



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

RICARDO PEREIRA GUEDES

**TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE ORDEM EM FLUXO EM MEIO POROSO
TRANSIENTE APLICADAS EM AQUÍFERO**

Recife

2023

RICARDO PEREIRA GUEDES

**TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE ORDEM EM FLUXO EM MEIO POROSO
TRANSIENTE APLICADAS EM AQUÍFERO**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte integrante dos requisitos necessários à obtenção do título de doutor em Engenharia Civil.

Área de concentração: Simulação e gerenciamento de reservatórios de petróleo.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães.

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecário Gabriel Luz, CRB-4 / 2222

G924t Guedes, Ricardo Pereira.
Técnicas de redução de ordem em fluxo em meio poroso transiente aplicadas em aquífero / Ricardo Pereira Guedes, 2023.
100 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Engenharia civil. 2. Redução de ordem. 3. Elementos finitos. 4. Particionamento. 5. Superposição modal. 6. Fluxo transiente em aquíferos. I. Guimarães, Leonardo José do Nascimento (Orientador). II. Título.

624 CDD (22. ed.)

UFPE
BCTG / 2023 - 248

RICARDO PEREIRA GUEDES

TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE ORDEM EM FLUXO EM MEIO POROSO TRANSIENTE
APLICADAS EM AQUÍFERO

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte integrante dos requisitos necessários à obtenção do título de doutor em Engenharia Civil. Área de concentração: Simulação e gerenciamento de reservatórios de petróleo.

Aprovada em: 28 / 08 /2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (Examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Débora Cristina Almeida de Assis (Examinadora externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Lícia Mouta da Costa, (Examinadora externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Rafael Fernandes Vieira Correia Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Antônio Barbosa, (Examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram para o desenvolvimento desta tese. Em especial, agradeço a colaboração, o apoio e os ensinamentos de meu orientador professor Leonardo Guimarães, ao grande apoio do professor Paulo Marcelo, que contribuíram muito no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também a todos os amigos que encontrei ao longo do doutorado: Jean, Cicero, Augusto, Laura, todos que contribuíram com os apoios dados a esse trabalho construído ao longo destes anos.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação, desde a escola até a pós-graduação, em especial aos professores Igor Gomes, Leila Beserra e Lícia Mouta.

Agradeço ao pessoal do apoio da secretaria da pós-graduação que foram muito competentes em especial Andrea, as amigas da secretaria do laboratório Rose e Priscila.

Agradeço a FACEPE e a Energi Simulation, pelos auxílios financeiros concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

E especialmente a toda minha família que participaram de cada etapa nesta formação de doutorado, e em especial a quem me apoio e esteve sempre de perto a minha esposa.

RESUMO

A modelagem e simulação são ferramentas preciosas na engenharia, permitindo a compreensão do funcionamento de muitos processos físicos do mundo real e consequentemente a previsão com precisão do que possa acontecer sob condições adversas de operação. Atualmente complexidade dos modelos matemáticos para retratar a realidade do mundo está cada vez maior, seja na engenharia, na medicina, nas previsões de clima e em várias outras áreas do conhecimento. Neste contexto, a redução de ordem está sendo cada vez mais utilizada nas resoluções de simulações em várias áreas da engenharia e da ciência. Os problemas atuais fazem uso de muito mais variáveis e algoritmos mais complexos que há pouco tempo atrás. Uma das soluções possíveis está na redução criteriosa dos modelos como estratégia para baratear o processamento e o custo computacional do problema em geral mantendo-se um nível de precisão aceitável para os resultados esperados do modelo de simulação. Alia-se a isso o grande aumento de poder de processamento dos computadores e a evolução de algoritmos numéricos nas soluções de sistemas lineares e não-lineares, que com o auxílio de técnicas como a de redução de ordem problemas que há poucas décadas não se sonhava em resolver hoje podem ser resolvidos de maneira rápida e precisa. Este trabalho abordará duas técnicas de redução de ordem aplicadas às equações diferenciais que descrevem o fenômeno de fluxo transiente em meios porosos. Essas técnicas serão comparadas com os métodos convencionais de simulação, a fim de demonstrar a eficácia das abordagens de redução de ordem no contexto do sistema físico em questão. Em todas as formulações apresentadas para os métodos propostos, optou-se por empregar o método dos elementos finitos para a discretização espacial das equações de fluxo. Os métodos empregados compreenderam o particionamento, baseado no método estático de Guyan, e a abordagem de superposição modal. Ambas essas técnicas demandaram uma adaptação cuidadosa para serem aplicadas ao sistema em análise. Além das adaptações exigidas para os métodos do trabalho, foram utilizadas manipulações matemáticas em ambos os métodos com o intuito de potencializar as reduções de ordem. Para o método de particionamento foi utilizado a concentração das massas para nós específicos das malhas, proporcionando, dessa maneira, uma maior redução de ordem, proporcionando assim impacto notável na melhoria do processamento e na eficiência geral do método. Para a abordagem do método de superposição modal, além da adaptação do método para se adequar ao escopo do trabalho, utilizou-se uma adaptação para aumentar a redução de ordem com a manipulação dos modos de autovalores. Como resultado, a ordem do sistema simulado foi ainda mais substancialmente reduzida, contribuindo para a otimização do processo. Através de derivativos matemáticos elaborados,

alcançou-se algoritmos refinados, que foram então incorporados ao ambiente de programação MATLAB. Utilizando os métodos selecionados no trabalho e suas derivações devidamente testadas, utilizou-se de cenários fictícios para gerar os resultados. O primeiro teste foi desenvolvido para a aplicação envolvendo uma simulação de estaca prancha, uma situação comum nas intervenções da indústria da construção civil. Essa simulação foi realizada em um ambiente bidimensional (2D). À medida que avançamos na pesquisa do método de particionamento, optou-se por empregá-lo em um contexto tridimensional (3D), utilizando um aquífero como caso de teste. Essa escolha permitiu uma visualização mais precisa dos resultados do particionamento do domínio e a avaliação da sua continuidade ao longo do tempo de análise. Para explorar a técnica de superposição modal, selecionou-se um aquífero mais realista, incorporando uma camada de aquífero com menor permeabilidade. Essa adição proporcionou maior desafio ao fluxo do fluido através das diferentes regiões do aquífero, provocando alterações no comportamento do sistema. Gerando resultados satisfatórios para atender ao principal objetivo, que era a redução do custo computacional. Esse trabalho desempenha um papel fundamental ao disponibilizar ferramentas eficazes, implementados no software MATLAB, para a análise das modelagens propostas, oferecendo assim contribuições valiosas no campo em questão.

Palavras-chave: redução de ordem; elementos finitos; particionamento; superposição modal; fluxo transiente em aquíferos.

ABSTRACT

Modeling and simulation are valuable tools in engineering, allowing for an understanding of the operation of many real-world physical processes and consequently accurate prediction of potential outcomes under adverse operating conditions. Currently, the complexity of mathematical models to depict the reality of the world is increasing, whether in engineering, medicine, weather forecasting, or various other fields of knowledge. In this context, model order reduction is increasingly being used in simulation resolutions across multiple engineering and scientific domains. Present-day problems involve more variables and more complex algorithms than they did just a short while ago. One possible solution lies in the judicious reduction of models as a strategy to streamline processing and computational costs of the problem in general, while maintaining an acceptable level of accuracy for the expected simulation outcomes. This is combined with the significant increase in computer processing power and the evolution of numerical algorithms in solving linear and nonlinear systems. With the aid of techniques like model order reduction, problems that were once considered unsolvable just a few decades ago can now be solved quickly and accurately. This work will address two model order reduction techniques applied to the differential equations describing the transient flow phenomenon in porous media. These techniques will be compared with conventional simulation methods to demonstrate the effectiveness of model order reduction approaches in the context of the specific physical system. In all the formulations presented for the proposed methods, the finite element method was chosen for spatial discretization of the flow equations. The employed methods encompassed partitioning, based on Guyan's static condensation method, and the modal superposition approach. Both of these techniques required careful adaptation to be applied to the analyzed system. In addition to the adaptations required for the methods, mathematical manipulations were used in both methods to enhance the model order reductions. For the partitioning method, mass concentration was used for specific nodes in the meshes, resulting in a greater reduction of order, thus significantly improving processing efficiency. For the modal superposition method, in addition to adapting the method to fit the scope of the work, an adaptation was used to further enhance the model order reduction by manipulating the eigenvalue modes. As a result, the order of the simulated system was substantially reduced, contributing to process optimization. Through developed mathematical derivatives, refined algorithms were achieved and incorporated into the MATLAB programming environment. Using the selected methods and their duly tested derivations, fictitious scenarios were employed to generate results. The first test involved a simulation of a sheet pile application, a common situation in the construction industry interventions. This simulation was conducted in a two-dimensional (2D) environment. As the research progressed into the partitioning method, it was employed in a three-dimensional (3D) context, using an aquifer as a test case. This choice provided a more accurate visualization of the domain partitioning results and an assessment of its continuity over the analysis time. To explore the modal superposition technique, a more realistic aquifer was selected, incorporating a less permeable aquitard layer. This addition posed a

greater challenge to fluid flow through different aquifer regions, leading to changes in system behavior. Satisfactory results were generated to meet the main objective of reducing computational costs. This work plays a fundamental role by providing effective tools implemented in the MATLAB software for the analysis of the proposed models, thus offering valuable contributions in the relevant field.

Keywords: order reduction; finite elements; partitioning; modal overlay; transient flow in aquifers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Figura esquemática de Poço Artesiano	13
Figura 2 -	Aquífero Guarani um dos maiores aquíferos sendo sua extensão internacional - Fonte - https://www.aguasdematao.com.br/agua-que-abastece-matao-e-retirada-do-aquifero-guarani/	14
Figura 3 -	Relação entre Rios e Aquíferos. fonte: (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA, 2020)	16
Figura 4 -	Evolução dos processadores segundo a Lei de Moore e a dos algoritmos matemáticos (fonte SCHILDERS et al (2008))	19
Figura 5 -	Representação esquemática do ciclo hidrológico : E - Evaporação ; ET- evapotranspiração ; I - infiltração ; R - escoamento superficial : Fonte: (FEITOSA, FILHO, et al., 2008).....	22
Figura 6 -	Desenho esquemático de um aquífero. Fonte: (GUEDES, DE ARAÚJO e DE ANDRADE, 2021).....	24
Figura 7 -	Efeito poro pressão sobre a matriz porosa do aquífero.....	24
Figura 8 -	Ilustração de modelo de redução de ordem. Fonte: (SCHILDERS, VAN DER VORST e ROMMES, 2008).....	28
Figura 9 -	Representação de Subestruturação (CORPORATION, 2016).....	30
Figura 10 -	Representação da subestruturação em um projeto de um avião. fonte: (CORPORATION, 2016)	31
Figura 11 -	Escolha de região de interesse	32
Figura 12 -	(a)Estrutura rígida para análise de subestruturação e (b) subestrutura B. Fonte: (LOGAN, 2016).....	32
Figura 13 -	Fluxo em uma matriz porosa.	36
Figura 14 -	Fluxo de V_i em todas as direções.....	37
Figura 15 -	Representação de um aquífero confinado. (fonte: (HUYAKORN e PINDER, 1983).	38
Figura 16 -	Domínio do fluxo em meio poroso discretizado pelo Método dos Elementos Finitos	43
Figura 17 -	Condições de Contorno e Nós Mestres e Escravos.....	45
Figura 18 -	Concentração do Armazenamento Especifico	47
Figura 19 -	Interpretação da linha temporal das Matrizes.	57
Figura 20 -	Método de estaca prancha em rede de dutos enterrados (fonte: VPA equipamentos - https://vpaequipamentos.com.br/blog/solucoes-para-escoramento-de-valas-e-taludes).....	59
Figura 21 -	Método de estaca prancha com abaixamento de lençol freático. (fonte: blog Belgo arames- https://blog.belgo.com.br/engenharia/geotech/estaca-prancha/)	59

Figura 22 - Método de estaca prancha na contenção de solo e água - (fonte: Carlucc - https://carluc.com.br/estrutura/estaca-prancha/)	59
Figura 23 - Figura esquemática do exemplo de estaca prancha desenvolvido para o código.	60
Figura 24 - Indicação da condição de contorno mostrando as regiões impermeáveis do modelo e a pressão zero nas superfícies	61
Figura 25 - Particionamentos da Malha 1.....	62
Figura 26 - Particionamentos da Malha 2.....	62
Figura 27 - Particionamentos da Malha 3.....	62
Figura 28 - Setores do Particionamento.	63
Figura 29 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 1 com 3 setores de Particionamento.....	63
Figura 30 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 1 com 6 setores de Particionamento.....	64
Figura 31 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 2 com 3 setores de Particionamento.....	64
Figura 32 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 2 com 6 setores de Particionamento.....	64
Figura 33 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 3 com 3 setores de Particionamento.....	65
Figura 34 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 3 com 6 setores de Particionamento.....	65
Figura 35 - Tempo de processamento para a malha 1 -	66
Figura 36 - Tempo de processamento para a malha 2	66
Figura 37 - Tempo de processamento para a malha 3	67
Figura 38 - Dimensões em metros do domínio hipotético para análise de fluxo pela técnica de particionamento.	67
Figura 39 - Discretização e particionamento do domínio em 8 partes	69
Figura 40 - Particionamento para 64 partes do domínio.....	69
Figura 41 - Distribuição da carga hidráulica e posicionamento dos nos pontos P1 e P2 de estudo.	69
Figura 42 - Condição de contorno com a carga hidráulica inicial de 2 m, no tempo inicial.	70
Figura 43 - Carga Hidráulica no tempo final.....	70
Figura 44 - Resultado do Teste 1 nos pontos P1 e P2 conforme os grupos apresentados.	72
Figura 45 - Resultado do Teste 2 nos pontos P1 e P2 conforme os grupos apresentados.	72
Figura 46 - Ponto 1 nas Malhas 1 e 2 - para verificar os Desvios	74
Figura 47 - Ponto 2 nas Malhas 1 e 2 - para verificar os Desvios	75

