

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO

O USO DA TEORIA DA DECISÃO COMO  
FERRAMENTA DE APOIO PARA AS DECISÕES  
MÉDICAS: UM ESTUDO DE CASO SOBRE  
RESSONÂNCIA MAGNÉTICA FUNCIONAL (RMf)

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UFPE  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
POR

GERALDO ANDRADE DE OLIVEIRA

Orientador: Fernando Menezes Campello de Souza, PhD.

RECIFE, 26 de Agosto de 2010

**O48u**

**Oliveira, Geraldo Andrade de.**

O uso da teoria da decisão como ferramenta de apoio para as decisões médicas: um estudo de caso sobre ressonância magnética funcional (RMf) / Geraldo Andrade de Oliveira. - Recife: O Autor, 2010.  
vii, 81 folhas; il., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2010.

Orientador: Prof. Fernando Menezes Campello de Souza.  
Inclui Referência.

**1. Engenharia Produção. 2. Teoria da Decisão. 3. Modelagem Matemática. 3. Otimização e educação de Preferências. I. Título.**

658.5 CDD (22. ed.)

UFPE/BCTG/2010-197



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA**  
**DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE**  
**MESTRADO ACADÊMICO DE**

**GERALDO ANDRADE DE OLIVEIRA**

**“USO DE TEORIA DA DECISÃO COMO FERRAMENTA DE APOIO**  
**PARA AS DECISÕES MÉDICAS: UM ESTUDO DE CASO SOBRE**  
**RESSONÂNCIA MAGNÉTICA FUNCIONAL (RMf)”**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PESQUISA OPERACIONAL**

A comissão examinadora, composta pelos professores abaixo, sob a presidência do(a) primeiro(a), considera o candidato **GERALDO ANDRADE DE OLIVEIRA** **APROVADO.**

Recife, 26 de agosto de 2010.

Prof. FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, PhD (UFPE)

Profª. DANIELLE COSTA MORAIS, Doutor (UFPE)

Profª. PATRÍCIA SILVA LESSA, Doutor (UFPE)

*“A tomada de decisões médicas é uma aposta num jogo de azar; não há como evitar isso”* **Dr. Anne M. Stiggelbout**

*“Dedico esta dissertação ao meu avô **José Lumba de Oliveira**, in memoriam... .”*

# AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de registrar, pela segunda vez, minha gratidão ao meu orientador, o Professor Fernando Menezes Campello de Souza, por ter acreditado no meu potencial e aceitado me orientar, mesmo sabendo que as circunstâncias associadas a mim incomuns, partilhando comigo uma amostra de seu inegável e imenso conhecimento e experiência, além de ser um profissional exemplar para nossa Comunidade Acadêmica. Muito obrigado pelo apoio dado em todas as minhas dificuldades encontradas.

Agradeço imensamente aos meus pais, Geraldo Francisco de Andrade e Maria Zemilda Lumba de Oliveira Andrade, e demais familiares, por todo o apoio e incentivo dados durante todos os anos de minha vida acadêmica, sempre contribuindo de forma positiva à minha formação e educação. À minha esposa, em especial, Elen, que é uma pessoa de valor inestimável para mim, mantendo minha paz e harmonia interior sempre em ordem, com amor, apoio diário, paciência e estímulo na melhor forma do mundo. Sinto-me amplamente privilegiado por ter encontrado alguém como Elen em minha vida.

Agradeço também aos professores do PPGEP e DES da UFPE, em especial à Professora Patrícia Silva Lessa, por ter identificado o problema de decisão que gerou essa dissertação e por ter intermediado junto aos grupos de pesquisa de São Paulo. Sem o acompanhamento e empenho da Professora Patrícia, este trabalho não teria tamanha qualidade.

Também agradeço, da forma mais sincera possível, ao colega de estudos e amigo Luiz André Nadler Lins, que contribuiu, com sua formação em Medicina e Mestrado no PPGEP, de forma substancial para me fazer entender o raciocínio médico e os requisitos para elaborar a modelagem do problema em uma linguagem de fácil compreensão para os profissionais que se utilizarão da ferramenta formulada neste trabalho.

Não poderia deixar de destacar o apoio do amigo Cassiano Henrique, que com seu domínio do Latex, me auxiliou substancialmente nas revisões e formatações necessárias a este trabalho.

Aos meus amigos de pós-graduação que muito colaboraram com estudos e interessantes discussões, saudável convivência, incentivos e parcerias:

André Leite, Thiago Magalhães, Jonas, Daniel Simões, Márcio Lima, e todos os outros com quem pude ter o prazer de trocar idéias, discutir exercícios e até me divertir em momentos entre aulas, tornando o dia-a-dia extremamente prazeroso.

# RESUMO

Expõe-se procedimentos necessários a aplicação da Teoria da Decisão através da modelagem de um problema associado à qualidade da imagem nos Exames de Ressonância Magnética Funcional - RMf. Inicia-se a modelagem com variáveis dicotômicas e em seguida é solucionado um problema real, com base nas necessidades levantadas por grupos de pesquisa de RMf em São Paulo. A modelagem inclui o estabelecimento de protocolos de educação da função utilidade, e a estruturação do problema à luz da teoria da decisão. A educação da função consequência é feita junto a especialistas com auxílio de uma distribuição binomial. A educação da função utilidade, foi feita através de função matemática desenvolvida com auxílio dos especialistas, utilizando seis escalas, convertendo-as em uma escala única através do método das escalas superpostas. O modelo proposto apresenta como resposta se o médico deve aceitar ou rejeitar o exame de RMf, com base em parâmetros pré-definidos acerca da qualidade do exame

Palavras Chaves: Teoria da Decisão, Modelagem Matemática, Otimização e Educação de Preferências.

# ABSTRACT

This paper shows the necessary procedures to apply the Decision Theory through modeling a problem associated to Image Quality of MRI. Starting the modeling with dichotomus variables, a real problem is solved later on, based on the needs expressed by a Research Group of MRI from São Paulo. The modeling includes the establishment of utility function's education protocols and the problem's framing under the light of Decision Theory. The consequence function's education is worked with specialized professionals using binominal distribution. The utility function's education is done using a Mathematical Function developed with specialized professionals' help by converting six scales into a single one using the overlaid scale method. The answer given by the proposed method is the Medical Doctor's Acceptance or Rejection of the MRI results, based on pre-defined quality parameters.

**Keywords:** decision theory, mathematical modeling, optimization, preferences education.

# Sumário

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>iv</b>
<b>RESUMO</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Decisões em Medicina . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.2.1 Objetivo Geral . . . . .	3
1.2.2 Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>2 Base Conceitual</b>	<b>5</b>
2.1 A Incerteza . . . . .	5
2.2 Teoria da Decisão . . . . .	10
2.3 Revisão da Literatura . . . . .	12
2.3.1 A Educação da Função Utilidade . . . . .	14
<b>3 O Problema</b>	<b>16</b>
3.1 Falhas do Raciocínio Humano . . . . .	16
3.2 Processo de Tomada de Decisão em Medicina . . . . .	17
3.2.1 Aplicações da Modelagem Matemática na Medicina . . . . .	17
<b>4 Revisão Bibliográfica sobre a Ressonância Magnética Funcional (RMf)</b>	<b>18</b>
4.1 A Ressonância Magnética Nuclear(RMN) . . . . .	18

4.1.1	Física da RMN . . . . .	18
4.1.2	Spin e o momento magnético . . . . .	19
4.1.3	Magnetização do tecido . . . . .	20
4.1.4	Aplicação do campo de radiofrequência ( $B_1$ ) . . . . .	21
4.1.5	Sinal de indução livre . . . . .	22
4.1.6	Processos de relaxação: longitudinal e transversal . . . . .	23
4.1.7	Ecos de spins e Sequências de pulso spin eco ou eco de spins . . . . .	25
4.1.8	Formação da imagem . . . . .	26
4.1.9	Sequências de pulso . . . . .	27
4.1.10	Imagem ecoplanar . . . . .	29
4.2	A Ressonância Magnética Funcional(RMf) . . . . .	31
4.2.1	Efeito BOLD e o sinal de RMf . . . . .	33
4.2.2	Função de resposta hemodinâmica . . . . .	34
4.2.3	Paradigmas . . . . .	35
4.2.4	Análise das imagens . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Estruturação Matemática do Problema</b>	<b>38</b>
5.1	Modelagem Inicial: Utilizando variáveis dicotômicas . . . . .	38
5.1.1	Conjunto dos <i>Payoffs</i> . . . . .	38
5.1.2	Conjunto dos Estados da Natureza . . . . .	41
5.1.3	Conjunto das Ações . . . . .	42
5.1.4	Conjunto das Observações . . . . .	43
5.1.5	Escolha da Decisão Ótima com base na regra ótima de decisão . . . . .	44
5.1.6	Função Consequência . . . . .	44
5.1.7	Função de Verossimilhança . . . . .	47
5.1.8	Distribuição <i>a Priori</i> . . . . .	49
5.1.9	Função Utilidade . . . . .	50
5.1.10	As Regras de Decisão . . . . .	52
5.2	Modelagem de um problema Real: Utilizando variáveis indicadas pelo grupo de pesquisa em RMf de São Paulo . . . . .	55
5.2.1	Conjunto dos <i>Payoffs</i> . . . . .	55

5.2.2	Conjunto dos Estados da Natureza . . . . .	59
5.2.3	Conjunto das Ações . . . . .	59
5.2.4	Conjunto das Observações . . . . .	60
5.2.5	Escolha da Decisão Ótima com base na regra ótima de decisão . . .	61
5.2.6	Função Consequência . . . . .	62
5.2.7	Função de Verossimilhança . . . . .	65
5.2.8	Distribuição <i>a Priori</i> . . . . .	67
5.2.9	Função Utilidade . . . . .	68
5.2.10	As Regras de Decisão . . . . .	72
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>75</b>
6.1	CONCLUSÕES . . . . .	75
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	76
	<b>References</b>	<b>77</b>

## Lista de Figuras

4.1	O proton de hidrogênio pode ser visto como uma pequena esfera (1), que possui um movimento de giro, ou spin, em torno do seu proprio eixo (2); por ser uma partícula carregada positivamente (3), ira gerar um campo magnético proprio ao seu redor (4), comportando-se como um pequeno dipolo magnético (4) ou como um ímã (5), com um momento magnético associado . . . . .	20
4.2	Pulsos de RF e sua nomenclatura. O pulso de 90 graus é chamado de pulso de excitação, o de 180 graus de pulso de inversão e o pulso a pode assumir qualquer valor. . . . .	22
4.3	Sinal de Indução Livre (SIL) gerado pelo retorno da magnetização para o alinhamento após a aplicação de um pulso de RF de 90 graus . . . . .	23
4.4	Retorno do vetor magnetização ao equilíbrio . . . . .	24
4.5	Imagem turbo spin eco ponderada em T2, mostrando na imagem ampliada a resolução de contraste obtida devido as diferenças nos tempos T2 entre os tecidos envolvidos. . . . .	25
4.6	Sequência de pulso spin eco. Pulso de 90 graus e aplicação no tempo (TE/2) do pulso de RF de 180 graus. . . . .	26
4.7	Efeito de aplicação de um gradiente de campo magnético na direção do eixo z com amplitude de 45 mT/m. As alterações na frequência de precessão dentro do volume de interesse se modificam de acordo com a posição ao longo do eixo z. . . . .	27

4.8	Diagrama simplificado da sequência de pulso spin eco mostrando o acionamento dos gradientes de seleção de corte (GSC), codificação de fase (GCF) e codificação de frequência ou de leitura (GL). Sempre que um pulso de RF é transmitido ocorre o acionamento de um gradiente de seleção de corte.	28
4.9	Diagrama simplificado da sequência de pulso spin eco mostrando o acionamento dos gradientes de seleção de corte (GSC), codificação de fase (GCF) e codificação de frequência ou de leitura (GL). Sempre que um pulso de RF é transmitido ocorre o acionamento de um gradiente de seleção de corte.	29
4.10	Diagrama simplificado de uma sequência de pulso EPI-SE . . . . .	30
4.11	Função de resposta hemodinâmica (FRH) com a divisão em sete fases. . . .	34
4.12	Resumo da cadeia de eventos que gera a alteração local de sinal nas imagens de RM . . . . .	35
4.13	Efeito da escolha do limiar estatístico para visualização do mapa de ativação de tarefa motora de movimentação dos dedos da mão direita sobreposto na imagem anatômica ponderada em T1. As imagens foram usadas para o planejamento neurocirúrgico do tumor localizado no lado esquerdo do cérebro. . . . .	37
5.1	Distribuição Gráfica 01 Função Consequência . . . . .	45
5.2	Distribuição Gráfica 02 Função Consequência . . . . .	46
5.3	Distribuição Gráfica 03 Função Consequência . . . . .	46
5.4	Distribuição Gráfica 04 Função Consequência . . . . .	46
5.5	Distribuição Gráfica 01 Função Consequência . . . . .	64
5.6	Distribuição Gráfica 02 Função Consequência . . . . .	64
5.7	Distribuição Gráfica 03 Função Consequência . . . . .	64
5.8	Distribuição Gráfica 04 Função Consequência . . . . .	64

## Lista de Tabelas

4.1	Tempos de relaxação T1 e T2 aproximados para diversos tecidos do corpo humano a 1,5 T . . . . .	24
4.2	Tempos de ponderação na imagem em sequências SE . . . . .	28
5.1	Representação ordenada dos payoffs do problema - Problema com Variáveis Dicotômicas . . . . .	41
5.2	Função Consequência com Variáveis Dicotômicas . . . . .	45
5.3	Função de Verossimilhança com Variáveis Dicotômicas . . . . .	48
5.4	Função de Distribuição a Priori . . . . .	49
5.5	Divisão do questionário em 03 escalas, para facilitar a educação . . . . .	50
5.6	Função Utilidade - Variáveis Dicotômicas . . . . .	52
5.7	Regras de Decisão Otimizadas - Variáveis Dicotômicas . . . . .	54
5.8	Ordenamento de <i>Payoffs</i> - Variáveis Multinível . . . . .	58
5.9	Função Consequência - Variáveis Multinível . . . . .	63
5.10	Função de Verossimilhança - $x_1$ à $x_{210}$ . . . . .	66
5.11	Função de Verossimilhança - $x_{211}$ à $x_{405}$ . . . . .	67
5.12	Função de Distribuição a Priori . . . . .	68
5.13	Divisão do Questionário em 06 escalas para facilitar a educação . . . . .	69
5.14	Função Utilidade - Variáveis Multinível . . . . .	71
5.15	Regras Decisão Otimizadas - $x_1$ à $x_{210}$ . . . . .	73
5.16	Regras Decisão Otimizadas - $x_{211}$ à $x_{405}$ . . . . .	74

# 1 Introdução

O problema a ser tratado neste trabalho, faz uso da Teoria da Decisão no contexto da Medicina. Recomenda-se a leitura dos capítulos 02, 03, 04 e 12 do livro *Decisões Racionais em Situações de Incerteza* (Campello de Souza, 2007a), para uma melhor absorção dos conteúdos propostos neste trabalho.

## 1.1 Decisões em Medicina

Pode-se referenciar a Medicina como a arte de tomar decisões em ambiente de informações incompletas e de grande incerteza (Sox *et al.* , 2007). Neste contexto, tomam-se decisões com relação à:

- diagnóstico;
- tratamento;
- prognosticação
- prevenção de processos patológicos.

A dificuldade para realizar essas tarefas advém da grande incerteza inerente. A probabilidade de um paciente ter uma doença, a taxa de sucesso de uma cirurgia e a chance de infecções são exemplos de incertezas que podem confrontar um médico cirurgião (Myers & McCabe, 2005).

A Semiologia define o diagnóstico como um processo que tem como produto dar ao médico informações que o ajudam nas decisões referentes à conduta clínica (Lopez, 2001). A escolha do tratamento entre vários disponíveis traz riscos e benefícios inerentes. Cada caso clínico apresenta desafios únicos, relacionados aos diversos componentes das condutas diagnóstica e terapêutica. Acrescentam-se as questões bioéticas (autonomia, não-maleficiência, beneficência e justiça). A Medicina, portanto, é um meio de grande incerteza, no qual as decisões envolvem numerosos fatores e questões de difícil valoração (Campello de Souza, 2007a).

Segundo Harrison (1998), o processo do raciocínio médico, até os dias de hoje, ainda não é bem compreendido. O aprendizado, a experiência, a literatura, os raciocínios indutivo e dedutivo, a correta interpretação dos sinais e sintomas, a correta avaliação dos exames complementares, a junção das evidências para a tomada de decisões, são todos itens necessários para o julgamento médico. Existe uma grande dificuldade de reprodutibilidade e validação desses itens. Ainda em Harrison (1998) é descrito um modelo simplificado do raciocínio médico dividido em cinco fases:

1. Investigar queixa principal através da anamnese e do exame físico;
2. Selecionar exames complementares;
3. Integrar dados clínicos com exames complementares para estimar as probabilidades das condições do diagnóstico diferencial;
4. Pesar riscos e benefícios das várias opções diagnósticas e terapêuticas a serem oferecidas ao paciente;
5. Apresentar as recomendações ao paciente.

Este modelo simplificado descreve as atividades diárias inerentes ao trabalho médico. Cada componente possui muita variabilidade e imprecisão. Estas características advêm de várias fontes como preenchimento da ficha médica, interpretações de achados no exame físico, imprecisão dos exames complementares, inadequado ajuste nas definições de doenças.

Campello de Souza (2007) relata os seguintes fatores causadores dessas imprecisões:

- 1) *“Praticamente nenhum exame de laboratório permite uma perfeita precisão do diagnóstico;*
- 2) *As tecnologias variam na sua relativa habilidade de discriminar, mas essa habilidade não tem sido medida com cuidado;*
- 3) *Todas as tecnologias imperfeitas (existe alguma perfeita!?) têm uma necessidade inerente de compromissar erros do tipo falso positivo com erros do tipo falso negativo;*

- 4) *O critério de compromisso de um indivíduo (o seu ponto de operação na curva ROC - Receiver Operating Characteristic) quase nunca é medido formalmente.*”

Neste contexto, o médico tem que tomar decisões e ações. Conhecer o verdadeiro estado do paciente não é possível, nem necessário para se tomar uma ação. Não existe a certeza em um diagnóstico, pois até o padrão-ouro possui certa imprecisão; e sinais patognomônicos, além de raros, podem ser mal interpretados. Chegar a um diagnóstico é simplesmente saber que mais informações não modificarão as possíveis ações a serem tomadas considerando que o paciente estivesse com determinada doença (Sox *et al.* , 2007); mas obviamente a escolha do tipo de tratamento irá depender da preferência do paciente pelas consequências.

Salienta-se ainda a não padronização e não racionalização da solicitação de exames complementares. Atualmente são vistos como os principais fatores envolvidos em diagnósticos com maior certeza. Os custos tornam-se excessivos e surge a medicina defensiva, onde o médico fica supostamente assegurado atrás desses exames para se proteger da cobrança da certeza em todas as suas ações. Além do fator custo sempre crescente, Souza e Silva (1996) cita que não são realizadas avaliações adequadas de suas eficácias e eficiências, nem dos benefícios nem malefícios que possam ocorrer nos pacientes. Não existe, por parte dos médicos, uma correta utilização da integração entre o conhecimento clínico e epidemiológico com as sensibilidades e especificidades dos exames.

O diagnóstico será sempre uma probabilidade, assim o erro em um tratamento é sempre uma possibilidade.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

1. Utilizar a Teoria da Decisão como ferramenta de apoio para as decisões na medicina, através da modelagem de um problema de decisão no contexto de análise de imagens de RMf.

## 1.2.2 Objetivos Específicos

1. Sistematizar matematicamente o problema de forma a servir como apoio nas tomadas de decisão médicas;
2. Adequar a modelagem por Teoria da Decisão ao linguajar cotidiando dos profissionais do ramo, facilitando a adesão dos mesmos à ferramenta;
3. Formatar o problema em planilha eletrônica de fácil manuseio, tornando possível realizar rápidas análises de sensibilidade entre as variáveis do problema;
4. Estruturar os problemas à luz da Teoria da Decisão, levando em consideração as preferências dos decisores;
5. Ilustrar o problema com variáveis dicotômicas e multinível.

## 2 Base Conceitual

### 2.1 A Incerteza

A incerteza é uma característica fundamental da Medicina e surge de várias fontes (Kucey, 1999; Sox *et al.*, 2007; Schwartz & Bergus, 2008). Um médico, por maior competência que tenha, não é capaz de afirmar com certeza o dia que um paciente ficará bom de um resfriado, o máximo que ele pode fazer é descrever uma distribuição de probabilidade, ainda que de forma não estruturada, do provável dia que o paciente ficará sem sintomas. Verifica-se a necessidade de diminuir a incerteza da incerteza sobre a incerteza.

Segundo Schwartz & Bergus (2008), a incerteza reflete a inabilidade ou incapacidade de se conhecer algo com certeza. Essa inabilidade é muitas vezes confundida como falta de conhecimento e associa-se à ansiedade, à dúvida e ao medo.

Schwartz & Bergus (2008) descreve quatro formas frequentes nas quais a incerteza ocorre nas decisões médicas:

1. **A incerteza do estado do mundo ou do estado da natureza:** refere-se aos “verdadeiros” estados fisiológico, patológico e fisiopatológico do paciente, que nunca serão verdadeiramente conhecidos;
2. **Incerteza sobre a incerteza:** ocorre quando o estado do mundo é desconhecido e não pode ser precisamente quantificado como probabilidade, existe falta de conhecimento;
3. **Incerteza da estrutura da decisão:** reflete o desconhecimento sobre as alternativas disponíveis ou quais as possíveis consequências;
4. **Incerteza sobre preferências ou valores:** é frequente quando o paciente, diante de uma situação de incerteza, não está completamente certo de suas preferências e de como as consequências de suas ações podem ser avaliadas.

Um diagnóstico é dado quando se chega a um embasamento considerado suficiente para se proceder ao tratamento (Wulff & Gotzche, 2000). Ao se realizar um diagnóstico,

o médico utiliza quatro tipos de raciocínio (Wulff & Gotzche, 2000):

1. **Dedutivo:** as decisões são baseadas em deduções a partir do conhecimento nosográfico e das formas de tratamento;
2. **Empírico:** a decisão é baseada na experiência prévia; este tipo de raciocínio, junto com o dedutivo, compõe o componente científico das decisões clínicas;
3. **Compassivo:** entendimento do paciente como um ser humano;
4. **Ético:** baseia-se nas normas éticas, forma com o compassivo o componente humanístico das decisões clínicas.

