) uma sequência de ensino que o professor usa; e (iii) uma sequência lógica que está no tópico” (Ibid., p. 205). De outro modo, para ela, a hierarquia pressupõe a ordenação, dentre outras coisas, de um conjunto de estágios e de habilidades. Nesse contexto, a pesquisadora define estágio e habilidade, respectivamente, conforme segue: “a palavra estágio é geralmente aplicada quando alguma forma generalizada de comportamento está sendo descrita, enquanto habilidade se refere a pré-requisitos identificáveis específicos para algum desempenho necessário” (HART, 1981, p 205).

Particularmente, Hart e Booth (1984) evidenciaram os achados sobre essas grandezas, por considerar que se trata de um dos temas mais relevante para os professores de Matemática da escola básica e, ao mesmo tempo, por entender que medidas é um tópico amplo e que por isso seu ensino deve ser sequenciado.

Dito isso, Hart e Booth (1984) investigaram a hierarquização de ideias básicas sobre os conceitos de comprimento, área e volume com 686 alunos ingleses com idades entre 12 e 16 anos de idade, por meio de testes escritos e de entrevistas, estas últimas com uma amostra de 30 alunos dessa população. Em relação a comprimento, as pesquisadoras apresentaram dois problemas de comparação, nos quais em um deles o estudante deveria comparar os comprimentos das linhas, conforme a imagem seguinte:

Figura 12 - Comparação visual de comprimentos



Fonte: Hart e Booth (1984, p. 17)

No outro, os estudantes deveriam comparar quatro comprimentos representados por meio do par número-unidade de medida, sendo utilizadas duas unidades de medida diferentes (comprimento de uma bengala e comprimento de uma haste de metal) para representar os comprimentos, conforme figura seguinte:

Figura 13 - Comparação de comprimento envolvendo medidas

John measures the lengths of paths ***A*** and ***B*** using a walking stick. Then he measures the lengths of paths ***C*** and ***D*** using a metal rod. His answers are as follows:

Path ***A***	13 walking sticks	Path ***C***	15 rods
Path ***B***	14½ walking sticks	Path ***D***	12½ rods

Draw a ring around the answer you think is true in each question.

(1) Path ***B*** is longer than Path ***A.***	True	False	Cannot tell
(2) Path ***C*** is longer than Path ***B.***	True	False	Cannot tell
(3) Path ***D*** is longer than Path ***C.***	True	False	Cannot tell

Fonte: Hart e Booth (1984, p. 17)[10]

[10] João mede os comprimentos dos caminhos A e B usando uma bengala. Em seguida, ele mede os comprimentos dos caminhos C e D usando uma haste de metal. Suas respostas são as seguintes:

Caminho A 13 bengalas

Caminho C 15 varas

Trata-se, portanto, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, de duas situações de comparação de comprimentos, com e sem intervenção da medida. Segundo as pesquisadoras, na primeira atividade, a taxa de sucesso na comparação dos comprimentos de **E** e **F** ficou entre 72-82%, caindo para algo entre 42-52%, na comparação dos comprimentos de **C** e **D**. Nesse caso, alguns dos estudantes que erraram, quando entrevistados, apoiaram-se na contagem dos quadradinhos da malha, indicando que **C** e **D** tinham o mesmo comprimento por estarem, ambos, "inclusos" em quatro quadradinhos.

No problema 2, segundo as pesquisadoras, 90% da amostra indicou corretamente que o caminho **B** é mais longo do que **A**, e que o caminho **C** é mais longo do que **D**. Por outro lado, 50%, 34% e 27% dos estudantes com idades, respectivamente, de 12, 13 e acima de 14 anos, indicaram que **C** era mais longo do que **B,** quando na verdade, não era possível decidir. Quando questionados, esses estudantes argumentaram que 15 é maior do que 14½. Com isso, Hart e Booth (1984, p. 17) afirmaram, por um lado, que "Este desejo de usar números para apoiar um argumento em detrimento de todas as outras considerações ficou aparente quando duas unidades diferentes foram usadas para medir o mesmo caminho"[11] e, por outro, que "Esses erros apontam para uma incompreensão fundamental sobre a natureza da medida, possivelmente refletindo uma insistência muito precoce de que um número é sempre a resposta a ser buscada"[12].

Esses dados revelam que os estudantes ingleses, participantes da pesquisa, utilizaram números para comparar comprimentos mesmo quando não era necessário e nos casos em que havia comparação de comprimentos expressos com unidades diferentes, desprezaram as unidades e apoiaram suas respostas e argumentos apenas na comparação dos números (medidas

---

Caminho B $14\frac{1}{2}$ bengalas

Caminho D $12\frac{1}{2}$ varas

Contorne a resposta que você acha que é verdadeira em cada pergunta.

(1) Caminho B é maior que Caminho A. Verdadeiro Falso Não é possível dizer

(2) Caminho C é maior que Caminho B. Verdadeiro Falso Não é possível dizer

(3) Caminho D é maior que Caminho C Verdadeiro Falso Não é possível dizer

[11] This desire to use numbers to support an argument at the expense of all other considerations was apparent when two different units were used to measure the same paths.

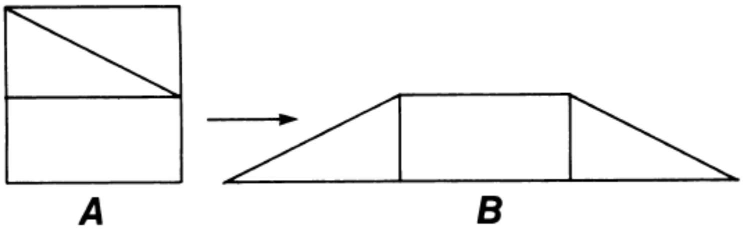
[12] These errors point to a funda- mental misunderstanding of the na- ture of measurement, possibly reflect- ing a too early insistence that a number is always the answer to be sought.

de comprimento). Essas constatações nos levam a inferir que mobilizaram uma concepção de comprimento como um número e não como uma grandeza, e ao fazer isso, cometem erros nas questões propostas.

Nas atividades sobre área, a pesquisadora mostrou que os sujeitos foram capazes de indicar a quantidade de quadrados unitários com um centímetro de lado necessários para ladrilhar um retângulo 4 cm x 2 cm, mas 60 % desses mesmos sujeitos simplesmente dobraram a quantidade de ladrilhos $\frac{1}{2}$ cm x $\frac{1}{2}$ cm necessários para preencher esse mesmo retângulo. Segundo as pesquisadoras, esses estudantes utilizaram o esquema de contagem das unidades, mesmo já tendo estudado a fórmula. Interpretamos essa estratégia como efeito da mobilização de um teorema-em-ação falso: "a medida da área de um retângulo dobra quando o comprimento do lado do quadrado unitário é reduzido à sua metade", o que fere uma ideia importante de área enquanto grandeza, qual seja, a sua bilinearidade relativamente aos comprimentos dos lados.

Também foi apresentada aos alunos uma atividade envolvendo conservação de área, ou seja, uma situação de comparação de área. Nela, o quadrado A foi decomposto e recomposto, sem perda nem sobreposição, formando o trapézio B:

Figura 14 - Conservação de área de figuras planas

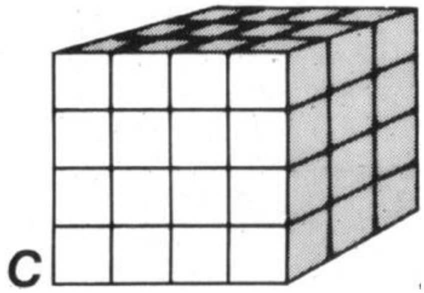


Fonte: Hart e Booth (1984, p. 18)

Ao serem questionados sobre a comparação das áreas de ambas as figuras geométricas, a taxa de sucesso, em geral, superou os 80% para as crianças de todas as idades (12 – 14 anos). Porém, quando perguntados se o perímetro era igual, o desempenho das crianças de 12 e 13 anos, foi, respectivamente, de 64% e 71%. Durante as entrevistas, alguns desses alunos mostraram resistência em aceitar que os perímetros eram diferentes, mesmo utilizando cartões de papel para simular a decomposição/recomposição. Com isso, para esses sujeitos, área e perímetro variam no mesmo sentido, ou seja, se a área de uma superfície cresce, seu perímetro também cresce. Assim, interpretamos esse procedimento como efeito da mobilização de um teorema-em-ação falso, segundo o qual "se duas superfícies têm áreas iguais, então seus perímetros também são iguais".

Para o caso de volume, foram apresentadas atividades de medição e de construção de um sólido com volume dado, sempre com o suporte da representação figural. Os sólidos utilizados foram blocos retangulares e um prisma triangular. No primeiro caso, os alunos calcularam o volume do bloco C, apresentado abaixo:

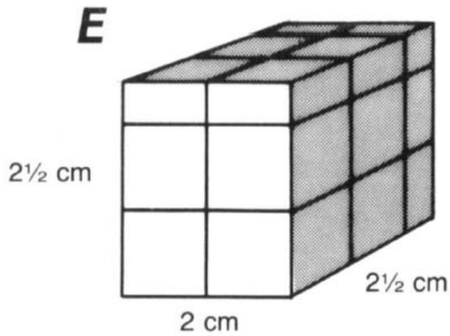
Figura 15 - Cálculo de volume do bloco retangular



Fonte: Hart e Booth (1984, p. 18)

Durante a entrevista, as pesquisadoras disponibilizaram blocos reais e observaram que o esquema mais utilizado pelas crianças foi a visualização de uma camada seguida da contagem de camadas. No entanto, quando se depararam com o cálculo do volume do bloco indicado na figura seguinte, a taxa de sucesso ficou abaixo de 28% para os estudantes de todas as idades. Nesse caso, Hart e Booth apontaram dificuldades na contagem dos bloquinhos escondidos e na multiplicação de frações, para os que recorreram à fórmula.

Figura 16 - Cálculo de volume do bloco retangular com medidas racionais



Fonte: Hart e Booth (1984, p. 26)

Quando comparadas, ambas as atividades abordam o cálculo de volume de um bloco retangular. Porém, a última, além de apresentar medidas, é composta por diferentes bloquinhos. Com isso, esses elementos não apenas dificultam o esquema da contagem, como fazem emergir o uso da fórmula, que, por sua vez, provoca a manifestação de dificuldades nas operações numéricas, em especial no produto de números racionais na representação fracionária.

Kospentaris, Spyrou e Lappas (2011) investigaram as estratégias empregadas por estudantes gregos do último ano do ensino médio e por graduandos em Matemática do primeiro ano de formação, diante de problemas de conservação e comparação de áreas de superfícies planas. Para tanto, os pesquisadores aplicaram um teste escrito com seis atividades para 50 estudantes, sendo 20 deles do ensino médio. Entre as variáveis dessas atividades, encontram-se em todas elas, representação simbólica e a ausência de medidas. Por essa razão, segundo os pesquisadores,

> Assim, formulamos a apresentação de tal maneira que o respondente pode (1) usar uma estimativa visual simples ou (2) adotar medidas de comprimento e calcular as áreas usando as fórmulas apropriadas ou (3) aplicar argumentação dedutiva euclidiana sem cálculo direto da área. Apesar do fato que o particular desenho de teste não exclui nenhuma das estratégias acima, apenas a terceira pode levar a uma determinada resposta (KOSPENTARIS; SPYROU; LAPPAS, 2011, p. 111 tradução nossa).[13]

Entre os resultados, retemos o fato de que para Kospentaris, Spyrou e Lappas (2011, p. 123), os estudantes foram intuitivamente afetados pela crença na ideia de que “a equivalência de área coincide com a congruência”, ainda que esse fato contrariasse sua vivência educacional. De outro modo, evidencia-se o fato de que, para esses participantes da pesquisa, figuras geométricas planas não congruentes não podem ter mesma área, o que pode ser entendido como uma correlação indissociável entre superfícies e áreas.

Para os pesquisadores, ficou evidente também a ideia de que “quanto mais compridos os lados da figura geométrica plana, maior será sua área. Consequentemente, “quanto maior o perímetro, maior a área”. Um fator determinante nas respostas dos estudantes foi a influência da visualização, que interferiu nos esquemas utilizados por eles e, por consequência, os fez mobilizar os teoremas-em-ação acima mencionados. Em resumo, os pesquisadores indicaram que o conceito de conservação de área não estava suficientemente consolidado nos estudantes investigados.

Já em relação ao estudo de Ferigolo (2007), em que ela investigou o desenvolvimento da habilidade de medir comprimentos e áreas com estudantes da 8ª série (atualmente 9º ano do ensino fundamental) em uma escola pública municipal do sul do Brasil, retemos o fato de que ela revela a complexidade envolvida no processo de ensino e de aprendizagem de grandezas. Com o intuito de observar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre comprimento, a

---

[13] Thus, we formulated the presentation in such a way that the solver can (1) use a simple visual estimation or (2) take length measures and compute the areas using the appropriate formulas or (3) apply Euclidean deductive argumentation without direct area computation. Despite the fact that the particular test design precludes none of the above strategies, only the third can lead to a certain answer.

pesquisadora aplicou um teste diagnóstico contemplando essencialmente situações de medida com o uso de instrumentos. Entre os resultados, ela observou que

> os estudantes não utilizavam os instrumentos de medida adequadamente, desconheciam as unidades de medidas de comprimento, confundiam unidades de comprimento com unidades de volume, utilizavam unidades de medidas não convencionais, não conseguiam relacionar o valor encontrado com a unidade de medida correspondente e não sabiam o que fazer quando o valor encontrado não era um número inteiro (FERIGOLO, 2007, p. 37).

As dificuldades observadas por Ferigolo (2007) revelam a complexidade das grandezas geométricas mesmo para alunos do 9° ano, pois diante de uma atividade aparentemente simples e usual, apareceram diversos entraves como o amálgama de grandezas, o não reconhecimento da grandeza a ser medida e dificuldades para lidar com o domínio numérico resultante do processo de medição.

Portanto, o ato de medir, embora usual, não é necessariamente trivial e nesse caso pode ter sido acentuado pela falta de abordagem do conceito em anos precedentes ou pelo trabalho anterior superficial, conforme aponta Ferigolo (2007). Ao longo dos encontros, oito no total, os sujeitos foram expostos a diversas situações envolvendo medições com auxílio de instrumentos, ora com uso de instrumentos padronizados, ora com partes do corpo como palmo, pé e passo. Segundo a pesquisadora, as dificuldades acima mencionadas foram parcialmente superadas no que diz respeito à delimitação das etapas do processo de medição, ou seja, definição da grandeza a ser medida, escolha do instrumento e obtenção do resultado. Em consonância com o estudo de Brito (2003), no que se refere ao uso de materiais concretos para medir comprimentos, Ferigolo (2007) constatou que esses recursos auxiliam os estudantes em compreender o processo de medição e, por consequência, a dominar situações de medida. Entretanto, observa-se que a ênfase dada pela pesquisadora apenas nesse tipo de situação não foi suficiente para que os estudantes percebessem que nesse processo há três aspectos fundamentais: a grandeza a ser medida, o objeto geométrico e o número resultante da medição.

Os estudos acima mencionados contemplam contextos institucionais diversos, considerando países, ano de publicação e sujeitos investigados. Em relação ao primeiro, há estudos brasileiros, ingleses, franceses e gregos. Historicamente, encontram-se estudos desde a década de 1980, como o de Hart e Booth (1984) e outros mais recentes, como o de Araújo (2018). Por fim, em se tratando dos sujeitos e níveis de ensino, encontram-se investigações com crianças e adolescentes, desde os anos iniciais até o início da graduação.

Entre os testes e entrevistas utilizados pelos pesquisadores para investigar os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos na resolução de problemas sobre grandezas geométricas, foram contempladas situações de comparação (com ou sem a intervenção de números), medição e produção de objetos geométricos a partir de condições sobre comprimentos, áreas ou volumes. Mesmo quando não eram favorecidos procedimentos numéricos, foi observado que alguns sujeitos tendiam a usar números para resolver as atividades. As pesquisas evidenciam também que, por vezes, as unidades de medida eram desconsideradas e apenas os valores numéricos eram comparados, o que conduzia a erros. Interpretamos que em casos como esses, os alunos estão mobilizando um conhecimento-em-ação segundo o qual as grandezas (comprimento, área ou volume) são números.

Inferimos ainda, a partir do que é relatado pelos autores, que algumas resoluções dos alunos podem ser interpretadas como consequência da mobilização de teoremas-em-ação falsos, tais como:

- perímetro e área variam no mesmo sentido, ou seja, se a área aumenta (diminui) o perímetro também aumenta (diminui) e vice-versa;
- se as áreas (volumes) de duas superfícies (sólidos) são iguais então as superfícies (sólidos) são congruentes;
- a medida da área de um retângulo dobra quando o comprimento do lado do quadrado unitário é reduzido à sua metade",

Os mencionados teoremas-em-ação falsos indicam que as concepções numéricas e geométricas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) extrapolam a grandeza área, estando presentes também nas grandezas comprimento e volume, ou seja, nas grandezas geométricas.

Esse tópico trouxe os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos diante de situações envolvendo as grandezas geométricas. No tópico seguinte, o olhar será direcionado para os livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD.

2. 4 O PRIVILÉGIO DO NUMÉRICO NO ENSINO DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS

Neste tópico, contemplamos estudos que analisaram a abordagem de grandezas geométricas em livros didáticos, com ênfase nos brasileiros. Pretendemos questionar se as escolhas didáticas feitas nos livros didáticos contribuem para a superação de concepções numéricas relativas a comprimento, área e volume, ou se reforçam a tendência em privilegiar os aspectos numéricos. Destacamos que esse recurso é inserido em larga escala nas escolas públicas brasileiras, inclusive pela importância do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

Nesse sentido, o estudo de Barros (2006) investigou a relação entre perímetro e área em livros didáticos da 5ª a 8ª série (6° ao 9° anos) aprovados nos PNLD de 1999, 2002 e 2005. Embora essas edições já estejam superadas em mais de uma década, esses resultados possibilitam observar os avanços (se existirem) da abordagem desse conceito, quando comparados com análises de coleções aprovadas em edições mais recentes do PNLD. Entre suas conclusões, Barros (2006) indicou uma abordagem de área e perímetro majoritariamente localizada no final do livro, mal distribuída entre as séries e com poucos capítulos próprios, o que, segundo ele, denota uma importância menor a esses conceitos.

A definição de grandeza presente nessas obras foi uma das unidades de análise pelo pesquisador e com isso foi possível observar referência explícita à medida, conforme os excertos seguintes:

> As coleções, aqui analisadas, assim, definem grandeza:
> Coleção NP: é tudo aquilo que pode ser **medido ou contado**: comprimento, área, temperatura, massa, tempo, velocidade, quantias em dinheiro (6ª série, p. 25);
> Na coleção MT (6ª, 7ª e 8ª): Algo que pode ser **medido**. Comprimento, temperatura, tempo, área, capacidade, massa são exemplos de grandezas (6ª série, p. 119); (BARROS, 2006, p. 105 grifo nosso).
>
> (...)
>
> Coleção MV: Tudo o que pode ser **medido**. Exemplo: massa, comprimento, tempo, superfície são grandezas (6ª, p. 283), mas também traz: tudo o que pode ser medido. Exemplo: Massa, comprimento, tempo, área, temperatura (8ª série, p. 285) (Ibid., p. 106 grifo nosso).

Esses extratos indicam uma tendência dessas obras em estabelecer uma interdependência entre grandeza e medida, o que poderia levar o leitor dessas obras a amalgamar grandeza e medida. Não se pode deixar de mencionar também a confusão entre área e superfície que, segundo Barros (2006), não ficou restrita à coleção MV acima mencionada. Surge, portanto, mais um elemento que assume, por vezes, a posição da grandeza: o objeto geométrico (para o caso das grandezas comprimento, área, volume e abertura de ângulo). Procedimentos numéricos e algébrico-numéricos se mostraram precoces e recorrentes em boa parte dessas obras, uma vez que, segundo Barros (2006), as fórmulas se fizeram presentes já a partir da 5ª série (6° ano) em cinco das sete coleções analisadas.

Diante da ênfase no "medir" nas coleções analisadas, Barros (2006) observou também o sentido semântico adotado para esse termo e concluiu que nas coleções analisadas "medir é comparar". Nessa constatação reside outra possível fonte de entrave, a saber: a indução tácita de que grandezas só podem ser comparadas recorrendo-se às medidas, o que é, evidentemente, falso. Pode-se, por exemplo, comparar duas temperaturas pelo aspecto sensorial ou duas alturas pelo aspecto visual.

Em se tratando do que as coleções entendem por medida, objeto resultante da comparação da unidade com a grandeza a ser mensurada, as coleções analisadas por Barros trazem as seguintes afirmações:

> NP: "Medem-se comprimentos, superfícies, temperaturas, etc. **<u>A medida é expressa por um número e por uma unidade de medida</u>**". Essa definição se encontra apenas no dicionário dos volumes das 5ª e 6ª séries.
> TM2: "... **<u>em uma medida</u>**, deve sempre aparecer **<u>o número acompanhado da unidade</u>** de medida usada" (5ª série, p. 212, Grifo nosso).

No modelo epistemológico-didático por nós adotado, a medida é essencialmente um número, mais precisamente, um número real não negativo. Portanto, as expressões em destaque como "**<u>A medida é expressa por um número e por uma unidade de medida</u>**" indicam não uma medida, mas uma grandeza (expressa pelo par número/unidade de medida) e por isso, sob a ótica do referido modelo, bem como dos estudos acima relatados, essa perspectiva pode reforçar a confusão entre grandeza e medida. No que se refere às definições de perímetro e de área, Barros (2006, p. 110) observou que "todas as coleções são unânimes ao assumirem que área é a medida da superfície". Para perímetro, foram observadas as noções de "soma das medidas dos lados", "medida do contorno" e "medida do comprimento do contorno". Logo, em todo caso, a *medida* se encontra presente.

Em resumo, conclui-se que nas obras analisadas por Barros (2006), a medida assume protagonismo, contracenando, inclusive, com o objeto geométrico (segmentos e superfícies). Assim sendo, é possível inferir que o conceito de grandeza, enquanto objeto autônomo, é negligenciado.

Ferreira (2010) analisou duas coleções com vistas à abordagem de comprimento e área, a primeira dos anos iniciais, aprovada no PNLD 2007 (BRASIL, 2006), e a segunda, do PNLD 2008 (BRASIL, 2007), que também foi uma das coleções analisadas por Barros (2006), dos anos finais, sendo ambas pertencentes aos mesmos autores.

Em se tratando de comprimento, a pesquisadora observou que desde o 2° ano do ensino fundamental a referida coleção já contemplava essa grandeza, inclusive com certa abrangência no que se refere às diferentes situações (BALTAR, 1996). No entanto, a ênfase recai em situações de medida, em detrimento das demais, sobretudo nos anos que se sucedem. A despeito disso, percebe-se um ligeiro avanço em relação aos resultados identificados por Barros (2006), que constatou ausência de comprimento como objeto próprio de estudos em diversas coleções e/ou livros.

Outro aspecto revelado por Ferreira (2010) foi o uso intenso das grandezas como objeto articulador entre os diferentes domínios da matemática, em consonância com a ideia presente em Chevallard e Bosch (2000), de que a grandeza está na gênese dessa Ciência. No entanto, destaca Ferreira (2010), o foco principal é na compreensão do Sistema de Numeração Decimal, na escrita numérica e em dar significado aos números.

Já Silva (2011) analisou a abordagem de comprimento e área nos livros didáticos de 6° anos aprovados nos PNLD de 2008 e 2011, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Apesar de esse estudo se aproximar daquele desenvolvido por Barros (2006), seu foco é no 6° ano, analisa edição mais recente do PNLD e adota outro aporte teórico. Um olhar sobre essas duas pesquisas permite, inclusive, explicitar os possíveis avanços no que se refere à abordagem conceitual nesse recurso didático.

Sob a ótica quantitativa, que expressa a importância dada a esses conceitos, segundo Silva (2011), os livros de 6° anos aprovado no PNLD 2008 destinavam, em média, aproximadamente 15% das páginas para o trabalho com grandezas. Em se tratando da abordagem de comprimento e área, a média de páginas cai para cerca de 10%, sendo que apenas uma coleção se distancia desse valor, com cerca de 25%. No que se refere à posição dos capítulos e dos títulos dos mesmos, o estudo constatou, respectivamente, uma abordagem concentrada na segunda metade do livro e um viés para a medida, conforme mostra o excerto seguinte:

> A maioria dos livros didáticos de 6° ano aprovados no PNLD/2008 dedica menos de 15% ao campo das Grandezas e Medidas, ou seja, menos que o recomendado pelo guia/2008 (20%), o trabalho com comprimento, perímetro e área é concentrado na segunda metade do livro, ou seja, corre o risco desses conteúdos não serem vivenciados pelos alunos e ocupa menos de 10% dos livros, ou seja, um número de página pequeno para ser feito um estudo mais aprofundado dos conceitos enquanto grandeza (SILVA, 2011, p. 66).

Nota-se que, após duas edições do PNLD em relação ao estudo de Barros (2006), a posição ocupada pelas grandezas nas obras analisadas parece não ter avançado o suficiente.

Outras duas variáveis relevantes consideradas por Silva (2011) foram a identificação dos títulos dos capítulos e as palavras-chave presentes nas seções dos capítulos de comprimento e área. Em ambos os casos, o termo “medida” e suas variantes (medindo, número, calcular, medição, entre outras) foram preponderantes, que segundo o autor, indicam ênfase na medida:

> (...) as várias etapas da pesquisa apontaram uma ênfase na 'medida' e nas 'unidades' e a noção de 'grandeza' não parece receber atenção. Verificamos que toda a obra traz 'medida' como tema em seus capítulos ou seções enquanto que temas como: "Decomposição de figuras planas"; "Comparação"; "Grandeza"; "Comprimento de circunferência" foi contemplado em apenas uma obra cada um (SILVA, 2011, p. 164).

A análise qualitativa desenvolvida por Silva (2011), que evidenciou questões conceituais, mesmo à luz da Teoria Antropológica do Didático, revelou ênfase destacada em atividades de medir e de converter unidades, como também em calcular perímetro de figuras poligonais, que valorizam, em última instância, o número em detrimento da grandeza.

Outra pesquisa que incluiu em seu repertório de investigação a análise de livros didáticos, foi o de Anwandter-Cuellar (2008), que estudou, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, as concepções de volume por alunos franceses no nível collège,[14] correspondente no sistema de ensino brasileiro, ao 8° e 9° anos, respectivamente. Foram analisados os capítulos de livros da etapa correspondente ao 6º ao 9º ano, nos quais o volume era objeto de estudo, com o objetivo de evidenciar as organizações matemáticas[15] desse saber.

Apesar de a posição dos capítulos não ser uma variável destacada nas análises de Anwandter-Cuellar (2008), dos seis exemplares analisados, cinco situavam volume também na parte final dos livros, indicando que esse fenômeno não é exclusividade de livros didáticos brasileiros.

Em relação às atividades propostas e a maneira como os livros didáticos esperavam que os alunos as resolvam, a pesquisadora chegou à seguinte constatação:

> Associado ao conceito de volume, contabilizamos oito tipos de tarefas utilizadas no nível de collège. As técnicas são mais do tipo numérica; a aplicação da fórmula sendo a técnica mais usada. Em geral, observamos uma predominância do quadro numérico em todos os níveis do collège. Essa predominância está diretamente relacionada às demandas dos currículos escolares[16] (ANWANDTER-CUELLAR, 2008, p. 47, tradução nossa).

---

[14] No sistema de ensino francês, as séries 6ème, 5ème, 4ème e 3ème - collège – correspondem no Brasil, respectivamente, aos 6°, 7°, 8° e 9°, ou seja, anos finais do ensino fundamental.

[15] Os termos da Teoria Antropológica do Didático serão esclarecidos no capítulo 3.

[16] Associés au concept de volume, nous avons comptabilisé huit types de tâches utilisées au niveau du collège. Les techniques sont plutôt de type numérique; l'application de la formule étant la technique plus utilisée. En général, nous observons une prédominance du cadre numérique à tous les niveaux du collège. Cette prédominance est en relation directe avec l'exigence des programmes scolaires.

Esse dado em muito se aproxima dos resultados obtidos por Silva (2011), mesmo se tratando de um contexto de pesquisa acentuadamente distinto - tipo da grandeza, sistema de ensino e obras analisadas. Assim sendo, o privilégio à medida não é restrito ao ensino brasileiro.

Resultados análogos também foram observados por Morais (2013) e por Freitas (2015), em que ambos analisaram a abordagem de volume em livros didáticos brasileiros destinados ao ensino médio, PNLD (2012) (BRASIL, 2011), o primeiro sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais e, o segundo, da Teoria Antropológica do Didático.

O primeiro analisou os exemplares (sete obras didáticas) de todas as coleções que tinham volume como objeto de estudo, tendo como propósito caracterizar a abordagem desse conceito. Para isso, consideraram-se aspectos quantitativos – posição e quantidade de páginas - e qualitativos - situações, possíveis teoremas-em-ação e conceitos-em-ação e representações. Analogamente aos resultados de Barros (2006), de Anwandter-Cuellar (2008) e de Silva (2011), observou-se que volume é abordado na segunda metade do livro e em quatro deles nos capítulos finais. Como possível consequência imediata, vislumbra-se um esquecimento desse saber, quando não, uma abordagem aligeirada.

No que se refere às situações, observou-se ênfase exacerbada nas medidas, presentes nas definições de volume e nos tipos de atividades privilegiados. Seis coleções apresentaram uma ideia do que é volume e em todas elas o número ou a medida foi entendido como sendo a grandeza. Quanto aos tipos de situações, cerca de 94% das atividades requeriam cálculo ou mudança de unidade, essencialmente por meio de fórmulas. Isso revela, portanto, uma abordagem predominantemente pautada na medida, o que, de outro modo, indica negligência em relação à grandeza.

Esses resultados estão em consonância aos obtidos por Freitas (2015), que analisou a abordagem de volume em quatro das sete coleções supracitadas. Seu objetivo foi caracterizar as organizações matemáticas e didáticas, nos termos da TAD, o que lhe permitiu explicitar os tipos de tarefas e técnicas destacadas. Logo, segundo Freitas (2015, p. 122), “Esse passo a passo, proporcionado pela TAD, nos mostra o(s) caminho(s) que o autor compreende que os professores, que optarem por tal coleção, devam prosseguir e de que maneira o conteúdo ali apresentado deve ser trabalhado”.

Segundo o pesquisador, o tipo de tarefa “Calcular o volume de um sólido” foi o mais observado, tendo como técnica dominante[17] associada “Escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e

[17] Entende-se por “técnica dominante”, em contraponto à “técnica auxiliar”, aquela de uso recorrente.

acrescentar a unidade de medida apropriada" (p. 123 grifo nosso). Além de ser a maneira de resolução das atividades mais usual, o grifo lança luz ao "teatro das sombras" (CHEVALLARD; BOSCH, 2000), uma vez que "*acrescentar a unidade de medida apropriada*" indica que todo o procedimento é feito somente sobre os números. Portanto, essas duas constatações trazidas por Freitas (2015) corroboram a relação grandeza - número já mencionada acima.

Outro estudo que se dedicou à análise da abordagem de grandeza em livros didáticos foi o de Araújo (2013), tendo como objeto de análise a grandeza duração de intervalo de tempo. Trata-se, portanto, de um estudo que não se debruçou sobre as grandezas geométricas e, ainda assim, o aspecto numérico é privilegiado, conforme ficará evidente adiante.

Segundo a pesquisadora, esse conteúdo tem entre suas características a multidisciplinaridade, mas o foco por ela adotado situa-o no âmbito da Matemática, inclusive como uma grandeza:

> É importante a comparação dos acontecimentos no tempo e a narração de histórias. É necessário, ainda, o estudo do ciclo vital dos seres vivos e a necessária compreensão da espacialidade e temporalidade dos fenômenos geográficos. Cada um destes aspectos ou fenômenos é estudado por diferentes áreas de conhecimento: História, Geografia, Ciências Naturais, Língua Portuguesa, Matemática. Embora "tempo" possua esse aspecto multidisciplinar, podendo ser olhado sob vários pontos de vista, nosso foco de estudo neste texto será o ponto de vista da Matemática, ou seja, vamos situá-lo no campo das grandezas e medidas (ARAÚJO, 2013, p. 21).

Araújo (2013) assume o tempo como uma grandeza matemática, cuja perspectiva leva à noção de duração de intervalo de tempo, permitindo, portanto, fazer estimativas, comparações, marcações, definir unidades de medidas e fazer usos de diferentes instrumentos. Ela destaca também outras perspectivas como a histórica, a psicológica e a física, as quais não estão necessariamente dissociadas da perspectiva matemática.

Em sua pesquisa, Araújo (2013) analisou as 23 coleções de livros didáticos da Alfabetização Matemática presentes no PNLD 2013, com o intuito de revelar a materialização das recomendações dos parâmetros curriculares para a grandeza em foco nessas obras. Ela organizou os dados em três categorias: duração de intervalo de tempo, sequências temporais e dispositivos de marcação e de medidas de tempo.

A primeira se refere à ideia de duração de intervalos de tempo e, nesse sentido, se confunde com a noção da grandeza. A segunda, está associada à ideia de instantes, antes e depois e organização do tempo didático. Já a terceira contempla os dispositivos como relógios e calendários.

Ao confrontar as recomendações curriculares e a abordagem dos livros didáticos analisados, Araújo (2013) indicou conformidade, porém com atenção excessiva a atividades envolvendo unidades de medida como hora, dia, meses e anos, em especial, na conversão entre essas unidades. Por outro lado, atividades de comparação de duração de intervalos de tempo e de sequências temporais, que realçam a grandeza em causa, são secundárias ou até mesmo ausentes.

Pelo exposto, ficou evidente nesse conjunto de pesquisas envolvendo análise de livros didáticos que as obras analisadas valorizam o uso de fórmulas, cálculos numéricos e situações de medida, em detrimento de situações que promovam a formação do conceito de grandeza. Para citar apenas um exemplo, Barros (2006) observou que a medida é nitidamente privilegiada em relação à grandeza, nas obras didáticas por ele analisadas. Essa constatação, em certo sentido, contribuiu para explicar, ainda que parcialmente, a força da concepção número nos conhecimentos dos estudantes, conforme indicaram os estudos diagnósticos anteriormente abordados.

Em resumo, entendemos que as escolhas curriculares parecem privilegiar o numérico.

Após um olhar transversal à luz da Teoria dos Campos Conceituais sobre um conjunto de estudos que investigaram diferentes grandezas geométricas, ficou evidente a ênfase no numérico em detrimento da medida. Essa constatação decorre da valorização excessiva em situações de medição, que tem como objetivo primeiro atribuir um número a uma grandeza. Em outros termos, esse tipo de situação busca, em última instância, produzir um número, cuja ênfase secundariza a perspectiva de grandeza, que adotamos em nosso modelo didático-matemático.

Ampliando o modelo didático-matemático (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), a TCC trouxe luz para um conjunto de situações (BALTAR, 1996) que permitem dar sentido a área enquanto grandeza, bem como para comprimento (BABORSA, 2002; 2007; BRITO, 2003) e volume (ANWANDTER-CUELLAR, 2008; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; FREITAS, 2015).

Esse marco teórico evidenciou o papel das representações como fator de influência na compreensão da grandeza (BARBOSA, 2003; 2007; BRITO, 2003) e que para muitos estudantes área e perímetro variam necessariamente no mesmo sentido, ou seja, se a área de uma superfície aumenta (diminui), seu perímetro também aumenta (diminui).

Também foram observadas dificuldades em dissociar o contorno da forma, assim como contorno e perímetro, de modo que duas figuras de mesma forma têm necessariamente o mesmo contorno e, portanto, o mesmo perímetro. O uso da medida foi bastante observado, mesmo para os casos em que ela não era necessária, indicando que o foco principal quase sempre recai em cálculos algébrico-numéricos.

Portanto, o referido modelo didático-matemático atribui às grandezas, especialmente às geométricas, sobre as quais recai nosso olhar, autonomia em relação à medida e aos entes geométricos.

2. 5 QUESTÕES DE PESQUISA, OBJETIVO GERAL E HIPÓTESE

É consenso na comunidade escolar, na academia e na sociedade que os saberes inerentes às grandezas e medidas têm sua relevância bem assentada, cuja aceitação se configurou em um domínio de estudo em documentos curriculares oficiais brasileiros. Entre algumas das razões que justificam o ensino desses saberes, destacam-se uma relação nítida com outros domínios de conhecimento, com outros conteúdos matemáticos e pela possibilidade de instrumentalizar os estudantes enquanto cidadãos atuantes no meio político, social e profissional.

Contudo, as pesquisas supracitadas revelaram dificuldades no ensino e na aprendizagem desses saberes, algumas delas persistentes, inclusive em diferentes países, níveis de ensino e sujeitos com idades variadas. Ao mesmo tempo, esses estudos indicaram existir uma valorização excessiva de determinados aspectos do conceito de grandeza, como aqueles relacionados ao cálculo numérico, em detrimento de outros, como a autonomia da grandeza em relação à medida.

Esse fenômeno didático da valorização excessiva na medida e, simultaneamente, do esquecimento da perspectiva de grandeza não é restrito a uma grandeza específica, sendo observado no conjunto das grandezas geométricas e em contextos diversos. Para além das grandezas geométricas, essa ênfase foi observada também na abordagem da grandeza duração de intervalo de tempo, que é um objeto do saber da matemática, ao longo do ensino fundamental.

Neste estudo, assumimos o modelo didático-matemático de Douady e Perrin-Glorian (1989), que consiste em caracterizar área como uma grandeza e, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, buscamos interrogar o que se produziu sobre grandezas, permitindo-nos ampliar o referido modelo para as grandezas geométricas. Esses elementos teóricos possibilitaram também organizar uma tipologia de situações, de invariantes operatórios e de representações simbólicas que incidem sobre as grandezas geométricas.

A revisão de literatura apresentada nos tópicos precedentes mostrou não somente a ênfase na medida, mas também algumas consequências, quase sempre problemáticas, correlacionadas. Ainda assim, ela persiste há algumas décadas, o que nos fez questionar quais as razões dessa ênfase e quais as alternativas possíveis.