Figura 48 - Passo de 150 segundos da evolução do tempo para o caso de particionamento com 8 particionamentos.....	76
Figura 49 - Passo de 150 segundos da evolução do tempo para o caso de particionamento com 64 particionamentos.....	77
Figura 50 - Passo de 150 segundos da evolução do tempo para o caso de particionamento com 64 particionamentos com uma maior discretização.	77
Figura 51 - Camadas de materiais do aquífero.	78
Figura 52 - Discretização vertical.....	80
Figura 53 - Localização do Poço (ponto 1) e do local de coleta de dados (ponto A).	81
Figura 54 - Evolução da carga hidráulica no ponto A4 comparando as diferentes discretizações das malhas.....	83
Figura 55 - Ampliação do retângulo da Figura 54 indicando as malhas usadas para cada uma das curvas de evolução da carga hidráulica no “ponto A”.	84
Figura 56 - Evolução temporal da carga hidráulica do “ponto A”, para diferentes discretizações e vazões impostas.....	85
Figura 57 - Tempo gasto de processamento do código de elementos finitos.	86
Figura 58 - Tempo gasto de processamento do código de superposição modal - com os cálculos de autovalores e a superposição.....	86
Figura 59 - Comparação do tempo de processamento.....	89
Figura 60 - Comparação da solução dos métodos	90
Figura 61 - Exemplo com toda a frequência Modal para a função Smallest magnitude do Matlab	95
Figura 62 - Exemplo com 50% da frequência Modal smallest magnitude do Matlab.....	95
Figura 63 - Exemplo com toda a frequência Modal para a função Largest magnitude do Matlab.	96
Figura 64 - Exemplo com 50% da frequência Modal Largest magnitude do Matlab.....	96
Figura 65 - Exemplo com toda a frequência Modal para a função Both end magnitude do Matlab	97
Figura 66 - Exemplo com 50% da frequência Modal para a função Both end magnitude do Matlab	97

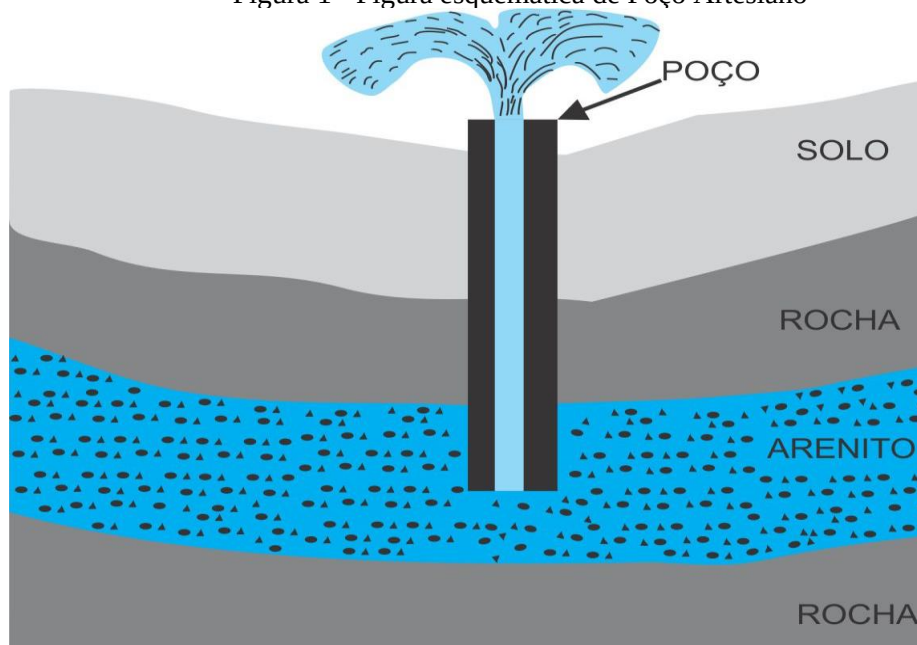
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.....	13
2	RESERVATÓRIO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA	21
3	REDUÇÃO DE ORDEM.....	27
4	SUBESTRUTURAÇÃO.....	30
5	FLUXO EM MEIO POROSO.....	36
6	FORMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	42
6.1	SOLUÇÕES NUMÉRICAS DO PROBLEMA FÍSICO.....	42
6.2	PARTICIONAMENTO DE GUYAN.....	44
6.2.1	Estratégia de solução com o particionamento	46
6.3	SUPERPOSIÇÃO MODAL.....	49
6.3.1	Representação matemática da Superposição Modal.....	51
6.3.2	Solução da parte homogênea.....	51
6.3.3	Solução da parte não-homogênea.....	53
6.3.4	Solução geral da Equação Diferencial.....	54
6.3.5	Desacoplamento do sistema	54
6.3.6	Solução desacoplada.....	56
6.4	AVANÇO DO TEMPO.....	57
7	EXEMPLOS DE APLICAÇÕES.....	58
7.1	PARTICIONAMENTO DE GUYAN.....	58
7.1.1	Particionamento 2D.....	58
7.1.1.1	Resultado do método de Particionamento de Guyan 2D	63
7.1.2	Particionamento 3D.....	67
7.1.2.1	Resultado do método de Particionamento de Guyan 3D	70
7.2	SUPERPOSIÇÃO MODAL.....	78
7.2.1	Resultado do método de Superposição Modal	81
8	CONCLUSÕES	92
9	ESTUDOS FUTUROS	94
	REFERÊNCIAS	98

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Os estudos sobre recursos naturais para o sustento da raça humana sempre foram e serão uma fonte inesgotável de pesquisa. Este trabalho concentrou-se na apresentação de uma proposta destinada a aprimorar os métodos numéricos empregados na simulação de reservatórios subterrâneos de água, amplamente conhecidos como aquíferos, por meio da abordagem de técnicas de redução de ordem. O aquífero é uma fonte natural de abastecimento de água, que exige cada vez mais estudos, principalmente pela falta de visão muitas vezes adota por quem utiliza-se deles, considerando-o uma fonte de recursos ilimitada. Esses recursos estão em incessante aumento de demanda, causada pelo mau uso geral das fontes de água potável disponíveis em cidades e pelo crescimento da população. A edição de 2018 do Relatório sobre o Desenvolvimento da Água das Nações Unidas afirmou que quase 6 bilhões de pessoas sofrerão de escassez de água potável até 2050. Isto é o resultado do aumento da procura de água, da redução dos recursos hídricos e do aumento da poluição da água, impulsionada por problemas dramáticos do crescimento populacional e econômico. (BORETTI e ROSA, 2019). Segundo a publicação (WORLD WATER ASSESSMENT PROGRAMME (NATIONS UNIES), 2018) o uso global de água aumentou seis vezes nos últimos 100 anos. Isto acarreta numa necessidade de um gerenciamento cada vez mais apurado destes recursos finitos.

Figura 1 - Figura esquemática de Poço Artesiano



A exploração dos aquíferos se dá por meio de perfurações de poços no solo, com o objetivo de alcançar essas importantes fontes subterrâneas de água, que são conhecidas como poços artesianos. Essa prática é amplamente adotada e conta com registros históricos que a

perfuração de poços profundos com varas de bambu teve início em cerca de 5.000 a.c na China (MANZIONE, 2015)

Mas a etimologia da palavra artesiano se tem algumas vertentes que dizem que foi proveniente da cidade grega Artesã, onde se perfuravam poços para a captação de água, e outra que foi proveniente do condado de Artois da França no século XII que segundo a crença tenha sido o primeiro poço de águas sem a necessidade de bombeamento. Não se tendo informações oficiais de onde se foi a primeira vez que a raça humana utilizou deste tipo de obra para que se pudesse obter água. (MANZIONE, 2015)

Bear (BEAR, 1972) define um aquífero como sendo uma formação geológica que contém água, e permite que quantidades significativas desta se movam através de seus poros, ou seja, é um reservatório constituído por um meio poroso de onde se extrai a água subterrânea.

Figura 2 -Aquífero Guarani um dos maiores aquíferos sendo sua extensão internacional



Fonte - <https://www.aguasdematao.com.br/agua-que-abastece-matao-e-retirada-do-aquifero-guarani/>

O aquífero é fundamental para o suprimento hídrico de várias regiões do planeta. A extração adicional de água de um aquífero deve ser conduzida a partir de estudos hidrológicos que caracterizam variáveis muitas vezes associadas a um alto grau de incerteza, como as

distribuições de porosidade e permeabilidade e a recarga do aquífero, esta última diretamente responsável por sua sustentabilidade.

No âmbito global do nosso planeta Terra, a quantidade de água presente, tanto na superfície quanto abaixo da camada do solo, mantém-se essencialmente constante. Embora uma pequena quantidade de vapor de água, que se encontra em suspensão, possa eventualmente dissipar-se no espaço, constantemente surgem novas reservas de água devido às interações químicas que perpetuamente ocorrem em nosso cenário planetário (DELLEUR, 1999).

De acordo com Maidment (MAIDMENT, 1993), que conduziu uma análise do balanço global de água com base nos dados da UNESCO, as reservas de água doce no mundo totalizam 10,53 milhões de quilômetros cúbicos em águas subterrâneas, 91.000 quilômetros cúbicos em lagos e 2.120 quilômetros cúbicos em rios (todos, portanto, considerados utilizáveis). Isso significa que as águas subterrâneas representam 99% de toda a água doce disponível na Terra, pronta para consumo (DELLEUR, 1999).

Segundo Castilho-Barbosa *et al.* (CASTILHO-BARBOSA, CARVALHO, *et al.*, 2020), as águas subterrâneas são fundamentais para manutenção da vida no planeta: fazem parte dos ecossistemas e mantêm a descarga de rios, lagos, mangues e pântanos.

Estima-se que a disponibilidade de água subterrânea no Brasil seja em torno de 14.650 m³/s e, da mesma forma como ocorre com as águas superficiais, sua distribuição pelo território nacional não é uniforme e as características hidrogeológicas e produtividade dos aquíferos são variáveis, ocorrendo regiões de escassez e outras com relativa abundância. (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA, 2020).

A estimativa mais recente contabilizou cerca de 2,4 milhões de poços no Brasil, sendo que destes em 2020 apenas 326 mil poços estão registrados no Sistema de Informações de Águas Subterrâneas (SIAGAS) da Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais (CPRM). (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA, 2020).

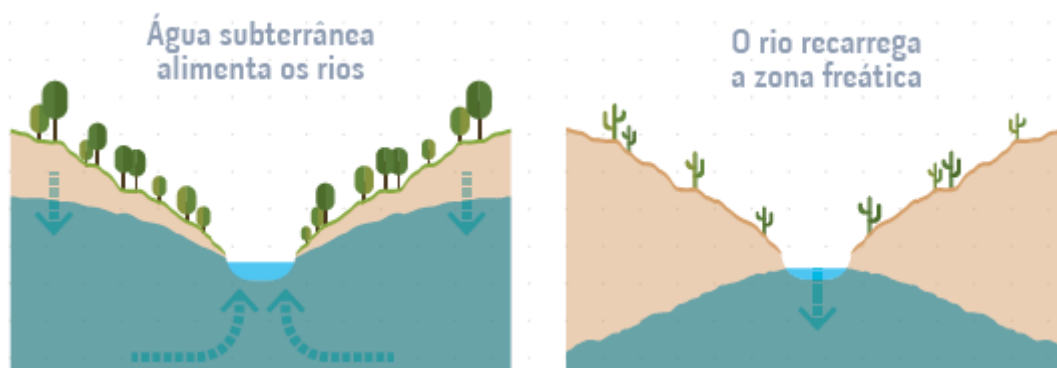
No contexto específico do Brasil, ainda não se observa uma abordagem adequada em relação aos seus aquíferos, na publicação de 2020 da própria ANA alerta que o monitoramento das águas subterrâneas brasileiras ainda é muito incipiente (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA, 2020). Isso é particularmente evidente devido ao clima tropical do país, que apresenta um índice pluviométrico substancial, somado à abundância de águas superficiais, especialmente nas áreas de maior desenvolvimento econômico. Esse cenário resulta em uma subestimação da importância dos aquíferos como fontes de abastecimento hídrico.

A possível falta de atenção concedida a esse tema pode ser atribuída à natureza não aparente dos aquíferos, em contraste com rios e lagos que são elementos visíveis. Essa invisibilidade contribui para subestimar a verdadeira extensão do potencial dessas reservas subterrâneas de água.

No caso particular dos aquíferos da capital do estado de Pernambuco, o município do Recife, que com as várias faltas de abastecimento de água pelo racionamento imposto pela falta de abastecimento, a população recorreu a utilização de poços para o abastecimento (LUNA, GARNÉS, *et al.*, 2017). Em estudos de acompanhamento dos aquíferos na Região Metropolitana do Recife em um poço no bairro de Boa Viagem, pertencente ao aquífero do Cabo, de janeiro de 1992 até dezembro de 2005, Montenegro *et al* (MONTENEGRO, CABRAL e PAIVA, 2009) constatou um declínio da carga hidráulica de 59,61 metros, causada pelo excesso de exploração.

Segundo Oliveira (OLIVEIRA, KOIDE, *et al.*, 2019), os impactos causados com a falta de uma gestão hídrica em ambientes urbanos vêm dificultando a manutenção do ciclo hidrológico, causando prejuízos às populações, principalmente durante picos climáticos. Um planejamento urbanístico é fundamental para que se leve em conta a necessidade de melhor infiltração no solo para a recarga do aquífero e a diminuição de enchentes nas cidades, que causam danos aos mananciais, rios e lagos. O problema de gestão não é só ao urbanístico, provocado pelo crescimento desgovernado das cidades. As tecnologias construtivas, com a necessidade de compactação e impermeabilizações generalizadas também contribuem com o problema, afetando diretamente o ciclo hidrológico e provocando a falta de recarga dos aquíferos e consequentemente provocando escassez de muitos rios, córregos e mananciais, conforme mostrado na *Figura 3*.

Figura 3 - Relação entre Rios e Aquíferos



Fonte: (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA, 2020)

Segundo (GUEDES, DE ARAÚJO e DE ANDRADE, 2021) em publicações da ONU sobre desastres naturais, o alagamento é o principal motivo de maiores perdas em todo o mundo, correspondendo a mais de 44% de todos os desastres naturais registrados entre 2000 e 2019.

Os efeitos da falta de gestão com a extração intensa de aquíferos pode provocar a subsidência do subsolo em regiões de elevada redução de carga hidráulica, uma vez que a despressurização do meio poroso leva ao aumento das tensões efetivas de compressão e a sua consequente redução de volume. Também em regiões costeiras a salinidade da água dos aquíferos pode aumentar pela influência das águas dos oceanos, fenômeno conhecido como intrusão salina (CARY, PETELET-GIRAUD, *et al.*, 2015) (LUNA, GARNÉS, *et al.*, 2017).

Na atualidade, observamos uma crescente preocupação com os aquíferos, motivando uma extensa gama de estudos voltados a abordar os desafios que assolam muitas regiões do mundo (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA, 2020) (BORETTI e ROSA, 2019) (GONG, PAN, *et al.*, 2018) (LUNA, GARNÉS, *et al.*, 2017). Diante dessa necessidade imperiosa de transformação, torna-se essencial reavaliar os paradigmas que regem não apenas a execução de obras civis, mas também o manejo das áreas urbanas.

Uma revolução significativa deve permear a forma como tradicionalmente se conduzem as atividades construtivas e de planejamento urbano. Desde a infraestrutura de drenagem até a concepção das edificações, é inegável a prevalência de práticas que culminam na impermeabilização extensiva do solo, obstaculizando a recarga dos aquíferos e dificultando a penetração natural da água.

A solução alternativa a essa forma de construção tradicional é partir para técnicas compensatórias de controle de drenagem e evoluindo para a técnica de Desenvolvimento de Baixo Impacto (LID - Low Impact Development) onde tem uma abordagem da gestão pluvial com uma pegada mais ecológica, favorecendo o menor impacto e utilizando-se da natureza para ser a infraestrutura de drenagem das chuvas. (GUEDES, DE ARAÚJO e DE ANDRADE, 2021).