Com essas formas de raciocínio, o médico utiliza as seguintes abordagens para chegar a um diagnóstico (Wulff & Gotzche, 2000):

- **Abordagem dedutiva:** o médico deduz de seu conhecimento o que está causando os sintomas;
- **Reconhecimento de padrão:** o médico reconhece rapidamente o quadro clínico a partir de padrões pré-conhecidos;
- **Diagnóstico probabilístico:** o médico coloca probabilidades no diagnóstico diferencial.

Raramente estas abordagens ocorrem isoladamente, geralmente são simultâneas, sendo o enfoque probabilístico o mais plausível.

O verdadeiro estado do paciente não pode ser diretamente observado, apenas inferido através de achados nem sempre perfeitos (Sox *et al.*, 2007); é preciso traduzir essa incerteza e a linguagem usada para descrevê-la é a probabilidade.

Sox *et al.* (2007) apresentam as seguintes definições para probabilidade:

- Probabilidade é um número entre 0 e 1;
- A probabilidade de um evento que é certo de ocorrer é 1;
- A probabilidade de um evento que é certo de não ocorrer é 0;

- A probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de não ocorrer é 1, quando são complementares e mutuamente exclusivos.

No processo de diagnóstico o médico tenta estimar probabilidades para tomar uma de três ações (Sox *et al.* , 2007):

1. Não fazer nada;
2. Obter mais informações;
3. Tratar sem a necessidade de obter mais informações.

Existem duas formas para se estimar probabilidades: a objetiva e a subjetiva. A probabilidade objetiva é aquela estimada pela frequência relativa do evento; no caso da medicina é obtido pelos estudos clínicos e pela literatura médica organizada. A probabilidade subjetiva é aquela estimada pelo especialista e reflete o grau de crença que o médico tem de um determinado evento ocorrer. A probabilidade tem essa dualidade e o médico trabalha implicitamente com as duas formas.

Ao se considerar a incerteza do raciocínio clínico em linguagem de probabilidade, consegue-se descrever alguns vieses intrínsecos do raciocínio médico. Existem três vieses clássicos e outros descritos em trabalhos mais recentes (Elstein & Chapman, 2000; Myers & McCabe, 2005). Os vieses clássicos são erros no uso de heurísticas cognitivas (processo mental usado para aprender, lembrar e entender o conhecimento) (Sox *et al.* , 2007):

1. **Erro ao usar a heurística de representação** (processo no qual a probabilidade de um evento é classificado de acordo com a proximidade de características essenciais da doença): as fontes de erro emergem do fato de se ignorar a probabilidade *a priori* da doença (erro ao estimar a prevalência da doença), de utilizar dados clínicos que não ajudam a diagnosticar a doença, de se estar muito certificado de um diagnóstico quando preditores redundantes estão presentes, de se utilizar regressão à média como evidência diagnóstica (concluir que os achados são devidos à determinada patologia e não ao acaso) (Morton & Torgersons, 2003) e de se comparar um paciente com uma experiência pequena e não representativa.

2. **Erro ao usar a heurística de disponibilidade** (processo de se julgar a probabilidade de um evento de acordo com a facilidade de se lembrar do evento): eventos recentes podem modificar a capacidade do médico em estimar sua probabilidade como o exemplo de doenças raras vistas a pouco tempo, fazem com que o médico faça sobrestimativas de sua ocorrência, assim como subestimar probabilidades de doenças muito comuns (Elstein & Schwarz, 2008).
3. **Erro ao utilizar heurística de ancoramento e ajuste** (processo mental que utiliza as características do paciente para estimar probabilidade): estes erros aparecem quando o médico não interpreta corretamente as características apresentada pelo paciente (não ancora corretamente a probabilidade do evento) ou o médico não consegue ajustar probabilidade diante de novas informações (erro de ajuste).

Elstein & Chapman (2000) descreve outros vieses do raciocínio médico que estão sendo estudados mais recentemente. Essas alterações do processo cognitivo médico estão divididos em três grupos:

1. **Vieses que ocorrem ao se estimar probabilidade de diagnósticos potenciais e de consequências de tratamentos:**
  - (a) **Teoria do suporte:** verifica-se que descrições mais detalhadas de eventos aumenta a estimativa de sua probabilidade;
  - (b) **Viés de retrospecto:** ocorre quando médicos aumentam a probabilidade de que eles deveriam ter diagnosticado um paciente; evidências consistentes com determinado diagnóstico são mais facilmente lembradas que evidências que contradizem o diagnóstico, assim os médicos assumem que poderiam ter previsto com certeza a consequência de uma conduta clínica e falham em aprender com o caso clínico;
  - (c) **Viés de confirmação:** utilizar incorretamente o fato de que exames complementares dependem de uma probabilidade *a priori* de um diagnóstico e de como os exames alteram essa probabilidade, podem levar a aumentos da ineficiência e dos custos pela utilização dessas ferramentas, além de focalizarem o raciocínio para diagnóstico equivocados;

## 2. Viéses ao se avaliar preferências e valores:

- (a) **Framming effects (efeitos de enquadramento)**: dependendo de como as consequências são descritas, as preferências por elas podem se alterar, ou seja, a forma do médico descrever as evoluções pós tratamento pode ter influência na escolha do tratamento pelo paciente;
- (b) **Reversão de preferências**: ocorre por exemplo quando se tem o *framing effect*, ou quando se colocam as consequências como perdas e não como ganhos (Myers & McCabe, 2005);
- (c) **Adicionar alternativas de decisão**: quando se adicionam alternativas de ações, as preferências pelas consequências podem se alterar através de um efeito de atração;
- (d) **Viés do custo de falhar**: acontece quando o decisor continua agindo de forma que é subótima para chegar às suas preferências;
- (e) **Viés de omissão**: os médicos consideram mais as preferências por ações que por omissões;
- (f) **Arrependimento**: a possibilidade de arrependimento pode alterar as preferências; de uma forma geral médicos se arrependem mais de ações que de omissões;
- (g) **Pesos das decisões**: há tendência para pesos maiores às ações com efeitos de “pseudo-certeza” das suas consequências;

## 3. Viéses relacionados com o tempo: geralmente as pessoas valorizam menos consequências a longo prazo que a curto prazo; deste fato explica-se a grande dificuldade das pessoas de adotarem comportamentos preventivos de saúde.

Como descrito acima, o raciocínio clínico está sujeito a vários viéses; é necessário conhecer e ajustar essas alterações cognitivas. A Teoria da Decisão é uma forma de descrever e estruturar o raciocínio na Medicina.

## 2.2 Teoria da Decisão

A Teoria da Decisão pode ser definida como uma abordagem sistemática para a tomada da decisão em condições de incerteza, permitindo a comparação de desfechos em diferentes estratégias (Campolina & Ciconelli, 2006). Os estudos realizados em Teoria da Decisão apresentam três papéis (Chapman & Sonnenberg, 2000; Myers & McCabe, 2005):

1. **Função Normativa:** descreve como as decisões podem ser realizadas;
2. **Função Descritiva:** relata como as decisões são realmente feitas;
3. **Função Prescritiva:** ajuda responder à questão de como se podem melhorar as decisões.

Esta dissertação utiliza notação e metodologia descritas em Campello de Souza (2007). Antes de descrever os componentes da Teoria da Decisão, algumas definições são importantes como escalas de medidas, variáveis, atributos e aspectos. São esses componentes que permitem caracterizar melhor as situações e obter as informações necessárias para uma decisão (Campello de Souza, 2009).

As principais *escalas de medida* são quatro:

1. **Escala nominal, taxonômica ou categórica:** descreve e classifica cada item do conjunto; a classificação deve ter duas características principais: *exclusividade* (cada item não pode participar de mais de uma categoria) e *exaustividade* (todos os itens classificados devem participar de uma categoria). Exemplos: tipo sanguíneo, tipo de câncer, raça, sexo, ser ou não ser fumante (Massad *et al.*, 2004). Em casos onde a variável possui duas categorias, como por exemplo ter ou não ter determinada doença, é chamada de dicotômica (Massad *et al.*, 2004);
2. **Escala ordinal:** coloca ordem nas categorias; um determinado valor está antes ou depois de outro. Pode-se exemplificar essa escala com o estadiamento do câncer (graus I a IV, de acordo com a gravidade progressiva) (Massad *et al.*, 2004);
3. **Escala intervalar:** além da ordem, consegue-se definir exatamente a diferença entre os dados; o zero e a unidade de medida nessa escala são arbitrários, na verdade não

existem, por isso quanto uma categoria vale mais que outra não pode ser descrito; mas faz sentido quanto diferenças valem mais que outras. O exemplo, mais descrito dessa escala, é a temperatura em graus Celsius;

4. **Escala de razão:** é a escala mais completa e sofisticada; nessa escala o zero é absoluto, portanto faz sentido quantificar quanto um dado vale mais que outro. Pressão arterial, peso e contagem de plaquetas são exemplos de variáveis nesta escala (Massad *et al.* , 2004).

Uma *variável* é um elemento não especificado de um conjunto, e será representada por dados em escalas de medidas. *Atributo* é uma combinação de variáveis segundo uma certa regra ou fórmula. *Aspectos* são sínteses de atributos.

Isto posto, apresentam-se os elementos de Teoria da Decisão divididos em quatro conjuntos básicos e três mecanismos probabilísticos.

Os conjuntos básicos da Teoria da Decisão são:

1. **Os estados da natureza:** esse conjunto é representado por  $\Theta = \{\theta\}$ ;
2. **As observações:** denotado por  $\mathcal{X} = \{x\}$ ;
3. **O espaço de ações:** sua notação é  $\mathcal{A} = \{a\}$ ;
4. **As consequências, bens ou *payoffs*:** conjunto denotado por  $\mathcal{P} = \{p\}$ ;

Estes conjuntos serão descritos nos capítulos que se seguem, e podem estar em qualquer escala de medida e em qualquer forma matemática (discreta, contínua, vetor, escalar, finito, infinito e combinações).

São elementos da Teoria da Decisão os seguintes mecanismos probabilísticos:

1. **Função consequência:** corresponde à distribuição de probabilidade condicional  $P(p|\theta, a)$ ;
2. **Distribuição *a priori* sobre os estados da natureza:** utiliza-se a notação  $\pi(\theta)$  para função densidade de probabilidade e  $\Pi(\theta)$  para função de distribuição de probabilidade;

3. **Função de verossimilhança:** corresponde ao canal de comunicação com a natureza, sendo representado por  $P(x|\theta)$ .

Estes mecanismos, como são probabilísticos, podem ser estimados de forma objetiva pelos estudos clínicos, ou estimados de forma subjetiva pela educação do conhecimento de especialistas.

O componente central da Teoria da Decisão é a *função utilidade*. Essa função descreve as preferências do paciente pelas consequências. É a educação e utilização dessa função na análise da decisão que diferencia a Teoria da Decisão da Estatística.

Na Teoria da Decisão, os dados clínicos são descritos como variáveis, atributos ou aspectos colocando-os em uma das escalas de medidas. Os conjuntos e os mecanismos probabilísticos envolvidos são definidos, as preferências do paciente são educadas e finalmente se faz a análise da decisão.

A *função perda* corresponde ao negativo da utilidade da função consequência. O *risco* é o valor esperado da perda. A ação que minimiza o risco é a decisão que deve ser escolhida.

A Teoria da Decisão permite ainda a realização da análise de sensibilidade. Corresponde ao método formal de avaliar o impacto da mudança de valores na recomendação de um modelo de decisão (Schwartz & Bergus, 2008).

A relevância do estudo das decisões em Medicina, à luz da Teoria da Decisão, mostra-se na medida em que a mesma permite que seus elementos possam ser estudados com o objetivo de descrever, entender e encontrar caminhos para o melhor desenvolvimento dessas decisões (Chapman & Sonnenberg, 2000).

## 2.3 Revisão da Literatura

O problema de identificar como se comportam as preferências de um decisor por alternativas (consequências incertas, ou mais precisamente, distribuições de probabilidade sobre possíveis consequências) é de interesse em áreas como Engenharia, Psicologia, *Marketing* e Tecnologia, embora em cada uma delas o foco difira entre descritivo, investigativo e prescritivo (J. Eliashberg, 1981). Um psicólogo deseja obter a compreensão plena de como o indivíduo processa informações; distinguir o processo que melhor representa o

processamento cognitivo de informações. Sendo assim, a modelagem de preferências tem a tarefa de diferenciar um modelo do outro. O foco é investigativo. Um estudioso do *marketing* deseja entender como um consumidor toma suas decisões de compra e como intervir nesse processo de forma a melhorar os resultados para uma empresa ou um produto. A idéia, nesse contexto, é modificar a percepção da incerteza do consumidor sobre as consequências de suas compras, por meio de estratégias de propaganda ou mesmo modificações no produto.

Quando se utiliza teoria da decisão, o foco é prescritivo (ou normativo). Os decisores estão diante de um problema relevante e complexo. O objetivo da modelagem da preferência é estimar a função utilidade do decisor sobre as possíveis consequências, de modo a ajudá-lo a escolher uma alternativa no seu espaço de ações que seja coerente com um funcional objetivo. Com isto, será possível elencar as decisões possíveis juntamente com suas respectivas probabilidades de risco, permitindo que seja escolhida a melhor decisão para o contexto, visto que o problema foi dimensionado com base nas preferências do decisor. Isto elimina as falhas naturais do raciocínio humano, que dependendo da complexidade e da quantidade de variáveis do problema, pode incorrer na tomada de uma decisão que não é a melhor, dentre as possíveis. A teoria da decisão, como estudada hoje, teve seu início na metade do século XX, nos trabalhos de Abraham Wald (Wald, 1950) e usando resultados da teoria da utilidade de von Neumann e Morgenstern (J. von Neumann, 1944).

Atualmente, a teoria da decisão tem sido utilizada em diversas áreas do conhecimento, as quais podemos destacar Medicina, Negócios, Engenharia de Manutenção, Direito e Telecomunicações (Campello de Souza, 2007a; Campello de Souza, 2005; Campello de Souza, 2007b). Sua aplicabilidade se adequa, inclusive, em problemas cujo contexto é subjetivo, “portanto, perfeitamente mensurável” (Campello de Souza, 2007a; Campello de Souza, 2005; Campello de Souza, 2007b). As limitações de sua aplicação estão na formação básica de uma forma geral dos profissionais em processos estocásticos, o que resulta na indisponibilidade de dados por parte das corporações em que trabalham para realizar o processo de modelagem, visto que em muitos casos não existem bases com o nível de detalhamento necessário para que o modelo seja implementado. Todavia, é plenamente possível a implementação de modelos por meio de educação de conhecimento de especialistas

(Campello de Souza, 2007a; Campello de Souza, 2005; Campello de Souza, 2007b).

### 2.3.1 A Educação da Função Utilidade

A teoria da decisão tem um construto central: a função utilidade do decisor. Sem esta função não se pode aplicar a teoria. Sem se medir as preferências dos indivíduos, não tem sentido falar em aplicação da teoria da decisão (Wanderley, 2008).

O processo de educação da função utilidade requer a elaboração de um protocolo. A maioria das críticas que são feitas à teoria da decisão recaem na apresentação de casos práticos nos quais indivíduos violam algum dos axiomas da teoria da utilidade (Campello de Souza, 2007a; Campello de Souza, 2005; Campello de Souza, 2007b), ou mesmo o resultado principal do valor esperado da função utilidade. Alguns experimentos são preparados como se fossem “armadilhas”, explorando mecanismos psicológicos (ancoragem, ilusão da certeza, superestimação ou subestimação de probabilidades, etc.), de forma a levar os indivíduos a cometerem erros relativos ao previsto pela teoria da decisão. Protocolos bem elaborados evitam esses problemas (Wakker & Stiggelbout, 1995; P. Wakker, 2004).

Apesar de muitos estudos disponíveis na literatura, nota-se uma lacuna quanto a procedimentos bem estabelecidos e práticos. Os estudos dos mecanismos probabilísticos subjacentes às escolhas tem sido conduzidos em várias direções. Duas destas direções se destacam: as chamadas escolhas probabilísticas (Campello de Souza, 2007a; Campello de Souza, 1986) e os modelos estatísticos de erro para estimar a função utilidade (Wanderley, 2008; Campello de Souza, 2000; Campello de Souza, 2004).

A situação torna-se complicada no caso em que as consequências ou *payoffs* têm de ser representadas por vetores, isto é, no caso multidimensional. Nesta situação, há uma imbricação entre dois fenômenos: o *tradeoff* entre as diversas dimensões dos *payoffs* e a matriz de aversão ao risco. A curvatura geral da função utilidade de argumento multidimensional, assim como as curvaturas das curvas de iso-utilidade (que caracterizam os *tradeoffs*), tem uma ligação íntima com a aversão ao risco. Esta é representada, por exemplo, pela chamada matriz de aversão ao risco (Wanderley, 2008). Essas interações tem implicações diretas em qualquer que seja o protocolo de educação das preferências, e há

que se lidar com isso. Subjacente a essas questões esta o conceito de ordem. Na teoria da utilidade de von Neumann e Morgenstern, o primeiro axioma exige a existência de uma ordem completa sobre o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre os bens (*payoffs*). Visto que o conjunto  $\mathbb{R}^n$ , não é naturalmente ordenado, há que se trabalhar no estabelecimento de uma ordem total, como parte do processo de educação. Isto não é feito, tipicamente, de maneira formal. Em geral, parte-se diretamente para uma expressão analítica geral e, então, estima-se os seus parâmetros (Wanderley, 2008; Campello de Souza, 2000; Campello de Souza, 2004).

### 3 O Problema

Este trabalho trata da modelagem matemática de um processo de tomadas de decisão em medicina. Em particular, será modelado um problema de decisão entre aceitar ou rejeitar um exame de RMf. Trabalhos sobre análise da qualidade da imagem por Teoria da Decisão, foram desenvolvidos pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e pelo Instituto Israelita de Ensino e Pesquisa Albert Einstein em São Paulo (Lessa *et al.* , 2008).

Outro trabalho que auxilia na modelagem matemática de problemas na área de saúde é o *Elementos da Pesquisa Científica em Medicina* (Campello de Souza *et al.* , 2002).

#### 3.1 Falhas do Raciocínio Humano

Não obstante saber-se que a Teoria dos Jogos é um subconjunto da Teoria da Decisão, devido à necessidades já consolidadas na literatura sobre modelagem por Teoria dos Jogos, são utilizadas nomenclaturas e modelagens específicas para a mesma (Rawls, 2005). Uma analogia entre Teoria dos Jogos e Teoria da Decisão é encontrada quando um jogador decide fazer uma aposta. Todo jogador arrisca com certeza para ganhar com incerteza, e nem por isso o mesmo deixou de utilizar a razão neste processo. A eficácia deste processo está associada as preferências do jogador (Campello de Souza, 2007a).

Em teoria da decisão, busca-se a estruturação matemática do processo com base em uma consequência lógica daquilo que se quer, daquilo que se sabe e daquilo que se pode fazer. Caberá ao decisor escolher as ações que tornem as consequências favoráveis, conforme suas preferências (Campello de Souza, 2007a; Campello de Souza, 2005; Campello de Souza, 2007b).

O cérebro humano está propício a falhas de raciocínio, visto que existem muitas variáveis que podem influenciar em seu desempenho como nível de estresse, fadiga, preocupação com problemas fora do contexto desprendendo atenção, dentre outros fatores. Para solucionar estas falhas de raciocínio, faz-se necessário a estruturação do mesmo em uma modelagem matemática, ponderada pelas preferências do indivíduo (ou do grupo de indivíduos) a quem cabe a decisão final sobre determinado assunto. Quando alguém diz

que é mais “racional” preferir uma coisa a outra, este alguém deve ter um problema em mente; isto é, o indivíduo quer uma resposta a uma questão. Uma vez estruturado matematicamente este paradigma, no que hoje chama-se de Teoria da Decisão, será possível lançar mão de uma ferramenta de apoio excepcional para tomar a decisão mais favorável, ou seja, a decisão de menor risco, diante de todo o cenário de possibilidades.

## 3.2 Processo de Tomada de Decisão em Medicina

No cotidiano, são vivenciadas situações em que é necessário tomar decisões. A questão que persegue este processo é a pergunta: a melhor decisão foi tomada para solucionar o problema? O que se espera com a Teoria da Decisão é justamente a estruturação matemática do problema para que se tome a melhor decisão, mesmo em uma situação de grande incerteza. Esta é a razão pela qual a estruturação do raciocínio com base nas preferências deve ser realizada, de forma a obter a lista de decisões possíveis levando em conta as suas respectivas probabilidades associadas, permitindo não só tomar a melhor decisão como também propiciar uma eventual comparação entre a decisão adotada e as demais disponíveis, enriquecendo consideravelmente o contexto de análise do problema.

### 3.2.1 Aplicações da Modelagem Matemática na Medicina

Já existem aplicações de Modelagem Matemática na Medicina e alguns exemplos são:

- Solicitação Racional de Exames Complementares (Campello de Souza, 2007a);
- Decisão sobre indicação cirúrgica na Doença Biliar Litiásica (Lins, 2008);
- Decisão sobre margem de ressecção de Carcinoma Basocelular (Lins, 2008);
- Prognóstico em relação ao Câncer de Mama (Parmigiani, 2002);
- Análise da Qualidade da Imagem em Radiologia por Teoria da Decisão (Lessa *et al.*, 2008).

## 4 Revisão Bibliográfica sobre a Ressonância Magnética Funcional (RMf)

Este capítulo será dividido em 02 seções: A Ressonância Magnética Nuclear (RMN) e A Ressonância Magnética Funcional (RMf).

### 4.1 A Ressonância Magnética Nuclear(RMN)

A imagem por ressonância magnética (IRM) é hoje um método de diagnóstico por imagem estabelecido na prática clínica e em crescente desenvolvimento. Dada a alta capacidade de diferenciar tecidos, o espectro de aplicações se estende a todas as partes do corpo humano e explora aspectos anatômicos e funcionais.

A física da ressonância magnética nuclear (RMN), aplicada à formação de imagens, é complexa e abrangente, uma vez que tópicos como eletromagnetismo, supercondutividade e processamento de sinais devem ser abordados em conjunto para o entendimento desse método.