Diante disso, formulamos as seguintes questões de pesquisa:

- *por que se enfatiza epistemologicamente a medida em detrimento da grandeza?*
- *por que se enfatiza na matemática do ensino fundamental a medida em detrimento da grandeza?*
- *Quais as consequências dessa ênfase?*

A primeira questão, de maior abrangência que as demais, surge da observação de que a ênfase no número não é um fenômeno restrito ao ensino, além de que as razões epistemológicas dessa ênfase ajudam a explicar os efeitos na matemática do ensino fundamental.

As duas questões seguintes nos levaram à Teoria Antropológica do Didático, e para respondê-las, formulamos o seguinte objetivo geral:

- Investigar as razões pelas quais existe uma ênfase no aspecto numérico em detrimento da abordagem conceitual das grandezas.

Os objetivos específicos e a tese foram formulados nos termos da Teoria Antropológica do Didático e, por consequência, serão retomados no final do capítulo 3, apresentado a seguir.

3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo apresentamos os pressupostos teóricos que fundamentaram o desenvolvimento da pesquisa na busca de trazer respostas para as questões anteriormente apresentadas.

Encerramos este capítulo com a retomada dessas questões, do objetivo geral e com a apresentação dos objetivos específicos e da hipótese.

3. 1 APORTES TEÓRICOS

O marco teórico-metodológico no qual se situa essa pesquisa é o da Teoria Antropológica do Didático, uma vez que ela permite situar o saber em diferentes instituições, bem como as relações que esse saber estabelece com outros saberes e com o meio no qual ele está inserido.

A TAD sucede e, ao mesmo tempo, estende os alcances da Teoria da Transposição Didática (TTD), cujas bases foram estabelecidas no início da década de 1980 tendo como expoente o pesquisador francês Yves Chevallard, nascido em Marselha, França, em 1946.

As ideias basilares da TTD foram apresentadas durante a realização da primeira Escola de Verão de Didática da Matemática, realizada em julho de 1980 em Chamrousse, França. Na ocasião, Chevallard ofertou um curso tendo como tema central a noção de Transposição Didática, cuja intenção, conforme ele descreve, foi de

> [...] delimitar claramente os pontos de ancoragem – aqueles que, em todo caso, o autor poderia propor naquela época – de um trabalho adicional de retificação, de aprofundamento, de extensão, etc.; com a intenção, portanto, de abrir a perspectiva de um debate científico sobre o tema tratado (CHEVALLARD, 1981-1982, p. 1, tradução nossa)[18].

Tendo em vista a autenticidade do tema posto e, seguramente, pela relevância para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática (e de outras áreas, conforme se revelou mais tarde), o referido conceito foi, posteriormente, objeto de discussão em Seminários e em publicações acadêmicas, onde surgiram também muitas críticas. Em todo caso, as discussões em torno da TTD extrapolaram os contornos da Didática da Matemática, embora em princípio,

[18] [...] d’imposition mais bien au contraire pour désigner les points d’ancrage possibles – ceux, en tout cas, que l’auteur pouvait à l’époque proposer – d’un travail ultérieur de rectification, d’approfondissement, d’extension, etc., ce concept a, si je puis dire, séduit.

sob forte resistência, sendo objeto de reflexão também na Didática da Física e em cursos de formação de professores (CHEVALLARD, 1981-1982).

Por tudo isso, dois anos após a realização desse curso, Chevallard apresentou em 1982 o texto intitulado "*Pourquoi la transposition didactique?",* como parte de uma comunicação apresentada em um Seminário de Didática e Pedagogia das Matemáticas na Universidade Científica e Médica de Grenoble*,* onde responde aos questionamentos da comunidade em torno de suas ideias iniciais sobre a TTD, alguns deles, inclusive, decorrentes de interpretações duvidosas.

Ao idealizar a TTD, Chevallard lançou luz sobre o sistema didático ou, mais amplamente, sobre o sistema de ensino e seu entorno, dando relevância nesses sistemas a um conjunto de atores até então pouco considerados sob a ótica da didática, a exemplo de gestores escolares e de representantes governamentais. Mais que isso, ele evidenciou o sistema didático, o qual se constitui da relação ternária entre o professor, o aluno e o saber, buscando responder, sobretudo, às questões:

> O que então, no sistema didático, é colocado sob a bandeira do Saber? O "saber ensinado" que concretamente encontra o observador, que relação ele envolve com o que se programa fora desse âmbito? E que relação há com o "saber sábio", o dos matemáticos? Que distância existe entre uns e outros?[19] (Ibid., p. 15, tradução nossa).

Segundo Chevallard, esses questionamentos trazem para o debate pontos de extrema relevância como gênese, filiação e legitimidade, mais precisamente, indagando sobre o tipo de gênese do saber ensinado, se as filiações são negociadas e se há legitimidades seguras.

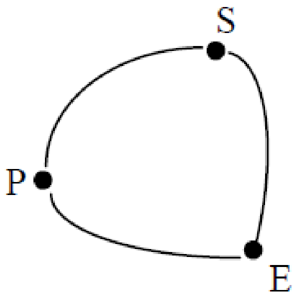
Pode-se, portanto, atribuir a emergência da TTD, ao "estudo de um problema-chave: de onde vêm os 'conteúdos de saber' estudados em uma sala de aula? Qual é a origem desses conteúdos?" (CHEVALLARD, 1991, p. 230). Assim sendo, ele percorreu o caminho partindo do saber sábio produzido na academia até chegar ao saber ensinado na sala de aula. É, portanto, nessa distância entre esses saberes que repousa o conceito de Transposição Didática.

Para se compreender os fenômenos didáticos presentes na sala de aula e problematizar a complexidade oriunda do seu entorno em relação aos saberes veiculados na escola, Chevallard parte do sistema didático, cuja representação é mostrada na figura 17 a seguir:

---

[19] Traduzido do original em francês: Ce qui, dans le système didactique, vient à paraître à l'enseigne du Savoir, qu'est-ce donc? Le « savoir enseigné » que, concrètement, l'observateur rencontre, quel rapport entretient-il à ce qui de lui alentour se proclame? Et quel rapport encore avec le « savoir savant », celui des mathématiciens? Des uns aux autres, quels écarts?

Figura 17 - Representação do sistema didático



Fonte: Chevallard (1981-1982, p. 8)

P representa o professor, ***E*** o aluno e ***S***, o saber ensinado, além de todas as interrelações entre eles. Chevallard considera ainda o entorno desse sistema - sistema de ensino - o qual dispõe de um conjunto estrutural que auxilia e regula seu funcionamento, bem como o entorno deste último, que consiste no meio sob o qual se inserem os familiares dos alunos, pesquisadores matemáticos e órgãos governamentais com poder de execução e de decisão política no âmbito educacional.

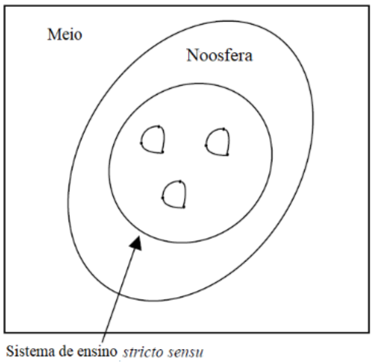
O entorno sob o qual se encontram os agentes políticos, professores, pais e pesquisadores matemáticos e que contornam o sistema de ensino, é denominado por Chevallard de noosfera, que é entendida como se segue:

> Há todos aqueles que, na vanguarda do funcionamento didático, enfrentam os problemas que surgem ao atender a sociedade e suas demandas; desenvolvem conflitos, negociações acontecem, soluções amadurecem. Toda atividade comum ocorre ali, não apenas nos períodos de crise (onde é acentuada), na forma de doutrinas propostas, defendidas e discutidas, produção e debate de ideias - sobre o que pode ser mudado e sobre o que fazer. Em resumo, estamos aqui na esfera em que pensamos - de maneiras às vezes muito diferentes - o funcionamento didático. Por isso, propus para ela o nome paródico de *noosfera*. Na noosfera, portanto, os representantes do sistema educacional, com ou sem mandato (do presidente de uma associação de professores a um simples professor militante), encontram-se, diretamente ou não (pela redação da denúncia, pela solicitação cominatória, pelo projeto transacional ou os debates abafados de um comitê ministerial), representantes da sociedade (pais de estudantes, especialistas na disciplina que militam em torno de seu ensino, os emissários do corpo político) (CHEVALLARD, 1981-1982, p. 9, tradução nossa).[20]

[20] Traduzido do original em francês : Là se trouvent tous ceux qui, aux avant-postes du fonctionnement didactique, s'affrontent aux problèmes qui naissent de la rencontre avec la société et ses exigences; là se développent les conflits, là se mènent les négociations, là mûrissent les solutions. Toute une activité ordinaire s'y déploie, en dehors même des périodes de crise (où elle s'accentue), sous forme de doctrines proposées, défendues et discutées, de production et de débats d'idées – sur ce qui pourrait être changé et sur ce qu'il convient de faire. Bref, on est ici dans la sphère où l'on pense – selon des modalités parfois fort différentes – le fonctionnement didactique. Pour cela, j'ai avancé pour elle le nom parodique de noosphère. Dans la noosphère donc, les représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignants au simple professeur militant), rencontrent, directement ou non (par le libelle dénonciateur, la requête comminatoire, le projet transactionnel, ou

A descrição acima indica, portanto, a noosfera como sendo o entorno do sistema de ensino, cujos agentes são aqueles que de alguma maneira intervém na seleção do saber ensinado, sendo, portanto, a interface entre a sociedade, que inclui as instituições produtoras do saber, e a instituição que se encarrega do ensino desse saber. A figura 18 seguinte esquematiza os sistemas didáticos e seu entorno.

Figura 18 - Entorno dos sistemas didáticos[21]



Fonte: Chevallard (1981-1982, p. 9)

Conforme mostra a figura 18, um conjunto de sistemas didáticos é contornado por um sistema de ensino, o qual, por sua vez, está envolto pela noosfera. Com isso, o saber a ensinar passa necessariamente pela noosfera, o que indica sua relevância para o funcionamento dos sistemas didáticos.

Chevallard (1982, p. 11) cita a noosfera como sendo "o centro operacional do processo de transposição", onde se busca resposta para o desequilíbrio evocado entre o sistema e seu entorno, o que faz com que em períodos de crise exista um mínimo de proteção para o funcionamento dos sistemas didáticos. Além disso, tendo em vista sua posição de mediadora, ela se configura como um espaço de conflito e de luta, onde se busca responder aos anseios de uma complexa relação social, fazendo com que sua produção seja, em última instância, não necessariamente o que dela se espera sob a ótica do saber, mas a materialização de "imposições" de agentes com algum grau de poder de decisão sobre os demais.

---

les débats assourdis d'une commission ministérielle), les représentants de la société (les parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique).

[21] Sistema de ensino *stricto sensu* se refere àquele que contorna os sistemas didáticos. Chevallard (1991) usa também a expressão *stricto sensu* para se referir às adaptações didáticas sofridas por um determinado saber, que ele denomina de transposição didática *stricto sensu.*

No âmbito da TTD, Chevallard elenca um conjunto de variáveis com relevância acentuada para se compreender o funcionamento didático. No entanto, a variável *saber* é visivelmente destacada - eixo central das discussões didáticas, pois segundo o autor,

> O saber – os conteúdos - oferece *uma variável de controle muito sensível*, permitindo obter efeitos espetaculares a baixo custo e sobre os quais a instância política tem *controle*, por meio de programas e comentários oficiais, e manuais que os explicam (CHEVALLARD, 1981-1982, p. 12)[22].

Ao mesmo tempo, é através do saber - ao se desgastar[23] - que algumas crises se manifestam entre o professor e o aluno, quando o primeiro já não é mais capaz de provocar mudanças no segundo.

Em resumo, conforme escreve Chevallard, é prioritariamente "*por meio de uma manipulação do saber*"[24] que a noosfera busca o reequilíbrio entre o sistema e seu entorno.

Finalmente, chega-se à definição dada por Chevallard para a Transposição Didática:

> Um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino, é denominado de *transposição didática* (CHEVALLARD, 1991, p. 45)[25].

A título de exemplo, área de superfícies viveu de forma operacional em comunidades antigas, passando posteriormente a ser formulada como um saber matemático. Em determinado momento, foi inserida nos programas curriculares brasileiros – saber a ensinar – cujo tratamento didático varia em função do objeto de ensino designado para cada ano. Na BNCC (BRASIL, 2017), por exemplo, no 3° ano do ensino fundamental, tem-se, entre seus objetos de ensino, comparação de área por superposição. Portanto, as adaptações feitas sobre o saber a ensinar *área* que implicaram no objeto de ensino *comparação de área*, é o que Chevallard chama de Transposição Didática.

---

[22] Traduzido do original em francês: Le savoir – les contenus – offre une *variable de commande très sensible*, permettant à moindre frais d'obtenir des effets spectaculaires, et sur laquelle l'instance politique est assurée d'un *contrôle*, par le truchement des programmes et de leurs commentaires officiels, et des manuels qui les explicitent.

[23] Para Chevallard (1981-1982), o desgaste do saber é provocado pelo seu envelhecimento em relação à sociedade, ao mesmo tempo em que, em via de mão dupla, a sociedade se tornou velha (desgastada), através de seus filhos, em relação ao saber.

[24] Ibid., p. 12.

[25] Traduzido do original em espanhol: Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a harcerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica".

Importa dizer que a expressão “Transposição Didática” com o mesmo sentido aqui tratado não derivou de Chevallard, sendo já utilizada por Michel Verrét, sociólogo francês, em 1974, ano da publicação de sua tese de doutorado, intitulada *Le temps des études: la distribution temporelle des activités des étudiants*. Em sua tese, de acordo com Leite (2004)[26], ele estudou a distribuição do tempo nas atividades escolares, com vistas a contribuir para a compreensão das funções sociais dos estudantes.

Em linhas bastante gerais Verret, segundo Leite (2004), já havia constatado que um saber para ser ensinado impõe algumas condições a serem cumpridas, quais sejam, ser programável, dessincretizado, despersonalizado e publicável, além de destacar a distância entre “a prática de transmissão e a prática de invenção”, bem como “a preocupação com a dimensão temporal nas práticas didáticas” (Ibid., p.49). Essas ideias foram incorporadas por Chevallard no desenvolvimento da TTD, o que o fez trazer esses conceitos para o seu campo de estudo – Didática da Matemática – permitindo-lhe esmiuçar todo o processo de transposição que, segundo ele, tem início já na despersonalização.

Segundo Bosch e Gascón (2006), a TTD evidenciou, em primeiro plano, que os saberes e conhecimentos ensinados na escola são produções externas a ela e que por isso precisam passar por transformações que os tornem passíveis de serem reconstruídos nesses ambientes de ensino. Portanto, segundo os autores,

> O processo de transposição didática começa longe da escola, na escolha dos corpos de conhecimento que devem ser transmitidos. Segue-se então um trabalho claramente criativo — não uma mera “transferência”, adaptação ou simplificação —, ou seja, um processo de desconstrução e reconstrução dos diferentes elementos do conhecimento, com o objetivo de torná-lo 'ensinável' mantendo seu poder e caráter funcional (BOSCH; GASCÓN, 2006, p. 53, tradução nossa)[27].

Segundo os autores, esse processo transpositivo envolve uma pluralidade de agentes (políticos, acadêmicos, professores da educação básica, entre outros), o que por um lado possibilita o ensino dos saberes na escola, mas, por outro, impõe certos limites sobre o que pode e o que não pode ser feito na escola. Como consequência, essas barreiras podem levar a um rompimento com as razões e maneiras pelas quais o saber foi criado, implicando no que

[26] A citação indireta sobre à tese de Verret (1974) decorreu da impossibilidade de ter acesso ao estudo original, mesmo após um exaustivo procedimento de busca.

[27] The process of didactic transposition starts far away from school, in the choice of the bodies of knowledge that have to be transmitted. Then follows a clearly creative type of work — not a mere “transference”, adaptation or simplification —, namely a process of de-construction and rebuilding of the different elements of the knowledge, with the aim of making it ‘teachable’ while keeping its power and functional character.

Chevallard (2004) denominou de educação monumentalista, em que os estudantes vivenciam os saberes em um estado de contemplação.

A TTD, então, ampliou o campo de investigação em educação matemática, ao problematizar o estudo de um saber em um processo anterior e exterior à sala de aula, o que levou a considerar as condições e restrições que são impostas às instituições para as quais um objeto do saber existe.

Assim, segundo Bosch e Gascón (2005, p. 53, tradução nossa),

> Em suma, considerar as restrições impostas às instituições de ensino contribui para explicar, de forma mais abrangente, o que fazem professores e alunos quando ensinam, estudam e aprendem matemática. Nesse sentido, a teoria da transposição didática contribuiu para ampliar o objeto de estudo da pesquisa em educação matemática, trazendo à tona uma dimensão da realidade educacional que permanecia sem nome e, portanto, desconsiderada até então.[28]

Aqui está, portanto, o embrião da TAD, onde emergiu a perspectiva antropológica e suas ideias de base, cuja premissa é situar a atividade de estudo de um saber no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Embora ela possa ser usada nas mais diversas áreas do conhecimento, seus achados se debruçaram, em princípio, sobre a atividade do estudo no seio da Didática da Matemática, campo de estudo que situa conhecimentos matemáticos e suas relações com o ensino.

Segundo Chevallard (2018, p. 23), "o caráter antropológico da TAD está no cerne da ruptura epistemológica que a TAD provoca corretamente no estudo do *didático*". Ruptura essa que ele atribui às abordagens clássicas do didático, que quase sempre buscam ingenuamente explicar os fenômenos didáticos apenas sob a ótica do que os alunos realizam e pelo que o professor desenvolve, o que ele chama de "condições e restrições *endógenas*" (Ibid., p. 23). Contudo, a TAD amplia essa perspectiva, colocando também as "condições e restrições *alienígenas*" (Ibid., p. 23), ao considerar os aspectos externos aos sistemas didáticos.

O campo da Antropologia, no qual Chevallard (1985) situa a Didática da Matemática e, por consequência a TAD, assume posição destacada, a quem ele atribui razão pela qual a didática se impõe sobre o mar da ignorância. Contudo, Chevallard (1985), de início, não define o termo antropologia, cujo ponto de partida é a natureza etimológica, que quer dizer, "a antropologia é o estudo do Homem" (Ibid., p. 147). Em outros estudos, esse conceito fica

[28] In short, considering the restrictions bearing on educational institutions contributes to explain, in a more comprehensive way, what teachers and students do when they teach, study and learn mathematics. In this sense, the theory of didactic transposition contributed to widen the object of study of research in mathematics education, bringing into existence a dimension of educational reality that had remained unnamed and, thus, unconsidered till then.

melhor definido, assumindo o significado de “sistemas que envolvem intrinsecamente os seres humanos” (CHEVALLARD, 1989, p. 3) e, além disso, o conceito de relação, tido como uma das noções fundamentais para a construção teórica.

Chevallard (1991, p. 148) apresenta como personagens essenciais na perspectiva antropológica “as *instituições*, os *sujeitos*[29], os *objetos*, a *relação* (pessoal) de um sujeito com um objeto, a *relação* (institucional) de uma instituição com um objeto[30]”. Esses termos são ditos primitivos e por isso não cabe defini-los. Todavia, é importante caracterizá-los como condição necessária, embora não suficiente, para se compreender o que se segue.

Segundo Chevallard (2018, p. 31), “tudo é objeto, incluindo as pessoas”. Logo, são objetos, um termômetro, a representação de uma temperatura expressa pelo par número/unidade, assim como a sensação térmica decorrente dessa temperatura. Como também o é o comprimento de um arco ou ainda a representação figural deste. O conceito de relação – pessoal e institucional - caracteriza-se pelo conjunto de interações que um indivíduo ou uma instituição pode ter com um objeto, entendendo-se aqui interação não apenas em seu sentido estrito de manusear ou de falar. Já a instituição é entendida como “um dispositivo social ‘total’” (Ibid., p. 32), extrapolando o sentido jurídico, que permite e impõe a seus sujeitos, ou seja, àqueles que nela ocupam diferentes posições, maneiras próprias de fazer e de pensar – as *praxeologias*. Voltaremos a esse conceito mais adiante. A escola, por exemplo, é uma instituição em que algumas de suas posições são a de professor, de aluno, de diretor e de porteiro, assim como a sala de aula de Matemática, cujos sujeitos são o professor dessa disciplina e seus alunos. Uma família também é uma instituição, podendo ter como posições a de pai, de mãe e de filho. Em resumo, a noção de instituição é mais ampla do que as instituições formais, estas inclusas na primeira. Novamente, a título de exemplo, uma organização sindical é uma instituição para a TAD, como são também uma sala de aula e uma comunidade indígena.

Por último, tem-se a noção de pessoa, que é constituída por um indivíduo e todas as suas relações pessoais em um dado momento de sua história. Assim sendo, em seu decurso de vida, a pessoa muda em função das relações (re)estabelecidas e daquelas terminadas, enquanto o indivíduo permanece invariante. Por exemplo, as relações que um aluno ingressante no curso

[29] Escreveu-se o termo *sujeito* em conformidade com a tradução, mas entendendo-o como sinônimo de *pessoa*. Doravante, quando não decorrer de trecho traduzido, este último será a escrita adotada. Em estudos posteriores, o termo “sujeito” adquire o sentido de uma pessoa de uma instituição I, no sentido de estar sujeita a I.

[30] Traduzido do original em espanhol: “las instituciones, los sujetos, los objetos, la relación (personal) de un sujeto con un objeto, la relación (institucional) de una institución con un objeto”.

de Licenciatura em Matemática estabelece com o objeto área, possivelmente se modificarão, ao longo de sua formação e mais ainda, no decorrer de sua atuação profissional.

Chevallard organiza os construtos teóricos da TAD em uma abordagem simbólica, por meio da qual descreve seus elementos, a seguir descritos.

Um objeto o existe para uma pessoa x, se esta estabelece uma relação com o, denominada por $R(x, o)$. Analogamente, um objeto o existe para uma instituição I se há uma relação institucional de I com o, indicada por $R_I(o)$. Portanto, um objeto existe, se é objeto para ao menos uma pessoa x ou uma instituição I. Além disso, x conhece o se x tem uma relação com o, ao mesmo tempo em que "para a pessoa z de uma instituição I, x conhece o se z supõe um juízo de *conformidade* de $R(x, o)$ com $R_I(o)$[31]" (CHEVALLARD, 1991, p. 149). A noção de conformidade significa dizer que a relação $R(x, o)$ no âmbito de I acontece de acordo com o que se espera dela, ou seja, não há violação das normas estabelecidas por I para o seu adequado funcionamento.

Posteriormente, Chevallard (1991b) amplia os termos primitivos acrescentando o conceito de *posição institucional* no âmbito de I para indicar que a relação institucional $R_I(o)$ não é unitária. Com efeito, para um dado objeto institucional o, existe não apenas uma relação institucional $R_I(o)$, mas relações institucionais de I com o objeto o decorrentes das diferentes posições ocupadas pelos sujeitos de I, que serão denotadas, cada uma delas, por $R(p_I, o)$. É o caso, por exemplo, da relação que um professor tem com o conceito de área, que se distingue da relação de seu aluno com esse objeto, distinção essa que não deve ser compreendida sob a ótica da superioridade ou de saber mais. Diante disso, a relação institucional de um objeto o, $R_I(o)$, passa a ser vista sob o enfoque da relação institucional na posição p, mais precisamente, $R(p_I, o)$.

Chevallard destaca que a essência em toda a formulação acima apresentada é "o conhecimento, entendido como existência de relações (pessoais e institucionais) com os objetos *existentes sempre no real antropológico*[32]" (CHEVALLARD, 1991, p. 149). Essa dimensão de conhecimento surge na medida em que a pessoa toma conhecimento do objeto e no decorrer do tempo a relação se fortalece e se transforma. Contudo, toda essa relação, embora rica e proveitosa, pode ser espontânea e desprovida de intencionalidade. Nesse caso, para Chevallard,

---

[31] Traduzido do original em espanhol: "para el sujeto z de una institución I, x conoce O si z supone um juicio de *conformidad* de $R(x, o)$ com $R_I(o)$".

[32] Traduzido do original em espanhol: "O conocimiento, entendido como existencia de relaciones (personales o institucionales) con los objetos *existe en todo momento en lo real antropológico*".

não existe o didático, o qual pressupõe intenção, ou mais precisamente, uma intenção didática. Logo, (Ibid., p. 150) “existe o didático quando um sujeito y tem a intenção de fazer nascer ou que mude, de certa maneira, a relação de um sujeito x com um objeto o”.

É, portanto, a partir desses pressupostos que a TAD propõe compreender os fenômenos didáticos presentes na sala de aula, em particular, na aula de Matemática.

Buscando analisar as práticas institucionais de modo a permitir uma descrição e suas condições de realização, Chevallard (1999) propõe uma ferramenta para modelizar as práticas sociais numa instituição, denominada de organização praxeológica ou praxeologia. Nessa proposição, ele modeliza as práticas sociais matemáticas.

Uma organização praxeológica é composta pela praxeologia matemática e pela didática, que se relacionam. A primeira, que envolve tarefas matemáticas, é composta pelo quarteto tipo de tarefas, técnica, tecnologia e teoria, representadas, respectivamente, por $T, \tau, \theta \ e \ \Theta$. Já a praxeologia didática, conforme escreve Chevallard (1999, pp. 245 – 246) “são respostas (no sentido forte) a questões do tipo ‘Como estudar a questão $q = \tau T$?’, ou ‘Como estudar a obra O?’”. De outro modo, isso significa questionar quais os tipos de tarefa que compõem a organização didática, ou ainda, quais “gestos” podem ser considerados didáticos, no sentido de ter a intenção de ensinar algo a alguém.

No cerne da noção de praxeologia, segundo Chevallard (1999), encontram-se as noções de tarefa t e de tipo de tarefas T, onde $t \in T$ quando uma tarefa t é do tipo T. O tipo de tarefas T, assim como t, são expressos por um verbo e um complemento, como comparar os perímetros dos pisos retangulares de duas salas, medir o volume de um recipiente cônico ou estimar a velocidade de um móvel. Isso significa que para Chevallard (1999), a noção de tipo de tarefas supõe um objetivo minimamente preciso, quer dizer, o verbo que designa o gênero de tarefa, requer necessariamente um complemento. Assim, por exemplo, “medir” indica apenas o gênero da tarefa, que ao ser complementado, “medir a área de um triângulo”, determina um tipo de tarefas. Por fim, “medir a área de um triângulo cujo comprimento de um dos lados é 5 cm e a altura relativa a esse lado tem 3 centímetros de comprimento”, é uma tarefa específica, do tipo “medir a área de um triângulo”.

Por fim, Chevallard (1999, p. 224, tradução nossa) destaca que

> Finalmente, tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas *não são* dados da natureza: são “artefatos”, “obras”, *construções institucionais*, cuja *re*construção em tal

> instituição, e por exemplo *em tal classe*, é um problema por si só, *que é o objeto próprio da didática*[33].

Esse fato evidencia a praxeologia matemática, como uma ferramenta teórico-metodológica para observar e problematizar certa realidade, que é, acima de tudo, uma construção localizada, no âmbito das instituições.

Dado um tipo de tarefas T, uma praxeologia relativa a T determina uma maneira de realizar as tarefas t do tipo T, denominada de técnica (do grego *tekhnê* – saber-fazer) e representada por τ. Em relação ao tipo de tarefas comparar os perímetros dos pisos retangulares de duas salas, a depender das variáveis em jogo, o sujeito pode realizar essa tarefa medindo os comprimentos dos contornos usando seu passo e comparar as medidas resultantes.

A tecnologia, denotada por θ, consiste no discurso racional sobre a técnica, que tem como propósito primeiro, justificá-la. Chevallard (1999) evidencia que a racionalidade do discurso depende da instituição e do espaço institucional, de modo que "uma dada racionalidade institucional pode parecer não muito racional para outra instituição" (p. 226). Além disso, a tecnologia busca ainda tornar a técnica inteligível, ou seja, explicar por que ela funciona.

Voltando ao exemplo acima, é aceitável comparar os perímetros das salas pela contagem do número de passos, desde que a mesma pessoa meça ambos os contornos. Além disso, limitar-se somente à comparação das medidas é suficiente porque a unidade de medida foi mantida.

Por fim, a teoria, representada por Θ, explica e justifica a tecnologia, analogamente ao que esta faz em relação à técnica. No exemplo supramencionado, a teoria compreende essencialmente a Álgebra das grandezas (CHEVALLARD; BOSCH, 2002), que explica e legitima comparar grandezas, em particular, comprimentos.

Chevallard (1999) denomina o bloco [T/τ] de prático-técnico, o saber-fazer, e o bloco $[\theta/\Theta]$ de tecnológico- teórico, o saber. Em resumo, em relação a um tipo de tarefas T, encontra-se, ao menos, uma técnica τ, uma tecnologia θ relativa à τ e uma teoria Θ que legitima θ. Com isso, forma-se, por assim dizer, a organização praxeológica em torno do tipo de tarefa T, indicada por $[\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta]$. Neste caso, em particular, por se tratar de uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas, Chevallard a denomina de pontual. Mas essa não é a regra, pois segundo ele,

> (...) raramente encontramos praxeologias pontuais. Geralmente, em uma dada instituição I, uma teoria Θ responde a várias tecnologias θ_j, cada uma das quais, por sua vez, justifica e torna inteligíveis várias técnicas τ_{ij} correspondentes a tantos tipos

[33] Traduzido do original em francês: Enfin, taches, types de taches, genres de taches *ne sont pas* des donnes de la nature : ce sont des "artefacts", des "oeuvres", des *construits institutionnels*, dont la *re*construction en telle institution, et par exemple *en telle classe*, est un probleme a part entiere, *qui est l'objet même de la didactique*.

> de tarefas T_{ij}. As organizações pontuais irão, assim, agregar-se, primeiro em organizações locais, $[T_i \,/\, \tau_i \,/\, \theta \,/\, \Theta]$, centradas em uma dada tecnologia θ, depois em organizações regionais, $[T_{ij} \,/\, \tau_{ij} \,/\, \theta_j \,/\, \Theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ. (Além disso, chamaremos de organização global o complexo praxeológico $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtido, em uma dada instituição, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k). Agora a passagem de uma praxeologia pontual $[\,T/\tau/\,\theta/\Theta]$ para uma praxeologia local $[T_i \,/\, \tau_i \,/\, \theta \,/\, \Theta]$ destaca a tecnologia, θ, da mesma forma que a subsequente transição para uma praxeologia regional $[T_{ij} \,/\, \tau_{ij} \,/\, \theta_j \,/\, \Theta]$ trará a teoria para o primeiro plano, Θ (CHEVALLARD, 1999, p. 229)[34].

O referido excerto caracteriza, portanto, tipos de praxeologias que podem existir ao se modelar a atividade matemática no âmbito de uma instituição.

O retorno às ideias primeiras da Teoria da Transposição Didática e as considerações sobre uma visão global da Teoria Antropológica do Didático foram necessários, uma vez que assumimos a hipótese de que a ênfase exagerada no aspecto de medida pode ser explicada via o processo de transposição desse saber.

Nesse sentido, as instituições se configuram como um dispositivo de relevância em nossa investigação, uma vez que centralizam as relações que seus sujeitos estabelecem com o conceito de grandeza.

Em destaque, listamos a instituição noosferiana, que explicita os objetos de ensino e as razões de ser institucionais dos mesmos, e as instituições acadêmicas – A Matemática e A Educação Matemática - as quais influenciam não apenas a noosfera, como também um conjunto de instituições inerentes ao processo de ensino, que compreende desde as instituições de formação de professores até a aula de Matemática.

Por tudo isso, nosso interesse se volta para o modo de vida da grandeza, suas relações, suas formas de organização e suas funções a desempenhar em instituições que se relacionam com a matemática do ensino fundamental, a fim de buscar explicar os usos que se faz desse conceito no sistema didático.

---

[34] Traduzido do original em francês: Une telle mise en avant du savoir nest nullement fortuite. On ne reencontre en fait que rarement des praxeologies ponctuelles. Generalement, en une institution I donnee, une theorie Θ repond de plusieurs Technologies θ_j, dont chacune a son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant a autant de types de tâches Tij. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agreger, dabord en organisations locales, $[T_i \,/\, \tau_i \,/\, \theta \,/\, \Theta]$, centrees sur une technologie θ determinee, ensuite en organisations régionales, $[T_{ij} \,/\, \tau_{ij} \,/\, \theta j \,/\, \Theta]$, formees autour dune theorie Θ. (Audela, on nommera organisation globale le complexe praxeologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnee, par l'agregation de plusieurs organisations regionales correspondant a plusieurs theories Θ_k.) Or le passage d'une praxeologie ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ a une praxeologie locale $[T_i \,/\, \tau_i \,/\, \theta \,/\, \Theta]$ met en avant la technologie, θ, de la meme facon que le passage ulterieur a une praxeologie regionale $[T_{ij} \,/\, \tau_{ij} \,/\, \theta_j \,/\, \Theta]$ portera au premier plan la théorie, Θ.

3. 2 PROBLEMÁTICA ECOLÓGICA

Chevallard (1991; 1994) inseriu no âmbito da TAD o conceito de *ecologia didática dos saberes*, que além de potencializar a análise do processo de transposição de um saber matemático, problematiza a realidade didática na qual esse saber foi inserido. Segundo o autor, a ecologia didática dos saberes

> trouxe consigo uma enxurrada de perguntas, às quais sua aparente ingenuidade soou culturalmente estranha. De onde vêm esses novos objetos ensinados? Como eles chegaram lá? Que interrelações, com quais objetos, eles estabelecem? E, também, acima de tudo: *por que* eles chegaram lá? (CHEVALLARD, 1994, p. 5, tradução nossa)[35].

Segundo Artaud (1997) a problemática ecológica é uma ferramenta teórica que permite questionar a vida dos objetos do saber nas instituições. Logo, problematizar os saberes à luz desse construto pressupõe considerar as suas interrelações, bem como questionar a realidade em que eles estão inseridos. Nesse sentido, para Artaud (1997, p. 101, tradução nossa),

> A problemática ecológica se apresenta de entrada como *um meio de questionar a realidade*: "o que *existe* e *por quê*? Mas também, o *que não existe* e *por quê*? E o que *poderia* existir? Sob que condições? Por outro lado, sendo dado um conjunto de *condições*, que objetos são levados a viver ou, pelo contrário, são impedidos de viver nessas condições?"[36]

A problemática ecológica permite, portanto, evidenciar as condições de existência ou de inexistência de um saber matemático, assim como as razões pelas quais ele vive em uma instituição. O endereço ou local de existência de um objeto do saber e a função desempenhada por esse objeto naquele ambiente, foram denominados por Chevallard (1994) de *habitat* e *nicho*, respectivamente, em referência ao estudo da Ecologia nas Ciências Biológicas.

O questionamento do real (ARTAUD, 1997) pressupõe a existência de um modelo por meio do qual o pesquisador se emancipa de suas principais sujeições institucionais

35 Traduzido do original em francês: [...] apportait avec elle un flot de questions, auxquelles leur apparente naïveté faisait rendre un son culturellement étrange. D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations, avec quels autres objets, y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusque-là?

36 Traduzido do original em francês: La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un *moyen de questionner le réel*. Qu'est-ce qui *existe*, et *pourquoi* ? Mais aussi, qu'est-ce qui *n'existe pas*, et *pourquoi* ? Et qu'est-ce qui *pourrait* exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de *conditions*, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont ils empêchés de vivre dans ces conditions ?

(CHEVALLARD, 2006), para com ele lançar luz sobre os fenômenos didáticos que serão visíveis. Trata-se do Modelo Epistemológico de Referência (MER), que segundo Licera, Gascón e Bosch, (2019, p. 3), “vem de instituições socialmente legitimadas que impõem seu ponto de vista ou de instituições nas quais o didata faz ou fazia parte, possivelmente ocupando funções diferentes”.

Segundo Gascón (2011), no âmbito da TAD, o MER é sempre situado, explicitável, provisório e continuamente confrontado com a realidade em (que) se investiga, de modo que ele condiciona. É situado por ser considerado um modelo para uma determinada instituição. Segundo o autor, a pesquisa em Didática da Matemática pressupõe um MER e, no âmbito da TAD, sua explicitação se faz necessária. O MER é provisório, por sempre estar sendo posto à prova, em conformidade com a realidade em que ele se coloca. Por exemplo, em determinado momento, nos anos finais do ensino fundamental, tarefas do tipo transformar unidades de medida tinham um lugar de destaque em um MER, o que não acontece na realidade atual nessa instituição.

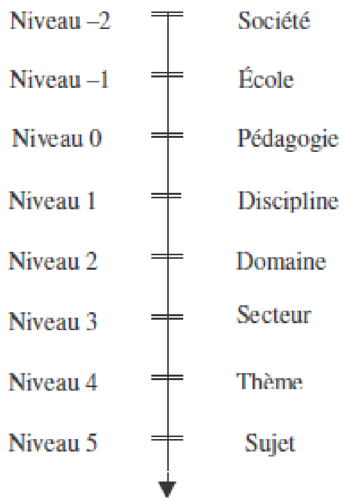
Pelo exposto, esse arcabouço teórico permitiu problematizar a vida do saber grandeza na Matemática do ensino fundamental brasileiro.

3. 3 ESCALA DOS NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA

A escala dos níveis de codeterminação didática é um construto teórico que, segundo Chevallard (2015, p. 3, tradução nossa) “permite classificar as condições sob as quais as pessoas X e as instituições I vivem e operam”. Esses níveis são denominados civilização, sociedade, escola, pedagogia, disciplina, domínio, setor, tema e tópico.

Segundo Chevallard (2002), esses níveis são hierarquizados e possibilitam localizar as condições e restrições que favorecem ou impedem o ensino de um saber em uma dada instituição.