Diante desse cenário, surge uma alternativa sensata e progressista: a adoção de abordagens compensatórias para o controle da drenagem, evoluindo gradualmente para a aplicação da filosofia de Desenvolvimento de Baixo Impacto (LID - Low Impact Development). Esta abordagem pressupõe uma gestão pluvial mais ecológica, embasada em princípios que visam minimizar os impactos ambientais. (UNIVERSITY OF ARKANSAS COMMUNITY DESIGN CENTER, 2010).

Onde corroborando com o que foi dito acima, os pontos relevantes para a gestão de águas subterrâneas são obras que facilitem a infiltração (recarga) para os aquíferos e a

verificação de pontos de baixa pressão nos aquíferos uma vez que poderão provocar possíveis subsidências, intrusão salina e outros tipos de contaminação dos aquíferos. Com essas medidas se contribui para a qualidade da água a ser consumida assim como a integridade do aquífero. A gestão de um aquífero com base de um balanço de massas, incluindo recarga e exploração, permitirá a tomada de decisões mais seguras e realísticas. Segundo Khadri e Pande (KHADRI e PANDE, 2016), os modelos computacionais de águas subterrâneas desempenham um papel importante no gerenciamento dos recursos hídricos e na previsão dos efeitos das medidas gerenciáveis.

Com uma ferramenta computacional de simulação de fluxo transiente em meio poroso pode-se acompanhar o desempenho do aquífero e assim detectar antecipadamente os efeitos causados pela redução da recarga, ou exploração excessiva.

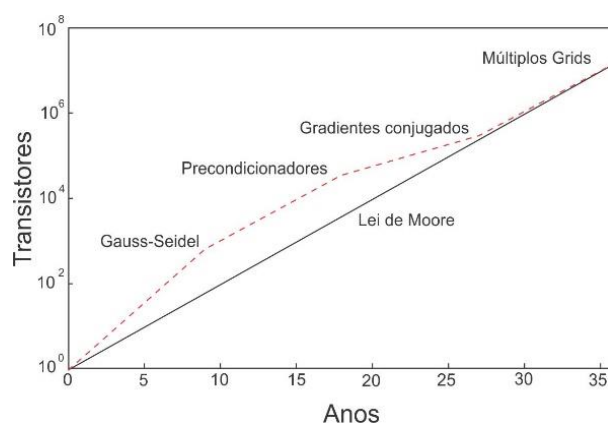
A simulação numérica computacional se tornou uma importante ferramenta para resolver problemas físicos da natureza e da atividade humana, contribuindo para a ajuda da solução em vários processos de pesquisa em geral e aplicações industriais. Segundo Schilders *et al.* (SCHILDERS, VAN DER VORST e ROMMES, 2008), a simulação tornou-se o terceiro ramo do conhecimento, baseado em que eram divididos anteriormente só nos conhecimentos teóricos e experimentais (reais).

Com a crescente demanda por uma simulação mais realística de problemas físicos complexos, vem-se exigindo cada vez mais da capacidade computacional onde os estudos matemáticos e da ciência da computação tem sido cada dia mais intenso.

Segundo Zu-QingQu (ZU-QING QU, 2004), embora a velocidade do computador e a capacidade de memória continuem dobrando a cada 18 meses (Lei de Moore Figura 4), o fenômeno de que a demanda de armazenamento e velocidade do computador sempre excederá as capacidades existentes tem sido consistentemente demonstrado na análise de elementos finitos durante o último meio século. Supercomputadores modernos, por exemplo, são capazes de resolver problemas envolvendo mais de 1.000.000 de equações com 1.000.000 de incógnitas, mas ainda não são suficientes para satisfazer as necessidades de alguns engenheiros. Além disso, é importante destacar que os supercomputadores mais recentes geralmente não estão acessíveis à maioria dos pesquisadores e engenheiros. Nesse contexto, é fundamental ressaltar que a competência nas técnicas computacionais é tão crucial quanto a capacidade do hardware do computador. Isso ocorre porque o uso de técnicas eficientes pode resultar em significativas reduções no consumo de armazenamento e no tempo de processamento, tornando a otimização uma das principais metas de pesquisa no campo da simulação e modelagem.

A aceleração alcançada combinada pelos processadores e os algoritmos matemáticos é enorme e permitiu à ciência computacional dar grandes passos à frente. A constante evolução computacional de elevar o poder de processamento, com processadores cada vez mais velozes, com a utilização de placas de vídeos como auxiliares de processamento e o armazenamento com cada vez mais espaço e rapidez de troca de informações, aliado a queda de preços destes equipamentos. Tudo isso nos leva a um novo cenário computacional onde muitos problemas que as pessoas não sonhavam em resolver há duas décadas agora são resolvidos rotineiramente (SCHILDERS, VAN DER VORST e ROMMES, 2008), conforme a figura abaixo:

Figura 4-Evolução dos processadores segundo a Lei de Moore e a dos algoritmos matemáticos



Fonte: SCHILDERS et al (2008)

Segundo Quarteroni (QUARTERONI e ROZZA, 2014), a crescente complexidade dos modelos matemáticos utilizados para prever sistemas do mundo real, como o clima ou o sistema cardiovascular humano, exige o desenvolvimento de estratégias de redução de modelos, que são algoritmos computacionais mais baratos que ainda capturam com precisão as características mais importantes dos fenômenos sendo modelados.

Mas, mesmo assim, ainda hoje muitos problemas em ciência e engenharia permanecem intratáveis, apesar dos impressionantes progressos alcançados em modelagem mecânica, análise numérica, técnicas de discretização e ciência da computação durante a última década, devido à sua complexidade numérica ou às restrições impostas por diferentes requisitos (tempo real, por exemplo) os tornam inacessíveis para as tecnologias atuais (CHINESTA, LADEVEZE e CUETO, 2011).

Este trabalho apresenta ferramentas numéricas integradas em códigos computacionais desenvolvidos em Matlab, permitindo a realização de estudos na área de aquíferos. Essas ferramentas possibilitam a análise do comportamento dos aquíferos em resposta às diversas mudanças que podem ocorrer devido a fatores como hidrologia, clima e atividades humanas nas regiões de interesse. Em outras palavras, essas ferramentas viabilizam a avaliação das condições hidrológicas em uma determinada região, exigindo a integração de dados relacionados à precipitação, uso do solo, características

geológicas, porosidade e permeabilidade das formações rochosas e a distribuição das formações aquíferas (MANZIONE, 2015).

O foco principal das ferramentas numéricas desenvolvidas neste trabalho é a criação de métodos de redução de ordem para resolver sistemas de fluxo transiente em meios porosos. Em tais cenários, modelos de ordem reduzida podem produzir soluções aproximadas mais rapidamente, desde que sejam projetados de forma adequada (BAO, GILDIN, et al., 2019). A redução de ordem é um conceito de aproximação que ganhou destaque nos últimos anos e pode ser especialmente útil em problemas que envolvem física complexa e/ou domínios extensos.

Este trabalho descreve dois métodos de redução de ordem. O primeiro método é baseado no particionamento de matrizes, conforme proposto por Guyan (GUYAN, 1965). Embora seja amplamente conhecido para sistemas de equações estacionárias devido à sua capacidade de fornecer soluções exatas, foi necessário adaptá-lo para lidar com sistemas de equações de fluxo dinâmicos. Além das adaptações necessárias para tornar o método aplicável a esses sistemas dinâmicos, foram introduzidas outras abordagens para aprimorar a redução das matrizes. Para o caso do particionamento utilizou-se um método de concentração de massa nas regiões dos contornos, reduzindo a influência dos graus de liberdade internos do particionamento.

O segundo método de redução deste trabalho é uma abordagem numérica baseada na análise de superposição modal. Inicialmente, recorreu-se ao método dos elementos finitos para auxiliar na montagem das matrizes e, em seguida, empregou-se o método matemático da superposição modal para resolver o fluxo transiente em meios porosos no domínio em questão. A vantagem desse método reside na possibilidade de reutilizar as propriedades da matriz global do método dos elementos finitos em problemas transientes, considerando diferentes condições de funcionamento do aquífero, como recargas distribuídas e taxas de extração de poços. Isso permite uma resolução computacionalmente mais eficiente do problema numérico. Essa ferramenta pode ser especialmente útil em estudos que envolvem a quantificação de incertezas, o ajuste de históricos e a otimização da produção de água em aquíferos, visto que essas análises frequentemente demandam um grande número de simulações numéricas, que podem ser computacionalmente dispendiosas, para modelar o fluxo de água em aquíferos.

Todos os códigos foram criados ao longo do processo de pesquisa, à medida que se foi desenvolvendo e aprimorando os métodos numéricos estudados. O desenvolvimento desses códigos representou uma contribuição significativa do nosso grupo de pesquisa no Laboratório LMCG.

2 RESERVATÓRIO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA

Conforme destacado no relatório do Programa de Avaliação Mundial da Água das Nações Unidas (WWAP), a demanda global por água está em constante crescimento, registrando uma taxa de aumento de aproximadamente 1% ao ano. Esse fenômeno é impulsionado pelo crescimento populacional, desenvolvimento econômico e mudanças nos padrões de consumo, entre outros fatores, e a tendência é que esse aumento significativo persista ao longo das próximas duas décadas (WORLD WATER ASSESSMENT PROGRAMME (NATIONS UNIES), 2018).

Diante desse cenário, é imperativo reconhecer a importância crítica das novas fontes de água para a sobrevivência futura do nosso planeta, bem como para sua sustentabilidade como fonte vital de subsistência. Nesse contexto, a pesquisa e o estudo de reservatórios subterrâneos desempenham um papel fundamental. Essa investigação é essencial para o planejamento adequado, visando assegurar a continuidade do acesso à água e a preservação de nossos recursos hídricos subterrâneos de forma sustentável. Segundo Freeze e Cherry (FREEZE e CHERRY, 1979) as águas subterrâneas são mais que um recurso natural, elas são um aspecto importante do ambiente natural; ela leva a problemas ambientais e, em alguns casos, pode oferecer um meio para soluções ambientais. Elas fazem parte do ciclo hidrológico (Figura 5), e uma compreensão de seu papel nesse ciclo é obrigatória para análises integradas serem promovidas na consideração dos recursos da bacia hidrográfica e na avaliação regional da contaminação ambiental. Em um contexto de engenharia, a água subterrânea contribui para problemas geotécnicos, como estabilidade de encostas e subsidência do solo.

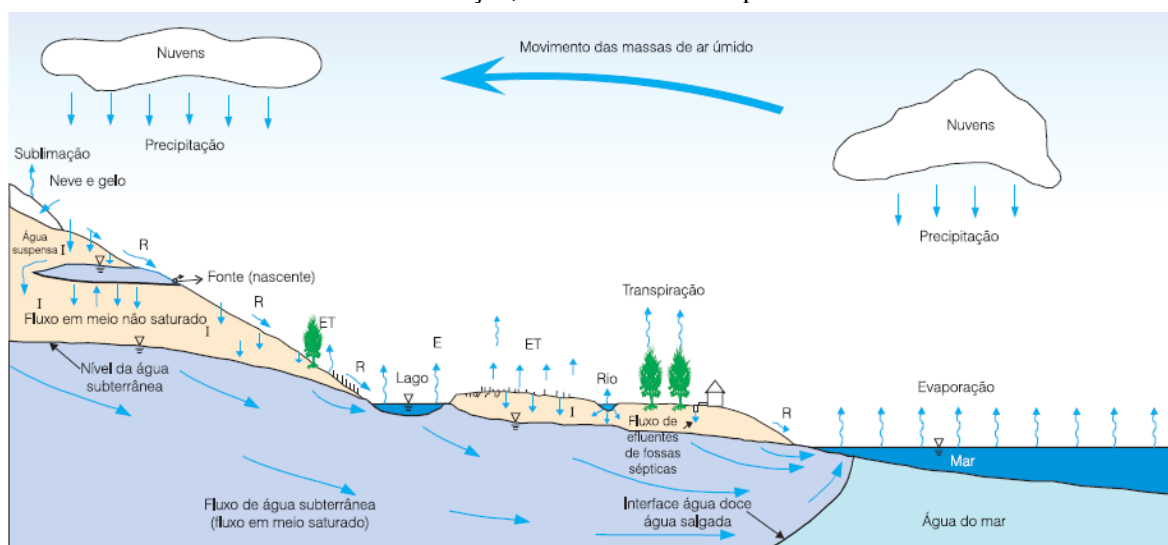
Freeze e Cherry (FREEZE e CHERRY, 1979) descrevem ainda que a análise da água subterrânea também é um dos elementos para a compreensão de uma ampla variedade de processos geológicos, como a geração de terremotos, a migração e o acúmulo de petróleo e a gênese de certos tipos de depósitos de minério, tipos de solo e formas de relevo. Sendo este um campo de estudo interdisciplinar que há interações de profissionais como geólogo, hidrólogo, engenheiro agrícola, engenheiro florestal, geográfico, ecologista, engenheiro geotécnico, engenheiro de minas, engenheiro sanitarista, engenheiro de reservatório de petróleo, dentre outros. (FREEZE e CHERRY, 1979).

O Bear (1987) alerta que há dois tipos principais de problemas de previsão relacionados ao gerenciamento dos reservatórios subterrâneos. O primeiro é a previsão do nível piezométrico, já que este é a variável chave para a realização do balaço de massas, que relaciona o que é retirado e o que se entra no reservatório. O segundo diz respeito à qualidade da água e

suas mudanças de composição, que podem ser de causas humanas e naturais. Em suma, o planejamento de exploração de um aquífero está integrado ao ciclo hidrológico e tem como parâmetros a quantidade e qualidade da água que se pode extrair. (BEAR e VERRUIJT, 1987).

As formações onde se encontram depósitos de águas em subsuperfície são chamados de reservatórios de águas subterrâneas. Esses reservatórios, em sua maioria, são formações geológicas (calcários e arenitos) depositadas em camadas por processos de sedimentação ao longo do tempo, formando assim uma rede de poros e fraturas que armazenam o fluido.

Figura 5 - Representação esquemática do ciclo hidrológico: E - Evaporação; ET- evapotranspiração; I - infiltração; R - escoamento superficial



Fonte: (FEITOSA, FILHO, et al., 2008)

Como já foi dito anteriormente, para o tratamento eficaz do reservatório subterrâneo necessita-se de equipe multidisciplinar para que se possa entender e atuar nas várias fases do gerenciamento. Como o reservatório subterrâneo é constituído por formações geológicas e que Bear e Verruijt (BEAR e VERRUIJT, 1987) nomeou em aquífero, aquíclode, aquífugo e aquícardo. A formação onde o fluido permeia pelos vazios da rocha e consegue ser aproveitada, é denominada de aquífero. Quando há uma quantidade apreciável de fluido, mas a formação é impermeável, tem-se o aquíclode. Já quando uma formação que não tem fluido e também é impermeável, é denominada de aquífugo. Uma formação que baixa permeabilidade é chamada de aquícardo. (BEAR e VERRUIJT, 1987).