#### 4.1.1 Física da RMN

A IRM é, resumidamente, o resultado da interação do forte campo magnético produzido pelo equipamento com os prótons de hidrogênio do tecido humano, criando uma condição para que seja possível enviar um pulso de radiofrequência e, após, coletar a radiofrequência modificada, através de uma bobina ou antena receptora. Este sinal coletado é processado e convertido numa imagem ou informação(Bloch, 1946; Purcell *et al.* , 1946).

As propriedades de ressonância magnética têm origem na interação entre um átomo em um campo magnético externo; de forma mais precisa, é um fenômeno em que partículas contendo momento angular e momento magnético exibem um movimento de precessão quando estão sob ação de um campo magnético. Os principais átomos que compõem o tecido humano são: hidrogênio, oxigênio, carbono, fósforo, cálcio, flúor, sódio, potássio e nitrogênio. Estes átomos, exceto o hidrogênio, possuem no núcleo atômico prótons e nêutrons. Apesar de outros núcleos possuírem propriedades que permitam a utilização

em IMR, o hidrogênio é o escolhido por três motivos básicos:

- É o mais abundante no corpo humano: cerca de 10% do peso corporal se deve ao hidrogênio (Foster, 1984);
- As características de RMN se diferem bastante entre o hidrogênio presente no tecido normal e no tecido patológico;
- O próton do hidrogênio possui o maior momento magnético e, portanto, a maior sensibilidade a RMN.

#### 4.1.2 Spin e o momento magnético

O átomo de hidrogênio, o mais simples da tabela periódica, possui como núcleo o próton. Os prótons são partículas carregadas positivamente, que possuem uma propriedade chamada de spin ou momento angular.

Como o objetivo é ter uma visão simplificada e introdutória da física relacionada à IRM, será admitido que o spin represente o movimento de giro do próton em torno de seu próprio eixo, da mesma forma que um pequeno pião. Para o próton de hidrogênio, o spin ( $I$ ) pode ser  $+1/2$  ou  $-1/2$ , o que na analogia clássica pode representar o próton girando para um lado ou para o outro. Juntamente com o spin, o próton de hidrogênio possui outra propriedade chamada de momento magnético, que faz com que o mesmo se comporte como um pequeno ímã. Esta analogia é válida se o próton for visualizado como uma pequena esfera carregada (carga positiva) e girando em torno de seu próprio eixo (spin). Como para toda partícula carregada em movimento acelerado surge um campo magnético associado, o próton de hidrogênio se comporta como um pequeno magneto, ou um dipolo magnético. Será utilizado um vetor para descrever cada dipolo magnético, ou cada próton, como mostra a Figura 4.1.

E o que acontece quando um próton de hidrogênio ou um conjunto de prótons de hidrogênio é colocado sob ação de um campo magnético externo? Ou seja, o que ocorre com os prótons do corpo do paciente quando o mesmo é posicionado dentro do magneto? Para responder esta pergunta, é importante entender que na temperatura média de 36,5 graus C do corpo humano, e sob ação do fraco campo magnético terrestre de 0,3 gauss,

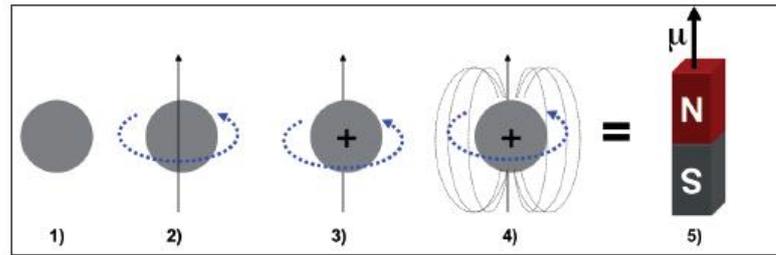


Figura 4.1: O próton de hidrogênio pode ser visto como uma pequena esfera (1), que possui um movimento de giro, ou spin, em torno do seu próprio eixo (2); por ser uma partícula carregada positivamente (3), irá gerar um campo magnético próprio ao seu redor (4), comportando-se como um pequeno dipolo magnético (4) ou como um ímã (5), com um momento magnético associado

os momentos magnéticos não possuem uma orientação espacial definida, se distribuindo de forma randômica. Esta distribuição aleatória faz com que a magnetização resultante de um volume de tecido seja igual a zero.

Quando o paciente é posicionado no interior do magneto e fica sob ação de um campo magnético de, por exemplo, 1,5 T, os prótons de hidrogênio irão se orientar de acordo com a direção do campo aplicado, como se fossem pequenas bússolas; porém, ao contrário das bússolas, que apontariam seu norte marcado na agulha para o sul magnético, os prótons de hidrogênio apontam tanto paralelamente quanto antiparalelamente ao campo. As duas orientações representam dois níveis de energia que o próton pode ocupar: o nível de baixa energia (alinhamento paralelo) e o nível de maior energia (alinhamento antiparalelo). No modelo quântico, um dipolo nuclear somente pode ter  $2I+1$  orientações com o campo, correspondendo a  $2I+1$  níveis de energia. O próton de hidrogênio ( $I=1/2$ ) possui duas possíveis orientações, que correspondem aos níveis de baixa e alta energia.

Para um campo magnético de 1,5 T e na temperatura média do tecido humano, a diferença entre os spins que ocupam o estado de menor energia e o de maior energia é de aproximadamente 5 para 1 milhão. Do ponto de vista prático é somente com estes cinco spins resultantes que serão trabalhados para produzir sinal detectável na bobina.

### 4.1.3 Magnetização do tecido

Como nas imagens a menor unidade será o voxel (sendo este da ordem de  $1,0 \text{ mm}^3$  ou mais), é o efeito combinado dos prótons de hidrogênio que interessa. A magnetização

resultante em cada voxel é o resultado da soma vetorial de todos os spins que resultaram do cancelamento mútuo. No equilíbrio, a magnetização resultante possui somente a componente horizontal, ao longo de  $B_0$ . É fundamental que neste momento seja feita a localização espacial do vetor magnetização.

#### 4.1.4 Aplicação do campo de radiofrequência ( $B_1$ )

Para que uma corrente elétrica seja induzida em uma bobina posicionada de forma perpendicular ao plano transversal, é necessário que o vetor magnetização como um todo, ou parte dele, esteja no plano transversal e possua coerência de fase. Se todos os momentos magnéticos individuais forem desviados em 90 graus para o plano transversal e todos estiverem precessando na mesma posição (mesma fase), será obtido o máximo de sinal induzido nesta bobina.

Para reorientar o vetor magnetização, um segundo campo magnético de curta duração (pulso) tem que ser aplicado. Este campo  $B_1$  (pulso de radiofrequência, ou RF) deve ser perpendicular a  $B_0$  e deve estar em fase com a frequência de precessão.

O efeito no vetor magnetização (vetor  $M$ ) é o de afasta-lo, por um dado ângulo de desvio ( $\alpha$ ), do alinhamento com  $B_0$ . Um dos pulsos de RF mais utilizados é o que irá resultar em um ângulo de desvio de 90 graus, transferindo assim todo o vetor  $M$  para o plano transversal. Pulsos de 180 graus também são utilizados e são chamados de pulsos de inversão (Figura 4.2).

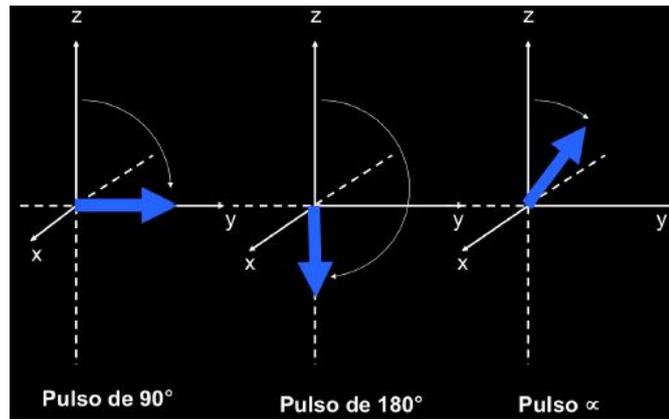


Figura 4.2: Pulsos de RF e sua nomenclatura. O pulso de 90 graus é chamado de pulso de excitação, o de 180 graus de pulso de inversão e o pulso  $\alpha$  pode assumir qualquer valor.

Em resumo, a aplicação do pulso de RF causa dois efeitos:

- Transfere energia para o vetor magnetização, desviando-o do alinhamento, ou jogando-o para o plano transversal, quando for de 90 graus;
- Faz com que os núcleos precessem, momentaneamente, em fase no plano transversal.

#### 4.1.5 Sinal de indução livre

Com aplicação de um pulso de RF de 90 graus, por exemplo, a magnetização é jogada no plano transversal e passa a induzir uma tensão elétrica na bobina de frequência  $\omega$  (sinal de RMN). Quando encerra a aplicação do pulso de RF, o sinal gradualmente decai como resultado do processo de relaxação ou de retorno do vetor magnetização para o equilíbrio, ou seja, para o alinhamento com  $B_0$ . O formato do sinal induzido (ou sinal de indução livre, SIL) é o de uma onda seno amortecida, como mostra a Figura 4.3.

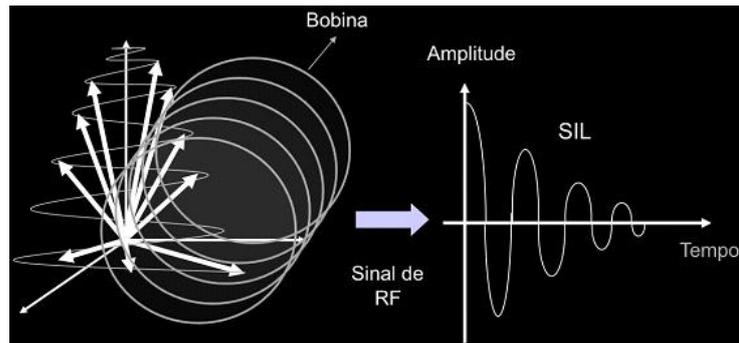


Figura 4.3: Sinal de Indução Livre (SIL) gerado pelo retorno da magnetização para o alinhamento após a aplicação de um pulso de RF de 90 graus

#### 4.1.6 Processos de relaxação: longitudinal e transversal

A relaxação dos spins que gera o SIL é causada pelas trocas de energia entre spins e entre spins e sua vizinhança (rede). Estas interações são chamadas de relaxação spin-spin e spin-rede e juntas fazem com que o vetor  $M$  retorne ao seu estado de equilíbrio (paralelo a  $B_0$  ).

Duas constantes de tempo foram criadas para caracterizar cada um destes processos:  $T_1$  e  $T_2$ . A constante  $T_1$  está relacionada ao tempo de retorno da magnetização para o eixo longitudinal e é influenciada pela interação dos spins com a rede. Já a constante  $T_2$  faz referência à redução da magnetização no plano transversal e é influenciada pela interação spin-spin (dipolo-dipolo).

A Figura 4.4 mostra passo a passo o retorno do vetor magnetização ao equilíbrio após a aplicação de um pulso de RF de 90 graus. Em amarelo são mostrados os momentos magnéticos individuais. É possível perceber que estes vão se defasando e com isso ocorre uma redução rápida na componente de magnetização ainda presente no plano transversal.

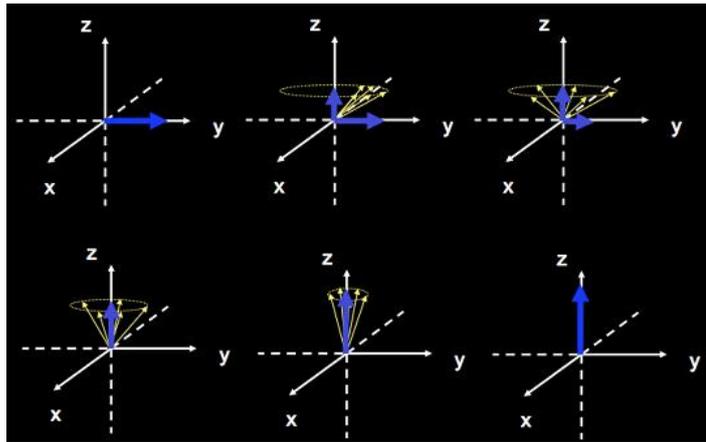


Figura 4.4: Retorno do vetor magnetização ao equilíbrio

A Tabela 4.1 apresenta tempos de relaxação T1 e T2 para diversos tecidos a 1,5 T. Os valores devem servir apenas como referência, pois uma medida quantitativa dos tempos de relaxação pode resultar em valores bastante diferentes. É possível perceber que estas diferenças nos tempos de relaxação poderão ser usadas para gerar contraste entre os tecidos nas imagens (Figura 4.5), e que esta é uma vantagem da RM sobre os demais métodos de diagnóstico.

Tabela 4.1: Tempos de relaxação T1 e T2 aproximados para diversos tecidos do corpo humano a 1,5 T

Tecido	T1 (ms)	T2 (ms)
Substância branca	790	90
Substância cinzenta	920	100
Líquido céfalo-raquidiano (líquor)	4000	2000
Sangue (arterial)	1200	50
Parênquima hepático	490	40
Miocárdio	870	60
Músculo	870	50
Lipídios (gordura)	260	80

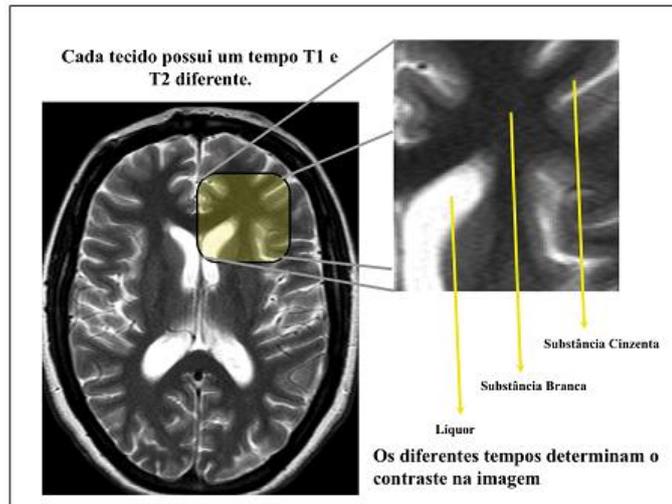


Figura 4.5: Imagem turbo spin eco ponderada em T2, mostrando na imagem ampliada a resolução de contraste obtida devido as diferenças nos tempos T2 entre os tecidos envolvidos.

#### 4.1.7 Ecos de spins e Sequências de pulso spin eco ou eco de spins

Um aspecto fundamental para a coleta do sinal que irá gerar a imagem de ressonância magnética é o fenômeno de formação de ecos. Este fenômeno foi observado e descrito por Hahn em 1950 e é a base para se estudar sequências de pulso (Hahn, 1950). Hahn descreveu que, ao excitar os prótons com um pulso de RF inicial e, após um determinado tempo  $t$ , for enviado um segundo pulso, será observado que, além do surgimento de sinal na bobina após o primeiro pulso (SIL), também haverá o surgimento de um segundo sinal. Este segundo sinal é um eco do primeiro e aparece na bobina num tempo igual a  $2t$ . É importante ressaltar que o surgimento do eco é um processo natural e ocorre devido a refasagem dos momentos magnéticos induzida pelo segundo pulso de RF. É possível controlar o momento em que o eco irá surgir através dos tempos e de aplicação dos pulsos, porém a defasagem e refasagem será dependente dos tipos de tecido em questão.

A sequência de pulso spin eco se caracteriza pela aplicação de um pulso inicial de RF de 90 graus, seguido de um pulso de RF de 180 graus. Como já descrito anteriormente, o intervalo de tempo  $t$  entre a aplicação destes dois pulsos irá determinar o surgimento do eco em  $2t$ . Chamado de tempo de eco (TE) o intervalo de tempo entre a aplicação do pulso inicial de RF de 90 graus e o pico do eco (Figura 4.6)

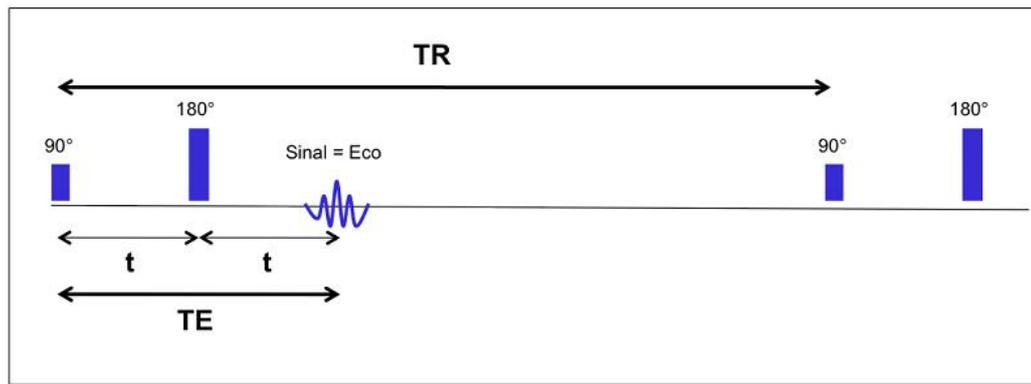


Figura 4.6: Sequência de pulso spin eco. Pulso de 90 graus e aplicação no tempo ( $TE/2$ ) do pulso de RF de 180 graus.

O tempo entre sucessivos pulsos de RF de 90 graus é chamado de TR, ou tempo de repetição. Enquanto o TE determina o quanto de relaxação no plano longitudinal estará presente no eco, o TR estabelece o quanto de magnetização longitudinal se recuperou entre sucessivos pulsos de 90 graus.

#### 4.1.8 Formação da imagem

A RMN só pôde se tornar útil como método de obtenção de imagens do corpo humano com o desenvolvimento da codificação espacial do sinal através do uso de gradientes de campo magnético. Em 1973, Paul Lauterbur propôs o uso de gradientes de campo magnético, permitindo assim a codificação espacial do sinal (Lauterbur, 1973). Lauterbur mostrou que, adicionando gradientes de campo magnético lineares e obtendo uma série de projeções da distribuição de sinal, seria possível reconstruir uma imagem através da mesma retroprojeção filtrada usada por Hounsfield para obtenção de imagens de tomografia computadorizada por raios-x (Hounsfield, 1973). O método foi aprimorado por muito outros pesquisadores, incluindo Peter Mansfield, o qual propôs também a sequência de pulso eco planar (EPI) (Mansfield, 1977).

Como o objetivo é mapear uma imagem bidimensional (2D), é preciso estabelecer um método que possibilite a seleção de um corte do corpo para que, dentro deste corte, possa haver uma matriz de pontos organizada em linhas e colunas. Para cada elemento desta matriz (pixel) deve ser obtido o valor de intensidade de sinal, para que através de uma escala de tons de cinza ou cores seja possível visualizar a imagem final. Com a introdução

dos chamados gradientes de campo magnético, é possível variar linearmente em uma dada direção a intensidade do campo magnético.

O novo campo criado localmente com o acionamento do gradiente fará com que a frequência de precessão mude, ou seja, cada posição do tecido na direção de aplicação do gradiente atinja precessão em uma frequência diferente. A Figura 4.7 exemplifica o acionamento do gradiente. A frequência poderá ser usada para localizar espacialmente o sinal.

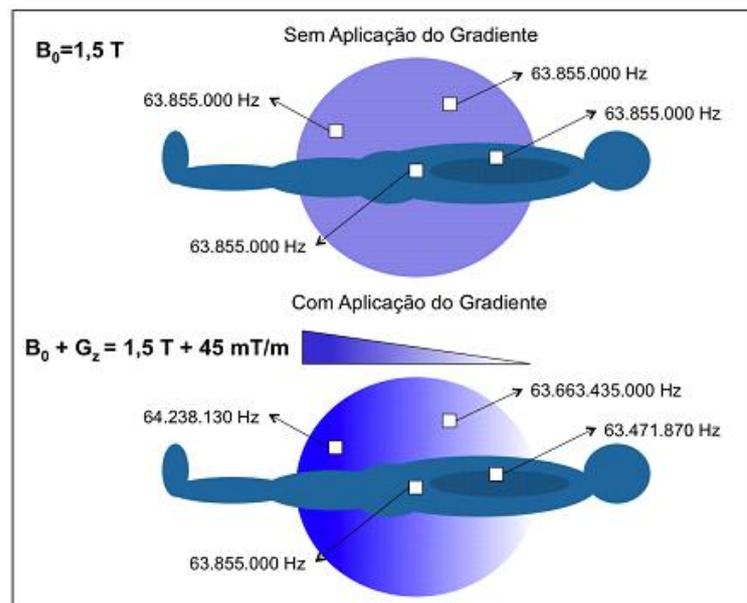


Figura 4.7: Efeito de aplicação de um gradiente de campo magnético na direção do eixo z com amplitude de 45 mT/m. As alterações na frequência de precessão dentro do volume de interesse se modificam de acordo com a posição ao longo do eixo z.

O acionamento de um gradiente de campo também altera a fase dos spins. Esta alteração é proporcional ao tempo que o gradiente fica ligado e amplitude do gradiente. Juntas, fase e frequência poderão fornecer informações espaciais do sinal.

#### 4.1.9 Sequências de pulso

Duas grandes famílias de sequências de pulso são usadas para formar imagens de RM: spin eco (SE) e gradiente eco (GRE).

A sequência de pulso spin eco (SE) se caracteriza pela aplicação de um pulso inicial de RF de 90 graus, seguido de um pulso de RF de 180 graus e a coleta de um eco (Figura

4.8). Uma linha do espaço K é preenchida a cada tempo de repetição (TR).