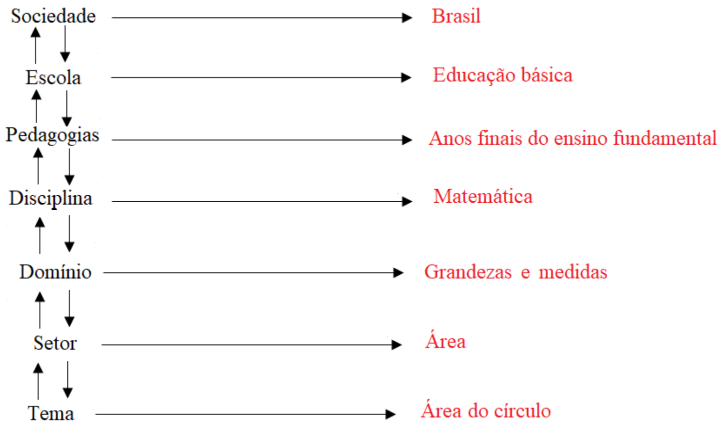
Figura 19 - Escala dos níveis de codeterminação didática



Fonte: Chevallard (2002, p. 10)

Para ilustrar, apresentamos a relação entre a escala dos níveis de codeterminação didática e o estudo de um tópico relativo à grandeza área:

Figura 20 - Exemplo da escala dos níveis de codeterminação relacionado à grandeza área



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

De acordo com Chevallard (2005, p. 2), a mencionada escala, “de certa forma, *enquadra* o que é possível fazer em termos de difusão dos conhecimentos e saberes, ou seja, em matéria didática”. É também em cada nível que é possível determinar a ecologia das organizações matemáticas e das organizações didáticas, considerando as condições que oferece, assim como as restrições por ele impostas (CHEVALLARD, 2002).

Portanto, encontramos na escala dos níveis de codeterminação subsídios para compreender condições e restrições que pesam sobre o ensino de grandezas na matemática do ensino fundamental.

3. 4 OBJETIVOS, QUESTÕES E HIPÓTESE DE PESQUISA

Neste tópico, retomamos as questões de pesquisa e o objetivo geral, bem como anunciamos os objetivos específicos e a hipótese de pesquisa.

Como já foi dito, as questões iniciais que nortearam essa pesquisa, são:

- *por que se enfatiza na matemática do ensino fundamental brasileiro a medida em detrimento da grandeza?*
- *por que se enfatiza epistemologicamente a medida em detrimento da grandeza?*

A partir delas, traçamos o objetivo geral desta tese:

- investigar as razões pelas quais existe uma ênfase no aspecto numérico em detrimento da abordagem conceitual das grandezas geométricas, na matemática do ensino fundamental.

Esse objetivo geral, se desdobra nos seguintes objetivos específicos:

- explicitar as razões de ser institucionais das grandezas e medidas na instituição Matemática do ensino fundamental brasileiro.;
- analisar as condições e restrições que pesam sobre a abordagem de grandeza na instituição Matemática do ensino fundamental brasileiro.

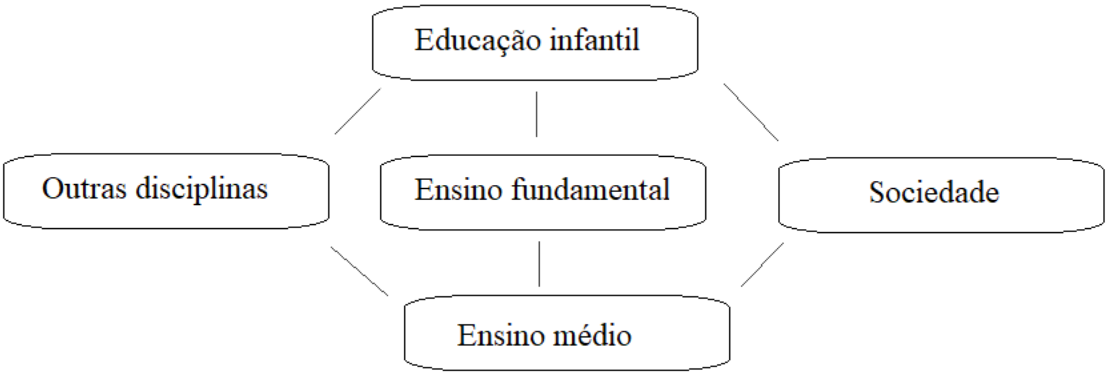
Tendo em vista as diferentes modificações do conceito de grandeza no decurso de sua concepção até a sua institucionalização, formulamos a seguinte hipótese de trabalho:

O Modelo Epistemológico de Referência para o domínio das grandezas e medidas na matemática do ensino fundamental brasileiro, ancorado em modelos matemáticos robustos produzidos na interface entre a matemática, a educação matemática e a didática da matemática, deve assegurar tanto a exploração das conexões entre grandezas e números, essencial para práticas sociais e para a atribuição de sentido aos conjuntos numéricos, como um lugar de relevo para o conceito de grandeza, fundamental para a conexão com a geometria e com a física.

Tendo em vista os objetivos acima mencionados, realizamos um estudo ecológico do conceito de grandeza na instituição Matemática do ensino fundamental brasileiro, que será apresentado no capítulo a seguir.

Nesse estudo, problematizamos o conceito de grandeza em uma dinâmica institucional, considerando as interrelações entre as etapas da educação básica que precedem e sucedem o ensino fundamental, entre matemática e outras disciplinas, especialmente a física, e entre a matemática a ser ensinada, a matemática do saber sábio e as práticas sociais não escolares, realizadas na sociedade.

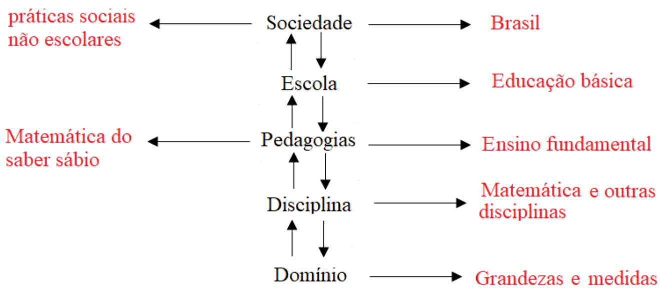
Figura 21 - Dinâmica institucional



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Sob a perspectiva dos níveis de codeterminação, essa dinâmica institucional assume a seguinte configuração:

Figura 22 - Dinâmica institucional sob a perspectiva dos níveis de codeterminação didática



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Portanto, para compreender as razões da ênfase no número, consideramos as instituições que se interrelacionam com o ensino fundamental brasileiro, que é instituição em estudo.

4. ECOLOGIA DO CONCEITO DE GRANDEZA NO ENSINO FUNDAMENTAL BRASILEIRO

Este capítulo apresenta uma análise ecológica do objeto de saber grandeza na matemática do ensino fundamental brasileiro. Para tanto, foram analisados os documentos de orientação curricular de abrangência nacional - os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Embora o documento vigente no Brasil hoje sejam a BNCC, escolhemos analisar também os PCN, pois se trata de um marco em relação ao objeto de estudo dessa tese. Com efeito, é a partir da publicação desse documento que na matemática do ensino fundamental, configura-se claramente um domínio intitulado grandezas e medidas.

Com isso, buscou-se evidenciar como e onde vivem as grandezas, ou seja, seu *nicho* e *habitat*, o que levou a caracterizar as razões pelas quais o saber grandeza é ensinado na escola.

Para tanto, foram analisados os documentos destinados à educação infantil, aos anos iniciais e aos anos finais do ensino fundamental na disciplina matemática, tendo em vista a instituição em estudo nesta pesquisa.

Portanto, assumimos a hipótese de que para compreender a ecologia do saber grandeza nos anos finais do ensino fundamental, faz-se necessário compreender seu modo de vida nas instituições do entorno àquela tomada como instituição alvo.

Assim, este capítulo apresenta a análise ecológica da instituição ensino fundamental, e posteriormente, das instituições educação infantil e ensino médio, por estarem no entorno da primeira.

4. 1 SOBRE IMPORTÂNCIA DE SITUAR OS DOCUMENTOS CURRICULARES

Sob a ótica da TAD, as diretrizes desses documentos curriculares se definem na noosfera, cujos agentes dessa instituição representam os diferentes grupos da sociedade. Nesse sentido, o marco temporal que compreende a formulação e promulgação desses documentos deve ser considerado, pois segundo Chevallard (1991), a noosfera é um espaço de disputas, onde seus agentes não dispõem igualmente das mesmas armas. Logo, é necessário situar o tempo e o lugar para melhor compreender as intenções presentes nos referidos textos. Em outros termos, é possível, por exemplo, que os representantes governamentais tenham maior influência e poder de decisão do que os representantes de pais de alunos, cujo resultado disso implica, em última instância, na definição de um saber a ser ensinado com privilégios a determinados vieses.

É, portanto, nessa perspectiva que historicizamos, ainda que de forma breve, o processo de construção desses documentos.

4. 2 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) formam um conjunto de documentos orientadores do ponto de vista curricular concebidos entre os anos de 1995 e 1996 e publicados nos anos de 1997 e 1998, contemplando os anos iniciais e finais do ensino fundamental, respectivamente. Sua concepção envolveu diferentes segmentos que lidam direta e indiretamente com a educação brasileira, com representantes da sociedade civil, de classes (professores), governamental e acadêmica. Um ponto de destaque é que essa discussão foi contemporânea à formulação e promulgação da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), que instituiu uma política de Estado para a educação nacional.

Nos PCN é explicitada a intenção de respeitar a autonomia dos entes federativos e dos educadores, prezando pela diversidade sociocultural, religiosa, econômica e política do Estado brasileiro, o que é coerente com o estabelecido na LDB 9.394/1996. Ao mesmo tempo, nesses documentos são formuladas orientações, discussões e recomendações no âmbito didático e pedagógico, buscando contribuir para a formação plena do estudante. Nesse sentido, os PCN

> constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual.
> Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas.
> O conjunto das proposições aqui expressas responde à necessidade de referenciais a partir dos quais o sistema educacional do País se organize, a fim de garantir que, respeitadas as diversidades culturais, regionais, étnicas, religiosas e políticas que atravessam uma sociedade múltipla, estratificada e complexa, a educação possa atuar, decisivamente, no processo de construção da cidadania, tendo como meta o ideal de uma crescente igualdade de direitos entre os cidadãos, baseado nos princípios democráticos. Essa igualdade implica necessariamente o acesso à totalidade dos bens públicos, entre os quais o conjunto dos conhecimentos socialmente relevantes (BRASIL, 1997, p. 13).

Além disso, no referido documento observam-se comentários acerca de políticas públicas relativas à formação inicial e continuada de professores e à valorização da carreira docente, indicando possíveis implicações na melhoria da qualidade do ensino. Um marco dos PCN foi a mudança de enfoque sobre a organização e abordagem dos conteúdos. Até então, na visão pedagógica dominante, segundo os PCN, ensinava-se o conteúdo com um fim em si mesmo, cuja proposta passou a considerá-lo como meio para o desenvolvimento de capacidades com vistas ao usufruto de bens culturais, sociais e econômicos.

Com isso, a abordagem dos conteúdos assumiu três categorias: conceituais, procedimentais e atitudinais. O primeiro estabelece a aprendizagem de conceitos para o desenvolvimento intelectual do estudante. O segundo, contempla, dentre outras coisas, a tomada de decisão de maneira consciente, bem como a realização de ações buscando atingir metas. Por fim, os atitudinais contemplam todo o saber escolar, considerando que a compreensão de atitudes e valores é inerente ao processo de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido, uma questão merecedora de destaque é que para os PCN,

> Considerar conteúdos procedimentais e atitudinais como conteúdos do mesmo nível que os conceituais não implica aumento na quantidade de conteúdos a serem trabalhados, porque eles já estão presentes no dia-a-dia da sala de aula; o que acontece é que, na maioria das vezes, não estão explicitados nem são tratados de maneira consciente. A diferente natureza dos conteúdos escolares deve ser contemplada de maneira integrada no processo de ensino e aprendizagem e não em atividades específicas (BRASIL, 1997, p. 53).

Percebe-se, portanto, que as três classes de conteúdos devem ser exploradas de maneira integrada, sem privilégio a nenhuma delas.

Tomando os PCN como um documento produzido pela noosfera, observa-se, ainda que timidamente, representatividade de grupos sociais diversos como membros da sociedade civil, membros docentes da educação básica, professores universitários e representantes governamentais. Nesse sentido, mesmo havendo disparidade de forças no funcionamento de uma instituição noosferiana, aspectos importantes como a valorização da carreira docente, a valorização da cultura local e o respeito à autonomia das escolas são mencionados no documento. Assim, a configuração geral do documento se mostrou alinhada com um tipo de sociedade mais inclusiva e igualitária, tendo em vista a preocupação com questões não apenas econômicas, mas também socioambientais, culturais e políticas – não partidária. É, portanto, submersa a esse modelo de sociedade, indicado nos PCN, que a Matemática enquanto disciplina se apresenta, de onde emerge o domínio das Grandezas e Medidas. Sob a ótica organizacional, esse documento foi modelado por áreas de conhecimento, mas de maneira integrada. Nos deteremos à Matemática e, mais especificamente, ao bloco das Grandezas e medidas.

A disciplina Matemática, em geral, tem como princípios um ensino que articule o mundo físico às abstrações dessa ciência, propicie interações entre diferentes conceitos matemáticos e entre diferentes áreas de conhecimento, além de evidenciar a Matemática como um construto sociocultural e científico, cujas implicações possam refletir em uma melhor compreensão e atuação no mundo pelos indivíduos. Para tanto, os conteúdos foram organizados em quatro domínios (indicados no documento pelo termo blocos) denominados por Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação. A emergência do bloco destinado às grandezas foi um avanço importante para sua valorização, uma vez que tais conceitos viviam pulverizados em diferentes domínios. Além disso, nos PCN destaca-se que os conceitos desse bloco possibilitam fazer articulação com os outros conceitos matemáticos, bem como com outras disciplinas, além de se destacar pela sua forte inserção sociocultural.

Em se tratando da configuração organizacional, o ensino fundamental foi moldado em quatro ciclos, sendo os dois primeiros correspondentes às 1ª e 2ª séries e 3ª e 4ª, respectivamente, e os dois últimos, à 5ª e 6ª, e a 7ª e 8ª séries, pois no período de publicação desse documento, o ensino fundamental brasileiro estava organizado em oito anos (da 1ª à 8ª série). Com isso, os objetivos de Matemática foram instituídos por ciclos. Voltando-se para os 3° e 4°[37] ciclos do ensino fundamental, o papel da Matemática é pontuado, nos PCN , conforme segue:

> Em síntese, os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 60).

Para tanto, recomenda-se no 3° ciclo, um conjunto de objetivos e o excerto seguinte apresenta aqueles relativos às grandezas e medidas:

> Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> * ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção;
> * resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida (BRASIL, 1998, p. 65).

[37] 3º e 4º ciclos equivalem às 5ª e 6ª séries e 7ª e 8ª séries, respectivamente no PCN (BRASIL, 1998).

Com o intuito de atingir tais objetivos, são propostos os seguintes conteúdos,

> Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, **superfície**, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria.
> Reconhecimento e compreensão das unidades de memória da informática, como bytes, quilobytes, megabytes e gigabytes em contextos apropriados, pela utilização da potenciação.
> Obtenção de **medidas** por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema.
> Utilização de instrumentos de medida, como régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças para fazer medições, selecionando os instrumentos e unidades de medida adequadas à precisão que se requerem, em função da situação-problema.
> Compreensão da noção de **medida de superfície** e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras.
> **Cálculo da área** de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas.
> Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.
> Estabelecimento de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações-problema (BRASIL, 1998, p. 74 grifos nosso).

Como se pode observar, nessa etapa de escolarização, recomenda-se nos PCN, entre outros aspectos, o trabalho com diversas grandezas, incluindo velocidade e unidades de capacidade da informática, além de contemplar a precisão dos instrumentos de medida em função do contexto, o uso de estimativas e a conversão entre unidades de uma mesma grandeza por meio da resolução de problemas. Essas escolhas de transposição didática são convergentes com a instalação de um domínio das grandezas e medidas na matemática do ensino fundamental.

Contudo, os excertos acima parecem sinalizar também uma ênfase na medida e divergências entre o modelo epistemológico de referência no qual nos apoiamos e o modelo preconizado na instituição. Os grifos sugerem uma confusão entre os termos área e superfície, que segundo nosso modelo epistemológico de referência remetem ao objeto geométrico e à grandeza respectivamente. Esse tratamento é conceitualmente prejudicial (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; MOREIRA-BALTAR, 1993; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; FERREIRA, 2010; FIGUEIREDO, 2013), pois pode acentuar o amálgama entre a grandeza área e a superfície, característica das concepções geométricas de área. Além disso, os trechos acima sinalizam que a finalidade última recai na obtenção da medida e pode-se inferir que ao menos parcialmente, essa ênfase se conecta aos usos sociais de conteúdos do domínio das grandezas e medidas.

Para o 4° ciclo, encontram-se os seguintes objetivos de aprendizagem para as grandezas:

> * ampliar e construir noções de **medida**, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;
> * obter e utilizar fórmulas para **cálculo** da área de superfícies planas e para **cálculo** de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas) (BRASIL, 1998, p. 82 grifo nosso).

Além de retomar ideias já discutidas anteriormente, amplia-se para a natureza da medida e o uso das fórmulas para o cálculo da medida de área e de volume.

Com isso, são sugeridos os seguintes conteúdos:

> Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para **efetuar cálculos** e expressar resultados.
> **Cálculo** da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.
> Construção de procedimentos para o **cálculo** de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
> **Cálculo** da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).
> **Cálculo** do volume de alguns prismas retos e composições destes.
> Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da **medida do lado** e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.
> Resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh).
> Compreensão dos termos algarismo duvidoso, algarismo significativo e erro de medição, na utilização de instrumentos de medida.
> Estabelecimento da relação entre a **medida da diagonal** e a **medida do lado** de um quadrado e a relação entre as **medidas do perímetro** e do **diâmetro** de um círculo (BRASIL, 1998, pp. 89-90 grifos nosso).

O excerto acima traz em seu escopo um conjunto de saberes, os quais são apontados pela literatura como sendo relevantes para serem explorados em sala de aula. Chevallard e Bosch (2000) destacam que as grandezas estão no cerne do desenvolvimento da Matemática, razão pela qual se deve fazer uso de problemas genuínos, entre os quais se encontra a emergência dos números irracionais, que pode ser provocada por meio da relação entre o comprimento do lado e o da diagonal de um quadrado e da razão entre o comprimento da circunferência e de seu diâmetro. A apropriação da relação entre área e perímetro se mostrou complexa para crianças (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) e adolescentes (KOSPENTARIS, SPYROU; LAPPAS, 2011), ocasionada principalmente pela precocidade na introdução de medidas. O uso de certas grandezas, notadamente as físicas, geradas a partir de outras, como velocidade (razão entre comprimento e duração de intervalo de tempo) e densidade (razão entre massa e volume) encontra respaldo em Whitney (1968a) e em Chevallard e Bosch (2002). Já a questão de erros e incertezas é tratada em Passelaigue e Munier (2015).

Esses aspectos, recorrentemente, revelam incompreensões, dificuldades e erros persistentes em sua abordagem em sala de aula e por isso, sua institucionalização nos PCN evidencia algum zelo pelo conceito de grandeza. A despeito disso, ao longo do 4° ciclo, a abordagem das grandezas geométricas se volta preponderantemente para o quadro numérico, observada nos grifos destacados nos excertos apresentados. Por essa razão, faz-se necessário compreender o que se sugere nos PCN, em relação à abordagem de grandeza, para os dois primeiros ciclos, pois nos demais, conforme já dito, o aspecto numérico prevalece.

O viés numérico foi observado com maior nitidez quando se modelaram as praxeologias matemáticas presentes nesse documento, ainda que o detalhamento dos componentes praxeológicos não estejam presentes, considerando que não se trata de um texto do saber. Portanto, essa modelização foi feita com base no que se espera que o estudante aprenda ao longo de cada ciclo.

Para melhor compreender as práticas realizadas em torno do objeto grandeza no ensino fundamental brasileiro, foi feita, mais adiante, a análise de duas coleções de livros didáticos, do 1° ao 5° e do 6° ao 9° ano, por se tratar de um texto do saber que apresenta um conjunto amplo de atividades matemáticas.

Modelamos a partir dos PCN, tendo em vista o saber a ser ensinado, um conjunto de tipo de tarefas tacitamente indicadas para o 3° ciclo. Tendo em vista que nosso interesse não é em uma determinada grandeza, atribuímos um nível de granularidade mais geral para os tipos de tarefas e para os mais específicos, consideramos subtipos de tarefa (ARAÚJO, 2009).

Quadro 1 - Tipos de tarefas propostos para o 3° ciclo do ensino fundamental nos PCN[38]

Tipos de tarefa	
T_{RG}:	Reconhecer uma grandeza
T_{IU}:	Identificar unidades mais adequadas para medir uma grandeza
T_{EM}:	Estimar a medida de uma grandeza
T_{MG}	Medir uma grandeza
T_{CM}:	Calcular a medida de uma grandeza
T_{TU}:	Transformar unidades de medidas de grandezas em situações-problemas

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

[38] Embora os termos que constam nos PCN sejam superfície (ao invés de área), tempo (no lugar de duração de intervalos de tempo) e ângulo (onde deveria ser abertura de ângulo), na construção da tipologia de tarefas utilizamos a terminologia coerente com o modelo epistemológico de referência da pesquisa.

Modelamos T_{EM}, T_{MG} e T_{CM}: como tipos de tarefa diferentes, considerando as técnicas associadas a cada um. No primeiro caso, associa-se uma medida, em uma dada unidade, a uma grandeza. No segundo caso, utiliza-se um instrumento físico, como trena para medir um comprimento, balança para medir uma massa e termômetro para medir uma temperatura, para medir uma grandeza. O terceiro tipo de tarefas está ligado ao cálculo, em que procedimentos numérico-algébricos são os mais usuais.

Depreende-se desse quadro que o aspecto da medida se sobressai, considerando que os tipos de tarefa se situam predominantemente no quadro numérico.

Quadro 2 - Subtipos de tarefas propostos para o 3° ciclo do ensino fundamental nos PCN

Subtipos de tarefa	
T_{RG}:	Reconhecer a grandeza comprimento
	Reconhecer a grandeza massa
	Reconhecer a grandeza capacidade
	Reconhecer a grandeza área
	Reconhecer a grandeza volume
	Reconhecer a grandeza abertura de ângulo
	Reconhecer a grandeza duração de intervalos de tempo
	Reconhecer a grandeza temperatura
	Reconhecer a grandeza velocidade
T_{IU}:	Identificar unidades de medida mais adequadas para medir as grandezas comprimento, massa, capacidade, área, volume, abertura de ângulo, duração de intervalos de tempo, temperatura, velocidade
T_{CM}:	Calcular a medida da grandeza área
	Calcular a medida da grandeza volume
T_{TU}	Transformar unidades de medidas de comprimento
	Transformar unidades de medidas de massa
	Transformar unidades de medidas de capacidade
	Transformar unidades de medidas de capacidade armazenamento de dados
	Transformar unidades de medidas de tempo

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Esse conjunto de tipos de tarefas está associado às grandezas comprimento, massa, capacidade, área, volume, abertura de ângulo, duração de intervalo de tempo, temperatura, velocidade e capacidade de armazenamento de dados.

Depreende-se desses quadros que é dada maior atenção aos aspectos numéricos e às grandezas geométricas, cujo foco é na resolução e elaboração de problemas. Estes, por sua vez, remetem explicitamente à articulação entre grandezas e números, bem como a contextos sociais, pois segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 69) “O trabalho com medidas deve estar centrado na análise de situações práticas que levem o aluno a aprimorar o sentido real das medidas”.

Para esses tipos de tarefas, encontramos indícios de técnicas, tais como fazer aproximações em conformidade com o contexto da situação, utilizar instrumentos de medida, contar unidades e decompor e recompor figuras geométricas planas. Esses fragmentos de técnicas sugerem uma abordagem exploratória das grandezas, mesmo quando da presença de medidas.

Para o 4° ciclo, nos PCN evidencia-se seu caráter articulador entre diferentes saberes, domínios e disciplinas como característica essencial das grandezas -, conforme se observa no trecho a seguir:

> O estudo de Grandezas e Medidas é outro articulador entre diversos conteúdosmatemáticos, por proporcionar um vasto campo de problemas que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas.
> Como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a interpretação deste, as possibilidades de integração da Matemática com as outras áreas do ensino fundamental ficam evidentes, como Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias). (BRASIL, 1998, p. 85).

Esse excerto ratifica a perspectiva utilitarista indicada no ciclo anterior ao propor, por exemplo, o estudo de grandezas como densidade demográfica e de energia elétrica, que são usualmente veiculadas e/ou utilizadas no cotidiano. Elas, inclusive, trazem luz a um tipo de grandeza, a saber, a que decorre da relação (razão ou produto) com outras grandezas. Por exemplo, densidade demográfica, bastante usual em geografia, corresponde à quantidade de habitantes por metro quadrado e indica quão povoada é uma determinada região.

Ao modelarmos o bloco prático-técnico, identificamos fragmentos dos tipos e subtipos de tarefas propostas para o 4° ciclo indicados no quadro a seguir:

Quadro 3 - Tipos de tarefas propostos para o 4° ciclo do ensino fundamental nos PCN

Tipos de tarefa	
T_{RP}:	Resolver situações-problemas envolvendo grandezas
T_{AG}:	Associar grandezas
T_{CM}:	Calcular a medida de uma grandeza
T_{TU}:	Transformar unidades de medidas de grandezas em situações-problemas

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

O tipo de tarefa T_{RP} evidencia os usos sociais das grandezas e com isso legitima uma razão pela qual se deve ensinar esse conceito na escola.

Em geral, os tipos de tarefa que se situam no quadro numérico predominam, levando-nos a acreditar que o foco recai em medir ou calcular grandezas.

Quadro 4 - Subtipos de tarefas propostos para o 4° ciclo do ensino fundamental nos PCN

Subtipos de tarefa	
T_{RP}:	Resolver situações-problema envolvendo capacidade
	Resolver situações-problema envolvendo tempo
	Resolver situações-problema envolvendo massa
	Resolver situações-problema envolvendo temperatura
	Resolver situações-problema envolvendo densidade
	Resolver situações-problema envolvendo velocidade
	Resolver situações-problema envolvendo energia elétrica
T_{RG}	Analisar a variação do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do comprimento de seu lado
T_{CM}:	Calcular a medida da grandeza área
	Calcular a medida da grandeza volume
T_{TU}:	Transformar unidades de medidas de tempo
	Transformar unidades de medidas de massa
	Transformar unidades de medidas de capacidade
	Transformar unidades de medidas de temperatura

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Nessa etapa, privilegiam-se resolução de situações problemas e cálculo da medida de áreas e de volumes grandezas.

Os fragmentos de técnicas observados foram decomposição e recomposição de figuras planas, uso de instrumentos de medida e de fórmulas para o cálculo da medida de área e de volume.

De um modo geral, nos 3° e 4° ciclos, as medidas e os instrumentos (trena, régua, relógio, cronômetro, balança, recipientes de um litro, termômetros, entre outros) ganham relevo. É também nessa etapa que as fórmulas e os números irracionais emergem. Destaca-se ainda a valorização da resolução de problemas como meio para tornar os conteúdos significativos para os estudantes. Ao fazer isso, entra em cena o meio social, instituição na qual a relação entre grandeza, número e objeto geométrico (para o caso das grandezas geométricas) quase sempre se confunde.

Diante do exposto, observa-se que o referido documento contempla alguns aspectos problemáticos apontadas na revisão de literatura, a exemplo do amálgama entre perímetro e área. Contudo, busca-se, em última instância, uma abordagem voltada para medições de grandezas. Em todo caso, observam-se recomendações para o ensino de grandezas alinhadas às práticas sociais, como meio para dar sentido ao conceito de números, como articuladora entre diferentes disciplinas e domínios, conforme se vê no trecho a seguir:

> Os conteúdos referentes ao bloco **Grandezas e Medidas cumprem um importante papel no currículo de Matemática**, pois estabelecem conexões entre os diversos temas, proporcionando um campo de problemas para a ampliação e **consolidação do conceito de número e a aplicação de conceitos geométricos.**
> Além disso, como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de **integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais** (utilização de bússolas, e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas etc.). As medidas também são necessárias para melhor **compreensão de fenômenos sociais e políticos**, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos Temas Transversais (BRASIL, 1998, p. 128, grifos nosso).

Os textos em destaque evidenciam razões de ser das grandezas nos anos finais do ensino fundamental na perspectiva da noosfera, quais sejam: integrar disciplinas (física e geografia, por exemplo) e domínios (grandezas e medidas, números e geometria), e servir como instrumento para compreender a realidade em que o estudante está inserido. Esta última instituição, meio social, tem forte apelo às situações de medição, uma vez que os afazeres diários exigem com muita frequência. Conforme aponta Caraça (1951, p. 19), “Medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência”.

Nesse sentido, para Aristóteles, segundo Silva (2010, pp. 11-12), “a faculdade de pesar, medir e de contar permite ao espírito humano livrar-se das aparências sensoriais” e, para o autor, a medição tem como finalidade explícita seu conteúdo social, pois é por meio dela que “compartilhamos nosso sentimento de equidade, organizamos a distribuição dos bens sociais e padronizamos a produção de nossos bens materiais”.

Vê-se, então, que as grandezas ocupam um lugar privilegiado na sociedade, em que sua quantificação é a finalidade última. Logo, a ênfase na medida presente já na noosfera, que tem entre seus agentes, representantes da sociedade, está associada a imposições de níveis superiores na escala dos níveis de codeterminação.

4. 3 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Trata-se de um documento normatizador que instituiu um conjunto de competências e habilidades para serem desenvolvidas em sala de aula ao longo da educação básica. Ele é definido como

> (...) um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de

> Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (BRASIL, 2017, p. 7).

A Constituição da República Federativa do Brasil, em seu Artigo 2010, já previa desde 1988, a construção de uma Base Curricular Nacional. A despeito disso, a formulação da BNCC se deu efetivamente somente a partir de junho de 2015.

Voltando-se tão somente para o período da efetiva formulação até a publicação da BNCC, entre setembro de 2015 e dezembro de 2017, para o ensino fundamental e, dezembro de 2018 para o ensino médio, o Brasil viveu intensas disputas políticas no plano nacional, que possivelmente impactaram na configuração final desse documento. Uma evidência desse fato se encontra na lei de n° 13.415 de 16 de dezembro de 2017, em seu Artigo 3°, § 2°, que embora obrigue o estudo de Filosofia e Sociologia no ensino médio, não o assegura ao longo de toda essa etapa. Também no §7° desse mesmo Artigo, promove-se, dentre outros aspectos, um trabalho voltado para a construção de um projeto de vida pessoal do aluno, considerando seus aspectos físicos, cognitivos e socioeconômicos.

À luz dos níveis de codeterminação, que situa a escola dentro de uma perspectiva de sociedade, observa-se nesse modelo de formação voltado para um projeto de vida pessoal, uma sociedade e, por consequência a escola, caracterizadas por um saber utilitarista e voltado prioritariamente à formação profissional. Ainda que essa perspectiva corresponda ao ensino médio, não se pode perder de vista a dinâmica institucional, ou seja, as interrelações que existem entre as diferentes etapas da educação básica.

A lei mencionada acima indica, ainda que de forma tácita, a perspectiva educacional defendida pelo grupo político que governou o país no momento final da estruturação e publicação da BNCC e, dessa forma, é esperado que em algum grau, a visão de formação de mão de obra para o mercado de trabalho se manifeste também nesse documento, tendo em vista a disparidade de forças dos agentes que compõem a noosfera (CHEVALLARD, 1991). Se assim for, a escola, a pedagogia e a Matemática estarão sob a influência direta dessa perspectiva de sociedade que perpassa o documento. Por tudo isso, é esperado que no domínio das grandezas e medidas, o conceito de grandeza seja predominantemente voltado para medições e cálculos, mais particularmente, para medir grandezas (comprimento, área, duração de intervalo de tempo, abertura de ângulo, capacidade, volume, entre outras).

Com a publicação da BNCC, além de se normatizar as competências e habilidades que devem ser abordadas nas escolas em nível nacional, o referido documento vem norteando amplamente o processo de ensino e de aprendizagem, por meio da elaboração de livros didáticos destinados às escolas públicas. Portanto, trata-se de um documento de grande relevância para o cenário educacional brasileiro e que por isso precisa ser bem compreendido, sobretudo numa perspectiva crítico-reflexiva.

A BNCC especifica um conjunto de competências gerais, de competências específicas por disciplina, os objetos de conhecimento, aqueles que devem ser ensinados na escola, e suas respectivas habilidades. São dez as competências gerais que devem ser desenvolvidas ao longo da educação básica por meio dos diferentes componentes curriculares:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2017, pp. 9-10).

A partir desse conjunto de competências, em linhas bem gerais, pode-se idealizar uma sociedade que valoriza a construção histórica e social do conhecimento, sem perder de vista o científico. Aspectos do mundo físico, artístico, social e cultural são evidenciados, bem como os recentes avanços tecnológicos. Promove-se também a inclusão, o respeito às diferenças, o bem-estar físico e emocional e o desenvolvimento de práticas com vistas aos princípios democráticos, éticos, sustentáveis e solidários. Em resumo, preza-se, de forma harmoniosa, por uma sociedade ancorada no desenvolvimento científico, social e econômico. Logo, esse documento se afasta, em princípio, de algumas perspectivas presentes lei de n° 13.415 de 16 de dezembro de 2017, que promove em seu artigo 35-A, parágrafo 7º, dentre outros elementos, um projeto de vida individual, esquecendo-se de que o indivíduo é, por natureza, sujeito de um ambiente coletivo. Ou seja, mesclam-se perspectivas diferentes do papel da educação escolar, revelando sutilmente disputas no seio da noosfera.

4. 3. 1 Base Nacional Comum Curricular - matemática no ensino fundamental

Voltando-se para o nível da disciplina, encontra-se na BNCC um conjunto de competências para a área de Matemática no ensino fundamental, listadas abaixo:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2017, p. 267).

De um modo geral, busca-se por meio da matemática fazer com que o estudante estabeleça relações entre fenômenos do mundo físico e as abstrações e perceba essa ciência como uma construção humana desprovida de linearidade e associada a diferentes povos e culturas. Também se valoriza uma formação voltada para o desenvolvimento de sujeitos crítico-reflexivos e atuantes, do ponto de vista social, econômico e científico. Portanto, a Matemática enquanto disciplina, é vista como um instrumento capaz de modelar o indivíduo na perspectiva de sociedade que não preza somente pelos interesses individuais, tampouco pela formação de mão de obra.

No entanto, no item 3 da citação anterior, grandezas e medidas não aparece como uma unidade temática, o que, de certo modo, pode reduzir a relevância do conceito de grandeza, além de, tacitamente, sugerir que eles pertencem às demais unidades.

De acordo com a BNCC, o propósito da Matemática no ensino fundamental pode ser sintetizado no seguinte excerto:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**[39], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2017, p. 266).

Visando o desenvolvimento das referidas competências e habilidades durante o ensino fundamental, a BNCC propõe cinco unidades temáticas correlacionadas, a saber: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

Em cada ano do ensino fundamental são estabelecidas as referidas unidades temáticas e seus respectivos objetos do conhecimento associados às habilidades a serem desenvolvidas. É nesse momento que emerge a unidade temática grandezas e medidas e, dessa maneira, pode-se

---

[39]A BNCC define letramento matemático como “Segundo a Matriz do Pisa 2012, o “letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.”. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013matriz_avaliacao_matematica.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2017”.

inferir que ela não se trata de um campo do conhecimento da Matemática, mas uma estruturação curricular, uma vez que para a BNCC (BRASIL, 2017, p. 265):

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus **diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade** –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas BRASIL, 2017, p. 265, grifo nosso).

Desse modo, a BNCC sugere que grandezas e medidas não é um campo da Matemática, mas uma organização curricular de um conjunto de saberes a ser ensinados na escola.

O quadro seguinte exemplifica essa organização para o 6º ano do ensino fundamental, quando trazemos para cada uma das unidades temáticas, um objeto de conhecimento e sua respectiva habilidade:

Quadro 5 - Exemplo da organização dos saberes a ensinar no 6° ano do EF na BNCC

Unidade Temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	**(EF06MA12)** Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
Álgebra	Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
Geometria	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
Grandezas e Medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas Como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Probabilidade e Estatística	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

Fonte: BNCC (2017, pp. 300-306)

Conforme observado no quadro acima, há um conjunto mínimo de objetos de conhecimento e de habilidades, definidos para cada ano que devem ser ensinados na escola.

Tendo em vista o caráter normatizador desse documento para os currículos e livros didáticos, a existência da unidade temática grandezas e medidas assegura o ensino de grandezas em sala de aula. Por outro lado, a excessiva atenção à medida pode impor condições que prejudicam o estabelecimento de uma distinção clara entre grandeza e medida.

4. 3. 1. 1 Base Nacional Comum Curricular – Grandezas e medidas do 1° ao 5° ano

A análise dos objetos de conhecimento e das habilidades indicadas para os anos iniciais revelou que no 1° ano é proposta uma abordagem mais intuitiva pautada em indícios de tipos e subtipos de tarefas cujos gêneros são comparar, descrever, reconhecer e produzir:

> (EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.
> (EF01MA16) Relatar em linguagem verbal ou não verbal sequência de acontecimentos relativos a um dia, utilizando, quando possível, os horários dos eventos.
> (EF01MA17) Reconhecer e relacionar períodos do dia, dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, quando necessário.
> (EF01MA18) Produzir a escrita de uma data, apresentando o dia, o mês e o ano, e indicar o dia da semana de uma data, consultando calendários.
> (EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante. (BRASIL, 2017, p. 281).

A perspectiva de grandeza na habilidade EF01MA15 aparece em conformidade com o modelo didático-matemático (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), tendo em vista que o tipo de tarefa T_{CG}: comparar uma grandeza não menciona medidas. Para esse tipo de tarefa, modelamos os subtipos comparar comprimentos; comparar capacidades e comparar massas.

Contudo, o termo *medida* aparece explicitamente na escrita dos objetos de conhecimento: ‘Medidas de comprimento, massa e capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais Medidas de tempo: unidades de medida de tempo, suas relações e o uso do calendário”. (BRASIL, 2017, p. 280).

Figura 23 - Exemplo de uso do termo medida na descrição do objeto do saber no 2° ano do ensino fundamental na BNCC

MATEMATICA – 2º ANO (Continuação)

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Grandezas e medidas	Medida de comprimento: unidades não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro)
	Medida de capacidade e de massa: unidades de medida não convencionais e convencionais (litro, mililitro, cm^3, grama e quilograma)
	Medidas de tempo: intervalo de tempo, uso do calendário, leitura de horas em relógios digitais e ordenação de datas
	Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas e equivalência de valores

Fonte: Brasil (2017, p. 284)

Ainda que as habilidades apontem para outra perspectiva, essa nuance revela, de certa maneira, a força da medida mesmo quando se trata da grandeza.