A classificação do aquífero pode ser de três maneiras distintas. Uma classificação geológica do reservatório, que classifica quanto a característica de armazenamento de fluido. Uma outra classificação pelo tipo de formação geológica, que pode diferenciar o tipo de reservatório quanto sua porosidade, diferenciando a geometria dos poros e até mesmo se podem

ser fraturados ou cársticos. E outra classificação quanto ao tipo de aquífero ele pode ser, sendo sua classificação por sua localização nas formações rochosas.

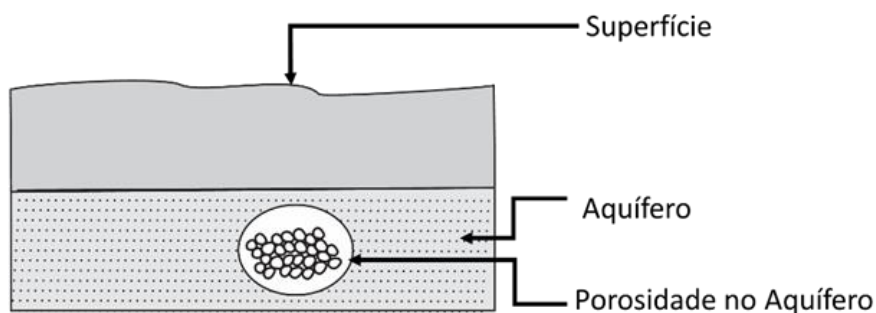
Manzione deixa claro que qualquer formação suficientemente porosa e permeável pode constituir um aquífero. E que as formações de aquíferos ocorrem tanto em rochas consolidadas como em formações sedimentares não consolidadas. Para que se tenha uma ideia, 95% das rochas crustais são ígneas, que são rochas formadas pelo resfriamento e consolidação do magma, e 5 % sedimentares, que são rochas formadas a partir dos sedimentos de rochas pré-existentes. Das sedimentares, 80% são folhelhos, 15% arenitos e 5% carbonatos, aproximadamente. (MANZIONE, 2015) Mostrando que as diversas classificações são pertinentes para que se possa classificar o aquífero mediante os diferentes tipos de formações e que cada uma pode determinar características diferentes para o armazenamento e consequentemente para seu escoamento.

Na classificação geológica quanto à geometria e processo de formação dos poros, os aquíferos podem ser classificados em poroso, fraturados e cársticos. Nos porosos a água circula por uma rede de poros conectados tendo como fronteira a matriz rochosa. Nos fraturados, a água circula por uma rede fraturas que podem conferir ao aquífero grande capacidade de armazenamento (porosidade) e transmissão (permeabilidade) de fluidos. Nestes tipos de reservatórios a abertura das fraturas e o grau de conectividade entre elas são variáveis fundamentais a serem caracterizadas. Nos reservatórios cársticos, a água circula pelas aberturas ou macro cavidades causadas pelas dissoluções da matriz rochosa, principalmente nos calcários. Nestes reservatórios os arteses podem estar conectados por fraturas, formando verdadeiros tubos e canais de fluxo. (MANZIONE, 2015).

Para classificação quanto a localização do aquífero existem os tipos de aquíferos confinados, os aquíferos livres, os aquíferos semiconfinados, os aquíferos suspensos e os aquíferos costeiros. O aquífero confinado é o que tem seus limites superiores e inferiores formados por rochas impermeáveis, sendo pressurizados e eventualmente causando artesianismo nos poços que dele extraem água. O aquífero livre (também conhecido como freático ou não confinado) são de formação geológicas superficiais onde o lençol freático apresenta-se como limite superior. O aquífero semiconfinado é o que se encontra em uma situação intermediária entre um aquífero confinado e um livre. O aquífero suspenso é o que tem sua formação em uma camada impermeável, de extensão limitada, situada entre a superfície freática e a superfície. O aquífero costeiro é o que tem sua proximidade com o oceano ou lagos salgados. (BEAR e VERRUIJT, 1987) (MANZIONE, 2015).

A Figura 6 ilustra um aquífero como um reservatório poroso contendo a água como fluido de armazenamento. Os aquíferos têm uma capacidade de armazenar uma grande quantidade de água, mas, numa escala microscópica, o fluxo tortuoso através dos poros e fraturas da rocha acarreta em grande perda de carga e faz com que a velocidade de percolação seja baixa. (MANZIONE, 2015).

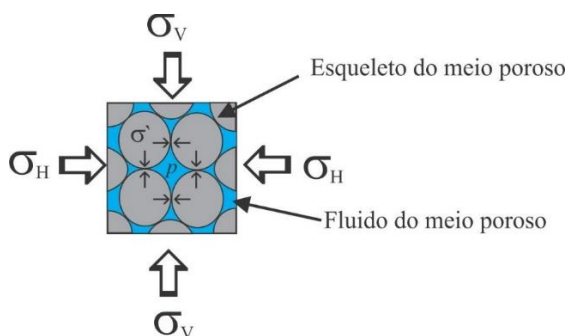
Figura 6 - Desenho esquemático de um aquífero



Fonte: (GUEDES, DE ARAÚJO e DE ANDRADE, 2021)

Coussy (COUSSY, 2004) advoga que o meio poroso pode ser tratado como a sobreposição de dois contínuos, sendo um a matriz sólida e o outro o fluido contido nos poros da rocha. A Figura 7 representa esquematicamente um meio poroso saturado de água, como é o caso dos aquíferos. Além da atuação da poro-pressão, o aquífero também está sujeito a tensões geostáticas devido ao peso próprio de todas as camadas rochosas da profundidade onde se encontra o aquífero até a superfície do terreno (GUEDES, DE ARAÚJO e DE ANDRADE, 2021). Estas tensões, normais e cisalhantes, atuam tridimensionalmente em todas direções do espaço tridimensional e podem variar e deformar a rocha quando há variação no estado de tensões efetivas (tensões totais menos poro-pressões) devido à produção de fluidos. Tais deformações podem alterar as porosidade e permeabilidade da rocha, que são as variáveis de interesse do presente estudo, afetando o regime de fluxo no aquífero.

Figura 7 - Efeito poro pressão sobre a matriz porosa do aquífero



No caso particular da extração de água dos aquíferos, tem-se redução da poro-pressão e o consequente aumento das tensões efetiva, que comprimem as rochas causando diminuição em

sua porosidade. Este efeito pode levar à compactação do reservatório, que é uma diminuição de seu volume, e levar à subsidência da superfície do terreno. Em alguns casos, subsidência da superfície serve como uma restrição para a retirada de água do aquífero. Segundo (BEAR e VERRUIJT, 1987) regiões muito conhecidas pela subsidência, causadas pelo bombeamento dos aquíferos, são Joaquin Valley (Califórnia), Cidade do México (México), Bangkok (Tailândia) e Veneza (Itália).

Caso de regiões com ocorrências de subsidência pela exploração dos aquíferos foram noticiados desde 1920 na China, gerando acidentes em algumas áreas (GUO, ZHANG, *et al.*, 2015). O estudo de Ye *et al* (S, XUE Y e YAN X, 2016) indica áreas com subsidência de 20 mm por ano. Segundo Gong *et al* (GONG, PAN, *et al.*, 2018), na província de Hebei, a subsidência total chega a 3 m, sendo a mais grave do Norte da China.

Segundo o estudo de Modoni (MODONI, DARINI, *et al.*, 2013) na região da Bologna (Itália) o excesso de exploração de aquíferos também causa subsidência, que em algumas regiões podem chegar a 4 m de recalque. O qual, em seu estudo sobre a região da Bologna (Itália), adverte que as medidas para conter as subsidências na região devem ser encontradas em políticas particularmente preocupadas com a proteção das fontes de água subterrânea ou com a satisfação da demanda da população e, portanto, muito mais focadas nas questões hidrológicas, hidrogeológicas e hidráulicas do que nas consequências mecânicas da extração da água subterrânea. A subsidência é, portanto, considerada apenas quando a deformação se torna evidente e seus efeitos passam a interagir com as atividades humanas. Devido a essa percepção tardia, as medições são frequentemente incompletas e os estudos raramente chegam além das descrições qualitativas, enquanto a quantificação dos mecanismos que ocorrem nas diferentes partes do subsolo seria de suma importância para gerenciar de forma abrangente a exploração das águas subterrâneas e o uso do território. (MODONI, DARINI, *et al.*, 2013).

Em um estudo para se avaliar o custo ambientais causados pelo excesso de exploração de águas subterrâneas feita por (LV, LING, *et al.*, 2019) constatou se que no aquífero de Zhengzhou na província de Henan na China central, teve se uma perda ambiental de aproximadamente U\$ 853.000.000,00, onde foi contabilizado as perdas por subsidência (colapso), intrusão de água salina, redução do escoamento superficial, deterioração da vegetação e poluição das águas subterrâneas. A maior perda foi a de subsidência, avaliada em U\$ 816.000.000,00, o que representa 95,64% da perda total. (LV, LING, *et al.*, 2019).

Em conclusão, apesar de todos os problemas aqui expostos com relação ao gerenciamento e comportamento dos reservatórios subterrâneos, a exploração sustentável de aquíferos tem sido uma fonte de água potável imprescindível para a população, principalmente

por fornecer uma água de alta qualidade a baixo custo de implantação para a captação, comparado com o custo de uma captação de água superficial. Trata-se de um recurso natural renovável e adequado para o pronto consumo humano. (MANZIONE, 2015).

3 REDUÇÃO DE ORDEM

Na engenharia, assim como em outras disciplinas que requerem a resolução de problemas complexos, faz-se uso de simplificações matemáticas para encontrar soluções viáveis. Essas simplificações permitem obter valores aproximados aceitáveis para as variáveis em análise durante o processo de projeto. Um exemplo notável dessa abordagem é a aplicação de métodos numéricos, que, por meio de cálculos matemáticos elaborados, tornam a resolução de problemas matemáticos desafiadores uma tarefa viável e praticável.

As técnicas de redução de ordem desempenham um papel fundamental nos métodos numéricos, permitindo uma simplificação matemática das equações envolvidas no problema. Isso possibilita a obtenção de soluções aproximadas que mantêm uma precisão próxima do nível requerido para cada uma das variáveis em questão.

A modelagem de domínios complexos, particularmente com modelos de alta fidelidade, apresenta desafios significativos em termos de custo computacional, tanto em relação à demanda de memória quanto ao tempo de processamento.

Às vezes necessita-se simplificar a modelagem, dividindo o domínio em subdomínios menores (particionamento do problema) ou reduzir o número de incógnitas a serem resolvidas adotando técnicas de *upscaling* possibilitando o uso de malhas mais grossas. Eventualmente optando por elementos de ordem inferior, de modo a ajustar o problema numérico às capacidades do computador. Se feitas de maneira incorreta, tais procedimentos podem acarretar em perdas significativas de precisão nos resultados da solução de análise. (S.M.PALEKAR, K.V.SUBRAMANIAN e M.S.BAVARE, 2003).

É cada vez mais frequente depararmos com sistemas nos quais o domínio é vasto e essencial para abarcar todas as informações relacionadas ao sistema físico. Isso pode englobar uma ampla gama de contextos, como processos químicos complexos, sistemas biomédicos, sistemas de transporte, ecossistemas, sistemas elétricos, sistemas mecânicos, aeroespaciais ou aeronáuticos. Todos estes sistemas grandes e complexos são difíceis de serem modelados com técnicas convencionais. (CHATURVEDI, 2010).

Cada sistema possui uma formulação física específica, a qual é representada por um modelo matemático contendo equações diferenciais e algébricas que descrevem o problema. Em algumas situações, é necessário encontrar um modelo de ordem inferior que seja capaz de representar adequadamente as características essenciais do sistema, conforme indicado pela formulação matemática original. As principais razões para se optar por um modelo de redução de ordem está na agilidade e entendimento do sistema, na redução do custo computacional,

tanto o poder de processamento do equipamento, tempo de CPU e armazenamento, viabilizando projetos que antes não se conseguiria modelar permitindo a generalização para a solução de outros problemas físicos. (CHATURVEDI, 2010).

Para compreender o princípio matemático da redução de ordem, é útil introduzir um sistema linear que envolva derivadas em relação ao tempo. Tais sistemas lineares com derivadas em relação ao tempo podem ser analisados tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Considera-se o seguinte sistema como exemplo de um sistema linear com derivadas em relação ao tempo: (FORTUNA, NUNNARI e GALLO, 1992).

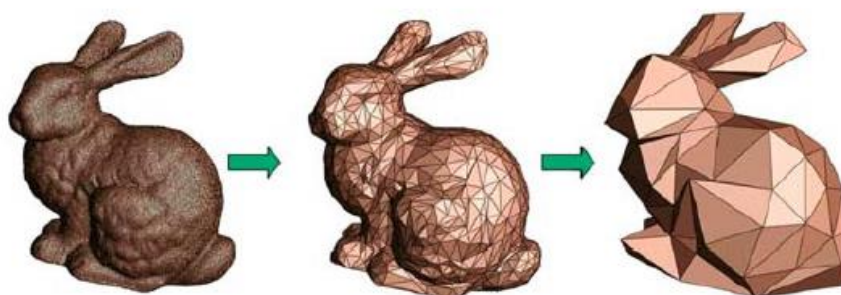
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$, A , B , C são as matrizes constantes das dimensões apropriadas. Assumindo que este sistema linear pode ser derivável, um modelo de redução de ordem do sistema original pode ser assumido na forma: (FORTUNA, NUNNARI e GALLO, 1992).

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u_r \\ y_r &= C_r x_r\end{aligned}\tag{2}$$

onde $x_r \in \mathbb{R}^r$ e $y_r \in \mathbb{R}^p$, e A_r , B_r , C_r são as matrizes correspondentes a dimensão adequada com a redução de ordem, (FORTUNA, NUNNARI e GALLO, 1992) demonstrando que a ideia da redução de ordem é a substituição de sistemas como o da equação (1) por um da mesma forma mas com dimensões menores ($r < n$).

Figura 8 - Ilustração de modelo de redução de ordem



Fonte: (SCHILDERS, VAN DER VORST e ROMMES, 2008).

A Figura 8 ilustra o conceito de redução de ordem de uma forma gráfica, demonstrando que às vezes muito pouca informação é necessária para descrever um modelo. Este exemplo com fotos do Stanford Bunny mostra que, mesmo com apenas algumas facetas, o coelho ainda pode ser reconhecido como tal. Mesmo que o exemplo não retrate o modelo matemático que é

empregado na redução de ordem ele consegue explicar o que é a redução de ordem de forma didática. (SCHILDERS, VAN DER VORST e ROMMES, 2008).

Estes modelos físicos de alta ordem com suas complexidades podem ser resolvidos tanto no domínio do tempo, ou no domínio da frequência. (FORTUNA, NUNNARI e GALLO, 1992) (CHATURVEDI, 2010).