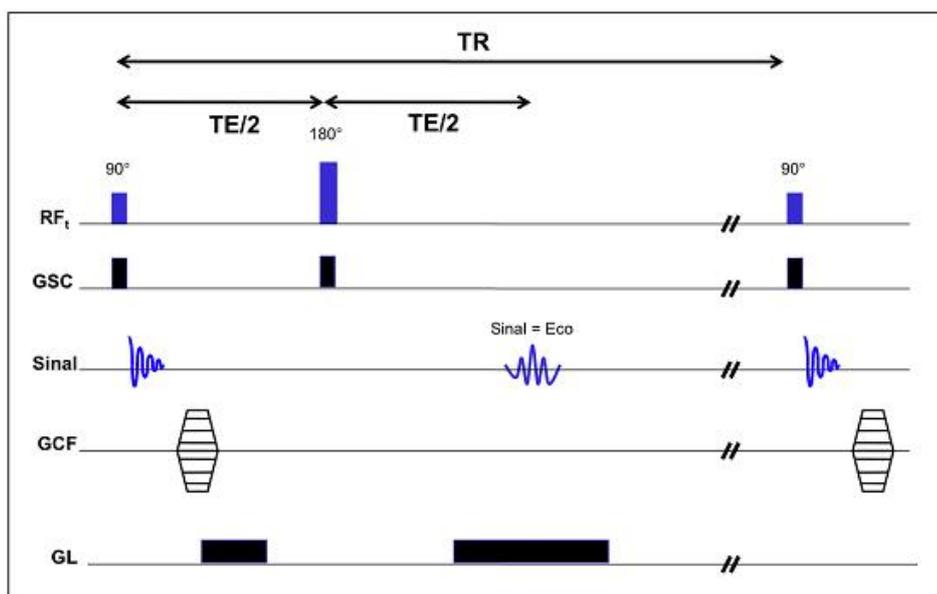


Figura 4.8: Diagrama simplificado da sequência de pulso spin eco mostrando o acionamento dos gradientes de seleção de corte (GSC), codificação de fase (GCF) e codificação de frequência ou de leitura (GL). Sempre que um pulso de RF é transmitido ocorre o acionamento de um gradiente de seleção de corte.

A ponderação na imagem é controlada pelo TR e pelo TE. Os tempos típicos de TR e TE, assim como sua respectiva ponderação na imagem, são apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Tempos de ponderação na imagem em sequências SE

Tempo de repetição (TR)	Tempo de eco (TE)	Ponderação
TR Curto (< 500 ms)	TE Curto (5 a 25 ms)	T1
TR Longo (> 1500 ms)	TE Longo (> 90 ms)	T2
TR Longo (> 1500 ms)	TE Curto (5 a 25 ms)	DP

As sequências de pulso gradiente eco (GRE) são similares à SE, mas ao invés de se usar um pulso de RF de 180 graus para refasar os spins, utiliza-se um gradiente de campo magnético, como mostra a Figura 4.9.

Se os valores de TR, TE e ângulo de desvio do pulso de excitação forem semelhantes aos utilizados em sequências SE, a ponderação na imagem e o tempo de aquisição também serão semelhantes. Entretanto, a GRE é mais sensível a inomogenidades de campo magnético e apresenta mais artefatos na imagem devido a diferenças de susceptibilidade magnética.

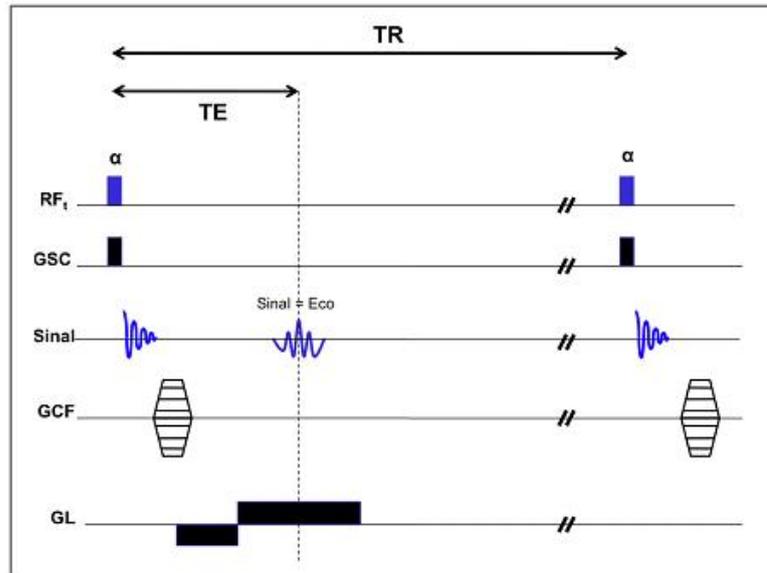


Figura 4.9: Diagrama simplificado da sequência de pulso spin eco mostrando o acionamento dos gradientes de seleção de corte (GSC), codificação de fase (GCF) e codificação de frequência ou de leitura (GL). Sempre que um pulso de RF é transmitido ocorre o acionamento de um gradiente de seleção de corte.

Uma vez que a defasagem e refasagem dos spins para a produção do eco é agora controlada por um gradiente de campo magnético, é possível reduzir brutalmente o TR e o TE; entretanto, faz-se necessária uma redução no ângulo de desvio de forma a obter, entre sucessivos pulsos de excitação, uma quantidade adequada de magnetização longitudinal. A combinação de baixo ângulo de desvio e curto TR e TE é a base para a maioria das chamadas sequências de pulso rápidas de RM.

Outra forma de adquirir imagens rápidas em IRM é fazer uso da sequência de pulso EPI (*Echo Planar Imaging*).

#### 4.1.10 Imagem ecoplanar

A conexão com imagem funcional por RM se torna mais evidente a partir de agora com a descrição da sequência de pulso ecoplanar (EPI). Originalmente descrita por Peter Mansfield em 1977 (Mansfield, 1977) como uma forma teórica de aquisição extremamente rápida, teve que aguardar melhorias nos sistemas de gradientes e radiofrequência para se tornar clinicamente útil. Atualmente, a aquisição de EPI é capaz de adquirir uma imagem

2D em tempos tão curtos quanto 20 milissegundos. Desta forma, desempenhou e continua a desempenhar papel fundamental para o desenvolvimento de aplicações como difusão, perfusão e RMf.

A sequência de pulso EPI se difere das sequências SE e GRE principalmente na forma como os gradientes de codificação de fase e frequência são aplicados (Bernstein *et al.*, 2004). Um esquema inicial de aplicação de pulsos e acionamento de gradientes pode estar baseado em SE ou em GRE. A Figura 4.10 mostra o diagrama de uma sequência de pulso EPI-SE.

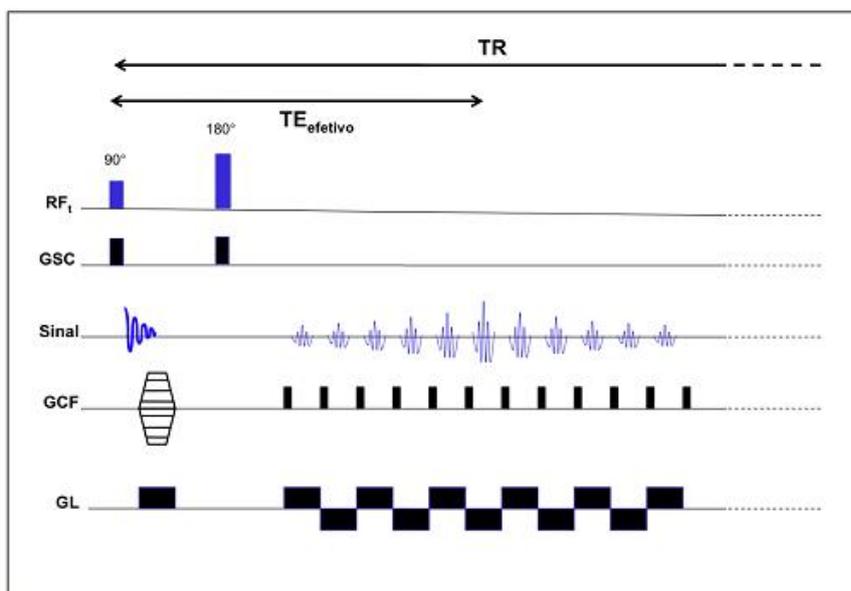


Figura 4.10: Diagrama simplificado de uma sequência de pulso EPI-SE

Um pulso de excitação de 90 graus é enviado, seguido de um pulso de refocalização de 180 graus e, a partir deste ponto, uma série de gradientes bipolares de leitura são empregados para gerar um trem de ecos. Com a aplicação de gradientes codificadores de fase, cada eco é coletado e armazenado em uma linha do espaço K. Se todo o espaço K necessário para formar uma imagem for adquirido dentro de um TR, chamamos a aquisição EPI de “tiro único”.

A sequência de pulso 2D spin eco EPI (EPI-SE) é formada pela aplicação de um pulso inicial de RF de 90 graus e um pulso de refocalização com ângulo de desvio de 180 graus. O pulso de 180 graus irá gerar o eco. Durante a janela de tempo em torno do eco, os gradientes de codificação EPI de leitura e fase serão acionados para produzir uma série de

ecos de gradiente codificados espacialmente (Bernstein *et al.* , 2004) . Os ecos de gradiente que são amostrados para preencher o espaço K foram gerados por um eco de spin ao invés de um SIL como ocorrerá com a EPI-GRE.

A EPI-SE sofre uma redução nos artefatos de susceptibilidade, porém possui sensibilidade reduzida ao efeito que será necessário se obter para o mapeamento cerebral pela RMf. A sequência de pulso EPI-SE é utilizada para a obtenção de imagens ponderadas na difusão da água no tecido cerebral e nas aquisições para o cálculo do tensor de difusão (DTI) (Mukherjee *et al.* , 2008).

A sequência de pulso 2D EPI-GRE tem início com o envio de um pulso de excitação para a produção do SIL. Enquanto o SIL ocorre, uma série de ecos de gradiente é produzida usando os gradientes de codificação EPI de leitura e fase. O pulso de excitação usado é de 90 graus, pois o TR é suficientemente longo.

## 4.2 A Ressonância Magnética Funcional(RMf)

A ressonância magnética funcional é hoje uma técnica estabelecida e amplamente utilizada para o mapeamento da função cerebral. A obtenção de imagens do tecido cerebral que possibilitam localizar regiões que estão envolvidas com a realização de determinadas tarefas é tópico de interesse para a Biologia Molecular, Neurofisiologia e Neuroanatomia. Uma aplicação clínica importante da RMf é o de auxiliar no planejamento neurocirúrgico e radioterápico de tumores cerebrais e outras lesões (Sunaert, 2006; Narayana *et al.* , 2006) . Os dados gerados pela RMf podem ser sobrepostos nas imagens anatômicas e correlacionados com a provável abordagem cirúrgica ou terapêutica a ser adotada, de forma a evitar ou reduzir as complicações decorrentes da mesma.

Em 1991, o artigo de Moonen *et al.* publicado na Science (Moonen *et al.* , 1990) apresentou técnicas de RM como angiografia, perfusão, difusão, transferência de magnetização e espectroscopia como técnicas funcionais de obtenção de imagens em seres humanos. Entretanto, a partir do trabalho de Ogawa em 1990 (Ogawa *et al.* , 1990) , o termo funcional passou a ser aplicado somente para a técnica que será descrita a seguir. Será explorada a RMf baseada no chamado efeito BOLD ( *Blood Oxygenation Level Dependent*), ou dependência no nível de oxigenação do sangue.

Em 1990, Ogawa et al. observaram que os vasos sanguíneos do cérebro de um rato eram originalmente pretos quando este respirava ar numa composição normal; entretanto, passavam a apresentar maior sinal na imagem de RM e perdiam o contraste com o tecido vizinho quando o ar que respiravam atingia uma concentração de 100 % de oxigênio. Os autores perceberam que a mudança de sinal era causada por diferenças nas propriedades magnéticas do sangue. A hemoglobina sem oxigênio (deoxi-hemoglobina) apresenta efeito de susceptibilidade magnética em relação ao tecido vizinho. Já quando o rato respira 100% de oxigênio, o sangue venoso possui uma concentração bem maior de oxi-hemoglobina, deixando de existir diferenças em relação ao tecido vizinho (redução do contraste). Ogawa et al. concluem que é possível utilizar este mecanismo de contraste para visualizar a função cerebral, pois acreditava que, quando ocorre uma ativação numa dada região do tecido cerebral, surgiriam pontos escuros na imagem uma vez que aumentaria o nível de deoxi-hemoglobina devido ao consumo de oxigênio.

As propriedades magnéticas da oxi-hemoglobina e da deoxi-hemoglobina já haviam sido estudadas por Pauling e Coryell em 1936 (Pauling & Coryell, 1930), onde relatam que o estado magnético da hemoglobina muda de acordo com o seu estado de oxigenação. Em 1982, Thulborn e colaboradores (Thulborn *et al.*, 1982) demonstram que o tempo de relaxação T2 do sangue é dependente da concentração de oxigênio.

De fato o que passou a ser observado nas primeiras imagens feitas do tecido cerebral durante a realização de tarefas foi um aumento na intensidade de sinal nas regiões neuronais ativas e não uma redução. Este fato se deve a um aumento no fluxo sanguíneo arterial (oxigenado) bastante maior que o aumento de deoxi-hemoglobina local, causado pelo consumo de oxigênio. Localmente é observada uma redução no nível de deoxi-hemoglobina e um aumento no tempo de relaxação T2. É a maior ou menor concentração de deoxi-hemoglobina que determina o contraste entre os tecidos. O efeito BOLD deveria ser chamado de dependência no nível de oxigenação do sangue, uma vez que é a deoxi-hemoglobina que altera a susceptibilidade magnética. A oxi-hemoglobina é diamagnética e a deoxi-hemoglobina é paramagnética.

Em 1992, Kwong et al., Ogawa et al. e Bandettini et al., assim como outros pesquisadores, publicaram trabalhos mostrando que era possível mapear mudanças de sinal nas

imagens de RM e que estas mudanças estavam diretamente relacionadas com estímulos cerebrais produzidos em cérebros humanos (Kwong *et al.* , 1992; Bandettini *et al.* , 1992).

O físico inglês Michael Faraday tem uma relação muito estreita com os fundamentos que permitiram o desenvolvimento da física relacionada à RMN e à observação deste fenômeno, responsável pela Lei da Indução Eletromagnética (Lei de Faraday) em que uma força eletromotriz é induzida em um condutor quando um campo magnético em torno deste muda. Ao observar atentamente o conteúdo deste artigo, pode-se perceber que é devido à Lei de Faraday que se detecta a variação da magnetização do tecido através das bobinas receptores de um equipamento de IRM. Mas qual seria a relação de Faraday com a RMf?

Essa pergunta começa a ser respondida quando, verificando o trabalho de Ogawa *et al.* de 1990, os autores fazem referência ao trabalho publicado por Thulborn *et al.* em 1982, sendo que este faz referência ao trabalho de Pauling e Coryell, de 1936. Numa curta frase na introdução do trabalho de Pauling e Coryell, os autores mencionam experimentos de Faraday em 1845 (Faraday, 1855) , investigando propriedades magnéticas de amostras de sangue seco. Faraday realmente investigou a resposta de diversos materiais quando colocados sob a ação do campo magnético, dentre eles, o sangue fresco e o sangue seco. Relata que ficou bastante impressionado pelo fato do sangue não ser “magnético”, apesar de conter ferro. Relata, ainda, que se um homem pudesse ser suspenso com suficiente delicadeza e colocado sob ação de um campo magnético, o mesmo não seria defletido por este campo, permanecendo inalterado em termos do alinhamento com o campo externo.

#### 4.2.1 Efeito BOLD e o sinal de RMf

Uma região do córtex cerebral responsável pela função motora dos dedos da mão pode ser considerada em repouso quando o indivíduo não está realizando a movimentação dos mesmos. Neste momento, as concentrações de oxi-hemoglobina e deoxi-hemoglobina estão distribuídas de tal forma que o comportamento magnético da região é igual a todo tecido vizinho. A partir do momento em que os neurônios desta área forem ativados para que o indivíduo inicie a movimentação dos dedos da mãos, haverá um aumento no consumo de oxigênio local e um aumento no fluxo sanguíneo para suprir a região com oxi-hemoglobina.

Como a quantidade suprida de oxi-hemoglobina é muito maior que o consumo para realizar a tarefa, a relação oxi/deoxi-hemoglobina aumenta na região. Esta redução na proporção de deoxi-hemoglobina (paramagnética) torna o tempo T2 local maior, causando aumento local no sinal de RM. Estes eventos que iniciam com o aumento da atividade elétrica e modulam a resposta neurovascular, alteram o sinal de RM no tempo e produzem a chamada função de resposta hemodinâmica.

## 4.2.2 Função de resposta hemodinâmica

A curva mostrada na Figura 4.11 representa a função de resposta hemodinâmica (FRH) para um voxel localizado na área motora descrita anteriormente.

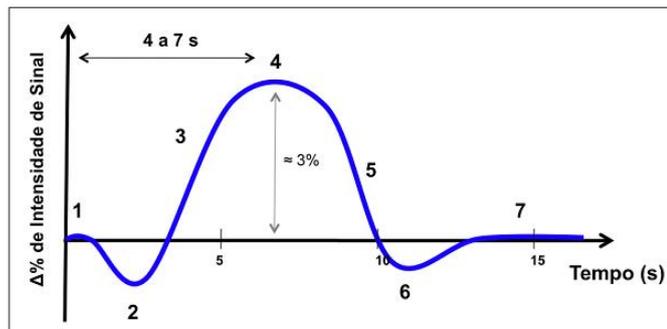


Figura 4.11: Função de resposta hemodinâmica (FRH) com a divisão em sete fases.

A curva apresenta sete fases distintas:

1. linha de base;
2. queda inicial;
3. aumento do sinal BOLD;
4. pico do sinal BOLD;
5. redução do sinal BOLD;
6. queda posterior;
7. retorno à linha de base.

Durante a ativação neuronal, pode ocorrer um aumento na concentração de deoxi-hemoglobina, causando a queda inicial na FRH (fase 2). Logo a seguir, o aumento na relação oxí/deoxi-hemoglobina leva até o pico do sinal BOLD (fases 3 e 4) e pode se manter num platô se o estímulo for mantido por tempo suficiente. Após cessar o estímulo, o sinal retorna à linha de base (fase 7), podendo apresentar uma queda posterior (fase 6). Acredita-se que esta queda deriva de uma demora na normalização do volume sanguíneo regional em relação ao fluxo sanguíneo. Modelos biomecânicos vêm sendo criados e testados experimentalmente para explicar as alterações dinâmicas na oxigenação e no fluxo sanguíneo durante a atividade neural.

A implicação prática é que o efeito BOLD pode ser usado para detectar indiretamente o aumento na atividade neuronal no momento em que um indivíduo realiza uma tarefa em particular, comparativamente a outro momento quando a tarefa não é executada (Figura 4.12).

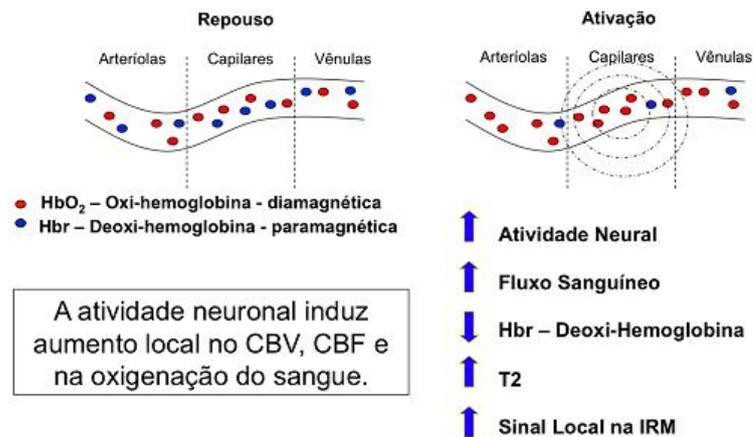


Figura 4.12: Resumo da cadeia de eventos que gera a alteração local de sinal nas imagens de RM

### 4.2.3 Paradigmas

O paradigma representa o conjunto de tarefas cognitivas que o indivíduo deve realizar no momento do exame. Alternar a movimentação do pé com períodos de repouso, ou realizar a leitura de frases projetadas numa tela com a visualização de uma letra no centro da mesma tela, são exemplos de paradigmas simples usados em experimentos de RMf. O desenho de paradigmas é fundamental para a obtenção de resultados nas imagens

que representem a função cerebral a ser estudada. A forma mais simples de fornecer estímulos é em bloco, ou seja, alternando períodos de atividade e de repouso; porém, outras estratégias podem ser adotadas.

#### 4.2.4 Análise das imagens

Existe uma quantidade bastante grande de programas livres ou comerciais para o processamento das imagens de RMf que são fornecidos por diversos grupos de pesquisa espalhados pelo mundo. Programas como o SPM e o FSL (disponível em (FSL, 2010)) são exemplos amplamente usados por pesquisadores. Os fabricantes de equipamentos também fornecem programas comerciais que podem ser instalados em estações de trabalho ou no próprio equipamento para análise, seja após a aquisição das imagens ou em tempo real, durante a execução do exame (disponível em (Mapping, 2010)).

As etapas necessárias para o processamento dos dados de uma aquisição de RMf, e que são comuns a todos os programas, podem ser resumidas nos itens mostrados abaixo. Outras etapas podem ser acrescentadas, dependendo do objetivo do exame ou análise:

- correção de movimento: busca realinhar os volumes adquiridos de forma que pequenos movimentos não atrapalhem a análise posterior;
- aplicação de filtro de suavização: serve para reduzir o ruído das imagens, aumentando a razão sinal-ruído, porém reduzindo a resolução espacial das imagens;
- modelamento com o paradigma e com a FRH: esta etapa cria a função do sinal no tempo esperada para área ativada e modelada com a função de resposta hemodinâmica;
- geração do mapa estatístico e estabelecimento do limiar de visualização: o modelo criado é comparado com o sinal medido pixel-a-pixel e um mapa estatístico é criado para cada corte, onde cada pixel neste mapa possuirá um tom de cinza ou de cor que expressa o grau de correlação entre o modelo e o sinal medido. A este mapa podemos atribuir um limiar estatístico, de forma que só sobrevivam os pixels acima

de um determinado valor, aumentando a confiança de que aquele ponto é realmente uma ativação (Figura 4.13);

- sobreposição em imagens anatômicas: como a resolução espacial da sequência de pulso EPI-GRE é baixa, o mapa contendo as ativações pode ser sobreposto numa imagem anatômica ponderada em T1 de alta resolução.