A partir do 2° ano, o bloco prático técnico é enriquecido com o acréscimo de novos gêneros de tarefas (estimar e medir) e novos indícios de técnicas (utilizar unidades de medidas padronizadas ou não e instrumentos de medida), agora com a institucionalização da medida como necessária e importante.

Figura 24 - Exemplos de tipos de tarefas para o 2° ano do EF na BNCC

HABILIDADES
(EF02MA16) Estimar, medir e comparar comprimentos de lados de salas (incluindo contorno) e de polígonos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro) e instrumentos adequados.
(EF02MA17) Estimar, medir e comparar capacidade e massa, utilizando estratégias pessoais e unidades de medida não padronizadas ou padronizadas (litro, mililitro, grama e quilograma).
(EF02MA18) Indicar a duração de intervalos de tempo entre duas datas, como dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, para planejamentos e organização de agenda. **(EF02MA19)** Medir a duração de um intervalo de tempo por meio de relógio digital e registrar o horário do início e do fim do intervalo.
(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.

Fonte: Brasil (2017, p. 285)

A partir desse momento, o estudo de grandezas é ampliado com a inserção de comprimento (perímetro), temperatura, área e volume tendo como finalidade o estudo de tipos de tarefas como medir e calcular grandezas, por meio de técnicas que servem de preparação para a institucionalização das fórmulas.

Diante do exposto, observa-se na abordagem de grandezas, o desenvolvimento de relações com outros saberes e disciplinas já a partir do 1° ano.

De início, as práticas matemáticas em torno das grandezas se afastam da perspectiva de medida. Contudo, já no 2° ano, o gênero calcular é explicitamente indicado e, inevitavelmente, cálculos e operações numéricas assumem protagonismo. Nesse sentido, segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), a introdução precoce das medidas pode levar ao amálgama entre grandeza e número.

Essa precocidade nos levou a questionar se na educação infantil há um trabalho com grandezas e, em caso afirmativo, de que maneira ele é conduzido. Para tanto, analisaremos no capítulo 5, a etapa da educação infantil na BNCC, enquanto instituição do entorno do ensino fundamental.

4. 3. 1. 2 Base Nacional Comum Curricular –Grandezas e medidas do 6° ao 9° ano.

Consideraremos, a partir de então, a unidade temática grandezas e medidas, por ser o domínio das grandezas. Nessa perspectiva, elegemos o ensino fundamental como a instituição investigada para compreender praxeologias matemáticas realizadas em torno do objeto do saber em foco. Essa escolha conduz também a olhar outras instituições em que esse saber vive, a exemplo da educação infantil, uma vez que no âmbito da TAD, as instituições não vivem isoladas, mas em uma dinâmica institucional.

As grandezas estão presentes na BNCC nos quatro anos da etapa final do ensino fundamental, com progressiva ampliação dos objetos de saber. O quadro seguinte traz as grandezas abordadas em cada ano.

Quadro 6 - Grandezas indicadas para os anos finais do EF na BNCC

Ano	Grandezas
6°	Comprimento, massa, duração de intervalos de tempo[40], temperatura, área, capacidade, volume, abertura de ângulo[41]
7°	Comprimento, área, volume
8°	Comprimento, área, capacidade, volume
9°	Comprimento, capacidade de armazenamento de dados, volume

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

[40] O termo que consta na BNCC é tempo, mas de acordo o modelo epistemológico de referência (MER) da pesquisa, a grandeza é duração de intervalos de tempo.

[41] Na BNCC consta o termo ângulo, mas utilizamos na análise a nomenclatura coerente com nosso MER.

As grandezas aparecem ao longo dos anos finais do ensino fundamental, especialmente as geométricas. Historicamente, o saber abertura de ângulo, era situado no domínio da geometria, principalmente nos livros didáticos. Em princípio, a BNCC buscou romper essa visão dominante, quando situou esse objeto no domínio das grandezas e medidas no 6° ano. Porém, nos anos seguintes ela retorna para seu domínio "natural", outrora estabelecido, e com isso faz desaparecer a perspectiva de grandeza. Esse fato evidencia, por um lado, uma singela mudança de perspectiva em relação à grandeza abertura de ângulo, mas por outro, explicita a resistência em conceituá-la como uma grandeza em todo o seu percurso escolar. Fato esse que pode estar associado às disputas presentes na noosfera, como também à resistência a uma cultura já estabelecida.

O trabalho proposto para o 6° ano envolve o estudo de comprimento (perímetro) e de área como grandezas linear e bilinear, respectivamente, através da ampliação/redução de um quadrado. Esse aspecto possibilita explorar um fenômeno que se mostrou ser de difícil aceitação pelos estudantes, a saber, a dissociação entre área e perímetro (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; MOREIRA BALTAR; COMITI, 1993; KOSPENTARIS, SPYROU E LAPPAS, 2011) e a compreensão de área enquanto grandeza bilinear (HART, 1984). Entretanto, a força do termo "medida" é evidente ao longo do documento, assumindo, por vezes, o lugar da grandeza, conforme se observa na denominação do objeto de conhecimento "perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à **medida** do lado". (BRASIL, 2017, p. 309 grifo nosso). Também há evidência da medida na habilidade "Estabelecer o número π como a razão entre a **medida** de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica. (BRASIL, 2017, p. 309 grifo nosso). Tanto na indicação do objeto do conhecimento, quanto na descrição da habilidade, medida e comprimento aparecem como objetos comparáveis e, portanto, situadas no mesmo quadro (DOUADY, 1992). No entanto, em conformidade com o modelo de referência por nós adotado, comprimento e medida são objetos distintos e, portanto, pertencem a diferentes quadros.

A esse respeito, Silva (2011) já havia constatado, ao analisar títulos e subtítulos nos capítulos de comprimento e área em livros didáticos, a presença constante do referido verbete e de suas variantes. Segundo ele, essa escrita revela uma tendência de valorização do aspecto numérico em detrimento da grandeza.

Ao longo dos quatro anos, destacam-se o incentivo à elaboração e à resolução de problemas com grandezas inseridas em **contextos de situações reais** e/ou em **outras disciplinas**. O grifo para esses termos se justifica porque eles sugerem duas funções a desempenhar das grandezas: promover articulações com as práticas sociais por meio da resolução de problemas; e favorecer articulações com outras disciplinas, sendo, dessa maneira, utilizada como ferramenta (DOUADY, 1986) para resolver problemas. A primeira, justifica, de certo modo, por que se privilegiam aspectos da medida em detrimento do conceito de grandeza, pois em situações cotidianas, quase sempre o interesse é na medida (número resultante do processo de medição). A segunda, ratifica a ideia de que grandeza não é número e, conforme escreveram Chevallard e Bosch (2000), a grandeza está no cerne do desenvolvimento da Matemática, ou seja, ela emergiu na busca de resolver problemas que não eram restritos a essa disciplina.

As razões de ser para o ensino de grandezas no ensino fundamental aparecem explicitamente no trecho a seguir:

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico (BRASIL, 2017, p. 273).

Conforme se observou nos PCN, destacam-se a relação com as práticas sociais e com outras disciplinas e assim como com outros domínios da matemática.

Em todo caso, a leitura analítica da BNCC para os anos finais do ensino fundamental confirmou a tendência a privilegiar a medida na abordagem do domínio das grandezas e medidas, que pode ser observado também ao se modelar indícios das praxeologias matemáticas presentes nesse documento.

Conforme já colocado, por não se tratar de um texto do saber, identificamos e modelamos indícios do bloco prático-técnico. Para isso, observamos os objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades e, a partir deles, extraímos fragmentos de tipos e subtipos de tarefas e de técnicas, apresentados nos quadros a seguir

Quadro 7 - Fragmentos de tipos de tarefas propostos para os anos finais do EF na BNCC

Tipos de tarefa	
T_{RP}:	Resolver situações-problemas envolvendo grandezas
T_{EP}:	Elaborar situações-problema envolvendo grandezas
T_{IG}:	Identificar uma grandeza
T_{CM}:	Calcular a medida de uma grandeza
T_{RG}:	Associar grandezas

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Na BNCC, valorizam-se os tipos de tarefa T_{RP} e T_{EP}, que conforme mencionado, ressaltam a aplicabilidade do conceito nas práticas sociais. Nesse sentido, os usos sociais se configuram como uma razão primeira que legitima o ensino de grandezas na escola.

Quadro 8 - Fragmentos de subtipos de tarefas na BNCC dos anos finais do EF

Subtipos de tarefa	
T_{RP}:	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza comprimento
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza duração de intervalo de tempo
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza massa
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza temperatura
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza área
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza capacidade
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza volume
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza abertura de ângulo
T_{RP}:	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza comprimento
	Resolver situações-problemas envolvendo a grandeza duração de intervalo de tempo
	Elaborar situações-problemas envolvendo a grandeza massa
	Elaborar situações-problemas envolvendo a grandeza temperatura
	Elaborar situações-problemas envolvendo a grandeza área
	Elaborar situações-problemas envolvendo a grandeza capacidade
	Elaborar situações-problemas envolvendo a grandeza volume
T_{CM}:	Calcular a medida da grandeza abertura de ângulo
	Calcular a medida da grandeza área
	Calcular a medida da grandeza volume
T_{RG}	Analisar a variação do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do comprimento de seu lado
	Analisar a variação do perímetro de um quadrado em relação à variação da medida do comprimento de seu lado
	Analisar a variação da área de um quadrado em relação à variação da medida do comprimento de seu lado
T_{TU}	Transformar unidade de medida de volume

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Nessa etapa, a abordagem do domínio das grandezas e medidas se organiza em torno dos tipos de tarefas: resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas. Entre os fragmentos de técnicas, observamos o uso de instrumentos para medir abertura de ângulo, de ladrilhamentos para calcular a medida de área e de fórmulas para calcular a medida da área de figuras planas e de volume de sólidos. Portanto, a abordagem preconizada pela BNCC para o domínio das grandezas e medidas nos anos finais do ensino fundamental converge para a atribuição de sentido às fórmulas e à elaboração e resolução de problemas de usos sociais.

Em linhas gerais, os objetos de conhecimento e as habilidades correspondentes são marcados pela busca da medida da grandeza. Além disso, expressões como medida de comprimento, medida de área, medida da circunferência e medida de capacidade são constantemente usadas em contextos que remetem à grandeza. Logo, nessa etapa, o uso da medida se revela com mais intensidade, quando comparado com outros aspectos da grandeza. além disso, observamos, por vezes, que, os PCN e a BNCC atribuem à medida um *status* de grandeza, fazendo com que ambas ocupem o mesmo lugar. Essa escolha não está em conformidade com o modelo de referência por nós adotado, por dificultar a dissociação da grandeza em relação a sua medida. Nesse sentido, ambos os documentos contribuem tacitamente para legitimar o amálgama entre esses dois conceitos, que se mostrou resistente em diferentes períodos e países e tem sido fontes de dificuldades para se conceituar grandeza.

Por outro lado, nos PCN recomenda-se (e na BNCC se impõe) a resolução de problemas envolvendo grandezas que foram historicamente relevantes para a matemática, o uso de grandezas para atribuir sentido a número e a abordagem de problemas de contextos sociais. Além disso, esses documentos evidenciam o papel articulador das grandezas, quer seja entre diferentes domínios da matemática ou entre diferentes disciplinas. Ambos os documentos trazem ainda a perspectiva de perímetro como uma grandeza linear, a de área como uma grandeza bilinear e a independência entre elas. Constatamos, com isso, que essas recomendações configuram os nichos de grandezas estabelecidos pela noosfera na instituição matemática do ensino fundamental brasileiro.

Na escala dos níveis de codeterminação, as grandezas e medidas se situam como um domínio. Esse é o *habitat* próprio das grandezas e medidas na matemática do ensino fundamental brasileiro, desde o final da década de 1990. Ao mesmo tempo, em ambos os documentos curriculares (PCN e BNCC) são sinalizadas fortes conexões com dois outros domínios da matemática: a geometria e os números, o que sugere certa ampliação do *habitat* desse objeto de saber em um âmbito maior do que o do domínio que lhe é dedicado.

A partir das análises apresentadas, pode-se inferir também que o *nicho* das grandezas e medidas incluem:

- destacar usos sociais da matemática ensinada na escola;
- dar sentido à necessidade de ampliação dos sistemas numéricos dos naturais aos racionais e dos racionais aos irracionais;
- romper com uma visão fragmentada dos conteúdos matemáticos entre si, inclusive entre diferentes domínios da matemática;

- explicitar a historicidade do conhecimento matemático;
- fomentar articulações da matemática com outras disciplinas escolares.

4. 4 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Ao enveredar pela análise institucional do objeto do saber grandeza e sua relação com a medida, especialmente as geométricas, sentimos a necessidade de analisar livros didáticos, em complementaridade aos documentos curriculares. Segundo Chaachoua (2017), com quem concordamos, os livros didáticos são uma porta de entrada para analisar os sistemas de ensino e, em particular, a relação institucional de um objeto do saber. Ele acrescenta que "Na maioria dos países, os livros didáticos são a tradução de uma diretiva institucional, frequentemente expressa na forma de um programa, de acordo com uma interpretação dos autores." (CHAACHOUA, 2017, p. 2, tradução nossa). No contexto brasileiro, a partir da publicação da BNCC, os livros didáticos destinados às escolas públicas devem, rigorosamente, contemplar minimamente um conjunto de objetos de saberes, com objetivos e finalidades bem definidos. Diante disso, entendemos que essas obras passaram a se constituir em uma tradução diretiva da instituição noosfera. Nesse sentido, para nós, as coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD se caracterizam como produtos de instituições transpositivas. Portanto, a instituição tem um papel central na produção desses materiais, o que legitima a análise dos mesmos sob a abordagem ecológica.

Ao analisar os programas curriculares brasileiros (BNCC e PCN) (BRASIL, 1998; 2017) não observamos nitidamente a relação institucional em torno do objeto do saber grandeza na matemática do ensino fundamental, uma vez que ambos não são textos do saber, trazendo apenas um discurso sobre os mesmos (MENSSOURI, 1994). Por essa razão, não explicitam todas as práticas que são realizadas em torno do objeto do saber, o que nos levou a analisar os livros didáticos.

Em se tratando desse material como porta de entrada para a análise institucional, Assude (1996) estudou um sistema didático a partir da análise de um livro do saber. Ela assegura a pertinência dessa escolha, considerando que

> Sabemos que um texto do saber pode corresponder a um certo número de sistemas didáticos diferentes que são, portanto, realizações efetivas desse mesmo texto.
> (…) mas supomos que o texto do saber é bastante representativo de uma "média ponderada com várias restrições" da relação institucional com os objetos matemáticos do saber presentes nos diferentes sistemas didáticos que efetivamente realizam esse texto do saber. (ASSUDE, 1996, pp. 49-50, tradução nossa).

Diante do exposto, vimos como necessária a análise dos livros didáticos aprovados no PNLD para melhor compreender as relações institucionais em torno do objeto do saber grandeza no ensino fundamental brasileiro. Com isso, assumimos a hipótese formulada por Chaachoua (2017, p. 3) em relação à análise de livros didáticos como um meio para compreender as relações institucionais em torno de um objeto do saber: "*A relação institucional pode ser abordada por meio da análise de currículos e livros didáticos".*

4. 4. 1 Escolha dos livros didáticos

Tendo em vista a quantidade de obras de Matemática (37 coleções) aprovadas nos PNLD 2019, 2020 e 2021, que contemplam o ensino fundamental e médio, não foi possível analisar todas elas. Por consequência, elegemos uma coleção minimamente representativa, considerando a quantidade de escolas que a adotaram. Além disso, analisamos uma coleção destinada ao ensino médio (PNLD 2021)[42] para que pudéssemos compreender a relação institucional com o saber grandeza em uma dinâmica institucional (anos iniciais, anos finais e ensino médio). Por isso, utilizamos também como critério de escolha uma coleção produzida por ao menos um mesmo autor nesses três PNLD. Atendendo a esses critérios, selecionamos as coleções Ápis, Teláris e Matemática em Contexto, aprovadas, respectivamente nos PNLD 2019, 2020 e 2021. As duas primeiras são de autoria de Luiz Roberto Dante e a última, desse autor em coautoria com Fernando Viana, sendo as três publicadas pela editora Ática.

As duas primeiras coleções foram analisadas por Leão (2020), cujo objeto de pesquisa foi a abordagem de volume e capacidade sob a ótica da TAD. Ao retomar essas obras, não focamos uma grandeza em particular, mas o domínio das grandezas e medidas como um todo.

4. 4. 2 Método de análise das coleções de livros didáticos

Os procedimentos de análise foram inspirados em Chaachoua e Comiti (2010) e em Bittar (2017). Com base nesses estudos, caracterizamos as coleções e estabelecemos o arcabouço teórico-metodológico, considerando os seguintes aspectos:

- caracterização das coleções, considerando o contexto de sua produção e as relações institucionais do aluno e do professor, em suas respectivas posições;

[42] Foram analisadas coleções de três PNLD distintos, considerando que cada edição corresponde a uma etapa da educação básica: anos iniciais, anos finais e ensino médio.

- análise ecológica, que consistiu em explicitar o local de vida desse objeto do saber, assim como as funções que ele estabelece com outros saberes com os quais interage;
- análise praxeológica, que consiste em caracterizar a relação institucional do saber grandeza a partir da análise das práticas institucionais desenvolvidas em torno desse objeto.

4. 4. 3 Caracterização das coleções

A produção de livros didáticos destinados às escolas públicas brasileiras recebia influência ao menos da noosfera (com os PCN), do PNLD e das instituições produtoras de saberes (Matemática e Educação Matemática). Após a institucionalização da BNCC, definiram-se novas diretrizes para a produção dessas obras, estabelecendo-se os objetos de conhecimento e habilidades que devem ser contemplados em cada ano de estudo. Essa nova configuração fez com que a BNCC assumisse protagonismo enquanto documento norteador para a produção dos livros didáticos e, por consequência, atribuiu maior poder à noosfera.

Esse fato, por si só, criou condições para que alguns objetos de conhecimento deixassem de existir e outros passassem a figurar nos novos livros didáticos, uma vez que ao estarem institucionalizados na BNCC, criam-se condições para serem ensinados na escola. É o caso, por exemplo, das grandezas *comprimento*, *massa* e *capacidade*, que passaram a existir já a partir do 1° ano (anos iniciais) na BNCC e, por consequência, nos livros didáticos. Por outro lado, os objetos de saberes *limite* e *derivadas* deixaram de existir no ensino médio em algumas coleções por não estarem relacionados às habilidades previstas para essa etapa de ensino.

As três coleções mencionadas foram produzidas em consonância com a BNCC e por isso apresentam um conjunto mínimo de objetos de conhecimento e finalidades definidos nesse documento curricular. Nesse sentido, essas obras trazem, ainda que com algum grau de liberdade, uma interpretação diretiva de uma instituição transpositiva, neste caso, a BNCC.

Esses objetos e finalidades são explicitamente descritos nas coleções, em atendimento às exigências do edital do PNLD, conforme o excerto a seguir:

Figura 25 - Objeto de saber e finalidades pretendidas

Fonte: Dante (MP, v.6, 2018, p. 244)

Em todas as obras são apresentados os objetos de conhecimento e as respectivas habilidades pretendidas, que são abordadas por meio das atividades propostas. Diante disso, essas obras, enquanto um texto de saberes, configuram-se como um importante instrumento para analisar um sistema didático. Esse é, portanto, o contexto da produção das obras analisadas.

4. 4. 4 Análise ecológica

Ancorando-se nos conceitos de *habitat* e *nicho* no âmbito da TAD, realizamos uma análise ecológica do objeto do saber grandeza nas coleções acima mencionadas, que segundo Chevallard (1994, p. 142) consistem em:

> Os ecologistas distinguem, quando se trata de um organismo, seu *habitat* e seu *nicho*. Para colocar em linguagem deliberadamente antropomórfica, *habitat* é, de certa forma, o *endereço*, o local de residência do organismo. O *nicho*, são as *funções* que o organismo desempenha ali; de certa forma, essa é a *profissão* dele lá.

A relação institucional de um objeto do saber é analisada, explicitando-se os lugares em que ele vive e suas funções no sistema de objetos com os quais ele interage.

Para identificar o *habitat* do saber grandeza nas coleções analisadas, buscamos os termos “grandeza”, “medida”, “comprimento”, “área”, “volume”, “capacidade” e “grandezas geométricas”. Os nichos foram analisados observando as diferentes grandezas presentes nas obras e as relações que elas estabelecem com outros saberes.

Quadro 9 - *Habitat* e *nicho* do objeto do saber grandeza na educação básica

Coleção	*Habitat*	*Nicho*
Ápis (PNLD 2019)	O saber grandeza está presente em todos os anos na unidade grandezas e medidas, sendo representado por diferentes grandezas, entre elas comprimento, área e volume; Em quatro exemplares da obra, as grandezas estão na unidade 7, de um total de oito e em um deles, na última unidade. Em dois desses exemplares há duas unidades que abordam grandezas. Nos exemplares 1 e 3 as grandezas aparecem em unidades nas quais não são o objeto de saber principal, situando-se no domínio dos números.	Cumprem função social por estarem fortemente associadas ao cotidiano; Auxilia na compreensão do conceito de número.
Teláris (PNLD 2020)	As grandezas estão presentes em todos os anos, em capítulos próprios. Em toda a coleção, as grandezas estão na segunda metade do livro.	A abordagem de grandezas está pautada na construção das fórmulas para o cálculo de área e na resolução de problemas do cotidiano. O conceito de grandeza também é utilizado para dar sentido ao número π.
Matemática em contexto (PNLD 2021)	As grandezas áreas e volume são abordadas no livro 3 da coleção, que possui 6 exemplares autocontidos, ou seja, são independentes entre si.	As grandezas aparecem em estreito diálogo com as práticas sociais

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

No ensino fundamental as grandezas estão presentes como objeto de estudo em todos os anos e, por consequência, estão presentes em todos os livros analisados. No ensino médio, o livro 3 se dedica, entre outros objetos, ao estudo de área e de volume de figuras geométricas planas e dos sólidos, respectivamente. Com a mudança da organização curricular do ensino médio, não há uma vinculação do livro a determinado ano de estudo. Logo, esses saberes podem ser objeto de estudo em quaisquer séries dessa etapa.

Ainda que as grandezas estejam presentes em todos os anos, elas ocupam majoritariamente os capítulos finais das obras, conforme já observado em outros estudos (ANWADTER-CUELLAR, 2008; SILVA, 2011; MORAIS, 2013).

Na coleção destinada aos anos finais, há rica representatividade de grandezas. Nela, são estudadas as grandezas comprimento (perímetro de polígonos e da circunferência e distância entre dois pontos); área; massa, volume, capacidade, duração de intervalo de tempo, temperatura, intensidade sonora, valor monetário e capacidade de armazenamento de dados. Essa multiplicidade amplia as relações em torno das grandezas e suas funções.

Observamos que nos anos iniciais, as grandezas têm como função principal estabelecer uma relação entre matemática e práticas sociais, como observado no exemplo a seguir.

Figura 26 - Exemplo de atividade voltada para as práticas sociais

Fonte: Dante (MP, v.2, 2017, p. 147)

Essa função desempenhada pelas grandezas inicia nos anos iniciais do ensino fundamental, perpassa pelos anos finais e se mantém no ensino médio. Portanto, os usos sociais desse saber são uma constante nessas etapas de ensino.

As grandezas têm como propósito outro auxiliar na compreensão do conceito de número, a exemplo do número π, que é problematizado a partir da relação entre o comprimento da circunferência e de seu diâmetro em contextos práticos.

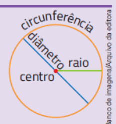
Figura 27 - Exemplo do uso de grandeza para dar sentido ao conceito de número

Medida de comprimento da circunferência e o número π

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

1› Observe a figura ao lado, que mostra alguns elementos de uma circunferência.
Com os colegas, escolha alguns objetos que tenham formas circulares, como um relógio e um CD. Meçam o comprimento do diâmetro (d) e da circunferência (C) do objeto com uma fita métrica. No caderno, registrem essas medidas em uma tabela similar a esta. Resposta pessoal.



Relação entre o comprimento e o diâmetro de objetos circulares

Objeto	Medida de comprimento da circunferência (C)	Medida de comprimento do diâmetro (d)	$C \div d$
Copo	22,9 cm	7,3 cm	
Pires	47,7 cm	15,2 cm	

Tabela elaborada para fins didáticos.

Alunos realizando medições em objetos circulares.

2› Usem uma calculadora e determinem o valor do quociente de C por d ($C \div d$). Em seguida, indiquem o valor aproximado de $C \div d$ para:
a) o copo e o pires, cujas medidas estão indicadas na tabela; 3,1 e 3,1.
b) os demais objetos medidos. Resposta pessoal.

3› O que vocês notaram no valor aproximado de $C \div d$ em todos os objetos? Resposta pessoal.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Fonte: Dante (MP, v.9, 2018, p. 282)

No ensino médio, utilizam-se os conceitos de massa, de área e de grandezas intensivas, neste caso, massa por área para modelar problemas do cotidiano, reafirmando os usos sociais desses saberes em atividades cotidianas.

Figura 28 - Exemplo de grandeza relacionada ao contexto social

Além da sala de aula

Não escreva no livro.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Quanto vale o "quilo" do roçado?

Feirante vendendo fava em uma feira livre, em Picuí (PB). Foto de 2017.

O município de Queimadas, localizado no agreste paraibano, foi considerado, em 2018, um dos maiores produtores de fava do estado da Paraíba. A fava é uma leguminosa muito usada na culinária nordestina.

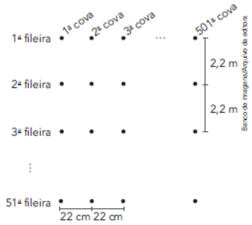
A agricultura familiar é comum nesse município. Em alguns casos, os agricultores plantam em terras emprestadas por fazendeiros da região. A cada ano que o agricultor usa a terra, ele precisa pagar o foro, taxa variável cobrada de acordo com a quantidade de terra utilizada para o roçado. O roçado é o pedaço de terra destinado, por exemplo, ao plantio de fava e outras leguminosas.

Os agricultores de algumas comunidades locais geralmente medem a extensão do roçado usando o "quilo" como unidade de medida de área. No entanto, devido às mudanças climáticas, o lucro obtido através do plantio tem diminuído, o que intensifica o êxodo rural e incentiva os jovens que permanecem nas comunidades locais a trocar a agricultura familiar por outras atividades, como construção civil, indústria e manufaturas locais.

Vamos entender a unidade de medida "quilo"

Segundo os agricultores dessas comunidades, o formato dos roçados é sempre quadrado e, para medir a extensão deles, os produtores usam como unidade de medida a quantidade de fava, em "quilo", suficiente para plantar em uma determinada extensão de terra, como unidade de medida. Para isso, são feitos pequenos buracos no solo, chamados cova, onde serão plantados 2 ou 3 grãos de fava.

No caso de um roçado cuja extensão mede 8 "quilos" de fava, por exemplo, é possível organizar as covas em 51 fileiras com 501 covas em cada uma delas. As fileiras são organizadas ao longo da largura do terreno e devem estar à distância de uma braça entre si. Já as covas, em cada fileira, devem estar a um palmo de distância uma da outra.



Fonte: Dante e Viana (MP, 2020, p. 24)

Esses excertos evidenciam a presença das grandezas na educação básica, portanto, indicam ser essas etapas de ensino o habitat desse saber. Também revelam seu nicho, ao indicar que as grandezas têm como funções essenciais os usos sociais e a relação intrínseca com o número. Essas constatações revelam, portanto, algumas razões que levam à ênfase na medida em detrimento da grandeza.

4. 4. 5 Análise praxeológica

A análise praxeológica permite descrever as práticas institucionais realizadas com um determinado saber nas instituições, no caso que nos interessa, possibilita caracterizar as relações institucionais com o objeto grandeza.

Chevallard pontua que toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t de um certo tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, sendo esta justificada por uma teoria Θ. Uma análise praxeológica, leva, portanto, à caracterização desse quarteto praxeológico por meio da identificação de:

- tipos de tarefas: análise das atividades presentes nos livros didáticos. Normalmente, os exemplos e atividades resolvidas indicam os tipos de tarefas importantes para a instituição;
- técnicas: a partir da identificação dos tipos de tarefas, caracterizam-se as técnicas que permitem realizá-las. Frequentemente, essas técnicas estão explicitadas nos exercícios resolvidos e nas soluções das atividades indicadas no manual do professor;
- tecnologias: consistem em uma descrição das técnicas e são identificáveis, geralmente, na parte curso e nos comentários dos autores direcionados aos professores.

A teoria, que legitima matematicamente a tecnologia, quase sempre não é explicitada nos livros didáticos e por isso se apoia essencialmente na interpretação do pesquisador.

4. 4. 6 Construção do quarteto praxeológico matemático

Em consonância com Bittar (2017), a identificação e análise das praxeologias matemáticas se deram a partir da leitura minuciosa da Parte curso, que apresentam orientações, exemplos, atividades resolvidas e definições matemáticas, e da Parte atividades, na qual há os exercícios a serem resolvidos pelos alunos.

Nosso interesse é sobre as grandezas e por isso formulamos os tipos de tarefa com certo grau de generalidade e o refinamento foi modelado em torno de subtipos de tarefa.

O quadro a seguir apresenta os tipos de tarefas identificados na coleção Ápis (PNLD 2019), destinada aos anos iniciais.

Quadro 10 - Tipos de tarefas presentes nos LD dos anos iniciais da coleção Ápis

Tipos de tarefa	
T_{RE}	Relacionar uma expressão textual a uma grandeza
T_{CG}	Comparar grandezas
T_{LM}	Ler medidas de grandeza
T_{CM}	Calcular a medida de uma grandeza
T_{EM}	Estimar a medida de uma grandeza
T_{OG}	Ordenar objetos de acordo com uma grandeza
T_{RA}	Registrar algebricamente uma grandeza
T_{AI}	Associar instrumentos de medida a sua grandeza correspondente
T_{TU}	Transformar unidades de medida de grandezas
T_{RG}	Relacionar uma grandeza com objetos do cotidiano
T_{PF}	Produzir figuras geométricas associadas a uma grandeza

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Observamos desse quadro a diversidade de tipos de tarefas propostos na obra, principalmente quando comparamos com as que foram observadas nos PCN e na BNCC.

No quadro seguinte, apresentamos os subtipos de tarefas:

Quadro 11 - Subtipos de tarefas presentes nos LD dos anos iniciais da coleção Ápis

Subtipos de tarefa	
T_{RE}	Relacionar uma expressão textual a comprimento
	Relacionar uma expressão textual a massa
	Relacionar uma expressão textual a capacidade
	Relacionar uma expressão textual a duração de intervalo de tempo
	Relacionar uma expressão textual a temperatura
T_{CG}	Comparar comprimentos
	Comparar massas
	Comparar capacidades
	Comparar valores monetários
	Comparar áreas
	Comparar temperaturas
T_{LM}	Ler horas em relógios
	Identificar horários em agendas
	Localizar datas em calendários
T_{CM}	Calcular duração de intervalos de tempo
	Calcular comprimentos
	Calcular perímetros
	Calcular área de retângulos
	Calcular área de triângulos
	Calcular volumes de blocos retangulares
	Estimar a medida de uma capacidade

T_{EM}	Estimar a medida de um comprimento
	Estimar a medida de uma massa
	Estimar a medida de uma área
T_{OG}	Ordenar recipientes segundo sua capacidade
	Ordenar horários, períodos do dia e meses do ano
T_{RG}	Registrar o horário de acontecimentos de eventos
T_{AI}	Associar relógio a duração de intervalo de tempo
	Associar balança a massa
	Associar fita métrica a comprimento
	Associar termômetro a temperatura
T_{TU}	Transformar unidades de medida de comprimentos
	Transformar unidades de medida de massa
	Transformar unidades de medida de capacidade
T_{RG}	Associar a grandeza massa a objetos do cotidiano
	Associar a grandeza capacidade a objetos do cotidiano
T_{PF}	Produzir segmentos de reta
	Produzir superfícies na malha quadriculada

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

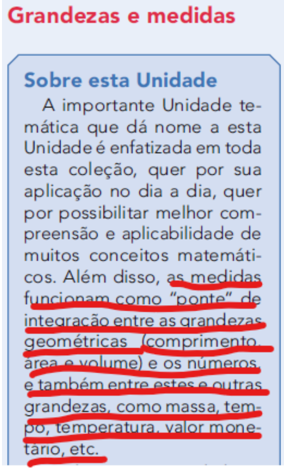
Na coleção Ápis, os dois primeiros volumes abordam as grandezas comprimento, massa, capacidade, temperatura, duração de intervalo de tempo e valor monetário, por meio de uma abordagem intuitiva e fortemente relacionada a atividades cotidianas.

A articulação com as práticas sociais fica evidente nas técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas. Entre elas, destacam-se a observação de representações, como recipientes, relógios, cédulas do sistema monetário brasileiro, os quais são a base para efetuar comparações entre grandezas de mesma espécie. O incentivo a experimentos concretos e ao uso de instrumentos de medida completam as técnicas predominantes nessa etapa. As tecnologias não são evidentes, uma vez que as técnicas quase sempre estão associadas a procedimentos observacionais e à realização de procedimentos experimentais.

Essa coleção traz uma multiplicidade de tipos de tarefas, o que amplia as relações e a relevância do conceito em foco. Entretanto, observamos, em algumas passagens, conformidade com o modelo-didático matemático por nós adotados e em outras, não.

Nesse sentido, identificamos no manual do professor, v.1, da coleção Ápis (PNLD 2019), o seguinte comentário:

Figura 29 - Exemplo de conformidade com o modelo didático-matemático no MP



Grandezas e medidas

Sobre esta Unidade

A importante Unidade temática que dá nome a esta Unidade é enfatizada em toda esta coleção, quer por sua aplicação no dia a dia, quer por possibilitar melhor compreensão e aplicabilidade de muitos conceitos matemáticos. Além disso, as medidas funcionam como "ponte" de integração entre as grandezas geométricas (comprimento, área e volume) e os números, e também entre estes e outras grandezas, como massa, tempo, temperatura, valor monetário, etc.

Fonte: Dante (MP, v. 1 2017, p. 138, grifo nosso)

Observamos nesse extrato, que a relação entre grandeza e medida está em conformidade com o modelo teórico por nós adotado, situando a primeira no quadro da grandeza, e a segunda, no quadro numérico, inclusive, articulando-as.

Essa conformidade foi observada em algumas atividades, como a seguinte:

Figura 30 - Exemplo de conformidade com o modelo didático-matemático no LE

Fonte: Dante (MP, v. 3, 2017, p. 141)

Já no excerto seguinte, observamos uso da medida quando não era necessário, o que reforça a sua influência. Essa escolha de transposição didática se distancia do modelo epistemológico de referência adotado na nossa pesquisa.

Figura 31 - Referência à medida

Fonte: Dante (MP, v. 3, 2017, p. 140)

Nesse caso, não há a necessidade de explicitar o termo *medida* para relacionar a expressão *mais alta* à grandeza comprimento. O uso desnecessário da medida também está presente em algumas atividades, como no excerto a seguir:

Figura 32 - Exemplo de referência à medida

Fonte: Dante (MP, v. 3, 2017, p. 141, grifo nosso).

Observamos, ao longo da obra, essa relação dual entre grandeza e medida. Para nós, a conformidade apresentada no Manual do Professor parece indicar uma mudança de posição na compreensão do conceito de grandeza, mas ainda resistente nas atividades propostas. Essa resistência pode ser explicada porque a formulação dos tipos de tarefa sofre influência da matemática acadêmica, que será apresentada no capítulo seguinte, e/ou do contexto social, em que ambos convergem para a ênfase na medida em detrimento da grandeza.

Na coleção Teláris (PNLD 2020), anos finais do ensino fundamental, esse “vai e volta” na relação grandeza e medida permanece. Dessa maneira, constata-se, por um lado, que as coleções buscam caracterizar grandeza como um objeto do saber dissociado da medida, mas por outro, não as dissocia, sobretudo quando envolve situações do cotidiano.

No livro do 6° ano, encontra-se a seguinte definição de perímetro:

> A um objeto físico retilíneo, como um pedaço de arame, ou a uma representação desse objeto, que é o desenho dele, ou ao conceito abstrato matemático de segmento de reta, associamos uma grandeza, que é o comprimento, que pode ser medida. (p. 244).
> A um objeto físico com 2 dimensões, como uma folha de papel, ou a uma representação desse objeto, que é o desenho dele, ou ao conceito abstrato matemático de superfície, associamos uma grandeza, que é a área, que pode ser medida. (p. 254).

Essas ideias, assim como algumas definições presentes em outros livros dessa coleção distinguem grandeza de medida, segundo a perspectiva por nós adotada. No entanto, ao propor as tarefas, essa distinção logo se desfaz. Assim, na parte curso, grandeza e medida são objetos distintos, mas na parte atividades, por vezes, elas se amalgamam.

Nos anos finais do ensino fundamental, os tipos de tarefas acima apresentados são retomados e alguns ampliados, mas com a abordagem centrada nas grandezas geométricas. Nessa etapa, as técnicas evoluem e as tecnologias começam a ficar aparentes.

Entre os tipos de tarefas, destaca-se T_{CM}: Calcular a medida de uma grandeza, em que os subtipos de tarefas contemplam majoritariamente calcular a medida de comprimentos, de áreas, de volumes e de capacidades. Entre as técnicas, observamos medir empiricamente, contar a quantidade de unidades, pavimentar superfícies, preencher recipientes, compor, decompor e recompor superfícies e sólidos e utilizar fórmulas. Estas técnicas encontram legitimidade na contagem, transformações geométricas e álgebra das grandezas, constituindo, dessa maneira, as tecnologias aparentes.

O quadro a seguir apresenta os tipos de tarefas modelados na coleção Teláris.