O termo modelo de redução de ordem é normalmente usado para modelos de espaço de estado, ao passo que, o termo modelo simplificado é usado para modelos de função de transferência no domínio da frequência. A diferença está na concepção do problema proposto. (CHATURVEDI, 2010).

Reduzir a ordem de um modelo de espaço de estado equivale a buscar uma representação mais grosseira do sistema, que, portanto, produz um espaço de estado de menor dimensão, para os mesmos dados de entrada. Já para o termo simplificação designa a construção de uma função de transferência aproximada cujo domínio é de ordem inferior ao domínio original. (CHATURVEDI, 2010).

A redução de ordem de um sistema linear com derivada no tempo é aplicada em quase todos os campos da engenharia. Portanto, algoritmos de redução de ordem são técnicas padrões de análise, aproximação e simulação de sistemas interdependentes de modelos decorrentes de interconexão e interdependência de sistemas. (CHATURVEDI, 2010).

As técnicas de redução por domínio de frequência são essencialmente baseadas nas manipulações polinomiais e as técnicas de redução do domínio de espaço de estado levam à derivação de um modelo de baixa ordem, com menos variáveis de estado. Eles incluem todos os métodos baseados em otimização paramétrica e os métodos de truncamento. (FORTUNA, NUNNARI e GALLO, 1992).

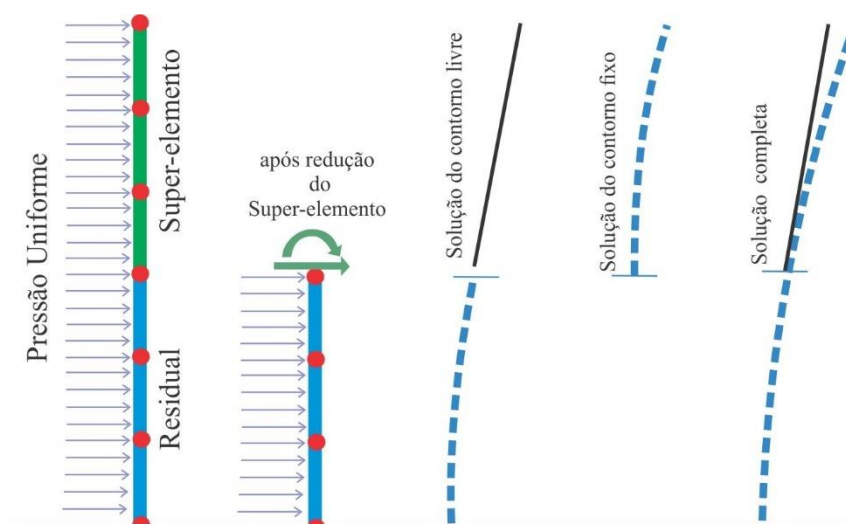
4 SUBESTRUTURAÇÃO

A técnica de sub estruturação ou super-elementos foi consolidada na área aeroespacial desde os anos 60. A técnica consiste em um procedimento de separar toda a estrutura em unidades menores que são chamadas de subestruturas. (LOGAN, 2016) Com isso, muitos programas comerciais de análise estrutural já adotam essa técnica, proporcionando uma redução significativa nos custos computacionais e possibilitando simulações mais detalhadas nas áreas de maior interesse do problema. Essa abordagem resulta em um processamento mais rápido, minimizando os riscos, uma vez que partes do modelo podem ser simuladas várias vezes para verificar e depurar erros localmente, mantendo o problema dentro dos limites da capacidade computacional disponível.

Além disso, o particionamento de dados pode ser aplicado, ou seja, as partições podem ser independentes, permitindo que as equipes de cada subprojeto trabalhem apenas com as informações relevantes para sua parte do projeto. Isso também contribui para um nível maior de segurança no que diz respeito ao fluxo de informações dentro do projeto e seus particionamentos.

Neste sentido, técnica de subestruturação, também conhecida como técnica do super-elemento, consiste em particionar o domínio, separando os processos por cada super-elemento, sendo tratados como problema individuais, conforme *Figura 9*. Resultando em conjuntos de matrizes dos sistemas de equações reduzidas, uma vez todos os super-elementos processados, essas matrizes reduzidas são montadas no que é conhecido como estrutura residual onde a solução de montagem é realizada. (CORPORATION, 2016).

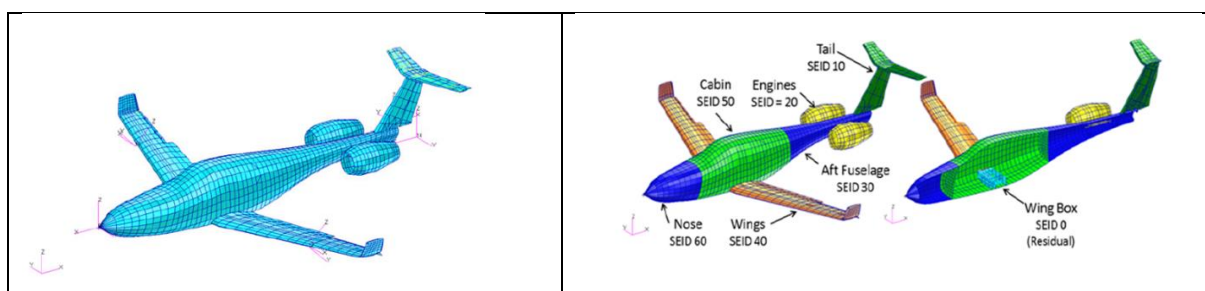
Figura 9 - Representação de Subestruturação (CORPORATION, 2016)



Os estudos sobre o método apontaram que a técnica pode ser trabalhada:

- Fazendo o desmembramento do domínio em várias partes e posteriormente consolidar os resultados, é possível lidar com estruturas muito grandes de maneira mais eficaz. Em sistemas extremamente complexos, representados como um único sistema ou tratados como um todo, a matriz de rigidez resultante para as equações de solução pode facilmente ultrapassar a capacidade de memória e poder de processamento do computador. Nessas situações, o método de subestruturação, como indicado por Logan (2016), é uma abordagem recomendável. Esse método envolve a divisão do projeto em várias frentes de trabalho independentes, seguida pela montagem global, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 - Representação da subestruturação em um projeto de um avião



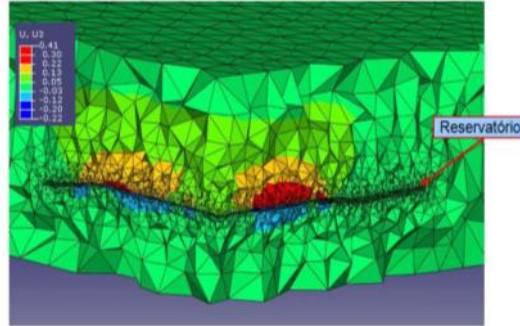
Fonte: (CORPORATION, 2016)

- Reduzindo as matrizes para os cálculos, separando os graus de liberdade que são de interesse para a solução de alta fidelidade (sem redução) e subestruturando o domínio de menor interesse. Em outras palavras, é como se selecionássemos uma grande região (ilustrada na Figura 10a) e concentrasse apenas na área de interesse, onde realiza-se uma modelagem detalhada e precisa, simplificando a região menos crítica, conforme demonstrado na Figura 10b. Para exemplificar esse conceito, considere um estudo geomecânico de um reservatório de petróleo (conforme mostrado na Figura 11). Nesse caso, o reservatório em si seria a área de interesse principal, enquanto as rochas adjacentes seriam consideradas como a região que pode ser simplificada e removida do domínio de alta fidelidade por meio da subestruturação. Isso permite concentrar os esforços computacionais e a modelagem precisa na parte crítica do problema, otimizando os recursos e acelerando o processo de análise. Na Figura 11, a diferença nas malhas ilustra claramente que a área de interesse está concentrada na região do reservatório onde o fluido está armazenado. A discretização envolve a subdivisão do domínio em elementos, e o número total de elementos usados, bem como a variação em seu tamanho e tipo dentro do corpo em questão, são decisões primariamente baseadas no julgamento de engenharia.

É fundamental que esses elementos sejam suficientemente pequenos para produzir resultados precisos e aplicáveis, mas ao mesmo tempo grandes o suficiente para manter o esforço computacional em um nível gerenciável. Geralmente, a preferência é por elementos

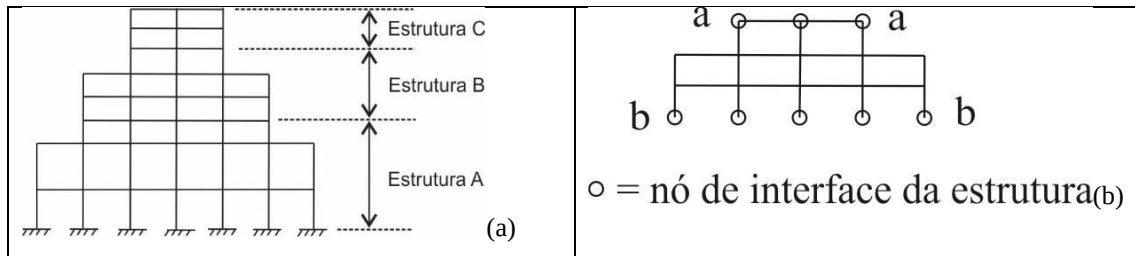
menores, mais discretizado, em áreas onde os resultados sofrem mudanças abruptas, como em regiões com alterações na geometria. Por outro lado, elementos maiores podem ser adotados em áreas onde os resultados permanecem relativamente estáveis. (LOGAN, 2016).

Figura 11 - Escolha de região de interesse



Para que se possa compreender um processo de subestruturar um domínio optou-se por um exemplo simples de pórtico da Figura 12. Separando o pórtico em três partes verifica-se que analisando separadamente a subestrutura B, ilustrada na Figura 12 (b), observa-se que as vigas da parte superior (a-a) e as vigas da parte inferior (b-b) compõem as interfaces entre as subestruturas. É importante notar que as vigas (a-a) são consideradas parte da subestrutura C, enquanto as vigas (b-b) fazem parte da subestrutura A. Ou seja, a subestruturação depende da interação de todas as partes do domínio que está sendo subestruturado.

Figura 12 – (a) Estrutura rígida para análise de subestruturação e (b) subestrutura B.



Fonte: (LOGAN, 2016)

A equação de equilíbrio para a subestrutura B pode ser apresentada como:

$$\{F^B\} = [K^B]\{d^B\}, \quad (3)$$

onde se tem o vetor de forças $\{F^B\}$, a matriz de rigidez $[K^B]$ e o vetor de deslocamentos $\{d^B\}$, atuando na subestrutura B.

Faz-se o particionamento separando os nós de interface dos nós internos, denominando-se de nós mestres (m) e nós escravos (s), respectivamente. A equação pode ser apresentada como: (LOGAN, 2016)

$$\begin{Bmatrix} \{F_m^B\} \\ \{F_s^B\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{mm}^B] & [K_{ms}^B] \\ [K_{sm}^B] & [K_{ss}^B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_m^B\} \\ \{d_s^B\} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

Utilizando a condensação estática tem-se: (LOGAN, 2016)

$$\{F_m^B\} = [K_{mm}^B] \{d_m^B\} + [K_{ms}^B] [K_{ss}^B]^{-1} [\{F_s^B\} - [K_{sm}^B] \{d_m^B\}], \quad (5)$$

$$\{F_s^B\} = [K_{sm}^B] \{d_m^B\} + [K_{ss}^B] \{d_s^B\}, \quad (6)$$

Eliminando o deslocamento interior $\{d_s^B\}$, na equação (6): (LOGAN, 2016)

$$\{d_s^B\} = [K_{ss}^B]^{-1} [\{F_s^B\} - [K_{sm}^B] \{d_m^B\}], \quad (7)$$

Utilizando para a substituição o deslocamento da equação (7) na equação (5) obtém-se: (LOGAN, 2016)

$$\{F_m^B\} - [K_{ms}^B] [K_{ss}^B]^{-1} \{F_s^B\} = \left([K_{mm}^B] - [K_{ms}^B] [K_{ss}^B]^{-1} [K_{sm}^B] \right) \{d_m^B\}, \quad (8)$$

Pela condensação estática das estruturas se define:

$$\{\bar{F}_m^B\} = [K_{ms}^B] [K_{ss}^B]^{-1} \{F_s^B\} \text{ e } [\bar{K}_{mm}^B] = [K_{mm}^B] - [K_{ms}^B] [K_{ss}^B]^{-1} [K_{sm}^B], \quad (9)$$

Fazendo as devidas substituições se chega para a subestrutura B: (LOGAN, 2016)

$$\{F_m^B\} - \{\bar{F}_m^B\} = [\bar{K}_{mm}^B] \{d_m^B\} \quad (10)$$

Similarmente, as equações de equilíbrio das subestruturas A e C podem ser obtidas do mesmo modo:

$$\begin{Bmatrix} \{F_m^A\} \\ \{F_s^A\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{mm}^A] & [K_{ms}^A] \\ [K_{sm}^A] & [K_{ss}^A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_m^A\} \\ \{d_s^A\} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \{F_m^C\} \\ \{F_s^C\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{mm}^C] & [K_{ms}^C] \\ [K_{sm}^C] & [K_{ss}^C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_m^C\} \\ \{d_s^C\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Eliminando $\{d_s^A\}$ e $\{d_s^C\}$ tem-se: (LOGAN, 2016)

$$\{F_m^A\} - \{\bar{F}_m^A\} = [\bar{K}_{mm}^A] \{d_m^A\}, \quad (13)$$

e,

$$\{F_m^C\} - \{\bar{F}_m^C\} = [\bar{K}_{mm}^C] \{d_m^C\} \quad (14)$$

Considerando as ligações das subestruturas A, B e C, conectadas pelos pontos nodais mestres (os nós de interfaces), impõe-se a compatibilidade de maneira que:

$$\{d_{m_topo}^A\} = \{d_{m_baixo}^B\} \text{ e } \{d_{m_topo}^B\} = \{d_{m_baixo}^C\} \quad (15)$$

Onde a interface dos nós os deslocamentos são os mesmos.

A resposta de toda a estrutura pode agora ser obtida pela superposição direta das equações (10), (13) e (14), onde agora as equações finais são expressas em termos dos deslocamentos da interface de apenas oito nós mestres (da interface) Figura 12 (b) conforme equação a seguir, resolvida apenas para os nós mestres:

$$\{F_m\} - \{\bar{F}_m\} = [\bar{K}_{mm}] \{d_m\} \quad (16)$$

A solução da equação (16) fornece o deslocamento dos nós mestres (de interface). Para se obter os deslocamentos dentro de cada subestrutura, usamos a equação de equilíbrio (7) para chegar ao resultado do deslocamento de B e similarmente se faz para as subestruturas de A e C. (LOGAN, 2016).