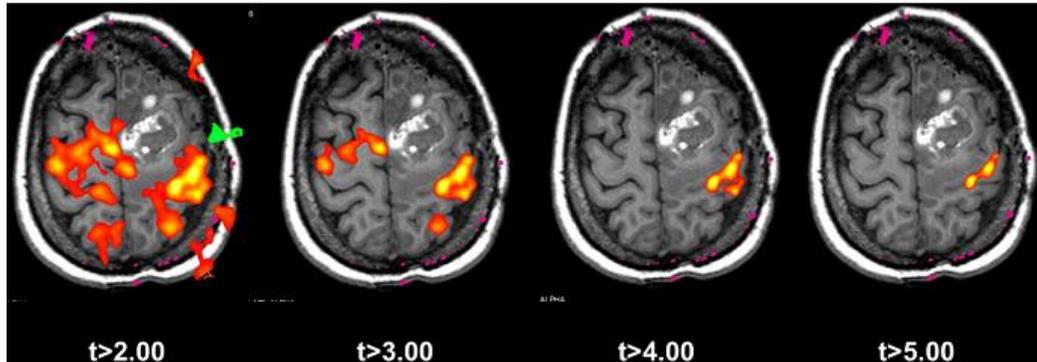


Figura 4.13: Efeito da escolha do limiar estatístico para visualização do mapa de ativação de tarefa motora de movimentação dos dedos da mão direita sobreposto na imagem anatômica ponderada em T1. As imagens foram usadas para o planejamento neurocirúrgico do tumor localizado no lado esquerdo do cérebro.

## 5 Estruturação Matemática do Problema

### 5.1 Modelagem Inicial: Utilizando variáveis dicotômicas

A modelagem com variáveis dicotômicas deve ser utilizada sempre que não existir um problema já estruturado ou para servir como base para a modelagem de um problema mais complexo. As variáveis dicotômicas, por só apresentarem dois estados possíveis, podem tornar a obtenção dos dados dos mecanismos probabilísticos mais rápida. Além disto, ordenando-se as variáveis do vetor de *payoffs* em ordem de importância, é possível obter o ordenamento automático dos referidos vetores, diminuindo consideravelmente o processo de educação da Função Utilidade.

#### 5.1.1 Conjunto dos *Payoffs*

Para estruturação de um problema de teoria da decisão, deve-se sempre começar pelos resultados (*payoffs*) possíveis que poderão ser obtidos. Neste caso, do ponto de vista da Teoria da Decisão, o primeiro conjunto a ser modelado é o conjunto dos *payoffs*, onde:

Os *payoffs* serão definidos pelo vetor:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

em que:

- $p_1$  — Confiabilidade da RMf (Baixa, Alta)
- $p_2$  — Resposta do Exame RMf ao Diagnóstico (Não Esperada, Esperada)
- $p_3$  — Custo Adicional de Exame RMf (Com Custo, Sem Custo)

- $p_4$  — Aderência do Paciente ao Exame RMf (Ruim, Boa)

Quando não se tiver nenhum modelo já estruturado, deve-se começar preferencialmente com um modelo dicotômico, conforme será utilizado neste trabalho, de forma que após realizar a consolidação do mesmo, a quantidade de níveis de cada variável poderá ser aumentada livremente.

Outra particularidade sobre os modelos dicotômicos sugerida por este autor é que, ao se determinar a ordem de preferência das variáveis do vetor  $p$ , já é possível realizar o ordenamento em ordem lexicográfica dos vetores de *payoffs* do problema, visto que a ordem das variáveis já está estabelecida e que como a escala é dicotômica, 0 corresponderá a situação ruim e 1 a situação boa. Isto reduz consideravelmente o processo de educação de preferências pelos *payoffs*, que faz parte do modelamento dos problemas por Teoria da Decisão.

Para colocar variáveis do vetor em ordem de prioridade, de forma que:

$$p_1 \succ p_2 \succ p_3 \succ p_4$$

O vetor  $p$  terá agora o seguinte ordenamento de suas variáveis:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

em que:

- $p_1$  — Confiabilidade da RMf (Baixa, Alta)
- $p_2$  — Aderência do Paciente ao Exame RMf (Ruim, Boa)
- $p_3$  — Resposta do Exame RMf ao Diagnóstico (Não Esperada, Esperada)
- $p_4$  — Custo Adicional de Exame RMf (Com Custo, Sem Custo)

Esta ordenação foi obtida através de especialistas e é decorrente dos seguintes fatos:

- Para os profissionais especialistas na análise de resultados do exame RMf, a variável mais importante é a **Confiabilidade da RMf**). Esta variável diz respeito a qualidade do exame RMF da máquina, em termos da demanda de repetição de exames decorrentes de possíveis falhas técnicas do equipamento. Embora existam recomendações explícitas dos fabricantes das máquinas de RMf acerca da frequência com que procedimentos de manutenção preventiva e corretiva devem ocorrer, nem sempre estas recomendações são respeitadas pelos proprietários dessas máquinas. Como consequência disto, ocorrerá uma variação na quantidade de exames que necessitará ser repetida por problemas de qualidade inerentes à máquina de RMf. Se a máquina estiver com baixa confiabilidade, prejudicará em muito o trabalho do especialista.
- Em segundo vem a **Aderência do paciente ao Exame RMf**. Esta variável passa a ser de grande importância por se tratar de um exame que exigirá estímulos no paciente ao longo de sua realização. Se for constatado que o exame do paciente ficou muito fora do padrão de respostas previsto no protocolo do exame, pode ser um indicativo de que este paciente não estava adequadamente concentrado, o que implicará num viés da resposta deste exame RMf. Como exemplo, imagine-se em uma situação onde se está em uma sala com temperatura em torno de 20 graus celsius (temperatura média da sala do exame RMf, após o almoço, após uma noite de sono mal dormida, em que o especialista estará aplicando testes de raciocínio lógico para estimular regiões específicas de seu cérebro... É possível que uma sonolência ou distração faça com que as respostas do teste saiam erradas ou que outras regiões de seu cérebro sejam ativadas, ao invés das desejadas pelo especialista.
- Em terceiro lugar, vem a **Resposta do exame RMf ao diagnóstico**. Na maioria dos casos, antes de ser demandado um exame RMf, o médico segue uma rotina de testes avaliando o paciente de forma que é sabido quais regiões serão excitadas no exame RMf. Se por um acaso o exame RMf trouxer uma resposta “Não Esperada”, é recomendável a não utilização desse exame para realização de prognóstico. Não obstante a experiência do médico apontar para um dado prognóstico, faz-se

necessária a confirmação por meio do exame. Outro fator que merece destaque está associado aos erros de prognósticos decorrentes de análise de imagens com qualidade inadequada.

- Por último, vem o Custo Adicional de exame RMf que poderá ser ou não necessário, em conformidade com a qualidade do exame RMf.

É importante destacar que este mesmo problema poderia ter seu número de *payoffs* aumentado livremente, a depender das necessidades de detalhamento desejadas. Por exemplo, poderia-se adicionar a variável  $p_5$  como representando a Qualidade do Prognóstico do Exame RMf, o que incrementaria o processo de avaliação da qualidade do exame em termos de seu impacto para o paciente, podendo acarretar em um prognóstico incorreto ou até efeitos colaterais junto ao paciente.

Uma vez estabelecia a ordem de importância das variáveis do vetor *payoff*, obtém-se os 16 *payoffs* possíveis, que seguirão exatamente a ordem decrescente binária, devido às variáveis serem dicotômicas, conforme indicado na tabela 5.1:

Tabela 5.1: Representação ordenada dos *payoffs* do problema - Problema com Variáveis Dicotômicas

$\vec{p}^{16}$	$\vec{p}^{15}$	$\vec{p}^{14}$	$\vec{p}^{13}$	$\vec{p}^{12}$	$\vec{p}^{11}$	$\vec{p}^{10}$	$\vec{p}^9$	$\vec{p}^8$	$\vec{p}^7$	$\vec{p}^6$	$\vec{p}^5$	$\vec{p}^4$	$\vec{p}^3$	$\vec{p}^2$	$\vec{p}^1$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

O índice da linha 01 da tabela 5.1 indica o vetor de *payoff* correspondente, dentre os 16 possíveis. Da tabela obtém-se:

$$\vec{p}^{16} \succ \vec{p}^{15} \succ \dots \succ \vec{p}^2 \succ \vec{p}^1$$

## 5.1.2 Conjunto dos Estados da Natureza

Continuando com a estruturação dos conjuntos para a modelagem do problema, será necessário definir quais serão os Estados da Natureza. Deve-se lembrar que os Estados

da Natureza são variáveis sobre as quais o decisor não exerce nenhuma influência. O verdadeiro Estado da Natureza ocorrerá de forma aleatória, onde o decisor apenas consegue descrever os possíveis cenários que podem ser assumidos.

Para o problema proposto, tem-se a seguinte variável atuando como estado da natureza:

$\theta$  - Qualidade da RMf (Ruim, Boa)

O estado  $\theta_a$  representa a qualidade do exame da RMf. Esta variável se caracteriza como sendo um estado da natureza devido a não se ter a certeza da qualidade que será obtida a partir de um exame RMf. Só se saberá a qualidade do exame após a realização do mesmo. Até é possível se ter uma serie histórica com o registro da qualidade dos últimos exames realizados, o que ajudaria a estimar se o exame teria qualidade boa ou ruim, porém, em termos de incerteza, não seria possível se afirmar sobre a qualidade de um exame RMf.

Deve-se ter em mente que os estados  $\theta$  e as ações influenciarão probabilisticamente nos *payoffs*. Esta influência é representada pela função consequência, a ser modelada nos próximos tópicos.

### 5.1.3 Conjunto das Ações

Com o conhecimento acerca dos Estados da Natureza, será necessário tomar decisões, ou simplesmente agir. Do ponto de vista da Teoria da Decisão, não se distingue entre a decisão de fazer alguma coisa e fazê-la, portanto, decidir fazer alguma coisa equivale a tê-la feito (Campello de Souza, 2007a).

Para o problema propostos, as ações são:

- $a_1$  — Rejeitar o Exame RMf;
- $a_2$  — Aceitar o Exame RMf;

Nas ações listadas, podem ocorrer as seguintes situações:

1. Aceitar um exame de Boa Qualidade (Situação Desejada): Aceitou imagem boa: Indicação do tratamento correto; Déficit ou intrínseco ao método; Paciente satisfeito; Custo satisfatório;

2. Aceitar um exame de Ruim Qualidade (Situação Indesejada — Gera Prognóstico Incorreto): Déficit neurofisiológico; Custo; Paciente não volta; Confiabilidade na RMf; Não existe espaço para análise da imagem;
3. Rejeitar um Exame de Boa Qualidade (Situação Indesejada — Gera Custo Adicional Desnecessariamente): Custo; Perda de credibilidade na equipe técnica; Insatisfação do paciente; Perde o dado (Se for realizar nova imagem o paciente poderá estar com marca-passo; aparelho dentários, etc); Uso excessivo da máquina;
4. Rejeitar um Exame de Ruim Qualidade (Situação Desejada): Custo; Não terá cirurgia; Não tem déficit neurológico; Insatisfação do paciente; Causa intranquilidade ao paciente.

O objetivo do modelo matemático estruturado, é justamente evitar as situações indesejadas listadas acima. O modelo tratará internamente das análises matemáticas e, como resposta, recomendará a aceitação ou rejeição do exame RMf com base nos parâmetros e preferências registradas dos especialistas da área.

### 5.1.4 Conjunto das Observações

As observações são as informações disponíveis que servem como indicador para realizar uma estimativa dos Estados da Natureza. Visto que o Estado da Natureza possui uma imprevisibilidade implícita, o que se faz com as observações é obter dados de outras variáveis que estão disponíveis e podem trazer consigo informações úteis sobre as tendências do Estado da Natureza.

Para o problema proposto, serão utilizadas como variáveis as seguintes observações:

- $x_1$  — Movimento de Translação do Crânio (Não Tolerável, Tolerável);
- $x_2$  — Movimento de Rotação do Crânio (Não Tolerável, Tolerável);
- $x_3$  — Comportamento do Paciente (Não Tolerável, Tolerável);
- $x_4$  — Tempo de Resposta aos Estímulos (Não Aceitável, Aceitável)
- $x_5$  — Registro Qualitativo (Não Aceitável, Aceitável)

Vale destacar que o objetivo das variáveis do vetor de observações é oferecer informações que ajudem o decisor a estimar  $\theta$ . Contudo, deve-se ter em mente que o modelo matemático não afirma que devido às observações ocorrerá um dado  $\theta$ , e sim que a probabilidade de ocorrência será elevada. Deve-se lembrar que não é possível controlar os Estados da Natureza .

### 5.1.5 Escolha da Decisão Ótima com base na regra ótima de decisão

A escolha a decisão ótima será obtida através da Teoria da Decisão (Campello de Souza, 2007a). O problema proposto será solucionado eduzindo-se a Função Consequência, a Função Verossimilhança, a Função Utilidade para os *Payoffs*, a Distribuição a Priori sobre o Estado da Natureza e será calculado o **Risco de Bayes** das Regras de Decisão.

### 5.1.6 Função Consequência

O mundo funciona assim: ao se tomar uma ação inicia-se um mecanismo probabilístico que vai escolher uma consequência ao decisor (Campello de Souza, 2007a). A consequência corresponde à probabilidade condicional de se obter um bem  $p$ , dado que se implementou determinada ação  $a$  e a natureza encontra-se em determinado estado  $\theta$ . Portanto, a probabilidade de se ganhar um bem  $p$  depende não só da ação mas também do estado da natureza. A notação para esse mecanismo probabilístico é  $P(p|\theta, a)$ .

É importante destacar que a Natureza escolherá um  $\theta$  independente do que fizer o decisor, logo a probabilidade de receber um bem  $p$  vai depender tanto de  $\theta$  quanto de  $a$ .

Para o problema proposto, a função consequência será uma matriz 4x16, conforme ilustra a tabela 5.2:

Tabela 5.2: Função Consequência com Variáveis Dicotômicas

Arg Binomial				
	10,0%	9,0%	80,0%	95,0%
$\theta$	$\theta_0$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_1$
$a$	$a_0$	$a_1$	$a_0$	$a_1$
$p_1$	2,06E-01	8,74E-02	3,28E-11	3,05E-20
$p_2$	3,43E-01	2,31E-01	1,97E-09	8,70E-18
$p_3$	2,67E-01	2,86E-01	5,51E-08	1,16E-15
$p_4$	1,29E-01	2,18E-01	9,54E-07	9,52E-14
$p_5$	4,28E-02	1,16E-01	1,15E-05	5,43E-12
$p_6$	1,05E-02	4,49E-02	1,01E-04	2,27E-10
$p_7$	1,94E-03	1,32E-02	6,72E-04	7,19E-09
$p_8$	2,77E-04	3,00E-03	3,45E-03	1,76E-07
$p_9$	3,08E-05	5,29E-04	1,38E-02	3,34E-06
$p_{10}$	2,66E-06	7,26E-05	4,30E-02	4,93E-05
$p_{11}$	1,77E-07	7,68E-06	1,03E-01	5,62E-04
$p_{12}$	8,96E-09	6,16E-07	1,88E-01	4,85E-03
$p_{13}$	3,32E-10	3,63E-08	2,50E-01	3,07E-02
$p_{14}$	8,51E-12	1,48E-09	2,31E-01	1,35E-01
$p_{15}$	1,35E-13	3,72E-11	1,32E-01	3,66E-01
$p_{16}$	1,00E-15	4,38E-13	3,52E-02	4,63E-01

Para facilitar a visualização das distribuições, pode-se ilustrá-las graficamente, conforme figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4:

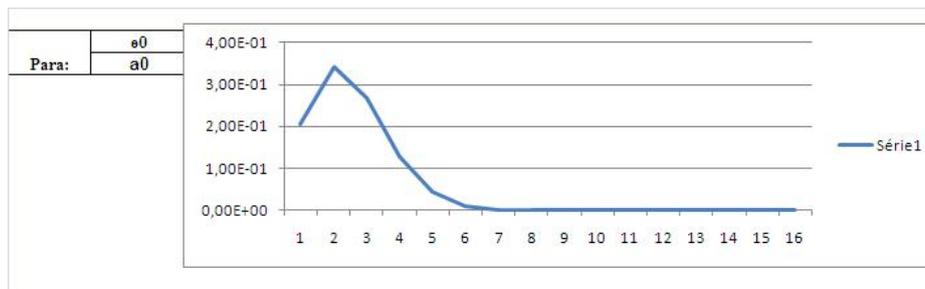


Figura 5.1: Distribuição Gráfica 01 Função Consequência

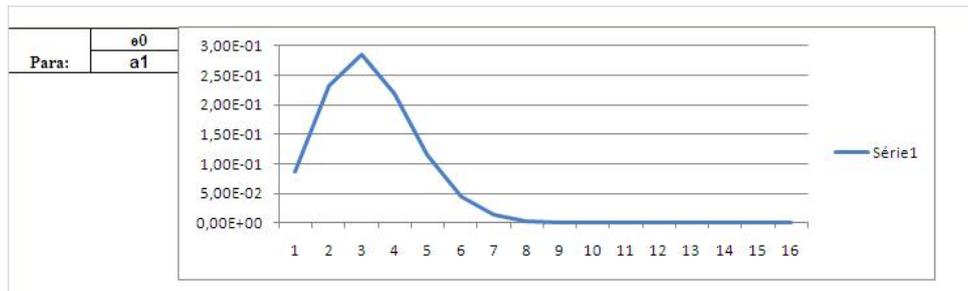


Figura 5.2: Distribuição Gráfica 02 Função Consequência

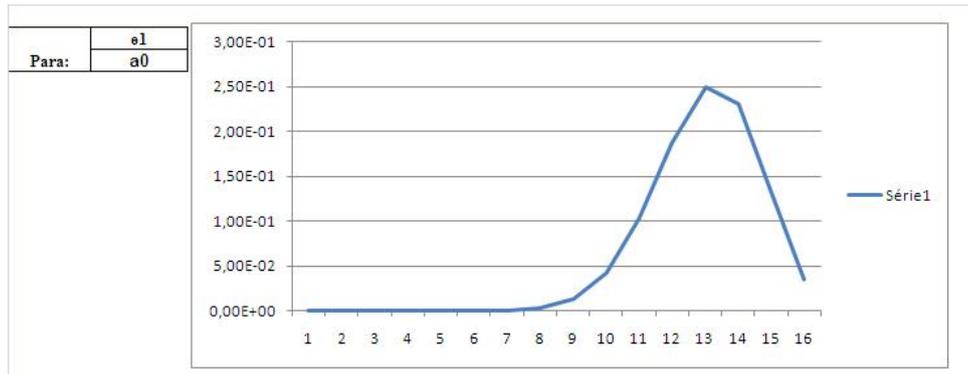


Figura 5.3: Distribuição Gráfica 03 Função Consequência

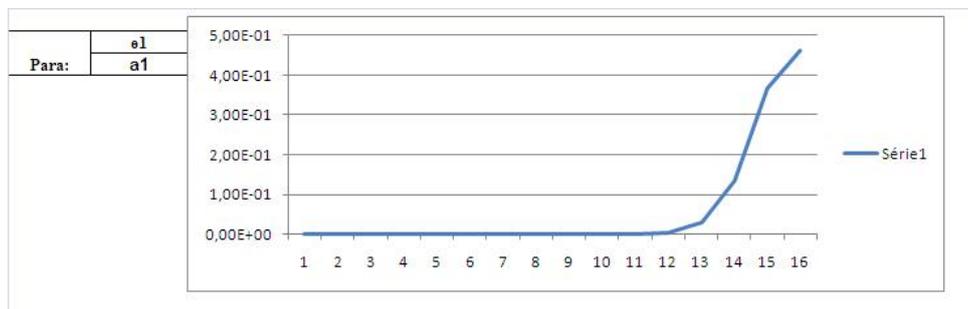


Figura 5.4: Distribuição Gráfica 04 Função Consequência

Os dados das probabilidades de ocorrência dos 16 *payoffs* para cada um dos quatro pares  $(\theta, a)$  devem ser obtidos para em uma escala que varia entre 0 e 1 para cada par  $(\theta, a)$ . Pode-se fazer isto de duas maneiras: através de bases de dados com as informações nelas contidas ou através de especialistas. Em geral, são raros os casos nos quais as corporações possuem bases de dados preparadas para o uso da Teoria da Decisão e após a consulta prévia aos profissionais da área, foi constatada a necessidade de realizar a educação de preferência dos *payoffs* através de especialistas. Para facilitar a obtenção da distribuição probabilística entre os vetores pelos especialistas, utilizou-se a distribuição

binomial:

$$b(x; n; p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

O trabalho com o auxílio da função binomial, ajuda no processo de obtenção da distribuição das probabilidades junto aos especialistas, visto que os *payoffs* já estão ordenados. Deseja-se através do coeficiente inserido entre 0 e 1 na planilha colocar os 16 *payoffs* em ordem de importância dado que já se tem um par  $(\theta, a)$  definidos.

### 5.1.7 Função de Verossimilhança

As observações guardam uma relação probabilística com os estados da natureza; ao se observar determinadas variáveis pode-se estimar a probabilidade de termos um dado estado  $\theta$ . Essa distribuição de probabilidade é denotada por  $P(x | \theta)$ . Representa o canal de comunicação com a natureza, ou seja, diz quanto a observação  $x$  informa sobre o estado da natureza  $\theta$  (Campello de Souza, 2007a).