Quadro 12 - Subtipos de tarefas do tipo T_{CM} presentes nos anos finais do EF na coleção Teláris

SUBTIPOS DE TAREFAS	
	Calcular a medida de um comprimento
	Calcular a medida de perímetros de polígonos
	Calcular a medida do comprimento de uma circunferência
	Calcular a medida da área de um retângulo
	Calcular a medida da área de um paralelogramo
	Calcular a medida da área de um triângulo
T_{CG}	Calcular a medida da área de um trapézio
	Calcular a medida da área de um losango

	Calcular a medida da área de um círculo
	Calcular a medida do volume de empilhamento de cubos
	Calcular a medida do volume de paralelepípedos
	Calcular a medida da capacidade de recipientes.
	Calcular a medida da duração de um intervalo de tempo

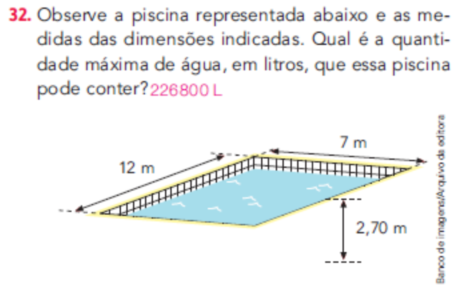
Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Em se tratando da coleção Matemática em contextos, destinada ao ensino médio, as grandezas são abordadas no livro 3 da coleção. Com a mudança do ensino médio, o PNLD sofreu alterações implicando na organização das coleções. A partir do PNLD 2021, as coleções passaram a ter seis volumes e não três, como nas edições anteriores. Além disso, cada livro é autocontido, ou seja, são independentes entre si. Assim, cada um deles pode ser abordado em qualquer série, a depender do projeto político pedagógico da escola.

Nessa coleção, também estão presentes atividades com contextos sociais, embora receba uma atenção menos destacada em relação às etapas anteriores.

O excerto seguinte exemplifica uma tarefa com essa característica:

Figura 33 - Exemplo de tarefa com contexto prático



Dante e Viana (2020, v.3, p. 90)

Nessa etapa, modelamos os tipos de tarefas indicados no quadro a seguir.

Quadro 13 - Tipos de tarefas presentes no EM na coleção Matemática em contextos

Tipos de tarefa	
T_{CG}	Comparar grandezas
T_{CM}	Calcular a medida de uma grandeza
T_{EM}	Estimar a medida de uma grandeza
T_{TU}	Transformar unidades de medida de grandezas

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

A técnica dominante consiste na aplicação de fórmulas, que é justificada com base na semelhança de figuras e no Princípio de Cavalieri. Essa abordagem preserva, portanto, aspectos já observados por Morais (2013) e por Freitas (2015), quando analisaram coleções de livros didáticos aprovados no PNLD 2012. Assim, passada quase uma década, a abordagem de grandeza no ensino médio parece receber o mesmo tratamento que outrora, exceto pela nítida valorização dos usos sociais desse saber.

Em resumo, a análise dessas coleções revelou de maneira bastante evidente os seguintes aspectos:

- presença das grandezas na educação básica, com destaque para os anos iniciais, em relação à diversidade de grandezas;
- abordagem marcada pela relação entre grandeza e atividades cotidianas. Essa característica predomina nos anos iniciais, perpassa pelos anos finais e se mantém no ensino médio, embora com diferentes graus de intensidade em cada momento;
- as medidas são utilizadas para dar sentido ao conceito de número e, portanto, são fonte de ligação entre grandezas e números.
- as praxeologias matemáticas realizadas em torno das grandezas evoluem ao longo dos anos, cujas técnicas iniciais partem de procedimentos heurísticos (com observações e experimentos empíricos) até a institucionalização das fórmulas;
- a dissociação entre grandeza e medida é explicitamente considerada, mas algumas incoerências com o modelo didático-matemático foram observadas. Na parte curso elas se distinguem, mas na parte atividades, confundem-se.

Pelo exposto, observamos que é assegurada a presença das grandezas na educação básica, que se justifica com maior intensidade pelos usos sociais desse objeto do saber.

4.5 ECOLOGIA DO CONCEITO DE GRANDEZA NA EDUCAÇÃO INFANTIL E NO ENSINO MÉDIO

Este tópico tem por objetivo fazer uma análise ecológica do objeto do saber grandeza na educação infantil e no ensino médio, tendo em vista que se tratam de instituições que estão no entorno daquela em estudo.

4.5.1 Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil

Esse documento se apresenta como um referencial curricular para creches e pré-escolas, tendo entre suas finalidades incorporar as práticas educativas no trabalho com as crianças da primeira infância, assegurando a elas o pleno desenvolvimento de suas identidades, enquanto cidadãos com direito à infância reconhecidos (BRASIL, 1998). Parte das orientações presentes nesse documento foram incorporadas e/ou modificadas na BNCC (BRASIL, 2017), o que justifica sua análise. Além disso, esse referencial buscou superar, ao mesmo tempo, a perspectiva somente assistencialista das creches e reconhecendo a educação infantil como uma etapa da educação básica, que antecede o ensino fundamental. Portanto, o RCNEI apresenta objetivos, conteúdos e orientações didáticas para os profissionais que atuam diretamente com as crianças nessa fase escolarização.

Entre os objetivos de aprendizagem para as crianças de 4 a 6 anos, o segundo deles está diretamente relacionado ao conceito de grandeza, que é: “comunicar ideias matemáticas, hipóteses, processos utilizados e resultados encontrados em situações-problema relativas a quantidades, espaço físico e medida, utilizando a linguagem oral e a linguagem matemática” (BRASIL, 1998, p. 215).

Nessa etapa, os conteúdos estão organizados em três blocos “Números e sistema de numeração”, “Grandezas e medidas” e “Espaço e forma”. Ao se apresentar como um domínio de estudo, o ensino de grandezas e medidas se institucionaliza na educação infantil e, dessa maneira, seu ensino é minimamente assegurado.

De acordo com esse referencial, as grandezas sugeridas são comprimento, massa, volume, temperatura, duração de intervalo de tempo e valor monetário e devem ser estudadas com estreita relação com as práticas sociais do universo infantil.

Nas orientações didáticas são ressaltados os valores histórico e social das grandezas, bem como sua relação intrínseca com os números e com a geometria, conforme se vê no trecho a seguir:

> De utilidade histórica reconhecida, o uso de medidas mostrou-se não só como um eficiente processo de resolução de problemas práticos do homem antigo como teve papel preponderante no tecido das inúmeras relações entre noções matemáticas. A compreensão dos números, bem como de muitas das noções relativas ao espaço e às formas, é possível graças às medidas. Da iniciativa de povos (como os egípcios) para demarcar terras fazendo medições resultou a criação dos números fracionários ou decimais. Mas antes de surgir esse número para indicar medidas houve um longo caminho e vários tipos de problemas tiveram de ser resolvidos pelo homem (BRASIL, 1998, p. 226).

Comparar grandezas é um tipo de tarefa privilegiado nas orientações didáticas, servindo como um meio para estabelecer a necessidade dos padrões nas medições. Portanto, medir grandeza é outro tipo de tarefa destacado, sendo este a finalidade última da abordagem de grandeza na educação infantil e sempre em estreito diálogo com atividades práticas.

Em resumo, as grandezas estão presentes na educação infantil, ancorada nas práticas sociais, em princípio com bastante ênfase em atividades exploratórias e comparativas, mas que evolui para o uso de medidas.

Com isso, ao adentrar no ensino fundamental, os estudantes já possuem experiências com medidas, tanto nas práticas escolares, quanto fora da escola, o que pode explicar o uso precoce de medidas nos primeiros anos do ensino fundamental.

4.5.2 Base Nacional Comum Curricular – Educação Infantil

Nessa etapa, de acordo com a BNCC,

> as aprendizagens essenciais compreendem tanto comportamentos, habilidades e conhecimentos quanto vivências que promovem aprendizagem e desenvolvimento nos diversos campos de experiências, sempre tomando as interações e a brincadeira como eixos estruturantes. Essas aprendizagens, portanto, constituem-se como **objetivos de aprendizagem e desenvolvimento**. (BRASIL, 2017, p. 44, grifo do original).

Logo, as unidades temáticas do ensino fundamental correspondem, na educação infantil aos campos de experiência, os quais, por sua vez, trazem os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, que na etapa seguinte, corresponde às habilidades. Esses objetivos de aprendizagem e desenvolvimento estão sequencialmente organizados em três faixas etárias, dadas as especificidades dos diferentes grupos etários. A primeira compreende as crianças de zero a 1 ano e 6 meses, a segunda, de 1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses e, a última, de 4 anos a 5 anos e 11 meses. As duas primeiras correspondem à creche e a última, à pré-escola.

Há cinco campos de experiência e cada um traz um conjunto de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, organizados por faixa etária, conforme excerto seguinte:

Figura 34 - Exemplo do campo de experiência na EI

CAMPO DE EXPERIÊNCIAS "ESPAÇOS, TEMPOS, QUANTIDADES, RELAÇÕES E TRANSFORMAÇÕES"

(Continuação)

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM E DESENVOLVIMENTO		
Bebês (zero a 1 ano e 6 meses)	Crianças bem pequenas (1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses)	Crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses)
	(EI02ET07) Contar oralmente objetos, pessoas, livros etc., em contextos diversos.	(EI03ET07) Relacionar números às suas respectivas quantidades e identificar o antes, o depois e o entre em uma sequência.

Fonte: Brasil (1997, p. 52)

É no campo de experiência "Espaços, Tempos, Quantidades, Relações e Transformações" que se observa a abordagem de grandeza, tendo em vista os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento propostos. Para a primeira faixa etária, encontram-se os seguintes objetivos:

> (EI01ET01) Explorar e descobrir as propriedades de objetos e materiais (odor, cor, sabor, temperatura);
> (EI01ET05) Manipular materiais diversos e variados para comparar as diferenças e semelhanças entre eles;
> (EI01ET06) Vivenciar diferentes ritmos, velocidades e fluxos nas interações e brincadeiras (em danças, balanços, escorregadores etc.) (BRASIL, 2017).

Em cada um desses objetivos de aprendizagem exploram-se as grandezas, inclusive como um atributo ou propriedade de objetos. Com eles, as crianças são levadas a perceberem e a estabelecerem relações entre grandezas, algumas anunciadas explicitamente, como temperatura e velocidade, e outras de maneira tácita, como comprimento. Esta última pode emergir no objetivo (EI01ET05), ao se comparar, por exemplo, o comprimento de dois objetos retilíneos, a exemplo de canudos.

Para a segunda faixa etária são propostos os seguintes objetivos de aprendizagem e desenvolvimento:

> (EI02ET01) Explorar e descrever semelhanças e diferenças entre as características e propriedades dos objetos (textura, massa, tamanho);
> (EI02ET02) Observar, relatar e descrever incidentes do cotidiano e fenômenos naturais (luz solar, vento, chuva etc.).
> (EI02ET05) Classificar objetos, considerando determinado atributo (tamanho, peso, cor, forma etc.).
> (EI02ET06) Utilizar conceitos básicos de tempo (agora, antes, durante, depois, ontem, hoje, amanhã, lento, rápido, depressa, devagar) (BRASIL, 2017, p. 51).

Nessa faixa etária, surgem explicitamente outras grandezas como massa, peso, velocidade (do vento, por exemplo), duração de intervalo de tempo e “tamanho” (que não é precisamente uma grandeza, mas no contexto parece-nos remeter ao comprimento), cuja abordagem é pautada na observação, exploração, descrição, classificação e comparação. Portanto, um trabalho sobre grandezas.

A seguir, encontram-se os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para a última faixa etária, ou seja, a pré-escola:

> (EI03ET01) Estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades.
> (EI03ET04) Registrar observações, manipulações e medidas, usando múltiplas linguagens (desenho, registro por números ou escrita espontânea), em diferentes suportes.
> (EI03ET08) Expressar medidas (peso, altura etc.), construindo gráficos básicos (BRASIL, 2017, pp. 51-52).

Para esse grupo etário, começam a surgir alguns indícios da medida, especialmente no objetivo (EI03ET08), que parece caracterizar grandeza e medida como sinônimos.

De um modo geral, conforme se observa nos objetivos acima, certas características e propriedades dos objetos são essencialmente o que podem ser entendidas como grandezas, como velocidade, massa, peso, temperatura, duração de intervalo de tempo e “tamanho”. Essas propriedades são atributos de objetos que permitem caracterizá-los, mas não são o próprio objeto, o que leva a distinção entre o objeto e a grandeza a ele associado.

Pelo exposto, o conceito de grandeza é abordado na educação infantil, etapa em que assume predominantemente a perspectiva de atributo de um objeto e dissociada da medida, ainda que esta última seja evidenciada. Entretanto, o embrião da perspectiva de grandeza enquanto número parece emergir já na educação infantil, cujo desenvolvimento se acentua nas etapas que se seguem até se consolidar como a perspectiva dominante nos anos finais do ensino fundamental.

4.5.3 Base Nacional Comum Curricular – Ensino médio

Nessa etapa, a BNCC, conforme estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei n° 9394/96), está organizada em quatro áreas do conhecimento, a saber: Linguagem e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A partir da Lei no 13.415/2017, que instituiu a reforma do ensino médio, apenas português e matemática se tornaram componentes curriculares obrigatórios nos três anos de ensino, fazendo com que somente as habilidades relacionadas a essas disciplinas fossem detalhadas na BNCC, mas sem indicação de seriação, ao contrário do que acontece no ensino fundamental. Entretanto, essa adequação permite maior flexibilidade na configuração dos currículos dos Estados. Além disso, as habilidades são vinculadas às competências específicas de cada área, e não mais aos objetos de conhecimento, conforme se via na etapa anterior.

No ensino médio, para a área de matemática, sugere-se,

> (…) a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2018, p. 527).

Nota-se, portanto, um aprofundamento dos conhecimentos abordados na etapa anterior, sem perder de vista as aplicações do mundo real, com ênfase nas vivências cotidianas do estudante, suas condições socioeconômicas, os avanços tecnológicos vigentes e as exigências do mercado de trabalho.

Para tanto, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 529), são fundamentais o desenvolvimento de "habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas". Isso requer, segundo a BNCC, que os estudantes devem desenvolver maneiras próprias de pensar, de representar, de argumentar e de validar conceitos e ideias.

Enquanto no ensino fundamental as habilidades são organizadas por unidades temáticas correlacionadas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística), no ensino médio é proposto um conjunto de competências específicas associadas às habilidades, mas organizadas por área de conhecimento.

No que se refere às competências específicas da área de matemática, propõem-se:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

Nessa etapa, as habilidades estão organizadas em competências, mas o documento destaca outras possibilidades de configuração.

Nessa configuração em particular, as grandezas são vistas como articuladoras entre os diferentes campos, entre conceitos intramatemáticos e como meio propício para aplicações no mundo real. A BNCC destaca ainda que o estudante deve ser levado a perceber que a matemática não é tão somente um conjunto de regras e técnicas, mas um elemento integrante da nossa cultura e história, conforme se preconiza também nas etapas anteriores.

Seguindo o que está proposto na BNCC, elencamos as habilidades relativas às grandezas:

Quadro 14 - Habilidades e competências relativas às grandezas na BNCC do Ensino médio

Competências específicas	Habilidades
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens	(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

próprios da Matemática.	
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas	(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
	(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

As habilidades mencionadas são marcadas pela ênfase nos usos sociais, principalmente em contextos próprios do estudante. Nesse sentido, destacam-se a abordagem de área, volume, massa e capacidade, por serem conteúdos carregados de aplicações em contextos diversos e realistas.

Propõe-se também a leitura, interpretação e uso adequado de unidades de medida das mais diversas grandezas, incluindo aquelas do contexto da informática, conforme se verifica também no 9° ano do ensino fundamental. As fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos devem ser estudadas, mas por meio de uma perspectiva investigativa com o auxílio do princípio de Cavalieri. Em contraste com outros documentos, não há referência explícita na BNCC ao sólido esférico.

Novamente, nessa etapa de ensino, enfatiza-se a relação entre área e perímetro, inclusive com recurso à investigação por meio da observação de regularidades na variação entre o comprimento dos lados do quadrado e de sua área, além do incentivo a registros gráficos.

Em linhas gerais, destaca-se a aplicabilidade das grandezas em contextos práticos, que deve ser explorada por meio de resoluções de problemas.

4.5.4 Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCNEM) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais são compostos de quatro partes, sendo a primeira dedicada às bases legais e as demais aos eixos temáticas. O mesmo foi publicado no ano de 2000, ou seja, três anos após a publicação dos parâmetros destinados aos anos finais do ensino fundamental. Há ainda os parâmetros curriculares complementares, publicados em 2002, em complementação aos já existentes, que detalham os conteúdos a serem abordados de maneira sugestiva em cada série, além de trazer orientações educacionais no que se refere às abordagens em sala de aula.

Seus pressupostos se apoiaram na perspectiva de mudança da sociedade, o que efetivamente ocorreu e, de maneira mais intensa, nos últimos anos. Um olhar sobre as transformações sociais, políticas, econômicas e culturais nas duas últimas décadas permite concluir que o referido documento trouxe antecipações relevantes, conforme se verifica no excerto seguinte, ao considerar que os jovens ingressantes no ensino médio passariam por mudanças significativas de perfil, tanto na vida social, quanto no trabalho,

> A denominada “revolução informática” promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central nos processos de desenvolvimento, em geral. <u>É possível afirmar que, nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias</u> (BRASIL, 2000, p. 5 grifo nosso.)

Os PCNEM propuseram o ensino das disciplinas não de maneira fragmentada e com fim em si mesmo, mas articulando as diferentes áreas e com foco no desenvolvimento de competências básicas como ferramentas para o enfrentamento da vida adulta.

Sua configuração se deu em três grandezas áreas denominadas Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Em se tratando das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, tem-se como pressupostos que

> A aprendizagem das Ciências da Natureza, qualitativamente distinta daquela realizada no Ensino Fundamental, deve contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamento mais abstratos e ressignificados, que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos e pressupostos metodológicos (BRASIL, 2000, p. 20).

Essa nova etapa traz consigo novas formas de pensar, de representar e de comunicar, além de ampliar os conhecimentos já construídos.

Ao se referir à matemática, os PCNEM ressaltam seus "aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências" (p. 20), além de, uma vez mais, destacar que

> (...) as ciências, assim como as tecnologias, são construções humanas situadas historicamente e que os objetos de estudo por elas construídos e os discursos por elas elaborados não se confundem com o mundo físico e natural, embora este seja referido nesses discursos (BRASIL, 2000, p. 20).

Vê-se, portanto, referência ao desenvolvimento histórico e ao mundo real, sem perder de vista o carácter científico.

As recomendações dos PCNEM pensaram a matemática sob dois aspectos: formativo e instrumental. O primeiro se preocupa com a estruturação do pensamento lógico - dedutivo, bem como com o desenvolvimento de atitudes que transcendem a matemática, formando indivíduos capazes de enfrentar e resolver problemas originais por meio da investigação, da criatividade e da observação de regularidades e de padrões. O instrumental, por sua vez, diz respeito às ferramentas necessárias para uso em outros contextos e no ambiente profissional, cujas técnicas e estratégias podem ser readaptadas tendo em vista as constantes mudanças da sociedade.

Com isso, os PCNEM organizam o ensino em termos de habilidades e competências. A seguir, elencamos aquelas pensadas para o ensino de matemática:

> Representação e comunicação
>
> • Ler e interpretar textos de Matemática.
> • Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).
> •Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
> • Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem

matemática, usando a terminologia correta.
• Produzir textos matemáticos adequados.
• Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
• Formular hipóteses e prever resultados.
• Selecionar estratégias de resolução de problemas.
• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
• Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
• Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades (BRASIL parte III, 2000, p. 46).

As referidas habilidades e competências contemplam a leitura, escrita, representação, comunicação, investigação e o meio sociocultural. Foi com base nessa perspectiva que se deu a eleição dos objetos de aprendizagem a ser trabalhados ao longo do ensino médio e que estão descritos nos documentos com orientações complementares ao PCNEM (BRASIL, 2002).

A seguir, listamos as competências relacionadas à matemática.

Quadro 15 - Competências para a matemática no ensino médio nas orientações complementares ao PCNEM

Competência	Habilidades
Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.	• Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. • Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza.

	• Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Nessa etapa, recomenda-se o uso de instrumentos e maneiras diversas para medir e comparar as grandezas geométricas, além de explorar estimativas, a precisão e o erro. Percebe-se, portanto, um processo pautado nos aspectos técnico-científicos, o que amplia os procedimentos heurísticos das etapas anteriores. Desse modo, o cálculo e, por consequência, o domínio numérico, ganha evidência.

Com o intuito de desenvolver as competências almejadas, foram propostos três grandes eixos a ser estudados concomitantemente ao longo do ensino médio, os quais, por sua vez, são organizados em termos de conceitos, procedimentos e objetos de estudo.

Quadro 16 - Eixos para o ensino médio nas orientações complementares ao PCNEM

Eixos	
1	Álgebra: números e funções
2	Geometria e medidas
3	Análise de dados

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

O eixo 2 organiza o ensino de geometria sob os aspectos, a saber, o axiomático e o métrico. O primeiro eixo lida com abstrações por meio de postulados, teoremas, propriedades e posições relativas, cujo foco é o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo, enquanto o segundo se volta para a quantificação de comprimentos, áreas e volumes.

Diferentemente da organização existente nas etapas anteriores, no ensino médio as grandezas se situam no domínio da geometria, o que pode valorizar o numérico. Além disso, o foco passa a ser na medida, tendo em vista as recomendações dadas, conforme se verifica no seguinte excerto:

> A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema (BRASIL, 2002, p. 124)

Assim como no ensino fundamental, valorizam-se aplicações das grandezas em situações práticas.

As habilidades e os conteúdos sugeridos para esse eixo estão organizados em quatro unidades temáticas, em que a grandeza é situada na métrica.

Quadro 17 - Conteúdos e habilidades relativos às grandezas nos PCNEM

Unidade temática	Conteúdos	Habilidade
métrica	áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado	Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
		Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
		Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Conforme se observa no quadro, valorizam-se medições, cálculos e resolução de problemas reais, o que conduz a uma abordagem essencialmente pautada no numérico.

Em síntese, os PCNEM elegem a mudança de paradigma da sociedade e, por consequência, a mudança de perfil dos jovens, como norte para a reformulação do ensino médio. Nesse sentido, os objetos de conhecimento e as diferentes maneiras de abordagens priorizam competências relacionadas à leitura, à escrita, à comunicação, à tecnologia, à investigação e ao mundo do trabalho. De outro modo, a capacidade de enfrentar e solucionar problemas em constante transformação passa a ser um elemento importante na sociedade emergente, o que requer novas formas de aprender e de se comunicar.

Nesse sentido, as grandezas aparecem como elemento importante tanto para modelar situações problemas do mundo real, quanto para instruir o estudante no enfrentamento de situações nos meios técnicos, científicos e sociais. Com isso, a ênfase recai no uso de instrumentos de medida, nas diferentes estratégias de medição (aqui se inclui o uso de fórmulas) e na realização de estimativas.

4.6 SÍNTESE DA ANÁLISE ECOLÓGICA

A leitura analítica dos PCN e da BNCC revelou, respectivamente, que o saber grandeza se situa no bloco e na unidade temática Grandezas e Medidas, presentes no ensino fundamental, especialmente nos anos finais, que pode ser considerado o seu *habitat* "natural", sobretudo para as grandezas geométricas. A BNCC, inclusive, determina as grandezas a serem estudadas em cada ano, diferentemente dos PCN, que indica por ciclo.

Observamos que esse saber tem como funções, em ambos os documentos, motivar e atribuir sentido aos diferentes conjuntos numéricos e, principalmente preparar o estudante para resolver problemas do cotidiano que envolvem grandezas. Nos PCN, esse *nicho* se revela no seguinte excerto:

> Por meio de situações-problema, extraídas dos contextos práticos em que essas grandezas se encontram - como na arquitetura, nas artes, nos esportes, na culinária, nas atividades comerciais e na leitura de mapas, plantas e croquis - evidenciam-se para os alunos as aplicações práticas da Matemática (…).
> Além de fornecer os contextos práticos para a realização da atividade matemática é importante pensar nas Grandezas e Medidas como um bloco que possibilita férteis articulações com os outros blocos de conteúdos, uma vez que seu estudo está fortemente conectado com o estudo da Geometria e com os diferentes tipos de números.
> Assim, neste ciclo, o trabalho com medidas buscará privilegiar as atividades de resolução de problemas e a prática de estimativas em lugar da memorização sem compreensão de fórmulas e de conversões entre diferentes unidades de medidas, muitas vezes pouco usuais. (BRASIL, 1998, p. 69).

Na BNCC, ao modelar os tipos de tarefas, ver quadro 7 acima, observamos que a resolução/elaboração de problemas norteia o ensino de grandezas, sendo este o *nicho* principal na instituição anos finais do ensino fundamental.

Ao historicizarmos a concepção desses documentos, constatamos que em ambos, destacam-se práticas socioculturais e profissionais, as quais se realizam em estreita conexão com a medição de grandezas. Assim, as condições para difusão do domínio das grandezas e medidas se encontram no nível sociedade e se materializam na noosfera. Essa condição, associada aos níveis superiores da escala de codeterminação didática assegura a presença do saber grandeza na escola e nas aulas de matemática, principalmente por meio da BNCC, ao determinar os saberes a serem ensinados em cada ano de ensino.

Por outro lado, observamos um privilégio à medida em detrimento da grandeza em ambos os documentos (noosfera), o que também pode ser explicado pelas praxeologias realizadas em torno desse saber nas práticas sociais, ou seja, no nível sociedade. Tendo em vista que a escola está inserida na sociedade, as praxeologias matemáticas relativas ao saber grandeza difundidas nos sistemas didáticos quase sempre reproduzem a ênfase no numérico. Para nós, isso acontece porque os níveis superiores (humanidade, civilização, sociedade) impõem um conjunto de condições que impulsionam o professor a relativizar essa ênfase. Por exemplo, ao longo da história da humanidade, em diferentes civilizações, as grandezas foram criadas para resolver problemas sociais, como cálculo de áreas de terras e de volume de recipientes para estocagem de alimentos. Foram (e são), portanto, esses problemas de medição que motivaram e nortearam o desenvolvimento do saber grandeza.

Nesse sentido, a ênfase na medida se justifica, pelo menos em parte por razões que vêm dos níveis superiores da escala de codeterminação. Na sociedade, as práticas sociais exigem a mobilização da medição de grandezas, e no nível da disciplina, o sentido das ampliações sucessivas dos sistemas numéricos se assenta na medição de grandezas. Por outro lado, as pesquisas em educação matemática apontam para a necessidade de fortalecer a atribuição de sentido às grandezas, pois sem isso, erros persistentes se instalam, conforme discutimos no capítulo 2.

Ao analisarmos as instituições do entorno do EF, constatamos na Educação infantil uma referência, ainda que tácita, à medida e, no ensino médio todo o trabalho recai sobre esse aspecto. Assim, entendemos que na instituição ensino fundamental, as medidas aparecem precocemente, sob a influência da etapa anterior, assim como busca preparar os estudantes para um estudo mais técnico, tendo em vista a etapa seguinte. Assim, essas são algumas das condições que também influência a ênfase na medida.

5. DA DISCUSSÃO DAS GRANDEZAS E MEDIDAS NO SABER SÁBIO AO REFINAMENTO DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O DOMÍNIO DAS GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo, apresentamos elementos que evidenciam a complexidade de conceituar grandeza, bem como os que esclarecem sua relação intrínseca com o número (medida). Essa incursão tem também o propósito de aprofundar a análise das razões de ser das grandezas no ensino atual em relação com suas razões de ser epistemológicas. Portanto, discute-se aqui, o lugar atribuído à grandeza e aos elementos a ela relacionados, considerando as diferentes instituições que, de alguma maneira, estão no entorno do ensino fundamental brasileiro.

Para tanto, fizemos um recorte histórico e analisamos alguns marcos que julgamos ser importantes para compreender o conceito de grandeza no ensino fundamental brasileiro atual. Nesse recorte, problematizamos a dimensão epistemológica no âmbito da instituição matemática acadêmica, partindo da definição do verbete grandeza presente no volume II Encyclopédie Méthodique – Mathématiques (D'ALEMBERT et al., 1785) e considerando a estrutura matemática proposta por Couturat (1986), que se contrapôs às infrutíferas tentativas de definir grandeza.

No contexto da instituição educação matemática na interface com a matemática acadêmica, problematizamos a complexidade do conceito de grandeza, evidenciando implicações no ensino e na aprendizagem desse saber, e explicitamos algumas razões pelas quais esse conceito é ensinado na escola, bem como indícios que explicam a ênfase no numérico.

Por fim, concluímos este capítulo indicando algumas convergências que observamos entre teóricos que se situavam nessas duas instituições e/ou na interface entre elas. Embora esse não tenha sido, de início, um propósito, ao constatarmos que diferentes autores em momentos distintos apontaram para determinados elementos em comum envolvendo grandezas, para nós esse foi um indicativo da complexidade do conceito de grandeza mesmo para instituições produtoras do saber sábio.

5. 1 ELEMENTOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE GRANDEZA

Iniciamos nossas reflexões sobre o conceito de grandeza tomando como marco inicial o século XVIII, a partir de uma possível definição apresentada na Encyclopédie Méthodique, publicada entre o final do século XVIII e início do século XIX pelo francês Charles-Joseph

Panckoucke, com edição de Abée D'Alembert e Denis Diderot. Essa publicação tratou dos mais diversos temas, como anatomia, botânica, artes, história natural e matemática, em pouco mais de 200 volumes. A matemática foi abordada em três volumes, Encyclopédie Méthodique – Mathématiques I, II e III, editados entre os anos 1784 e 1789 por Abée D'Alembert, De La Lande Bossut, Le Marquis de Condocert, Denis Diderot e Jean Bernoulli.

A ideia de grandeza é expressamente tratada no volume II, mas já na introdução do volume I, L'Abée Bossut apresenta uma concepção de matemática com evidência para o conceito de grandeza. Segundo Bossut (1784, p. 10),

> A matemática é feita para medir, ou melhor, para comparar grandezas; por exemplo, distâncias, superfícies, velocidades, entre outras. Ela está dividida em matemática pura e matemática mista, também conhecida como ciência físico-matemática.
> A matemática pura considera a grandeza de uma maneira simples, geral e abstrata: e com isso ela tem a preciosa vantagem de basear-se nas noções primordiais de quantidade. Esta classe inclui, 1. Aritmética ou a arte de contar. 2. A geometria, que aprende a medir a extensão. 3. A análise, ciência das grandezas em geral. 4. geometria mista, uma combinação de geometria ordinária e análise.
> A matemática mista toma emprestado da Física um ou mais experimentos incontestáveis, ou assume nos corpos uma qualidade principal e necessária: então, pelo raciocínio metódico e demonstrativo, ela extrai do princípio estabelecido, algumas conclusões óbvias e certas, como aquelas que a matemática pura obtém imediatamente de axiomas e de definições. A esta segunda classe pertencem: 1. A mecânica, a ciência do equilíbrio e movimento de corpos sólidos. 2. Hidrodinâmica, que considera o equilíbrio e movimento dos corpos fluidos. 3. A acústica ou a teoria do Som, 4. Ótica ou a teoria do movimento da luz. 5. Astronomia, ciência do movimento dos corpos celestes (BOSSUT, 1784, p. 10, tradução nossa)[43].

De acordo com Bossut, as grandezas têm um lugar privilegiado na matemática, que se divide, segundo ele, em matemática pura e matemática mista. A primeira, segundo o autor, considera a grandeza em seu aspecto simples, geral e abstrato, pautando-se na ideia de quantidade, que inclui os domínios da aritmética, geometria, análise e geometria mista. No segundo caso, é possível inferir que Bossut considera a grandeza sob um ponto de vista experimental, que se distancia da natureza axiomática assumida pela matemática pura. Em todo caso, o excerto acima revela nitidamente que no século XVIII a noção de grandeza ocupava um lugar de destaque na matemática.

Mas é no volume II da Encyclopédie Méthodique – Mathématiques que se define o verbete *grandeza*, cuja tradução foi extraída de Bellemain e Lima (2002 pp. 78-79), após consultarmos o original, que se encontra nos anexos.

---

[43] Traduzido do original em francês, que se encontra nos anexos.

> Esta é uma daquelas palavras que todos acreditam ter uma ideia clara e que, entretanto, é relativamente difícil de definir bem. Não seria porque as ideias que esta palavra recobre são mais simples que as ideias por meio das quais se pretende explicá-las?
> De qualquer forma, os matemáticos definem a grandeza como o que é suscetível de aumento e diminuição; segundo esta noção, nem o infinito nem o zero seriam grandezas, uma vez que o infinito não é suscetível de aumento, nem o zero é suscetível de diminuição; assim, muitos matemáticos consideram o zero e o infinito não como grandezas, mas como o limite das grandezas, uma para a diminuição e outra para o aumento.
> Pode-se evidentemente expressar desta forma e não se trata de uma mera disputa sobre palavras, mas se rompe com o uso habitual, uma vez que se fala de grandeza infinita. Assim, parece que se deve buscar uma definição da grandeza mais análoga às noções comuns. Além disso, segundo a definição que acabamos de apresentar, deve-se chamar grandeza tudo o que é suscetível de aumento ou diminuição; ora, a luz é suscetível de aumento e de diminuição; entretanto seria impróprio considerar a luz como uma grandeza.
> Outros mudam um pouco a definição precedente, substituindo "ou" no lugar de "e", definindo grandeza como o que é suscetível de aumento ou diminuição. Segundo esta definição, na qual o "ou" é disjuntivo, zero seria uma grandeza pois apesar de não ser suscetível de diminuição, ele é suscetível de aumento; esta definição é ainda menos pertinente que a precedente.
> Parece-nos que se pode definir relativamente bem a grandeza, como o que é composto de partes. Há dois tipos de grandezas, a grandeza concreta e a grandeza abstrata.
> A grandeza abstrata é aquela cuja noção não designa nenhum objeto particular. Não se trata de outra coisa senão dos números. Assim, o número 3 é uma grandeza abstrata pois designa tanto 3 pés quanto 3 horas, etc. A grandeza concreta é aquela cuja noção engloba um objeto particular. Ela pode ser composta de partes coexistentes ou de partes sucessivas; e desse ponto de vista, ela engloba dois tipos, a extensão e o tempo. Só há em última instância estes dois tipos de grandezas; todos os outros podem ser reduzidos a eles de forma direta ou indireta. A extensão é uma grandeza cujas partes existem ao mesmo tempo; o tempo é uma grandeza cujas partes existem uma após a outra.
> A grandeza também se chama quantidade, e deste ponto de vista, pode-se dizer que a grandeza abstrata diz respeito à quantidade discreta e que a grandeza concreta diz respeito à contínua.
> As grandezas e suas propriedades são o objeto da Matemática, o que será explicado mais tarde no verbete "Matemática" (D'ALEMBERT et al., 1785, p.149).

D'Alembert et al. (1785) problematizaram quão difícil era definir grandeza do ponto de vista dos matemáticos da época, cuja ideia partia da premissa de que grandeza é tudo aquilo que é suscetível de aumento e de diminuição. Para esses autores, era difícil definir grandeza porque as ideias nas quais se apoiavam eram, talvez, mais complexas do que a própria grandeza.

Porém, ao considerar essa definição, D'Alembert et al. (1785) apontam a exclusão das grandezas nulas e das grandezas infinitas, pois a primeira não é suscetível de diminuição, nem a segunda, de aumento. Assim, segundo os autores, para determinado grupo de matemáticos da época, o zero e o infinito não seriam precisamente grandezas, mas os limites delas. Outro contraexemplo para essa definição foi de que a luz é suscetível de aumento e de diminuição, mas seria impróprio considerá-la uma grandeza. Com efeito, a luz é um fenômeno físico, que segundo a física clássica, é uma onda eletromagnética composta de campos eletromagnéticos que variam no tempo e, portanto, não se trata de uma grandeza. Associada a esse fenômeno, existe a grandeza intensidade luminosa, cuja unidade de medida é a candela.

Além disso, a leitura dessa citação, sob os olhares do modelo teórico que adotamos, permitiu evidenciar aspectos contraditórios entre o que se entendia por grandeza naquela ocasião e o modelo vigente para o ensino, no qual nos ancoramos.

O primeiro aspecto que destacamos é que na Encyclopédie, número era grandeza, conforme se observa em "muitos matemáticos consideram o zero e o infinito não como grandezas" e na passagem "A grandeza abstrata é aquela cuja noção não designa nenhum objeto particular. Não se trata de outra coisa senão dos números".

O segundo aspecto diz respeito à inserção da ideia de infinito para definir grandeza, afastando-se do caráter pragmático e, ao mesmo tempo, aproximando-se do saber puramente abstrato. Nesse sentido, o verbete *infinito* é definido (D'ALEMBERT et al., 1785, p. 218), conforme segue:

> A quantidade infinita é propriamente aquela que é maior que qualquer quantidade atribuível; e, como não há tal quantidade na natureza, segue-se que a quantidade infinita está corretamente em nossa mente, e existe em nossa mente apenas por uma espécie de abstração, em que rejeitamos a ideia de limites

O terceiro aspecto que entendemos ser relevante é a imbricação existente na época entre o objeto e seus fenômenos associados (grandezas). A luz, por exemplo, é um objeto que tem como um fenômeno associado a intensidade luminosa, sendo esta última a grandeza. Logo, no século XVIII o amálgama entre grandeza e número e entre o objeto e fenômenos a ele associados estavam presentes na instituição matemática acadêmica, de modo que parecia não haver uma conformidade do modelo didático-matemático por nós adotado com a referida instituição, em que número e grandeza são objetos do saber distintos, assim como o objeto e os fenômenos a ele associados.

Outro aspecto que, em nosso entender, merece destaque diz respeito ao domínio numérico das grandezas considerado na época, cuja evidência aponta para os números inteiros positivos, observada na relação entre grandeza abstrata e quantidade discreta. Entretanto, sob a perspectiva do modelo que adotamos, a medida de uma grandeza pertence ao conjunto dos números reais, em particular, dos reais positivos, para o caso das grandezas geométricas.

Merece destaque também o fato de que D'Alembert et al. (1785) buscaram superar as incoerências afirmando que grandeza era composta de partes e a classificou em duas categorias:

abstrata e concreta. No caso desta última, os autores consideraram que suas partes poderiam ser coexistentes ou sucessivas.

Por fim, observamos que no século XVIII grandezas e suas propriedades eram o objeto da matemática. Dessa maneira, era uma noção central na matemática acadêmica.