Mostra-se assim que com uma solução simples e eficiente, principal motivação da popularização das técnicas de subestruturação. Em algumas áreas do conhecimento que trabalham com grandes domínios ou domínios extremamente discretizados, raramente se analisa um domínio uma única vez, sendo analisado através dos vários particionamentos em subdomínios. Analisando-se apenas uma parte da estrutura, tem-se uma economia de tempo significativo. Pode-se ainda listar as principais vantagens de se usar a técnica de subestruturação: (CORPORATION, 2016).

- Redução de custo – como dito, em vez de se resolver todo o domínio pode-se dividir o problema em subestruturas, processando o domínio por partes. Segundo a publicação da MSC Nastran (CORPORATION, 2016), o ganho de desempenho pode resultar em uma análise de 2 a 30 vezes mais rápida que os métodos sem subestruturação.
- Retorno mais rápido – com a subestruturação pode-se processar individualmente com menos recursos computacionais que em soluções sem a subestruturação, onde seria necessário servidores ou estações de trabalho. Com a utilizações cada vez mais populares de simulações estocásticas e de otimização se confere uma maior eficiência aos projetos estruturais, onde soluções mais rápidas são essenciais. (CORPORATION, 2016).
- Redução de risco – o processamento de um modelo sem subestruturação tem um maior risco, principalmente na ocorrência de erros. Subestruturar um problema permite encontrar e depurar erros mais facilmente. Numa análise sem subestruturação, a ocorrência de um erro poderá acarretar no reprocessamento do modelo inteiro várias vezes. No caso da subestruturação, se numa das partes

ocorrer um erro só esta parte será reprocessada e nas que não apresentarem problemas não será necessário reprocessar. (CORPORATION, 2016).

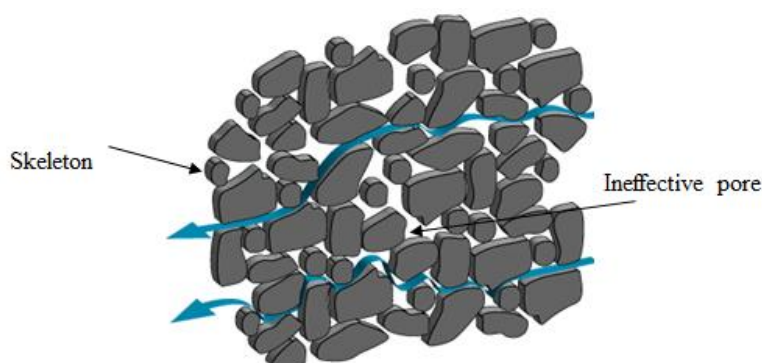
- Capacidade para grandes problemas – com grandes problemas se tem mais graus de liberdades e necessita de mais memória, e se sabe que todos os computadores têm limite de hardware. Isso significa que os limites de espaço em disco ou memória disponíveis são as únicas limitações que devem ser encontradas por um usuário. Quando o tamanho de um modelo se torna muito grande para ser processado em um computador sem usar subestruturação, o usuário pode usar vários recursos do computador para processar em paralelo cada subestrutura ou processar uma subestrutura por vez, em um único computador. (CORPORATION, 2016).
- Entradas e saídas particionadas – como as subestruturações podem ser processados individualmente, grupos ou organizações de análise separados podem modelar partes individuais da estrutura e realizar verificações de modelo sem informações de outros grupos. (CORPORATION, 2016).
- Segurança – com respeito à segurança de informações das empresas de projeto, proteção de patentes, ou projetos específicos de cada empresa, com a subestruturação o modelo de uma determinada equipe pode receber um conjunto de matrizes externas anexando ao seu projeto sem necessitar de mais informações sobre os projetos das demais equipes que serão acoplados ao seu, sem necessidade de perder a confidencialidade.

5 FLUXO EM MEIO POROSO

O fluxo através de meio poroso é muito estudado em várias áreas da engenharia, como por exemplo na hidrologia de águas subterrâneas, na engenharia de reservatórios, na mecânica dos solos, na engenharia química, entre outros. Em geral, um meio poroso pode ser definido como uma matriz sólida com espaços vazios (BEAR, 1972). Os materiais porosos podem ser o solo, as rochas porosas ou fraturadas, as cerâmicas, os agregados fibrosos, o papel de filtro, os filtros de areia, entre outros.

Para ser classificada como fluxo em um meio poroso, deve existir a matriz sólida com vazios interconectados para que o fluido possa fluir, *Figura 13*. Quando a interconexão entre os poros é elevada, verifica-se uma alta permeabilidade da formação geológica. Os aquíferos são formações geológicas de elevadas capacidade de transmitir e armazenar água, ou seja, de elevadas condutividade hidráulica (permeabilidade) e porosidade (BEAR e VERRUIJT, 1987), respectivamente.

Figura 13 - Fluxo em uma matriz porosa



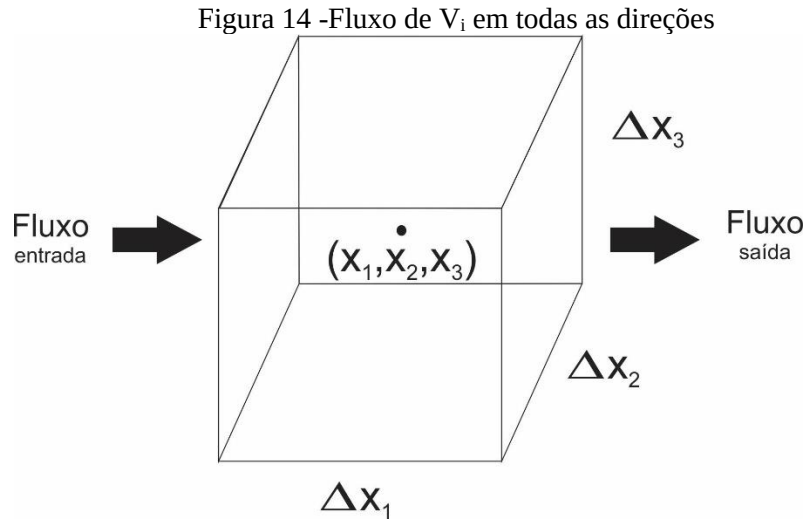
Será descrita a equação governante para o fluxo em meio poroso em meio saturado que envolve problemas de fluxo isotérmico de fluido em meio poroso. O método de aproximação que será usado para resolver a equação governante será o dos elementos finitos via aproximação de Galerkin.

A descrição matemática de fluxo de fluido em meio poroso pode ser obtida pela combinação da equação de continuidade de massa e a lei de Darcy. Com as devidas simplificações se pode escrever a equação de fluxo em três dimensões da forma: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -(\alpha + \phi\beta) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

onde V_i é a componente da velocidade de Darcy na coordenada cartesiana, p é a pressão do fluido, e ϕ é a porosidade do meio poroso. Já os coeficientes α e β são definidos como a

compressibilidade da matriz rochosa e do fluido, respectivamente. Na equação (17) e nas demais equações deste trabalho estamos usando a notação indicial para as variáveis, onde índices repetidos indicam somatório.



A representação matemática de lei de Darcy é

$$V_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (18)$$

onde k_{ij} são os componentes do tensor de permeabilidade, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, ρ é a densidade do fluido, g é a aceleração gravitacional, e z é a elevação. (HUYAKORN e PINDER, 1983).

Para o caso de fluido homogêneo a equação (18) pode ser reduzida para uma forma simplificada pela introdução da relação; (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$h = \frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{\partial \xi}{\partial \rho(\xi)} \quad (19)$$

Na hidrologia de água subterrânea, h é comumente referenciado como carga hidráulica e é usualmente aproximado por $h = p / (\rho g) + z$, ξ é apenas uma variável fictícia. Derivando a equação da carga hidráulica em função de x_j e t chega-se a: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_j}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (21)$$

Combinando a equação (17) com a equação (21)

$$-(\alpha + \phi\beta) \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho g(\alpha + \phi\beta) \frac{\partial h}{\partial t} = -S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad , \quad (22)$$

onde $S_s = r g(a + f b)$ é chamado de armazenamento específico de uma formação geológica, que no caso em questão é o reservatório de água ou aquífero. Substituindo agora a equação (20) na equação (18) da lei de Darcy, obtém-se: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$V_i = -\frac{\rho g k_{ij}}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (23)$$

Fazendo agora a combinação das equações (17), (22) e (23), chega-se a:

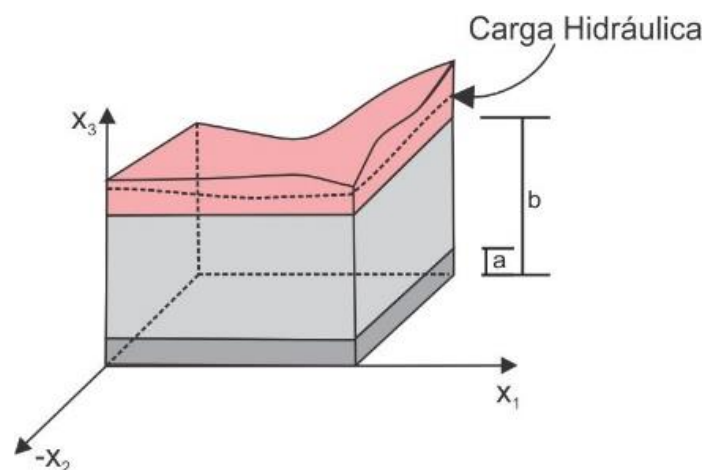
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho g k_{ij}}{\mu} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (24)$$

Podendo assim definir $K_{ij} = \frac{\rho g k_{ij}}{m}$ como coeficiente de condutividade hidráulica, que substituindo na equação (24) tem-se a equação diferencial governante, para um meio poroso tridimensional e com um reservatório anisotrópico: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (25)$$

Com a equação (25) atuando como a equação governante para o fluxo no reservatório, é necessário agora expressar o fluxo no solo, levando em consideração a recarga/sumidouro do aquífero confinado, conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 15 - Representação de um aquífero confinado



Fonte: (HUYAKORN e PINDER, 1983)

Considerando as equações de fluxo que regem o balanço de massa no aquífero:

Conservação de massa, (HUYAKORN e PINDER, 1983)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V_i + S_s \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \quad (26)$$

e a equação da Lei de Darcy,

$$V_i + K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

Por conveniência será integrado para a dimensão vertical em x_3 , logo as equações de continuidade para o aquífero ficam: (HUYAKORN e PINDER, 1983)

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x_i} V_i + \frac{\partial}{\partial x_3} V_3 + S_s \frac{\partial h}{\partial t} \right] dx_3, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

e,

$$\int_a^b \left(V_i + K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) dx_3, \quad i, j = 1, 2, \quad (29)$$

Executando a equação (28), chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{V}_i l) + V_3|_b - V_3|_a - V_i \frac{\partial b}{\partial x_i} \Big|_b + V_i \frac{\partial b}{\partial x_i} \Big|_a + S_s l \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Já com a equação (29), tem-se:

$$\bar{V}_i l + l K_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2. \quad (31)$$

Através do conceito de condição de superfície vista em Bear (1979), chega-se a equação de continuidade: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_1^* \frac{\partial b}{\partial x_1} + V_2^* \frac{\partial b}{\partial x_2} + V_3^* = 0. \quad (32)$$

Com as equações determinadas, esta etapa será para construir a equação governante final do aquífero confinado. Para isso, toma-se para o entendimento o caso de um lençol freático para simplificar o entendimento, já que pode-se considerar como um aquífero não confinado neste entendimento matemático, onde agora se pode combinar as equações (30), (31) e (32): (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(l K_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right) + \left[V_3 - S_y V_3^* \right]_b - \left[V_i - S_y V_i^* \right]_b \frac{\partial b}{\partial x_i} + \left[V_i \frac{\partial a}{\partial x_i} - V_3 \right]_a \dots \\ & \dots + (S_s l + S_y) \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (33)$$

O segundo e terceiro termo representam o fluxo através do lençol freático (aquífero não confinado, ou aquífero livre). Ficando evidente que o fluxo é a diferença entre a velocidade do fluido e a velocidade de interface. O quarto termo representa o fluxo líquido através da base do aquífero. O quinto termo representa a mudança de volume com a mudança de pressão ($S_s l \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$) e com a drenagem instantânea na superfície $S_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$. (HUYAKORN e PINDER, 1983)

O caso de um aquífero confinado é uma simplificação do caso de fluxo de aquífero livre, este último apresentando lençol freático. A diferença está então na ausência da superfície livre e que o l será a espessura do aquífero. Definindo que V_i^* é zero e reconhecendo a invariância temporal de l , obtém-se (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(l K_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right) + \left[V_i \frac{\partial b}{\partial x_i} - V_3 \right]_a - \left[V_3 - V_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \right] + S_s l \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (34)$$

O segundo e terceiro termos agora representam o fluxo do leito confinante sobrejacente e subjacente, respectivamente.

É comum redefinir parâmetros de fluxo do aquífero como $T_{ij} \circ l K_{ij}$ e $S_s l \circ S$, onde T é chamado de transmissibilidade e S de coeficiente de armazenamento, resultando na equação: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right) - \left[V_3 - V_i \frac{\partial b}{\partial x_i} \right]_a + \left[V_3 - V_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \right]_b + S \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (35)$$

Por conveniência, assume-se que a parte inferior do aquífero confinado é impermeável, e que a contribuição de $q' = \left[V_3 - V_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \right]_b$ é o fluxo vertical da recarga/sumidouro, resultando na equação: (HUYAKORN e PINDER, 1983).

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right) - q' + S \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (36)$$

onde T_{ij} é o tensor de transmissibilidade do aquífero, h a carga hidráulica, S é o armazenamento específico e q' é o termo fonte/sumidouro, que pode ser devido a recargas e poços de extração de água (HUYAKORN e PINDER, 1983).

A condutividade hidráulica (K) está relacionada ao fluxo volumétrico e o gradiente hidráulico imposto, que depende do meio poroso e da viscosidade do fluido percolante, que no caso é a água. O armazenamento (S) de um aquífero indica a relação entre as mudanças na quantidade de água armazenada e as correspondentes alterações de carga hidráulica. A transmissibilidade do aquífero, T , é definida em fluxo essencialmente horizontal como o volume de descarga de água através de toda a espessura do aquífero por unidade de comprimento horizontal do aquífero, perpendicular à direção do fluxo e por unidade de gradiente hidráulico. É igual ao produto da condutividade hidráulica média (ao longo de uma linha vertical) e a espessura do aquífero (BEAR, 1972). Matematicamente a representação pode ser:

$$T = \frac{Q}{Kl} ; K = \frac{1}{l} \int_a^b K(z) dz ; l = b - a \quad (37)$$

Em um aquífero não homogêneo, $T = T(x, y)$ porque tanto l ou K , ou ambos, pode ser em função de x e y .

6. FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DO PROBLEMA FÍSICO

Para solucionar o problema físico representado pela equação em derivadas parciais (equação (36)), cuja metodologia proposta neste trabalho é a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias através da análise modal, utiliza-se inicialmente o método dos elementos finitos. O método dos elementos finitos é uma ferramenta para a aproximação de soluções de equações governantes de diversos fenômenos físicos (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 1983). Em Logan (LOGAN, 2016) ressalta-se a importância do método dos elementos finitos para a solução de problemas da engenharia, matemática e física. Neste trabalho, para a solução problema de fluxo de água em aquífero utilizou-se o método dos elementos finitos para a discretização espacial e o método das diferenças finitas para a discretização temporal da equação diferencial.

O desenvolvimento do método dos elementos finitos para fluxo transiente em meio poroso foi feito com base no procedimento de Galerkin, onde propõe-se que $\hat{h}$ será uma solução aproximada escrita da forma:

$$\hat{h}(x_1, x_2, x_3, t) = N_J(x_1, x_2, x_3)h_J(t) \quad ; \quad J = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

onde N_J são as funções de forma do método dos elementos finitos e h_J as cargas hidráulicas nos pontos nodais da malha de elementos finitos. n é o número de nós na malha de elementos finitos. Na notação aqui utilizada, os índices minúsculos (i e j) são para denotar os subscritos de coordenadas x_1 , x_2 e x_3 e os de letras maiúsculas (I e J) para denotar subscritos nodais, conforme (HUYAKORN e PINDER, 1983).

Seguindo o procedimento clássico do Método dos Elementos Finitos, aplicando o Método dos Resíduos Ponderados segundo a Formulação Fraca de Galerkin à equação 1 de conservação e substituindo a solução aproximada $\hat{h}$ dada pela equação (38), chega-se a (HUYAKORN e PINDER, 1983):

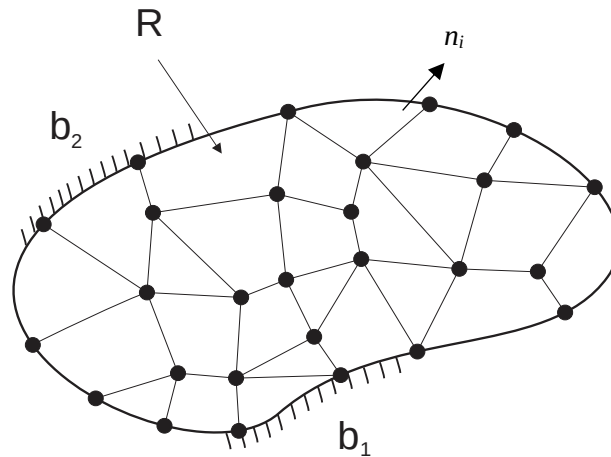
$$\int_R \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_j} \right) q + S \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} N_I dR = 0, \quad I = 1, 2, \dots, n, \quad i, j = 1, 2. \quad (39)$$

Aplicando o teorema de Green e substituindo a solução aproximada ($\hat{h}$) na equação (39), tem-se:

$$\int_R S N_I N_J \frac{dh_J}{dt} dR + \int_R T_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} h_J dR = - \int_B N_I q dB - \int_R N_I q' dR, \quad (40)$$

onde R é o domínio do problema de fluxo e B sua fronteira (regiões b_1 e b_2) onde as condições de contorno são aplicadas, conforme mostrados na Figura 16 q é a vazão de saída através da fronteira, associada à condição de contorno de Neumann, $q = -\left(T_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) n_i$, com a normal n_i apontando para fora do domínio.

Figura 16 - Domínio do fluxo em meio poroso discretizado pelo Método dos Elementos Finitos



A equação (40) descrita acima pode ser reescrita da forma matricial (HUYAKORN e PINDER, 1983):

$$[S]\{h\} + [T]\{h\} = \{Q\} \quad (41)$$

Nesta equação, $[S]$ é a matriz do Armazenamento Hidráulico Específico, $[T]$ é a matriz de Transmissibilidade, $\{Q\}$ que é o vetor relacionado a recarga e/ou exploração aplicada. O vetor $\{h\}$ e sua taxa de variação no tempo $\{h\}$ são as incógnitas do problema. Onde cada parcela das matrizes representadas é formada pela composição dos elementos individuais em referência global, $[S] = \sum_{e=1}^m [S]^e$, $[T] = \sum_{e=1}^m [T]^e$, $\{Q\} = \sum_{e=1}^m \{Q\}^e$. (HUYAKORN e PINDER, 1983), onde m é o número de elementos da malha de elementos finitos do domínio discretizado.

Separando os elementos da equação (40) pode-se obter as equações abaixo, para cada elemento individual (HUYAKORN e PINDER, 1983).

Onde a matriz de transmissibilidade $[T]$ está representada por:

$$T_{IJ}^e = \int_{R^e} T_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} dR, \quad (42)$$

A matriz do armazenamento específico $[S]$ está sendo representado por

$$S_{IJ}^e = \int_{R^e} S N_I N_J dR, \quad (43)$$

e finalmente o vetor de recarga e sumidouro $\{Q\}$ pode ser representada por

$$Q_I^e = - \int_{B^e} N_I q dB - \int_{R^e} N_I q' dR, \quad (44)$$

onde, está parcela da equação será constante no decorrer do tempo.

A partir da matriz de armazenamento específico S_{IJ}^e , alternativamente pode-se proceder a operação de concentração da massa de armazenamento específico através da diagonalização (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000):

$$\tilde{S}_{II}^e = \sum_J S_{IJ}^e \quad \text{com} \quad \tilde{S}_{IJ}^e = 0 \quad \text{para} \quad I \neq J \quad (45)$$

Sendo $\tilde{S}_{IJ}^e$ mais conveniente para as soluções em problemas transientes em situações em que se necessite inverter as matrizes globais. Com a equação governante em elementos finitos, pode-se gerar um código que será usado na comparação dos métodos de elementos finitos clássico e o proposto na próxima seção, com aplicação da superposição modal.

6.2 PARTICIONAMENTO DE GUYAN

Para resolver o fluxo em meio poroso de forma que se pudesse obter o melhor desempenho com o procedimento de redução de ordem, foi gerado código com a técnica de particionamento (em blocos) do sistema, por meio do método de particionamento de Guyan (GUYAN, 1965).

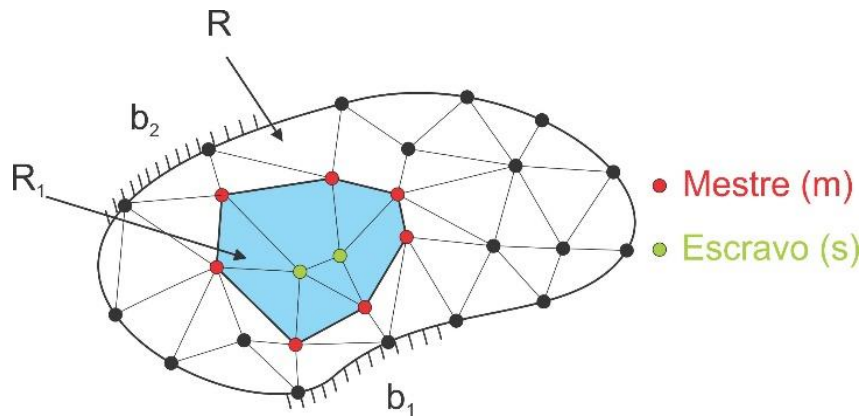
O particionamento de matriz é usado em técnicas de resolução de sistemas com a finalidade de desmembrar o domínio em partes sem a perda de conexão. Esta técnica vem sendo utilizada por programas de grandes projetos para dividir o domínio geral do problema de maneira que se possa integralizar posteriormente, conforme descrito no capítulo 4, que descreve a técnica de subestruturação que é um método baseado no particionamento de Guyan. Assim, cada parte de um projeto pode ser feita por uma equipe diferente e depois os dados poderem ser compartilhados sem perda de informação.

Nesta etapa do trabalho, utilizou-se a técnica do particionamento para a redução de ordem do domínio, subdividindo em partes iguais e impondo, matematicamente, reduções nas matrizes geradas pelo sistema de soluções. Deixando o processamento computacional mais fácil

e conseqüentemente mais rápido. A subestruturação apresentada anteriormente delineia um caso específico do particionamento de Guyan em uma estrutura metálica. Agora, com os desenvolvimentos abaixo avança-se para gerar a formulação utilizada neste trabalho, na qual irá formular a codificação necessária para produzir os resultados que serão detalhados nos próximos capítulos.

Nesse sentido, é fundamental nesta fase estabelecer claramente os nós que desempenharão um papel essencial na compreensão do método. Esses nós incluem os nós de interface, conhecidos como nós Mestres, e os nós internos, denominados nós Escravos, em cada processo de particionamento, conforme ilustrado na *Figura 17*.

Figura 17 - Condições de Contorno e Nós Mestres e Escravos



Para ilustrar o método de particionamento original proposto por Guyan (GUYAN, 1965) em uma abordagem clássica de condensação estática, opta-se por empregar um problema fictício. Utilizando uma representação fictícia de equações para facilitar a compreensão da mecânica desse método. Nesse contexto, apresenta-se um sistema de equações composto por $[A]\{b\} = \{C\}$, que servirá como base para a demonstração da técnica de particionamento:

$$\begin{bmatrix} A_{mm} & A_{ms} \\ A_{sm} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_m \\ b_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_m \\ C_s \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Assumindo que $C_s = 0$, e resolvendo a segunda linha, o deslocamento para os graus de liberdades escravo(s) (ou internos) será:

$$b_s = -A_{ss}^{-1}A_{sm}b_m \quad (47)$$

Em substituição à primeira linha tem-se:

$$b_m(A_{mm} - A_{ms}A_{ss}^{-1}A_{sm}) = C_m, \quad (48)$$

ficando $A_{mm} - A_{ms}A_{ss}^{-1}A_{sm}$ como a matriz A reduzida, gerando a nova expressão $b_m(A) = C_m$.

O que leva a uma matriz de transformação para o particionamento de Guyan,

$$T_G = \begin{bmatrix} I \\ -A_{ss}^{-1}A_{sm} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (49)$$

onde I é a matriz identidade de ordem m e T_G é a matriz de transformação linear do espaço n para m . Desta forma, um sistema inicialmente de dimensões n passa a ser representado de forma equivalente por um sistema de dimensão m , onde $m < n$.

Utilizando o método particionamento de Guyan (GUYAN, 1965) em uma equação diferencial de primeira ordem que é a equação constitutiva para o problema físico estudado neste trabalho e está apresentada de forma matricial, conforme a equação (41) expandiram-se as matrizes e particionou-se o sistema em blocos, dividindo os graus de liberdades em do tipo mestre (m) e escravo (s) (para os nós de interface e internos, respectivamente), conforme representado abaixo:

$$\begin{bmatrix} S_{mm} & S_{ms} \\ S_{sm} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}_m \\ \dot{h}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{mm} & T_{ms} \\ T_{sm} & T_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_m \\ h_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m \\ Q_s \end{Bmatrix} \quad (50)$$

A primeira linha corresponde às incógnitas dos graus de liberdade tipo mestre (m), ao passo que a segunda corresponde às do tipo escravo (s), que pertencem ao domínio particionado R_1 , conforme Figura 17. Na técnica de particionamento, o objetivo é a construção de um sistema de equações definido apenas pelas incógnitas do tipo mestre (m) (nós de interfaces do particionamento). Desta forma o sistema inicialmente é composto por matrizes S e T de dimensões $n \times n$ e Q é o vetor de dimensão n e h o vetor de incógnitas de dimensão n .

Usando-se assim a matriz de transformação linear T_G para reduzir as matrizes do sistema da equação (50), chegando às reduções: (ZU-QING QU, 2004)

$$\bar{S} = T_G^T S T_G = S_{mm} - T_{ms}T_{ss}^{-1}S_{sm} - S_{ms}T_{ss}^{-1}T_{sm} + T_{ms}T_{ss}^{-1}S_{ss}T_{ss}^{-1}T_{ms} , \quad (51)$$

$$\bar{T} = T_G^T T T_G = T_{mm} - T_{ms}T_{ss}^{-1}T_{sm} , \quad (52)$$

$$\bar{Q} = T_G^T Q = Q_m - T_{ss}^{-1}T_{sm}Q_s \quad (53)$$

6.2.1 Estratégia de solução com o particionamento

Como parte da estratégia de resolução e utilizando o particionamento de Guyan conforme descrito na seção anterior, este trabalho introduziu mais algumas diferentes abordagens para aproveitar ao máximo os benefícios desse particionamento, visando alcançar

uma redução de ordem ainda mais significativa. O objetivo central foi então determinar uma abordagem mais eficaz na busca pelo menor custo computacional possível.

Uma estratégia matemática empregada para otimizar o processamento consistiu em concentrar a contribuição do armazenamento específico de cada nó interno do particionamento (nós escravos) nos nós de interface do particionamento. Em outras palavras, agrupou-se a massa representada pelo armazenamento específico nos graus de liberdade mestres (nós de interface do particionamento). Isso foi alcançado ao somar as contribuições dos armazenamentos específicos dos graus de liberdade escravos (s) às contribuições dos graus de liberdade mestres (m) (nós de interface), resultando em uma contribuição total, denominada S_{total} . Esse processo tornou a matriz global de contribuições dos armazenamentos específicos dos nós internos nula. Essa abordagem pode ser observada nas demonstrações matemáticas das equações (54) e (55) e é representada esquematicamente na

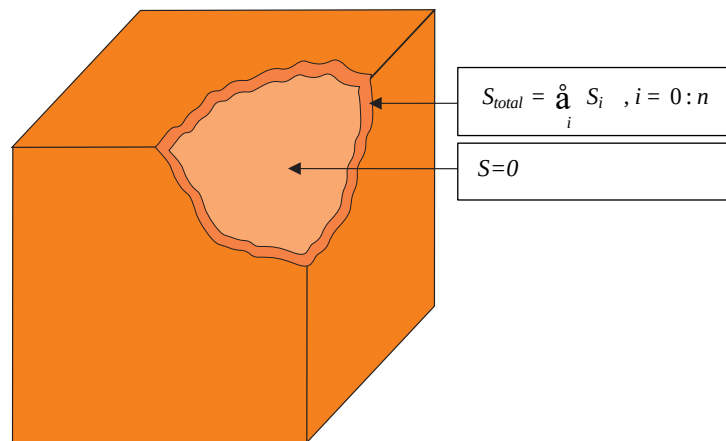
Figura 18, conforme ilustrado abaixo.

$$\begin{bmatrix} S_{total} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}_m \\ \dot{h}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{mm} & T_{ms} \\ T_{sm} & T_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_m \\ h_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m \\ Q_s \end{Bmatrix}. \quad (54)$$