Para o problema proposto, chegou-se em conjunto com os especialistas à seguinte fórmula para cálculo da função de verossimilhança:

$$\theta_0 = \alpha_0^{\left[\frac{N+1}{\beta_0}\right]}$$

$$\theta_1 = \alpha_1^{\left[\frac{N+1}{\beta_1}\right]}$$

Onde:

$$N = \text{Somatório das coordenadas de } x_i + \text{coordenada4} + \text{coordenada3}$$

Normalizando os valores e obtendo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  dos especialistas, chega-se a tabela 5.3:

Tabela 5.3: Função de Verossimilhança com Variáveis Dicotômicas

$x$	$\beta_0$	$\beta_1$
	2	2
	$\alpha_0$	$\alpha_1$
	0,1	0,1
	$\theta_0$	$\theta_1$
$x_1$	3,162E-01	1,146E-04
$x_2$	1,000E-01	3,624E-04
$x_3$	1,000E-01	3,624E-04
$x_4$	3,162E-02	1,146E-03
$x_5$	1,000E-01	3,624E-04
$x_6$	3,162E-02	1,146E-03
$x_7$	3,162E-02	1,146E-03
$x_8$	1,000E-02	3,624E-03
$x_9$	3,162E-02	1,146E-03
$x_{10}$	1,000E-02	3,624E-03
$x_{11}$	1,000E-02	3,624E-03
$x_{12}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{13}$	1,000E-02	3,624E-03
$x_{14}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{15}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{16}$	1,000E-03	3,624E-02
$x_{17}$	3,162E-02	1,146E-03
$x_{18}$	1,000E-02	3,624E-03
$x_{19}$	1,000E-02	3,624E-03
$x_{20}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{21}$	1,000E-02	3,624E-03
$x_{22}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{23}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{24}$	1,000E-03	3,624E-02
$x_{25}$	3,162E-03	1,146E-02
$x_{26}$	1,000E-03	3,624E-02
$x_{27}$	1,000E-03	3,624E-02
$x_{28}$	3,162E-04	1,146E-01
$x_{29}$	1,000E-03	3,624E-02
$x_{30}$	3,162E-04	1,146E-01
$x_{31}$	3,162E-04	1,146E-01
$x_{32}$	1,000E-04	3,624E-01

### 5.1.8 Distribuição *a Priori*

A distribuição *a priori* traz um indicativo sobre os Estado da Natureza sob o ponto de vista de seu comportamento histórico. É pouco provável que não exista algum conhecimento sobre o comportamento de  $\theta$ . A incerteza probabilística acerca da distribuição a priori  $\pi(\theta)$  pode ser proveniente de duas fontes: uma base de dados com esses registros ou o conhecimento de um ou um grupo de especialistas no assunto.

No problema proposto, a educação do conhecimento *a priori* foi obtida de especialistas, chegando aos valores da tabela 5.4.

Tabela 5.4: Função de Distribuição *a Priori*

$\theta$	$\pi(\theta)$
$\theta_1$	0,40
$\theta_2$	0,60

### 5.1.9 Função Utilidade

A função utilidade para o problema proposto foi eduzida a partir de modelagem matemática junto aos especialistas, considerando três escalas:  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ . Este método, intitulado de método das escalas superpostas, descrito em detalhes em (Campello de Souza, 2007a), é de grande utilidade por dividir um problema maior em partes menores. Isto ajudou na obtenção de dados junto aos especialistas.

A primeira escala vai dos *payoffs* de  $p_1$  a  $p_7$ , a segunda dos *payoffs* de  $p_6$  a  $p_{12}$  e a terceira dos *payoffs* de  $p_{11}$  a  $p_{16}$ . Existem elementos que sobrepõem a escala com intuito de realizar correção na margem de erro do processo. Na primeira escala, o pior *payoff* é  $p_1$  e o melhor é  $p_7$ . Há que se perguntar ao decisor, nessa escala, para qual valor de  $\lambda$  ele se sente indiferente entre receber o *payoff*  $p_j$ ,  $j = 2, 3, 4, 5, 6$  com probabilidade 1, ou um jogo no qual ele recebe  $p_7$  com probabilidade  $\lambda$  ou  $p_1$ , com probabilidade  $1 - \lambda$ . O mesmo deverá ser feito nas demais escalas.

A tabela 5.5 ilustra as escalas:

Tabela 5.5: Divisão do questionário em 03 escalas, para facilitar a educação

				Escala 02								Escala 01			
Escala 03												Escala 01			
$\vec{p}^{16}$	$\vec{p}^{15}$	$\vec{p}^{14}$	$\vec{p}^{13}$	$\vec{p}^{12}$	$\vec{p}^{11}$	$\vec{p}^{10}$	$\vec{p}^9$	$\vec{p}^8$	$\vec{p}^7$	$\vec{p}^6$	$\vec{p}^5$	$\vec{p}^4$	$\vec{p}^3$	$\vec{p}^2$	$\vec{p}^1$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

A função utilidade do decisor para a Função Consequência, será calculada por:

$$u(P(p|\theta, d(x))) \quad (5.1.1)$$

A utilidade desta distribuição é dada por:

$$u(P(p|\theta, d)) = \sum_p v(p) \sum_x P(x|\theta)P(p|\theta, d(x)) \quad (5.1.2)$$

Em Teoria da Decisão trabalha-se com perdas. A perda é definida simplesmente como o negativo da utilidade:

$$L(\theta, d(x)) = -u(P(p|\theta, d(x))) \quad (5.1.3)$$

Após a educação dos valores de utilidade dos *payoffs* pelo especialista, chega-se a tabela 5.6. É importante salientar que a utilidade está representando o grau de preferência entre 0 e 1 dos 16 *payoffs* do problema. As escalas de cada faixa foram normalizadas para uma única faixa. De uma forma geral, a preferência sempre será maior pelos melhores *payoffs*. Deseja-se saber com a utilidade qual é o grau de preferência entre os *payoffs*.

Tabela 5.6: Função Utilidade - Variáveis Dicotômicas

$p$	$\mathbf{u}(\mathbf{p})$
$p_1$	0,00
$p_2$	0,11
$p_3$	0,21
$p_4$	0,32
$p_5$	0,44
$p_6$	0,58
$p_7$	0,73
$p_8$	0,79
$p_9$	0,84
$p_{10}$	0,88
$p_{11}$	0,93
$p_{12}$	0,97
$p_{13}$	0,98
$p_{14}$	0,99
$p_{15}$	0,99
$p_{16}$	1,00

### 5.1.10 As Regras de Decisão

Campello de Souza (Campello de Souza, 2007a) refere que tomar decisões é escolher uma ação dentre várias disponíveis; trata-se de utilizar o que se sabe e o que se pode, a fim de se obter o que se quer.

A Teoria da Decisão sistematiza esse processo através de um conjunto de regras de decisão. Estas regras são funções que associam a cada observação uma ação:

$$d : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A} \quad (5.1.4)$$

$$x \mapsto d(x)=a$$

A associação pode ser determinística ou probabilística (Campello de Souza, 2007a). As regras são explicitadas e comparadas; a que minimizar o risco, para qualquer estado da natureza, deverá ser a adotada. O risco é a perda esperada da regra de decisão sobre repetição hipotética de um experimento que dá origem às observações  $x$  como função do parâmetro  $\theta$ .

Campello de Souza (Campello de Souza, 2007a) descreve a metodologia utilizada no processo de escolha da decisão. Após a definição dos conjuntos básicos e dos mecanismos

probabilísticos envolvidos, chega-se à escolha de uma decisão. O número de regras de decisões possíveis é dado por:

$$||\mathcal{D}|| = ||\mathcal{A}||^{||\mathcal{X}||} \quad (5.1.5)$$

No problema proposto, o total de regras de decisão será  $2^{32} = 4.294.967.296$ . É possível resolver este problema em uma planilha eletrônica, todavia, qualquer mudança geraria um grande esforço na modificação das formulas e contas envolvidas. Para evitar esta grande quantidade de regras de decisão, é possível trabalhar com regras de decisão otimizadas, de forma que ao invés de  $2^{32}$ , seriam necessárias apenas 32 regras de decisão otimizadas.

As equações encontram-se desenvolvidas na planilha eletrônica, anexa a este trabalho. Uma vez que o objetivo é desenvolver uma ferramenta que auxilie o decisor (médico) a aceitar ou rejeitar um exame de RMf, com base no vetor de observações, tem-se a seguinte tabela de riscos associados a cada uma das 32 regras de decisão, conforme ilustra a tabela 5.7:

Tabela 5.7: Regras de Decisão Otimizadas - Variáveis Dicotômicas

$x$	$a_1$	$a_0$	Menor Risco
$x_1$	0,161	0,145	$a_0$
$x_2$	0,165	0,149	$a_0$
$x_3$	0,165	0,149	$a_0$
$x_4$	0,202	0,188	$a_0$
$x_5$	0,165	0,149	$a_0$
$x_6$	0,202	0,188	$a_0$
$x_7$	0,202	0,188	$a_0$
$x_8$	0,445	0,444	$a_0$
$x_9$	0,202	0,188	$a_0$
$x_{10}$	0,445	0,444	$a_0$
$x_{11}$	0,445	0,444	$a_0$
$x_{12}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{13}$	0,445	0,444	$a_0$
$x_{14}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{15}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{16}$	0,954	0,980	$a_1$
$x_{17}$	0,202	0,188	$a_0$
$x_{18}$	0,445	0,444	$a_0$
$x_{19}$	0,445	0,444	$a_0$
$x_{20}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{21}$	0,445	0,444	$a_0$
$x_{22}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{23}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{24}$	0,954	0,980	$a_1$
$x_{25}$	0,843	0,863	$a_1$
$x_{26}$	0,954	0,980	$a_1$
$x_{27}$	0,954	0,980	$a_1$
$x_{28}$	0,968	0,993	$a_1$
$x_{29}$	0,954	0,980	$a_1$
$x_{30}$	0,968	0,993	$a_1$
$x_{31}$	0,968	0,993	$a_1$
$x_{32}$	0,969	0,995	$a_1$

## 5.2 Modelagem de um problema Real: Utilizando variáveis indicadas pelo grupo de pesquisa em RMf de São Paulo

A modelagem abaixo tratará da solução de um problema real, cujo as variáveis estão com nível de detalhamento dentro do especificado para a utilização deste modelo como ferramenta de apoio à tomada de decisões médicas, acerca de aceitar ou rejeitar exames de RMf.

Visando a padronização da metodologia utilizada, serão repetidos os tópicos e textos utilizados na estruturação matemática do problema ilustrados com variáveis dicotômicas.

### 5.2.1 Conjunto dos *Payoffs*

Para estruturação de um problema de teoria da decisão, deve-se sempre começar pelos resultados (*payoffs*) possíveis que poderão ser obtidos. Neste caso, do ponto de vista da Teoria da Decisão, o primeiro conjunto a ser modelado é o conjunto dos *payoffs*, onde:

Os *payoffs* serão definidos pelo vetor:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

em que:

- $p_1$  — Confiabilidade da RMf (Baixa, Alta)
- $p_2$  — Aderência do Paciente ao Exame RMf (acima de 80% = 4, entre 60% e 80% = 3, entre 40% e 60% = 2, entre 20% e 40% = 1, abaixo de 20% = 0)
- $p_3$  — Resposta do Exame RMf ao Diagnóstico (Diagnóstico ESPERADO = 2, Diagnóstico NÃO ESPERADO = 1, Diagnóstico NÃO INTERPRETÁVEL = 0)
- $p_4$  — Custo Adicional de Exame RMf (Com Custo, Sem Custo)

Esta ordenação já havia sido obtida na modelagem matemática com variáveis dicotômicas, e é decorrente dos seguintes fatos:

- Para os profissionais especialistas na análise de resultados do exame RMf, a variável mais importante é a **Confiabilidade da RMf**). Esta variável diz respeito a qualidade do exame RMF da máquina, em termos da demanda de repetição de exames decorrentes de possíveis falhas técnicas do equipamento. Embora existam recomendações explícitas dos fabricantes das máquinas de RMf acerca da frequência com que procedimentos de manutenção preventiva e corretiva devem ocorrer, nem sempre estas recomendações são respeitadas pelos proprietários dessas máquinas. Como consequência disto, ocorrerá uma variação na quantidade de exames que necessitará ser repetida por problemas de qualidade inerentes à máquina de RMf. Se a máquina estiver com baixa confiabilidade, prejudicará em muito o trabalho do especialista.
- Em segundo vem a **Aderência do paciente ao Exame RMf**. Esta a variável passa a ser de grande importância devido a se tratar de um exame que exigirá estímulos no paciente ao longo de sua realização. Se for constatado que o exame do paciente ficou muito fora do padrão de respostas previsto no protocolo do exame, pode ser um indicativo de que este paciente não estava adequadamente concentrado, o que implicará num viés da resposta deste exame RMf. Como exemplo, pode-se imaginar uma situação em que o paciente chega em uma sala com temperatura em torno de 20 graus celsius (temperatura média da sala do exame RMf, após o almoço, após uma noite de sono mal dormida, onde serão aplicados pelo especialista testes de raciocínio lógico para estimular regiões específicas do cérebro... É possível que uma sonolência ou distração faça com que as respostas do teste saiam fora do padrão esperado ou que outras regiões do cérebro do paciente sejam ativadas, ao invés das desejadas pelo especialista.
- Em terceiro lugar, vem a **Resposta do exame RMf ao diagnóstico**. Na maioria dos casos, antes de ser demandado um exame RMf, o médico segue uma rotina de testes avaliando o paciente de forma que é sabido quais regiões serão excitadas no exame RMf. Se por um acaso o exame RMf trouxer uma resposta “Não Espe-

rada”, é recomendável a não utilização desse exame para realização de prognóstico. Não obstante a experiência do médico apontar para um dado prognóstico, faz-se necessária a confirmação por meio do exame. Outro fator que merece destaque está associado aos erros de prognósticos decorrentes de análise de imagens com qualidade inadequada.

- Por último, vem o Custo Adicional de exame RMf que poderá ser ou não necessário, em conformidade com a qualidade do exame RMf.

É importante destacar que este mesmo problema poderia ter seu número de *payoffs* aumentado livremente, a depender das necessidades de detalhamento desejadas. Por exemplo, poderia-se adicionar a variável  $p_5$  como representando a Qualidade do Prognóstico do Exame RMf, o que incrementaria o processo de avaliação da qualidade do exame em termos de seu impacto para o paciente, podendo acarretar em um prognóstico incorreto ou até efeitos colaterais junto ao paciente.

Ao consultar os especialistas, foi constatado que a ordem de crescimento numérico, respeitando a base numérica de cada variável do vetor. Assim sendo, chega-se a tabela 5.8:

Tabela 5.8: Ordenamento de Payoffs - Variáveis Multinível

Vetor	Coordenadas			
	p4	p3	p2	p1
p1	0	0	0	0
p2	0	0	0	1
p3	0	0	1	0
p4	0	0	1	1
p5	0	0	2	0
p6	0	0	2	1
p7	0	1	0	0
p8	0	1	0	1
p9	0	1	1	0
p10	0	1	1	1
p11	0	1	2	0
p12	0	1	2	1
p13	0	2	0	0
p14	0	2	0	1
p15	0	2	1	0
p16	0	2	1	1
p17	0	2	2	0
p18	0	2	2	1
p19	0	3	0	0
p20	0	3	0	1
p21	0	3	1	0
p22	0	3	1	1
p23	0	3	2	0
p24	0	3	2	1
p25	0	4	0	0
p26	0	4	0	1
p27	0	4	1	0
p28	0	4	1	1
p29	0	4	2	0
p30	0	4	2	1
p31	1	0	0	0
p32	1	0	0	1
p33	1	0	1	0
p34	1	0	1	1
p35	1	0	2	0
p36	1	0	2	1
p37	1	1	0	0
p38	1	1	0	1
p39	1	1	1	0
p40	1	1	1	1
p41	1	1	2	0
p42	1	1	2	1
p43	1	2	0	0
p44	1	2	0	1
p45	1	2	1	0
p46	1	2	1	1
p47	1	2	2	0
p48	1	2	2	1
p49	1	3	0	0
p50	1	3	0	1
p51	1	3	1	0
p52	1	3	1	1
p53	1	3	2	0
p54	1	3	2	1
p55	1	4	0	0
p56	1	4	0	1
p57	1	4	1	0
p58	1	4	1	1
p59	1	4	2	0
p60	1	4	2	1

Onde:

$$\vec{p}^{60} \succ \vec{p}^{59} \succ \dots \succ \vec{p}^2 \succ \vec{p}^1$$

Deve-se destacar que este ordenamento foi uma feliz coincidência e que poderão ocorrer casos onde o ordenamento de preferência dos vetores de *payoffs* seja diferente, demandando um ordenamento minucioso junto ao especialista.

## 5.2.2 Conjunto dos Estados da Natureza

Continuando com a estruturação dos conjuntos para a modelagem do problema, será necessário definir quais serão os Estados da Natureza. Devemos lembrar que os Estados da Natureza são variáveis sobre as quais o decisor não exerce nenhuma influência. O verdadeiro Estado da Natureza ocorrerá de forma aleatória, onde o decisor apenas consegue descrever os possíveis cenários que podem ser assumidos.

Para o problema proposto, temos a seguinte variável atuando como estado da natureza:

$\theta$  - Qualidade da RMf (Ruim, Boa)

O estado  $\theta_a$  representa a qualidade do exame da RMf. Esta variável se caracteriza como sendo um estado da natureza devido a não termos a certeza da qualidade que será obtida a partir de um exame RMf. Só saberemos se a qualidade foi boa ou ruim após a realização do exame. Até é possível se ter uma serie histórica com o registro da qualidade dos últimos exames realizados, o que ajudaria a estimar se o exame teria qualidade boa ou ruim, porém, em termos de incerteza, não seria possível afirmar que qualidade teríamos de um exame RMf.

Deve-se ter em mente que os estados  $\theta$  e as ações influenciarão probabilisticamente nos *payoffs*. Esta influência é representada pela função consequência, a ser modelada nos próximos tópicos.

## 5.2.3 Conjunto das Ações

Ao termos conhecimento acerca dos Estados da Natureza, teremos que tomar decisões, ou simplesmente agir. Do ponto de vista da Teoria da Decisão, não se distingue entre a

decisão de fazer alguma coisa e fazê-la, portanto, decidir fazer alguma coisa equivale a tê-la feito (Campello de Souza, 2007a).

Para o problema propostos, as ações são:

- $a_1$  — Rejeitar o Exame RMf;
- $a_2$  — Aceitar o Exame RMf;

Nas ações listadas, podem ocorrer as seguintes situações:

1. Aceitar um exame de Boa Qualidade (Situação Desejada): Aceitou imagem boa: Indicação do tratamento correto, Déficit ou intrínseco ao método, Paciente satisfeito, Custo satisfatório;
2. Aceitar um exame de Ruim Qualidade (Situação Indesejada — Gera Prognóstico Incorreto): Déficit neurofisiológico, Custo, Paciente não volta, Confiabilidade na RMf, Não existe espaço para análise da imagem;
3. Rejeitar um Exame Boa Qualidade (Situação Indesejada — Gera Custo Adicional Desnecessariamente): Custo, Perda de credibilidade na equipe técnica, Insatisfação do paciente, Perde o dado (Se for realizar nova imagem o paciente poderá estar com marca-passo, aparelho dentários, etc), Uso excessivo da máquina;
4. Rejeitar um Exame Ruim Qualidade (Situação Desejada): Custo, Não terá cirurgia, Não tem déficit neurológico, Insatisfação do paciente, Causa intranquilidade ao paciente.

O objetivo do modelo matemático estruturado, é justamente evitar as situações indesejadas listadas acima. O modelo tratará internamente das análises matemáticas e, como resposta, recomendará a aceitação ou rejeição do exame RMf com base nos parâmetros e preferências registradas dos especialistas da área.

## 5.2.4 Conjunto das Observações

As observações são as informações disponíveis que servem como indicador para realizar uma estimativa dos Estados da Natureza. Visto que o Estado da Natureza possui uma

imprevisibilidade implícita, o que se faz com as observações é obter dados de outras variáveis que estão disponíveis e podem trazer consigo informações úteis sobre as tendências do Estado da Natureza.

Para o problema proposto, teremos como variáveis as seguintes observações:

- $x_1$  — Movimento de Translação (Menor que 10% = 2, Entre 10% e 20% = 1, Maior que 20% = 0);
- $x_2$  — Movimento de Rotação (Até 1 grau = 2, entre 1 e 3 graus = 1, maior que 3 graus = 0);
- $x_3$  — Comportamento do Paciente (Acertos entre 25% e 75% = 2, acertos de 10% a 25% ou de 75% a 90% = 1, Acertos menor que 10% ou maior que 90% = 0);
- $x_4$  — Tempo de Resposta (entre 25% e 75% = 2, de 10% a 25% ou de 75% a 90% = 1, menor que 10% ou maior que 90% = 0)
- $x_5$  — Registro Qualitativo (excelente (acima de nota 8) = 4, bom (nota entre 6 e 8) = 3, mediano (nota entre 4 e 6) = 2, ruim (nota entre 2 e 4) = 1 e péssimo (nota entre 0 e 2) = 0)

Vale destacar que o objetivo das variáveis do vetor de observações é oferecer informações que ajudem o decisor a estimar  $\theta$ . Contudo, deve-se ter em mente que o modelo matemático não afirma que devido às observações teremos a ocorrência de um dado  $\theta$ , e sim que a probabilidade de ocorrência será elevada. Deve-se lembrar que não é possível controlar o Estado da Natureza .

### 5.2.5 Escolha da Decisão Ótima com base na regra ótima de decisão

A escolha a decisão ótima será obtida através da Teoria da Decisão (Campello de Souza, 2007a). O problema proposto será solucionado eduzindo-se a Função Consequência, a Função Verossimilhança, a Função Utilidade para os *Payoffs*, a Distribuição a Priori sobre o Estado da Natureza e será calculado o **Risco de Bayes** das Regras de Decisão.

## 5.2.6 Função Consequência

O mundo funciona assim: ao se tomar uma ação inicia-se um mecanismo probabilístico que vai escolher uma consequência ao decisor (Campello de Souza, 2007a). A consequência corresponde à probabilidade condicional de se obter um bem  $p$ , dado que se implementou determinada ação  $a$  e a natureza encontra-se em determinado estado  $\theta$ . Portanto, a probabilidade de se ganhar um bem  $p$  depende não só da ação mas também do estado da natureza. A notação para esse mecanismo probabilístico é  $P(p|\theta, a)$ .

É importante destacar que a Natureza escolherá um  $\theta$  independente do que fizer o decisor, logo a probabilidade de receber um bem  $p$  vai depender tanto de  $\theta$  quanto de  $a$ .