O quadro a seguir sintetiza os aspectos presentes na definição do verbete grandeza que, em nosso entender, merecem destaques. Isso, por um lado, ao revelar, a dificuldade em definir grandeza no saber sábio e, por outro, ao mostrar, sob a perspectiva do modelo que adotamos, que não havia clareza, naquela ocasião, da grandeza enquanto um fenômeno associado a objetos, do lugar ocupado pela medida e o que, de fato, poderia ser considerado como uma grandeza.

Quadro 18 - Aspectos observados na definição do verbete grandeza na Enciclopédie

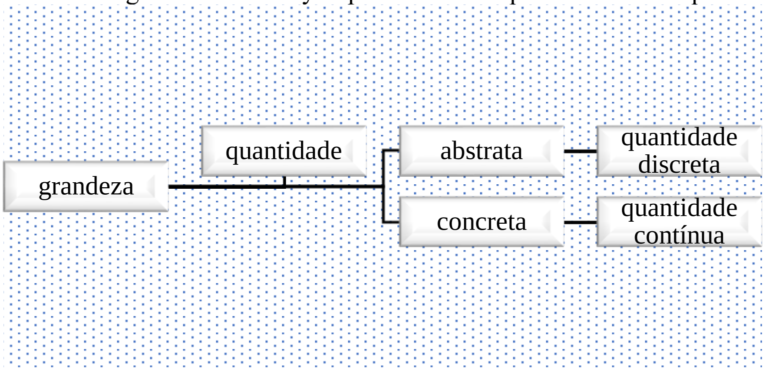
Aspectos	Considerações
Número é grandeza	Os números eram vistos como uma grandeza abstrata
Amálgama entre um objeto e os fenômenos a ele relacionados	Não dissociação entre o objeto e a grandeza
Dificuldade em caracterizar uma grandeza	Apresentação de grandeza infinita
Domínio numérico das grandezas	Consideravam-se apenas os números inteiros positivos como grandeza abstrata
Caracterização de grandeza	Composição de partes, classificada em dois tipos: abstrata e concreta
Objeto da matemática	Noção central na matemática acadêmica do século XVIII

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Para esses autores, toda grandeza pode ser reduzida aos dois tipos acima mencionados e, segundo eles, também pode ser chamada de quantidade. Nesse sentido, segundo Bossut (1784), a matemática foi feita para comparar grandezas e, portanto, para comparar quantidades. Além disso, D'Alembert et al. (1785) relacionam grandeza abstrata e quantidade discreta e grandeza concreta e quantidade contínua. Tais relações revelam outro conflito entre o que se pensava na época e o modelo hoje vigente, uma vez que, sob a perspectiva do modelo que adotamos, quantidades discretas e contínuas estão associadas às medidas inteiras e às medidas reais, respectivamente.

A ilustração seguinte exemplifica as relações entre grandezas abstrata e concreta e quantidade discreta e contínua, na perspectiva de D'Alembert et al. (1785):

Figura 35 - O conceito de grandeza na Encyclopédie Méthodique – Mathématiques



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para melhor compreender as relações presentes na ilustração acima, consultamos o verbete *abstrato* em D'Alembert et al. (1784, p.11):

> número abstrato, coleção de unidades consideradas em si mesmas e que não designam coisas particulares e determinadas. Por exemplo, 3 é um número abstrato; 5 também é um número abstrato, mas, quando dizemos 3 homens, 3 ecus[44], o número 3 é concreto.

Esse excerto enfatiza que número era grandeza e torna ainda mais evidente o entendimento de que, na Encyclopédie Méthodique – Mathématiques, a grandeza abstrata correspondia aos números naturais. Em se tratando do verbete *discreto*, encontramos a seguinte definição:

> A quantidade discreta é aquela em que as partes não são contínuas ou unidas. Tal é um número, cujas partes, sendo unidades distintas, não podem formar um único contínuo, pois, de acordo com alguns, não há partes no contínuo realmente determinadas antes da divisão: elas são infinitas em pureza; por isso é costume dizer que a quantidade contínua é infinitamente divisível (D'ALEMBERT et al., 1784, p. 536).

A Encyclopédie Méthodique – Mathématiques não define os verbetes concreto e contínuo, cujas ideias aparecem tacitamente nos que foram mencionados aqui.

Assim, conforme já observara Bellemain e Lima (2002), buscou-se, em princípio, definir grandeza, o que se mostrou infrutífero pelas incoerências e conflitos conceituais. Essas objeções, segundo esses autores, apontaram "na direção de se considerar tal conceito como um conceito primitivo, tomado, portanto, sem definição numa estrutura axiomática a ser concebida para organizar o campo conceitual das grandezas". (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 81). Esse foi o caminho trilhado por Couturat (1896).

---

[44] Antiga moeda francesa.

Ainda no século XVIII, de acordo com Bellemain e Lima (2002), uma noção de quantidade foi apresentada por Kant, na obra *Crítica da razão pura*, sendo considerado por ele um conceito primitivo, com significado de “unidade, pluralidade e totalidade”. Porém, no final do século XIX, Louis Couturat discutiu em maiores detalhes o conceito de grandeza.

Louis Couturat foi um matemático e filósofo francês (1868 – 1914) adepto da lógica simbólica. Em 1896, ele publicou a obra intitulada *De L'Infini mathématique*, na qual revisitou textos científicos que trataram do conceito de grandeza, e fez uma análise crítica à luz da lógica. Nessa incursão, ele revelou as tentativas infrutíferas de se definir o conceito, levando-o ao estabelecimento de uma estrutura matemática baseada em um conjunto de axiomas para o conceito de grandeza.

Couturat (1896) começa por criticar a definição presente na Encyclopédie, qual seja, “grandeza é aquela que é susceptível de aumento e diminuição”. A crítica incidiu sobre a ideia de que grandeza é algo variável, conforme descreve o excerto:

> É óbvio que a tradicional e banal definição de grandeza “aquela que é susceptível de aumento e diminuição”, encerra um círculo vicioso, pois envolve a ideia de grandeza, e até a noção de desigualdade de grandezas, *da maior* e *da menor*. Além disso, ela considera a grandeza como essencialmente variável, o que é outro tipo de círculo vicioso pois qualquer variação supõe pontos de referência fixos, e requer dados invariáveis, não apenas para serem notados e percebidos, mas até para serem concebidos porque, se ao menos pudermos conceber o movimento em um ambiente parado, mesmo alguém só pode pensar em uma grandeza variável relacionando-a com quantidades constantes às quais ela se torna igual. Vemos que a noção de *igualdade* está envolvida, bem como o da desigualdade, o da variação. Não podemos, portanto, sem petição de princípio, conceber e definir a grandeza como algo capaz de variar. Pelo contrário, a grandeza é essencialmente e antes de tudo algo fixo e imutável, e só depois de ter postulado várias grandezas fixas que podemos considerá-las como os estados (necessariamente sucessivos, em virtude do princípio da contradição) de uma mesma grandeza variável (COUTURAT, 1896, p. 367, tradução nossa)[45].

[45] Traduzido do original em francês: Il est évident que la définition traditionnelle et banale de la grandeur: ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution, enferme un cercle vicieux, car elle implique l'idée de grandeur, et même la notion de l'inégalité des grandeurs, du *plus grand* et du *plus petit*. De plus, elle considère la grandeur comme essentiellement variable, ce qui est une autre espèce de cercle vicieux car toute variation suppose des points de repère fixes, et exige des données invariables, non seulement pour être constatée et perçue, mais même pour être conçue car, si l'on ne peut concevoir le mouvement que dans un milieu immobile, de même on ne peut penser une grandeur variable qu'en la rapportant à des grandeurs constantes auxquelles elle devient *égale* tour à tour. On voit que la notion d'égalité est impliquée, aussi bien que celle d'inégalité, dans celle de variation. On ne peut donc, sans pétition de principe, concevoir et définir la grandeur comme une chose susceptible de varier. Au contraire, la grandeur est essentiellement et tout d'abord quelque chose de fixe et d'immuable, et ce'n'est qu'après avoir posé diverses grandeurs fixes qu'on peut les considérer comme les *états* (nécessairement successifs, en vertu du principe de contradiction) d'une seule et même grandeur variable.

Couturat (1896, pp. 367-368, tradução nossa[46]) também estendeu sua crítica à outra definição, com aparente rigor em relação à anterior, mas que recaiu, segundo ele, no mesmo círculo vicioso: "Os matemáticos modernos dão à mesma ideia uma definição aparentemente mais rigorosa: chamamos de grandeza tudo aquilo que se possa dizer ser igual ou desigual a outra coisa".

Nesse caso, a crítica incide sobre a tentativa de definir grandeza sem antes ter uma ideia clara do que ela é:

> Mas esta definição parece-nos envolver o mesmo círculo vicioso da anterior. Notaremos primeiro que é um método estranho para definir grandeza ≪algo que *pode ser dito* é isto ou aquilo≫; esta forma por si só indica que se trata de uma noção indefinível, que tentamos caracterizar por alguns de seus atributos . O que é ainda mais estranho é que ela não é definida por um atributo intrínseco que cada grandeza possui isoladamente, mas por uma possível relação entre pelo menos duas grandezas, uma vez que se julga necessário defini-la por sua comparação com outras grandezas. Tudo isso prova que esta fórmula envolve uma petição de princípio. E, de fato, como se pode conceber a igualdade ou a desigualdade sem antes saber o que é a grandeza? Como pensar qualquer relação antes de ter a ideia de seus termos? (…) para conceber a igualdade de duas grandezas ou de dois números, é preciso obviamente primeiro ter a ideia de número ou grandeza. (COUTURAT, 1896, p. 368, tradução nossa)[47].

Segundo Couturat (1896), para que duas grandezas sejam comparadas é preciso, em princípio, ter uma ideia clara do que ela consiste e, além disso, reconhecer que se trata de grandezas de mesma espécie. Por exemplo, a comparação de duas capacidades pressupõe a concepção prévia dessa grandeza, que implica em reconhecê-la como um fenômeno associado a recipientes e que se distingue de outros também relacionados a esse objeto, como como a massa, a densidade do material e espessura das bordas do recipiente.

Pelo exposto, Couturat (1896) concluiu que "a ideia de grandeza é, estritamente falando, indefinível, é uma noção primitiva e irredutível" (COUTURAT, p. 369, tradução nossa[48]).

---

[46] Traduzido do original em francês: Les mathématiciens modernes donnent de la même idée une définition en apparence plus rigoureuse « On appelle grandeur toute chose qui peut être dite égale ou inégale à une autre'. » Mais cette définition nous parait enfermer le même cercle vicieux que la précédente.

[47] Traduzido do original em francês: Mais cette définition nous parait enfermer le même cercle vicieux que la précédente. On remarquera d'abord que c'est une méthode étrange que de définir la grandeur « une chose dont on peut dire quelle est ceci ou cela » cette forme seule indique qu'il s'agit d'une notion indéfinissable, qu'on essaie de caractériser par quelques-uns de ses attributs. Ce qui est plus étrange encore, c'est qu'on ne la définit pas par un attribut intrinsèque que possède chaque grandeur isolément, mais par une relation possible entre deux gran deurs au moins c'est avouer qu'on ne peut définir la grandeur en elle-même, puisqu'on croit devoir la définir par sa comparaison avec d'autres grandeurs. Tout cela prouve que cette formule enveloppe une pétition de principe. Et en effet, comment peut-on concevoir l'égalité ou l'inégalité sans savoir auparavant ce qu'est la grandeur? Comment penser une relation quelconque avant d'avoir l'idée de ses termes? (…) pour concevoir l'égalité de deux grandeurs ou de deux nombres, il faut évidemment avoir d'abord l'idée du nombre ou de la grandeur.

[48] l'idée de grandeur est, à proprement parler, indéfinissable c'est une notion primitive et irréductible'.

Observamos que as tentativas em definir grandeza permaneceram em conflito por ao menos um século, entre 1785, ano de publicação da Encyclopédie Méthodique – Mathématiques (D'ALEMBERT et al., 1785) e 1896, ano da publicação de Couturat (1896) que, além de criticar as definições anteriores, apresentou uma alternativa para conceituar grandeza.

Couturat (1896) afastou-se não apenas das definições anteriores, como também abdicou de definir grandeza, considerando-a um conceito primitivo regulado por um conjunto de axiomas. Diante disso, associamo-nos a Couturat, entendendo que ele avançou na compreensão de que não era necessário definir grandeza e, ao mesmo tempo, sua proposta se aproxima do modelo didático-matemático que adotamos.

Outro aspecto presente na estrutura proposta por Couturat (1896) foi a mudança da ideia de que grandeza é o que estava suscetível de aumento ou diminuição, para a noção de igualdade e ordem entre grandezas. Esta última, de alguma maneira já se fazia presente em D'Alembert et al. (1785), porém, colocada sob outra perspectiva, tendo em vista que os matemáticos da época não recorreram ao método axiomático.

A seguir, apresentamos a estrutura matemática relativa ao conceito de grandeza, organizada por Couturat (1896) em 11 postulados. Os quatro primeiros são denominados de axiomas da igualdade:

> Axioma I: Duas grandezas de mesma espécie são iguais ou desiguais.
> […]
> Axioma II: Sempre que temos uma grandeza A igual à grandeza B, a grandeza B deve, inversamente, ser igual à grandeza A.
> […]
> Axioma III: Duas grandezas iguais a uma terceira são iguais entre si.
> […]
> Axioma IV. Dadas duas grandezas desiguais, uma é maior do que o outra, esta sendo menor do que a primeira (COUTURAT, pp. 375 – 385, tradução nossa).

Os seis axiomas que seguem foram denominados por Couturat (1986) de axiomas da adição:

> Axioma I: A soma de duas grandezas de mesma espécie deve ser uma grandeza de mesma espécie.
> […]
> Axioma II (comutatividade): A soma de duas grandezas não deve mudar quando essas grandezas são trocadas entre si, conforme a operação $A + B = B + A$.
> […]
> Axioma III (associatividade): Adicionar sucessivamente duas grandezas dadas a outra grandeza (da mesma espécie), equivale a adicionar à primeira a soma das últimas.
> […]
> Axioma IV: A soma de duas grandezas (de mesma espécie) é maior do que cada uma delas
> […]

> Axioma V (axioma da diferença): Se duas grandezas de mesma espécie são desiguais, existe uma terceira grandeza, tal que uma das grandezas dadas é igual à soma da outra com a terceira.
> […]
> Axioma VI: (axioma do módulo) Se adicionarmos a qualquer grandeza, a grandeza nula da mesma espécie, a soma será uma grandeza igual à primeira (COUTURAT, pp. 389 – 399, tradução nossa).

Por fim, seguem os axiomas da divisibilidade e da continuidade, precedidos pela definição "A soma de n grandezas iguais a uma grandeza A será representada por nA. (COUTURAT, 1986, p. 403)[49]. Segundo o autor, nA é uma grandeza de mesma espécie de A, pelo axioma I da adição aplicado às somas parciais $A + A = 2A$, $2A + A = 3A$, $3A + A = 4A, \dots, (n-1)A + A = nA$. Além disso, nA não indica o produto de n pela grandeza A, pois n é um número natural que indica a quantidade de grandezas iguais a A.

Seguem os axiomas da divisibilidade e da continuidade:

> Axioma da divisibilidade: Dada uma grandeza A e um inteiro n, existe uma grandeza B, de mesma espécie, tal que $nB = A$.
> […]
> Axioma da continuidade: Se pudermos dividir *todas* as grandezas de uma mesma espécie em duas classes, de modo que todas as grandezas de uma sejam menores (ou maiores) do que todas as grandezas da outra, *há* uma grandeza desta espécie que representa este modo de distribuição, e que é maior do que todas as grandezas da primeira classe e menores do que todas as grandezas da segunda classe (COUTURAT, 1986 pp. 407 – 416, tradução nossa).

A estrutura matemática acima mencionada contornou, na ocasião, o insucesso em definir grandeza recorrendo à comparação entre elas (axiomas da igualdade). Além disso, postulou operações com grandezas sem perda de vínculo com sua essência (axiomas da adição), ou seja, as operações postuladas acontecem essencialmente no âmbito das grandezas.

Em se tratando do modelo didático-matemático para o conceito de grandeza que adotamos, observamos convergência com o construto de Couturat (1896), pois assim como este último, ele considera a grandeza um objeto do saber por si só e sobre o qual é possível realizar operações matemáticas sem perda de vínculo com sua essência. Então, um número não é grandeza, mas a medida a ela associada, de modo que é possível, por exemplo, comparar a massa de dois objetos sem necessariamente recorrer à medida, assim como podemos dividir uma massa por um número natural diferente de zero sem a necessidade de isolar a grandeza da medida, o que levaria a operar somente sobre os números.

[49] Traduzido do original em francês: La somme de n grandeurs égales à une grandeur A se représente par nA.

Couturat (1986) criticou a ideia de definir grandeza a partir da comparação entre grandezas, que segundo ele leva a um círculo vicioso. Entretanto, na matemática atual é possível definir grandeza recorrendo a outros conceitos primitivos extraídos da teoria dos conjuntos, como será apresentada adiante.

Esse aspecto reforça o avanço estabelecido por Couturat (1896) ao propor um método axiomático para o conceito de grandeza pois, mesmo quando se chegou a uma definição, recorreu-se a outros conceitos primitivos seguindo esse método.

5. 2 UM SISTEMA DE AXIOMA PARA AS GRANDEZAS

Nicolas Rouche (1925 – 2008) foi um engenheiro e matemático belga. A partir dos anos 1980, ele se dedicou, entre outras atividades, ao ensino de matemática na escola. Sua inserção na didática da matemática foi motivada pelo papel seletivo no ensino dessa disciplina na escola básica, o que o levou a se debruçar em como estabelecer um ensino de matemática que provocasse efetiva aprendizagem. Nessa época, ele interagiu com outros importantes educadores matemáticos, entre eles Hans Freudenthal, que será apresentado adiante.

Rouche (1994) estabeleceu uma relação entre a estrutura matemática proposta por Couturat (1896) e o modelo presente nas práticas cotidianas, pois para ele o conceito de grandeza é relevante e deve ser ensinado na escola. Além disso, Rouche (1994) considerou que a complexidade desse conceito, por vezes camuflada por supostas obviedades, carecia ser evidenciada.

Para o pesquisador, a presença das grandezas no livro V de Euclides, um dos mais importantes dos Elementos, e as inúmeras atividades cotidianas realizadas com grandezas reforçam a relevância desse objeto do saber na escola. Nesse sentido, Rouche afirmou ainda que,

> No entanto, o progresso da tecnologia em andamento no século XX trouxe uma consequência paradoxal. Com efeito, enquanto um número crescente de ações, mesmo entre as mais diárias, baseiam-se em medições, os seres humanos manipulam cada vez menos grandezas em operações de medição prática: eles leem os resultados das medições diretamente nos mostradores, medições realizadas por instrumentos automáticos (ROUCHE, 1994, p. 25)[50].

[50] Traduzido do original em francês: Or le progrès de la technologie au cours du XX siècle a abouti à une conséquence paradoxale. En effet, alors qu'un nombre croissant d'actions même parmi les plus quotidiennes s'appuient sur des mesures, les êtres humains manipulent de moins en moins des grandeurs dans des opérations pratiques de mesure: ils lisent directement sur des cadrans les résultats des mesures exécutées par des instruments automatiques.

Essa citação evidencia uma mudança nos usos de grandeza e da medida na vida em sociedade, atribuindo relevância à última. De fato, os avanços tecnológicos ainda mais recentes trouxeram um repertório de instrumentos que possibilitam fazer medições cada vez mais rápidas e precisas, inclusive, sem a exigência de um conhecimento aprofundado sobre o que significam tais grandezas. Na vida prática, são cada vez mais frequentes situações de compra de frutas ou verduras, em que as pessoas apenas observam no mostrador do caixa o preço final a ser pago. Nesse caso, o número apresentado corresponde a uma grandeza que decorre da relação entre valor monetário e massa (preço por quilograma). Situações como essas omitem as grandezas e todo o contexto é reduzido à medida. Por outro lado, a pesagem de cebolas em balanças de dois pratos, por exemplo, tornava mais nítida a grandeza envolvida, do que no contexto anterior. Assim, situações como essa levam à prevalência da medida na sociedade contemporânea e podem fazer com que as pessoas compreendam grandeza como um número.

Em situações de pesagem com balança digital, como a do exemplo dado, o progresso científico e tecnológico encobriu a grandeza, mas disso não devemos inferir, obviamente, que os aparatos tecnológicos devam ser evitados. Na verdade, o que precisamos é ter clareza sobre o conceito acadêmico e como o tratar na escola; ou ainda, se é possível a escola fazer a mesma economia de uso das grandezas como é feita no saber acadêmico. A revisão de literatura apresentada no capítulo 2 mostrou que não, ou seja, não se pode abdicar do conceito e operar somente sobre os números.

Estudos mais recentes (CHEVALLARD; BOSCH, 2000; 2002) mostraram que as grandezas perderam protagonismo na matemática, ainda que tenham sido, em princípio, o *objeto de trabalho* dos matemáticos. (D'ALEMBERT et al., 1785). Esse abandono, segundo Rouche (1994) levou também a um desaparecimento em sala de aula nos níveis intermediários de ensino, cujos vestígios permaneceram no estudo da reta real (comprimento), das frações (área) e no sistema decimal de medidas. Logo, segundo Rouche, o conceito de grandeza deve ser ensinado na escola, inclusive para as crianças.

> Mas mesmo que as grandezas tenham desaparecido da matemática estabelecida, elas sem dúvida continuam sendo um passo necessário para as crianças. Na verdade, em primeiro lugar vivemos no meio de objetos que devemos, mesmo antes de qualquer ideia elaborada de medição, apreender sob seu aspecto de grandeza, e já neste nível um certo número de coisas não é dado como certo. Então, como recorremos constantemente a medidas na vida civilizada de hoje, devemos aprender em que consistem e o que nos trazem (ROUCHE, 1994, p. 26, tradução nossa)[51].

[51] Traduzido do original em francês: Or même si les grandeurs ont disparu des mathématiques constituées, elles demeurent sans dout un passage obligé pour les enfants. En effet, d'abord nous vivons au milieu d'objets qu'il nous

Ele complementa sua ideia de ensinar grandezas já para as crianças, destacando o que considera essencial para ser ensinado:

> Portanto, vamos aceitar este ponto de partida: você tem que ensinar a grandeza em creches e escolas primárias. *Obviamente, é importante não organizar um ensino axiomático neste nível*. Os alunos devem ser levados a experimentar e compreender o essencial dos fenômenos familiares ligados à comparação de duas grandezas de mesma espécie, à adição de grandezas, à sua multiplicação e a sua divisão por um número natural. Esses fenômenos são mais numerosos do que se poderia acreditar à primeira vista (ROUCHE, 1994, p. 26, tradução nossa)[52].

Apesar de sugerir o ensino para crianças pequenas, Rouche (1994) enfatiza que o conceito de grandezas é complexo, sobretudo porque, por vezes, a estrutura matemática entra em conflito com os saberes cotidianos e por isso podem desencadear alguns obstáculos. É o caso, por exemplo, da propriedade reflexiva na relação de equivalência *ter mesmo comprimento*. Enquanto as propriedades simétrica e transitiva comparam diferentes objetos em relação ao seu comprimento, a reflexividade compara um objeto consigo mesmo, o que foge do senso comum.

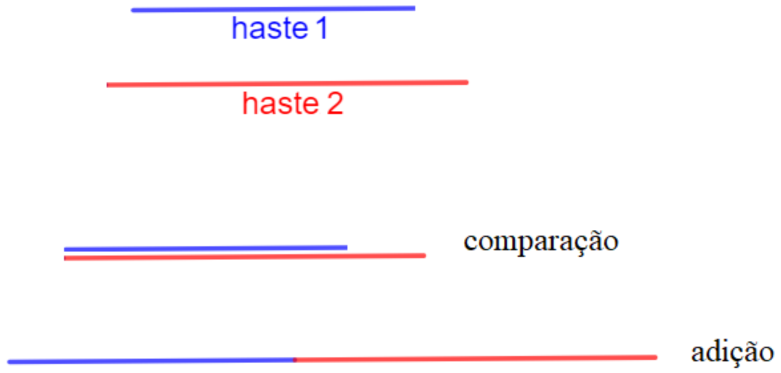
Nesse sentido, Rouche (1994) apresentou uma estrutura matemática em estreita relação com o senso comum e adotou, intuitivamente, hastes de metal ou massas de modelar, para interpretar a lógica matemática subjacente. No primeiro caso, duas hastes podem ser comparadas, segundo seus comprimentos, fazendo coincidir a extremidade de uma com a extremidade da outra, e a adição, colocando-as ponta-a-ponta, sobre uma mesma reta imaginária, conforme ilustração a seguir:

---

faut, avant même toute idée élaborée de mesure, saisir sous leur aspect de grandeur, et déjà à ce niveau un certain nombre de choses ne vont pas de soi. Ensuite, puisqu'on recourt sans cesse à des mesures dans la vie civilisée d'aujourd'hui, il faut bien apprendre en quoi elles consistent et ce qu'elles nous apportent.

[52] Traduzido do original em francês: Acceptons donc ce point de départ: il faut enseigner les grandeurs dans les écoles maternelles et primaires. *Bien sûr, il ne faul surtout pas organiser à ce niveau un ensignement axiomatique*. Il faut faire vivre et comprendre aux élèves l'essentiel des phénomènes familiers liés à la comparaison de deux grandeurs de même espèce, à l'addition des grandeurs, à leur multiplication et leur division par un nombre naturel. Ces phénomènes sont plus nombreux qu'on ne le croirait de prime abord.

Figura 36 - Representação da comparação e da adição de comprimentos



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para o caso de bolas de massas de modelar, pode-se, na comparação utilizar uma balança de dois pratos, e na adição, unir as duas bolas e construir uma terceira. Essas ações práticas indicam a comparação e a adição de grandezas, respectivamente.

A estrutura matemática proposta por Rouche (1994) filia-se àquela proposta por Couturat (1896), descrita a seguir:

> Seja X um conjunto não vazio, com uma relação ~ (denotada por relação de *equivalência*) tal que:
> (i) $\forall\, a, b\ \in X\ a \sim b\ \Leftrightarrow b \sim a;$
> (ii) $\forall\, a, b, c\ \in X\ a \sim b\ e\ b \sim c \Rightarrow a \sim c;$
> (iii) $\forall\, a\ X\ \ \exists b \in X\ a \neq b\ \ e\ a \sim b.$
> Em seguida, considere em X uma relação $\prec$ (que irá gerar uma *ordem total*) tal que
> (iv) $\forall\, a, b\ \in X$, temos uma e apenas uma das três situações $a \prec b, a \sim b, b \prec a;$
> (v) $\forall\, a, b, c \in X\ a \prec b\ e\ b \prec c \Rightarrow a \prec c.$
> (vi) $\forall\, a, b \in X\ a \oplus b\ está\ definido\ \ \Leftrightarrow a \neq b;$
> (vii) $\forall\, a, b, c \in X\ se\ a \backsim b, e\ se\ a \oplus c\ e\ b \oplus c\ estão\ definidos\ então\ a \oplus c \backsim b \oplus c;$
> (viii) $\forall\, a, b \in X\ a \oplus b\ está\ definido\ \ \Rightarrow\ \ a \oplus b \backsim b \oplus a;$
> (ix) $\forall\, a, b, c \in X\ se\ (a \oplus b) \oplus c\ e\ a \oplus (b \oplus c)$ estão definidos, então $(a \oplus b) \oplus c\ \backsim a \oplus (b \oplus c).$
>
> O axioma seguinte diz respeito à adição e à ordem;(x) $\forall\, a, b \in X\ a \prec b \Leftrightarrow \exists\, c\ \in X\ a \oplus c\ está\ definido\ e\ b\ \ \backsim a \oplus c.$
>
> Finalmente, um último axioma prepara *a divisão* de uma grandeza *por um natural.*
>
> (xi) $\forall\, a \in X\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n > 0\ \exists\, b_1, b_2, \dots b_n \in X\ b_1 -\ b_2 \backsim \cdots \backsim b_n, (\dots((b_1 \oplus b_2) \oplus b_3) \oplus \dots \oplus b_n)$ está definida e equivale à a (ROUCHE, 1994, pp. 27-28, tradução nossa).

O axioma (i), em sentido prático, corresponde à comparação de duas hastes, que pode ser feita colocando-se ambas justapostas e fazendo coincidir uma de suas extremidades, conforme mostrado no exemplo acima. O axioma (ii) também pode ser observado empiricamente, colocando duas hastes sobre uma reta suporte e unindo uma extremidade de uma com uma extremidade da outra. Toda relação de equivalência deve ser reflexiva, o que pode ser expresso em símbolos: $\forall a \in X, a \sim a$. Entretanto, em lugar desse axioma, Rouche (1994) optou pelo axioma (iii) e declarou: “ao contrário da simetria e da transitividade, esta propriedade não é verificada por manipulações”. (ROUCHE, 1994, p. 29).

O conflito entre o sentido lógico e a experimentação se dá pela impossibilidade de comparar uma haste consigo mesma, levando a uma operação puramente mental e, portanto, não se trata de outra coisa senão de uma necessidade lógico-matemática, pois se assim não fosse, não seria possível particionar um conjunto de hastes, segundo a relação *ter mesmo comprimento*. Com efeito, a não existência da reflexividade impediria que a classe de equivalência de apenas uma haste não conteria essa haste. Por essa razão, Rouche (1994) inseriu o axioma (iii), que combinado com (i) e (ii), assegura a reflexividade. De fato, se a ~ b, e por (i), b ~ a, então, por (ii), a ~ a. Portanto, toda haste é equivalente a si mesma.

Os axiomas de ordem (iv) e (iv), segundo o autor, encontram justificativas práticas sem muito esforço, até mesmo para crianças, uma vez que dadas duas hastes, deseja-se tão somente verificar se elas têm ou não o mesmo comprimento, o que pode ser feito em conformidade com o senso prático.

O axioma (vi) assegura a adição de duas hastes, desde que sejam diferentes. Segundo Rouche (1994), tal restrição aproxima essa operação da realidade familiar, pois, do ponto de vista prático, não faz sentido adicionar uma haste consigo mesma, uma vez que essa operação é definida unindo uma haste a outra, ambas colocadas sobre uma mesma reta suporte. Entretanto, por meio do axioma (iii), é possível obter uma haste equivalente que pode ser adicionada a ela. Assim, esse axioma “expressa não apenas que não se pode adicionar uma haste a si mesma, mas também que sempre se pode adicionar duas hastes distintas, que o bom senso também impõe”. (ROUCHE, 1994, p. 4).

Os casos da divisão e da multiplicação também encontram algum respaldo no senso prático, mas ambos os casos trazem certo grau de complexidade. A divisão de um comprimento, por exemplo, pode ser explicada subdividindo-se uma haste em n partes equivalentes. Porém, na realidade concreta, considerando-se que n pode ser suficientemente grande, tal divisão pode ser impossível empiricamente. O mesmo conflito vai existir na produção dos múltiplos de uma grandeza, pois o número n pode ser excessivamente grande.

Após apresentar uma estrutura matemática para as grandezas, em diálogo com o senso comum, Rouche (1994, p. 33) apresenta uma resposta para a questão: “o que é uma grandeza?” Segundo ele, te

A definição de grandeza acima apresentada não estabelece relação com o senso comum, ao mesmo tempo em que não evidencia a grandeza com um fenômeno associado a objetos, como se tentou fazer no século XVIII. A esse respeito, Rouche fez a seguinte observação:

> Notamos, em particular, que o fato de definir uma grandeza como uma classe de equivalência também colide com o senso comum , uma vez que neste se concebe que uma haste *tem* (no sentido de possuir) uma grandeza (no caso, um comprimento) e corre o risco de refutar que essa grandeza *seja* um conjunto de hastes (ROUCHE, 1994, p. 34, grifos do original, tradução nossa)[53].

Nessa definição, distingue-se explicitamente a grandeza (comprimento) do objeto, em conformidade com o modelo didático-matemático que estamos utilizando. Porém, segundo o autor, essa separação entra em conflito com o senso comum, em que a grandeza é a própria haste.

Rouche (1994) conclui que existe uma considerável distância, o *limiar epistemológico*, como ele denota, entre os usos que são feitos com grandezas na vida em sociedade e a ideia presente na estrutura matemática acima apresentada, que recorre à lógica e ao método axiomático. No primeiro caso, por exemplo, a comparação de duas massas depende de uma balança, enquanto no segundo, essa comparação é estabelecida pelo axioma (iv). Ou ainda, quando dois elementos do conjunto X são adicionados para produzir um terceiro, eles não desaparecem da operação, ao contrário, por exemplo, da adição de duas bolas de massa de modelar, que se misturam formando uma única bola. Essas situações ilustram o limiar epistemológico entre o conceito de grandeza na vida cotidiana e aquele presente na estrutura matemática.

Esse afastamento, de certa maneira, indica, por um lado, a necessidade de uma emancipação da matemática acadêmica em relação ao modelo presente nas atividades cotidianas e, por outro, enfatiza a necessidade de a escola não abdicar do conceito de grandeza como uma classe de equivalência, estabelecendo, quando possível, diálogo com o senso comum.

Em última análise, Rouche (1994) forneceu uma definição abstrata do conceito de grandeza, ao mesmo tempo em que fortaleceu a hipótese da complexidade desse conceito do

---

[53] Traduzido do original em francês: Notons en particulier que le fait de définir une grandeur comme une classe d'équivalence heurte aussi le sens commun dans la mesure où celui-ci conçoit qu'une baguette a (au sens de *possède*) une grandeur (en l'occurence une longueur) et risque de refuser que cette grandeur *soit* un ensemble de baguettes.

ponto de vista didático, pois, apesar de estruturado matematicamente, exige considerável esforço conceitual para colocá-lo em diálogo com o mundo concreto.

Assim, em consonância com Rouche (1994), adotamos a definição de grandeza como uma classe de equivalência de elementos que satisfazem entre si uma certa relação, mas compreendemos que não é necessário apresentá-la em sala de aula, restringindo-se, dessa maneira, aos saberes docentes.

No tópico seguinte problematizamos o conceito de grandeza na perspectiva de Hans Freudenthal, que assim como Rouche se dedicou à didática da matemática. Ambos se situaram, inclusive, na matemática acadêmica, na educação matemática e na interface entre essas instituições. Conforme dito anteriormente, Rouche e Freudenthal colaboraram entre si em questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina.

5. 3 O CONCEITO DE GRANDEZA PARA HANS FREUDENTHAL

Uma importante contribuição para o conceito de grandeza foi dada por Hans Freudenthal, matemático de origem holandesa, mas que nasceu na Alemanha em 1905, vivendo até 1990. Além da matemática, ele se interessou por literatura, filosofia e educação matemática.

Em 1983, Freudenthal propôs uma fenomenologia para o estudo de conceitos matemáticos e exemplificou sua proposição por meio da grandeza comprimento. Freudenthal definiu fenomenologia[54] conforme segue:

> Nossos conceitos matemáticos, estruturas e ideias foram inventados como ferramentas para organizar os fenômenos do mundo físico, social e mental. Fenomenologia de um conceito matemático, estrutura ou ideia significa descrevê-los em sua relação com os fenômenos para os quais foram criados e para os quais foram estendidos no processo de aprendizagem da humanidade e, na medida em que essa descrição se preocupa com o processo de aprendizagem da geração jovem, ela é uma *fenomenologia didática*, uma maneira de o professor mostrar ao aprendiz um lugar onde ele pode caminhar no processo de aprendizagem da humanidade (FREUDENTHAL, 1983, p. 9, grifo do orignal, tradução nossa)[55].

[54] Não vamos aprofundar o conceito de fenomenologia em sentido mais amplo. O leitor interessado nesse tema pode consultar Cupani (1984) e Martins, Boemer e Ferraz (1990).

[55] Traduzido do original em inglês: Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world. *Phenomenology* of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind, and, as far as this description is concerned with the learning process of the young generation, it is *didactical phenomenology,* a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind.

Hans Freudenthal inicia seu olhar fenomenológico com uma antítese entre *nooumenon* (objetos pensados) e *phainomenon*. Os objetos da matemática, segundo Freudenthal, são *nooumena*, enquanto uma parte da matemática pode ser vivenciada como *phainomenon*. É o caso, por exemplo, dos números, que são objetos pensados, mas o trabalho com esses objetos pode ser um fenômeno (FREUDENTHAL, 1983). Uma quantidade de objetos de uma coleção, por exemplo, é um fenômeno (*phainomenon*), enquanto o número (objeto pensado) que indica essa quantidade é o *nooumenon*.

Nesse sentido, os conceitos, estruturas e ideias matemáticas servem para organizar os fenômenos tanto do mundo físico, quanto da matemática. Ele afirma ainda que:

> Por meio de figuras geométricas como triângulo, paralelogramo, losango ou quadrado, consegue-se organizar o mundo dos fenômenos do contorno; Números organizam o fenômeno da quantidade. Em um nível mais elevado, o fenômeno da figura geométrica é organizado por meio de construções geométricas e provas; o fenômeno "número" é organizado por meio do sistema decimal. Assim acontece na matemática até os níveis mais altos: a abstração contínua traz fenômenos matemáticos de aparência similar englobados por um conceito – grupo, corpo, espaço topológico, dedução, indução e assim por diante. (FREUDENTHAL, 1983, p. 28, tradução nossa)[56].

De acordo com Freudenthal (1983), o conceito matemático não é o fenômeno propriamente dito, mas um organizador de fenômenos. Ele acrescenta que, se a relação *nooumenon – phainomena* destaca o componente didático, que se dedica ao processo de ensino e de aprendizagem, tem-se uma fenomenologia didática. Nesse sentido, Freudenthal (1983) sugere que não se deve iniciar o ensino de um saber matemático pelo conceito em si, mas pela organização de fenômenos que serão matematizados pelo conceito e que permitam ao sujeito construir objetos mentais relativos a ele. Assim, por exemplo, o ensino do conjunto dos números naturais não deve iniciar pela abordagem de suas propriedades matemáticas, mas por fenômenos que ele possibilita organizar como o da quantidade, da contagem, dos códigos e das medidas.