Para o problema proposto, a função consequência será uma matriz  $4 \times 60$ , conforme ilustra a tabela 5.9:

Tabela 5.9: Função Consequência - Variáveis Multinível

Arg da Binomial				
$\theta$	10,0%	9,0%	80,0%	95,0%
$\theta_0$	$\theta_0$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_1$
$a$	$a_0$	$a_1$	$a_0$	$a_1$
$p_1$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_2$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_3$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_4$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_5$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_6$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_7$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_8$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_9$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{10}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{11}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{12}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{13}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{14}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{15}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{16}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{17}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{18}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{19}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{20}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{21}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{22}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{23}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{24}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{25}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{26}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{27}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{28}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{29}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{30}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{31}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{32}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{33}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{34}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{35}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{36}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{37}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{38}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{39}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{40}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{41}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{42}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{43}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{44}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{45}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{46}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{47}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{48}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{49}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{50}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{51}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{52}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{53}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{54}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{55}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{56}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{57}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{58}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{59}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77
$p_{60}$	2,00E-03	3,83E-03	5,76E-42	1,73E-77

Para facilitar a visualização das distribuições, pode-se ilustrá-las graficamente, conforme figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10:

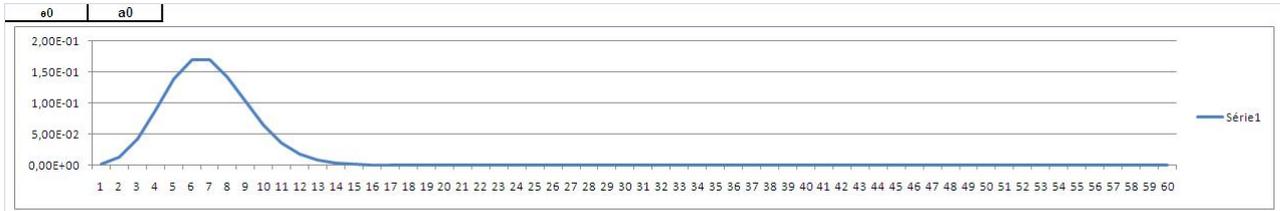


Figura 5.5: Distribuição Gráfica 01 Função Consequência

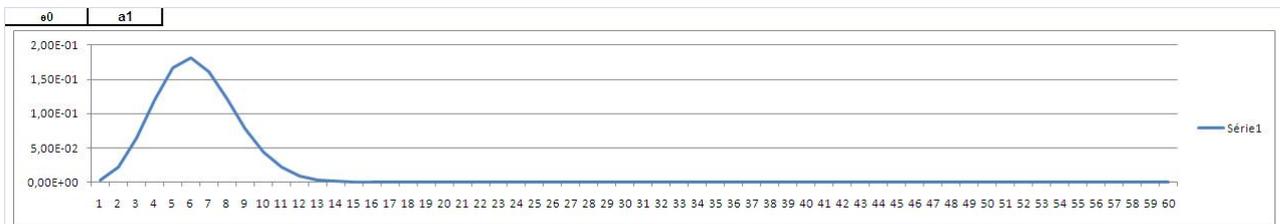


Figura 5.6: Distribuição Gráfica 02 Função Consequência

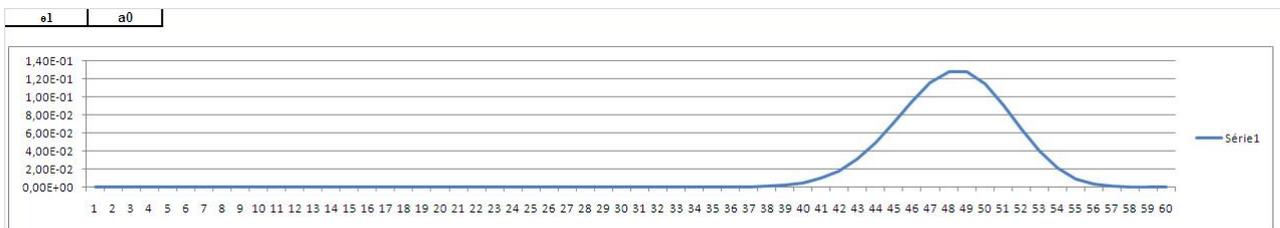


Figura 5.7: Distribuição Gráfica 03 Função Consequência

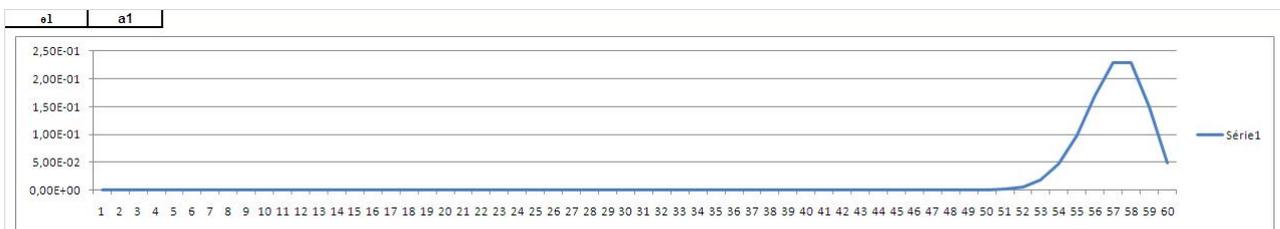


Figura 5.8: Distribuição Gráfica 04 Função Consequência

Os dados das probabilidades de ocorrência dos 60 *payoffs* para cada um dos quatro pares  $(\theta, a)$  devem ser obtidos para em uma escala que varia entre 0 e 1 para cada par  $(\theta, a)$ . Pode-se fazer isto de duas maneiras: através de bases de dados com as informações nelas contidas ou através de especialistas. Em geral, são raros os casos nos quais as corporações possuem bases de dados preparadas para o uso da Teoria da Decisão e após a consulta prévia aos profissionais da área, foi constatada a necessidade de realizar a educação de preferência dos *payoffs* através de especialistas. Para facilitar a obtenção da distribuição probabilística entre os vetores pelos especialistas, utilizou-se a distribuição binomial:

$$b(x; n; p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

O trabalho com o auxílio da função binomial, ajuda no processo de obtenção da distribuição das probabilidades junto aos especialistas, visto que os *payoffs* já estão ordenados. Deseja-se através do coeficiente inserido entre 0 e 1 na planilha colocar os 60 *payoffs* em ordem de importância dado que já se tem um par  $(\theta, a)$  definidos.

### 5.2.7 Função de Verossimilhança

As observações guardam uma relação probabilística com os estados da natureza; ao se observar determinadas variáveis pode-se estimar a probabilidade de termos um dado estado  $\theta$ . Essa distribuição de probabilidade é denotada por  $P(x|\theta)$ . Representa o canal de comunicação com a natureza, ou seja, diz quanto a observação  $x$  informa sobre o estado da natureza  $\theta$  (Campello de Souza, 2007a).

Para o problema proposto, chegou-se em conjunto com os especialistas à seguinte fórmula para cálculo da função de verossimilhança:

$$\theta_0 = \alpha_0^{\left[\frac{N+1}{\beta_0}\right]}$$

$$\theta_1 = \alpha_1^{\left[\frac{N+1}{\beta_1}\right]}$$

Onde:

$$N = \text{Somatório das coordenadas de } x_i + 3 \cdot (\text{coordenada4}) \cdot (\text{coordenada3})$$

Normalizando os valores e obtendo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  dos especialistas, chega-se as tabelas 5.10 e 5.11:

Tabela 5.10: Função de Verossimilhança -  $x_1$  à  $x_{210}$ 

$x$	$\beta_0$	$\beta_1$	$x$	$\beta_0$	$\beta_1$	$x$	$\beta_0$	$\beta_1$
	2	2		2	2			
	$\alpha_0$	$\alpha_1$		$\alpha_0$	$\alpha_1$			
	0,1	0,1		0,1	0,1			
$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_0$	$\theta_1$			
$x_1$	3,2E-01	3,4E-13	$x_{71}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{141}$	3,2E-02	3,4E-12
$x_2$	1,0E-01	1,1E-12	$x_{72}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{142}$	1,0E-02	1,1E-11
$x_3$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{73}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{143}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_4$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{74}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{144}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_5$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{75}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{145}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_6$	1,0E-01	1,1E-12	$x_{76}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{146}$	1,0E-02	1,1E-11
$x_7$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{77}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{147}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_8$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{78}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{148}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_9$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{79}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{149}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{10}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{80}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{150}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{11}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{81}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{151}$	3,2E-02	3,4E-12
$x_{12}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{82}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{152}$	1,0E-02	1,1E-11
$x_{13}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{83}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{153}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_{14}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{84}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{154}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{15}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{85}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{155}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{16}$	1,0E-01	1,1E-12	$x_{86}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{156}$	1,0E-02	1,1E-11
$x_{17}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{87}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{157}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_{18}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{88}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{158}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{19}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{89}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{159}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{20}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{90}$	1,0E-05	1,1E-08	$x_{160}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{21}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{91}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{161}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_{22}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{92}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{162}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{23}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{93}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{163}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{24}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{94}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{164}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{25}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{95}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{165}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{26}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{96}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{166}$	1,0E-02	1,1E-11
$x_{27}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{97}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{167}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_{28}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{98}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{168}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{29}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{99}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{169}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{30}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{100}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{170}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{31}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{101}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{171}$	3,2E-03	3,4E-11
$x_{32}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{102}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{172}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{33}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{103}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{173}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{34}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{104}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{174}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{35}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{105}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{175}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{36}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{106}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{176}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{37}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{107}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{177}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{38}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{108}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{178}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{39}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{109}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{179}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{40}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{110}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{180}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{41}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{111}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{181}$	1,0E-03	1,1E-10
$x_{42}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{112}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{182}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{43}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{113}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{183}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{44}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{114}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{184}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{45}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{115}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{185}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{46}$	1,0E-01	1,1E-12	$x_{116}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{186}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{47}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{117}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{187}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{48}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{118}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{188}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{49}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{119}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{189}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{50}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{120}$	1,0E-05	1,1E-08	$x_{190}$	3,2E-06	3,4E-08
$x_{51}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{121}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{191}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{52}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{122}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{192}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{53}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{123}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{193}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{54}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{124}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{194}$	3,2E-06	3,4E-08
$x_{55}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{125}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{195}$	1,0E-06	1,1E-07
$x_{56}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{126}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{196}$	3,2E-04	3,4E-10
$x_{57}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{127}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{197}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{58}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{128}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{198}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{59}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{129}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{199}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{60}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{130}$	1,0E-05	1,1E-08	$x_{200}$	3,2E-06	3,4E-08
$x_{61}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{131}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{201}$	1,0E-04	1,1E-09
$x_{62}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{132}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{202}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{63}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{133}$	3,2E-05	3,4E-09	$x_{203}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{64}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{134}$	1,0E-05	1,1E-08	$x_{204}$	3,2E-06	3,4E-08
$x_{65}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{135}$	3,2E-06	3,4E-08	$x_{205}$	1,0E-06	1,1E-07
$x_{66}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{136}$	1,0E-01	1,1E-12	$x_{206}$	3,2E-05	3,4E-09
$x_{67}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{137}$	3,2E-02	3,4E-12	$x_{207}$	1,0E-05	1,1E-08
$x_{68}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{138}$	1,0E-02	1,1E-11	$x_{208}$	3,2E-06	3,4E-08
$x_{69}$	3,2E-04	3,4E-10	$x_{139}$	3,2E-03	3,4E-11	$x_{209}$	1,0E-06	1,1E-07
$x_{70}$	1,0E-04	1,1E-09	$x_{140}$	1,0E-03	1,1E-10	$x_{210}$	3,2E-07	3,4E-07

Tabela 5.11: Função de Verossimilhança -  $x_{211}$  à  $x_{405}$ 

$x$	$\beta_0$	$\beta_1$		$x$	$\beta_0$	$\beta_1$		$x$	$\beta_0$	$\beta_1$
	2	2			2	2			2	2
	$\alpha_0$	$\alpha_1$			$\alpha_0$	$\alpha_1$			$\alpha_0$	$\alpha_1$
	0,1	0,1			0,1	0,1			0,1	0,1
	$\theta_0$	$\theta_1$			$\theta_0$	$\theta_1$			$\theta_0$	$\theta_1$
$x_{211}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{276}$	1,0E-02	1,1E-11		$x_{341}$	3,2E-07	3,4E-07
$x_{212}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{277}$	3,2E-03	3,4E-11		$x_{342}$	1,0E-07	1,1E-06
$x_{213}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{278}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{343}$	3,2E-08	3,4E-06
$x_{214}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{279}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{344}$	1,0E-08	1,1E-05
$x_{215}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{280}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{345}$	3,2E-09	3,4E-05
$x_{216}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{281}$	3,2E-03	3,4E-11		$x_{346}$	1,0E-06	1,1E-07
$x_{217}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{282}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{347}$	3,2E-07	3,4E-07
$x_{218}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{283}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{348}$	1,0E-07	1,1E-06
$x_{219}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{284}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{349}$	3,2E-08	3,4E-06
$x_{220}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{285}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{350}$	1,0E-08	1,1E-05
$x_{221}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{286}$	1,0E-02	1,1E-11		$x_{351}$	3,2E-07	3,4E-07
$x_{222}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{287}$	3,2E-03	3,4E-11		$x_{352}$	1,0E-07	1,1E-06
$x_{223}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{288}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{353}$	3,2E-08	3,4E-06
$x_{224}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{289}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{354}$	1,0E-08	1,1E-05
$x_{225}$	1,0E-07	1,1E-06		$x_{290}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{355}$	3,2E-09	3,4E-05
$x_{226}$	3,2E-05	3,4E-08		$x_{291}$	3,2E-03	3,4E-11		$x_{356}$	1,0E-07	1,1E-06
$x_{227}$	1,0E-06	3,4E-08		$x_{292}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{357}$	3,2E-08	3,4E-06
$x_{228}$	3,2E-07	1,1E-07		$x_{293}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{358}$	1,0E-08	1,1E-05
$x_{229}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{294}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{359}$	3,2E-09	3,4E-05
$x_{230}$	3,2E-06	1,1E-06		$x_{295}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{360}$	1,0E-09	1,1E-04
$x_{231}$	1,0E-06	3,4E-08		$x_{296}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{361}$	3,2E-09	3,4E-05
$x_{232}$	3,2E-07	1,1E-07		$x_{297}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{362}$	1,0E-09	1,1E-04
$x_{233}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{298}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{363}$	3,2E-10	3,4E-04
$x_{234}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{299}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{364}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{235}$	1,0E-06	3,4E-06		$x_{300}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{365}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{236}$	3,2E-07	1,1E-07		$x_{301}$	3,2E-03	3,4E-11		$x_{366}$	1,0E-09	1,1E-04
$x_{237}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{302}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{367}$	3,2E-10	3,4E-04
$x_{238}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{303}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{368}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{239}$	1,0E-08	3,4E-06		$x_{304}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{369}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{240}$	3,2E-06	1,1E-05		$x_{305}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{370}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{241}$	1,0E-06	3,4E-08		$x_{306}$	1,0E-03	1,1E-10		$x_{371}$	3,2E-10	3,4E-04
$x_{242}$	3,2E-07	1,1E-07		$x_{307}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{372}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{243}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{308}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{373}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{244}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{309}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{374}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{245}$	1,0E-06	3,4E-06		$x_{310}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{375}$	3,2E-12	3,4E-02
$x_{246}$	3,2E-07	1,1E-07		$x_{311}$	3,2E-04	3,4E-10		$x_{376}$	1,0E-09	1,1E-04
$x_{247}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{312}$	1,0E-04	1,1E-09		$x_{377}$	3,2E-10	3,4E-04
$x_{248}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{313}$	3,2E-05	3,4E-09		$x_{378}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{249}$	1,0E-08	3,4E-06		$x_{314}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{379}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{250}$	3,2E-07	1,1E-05		$x_{315}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{380}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{251}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{316}$	1,0E-05	1,1E-08		$x_{381}$	3,2E-10	3,4E-04
$x_{252}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{317}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{382}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{253}$	1,0E-08	3,4E-06		$x_{318}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{383}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{254}$	3,2E-09	1,1E-05		$x_{319}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{384}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{255}$	1,0E-06	3,4E-05		$x_{320}$	1,0E-07	1,1E-06		$x_{385}$	3,2E-12	3,4E-02
$x_{256}$	3,2E-07	1,1E-07		$x_{321}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{386}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{257}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{322}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{387}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{258}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{323}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{388}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{259}$	1,0E-08	3,4E-06		$x_{324}$	1,0E-07	1,1E-06		$x_{389}$	3,2E-12	3,4E-02
$x_{260}$	3,2E-09	1,1E-05		$x_{325}$	3,2E-08	3,4E-06		$x_{390}$	1,0E-12	1,1E-01
$x_{261}$	1,0E-07	3,4E-07		$x_{326}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{391}$	3,2E-10	3,4E-04
$x_{262}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{327}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{392}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{263}$	1,0E-08	3,4E-06		$x_{328}$	1,0E-07	1,1E-06		$x_{393}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{264}$	3,2E-09	1,1E-05		$x_{329}$	3,2E-08	3,4E-06		$x_{394}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{265}$	1,0E-07	3,4E-05		$x_{330}$	1,0E-08	1,1E-05		$x_{395}$	3,2E-12	3,4E-02
$x_{266}$	3,2E-08	1,1E-06		$x_{331}$	3,2E-06	3,4E-08		$x_{396}$	1,0E-10	1,1E-03
$x_{267}$	1,0E-08	3,4E-06		$x_{332}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{397}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{268}$	3,2E-09	1,1E-05		$x_{333}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{398}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{269}$	1,0E-09	3,4E-05		$x_{334}$	1,0E-07	1,1E-06		$x_{399}$	3,2E-12	3,4E-02
$x_{270}$	3,2E-02	1,1E-04		$x_{335}$	3,2E-08	3,4E-06		$x_{400}$	1,0E-12	1,1E-01
$x_{271}$	1,0E-02	3,4E-12		$x_{336}$	1,0E-06	1,1E-07		$x_{401}$	3,2E-11	3,4E-03
$x_{272}$	3,2E-03	1,1E-11		$x_{337}$	3,2E-07	3,4E-07		$x_{402}$	1,0E-11	1,1E-02
$x_{273}$	1,0E-03	3,4E-11		$x_{338}$	1,0E-07	1,1E-06		$x_{403}$	3,2E-12	3,4E-02
$x_{274}$	3,2E-04	1,1E-10		$x_{339}$	3,2E-08	3,4E-06		$x_{404}$	1,0E-12	1,1E-01
$x_{275}$	1,0E-04	3,4E-10		$x_{340}$	1,0E-08	1,1E-05		$x_{405}$	3,2E-13	3,4E-01

## 5.2.8 Distribuição *a Priori*

A distribuição *a priori* traz um indicativo sobre os Estado da Natureza sob o ponto de vista de seu comportamento histórico. É pouco provável que não exista algum conhecimento sobre o comportamento de  $\theta$ . A incerteza probabilística acerca da distribuição a

priori  $\pi(\theta)$  pode ser proveniente de duas fontes: uma base de dados com esses registros ou o conhecimento de um ou um grupo de especialistas no assunto.

No problema proposto, a educação do conhecimento *a priori* foi obtida de especialistas, chegando aos valores da tabela 5.12.

Tabela 5.12: Função de Distribuição a Priori

$\theta$	$\pi(\theta)$
$\theta_1$	0,40
$\theta_2$	0,60

## 5.2.9 Função Utilidade

A função utilidade para o problema proposto foi eduzida a partir de modelagem matemática junto aos especialistas, considerando seis escalas:  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  e  $u_6$ . Este método, intitulado de método das escalas superpostas, descrito em detalhes em (Campello de Souza, 2007a), é de grande utilidade por dividir um problema maior em partes menores. Isto ajudou na obtenção de dados junto aos especialistas.

A primeira escala vai dos *payoffs* de  $p_1$  a  $p_{12}$ , a segunda dos *payoffs* de  $p_{11}$  a  $p_{22}$ , a terceira dos *payoffs* de  $p_{21}$  a  $p_{32}$ , a quarta dos *payoffs* de  $p_{31}$  a  $p_{42}$ , a quinta dos *payoffs* de  $p_{41}$  a  $p_{52}$  e a sexta dos *payoffs* de  $p_{51}$  a  $p_{60}$ . Existem elementos que sobrepõem a escala com intuito de realizar correção na margem de erro do processo. Na primeira escala, o pior *payoff* é  $p_1$  e o melhor é  $p_{12}$ . Há que se perguntar ao decisor, nessa escala, para qual valor de  $\lambda$  ele se sente indiferente entre receber o *payoff*  $p_j$ ,  $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$  com probabilidade 1, ou um jogo no qual ele recebe  $p_{12}$  com probabilidade  $\lambda$  ou  $p_1$ , com probabilidade  $1 - \lambda$ . O mesmo deverá ser feito nas demais escalas.

A tabela 5.13 ilustra as escalas:

Tabela 5.13: Divisão do Questionário em 06 escalas para facilitar a educação

$p_1$	0	0	0	0		Escala 01	
$p_2$	0	0	0	1			
$p_3$	0	0	1	0			
$p_4$	0	0	1	1			
$p_5$	0	0	2	0			
$p_6$	0	0	2	1			
$p_7$	0	1	0	0			
$p_8$	0	1	0	1			
$p_9$	0	1	1	0			
$p_{10}$	0	1	1	1			
$p_{11}$	0	1	2	0		Escala 02	
$p_{12}$	0	1	2	1			
$p_{13}$	0	2	0	0			
$p_{14}$	0	2	0	1			
$p_{15}$	0	2	1	0			
$p_{16}$	0	2	1	1			
$p_{17}$	0	2	2	0			
$p_{18}$	0	2	2	1			
$p_{19}$	0	3	0	0			
$p_{20}$	0	3	0	1			
$p_{21}$	0	3	1	0		Escala 03	
$p_{22}$	0	3	1	1			
$p_{23}$	0	3	2	0			
$p_{24}$	0	3	2	1			
$p_{25}$	0	4	0	0			
$p_{26}$	0	4	0	1			
$p_{27}$	0	4	1	0			
$p_{28}$	0	4	1	1			
$p_{29}$	0	4	2	0			
$p_{30}$	0	4	2	1			
$p_{31}$	1	0	0	0		Escala 04	
$p_{32}$	1	0	0	1			
$p_{33}$	1	0	1	0			
$p_{34}$	1	0	1	1			
$p_{35}$	1	0	2	0			
$p_{36}$	1	0	2	1			
$p_{37}$	1	1	0	0			
$p_{38}$	1	1	0	1			
$p_{39}$	1	1	1	0			
$p_{40}$	1	1	1	1			
$p_{41}$	1	1	2	0		Escala 05	
$p_{42}$	1	1	2	1			
$p_{43}$	1	2	0	0			
$p_{44}$	1	2	0	1			
$p_{45}$	1	2	1	0			
$p_{46}$	1	2	1	1			
$p_{47}$	1	2	2	0			
$p_{48}$	1	2	2	1			
$p_{49}$	1	3	0	0			
$p_{50}$	1	3	0	1			
$p_{51}$	1	3	1	0		Escala 06	
$p_{52}$	1	3	1	1			
$p_{53}$	1	3	2	0			
$p_{54}$	1	3	2	1			
$p_{55}$	1	4	0	0			
$p_{56}$	1	4	0	1			
$p_{57}$	1	4	1	0			
$p_{58}$	1	4	1	1			
$p_{59}$	1	4	2	0			
$p_{60}$	1	4	2	1			

A função utilidade do decisor para a Função Consequência, será calculada por:

$$u(P(p|\theta, d(x))) \tag{5.2.1}$$

A utilidade desta distribuição é dada por:

$$u(P(p|\theta, d)) = \sum_p v(p) \sum_x P(x|\theta)P(p|\theta, d(x)) \tag{5.2.2}$$

Em Teoria da Decisão trabalha-se com perdas. A perda é definida simplesmente como o negativo da utilidade:

$$L(\theta, d(x)) = -u(P(p|\theta, d(x))) \quad (5.2.3)$$

Após a educação dos valores de utilidade dos *payoffs* pelo especialista, chega-se a tabela 5.14. É importante salientar que a utilidade está representando o grau de preferência entre 0 e 1 dos 16 *payoffs* do problema. As escalas de cada faixa foram normalizadas para uma única faixa. De uma forma geral, a preferência sempre será maior pelos melhores *payoffs*. Deseja-se saber com a utilidade qual é o grau de preferência entre os *payoffs*.

Tabela 5.14: Função Utilidade - Variáveis Multinível

$p$	$u(p)$
$p_1$	0,00
$p_2$	0,00
$p_3$	0,00
$p_4$	0,00
$p_5$	0,00
$p_6$	0,01
$p_7$	0,01
$p_8$	0,01
$p_9$	0,02
$p_{10}$	0,03
$p_{11}$	0,03
$p_{12}$	0,05
$p_{13}$	0,07
$p_{14}$	0,09
$p_{15}$	0,11
$p_{16}$	0,14
$p_{17}$	0,17
$p_{18}$	0,20
$p_{19}$	0,23
$p_{20}$	0,26
$p_{21}$	0,26
$p_{22}$	0,34
$p_{23}$	0,37
$p_{24}$	0,41
$p_{25}$	0,45
$p_{26}$	0,49
$p_{27}$	0,52
$p_{28}$	0,56
$p_{29}$	0,60
$p_{30}$	0,63
$p_{31}$	0,63
$p_{32}$	0,71
$p_{33}$	0,73
$p_{34}$	0,76
$p_{35}$	0,78
$p_{36}$	0,80
$p_{37}$	0,82
$p_{38}$	0,84
$p_{39}$	0,86
$p_{40}$	0,88
$p_{41}$	0,88
$p_{42}$	0,92
$p_{43}$	0,93
$p_{44}$	0,94
$p_{45}$	0,94
$p_{46}$	0,95
$p_{47}$	0,96
$p_{48}$	0,96
$p_{49}$	0,97
$p_{50}$	0,98
$p_{51}$	0,98
$p_{52}$	0,986
$p_{53}$	0,989
$p_{54}$	0,991
$p_{55}$	0,993
$p_{56}$	0,994
$p_{57}$	0,996
$p_{58}$	0,997
$p_{59}$	0,999
$p_{60}$	1,000

## 5.2.10 As Regras de Decisão

Campello de Souza (Campello de Souza, 2007a) refere que tomar decisões é escolher uma ação dentre várias disponíveis; trata-se de utilizar o que se sabe e o que se pode, a fim de se obter o que se quer.

A Teoria da Decisão sistematiza esse processo através de um conjunto de regras de decisão. Estas regras são funções que associam a cada observação uma ação:

$$d : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A} \quad (5.2.4)$$

$$x \mapsto d(x)=a$$

A associação pode ser determinística ou probabilística (Campello de Souza, 2007a). As regras são explicitadas e comparadas; a que minimizar o risco, para qualquer estado da natureza, deverá ser a adotada. O risco é a perda esperada da regra de decisão sobre repetição hipotética de um experimento que dá origem às observações  $x$  como função do parâmetro  $\theta$ .

Campello de Souza (Campello de Souza, 2007a) descreve a metodologia utilizada no processo de escolha da decisão. Após a definição dos conjuntos básicos e dos mecanismos probabilísticos envolvidos, chega-se à escolha de uma decisão. O número de regras de decisões possíveis é dado por:

$$||\mathcal{D}|| = ||\mathcal{A}||^{||\mathcal{X}||} \quad (5.2.5)$$

No problema proposto, o total de regras de decisão será  $2^{405} = 8,63x10^{121}$ . Nenhum computador da atualidade consegue resolver esse problema. São muitas regras de decisão para calcular! Para evitar esta grande quantidade de regras de decisão, é possível trabalhar com regras de decisão otimizadas, de forma que ao invés de  $2^{405}$ , seriam necessárias apenas 405 regras de decisão otimizadas.

As equações encontram-se desenvolvidas na planilha eletrônica, anexa a este trabalho. Uma vez que o objetivo é desenvolver uma ferramenta que auxilie o decisor (médico) a aceitar ou rejeitar um exame de RMf, com base no vetor de observações, tem-se a seguinte tabela de riscos associados a cada uma das 405 regras de decisão, conforme ilustram as tabelas 5.15 e 5.16:

Tabela 5.15: Regras Decisão Otimizadas -  $x_1$  à  $x_{210}$ 

$x$	$a_1$	$a_0$	$R$	$x$	$a_1$	$a_0$	$R$	$x$	$a_1$	$a_0$	$R$
$x_1$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{71}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{141}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_2$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{72}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{142}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_3$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{73}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{143}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_4$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{74}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{144}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_5$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{75}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{145}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_6$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{76}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{146}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_7$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{77}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{147}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_8$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{78}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{148}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_9$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{79}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{149}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{10}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{80}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{150}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{11}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{81}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{151}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{12}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{82}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{152}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{13}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{83}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{153}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{14}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{84}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{154}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{15}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{85}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{155}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{16}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{86}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{156}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{17}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{87}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{157}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{18}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{88}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{158}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{19}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{89}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{159}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{20}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{90}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{160}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{21}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{91}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{161}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{22}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{92}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{162}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{23}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{93}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{163}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{24}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{94}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{164}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{25}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{95}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{165}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{26}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{96}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{166}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{27}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{97}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{167}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{28}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{98}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{168}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{29}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{99}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{169}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{30}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{100}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{170}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{31}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{101}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{171}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{32}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{102}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{172}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{33}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{103}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{173}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{34}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{104}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{174}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{35}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{105}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{175}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{36}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{106}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{176}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{37}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{107}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{177}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{38}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{108}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{178}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{39}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{109}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{179}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{40}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{110}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{180}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{41}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{111}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{181}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{42}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{112}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{182}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{43}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{113}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{183}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{44}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{114}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{184}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{45}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{115}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{185}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{46}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{116}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{186}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{47}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{117}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{187}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{48}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{118}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{188}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{49}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{119}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{189}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{50}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{120}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{190}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$
$x_{51}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{121}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{191}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{52}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{122}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{192}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{53}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{123}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{193}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{54}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{124}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{194}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$
$x_{55}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{125}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{195}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$
$x_{56}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{126}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{196}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$
$x_{57}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{127}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{197}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{58}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{128}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{198}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{59}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{129}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{199}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{60}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{130}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{200}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$
$x_{61}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{131}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{201}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$
$x_{62}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{132}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{202}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{63}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{133}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{203}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{64}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{134}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{204}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$
$x_{65}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{135}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{205}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$
$x_{66}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{136}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{206}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$
$x_{67}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{137}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{207}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$
$x_{68}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{138}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{208}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$
$x_{69}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{139}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{209}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$
$x_{70}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{140}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{210}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$

Tabela 5.16: Regras Decisão Otimizadas -  $x_{211}$  à  $x_{405}$ 

$x$	$a_1$	$a_0$	<b>R</b>	$x$	$a_1$	$a_0$	<b>R</b>	$x$	$a_1$	$a_0$	<b>R</b>
$x_{211}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{276}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{341}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$
$x_{212}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{277}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{342}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$
$x_{213}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{278}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{343}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$
$x_{214}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{279}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{344}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$
$x_{215}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{280}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{345}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{216}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{281}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{346}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$
$x_{217}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{282}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{347}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$
$x_{218}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{283}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{348}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$
$x_{219}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{284}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{349}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$
$x_{220}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{285}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{350}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$
$x_{221}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{286}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{351}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$
$x_{222}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{287}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{352}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$
$x_{223}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{288}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{353}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$
$x_{224}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{289}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{354}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$
$x_{225}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{290}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{355}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{226}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{291}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{356}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$
$x_{227}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{292}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{357}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$
$x_{228}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{293}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{358}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$
$x_{229}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{294}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{359}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{230}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{295}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{360}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{231}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{296}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{361}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{232}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{297}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{362}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{233}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{298}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{363}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{234}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{299}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{364}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{235}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{300}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{365}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{236}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{301}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{366}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{237}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{302}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{367}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{238}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{303}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{368}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{239}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{304}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{369}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{240}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{305}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{370}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{241}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{306}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{371}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{242}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{307}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{372}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{243}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{308}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{373}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{244}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{309}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{374}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{245}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{310}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{375}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{246}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{311}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{376}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{247}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{312}$	1,25E-02	9,85E-03	$a_0$	$x_{377}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{248}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{313}$	1,27E-02	1,00E-02	$a_0$	$x_{378}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{249}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{314}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{379}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{250}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{315}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{380}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{251}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{316}$	1,41E-02	1,14E-02	$a_0$	$x_{381}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{252}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{317}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{382}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{253}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{318}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{383}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{254}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{319}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{384}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{255}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$	$x_{320}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{385}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{256}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{321}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{386}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{257}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{322}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{387}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{258}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{323}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{388}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{259}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{324}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{389}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{260}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{325}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{390}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{261}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{326}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{391}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{262}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{327}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{392}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{263}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{328}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{393}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{264}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{329}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{394}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{265}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$	$x_{330}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{395}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{266}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{331}$	2,77E-02	2,56E-02	$a_0$	$x_{396}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{267}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{332}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{397}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{268}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{333}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{398}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{269}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$	$x_{334}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{399}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{270}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$	$x_{335}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{400}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{271}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{336}$	1,45E-01	1,47E-01	$a_1$	$x_{401}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{272}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{337}$	6,00E-01	6,20E-01	$a_1$	$x_{402}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{273}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{338}$	9,07E-01	9,39E-01	$a_1$	$x_{403}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{274}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{339}$	9,56E-01	9,90E-01	$a_1$	$x_{404}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$
$x_{275}$	1,25E-02	9,84E-03	$a_0$	$x_{340}$	9,61E-01	9,95E-01	$a_1$	$x_{405}$	9,62E-01	9,96E-01	$a_1$

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 CONCLUSÕES

1. A modelagem do problema foi estruturada de forma a ser visível para o profissional médico a importância da teoria da decisão como ferramenta capaz de ajudar o médico a tomar decisões;
2. Os modelos apresentados, estão estruturados, automatizados e podem ser livremente complementados, visto que para isto basta ampliar o conjunto de variáveis do problema;
3. Os mecanismos decisórios são explicitados facilitando sua análise;
4. Na metodologia utilizada, estimula-se a “arte de modelar” problemas matematicamente, servindo de exemplo para trabalhos em que um modelo matemático se faça necessário para a solução de problemas;
5. A modelagem de outros problemas pode ser realizada seguindo o método utilizado, de forma rápida e eficiente, e sabe-se que na Medicina existem inúmeros outros problemas para modelagem;
6. Os procedimentos foram implementados com uso de uma planilha eletrônica, facilitando sua adequação a outros contextos;
7. A implementação apresentada permite que sejam feitas com relativa facilidade, diversas análises de sensibilidade com relação aos parâmetros;
8. É plenamente possível nesta estruturação trabalhar com variáveis de mensuração subjetiva, tendo em vista que a ferramenta de Teoria da Decisão, por conseguir medir as variáveis com base em suas preferências envolvidas, é capaz de realizar qualquer tipo de mensuração em qualquer contexto.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões para futuros trabalhos, dissertações e teses são:

1. Projetos interdisciplinares são importantes para o desenvolvimento do conhecimento. É necessário inserir este tipo de trabalho nas grades curriculares de graduação e pós-graduação em Medicina;
2. Construção de um sistema em uma linguagem de programação de alto nível que, a partir do fornecimento de alguns parâmetros básicos a serem utilizados, criaria automaticamente através de macros as fórmulas para um problema de decisão em particular. Este, certamente, seria um trabalho que traria uma excepcional contribuição para o uso mais intenso da ferramenta por parte do mercado, pois a grande barreira a ser vencida é justamente a incapacidade dos profissionais em solucionar os problemas dado o desconhecimento acerca dos requisitos matemáticos envolvidos;
3. Desenvolvimento de *software* específico para medicina que permita rápida estruturação e colocação de dados para realização de análises da decisão no contexto médico, visto que a demanda deste setor justifica esta implementação;
4. Desenvolvimento de análise de decisão em vários outros contextos médicos;
5. Criação de novas ferramentas para facilitar a utilização da Teoria da Decisão no ambiente médico.

# References

- BANDETTINI, PA; WONG, EC; HINKS, RS; TIKOFSKY, RS; HYDE, JS. Time course EPI of human brain function during task activation. *Magn Reson Med*, v. 25, p. 390–397, 1992.
- BERNSTEIN, MA; KING, KE; XIAOHONG, JZ. *Handbook of MRI pulse sequences*. London: Elsevier, 2004.
- BLOCH, F. Nuclear induction. *Phys*, v. 74, Feb, p. 460–474, 1946.
- CAMPELLO DE SOUZA, F. M.; DE SOUZA, B. CAMPELLO; SILVA, A. S. *Elementos da Pesquisa Científica em Medicina*. Editora Universitaria, 2002.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. Two-component random utilities, Theory and Decision. v. 21, Feb, p. 129–153, 1986.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Modelos Probabilísticos de Preferências e Escolhas - Produção e Competitividade: aplicações e inovações*. Recife: Universitária UFPE, 2000.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Modelos Probabilísticos de Preferências e Escolhas - Tópicos em Engenharia de Sistemas*. Recife: Universitária UFPE, 2004.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Energia Solar*, 2005.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Decisões racionais em situações de incerteza*. 2a. ed., 2007a.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Programação Matemática*, 2007b.

- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Decisões (no prelo)*, 2009.
- CAMPOLINA, ALESSANDRO GONÇALVES; CICONELLI, ROZANA MESQUITA. Qualidade de vida e medidas de utilidade: parâmetros clínicos para as tomadas de decisão em saúde. *Pan American Journal of Public Health*, v. 19, n. 2, p. 128–36, 2006.
- CHAPMAN, GRETCHEN B.; SONNENBERG, FRANK A. *Decision making in health care: theory, psychology and applications*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge series on judgment and decision making).
- ELSTEIN, ARTHUR S.; CHAPMAN, GRETCHEN B. Cognitive processes and biases in medical decision making. In: CHAPMAN, GRETCHEN B.; SONNENBERG, FRANK A. (Eds.), *Decision Making in Health Care: Theory, Psychology and Applications*. Cambridge University Press, 2000, Cap. 07, p. 183–210. (Cambridge Series on Judgment and Decision Making).
- ELSTEIN, ARTHUR S.; SCHWARZ, ALAN. Clinical problem solving and diagnostic decision making: selective review of the cognitive literature. *British Medical Journal*, v. 324, Mar, p. 729–32, 2008.
- FARADAY, M. *Experimental Researches in Electricity. v. 3*. London: London: Richard Taylor and William Francis, 1855.
- FOSTER, MA. Magnetic resonance in medicine and biology. *Pergamon Press*, 1984.
- FSL, SOFTWARE. *FSL software*. <<http://www.fmrib.ox.ac.uk/fsl/index.html>>, Accessed on September, 10<sup>th</sup>, 2010.
- HAHN, EL. Spin echoes. *Phys*, v. 80, p. 580–594, 1950.
- HARRISON, TINSLEY RANDOLPH. *Harrison's principles of internal medicine*. 14th. ed. McGraw-Hill, 1998. v. 1.
- HOUNSFIELD, GN. Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. Description of system. *Br J Radiol*, v. 46, p. 1016–1022, 1973.

- J. ELIASHBERG, J. R. HAUSER. Measurement error theories for von Neumann Morgenstern utility functions. *Center for Mathematical Studies in Economics and Management Scienc*, v. 498, Dec, p. 1419–20, 1981.
- J. VON NEUMANN, O. MORGENSTERN. *Theory of Games and Economic Behavior*. England: Princeton University Press, 1944.
- KUCEY, DARYL S. Decision analysis for the surgeon. *World Journal of Surgery*, v. 23, Dec, p. 1227–31, 1999.
- KWONG, KK; BELLIVEAU, JW; CHESLER, DA; GOLDBERG, IE; WEISSKOFF, RM; PONCELET, BP ET AL. Dynamic magnetic resonance imaging of human brain activity during primary sensory stimulation. *Proc Natl Acad Sci USA*, v. 89, p. 5675–5679, 1992.
- LAUTERBUR, PC. Image formation by induced local interactions: examples employing nuclear magnetic resonance. *Nature*, v. 242, p. 190–191, 1973.
- LESSA, PATRÍCIA S; CAOUS, CRISTOFER A; ARANTES, PAULA R; AMARO JR, EDSON; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. Decision theory applied to quality control in radiology. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, v. 08, <<http://www.biomedcentral.com/content/pdf/1472-6947-8-51.pdf>>, Accessed on September, 10<sup>th</sup>, p. doi:10.1186/1472-6947-8-51, 2008.
- LINS, LUIZ ANDRÉ NADLER. *Decisões em Medicina: Uma Abordagem por Teoria da Decisão*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2008.
- LOPEZ, MARIO. *O processo diagnóstico nas decisões clínicas: ciência - arte - ética*. Rio de Janeiro: Revinter, 2001.
- MANSFIELD, P. Multi-planar imaging formation using NMR spin echoes. *J Phys*, v. 10, p. 55–58, 1977.
- MAPPING, STATISTICAL PARAMETRIC. *Statistical Parametric Mapping*. <<http://www.fil.ion.ucl.ac.uk/spm/>>, Accessed on September, 10<sup>th</sup>, 2010.

- MASSAD, EDUARDO; XAVIER DE MENEZES, RENÉE; SILVEIRA, PAULO SÉRGIO PANSE; ORTEGA, NELI REGINA SIQUEIRA. *Métodos quantitativos em medicina*. São Paulo: Manole, 2004.
- MOONEN, CT; VAN ZIJL, PC; FRANK, JA; LE BIHAN, D; BECKER, ED. Functional Magnetic Resonance Imaging in Medicine and Physiology. *Science*, v. 250, p. 53–61, 1990.
- MORTON, VERONICA; TORGERSONS, DAVID J. Effect of regression to the mean on decision making in health care. *British Medical Journal*, v. 326, May, p. 1083–4, 2003.
- MUKHERJEE, P; CHUNG, SW; BERMAN, JI; HESS, CP; HENRY, RG. Diffusion tensor MR imaging and fiber tractography: technical considerations. *AJNR Am J Neuro-radiol*, v. 29, p. 843–852, 2008.
- MYERS, JOHN; MCCABE, STEVEN J. Understanding medical decision making in hand surgery. *Clinics in Plastic Surgery*, v. 32, p. 453–461, 2005.
- NARAYANA, A; CHANG, J; THAKUR, S; HUANG, W; KARIMI, S; HOU, B ET AL. Use of MR spectroscopy and functional imaging in the treatment planning of gliomas. *Br J Radiol*, v. 80, p. 347–354, 2006.
- OGAWA, S; LEE, TM; KAY, AR; TANK, DW. Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation. *Proc Natl Acad Sci*, v. 87, p. 9868–9872, 1990.
- P. WAKKER, S. J. T. JANSEN, A. M. STIGGELBOUT. Anchor levels as a new tool for the theory and measurement of multiattribute utility, Decision Analysis. *Medical Decision Making*, v. 1, Apr, p. 217–234, 2004.
- PARMIGIANI, GIOVANNI. *Modeling in medical decision making: a bayesian approach*. West Sussex, England: Wiley, 2002. (Statistics on Practice).

- PAULING, L; CORYELL, CD. The magnetic properties and structure of hemoglobin, oxyhemoglobin and carbonmonoxyhemoglobin. *Proc Natl Acad Sci USA*, v. 22, p. 210–215, 1930.
- PURCELL, EM; TORREY, HC; POUND, RV. Resonance absorption by nuclear magnetic moments in a solid. *Phys*, v. 69, p. 37–38, 1946.
- RAWLS, J. *A theory of justice original edition*. Cambridge: Harvard University, 2005.
- SCHWARTZ, ALAN; BERGUS, GEORGE. *Medical decision making: a physicians guide*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2008.
- SOUZA E SILVA, NELSON ALBUQUERQUE DE. Investigação clínica e laboratorial na HAS — O que é essencial. *Congresso da Sociedade Brasileira de Cardiologia*, 1996.
- SOX, HAROLD C.; BLATT, MARSHALL A.; HIGGINS, MICHAEL C.; MARTON, KEITH I. *Medical decision making*. Philadelphia: American College of Physicians, 2007.
- SUNAERT, S. Presurgical planning for tumor resectioning. *J Magn Reson Imaging*, v. 23, p. 887–905, 2006.
- THULBORN, KR; WATERTON, JC; MATTHEWS, PM; RADDA, GK. Oxygenation dependence of the transverse relaxation time of water protons in whole blood at high field. *Biochim Biophys Acta*, v. 714, p. 265–270, 1982.
- WAKKER, P.; STIGGELBOUT, A. M. Explaining distortions in utility elicitation through the rank-dependent model for risky choices. *Medical Decision Making*, v. 15, Feb, p. 180–186, 1995.
- WALD, A. *Statistical Decision Functions*. New York: John Wiley Sons, 1950.
- WANDERLEY, A. L. *A Educação da Função Utilidade Multiatributo*. Recife: Tese (PPGEE UFPE), 2008.
- WULFF, HENRIK R.; GOTZCHE, PETER C. *Rational diagnosis and treatment: evidence-based clinical decision-making*. 3a. ed. Blackwell Science, 2000.