Essa ideia de Freudenthal em organizar o estudo de um conceito matemático por meio de fenômenos converge com a de Vergnaud (1990), quando este último propõe que um conceito

---

[56] Traduzido do original em inglês: By means of geometrical figures like triangle, parallelogram, rhombus, or square, one succeeds in organising the world of contour phenomena; numbers organise the phenomenon of quantity. On a higher level the phenomenon of geometrical figure is organised by means of geometrical constructions and proofs, the phenomenon "number" is organised by means of the decimal system. So it goes in mathematics up to the highest levels: continuing abstraction brings similar looking mathematical phenomena under one concept – group, field, topological space, deduction, induction, and so on.

deve ser vivenciado por meio de um conjunto de situações que lhe dão sentido. Ao mesmo tempo, ela converge também com a ideia de Chevallard (1994), quando este destaca a importância da razão de ser epistemológica dos conceitos como um componente didático. Assim, apesar de proporem abordagens distintas, esses teóricos aproximam-se, ao evidenciarem a necessidade de o ensino questionar as razões pelas quais os objetos do saber foram criados.

Freudenthal (1983) traz um olhar fenomenológico para o conceito de comprimento, ao qual atribui status destacado em relação a outras grandezas. Ao fazer isso, ele contribuiu significativamente para o desenvolvimento desse conceito, considerando seus aspectos matemático e didático. Além disso, esclarece que as ideias apresentadas para comprimento podem ser ampliadas para outras grandezas, como massa, duração de intervalo de tempo e capacidade, resguardadas suas particularidades.

Adentrando na fenomenologia para a grandeza comprimento, mais precisamente fenomenologia da estrutura matemática, Freudenthal inicia a construção de uma função comprimento, que se relaciona a objetos *longos*. Ele apresenta um conjunto fechado para as operações de adição de comprimentos, de multiplicação de um número real positivo por um comprimento e de ordem entre comprimentos. A essa estrutura, ele chama de estrutura matemática de grandeza ou fenomenologia matemática de grandeza, embora exemplificada na grandeza comprimento.

Pelo exposto, observamos que a estrutura matemática proposta por Rouche (1994) para o conceito de grandeza apresenta convergências com a proposta por Freudenthal. Por essa razão, não apresentamos esta última e passaremos aos aspectos relativos à fenomenologia didática da grandeza comprimento, mas que poderia ser aplicada a outras grandezas.

Ele inicia a fenomenologia didática de comprimento falando sobre o termo comprimento, que está associado a objetos longos e que, portanto, é sinônimo de largura, altura, espessura, distância, entre outras. A variedade de adjetivos que envolve comprimento é um elemento que também deve ser considerado no ensino. Por exemplo, longo, curto, estreito, largo, alto, baixo, grande, pequeno, grosso, fino, raso, profundo, entre outros, são termos que estão relacionados a essa grandeza. É, portanto, mergulhando nesse universo da linguagem que a grandeza comprimento vai sendo compreendida. Mas a compreensão de que esse conjunto de adjetivos se relaciona a comprimento nem sempre é imediata para o aluno.

Outro aspecto da fenomenologia didática do conceito de comprimento é a relação existente entre os objetos físicos e os abstratos. Um palito de churrasco, por exemplo, modela concretamente o ente abstrato segmento de reta. Esses objetos carregam uma propriedade que também é um elemento sensível, do ponto de vista conceitual: rigidez, para alguns, e flexibilidade, para outros. Palitos e hastes de metal, por exemplo, são rígidos, enquanto um fio de cobre e um cordão são flexíveis.

As propriedades físicas importam, segundo o autor, porque ao serem deslocados sob certos movimentos, alguns objetos rígidos, mantêm formas e comprimentos, enquanto em outros casos, objetos flexíveis variam as formas, mas preservam seus comprimentos. Ao tratar das propriedades de um objeto, Freudenthal (1983, p. 13, tradução nossa) escreveu:

> Tenho certeza de que a rigidez é experimentada em um estágio de desenvolvimento anterior ao comprimento e que o comprimento e a invariância do comprimento são constituídos a partir da rigidez e não o contrário. A rigidez é uma propriedade que abrange todas as dimensões, enquanto o comprimento requer objetos onde uma dimensão é privilegiada ou evidenciada. No entanto, enfatizar essa dimensão pode não levar a restringir as transformações que se preservam (FREUDENTHAL, 1983, p. 13, tradução nossa)[57].

Portanto, a rigidez de um corpo possibilita ao estudante comparar os objetos observando tão somente seus comprimentos. Isso acontece porque esses objetos permitem uma mobilidade que assegura a invariância da forma por congruência e, portanto, preserva seu comprimento.

Por outro lado, os objetos flexíveis têm como característica a possibilidade de sofrerem certas deformações, ainda que possam também manter seu comprimento invariante. É o caso, por exemplo, de um clipe, que ao ser esticado, perde sua forma, mas mantém o comprimento. Enquanto esses objetos retiram, em algum grau, o foco sobre a grandeza, diferentemente dos objetos rígidos, eles possuem mais de uma forma e podem se moldar a outros objetos. É o caso, por exemplo, de certos tipos de barbante e da fita métrica, que se moldam aos objetos, inclusive os curvos.

Segundo Freudenthal (1983), quando se deseja saber quão longe um ponto A está de um ponto B, ou seja, a distância entre A e B, está em jogo uma função de duas variáveis, que são as extremidades desse segmento. Por outro lado, quando se deseja saber o comprimento de um objeto, trata-se de uma função de objetos concretos. No primeiro caso, tem-se uma função de duas variáveis, os pontos A e B, enquanto no segundo, de apenas uma, a de um objeto longo. Essa nuance, para o autor, parece óbvia para os adultos, levando-os a naturalizá-la para as crianças.

---

[57] Traduzido do original em inglês: I am pretty sure that rigidity is experienced at an earlier stage of development than length and that length and invariance of length are constituted from rigidity rather than the other way round. Rigidity is a property that covers all dimensions while length requires objects where one dimension is privileged or stressed. However, stressing this one dimension may not lead to restricting the preserving transformations.

Por fim, Freudenthal (1983) concluiu a fenomenologia didática abordando a medição e a mudança de unidade de comprimentos. A introdução de medidas de comprimento costuma partir do uso de unidades não padronizadas, especialmente partes do corpo humano, como o passo, o pé, o palmo e a polegada. Um fato destacado por ele é que, ao utilizar o passo como unidade de medida, as crianças, por vezes, contam uma unidade a mais, o passo zero, e que nem sempre se atentam para garantir passos igualmente longos. Portanto, o processo de medição empírica traz sutilezas que requerem um olhar cuidadoso.

Medir utilizando uma unidade de medida significa colocá-la congruentemente um número de vezes até que o comprimento a ser medido se esgote. Por exemplo, medir a altura de uma porta utilizando o palmo, exige o alinhamento dessa unidade com uma das extremidades da porta e a repetição desse processo até esgotar a altura que está sendo medida. Nesses casos pode acontecer, e geralmente é o que acontece, de a unidade não caber um número inteiro de vezes no objeto medido.

Essa situação levou à criação de um novo conjunto numérico, uma vez que o domínio dos números inteiros positivos já não é suficiente, bem como a subdivisão da unidade. Os elementos acima mencionados compõem o que Freudenthal (1983) definiu como fenomenologia didática do conceito de comprimento.

5. 4 O CONCEITO DE GRANDEZA E A EMERGÊNCIA DA MEDIDA

A relação intrínseca entre grandeza e medida é minuciosamente discutida na obra *Conceitos fundamentais da matemática*, composta de três volumes, sendo o primeiro publicado em 1941, o segundo em 1942, e o último, somente em 1951, em conjunto com reedições dos dois primeiros. Trata-se de uma produção de Bento de Jesus Caraça, matemático português que viveu na primeira metade do século XX (1901 – 1948). A edição de 1951, que contém os três volumes, ganhou outras edições e tornou-se uma referência para o conceito de grandeza, estabelecendo, naquela ocasião, as bases para se distinguir grandeza de medida, o que mais tarde se revelou pertinente, do ponto de vista didático.

Na parte I, Caraça (1951) aborda o problema da contagem e discute a criação dos números naturais como um construto vinculado às necessidades humanas. Estas, por sua vez, são permeadas pelas grandezas concretas (D’ALEMBERT et al., 1785) e por isso, os números naturais surgem no contexto das grandezas. Nesse sentido, Caraça escreveu que

> A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária da contagem. A imagem do homem, criando duma maneira completa a ideia de número, para depois a aplicar à prática da contagem, é cômoda, mas falsa (CARAÇA, 1951, p. 4).

Para Caraça (1951), a profundidade com que se conhecia os números naturais estava ligada ao desenvolvimento da vida em sociedade. Assim, o domínio desses números acompanhou o avanço das civilizações e para o homem civilizado, “o número natural é um ser puramente aritmético, desligado das coisas reais e independente delas – é uma pura conquista do seu pensamento” (CARAÇA, 1951, p. 10). Decorre, portanto, dessa abstração, toda a estrutura que permite operar com os números naturais e que faz deles um conjunto numérico.

A perspectiva colocada por Caraça (1951) evidencia que as práticas cotidianas estiveram no cerne do desenvolvimento dos números e, nesse sentido, ele coloca grandeza como sendo um conceito fundamental, assim como o fez Bossut ao apresentar sua concepção de matemática. Com efeito, as atividades sociais requerem o uso de grandezas, sobretudo as que envolvem medidas, e são elas que impõem a necessidade de um padrão para se comparar grandezas, de modo a assegurar que trocas (comerciais, por exemplo) entre pessoas aconteçam de maneira organizada. Esse parâmetro de comparação é a unidade de medida, a exemplo do quilograma para massa e do metro quadrado para área. Conforme Caraça (1951), a comparação de uma grandeza com uma unidade de medida de mesma espécie da primeira, faz surgir um número: “este número chama-se medida da grandeza em relação à unidade” (CARAÇA, 1951, p. 30).

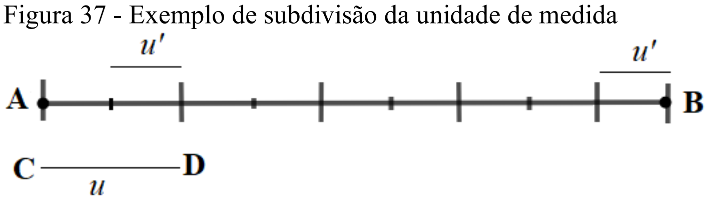
Nessa afirmação, o autor distingue expressamente grandeza de medida, e o faz também quando afirma que “uma mesma grandeza tem, portanto, tantas *medidas* quantas as *unidades* com que a medição se faça”. (CARAÇA, 1951, p. 31, grifos do original). Isso acontece porque é possível medir uma grandeza utilizando diferentes unidades. Por exemplo, um comprimento pode ser medido utilizando o centímetro, o metro, a polegada, entre outras.

Ao mesmo tempo em que Caraça distingue grandeza de medida, ele atribui grande importância à última, pois ela é a referência para muitas relações sociais, como as de base econômica. Por exemplo, uma fazenda que produz leite norteia suas operações pela medida do volume de leite produzido. Essa medida serve de parâmetro, entre outras coisas, para balancear a alimentação dos animais, quando a produção é considerada baixa, como também na negociação do preço de compra e venda dos animais. Portanto, a medida é, de fato, uma referência necessária.

Se por um lado grandeza e medida são objetos distintos, por outro, elas têm uma forte associação, uma vez que toda medida está associada a uma grandeza, por meio de uma unidade. Foram as grandezas, inclusive, que levaram à extensão do conjunto dos números inteiros para os racionais, quando da constatação de que nem sempre uma unidade de medida cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

Assim como Freudenthal (1983), Caraça apoia-se na grandeza comprimento e a utiliza para mostrar que os números têm uma relação estreita com o conceito de grandeza. O exemplo a seguir ilustra essa relação, em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. Nas situações em que isso acontece, é possível, em certos casos, subdividir a unidade de medida em partes iguais, de modo que a nova unidade caiba um número inteiro de vezes na grandeza que está sendo medida.

Figura 37 - Exemplo de subdivisão da unidade de medida



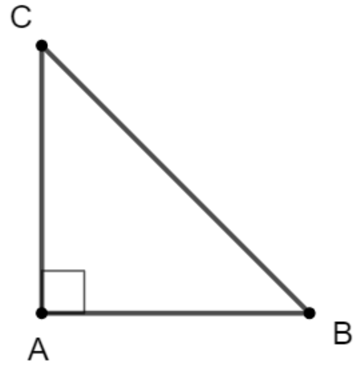
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

$c(\overline{AB}) = 9u'$ e $u = 2u'$. Logo, o comprimento de $\overline{AB}$ na unidade u será $c(\overline{AB}) = \frac{9}{2}u$.

A medida $\frac{9}{2}$ não é inteira e, portanto, para que esse comprimento possa ser medido utilizando a unidade de medida u, faz-se necessário estender o conjunto dos números inteiros, o que levou ao conjunto dos números racionais positivos. Nesse caso, u' é uma unidade de medida comum a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$. Para Caraça (1951), é sempre possível, em medições práticas, obter u' e por isso, o conjunto dos números racionais é suficiente para realizar qualquer medição empírica.

Em medições práticas, como aquelas realizadas no cotidiano, é sempre possível subdividir a unidade de medida em outra unidade aproximada que caiba um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. No entanto, no universo das estruturas matemáticas há situações em que não existe uma medida comum a dois segmentos. Por exemplo, em um triângulo ABC, retângulo em A, cujos catetos medem 1 unidade de medida de comprimento e que $\overline{AC} = \overline{BC}$, não existe uma igualdade $\overline{BC} = \frac{m}{n}\overline{AC}$, quaisquer sejam os inteiros *m* e *n*.

Figura 38 - Triângulo retângulo isósceles



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Logo, o conjunto dos números racionais se mostrou insuficiente para exprimir uma medida abstrata dessa grandeza, o que levou à criação dos números irracionais.

Pelo exposto, as grandezas têm uma relação intrínseca com as medidas e mais que isso, estão no cerne do desenvolvimento dos números. Com isso, Caraça (1951) indicou que tais conceitos são distintos e, ao mesmo tempo, intimamente relacionados.

5. 5. ESTRUTURA MATEMÁTICA PARA O CONCEITO DE GRANDEZA EM DIÁLOGO COM O MODELO DIDÁTICO-MATEMÁTICO

Neste tópico, apresentamos uma estrutura matemática para o conceito de grandeza que, em nosso olhar, pode ser colocada em diálogo com o modelo didático-matemático que adotamos.

Entre os teóricos que se debruçaram sobre grandezas na segunda metade do século XX, encontra-se Hassler Whitney, matemático estadunidense (1907-1989), que embora tenha atuado em centros avançados de estudos em matemática pura, interessou-se também pela educação matemática, assim como Hans Freudenthal e Nicolas Rouche.

Whitney teve uma colaboração intensa para a educação matemática, conforme se observa em Zund:

> Whitney envolveu-se ativamente na educação matemática no nível do ensino básico. Ele deu várias palestras sobre este tópico, conduziu cursos de verão para professores e, em uma ocasião, passou quatro meses ensinando matemática pré-álgebra para uma classe de alunos da sétima série (ZUND, 1999, p. 303 tradução nossa).

Na década de 1970, a convite de Ubiratan D’Ambrósio, que na época coordenava um projeto de educação matemática, Hassler Whitney, ao visitar o Brasil, ministrou palestras para professores da educação básica, bem como interagiu com esses profissionais e com os estudantes, o que mostrou seu interesse também pelo ensino de matemática na escola básica. Segundo D'Ambrósio (1989), sua visita foi importante para legitimar a educação matemática, pois nesse período D'Ambrósio "lutava pela sobrevivência entre os matemáticos do núcleo duro, alguns deles respeitáveis". (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 8).

No ano de 1968, Hassler Whitney publicou dois artigos intitulados *The mathematics of physical quantities*, dividido em duas partes. A primeira, *Part I: mathematical of models for measurement*, estabelece um modelo para se operar com grandezas sem perder de vista suas relações com o mundo físico. A segunda, *Part II: quantity structures and dimensional analysis*, modela operações com grandezas de naturezas distintas, ou seja, aquelas que decorrem da relação de outras grandezas como densidade (que relaciona massa e volume) e velocidade (que relaciona distância e duração de intervalo de tempo).

O modelo matemático publicado por Whitney (1968a) assume o conjunto dos números reais positivos como uma estrutura matemática para medidas. Ele toma o conceito de massa para exemplificar sua estrutura e afirma explicitamente que "no que diz respeito à estrutura do modelo, não precisamos teorizar sobre o que a massa realmente é". (WHITNEY, 1968a, p. 115). Diante disso, Whitney também abdica de uma definição de grandeza, que para ele não é necessária para operar com esse conceito.

Partindo da grandeza massa, Whitney (1968) construiu um modelo, denotado por ele de M, em que os objetos têm certa propriedade, que será chamada de massa. Esta propriedade, por exemplo, permite distinguir dois objetos, segundo suas massas.

Nessa estrutura, "os números aparecem de uma maneira natural como operadores no modelo" (WHITNEY, 1968a, p. 115) e valem as propriedades distributivas e associativas. Por exemplo: $2\text{ kg}+5\text{ kg}=(2+5)\text{kg}=7\text{ kg}$; $3\text{ kg}=3\cdot(1\,000\text{ g})=(3\cdot 1\,000\text{ g})=3\,000\text{ g}$. Em relação à unidade de medida, pode-se tomar uma massa m' do conjunto das massas M e utilizá-la para comparar as demais massas desse modelo, e assim m' será a unidade de medida, que não é fixa. Porém, fixando-se momentaneamente m', e supondo que se obtenha, por exemplo, as massas, $3\,m'$, $7\,m'$ e $8\,m'$, é possível representá-las por 3, 7 e 8, respectivamente, o que possibilita substituir M por $\mathbb{R}^+$. Dessa maneira, no conjunto dos números reais positivos, pode-se definir uma massa m' que corresponde à medida 1.

Whitney acrescenta a existência de outros modelos, por exemplo, com ou sem o elemento zero, finito ou não. Além disso, ele utiliza o conceito de semigrupo para estruturar o modelo para medidas e traz como exemplo dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{R}^+$.

Em Whitney (1968a, p. 118), “um semigrupo $(G, +)$ é um conjunto G não vazio dotado de uma operação binária associativa $+$ em G. O semigrupo é comutativo se a adição é comutativa. Com base nesse saber matemático, estruturam-se os modelos sobre os quais se assentam as medidas de grandezas.

Nesse construto, observamos que Whitney abdica de uma definição, considera a grandeza como uma propriedade dos objetos e constrói uma estrutura que estabelece bases para operar com grandezas. Nesse sentido, observamos uma relação próxima entre a estrutura matemática e o modelo didático-matemático proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989), no sentido de considerar a grandeza como um atributo de um objeto. Ele também estabeleceu um diálogo entre sua estrutura e as práticas sociais, mas alertou de que nem sempre essa correspondência é possível e, ao fazer isso, novamente sugere a complexidade do conceito.

No tópico a seguir, problematizamos o conceito de grandeza no âmbito da instituição educação matemática.

5. 6 GRANDEZAS E MEDIDAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As seções precedentes apontaram a complexidade do conceito de grandeza e como a sua concepção foi se constituindo paulatinamente. Nesse sentido, Chevallard e Bosch (2000, p. 9) ressaltaram que,

> Historicamente, a maioria dos conceitos e teorias matemáticas foram construídos com base no trabalho sobre grandezas. Seria ainda mais prejudicial perder de vista essa filiação, pois, como foi apontado, é isso que garante vínculos com outras disciplinas (CHEVALLARD; BOSCH, 2000, p.9 tradução nossa)[58].

Os referidos pesquisadores indicam que a matemática, em princípio, desenvolveu-se a partir das grandezas, em consonância com a ideia presente em D’Alembert et al. (1785), que consideravam que a matemática foi feita, em última análise, para medir e/ou comparar grandezas.

Chevallard e Bosch (2000) escreveram que foi através de problemas “extramatemáticos”, sejam eles advindos de domínios cientificamente reconhecidos como física e química, ou daqueles mais abertos, provenientes da vida cotidiana, que as grandezas tomaram lugar nas aulas de matemática. Por outro lado, os autores ressaltaram que diante dos

[58] Traduzido do original em francês: Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que, comme cela a été signalé, c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines.

avanços obtidos, a matemática se desvinculou do conceito de grandeza, permitindo-lhe seguir seu rumo. Nesse sentido, Chevallard e Bosch (2000, p. 9) destacaram que:

> Se foi possível para as matemáticas se emanciparem da noção de grandeza, é sem dúvida que elas acumularam uma grande experiência de resultados, dos quais não parece que o ensino básico possa fazer a mesma economia (CHEVALLARD; BOSCH, 2000, p. 9, tradução nossa) [59].

Observamos que o desprendimento da matemática em relação à grandeza foi fundamental para o avanço tanto dessa instituição, quanto do conceito, pois o aprisionamento à grandeza, especialmente com vínculo ao mundo concreto, impediu que se chegasse a uma estrutura matemática. Foi somente no final do século XIX que novos marcos foram estabelecidos.

Entretanto, concordamos com Chevallard e Bosch (2000) de que nas aulas de matemática, em particular no ensino fundamental, não se deve abandonar os pontos de apoio oferecidos pelas grandezas, sem os quais seu ensino se torna demasiadamente abstrato. Primeiro porque esse conceito é complexo, conforme já mostramos, e segundo porque as grandezas possibilitam organizar muitos fenômenos observáveis em atividades cotidianas. Ainda assim, Chevallard e Bosch (2000) evidenciam que mesmo diante de problemas extramatemáticos, por vezes, a abordagem sobre grandezas é tangenciada, o que eles consideram “[...] apenas um teatro de sombras, o motivo da ação e não a questão da atividade”. (CHEVALLARD; BOSCH, 2000, p. 11). De outro modo, quando a grandeza se apresenta, apressa-se em operar sobre os números, sobre o qual recai todo o trabalho realizado, para só depois retornar a ela. Eles vão além, afirmando que:

> Nesta dialética acordada, não se pode duvidar que, para o matemático, o ponto alto seja o estágio intermediário, o do trabalho sobre números, mesmo se nos for dito no final que é a integralidade do percurso que os alunos devem, não sem dificuldades, enfrentar (CHEVALLARD; BOSCH, 2000, p. 11 tradução nossa)[60].

Esse aspecto foi observado na coleção de livros didáticos do 6º ao 9º analisada. Por vezes, na obra, opera-se com as medidas sob o pretexto do *cálculo da medida*, em que a unidade reaparece apenas no resultado final. Ancorados em Whitney (1968a) e em Douady e Perrin-

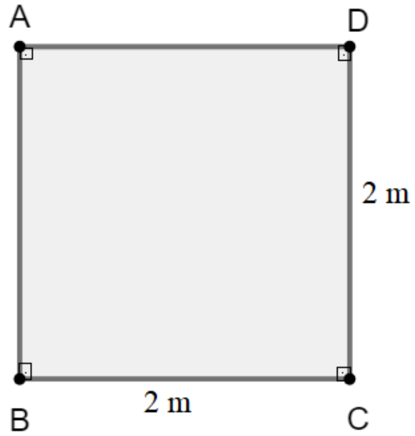
---

[59] Traduzido do original em francês: S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il ne semble pas que l'enseignement de base puisse faire l'économie.

[60] Traduzido do original em francês: Dans cette dialectique convenue, on ne peut douter que, pour le mathématicien, le temps fort ne soit l'étape médiane, celle du travail sur les nombres, même s'il nous est dit in fine que c'est à l'intégralité de ce parcours que les élèves devraient, non sans difficultés, s'affronter :

Glorian (1989), encontramos legitimidade em operar com grandezas. Por exemplo, podemos calcular a área de um quadrado, cujo comprimento do lado mede 2, em metros, conforme segue:

Figura 39 - Quadrado cujo comprimento do lado mede 2 m.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

$$A = 2\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = (2 \cdot 2) \cdot (\text{m} \cdot \text{m}) = 4\,\text{m}^2.$$

Ao fazer isso, não se perde de vista as grandezas envolvidas, diferentemente de operar apenas sobre as medidas.

Chevallard e Bosch (2000) viram no formalismo matemático uma das razões pelo abandono da grandeza enquanto um objeto do saber que, em sua concepção, esteve no âmbito da matemática mista (BOSSUT, 1784). Segundo os autores (Ibid., p. 18, grifo do original), “A matemática mista, e mais ainda o *espírito da miscigenação conceitual*, serão as primeiras vítimas do surgimento de um narcisismo matemático expressamente anti-utilitarista, que defendeu a pureza e, portanto, a autarquia, da matemática ensinada”.

A esse respeito, Chevallard e Bosch (2000, p. 20) acrescentam ainda que,

> A embriaguez soberana moderna que se apodera de várias disciplinas - incluindo a matemática - e as leva a não aceitar em seu meio sobre o qual elas não têm autoridade completa, a reivindicação da exclusividade de tal ou tal disciplina em lugar de pelo menos alguns de “seus” objetos, a ilusória tentação de pureza à qual a matemática sucumbiu - esquecendo que sua verdadeira natureza é, indefinidamente, mestiça - tudo isso é um dado pesado, que não se pode evitar o problema das grandezas. No entanto, veremos que este não é o único obstáculo à sua presença efetiva nas aulas de matemática (CHEVALLARD; BOSCH, 2000, p. 20 tradução nossa).[61]

[61] Traduzido do original em francês: L'ivresse souverainiste moderne qui s'empare de plusieurs disciplines -dont les mathématiques -et les pousse à ne rien accepter en leur sein sur lequel elles n'aient une complète autorité, la prétention à l'exclusivité de telle ou telle discipline à l'endroit d'au moins certains de« ses» objets, la tentation illusoire de la pureté à laquelle a pu succomber la mathématique -en oubliant que sa vraie nature est, indéfiniment,

Nesse sentido, concordamos com Chevallard e Bosch, pois o abandono da perspectiva de grandeza na matemática acadêmica, embora necessário, esvaziou sua essência enquanto um saber utilitarista, e essa perspectiva, de alguma maneira, chegou na escola.

Na matemática acadêmica é comum, por exemplo, abdicar, de início, da unidade e voltar a ela somente após a obtenção do resultado final ou fixar, em princípio, uma unidade, sem a necessidade de voltar a ela. Esse último caso pode ser observado em Lima (2011), cuja obra é frequentemente utilizada em cursos de formação inicial de professores de matemática. Nela, o autor assume uma unidade de medida, sem que precise voltar a ela, e todo trabalho seguinte é realizado sobre a medida, conforme mostram os seguintes excertos:

> Indicaremos como símbolo $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta AB. A **medida, ou comprimento**, $\overline{AB}$ **é um número** que deve exprimir *quantas vezes* o segmento AB contém um segmento u, fixado previamente, que se convencionou tomar como unidade de comprimento, ou como segmento unitário (LIMA, 2011, p.7). Grifo nosso.
>
> (...)
>
> Começamos fixando um segmento de reta u, que chamaremos de *segmento unitário*. (Ou unidade de comprimento.) Por definição, **o comprimento de u será igual a 1** (Ibid., p. 7). Grifo nosso.
>
> (...)
>
> Em resumo: fixado o segmento unitário u, **o comprimento de um segmento AB é um número racional m/n** quando existe um segmento w que esteja contido n vezes em u e m vezes em AB. Neste caso, w, chama-se um *submúltiplo comum* de AB e u, e estes dois segmentos se dizem *comensuráveis* (LIMA, 2011, p. 9 grifo nosso).

Os grifos revelam não apenas o afastamento da noção de grandeza, como também o entendimento de que um comprimento pode ser representado somente pela medida. De maneira análoga nessa mesma obra, o autor aborda área e volume, ratificando a ideia de que grandeza é número, afastando-se, portanto, da matemática mista (D'ALEMBERT et al., 1785) e, mais ainda, do modelo didático-matemático que adotamos.

Nesse sentido, Hans Freudenthal criticou o abandono injustificado em operar com grandezas, pois elas oferecem praticidade e asseguram o rigor igualmente presente nos números abstratos. Esse fato o levou a fazer a seguinte observação:

---

métisse -, tout cela est une donnée lourde, que l'on ne saurait éluder, du problème des grandeurs. On va voir pourtant qu'il ne s'agit pas là de l'unique obstacle à leur présence effective dans la classe de mathématiques.

> O matemático puro, é claro, detesta números concretos e os deixa irremediavelmente à mercê do físico. Divisões como 150 km: 3h = 50 km/h são chocantes? Que ele se retire para sua torre de marfim, se for contra sua natureza ensinar às crianças algo que pertence à vida cotidiana. O argumento do rigor contra cálculos com números concretos está completamente errado. Os números concretos são absolutamente rigorosos, e a resistência de alguns matemáticos contra eles é um dogmatismo absoluto (FREUDENTHAL, 1973, p. 207).

Ainda assim, a grandeza abstrata ganhou importância, a nosso ver, pela emancipação da matemática em relação à grandeza e por sua complexa estrutura matemática. Esta última, inclusive, quase sempre é negligenciada pelos professores (BROUSSEAU; BROUSSEAU, 1991-1992).

5. 7 CONSIDERAÇÕES À LUZ DO REFERENCIAL TEÓRICO

Ao longo deste capítulo apresentamos e problematizamos estudos que se debruçaram sobre grandezas entre os séculos XVIII e XX e evidenciamos aspectos relativos a esse conceito que explicam a imbricação entre grandeza e medida e o porquê da ênfase no numérico no ensino fundamental. A seguir, retomamos alguns desses elementos, agora sob o olhar do nosso marco teórico.

Da definição do verbete grandeza apresentada na segunda metade do século XVIII (D'ALEMBERT et. al, 1875), observamos que número era grandeza, que havia um amálgama entre o objeto e os fenômenos a ele associados e que a compreensão de grandeza era associada ao universo empírico.

O insucesso em definir grandeza levou, no final do século XIX, à formulação de uma estrutura matemática (COUTURAT, 1896) ancorada no método axiomático, estabelecendo as bases para o conceito de grandeza como um fenômeno dissociado da medida. Essa estrutura se descolou do universo empírico e permitiu avançar na conceituação desse objeto do saber. Ao longo desses dois séculos, o conceito de grandeza se mostrou complexo, principalmente quando colocado em diálogo com o senso comum e foi somente com o desenvolvimento da matemática que foi possível estruturá-lo no universo abstrato.

No âmbito da teoria dos conjuntos, Rouche (1994) apresentou uma definição matemática para o conceito de grandeza, que consiste em uma classe de equivalência. Essa definição distingue, nitidamente, grandeza do objeto e da medida, mas Rouche evidenciou se tratar de um conceito complexo, tendo em vista os conflitos existentes entre a estrutura matemática e o senso prático, principalmente na sociedade contemporânea.

Freudenthal (1983) já havia destacado a complexidade do conceito de grandeza, exemplificada na grandeza comprimento. Nesse sentido, o teórico propôs que o conceito matemático deve ser abordado por meio dos fenômenos que ele permite organizar. Concordamos com essa ideia pois, em nosso entender, ela conduz a organizar o ensino de grandezas a partir de situações que dão sentido a esse conceito e coloca em primeiro plano os porquês de se ensinar grandeza na escola. Diante disso, conforme já mencionado, observamos uma aproximação entre Freudenthal (1983) e Vergnaud (1990), com a ideia de situações que dão sentido a um conceito, e entre o primeiro e Chevallard, com a importância da razão de ser epistemológica dos saberes.

Caraça (1951), por sua vez, distinguiu com bastante clareza os conceitos grandeza e medida e enfatizou a relevância da primeira pelos seus usos sociais. Para ele, situações que envolvem medição de grandezas estão no cerne do desenvolvimento dos conjuntos numéricos, pois explicam a criação dos números racionais e irracionais. Observamos, portanto, estreita aproximação das ideias acima apresentadas com o modelo didático-matemático (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Sob a perspectiva da TAD, verificamos que levou ao menos um século para se pacificar a relação com o conceito de grandeza na matemática acadêmica, que veio somente com a introdução do método axiomático. Ainda assim, esse conceito se provou ser complexo nessa instituição pelos matemáticos da época e, mais tarde, pelos educadores matemáticos que estavam na interface entre a matemática acadêmica e a educação matemática. Esta última, mostrou ainda que grandeza é um conceito com forte presença nas práticas sociais, mas que o modo de vida das pessoas na sociedade contemporânea está cada vez mais camuflando o conceito de grandeza e, simultaneamente, utilizando a medida como referência.

Então, a imbricação entre grandeza e medida, a estrutura matemática do conceito grandeza na instituição matemática acadêmica e os usos sociais explicam a ênfase na medida. Assim, tendo em vista que a noosfera está imersa na sociedade e que o ensino fundamental está sob o arcabouço dessas instituições, a ênfase na medida nessa etapa de ensino decorre de condições e restrições originadas em instituições de níveis superiores da escala de codeterminação. A análise ecológica do conceito de grandeza mostrou, inclusive, que boa parte dos objetos de ensino referendados na BNCC se voltam para as práticas sociais.

Observamos também que as instituições sociedade, matemática acadêmica e educação matemática convergem em destacar a função social do conceito de grandeza, que a enxergamos como uma razão pela qual esse objeto do saber deve ser ensinado no ensino fundamental. Além disso, essas instituições enfatizam a relação entre grandezas e números, a qual se configura, para nós, como mais uma razão de ser para o ensino.

Após constatar alguns elementos que explicam a ênfase no numérico, mostraremos no tópico seguinte por que não devemos abdicar do conceito de grandeza no ensino fundamental, ainda que em algumas instituições essa escolha tenha se mostrado frutífera.

5.8 REFINANDO O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

Como culminância das análises realizadas anteriormente, propomos, neste tópico, o refinamento do Modelo Epistemológico de Referência para as grandezas geométricas na matemática do ensino fundamental brasileiro.

Inicialmente, assumimos um modelo epistemológico didático-matemático (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) que estabeleceu as bases para conceituar área como uma grandeza distinta da medida e da superfície, que surgiu da crítica ao modelo estabelecido na época para o ensino de área.

Sob o olhar da TCC (VERGNAUD, 1990) e do conceito matemático de grandeza como uma função, asseguramos a pertinência, do ponto de vista didático e matemático, em estender esse modelo para as grandezas comprimento e volume. Com o olhar da TCC, analisamos um conjunto de pesquisas que teve uma grandeza como objeto de estudo e isso nos permitiu observar erros e dificuldades persistentes sob diferentes recortes: geográfico, temporal e institucional. Além disso, quando esmiuçamos diversos estudos já realizados em torno do conceito de grandeza (BALTAR, 1996; ANWANDTER-CUEELLAR, 2008; FERREIRA, 2010; FIGUEIREDO; 2013, entre outros), foi possível observar, à luz da TCC, um conjunto de situações que permitem atribuir sentido a comprimento, área e volume enquanto grandeza, e de invariantes operatórios, sendo estes reveladores das dificuldades e erros persistentes cometidos pelos alunos quando se deseja conceituar área como grandeza. Muitos desses erros e dificuldades originam-se da ênfase dada à medida quando se ensina grandeza na escola, conforme constatamos no primeiro estudo desta pesquisa, capítulo 2. Nesse sentido, a TCC permitiu observar uma ênfase na medida em detrimento da grandeza como um fenômeno mais amplo, que não se restringe a uma dada grandeza, nem ao ensino fundamental, ao Brasil e nem a determinadas épocas.

Ao percebemos que não se trata de um fenômeno localizado, recorremos à TAD e o interrogamos considerando a dinâmica entre as instituições. Para isso, buscamos elementos explicativos para essa ênfase e observamos que no nível da noosfera (documentos curriculares) e da disciplina (livros didáticos) a ênfase na medida já está presente, o que nos fez avançar um pouco mais na busca de compreender por que isso acontece.

Nessa dinâmica, em que a matemática do ensino fundamental é a instituição em evidência, consideramos as instituições matemática da educação infantil e do ensino médio, etapas que precede e sucede, respectivamente, o ensino fundamental, a noosfera, que impõe um conjunto de saberes a ser ensinado na escola, a matemática acadêmica, a educação matemática e a interface entre essas instituições, cujos representantes ocupam lugar na noosfera, assim como a sociedade, que além de ter representante na noosfera, notabiliza-se pelas práticas sociais realizadas com grandezas.

O estudo ecológico realizado no capítulo 4 revelou a existência de um domínio dedicado ao tema grandezas e medidas, assegurando a abordagem das grandezas na educação básica e, particularmente, na matemática do ensino fundamental brasileiro. Observamos ainda que a noosfera impõe o estudo de grandezas em todos os anos, especialmente das geométricas, cuja razão de existência se ancora em sua forte inserção nas práticas sociais e como meio de ligação entre matemática e ciências e com outros domínios da matemática, com destaque para números e geometria.

Ao modelarmos as práticas realizadas em torno das grandezas, constatamos ênfase na medida, explicitada em tarefas do tipo calcular e do tipo resolver problemas do cotidiano, o que conduz para um modelo epistemológico dominante do conceito de grandeza que traz a medida em primeiro plano. Nesse sentido, conjecturamos que os modelos presentes nos documentos curriculares e nos livros didáticos influenciam na abordagem de grandeza em sala de aula, pois de acordo com Gascón (2001), com quem concordamos, o modelo epistemológico dominante em uma instituição condiciona fortemente a prática docente.

Sob a ótica da TAD, realizamos um estudo epistemológico na busca de compreender por que se enfatiza a medida em detrimento da grandeza na noosfera, na escola e na sociedade. Ao fazer isso, constatamos que em sua concepção, o conceito de grandeza estava fortemente atrelado à dimensão prática, cuja ideia gerou dificuldades em estabelecer uma definição (D'ALEMBERT et al., 1785). Mais tarde, abdicando-se da definição de grandeza, introduziu-se uma estrutura axiomática, que permitiu operar com grandezas sem a necessidade de uma definição (COUTURAT, 1896).

Portanto, do ponto de vista epistemológico, observamos que definir grandeza foi, em certo momento, demasiadamente complexo. Após a introdução de uma estrutura axiomática, foi apresentada uma definição de grandeza ancorada na teoria dos conjuntos que, de certa maneira, também se apoia na estrutura axiomática.

Nesse percurso, as grandezas surgiram no contexto prático e foram, em certo período, o alicerce para a matemática. A partir da construção de uma estrutura matemática que permitiu, por um lado, avançar na compreensão desse saber, por outro, ressignificou esse conceito, enquanto um fenômeno associado a objetos. Nessa reconstrução histórica, observamos também que, apesar do apagamento da perspectiva de grandeza na matemática, a resolução de problemas com grandezas em situações práticas não apenas permaneceu, como avançou em outras instituições, como as técnicas e científicas, e principalmente nas atividades cotidianas, que se dedicam quase sempre em medir, conforme aponta Rouche (1994).

Ao focalizarmos as instituições matemática acadêmica, educação matemática e a interface entre elas, retemos alguns aspectos que têm implicações no refinamento do MER. O primeiro considera a grandeza como um fenômeno associado a objetos e relacionada com as práticas sociais. Em nosso olhar, essa ideia aproxima-se daquela defendida por Freudenthal (1983), quando propôs que os conceitos matemáticos devem servir como ferramentas para organizar fenômenos. Com efeito, concordamos com essa ideia e enxergamos no conceito de grandeza um rico repertório de fenômenos que ele permite organizar, como o fenômeno do espaço ocupado, por exemplo.

O segundo aspecto diz respeito à estrutura matemática e à definição, que embora tenha abdicado da essência de grandeza, foi necessária para que a matemática se desenvolvesse. Nesse sentido, Chevallard e Bosch (2000) destacam que foi somente após um grande acúmulo de resultados que a matemática acadêmica se emancipou da noção de grandeza, mas que na educação básica não pode fazer a mesma economia de uso. Portanto, vemos como necessário para o ensino de grandeza sua filiação ao contexto prático e à ideia de fenômeno associado a objetos.

De certa maneira, em nosso olhar, a ideia do parágrafo anterior está presente em Caraça (1951), para quem as grandezas estão no cerne das atividades cotidianas. Além disso, segundo o autor, as grandezas são a razão principal que levou à criação e ao desenvolvimento dos números. Este é, portanto, o terceiro aspecto, que consiste em estabelecer ligações entre saberes e entre domínios.

Diante do exposto, conjecturamos que o refinamento do MER para as grandezas geométricas da matemática do ensino fundamental no contexto vigente, perpassa por compreender quão difícil foi conceituar grandeza, como esse entrave foi contornado e quais as consequências para o ensino desse saber.

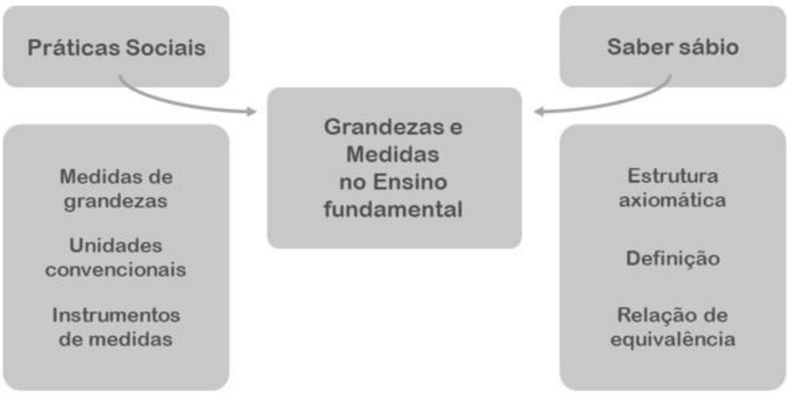
Ao mesmo tempo, entendemos que não se pode perder de vista a dimensão prática social, pois esta permite estabelecer vínculo com a criação do conceito, além de atribuir sentido para o ensino atual. Contudo, deve-se estar sempre atento ao fato de que a economia de uso, ou seja, a concepção de que grandeza é número, feita pela matemática e outras instituições fazem não deve ser tomada como referência para a instituição escolar, pois a apresentação de uma definição, o abandono dos problemas práticos, da perspectiva de fenômeno associado e da dissociação entre grandeza e número se mostrou infrutífera do ponto de vista do ensino e da aprendizagem.

Conjecturamos também que a tipologia de situações, as interrelações entre grandezas e medidas, números e geometria, e entre grandezas e outros domínios devem estar presentes no MER.

Em princípio, nesse modelo, ratificamos a necessidade da existência do domínio das grandezas e medidas, em conformidade com o que já estabelece a noosfera, tendo em vista que os diversos saberes que o integram têm características intrínsecas que requerem um lugar próprio. Além disso, trata-se de um conceito complexo e que foi, em certa época, a base para o desenvolvimento da matemática, conforme evidenciado nos tópicos anteriores. Logo, a inexistência de um domínio, além de fragilizar o ensino e a aprendizagem desses saberes, romperia com o processo histórico da concepção de grandeza.

Assim, pelo exposto, apresentamos um esboço refinado do MER para as grandezas geométricas na matemática do ensino fundamental brasileiro no contexto vigente.

Figura 40 - Grandeza em uma dinâmica institucional



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Organizamos o esboço do MER em diálogo com a escala dos níveis de codeterminação didática, em que a instituição alvo está sob a pedagogia do ensino fundamental e no nível da disciplina matemática. Nessa primeira parte, analisamos o conceito de grandeza em uma dinâmica institucional considerando a relação entre a instituição alvo e o saber sábio e dela com a sociedade.

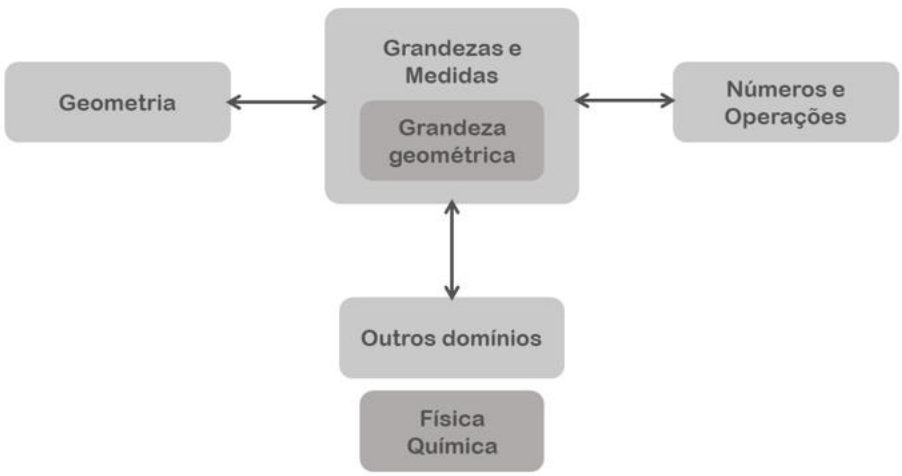
Em se tratando das práticas sociais, observamos de maneira recorrente o uso de medidas (número), de unidades convencionais e de instrumentos de medida, e que por isso esses conceitos devem perpassar o MER. No entanto, o olhar sobre as praxeologias em torno das grandezas na sociedade tem como propósito romper com a negligência atribuída a ela nessa instituição.

Com a instituição saber sábio foi possível estabelecer o alicerce para se trabalhar grandeza, tendo em vista a criação de uma estrutura matemática, que mais tarde levou a uma definição de grandezas como classes de equivalência. Decorre também dessa instituição a compreensão de que grandeza é um conceito complexo e que os resultados que hoje existem foram construídos sob incompreensões e incertezas.

Em síntese, o domínio das grandezas e medidas é nutrido pelas práticas sociais e profissionais, pela matemática e pela educação matemática, com implicações na matemática do ensino fundamental.

No diagrama a seguir, situamos grandeza em uma dinâmica entre domínios. Assim, esse conceito possibilita estabelecer relações com outros domínios da matemática, bem como com o de outras disciplinas e por isso se constitui como uma fonte de ligação entre diferentes saberes.

Figura 41- Grandeza em uma dinâmica entre domínios



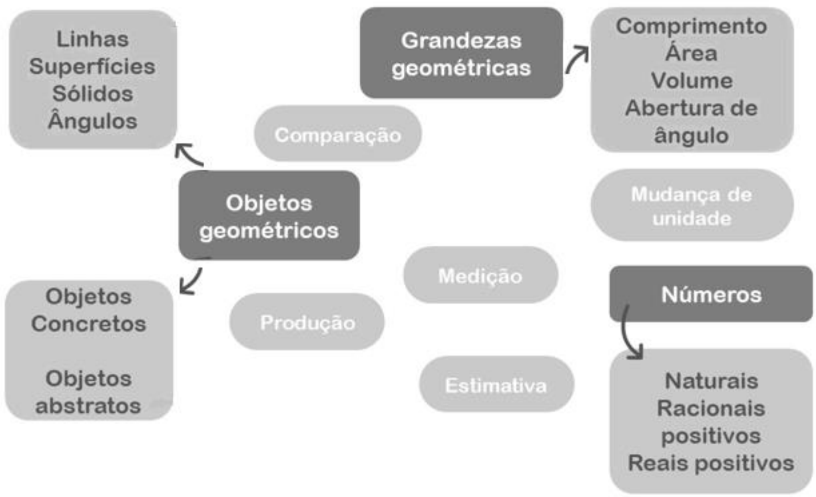
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Nesse nível, ressaltamos o domínio das grandezas e medidas e evidenciamos as interrelações entre ele e outros domínios, especialmente com números e operações e com geometria, este último favorecido por meio das grandezas geométricas. Há ainda a interrelações com outras disciplinas, como física e química, que permitem às grandezas extrapolar no nível da disciplina, o âmbito da matemática, assegurando-lhe ainda mais relevância enquanto objeto de estudo. Portanto, o MER deve colocar em evidência as interrelações por meio das grandezas existentes nos níveis do domínio, da disciplina e da escola.

No nível do setor, em se tratando das grandezas geométricas, organizamos os elementos que entendemos ser necessários estar presentes no MER para a partir dele questionarmos o modelo dominante na instituição alvo.

Nesse modelo, evidenciamos os quadros (DOUADY, 1986) e os elementos que incidem sobre cada um deles e que são importantes no processo de conceitualização. Também organizamos os tipos de situações que entendemos que devem ser vivenciadas ao se estudar uma grandeza geométrica. É por meio dessas situações que podemos questionar no nível do tópico, à luz do MER, se as praxeologias em torno dessas grandezas estão em conformidade com o que se espera delas.

Figura 42 - Grandezas geométricas no nível do setor



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Esse diagrama evidencia, no nível do setor, um conjunto de interrelações que entendemos ser necessárias para abordar grandeza geométrica na escola, em conformidade como o modelo matemático-didático por nós adotado, e sem perder de vista sua dimensão conceitual, que consiste nos tipos de situações, de invariantes e nas representações.

Dessa maneira, evidenciamos a relação entre as grandezas geométricas e seus respectivos entes geométricos, que podem ser representados por meio de objetos concretos e abstratos. Também destacamos os tipos de situações que dão sentido ao conceito, as quais se situam em um dado quadro, bem como na interface entre eles.

Portanto, esses três diagramas organizam o refinamento do MER para as grandezas geométricas, por meio do qual podemos questionar a vida dos objetos do saber imersos no domínio das grandezas e medidas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema dessa pesquisa foi a relação entre grandeza e medida na matemática do ensino fundamental brasileiro, e seu objetivo geral foi investigar as razões pelas quais existe uma ênfase no aspecto numérico em detrimento da abordagem conceitual das grandezas.

A motivação por investigar essa relação se deu a partir da observação pontual da ênfase no numérico na abordagem de determinadas grandezas em livros didáticos de matemática, em sala de aula, na matemática acadêmica e nos usos sociais.

Utilizamos como aportes teóricos a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria Antropológica do Didático, além do modelo didático-matemático desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989) para o conceito de área. Com a TCC foi possível organizar um conjunto de situações que dão sentido a conceitualização de grandezas geométricas e de um conjunto de invariantes operatórios que revelaram dificuldades e erros resistentes por parte de alunos.

A TAD permitiu observar o fenômeno da ênfase no numérico em uma dinâmica institucional e reconstruir o processo de concepção e transposição de grandeza enquanto saber a ser ensinado.

O modelo didático-matemático serviu como um primeiro modelo epistemológico de referência por meio do qual analisamos questões relativas ao ensino e à aprendizagem das grandezas geométricas.

Assim, realizamos uma pesquisa de natureza teórica organizada em três estudos: no primeiro, problematizamos a relação entre grandeza e medida na educação básica, à luz da TCC; no segundo, realizamos uma análise ecológica de grandeza na matemática do ensino fundamental brasileiro; e no terceiro, analisamos, do ponto de vista epistemológico, o conceito de grandeza no saber sábio.

Com o primeiro estudo, constatamos que existe uma ênfase no número em detrimento da grandeza e que essa ênfase perpassa não apenas por uma grandeza em particular, mas por todo o domínio das grandezas e medidas. Verificamos ainda que a ênfase na medida persiste há décadas, se dá em diferentes etapas do ensino básico e que não acontece apenas na sociedade brasileira. Portanto, ficou caracterizado para nós que esse é um fenômeno mais amplo, o que nos levou a formular as seguintes questões de pesquisa:

- *Por que se enfatiza na matemática do ensino fundamental a medida em detrimento da grandeza?*
- *Por que se enfatiza epistemologicamente a medida em detrimento da grandeza?*

- *Quais as consequências dessa ênfase?*

À luz da Teoria dos Campos Conceituais, asseguramos a pertinência de organizar o ensino de comprimento, área e volume por meio de um conjunto de situações que dão sentido a esses conceitos na perspectiva de grandeza. Ao mesmo tempo, constatamos dificuldades e erros persistentes cometidos por estudantes, como consequência da ênfase no numérico: introdução de medidas mesmo quando não era necessário, concepção de que grandeza é um número ou uma fórmula, confusão entre contorno e comprimento, entre superfície e área e entre volume e o sólido, incompreensão da bilinearidade e da trilinearidade de área e volume, respectivamente, e amálgama entre perímetro e área. Com isso, trouxemos respostas para a terceira questão acima descrita, bem como alimentamos o modelo epistemológico de referência provisório.

No segundo estudo realizamos uma análise ecológica do conceito de grandeza no ensino fundamental, por ser a instituição em estudo. Para tanto, elegemos os documentos curriculares de abrangência nacional (PCN e BNCC) e duas coleções de livros didáticos do 1° ao 9° ano. Dessa análise, retemos dois aspectos: de um lado, o *habitat*, o *nicho* e as razões de ser do conceito de grandeza e de outro, a relação entre grandeza e medida no nível da pedagogia.

Em se tratando do primeiro aspecto, constatamos a existência de um domínio para as grandezas e medidas e dadas as imposições no nível da noosfera (cujo produto em foco foi a BNCC), entendemos que a presença desses conceitos na escola está assegurada. Além disso, observamos que as grandezas também estão nos domínios dos números e da geometria, embora sob outra perspectiva, mas com notável relevância. Nesse caso, identificamos o *nicho* das grandezas, que consiste em dar sentido à ampliação dos conjuntos numéricos, romper com a fragmentação dos conteúdos e das disciplinas e ressaltar os usos sociais da matemática na escola.

Do segundo aspecto, constatamos que há uma pluralidade de grandezas a serem abordadas na escola e em todos os anos do ensino fundamental. No entanto, a introdução da medida aparece de maneira precoce, já no 1° ano, e ganha relevo nos anos seguintes, principalmente nos anos finais. Conforme observamos, tanto nos documentos quanto nos livros didáticos, os tipos de tarefas privilegiados consistem em resolver problemas, medir grandezas e calcular grandezas, que, em última análise, levam à produção de uma medida. Com efeito, é esperado que nos anos finais do ensino fundamental, o estudante seja capaz de modelar e resolver problemas envolvendo grandezas. Porém, a introdução precoce das medidas pode comprometer a conceitualização por parte do estudante e provocar os erros e dificuldades acima mencionados. Portanto, defendemos a necessidade e a relevância da medida, mas ao mesmo tempo, entendemos, assim como Douady e Perrin-Glorian (1989), ser necessário que o sujeito compreenda a perspectiva de grandeza antes mesmo de ter meios para medi-la.

Entendendo que a educação infantil e o ensino médio estão no entorno do ensino fundamental, analisamos os documentos curriculares voltados para essas etapas, buscando observar as recomendações para o conceito de grandeza.

Em se tratando da educação infantil, constatamos que as grandezas são referenciadas nos RCNEI e na BNCC por meio de um trabalho intuitivo, com vistas à observação, descrição, classificação, exploração e experimentação de características e propriedades dos objetos. Assim, entendemos que a perspectiva de grandeza nessa etapa de escolarização está em conformidade como modelo epistemológico de referência que adotamos.

No ensino médio, verificamos a inexistência de um domínio para as grandezas e medidas nos PCNEM (BRASIL, 2002 e na BNCC (BRASIL, 2018). No primeiro, os conteúdos relativos às grandezas habitam o eixo geometria, cujo foco é na geometria métrica, ou seja, nas medidas. Assim, a inexistência de um domínio pulveriza a abordagem das grandezas e evidencia a medida. Em ambos os documentos curriculares, destacam-se os usos sociais das grandezas e por isso o ensino deve ser ancorado na resolução de problemas práticos. Dessa maneira, conforme já mencionado, a relação entre grandeza e os usos sociais é uma razão de ser privilegiada na noosfera.

Pelo exposto, constamos, em geral, que a medida ganha relevo já no nível da pedagogia, especialmente na noosfera, o que nos levou ao terceiro estudo, a partir da seguinte questão norteadora por que se enfatiza epistemologicamente a medida em detrimento da grandeza?

Com o terceiro estudo pudemos constatar que, em certa época, as grandezas estiveram no cerne do desenvolvimento da matemática, sendo vista como matemática pura e matemática mista. Assim, os números eram grandezas, mais precisamente números abstratos, existindo também os números concretos.

Outro aspecto para nós relevante foi a dificuldade em definir grandeza, que perdurou por mais de um século, para muitos matemáticos entre XVIII e XIX, mostrando se tratar de um conceito complexo. Em princípio, essas definições buscaram preservar a ideia de grandeza como um fenômeno e vinculado a contextos práticos, mas segundo Couturat (1896), mostraram-se infrutíferas por sempre apresentarem uma contradição interna. Esse insucesso foi superado somente após a criação de uma estrutura matemática que abdicou de uma definição e recorreu a princípio da lógica matemática.

Já no século XX foi possível estabelecer uma definição de grandeza ancorada no conceito de função, como sendo uma classe de equivalência. Nesse percurso, com o amadurecimento da matemática, a perspectiva de grandeza foi abandonada, dando lugar à medida. Por um lado, esse desprendimento da noção de grandeza e o trabalho apenas sobre os números fez com que a matemática se desenvolvesse, mas por outro, fez emergir a ideia de que grandeza é número, ou seja, levou ao apagamento da ideia de número concreto.

Nesse sentido, observamos na educação matemática, que ao abdicar da perspectiva de grandeza, a aprendizagem desse conceito se mostrou insatisfatória e de difícil compreensão por parte dos alunos e por isso defendemos a dissociação entre grandeza e medida.

Assim, propusemos um modelo epistemológico de referência provisório para o domínio das grandezas geométricas no ensino fundamental por meio do qual se pode questionar o modelo dominante existente nessa instituição.

Diante do exposto, anunciamos nossa tese:

O Modelo Epistemológico de Referência para o domínio das grandezas e medidas na matemática do ensino fundamental brasileiro, ancorado em modelos matemáticos robustos produzidos na interface entre a matemática, a educação matemática e a didática da matemática, deve assegurar tanto a exploração das conexões entre grandezas e números, essencial para práticas sociais e para a atribuição de sentido aos conjuntos numéricos, como um lugar de relevo para o conceito de grandeza, fundamental para a conexão com a geometria e com a física.

Como encaminhamentos, destacamos para o (a) leitor (a) que o conceito de grandeza se provou ser complexo e que embora existam razões que legitimam a ênfase no numérico, a perspectiva de grandeza se faz necessária, tendo em vista a prevalência de erros e dificuldades quando a medida é excessivamente enfatizada.

Para pesquisas futuras, abrimos caminho para estudos que possam ampliar o modelo epistemológico de referência aqui proposto, bem como construir um modelo praxeológico de referência para o domínio das grandezas e medidas.

REFERÊNCIAS

ANWANDTER-CUELLAR, N. **Etude de conceptions d'élèves à propos du conce pt de volume**. 2008. 147 f. (Mémoire de master 2 HPDS) (Histoire Philosophieet Didactique des Sciences)–UniversitéMontpellier 2, Montpellier, 2008.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático.** 2009. 290 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 20º9.

ARAÚJO, J. C. DE. **Como os alunos de 8° ano lidam com situações relativas à área de paralelogramos? : um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**. 2018. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

ARAÚJO, J. C. C. **Tempo, desafio conceitual e didático: um estudo exploratório sobre orientações dos documentos curriculares e atividades de livros didáticos para alfabetização matemática**. 2013. 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

ARTAUD, M. Introduction à L'Aproche écologique Du didactique, L'écologie dês organization mathématiques ET didactique**. Actes de La neuvème École d'éte de didactique dês Mathematiques**, Hougate, Bailleul, p.101-139, 1997.

ASSUD., T. De l'Écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 16, n° 1, pp. 47-70, 1996

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. 358 f. Thèse de doctorat (Doctorat en Didactique des Mahtématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARBOSA, P. R. **Efeitos de Visualização em Atividades de Comparação de Comprimentos de Linhas Abertas**. 2007. 316 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife,, 2007.

BARBOSA, P. R. **Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental**. 2002. 214 f. (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

BARROS, A. L. D. S. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do ensino fundamental**. 2006. 213 f. (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

BARROS, J. S. DE. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. 2002. 146 f. (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no**

ensino fundamental. 1. ed. Natal: SBHMat, 2002.
BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Zetetike, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364–387, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Congresso Nacional. Lei nº 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Publicada no DOU de 23/12/1996. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf>. Acesso em: 5 mar. 2017.

BRASIL. Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil. Brasília: MEC/SEF,1998b.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF.: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2002.
BRASIL. Guia de livros didáticos : PNLD 2012 : Matemática. Brasília, DF: MEC, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017.

BRITO, A. F. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do ensino fundamental**. 2003. 196 f. (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

BOSCH; M. GASCÓN, J. Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. In: ***ICMI Bulletin****, n°. 58, 2006.*

CARAÇA, B. DE J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1° ed. Lisboa: Lisboa, 1951.

CHEVALLARD, Y. Pourquoi la transposition didactique? **Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble**. In : Actes de l'année, pp. 167-194, 1981- 1982. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf >. Acesso em: 15 maio 2022.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. 2. ed. Grenoble: AIQUE, 1991.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Theorie Anthropologique du Didactique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, v. 19/2, p. 221–265, 1999.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Les grandeurs en mathématiques au collège: Partie I. Une Atlantide oubliée. **Petit x**, v. 55, p. 5–32, 2000.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. **Petit x**, v. 59, p. 43–76, 2002.

CHEVALLARD, Y. Uma ruptura epistemológica em ato. In: **A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos**. Curitiba, PR: CRV, 2018. p. 21-29.

CHEVALLARD, Y. Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. **Actes du Séminaire Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis**, p. 190-200, 1994. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf >. Acesso em: 15 maio 2022.

CHEVALLARD, Y. On didactic transposition theory: some introductory notes. **Communication à l'International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education (Bratislava, 3-7 août 1988)**. p. 51-62, 1989. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/On_Didactic_Transposition_Theory.pdf >. Acesso em: 15 maio. 2022.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. 3. Écologie & regulation. **La Pensée Sauvage, Grenoble**, p. 41-56, 2002. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf >. Acesso em: 15 maio 2022.

CHEVALLARD, Y. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. **APMEP**, Paris, p. 239-263, 2004. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf>. Acesso em: 14 maio. 2022.

CHEVALLARD, Y.; ARTAUD, M. Fondements et méthodes de ladidactique desmathématiques. **Enseignement et formation en mathématiques. Parcours (Didactique (2° année)**, 2015-2016. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DDM_-_UE_35_-_YC_-_Lecons_2015-2016.pdf>. Acesso em: 14 maio. 2022.
COUTURAT, L. **De l'infini mathématique**. Nouveau tirage. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard 9, rue de médicis, 1896.

D'ALEMBERT, J. L. R. et al. **Encyclopédie Methodique**. Réédition du bicentenaire: Paris, 1784.

D'ALEMBERT, J. L. R. et al. **Encyclopédie méthodique. Mathématiques**, Réédition du bicentenaire: Paris, 1784.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 5–31, 1986.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères-IREM**, v. 6, p. 132–158, 1992a.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathematics a l'enseignement. **Reperes,**

IREM, v. 6, 1992b.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M.-J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387–424, 1 nov. 1989.

FERIGOLO, C. **Contribuições da acentuação do pensamento no desenvolvimento e aprimoramento da habilidade em medir comprimentos e superfícies**. 2007. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), PUCRS, Porto Alegre, 2007.

FERREIRA, L. F. D. **A construção doconceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental: estudos sob a ótica daTeoria dos Campos Conceituais**. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FERREIRA, L. F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro**. 2018. 386 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**. 2013. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

FREITAS, M. V. C. **Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do ensino médio**. 2015. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

FREUDENTHAL, H. As an Example: Length. In: **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 1-27, 1983.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Relime**, Ciudad de México , v. 14, n. 2, p. 203-231, jul. 2011.

HART, K.; BOOTH, L. Which Comes First - Length, Area, or Volume? **The Arithmetic Teacher**, v. 31, n. 9, p. 16–27, 1984.

HART, K. Hierarchies in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 205–218, maio 1981.

KOSPENTARIS, G.; SPYROU, P.; LAPPAS, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. **Educational Studies in Mathematics**, v. 77, n. 1, p. 105–127, 2011.

LEITE, M. S. **Contribuições de Basil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar**. 2004, 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

LICERA, R., GASCÓN, J., BOSCH, M. Las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico de los números reales. **Contextos de Educación**, n° 26 (19): 13-26, 2019.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. 4° ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MORAIS, L. B. DE. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio**. 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, 2013.

MORAIS, L. B. DE; BELLEMAIN, P. M. B. Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de matemática para as séries finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. In: **XVIII Anais - Congresso de Iniciação Científica - CONIC** - UFPE, 2010.

MOREIRA, P.; COMITI, C. Difficultes rencontrées par des eleves de cinquieme en ce qui concerne la dissociation aire/perimetre pour des rectangles. **Petit X**, v. 34, n. 34, p. 1993–1994, 1994.

OLIVEIRA, G. R. F. DE. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume**. 2007. 169 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

PASSELAIGUE, D.; MUNIER, V. Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. **Educational Studies in Mathematics**, v. 89, n. 3, p. 307–336, 2015.

PERNAMBUCO. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. Juiz De Fora, MG: CAEd - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.

ROUCHE, N. Qu'est ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. **Repères-** IREM, N°15. p. 25-36, 1994.

SANTOS, V. A. **Comprimento e perímetro em livros didáticos de matemática do ensino fundamental: uma análise sob a ótica da teoria antropológica do didático.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, J. V. G. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a ótica Da Teoria Antropológica do Didático**. 2011. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

TELES, R. A. DE M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas**. 2007. 297 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

VERGNAUD, G. et al. Une experience didactique sur le concept de volume en classe de cinquieme (12-13 ans). **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 1, p. 71–120, 1983a.

VERGNAUD, G. et al. Didactique et acquisition du concept de volume. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 1, p. 132, 1983b.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 2,3, p. 133–170, 1991.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. **Human Development**, v. 52, n. 2, p. 83–94, 2009.

WHITNEY, H. The Mathematics of Physical Quantities Part I: Mathematical models for measurement. **The American Mathematical Monthly**, v. 75, n. 2, p. 115–138, 5 fev. 1968a.

WHITNEY, H. The Mathematics of Physical Quantities. **The American Mathematical Monthly**, v. 75, n. 3, p. 227–256, 5 mar. 1968b.

ANEXO A – CONCEPÇÃO DE MATEMÁTICA NA ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE

ENCYCLOPÉDIE

MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, *l'Abbé* BOSSUT, DE LA LANDE,
le Marquis de CONDORCET, &c.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, Libraire, hôtel de Thou, rue des Poitevins;
A LIÈGE,
Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXIV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE,

PAR M. L'ABBÉ BOSSUT.

LE NOM SEUL des Mathématiques, qui, dans son étymologie, veut dire *Instruction*, *Science*, peint d'une manière juste & précise l'idée noble qu'on doit s'en former. En effet, elles ne sont qu'un enchaînement de principes, de raisonnemens & de conclusions, que la certitude & l'évidence accompagnent toujours : caractère propre des connoissances scientifiques.

On sait que les Mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple, les distances, les surfaces, les vitesses, *&c.* Elles se divisent en *Mathématiques pures* & *Mathématiques mixtes*, autrement appellées *Sciences Physico-Mathématiques*.

Les Mathématiques pures considèrent la grandeur d'une manière simple, générale & abstraite : & par-là elles ont le précieux avantage d'être fondées sur les notions primordiales de la quantité. Cette classe comprend, 1.° l'Arithmétique ou l'Art de compter. 2.° La Géométrie, qui apprend à mesurer l'étendue. 3.° L'analyse, science des grandeurs en général. 4.° La Géométrie mixte, combinaison de la Géométrie ordinaire & de l'Analyse.

Les Mathématiques mixtes empruntent de la Physique une ou plusieurs expériences incontestables, ou bien supposent dans les corps une qualité principale & nécessaire : ensuite, par des raisonnemens méthodiques & démonstratifs, elles tirent du principe établi, des conclusions évidentes & certaines, comme celles que les Mathématiques pures tirent immédiatement des axiomes & des définitions. A cette seconde classe appartiennent, 1.° la Méchanique, science de l'équilibre & du mouvement des corps solides. 2.° L'Hydrodynamique, qui considère l'équilibre & le mouvement des corps fluides. 3.° L'Acoustique ou la Théorie du son. 4.° L'Optique ou la Théorie du mouvement de la lumière. 5.° L'Astronomie, science du mouvement des corps célestes.

J'ai rangé ici les différentes parties des Mathématiques dans l'ordre qui me paroît le plus propre à montrer d'un coup-d'œil leur enchaînement réciproque dans l'état où elles se trouvent aujourd'hui. Mais cet ordre n'est pas tout-à-fait conforme à leur développement historique, parce que le hasard & des circonstances particulières ayant souvent donné lieu à des découvertes, la filiation naturelle n'a pu être constamment observée.

Il est vraisemblable que la première origine des Mathématiques est presque aussi ancienne que celle des sociétés & des loix. Les hommes s'étant rassemblés, & chacun étant obligé de pourvoir à sa subsistance & à sa conservation, sans pouvoir attenter à la possession d'autrui, le besoin industrieux trouva sans doute bientôt les pratiques, au moins informes, de quelques arts de première nécessité, tels que ceux de bâtir des cabanes, de régler l'ordre des saisons, de mesurer les champs, *&c.* Or toutes ces connoissances appartiennent, dans le fonds, à la Méchanique, à l'Astronomie, à la Géométrie, *&c.* Mais elles ne furent d'abord que le fruit de l'expérience ou d'une routine aveugle. L'assiduïté que demandoient les travaux de la campagne ne permettoit pas aux hommes de s'élever à des idées générales & réfléchies. Le cercle de leurs besoins bornoit celui de leurs pensées. Insensiblement l'inégalité des biens s'établit parmi eux. Quelques-uns ayant acquis une espèce de superflu, se livrèrent à l'oisiveté, plus conforme à la foiblesse de notre nature, qu'un travail pénible & souvent destructeur. Alors le tourment de l'ennui, attaché à l'inaction, vint porter le mouvement & l'inquiétude dans l'esprit humain, exciter sa curiosité, aggrandir la sphère de ses idées, & donner l'impulsion aux arts & aux sciences. A ce puissant mobile, se joignit l'aiguillon des honneurs & des récompenses accordés dans tous les pays aux hommes qui se distinguoient par leurs talens. Le chant, aussi ancien que le monde, & une poésie grossière, presque de même date, prirent une forme plus variée & moins barbare. Il y eut des Orateurs, des Poëtes, des Peintres, des Architectes & des Sculpteurs. On observa les phénomènes de la nature, & on voulut en connoître les causes. La Géométrie, bornée d'abord à la mesure des champs, recula ses limites, & s'étendit

ANEXO B – DEFINIÇÃO DO VERBETE *GRANDEZA* NA ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE

ENCYCLOPÉDIE
MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, *l'Abbé* BOSSUT, DE LA LANDE,
le Marquis de CONDORCET, CHARLES, &c.

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, Libraire, Hôtel de Thou, rue des Poitevins;
A LIÈGE,
Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

ſe ſert de ce mot pour marquer l'action de *graduer* ou de diviſer une grandeur quelconque en degrés. *Voyez* DEGRÉ & GRADUER.

GRADUER, v. act. (*Mathémat. prat.*) C'eſt diviſer en degrés un inſtrument de Mathématique, de Phyſique, *&c.* Ce mot *degré* ſignifie dans ces inſtrumens des *parties égales* ou *inégales*, mais plus ordinairement *égales*, qui ſont marquées ou ſéparées par de petites lignes; comme les degrés d'un quart de cercle, les degrés d'un thermomètre, les degrés d'une échelle quelconque; lorſqu'il eſt queſtion d'inſtrument de Mathématique, on ſe ſert plus du mot *diviſer* que du mot *graduer*; ainſi on dit: *ce quart de cercle eſt mal diviſé: la diviſion n'en eſt pas exacte. V.* INSTRUMENS. (*O*)

GRAIS, c'eſt ce que les *Miroitiers-Lunetiers* appellent ordinairement du nom de *meule*; ils n'emploient communément que celles de Lorraine, qui ſont également bonnes pour leurs ouvrages, quoiqu'inférieures à celles d'Angleterre: c'eſt ſur ce *grais* qu'ils dreſſent & arrondiſſent les bords des verres de leurs lunettes, pour les placer dans la rainure des châſſes.

GRAPHIQUE, adj. (*Aſtron.*) *opération graphique*, celle qui conſiſte à réſoudre des problèmes d'Aſtronomie ſphérique par le moyen d'une ou de pluſieurs figures tracées en grand ſur un papier; ces opérations ne donnent pas une ſolution très-exacte, mais elles donnent la ſolution la plus prompte, & fourniſſent une première approximation commode; on peut enſuite la pouſſer plus loin en faiſant le calcul. Ainſi, on emploie les opérations *graphiques* pour avoir d'abord une ſolution ébauchée du problème des comètes, de celui des éclipſes, comme nous l'avons expliqué au *mot* ECLIPSE. On peut en voir des exemples dans mon *Aſtronomie.* L'Abbé de la Caille a donné une manière commode pour trouver les longitudes en mer par une opération graphique. *Nouveau Traité de navigation, Bouguer & la Caille*, 1769. (*D. L.*)

GRANDEUR, ſ. f. (*Mathém.*) Voilà un de ces mots dont tout le monde croit avoir une idée nette, & qu'il eſt pourtant aſſez difficile de bien définir. Ne ſeroit-ce pas parce que l'idée que ce mot renferme, eſt plus ſimple que les idées par leſquelles on peut entreprendre de l'expliquer? *Voyez* DÉFINITION & ÉLÉMENS DES SCIENCES. Quoi qu'il en ſoit, les Mathématiciens définiſſent ordinairement la *grandeur*, ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution; d'après cette notion, l'*infini* ne ſeroit pas plus une *grandeur* que le zéro, puiſque l'infini n'eſt pas plus ſuſceptible d'augmentation que le zéro ne l'eſt de diminution; auſſi pluſieurs mathématiciens regardent-ils le zéro d'une part & l'infini de l'autre, non comme des *grandeurs*, mais comme la limite des *grandeurs*; l'une pour la diminution, l'autre pour l'augmentation. *Voyez* LIMITE. On eſt ſans doute le maître de s'exprimer ainſi, & il ne faut point diſputer ſur les mots; mais il eſt contre l'uſage ordinaire de dire que l'*infini n'eſt point une grandeur*, puiſqu'on dit *une grandeur infinie.* Ainſi, il ſemble qu'on doit chercher une définition de la *grandeur* plus analogue aux notions communes. De plus, ſuivant la définition qu'on vient d'apporter, on devroit appeller *grandeur* tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution; or la lumiere eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution; cependant on s'exprimeroit fort improprement en regardant la lumiere comme une *grandeur.*

D'autres changent un peu la définition précédente, en ſubſtituant *ou* au lieu de *&*, & ils définiſſent la *grandeur*, ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation *ou* de diminution. Suivant cette définition dans laquelle *ou* eſt disjonctif, zéro ſeroit une *grandeur;* car s'il n'eſt pas ſuſceptible de diminution, il l'eſt d'augmentation; cette définition eſt donc encore moins bonne que la précédente.

On peut, ce me ſemble, définir aſſez bien la *grandeur*, ce qui eſt compoſé de parties. Il y a deux ſortes de *grandeurs*, la *grandeur* concrète & la *grandeur* abſtraite. *Voyez* CONCRET & ABSTRAIT. La *grandeur* abſtraite eſt celle dont la notion ne déſigne aucun ſujet particulier. Elle n'eſt autre choſe que les nombres, qu'on appelle auſſi *grandeurs numériques. Voyez* NOMBRE. Ainſi, le nombre 3 eſt une quantité abſtraite, parce qu'il ne déſigne pas plus 3 piés que 3 heures, *&c.*

La *grandeur* concrète eſt celle dont la notion renferme un ſujet particulier. Elle peut être compoſée, ou de parties co-exiſtantes, ou de parties ſucceſſives; & ſous cette idée elle renferme deux eſpèces, l'*étendue* & le *tems. Voyez* ETENDUE & TEMS.

Il n'y a proprement que ces deux eſpèces de *grandeurs;* toutes les autres s'y rapportent directement ou indirectement. L'étendue eſt une *grandeur* dont les parties exiſtent en même tems; le tems une *grandeur* dont les parties exiſtent l'une après l'autre.

La *grandeur* s'appelle auſſi *quantité*, *voyez* QUANTITÉ; & ſous cette idée, on peut dire que la *grandeur* abſtraite répond à la quantité *diſcrette*, & la *grandeur* concrète à la quantité *continue. Voyez* DISCRET & CONTINU.

La *grandeur* & ſes propriétés ſont l'objet des Mathématiques, ce qui ſera expliqué plus au long à l'*article* MATHÉMATIQUES.

Sur la *grandeur* apparente des objets, *voyez les mots* OPTIQUE & VISION. (*O*)

GRAPHOMETRE, ſ. m. (*Géom. prat.*) nom que pluſieurs auteurs donnent à un inſtrument de mathématiques, appelé plus communément demi-cercle.

Ce mot vient de deux mots grecs, γράφω, *j'écris*, & μέτρον, *meſure;* apparemment parce que les diviſions de degrés qui ſont ſur cet inſtrument donnent, pour ainſi dire, par écrit la meſure des angles qu'on obſerve par ſon moyen.