Fica claro que com este procedimento a equação (51) será totalmente reduzida, não precisando das contribuições dos escravos:

$$\bar{S} = S_{mm} + S_{ss} + S_{sm} + S_{ms} = S_{total} \quad (55)$$

Figura 18 - Concentração do Armazenamento Especifico

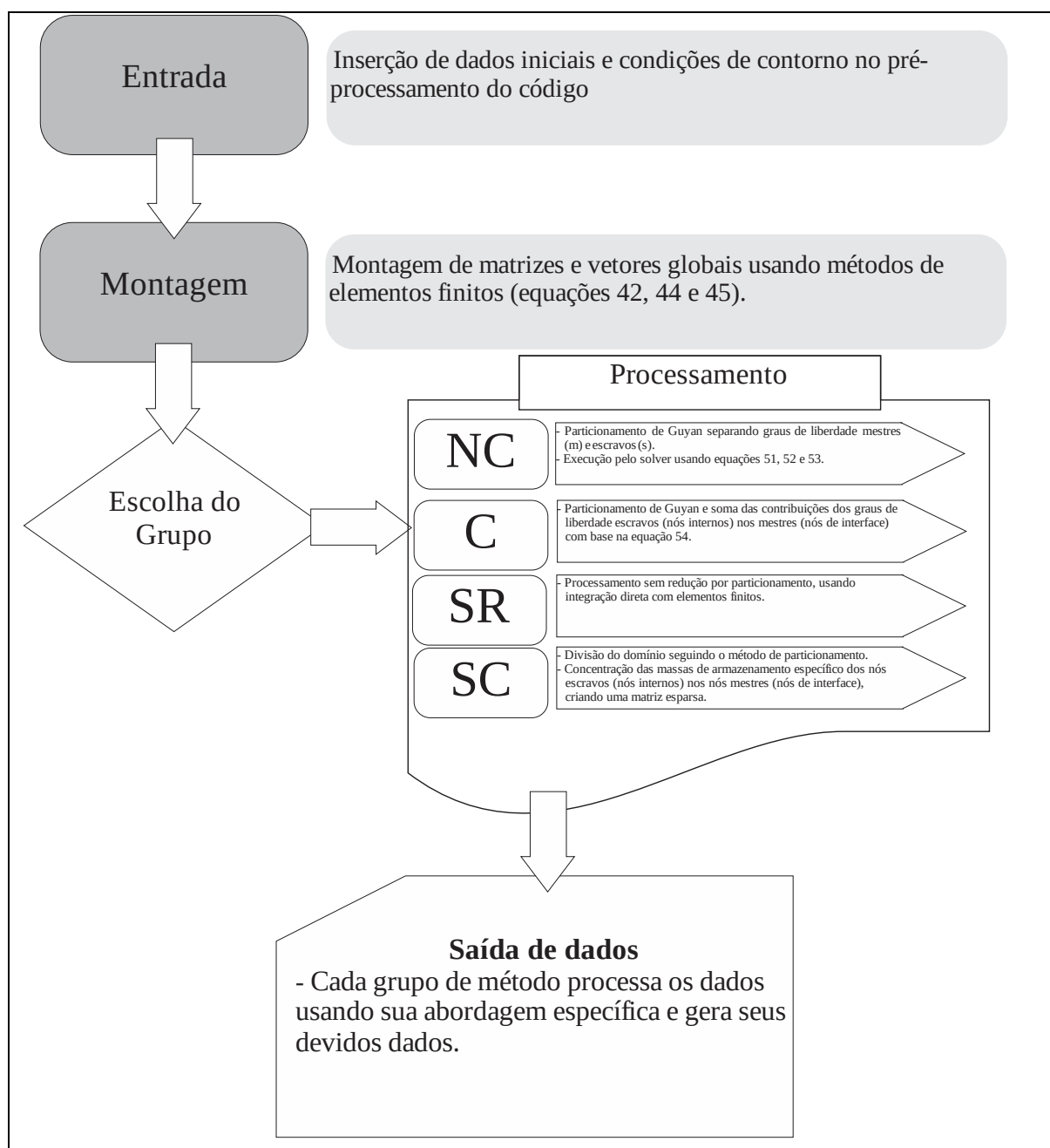


Através da demonstração do método de concentração de armazenamento apresentado anteriormente, que surgiu de uma abordagem adicional que foi construída com base na análise do método desenvolvido por Guyan para este estudo. Permitindo estabelecer métodos de comparação que conduzam a resultados mais alinhados com o escopo da investigação sobre redução de ordem.

Com esse propósito, foram definidos quatro grupos distintos de métodos de estudo para serem submetidos a uma análise comparativa:

- **Grupo do método Concentrado (C)** – Neste método, aplicou-se a concentração de armazenamento conforme explanado na seção anterior, utilizando a equação (54). Esse procedimento envolve agregar as contribuições de armazenamento (S) dos nós escravos (internos), concentrando-as nos nós Mestres (nas interfaces) do particionamento
- **Grupo do método Não-Concentrado (NC)** – Esse método não incorpora a concentração específica de armazenamento. Ele emprega o método de particionamento desenvolvido, como descrito na equação (51), (52) e (53), com as contribuições adequadas dos nós mestres e escravos (nós de interfaces e internos, respectivamente). Portanto, nesse método, o armazenamento (S) é considerado em todos os nós do domínio
- **Grupo do método Sem Redução (SR)** – Esta abordagem utiliza somente o método dos elementos finitos, sem a aplicação do particionamento de Guyan. Isso viabiliza a comparação dos métodos discutidos aqui com uma abordagem tradicional, servindo como ponto de referência para a análise.
- **Grupo do método Sem Redução Concentrado (SC)** – Nesse método, emprega-se o método dos elementos finitos e, adicionalmente, incorpora-se o particionamento e a concentração específica de armazenamento (S). Ou seja, utiliza-se o particionamento do domínio e a concentração do armazenamento (S) nos nós das interfaces, enquanto os nós internos permanecem "vazios" e os externos mantêm a contribuição total de armazenamento (S), formando assim uma espécie de casca. Isso sendo usado para a solução o método dos elementos finitos.

Através dessa classificação sistemática, é possível realizar uma análise comparativa minuciosa entre esses quatro grupos de métodos de estudo, avaliando seus desempenhos e eficácias no contexto do estudo de redução de ordem proposto. Isso permitirá uma compreensão mais profunda das vantagens e limitações de cada abordagem, contribuindo para aprimorar a pesquisa e fornecer insights valiosos para a área.



Para a solução do problema transiente (integração no avanço do tempo) escolheu-se a opção incondicionalmente instável, conforme será visto na seção 6.4.

6.3 Superposição Modal

Como alternativa para resolver a equação (17), que representa a equação governante para o fluxo em meio poroso, este trabalho adota o método da superposição modal, que é tradicionalmente utilizado em problemas estruturais, mas aqui é apresentado como uma técnica de redução de ordem na área de geomecânica. Essa abordagem se baseia na determinação dos

autovalores e autovetores da matriz global de fluxo. Essa matriz permite o cálculo analítico dos fluxos e das cargas hidráulicas no reservatório ao longo do tempo, com base nas vazões de produção e recarga. Essas vazões compõem o vetor global do sistema algébrico resultante da aplicação do método dos elementos finitos à equação diferencial de conservação de massa de água no aquífero.

Neste trabalho, a metodologia de redução proposta será comparada com o método clássico dos elementos finitos, que utiliza a discretização por diferenças finitas do termo de armazenamento. A comparação será feita levando em consideração a rapidez (tempo de CPU), o esforço computacional e a precisão da solução.

A superposição modal é um método tradicionalmente usado na análise dinâmica de estruturas para obtenção dos modos de forma e de frequência natural, os campos de deslocamento, velocidade e aceleração do sistema estrutural. Em particular, é bastante utilizada em análises de vibração de estruturas (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998).

Segundo He e Fu (HE e FU, 2001), nas últimas décadas a análise modal se tornou uma das tecnologias principais na busca por otimizar as características dinâmicas das estruturas na engenharia (HE e FU, 2001). Roy R. Craig e Kurdila (ROY R. CRAIG e KURDILA, 2006) indicam a grande utilização deste método pelo advento dos computadores e o extensivo uso da transformação rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform) que permitiram um novo paradigma para a análise estrutural (ROY R. CRAIG e KURDILA, 2006). He e Fu (HE e FU, 2001) comentam que a primeira mais significativa proposta de análise modal foi em 1947 por C.C. Kennedy and C.D. Pancu (1947), que só ganharam importância após J.W. Cooley and J.W. Tukey (1965) desenvolverem um algoritmo de FFT em 1965.

Através dos estudos sobre métodos de redução de ordem realizados neste trabalho, constatou-se a versatilidade do método de superposição modal na resolução de sistemas lineares. Isso possibilita a aplicação da técnica para solucionar sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, estendendo sua utilidade além da análise dinâmica de estruturas, para abranger sistemas de equações diferenciais de primeira ordem geomecânicos, como os abordados nesta pesquisa.

Assim, por meio desses estudos, foi possível adaptar o método de superposição modal para abordar o problema do fluxo transiente em meio poroso. Essa adaptação viabilizou a resolução do sistema de equações, no qual as variáveis a serem determinadas são a carga hidráulica (h) e sua taxa de variação.

A grande vantagem da técnica de superposição modal é em conseguir resolver sistemas lineares de equações diferenciais de múltiplos graus de liberdade e desacoplar as equações em

simples graus de liberdade, com a utilização da ortogonalização das matrizes e a mudança de base, fazendo uma transformação nos vetores e matrizes gerados nos sistemas lineares.

Conformem demonstram Paz e Kim (2019), consegue-se uma transformação de base através do princípio da superposição modal aplicado a um sistema de múltiplos graus de liberdades com coordenadas generalizadas (modais) de modo a obter um sistema desacoplado, ou seja, o método de superposição modal consegue transformar sistemas acoplados de equações diferenciais em um sistema de equações independentes ou desacopladas, em que cada equação contém apenas a variável no tempo (PAZ e KIM, 2019). A resposta do sistema de múltiplos graus de liberdades pela superposição modal é então definida como o somatório das respostas de modos individuais. (TEDESCO, MCDUGAL e ROSS, 1998).

6.3.1 Representação matemática da Superposição Modal

A equação governante da física do fluxo transiente em meio poroso é uma equação em derivadas parciais cujo sistema de equações resultantes de sua discretização pelo método dos elementos finitos é não homogêneo. Para a solução deste sistema de equações não homogêneo é necessário a composição de dois resultados: uma solução geral de um sistema não homogêneo em um intervalo qualquer I , além de uma solução particular do sistema (ZILL, 2018). Em outras palavras, a solução deste sistema não homogêneo da equação (20) é composto por $h = h_c + h_p$, onde h_c é a solução para o sistema homogêneo (solução geral) e a h_p é a solução particular do sistema da parte não homogênea, que compõem a solução desejada da equação (21).

6.3.2 Solução da parte homogênea

Para se calcular a solução de um sistema diferencial de equações homogêneas é necessário que a parte da recarga/sumidouro seja zero, ou seja, o $\{Q\} = 0$, que seria a solução proposta na equação (56) abaixo (ZILL, 2018):

$$h_c = c_1 h_c^1 + c_2 h_c^2 L + c_n h_c^n, \quad (56)$$

Na forma de vetor, a solução h_c^i pode ser representada na equação (57) abaixo:

$$h_c^i = \begin{bmatrix} l_1^i \\ l_2^i \\ \vdots \\ l_n^i \end{bmatrix} e^{l^t}, \text{ para } i = 1..n \quad (57)$$

Onde λ e l são constante, que representam a solução para cada h_c^i que leva a equação (57) ser representada de uma forma simplificada, (ZILL, 2018)

$$\{h_c\} = \begin{bmatrix} h_c^1 \\ h_c^2 \\ \vdots \\ h_c^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^1 \\ l_2^1 \\ \vdots \\ l_n^1 \end{bmatrix} e^{l^t} = \begin{bmatrix} l_1^1 \\ l_2^1 \\ \vdots \\ l_n^1 \end{bmatrix} e^{l^t}, \text{ para } i = 1..n \quad (58)$$

Sua taxa de variação no tempo vem dada pela equação abaixo, onde a matriz L representa o somatório das constantes de l .

$$\{\dot{h}_c\} = \begin{bmatrix} \dot{h}_c^1 \\ \dot{h}_c^2 \\ \vdots \\ \dot{h}_c^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^1 \\ l_2^1 \\ \vdots \\ l_n^1 \end{bmatrix} e^{l^t}, \quad (59)$$

que para facilitar a compreensão das substituições subsequentes podemos representar a equação (58) e (59) como,

$$h_c = e^{l^t} L \quad \text{e} \quad \dot{h}_c = l e^{l^t} L, \text{ respectivamente.} \quad (60)$$

Substituindo agora as equações (58) e (59), com a simplificação representada da equação (60), na equação geral governante equação (20), que representa os valores de h_c e $\dot{h}_c$, resulta em (ZILL, 2018):

$$l e^{l^t} S + e^{l^t} T = 0 \quad (61)$$

A equação (61) representa uma etapa da manipulação matemática para que se possa, através de substituições, chegar a uma formulação matemática clássica de Autovalor e Autovetor. Para prosseguir necessita-se agora dividir a equação (61) por e^{l^t} , obtendo-se abaixo (ZILL, 2018):

$$(\lambda[S] + [T])[L] = 0 \text{ ou } [T][L] = -\lambda[S][L] \quad (62)$$

Com as manipulações propostas chega-se à equação (62). Que pode ser comparada à equação $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ que é a representação clássica de um problema de Autovalor e Autovetor, onde λ é autovalor e x é o autovetor da matriz $[A]$, que está representada na equação (63) abaixo (GREENGERG, 1998):

$$[A]\{x\} = \lambda[I]\{x\} \therefore [A]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (63)$$

Voltando para a solução proposta neste trabalho e utilizando a representação clássica da equação (63) pode-se dizer que a matriz $[A]$ para a equação (63) será facilmente representada na equação (64),

$$[A] = -[S]^{-1}[T], \quad (64)$$

sendo assim mostrada na equação (65), e representada abaixo como,

$$-[S]^{-1}[T][L] = \lambda[L], \quad (65)$$

onde o $[L]$ é a matriz modal correspondente a matriz formada pelas matrizes $-[S]^{-1}[T]$ cuja solução para a equação (65) pode ser dada por,

$$h_c = \sum_i^n L^{(i)} c_i e^{\lambda_i t} \text{ com } i = 1..n, \quad (66)$$

com n sendo o número total de equações geradas no sistema de equações, que coincide com o número de nós da malha de elementos finitos, representado conforme abaixo (ZILL, 2018),

$$h_c = \underbrace{\begin{Bmatrix} h_{c_1}(t) \\ h_{c_2}(t) \\ \vdots \\ h_{c_n}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{modos (autovetores)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_1^{(2)} & \dots & l_1^{(n)} \\ l_2^{(1)} & l_2^{(2)} & \dots & l_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^{(1)} & l_n^{(2)} & \dots & l_n^{(n)} \end{bmatrix}}_{\text{modos (autovetores)}} \begin{Bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

onde a equação (67) representa o resultado do sistema de equação para a solução homogênea, que fará parte da solução geral no item 6.3.4.

6.3.3 Solução da parte não-homogênea

Nesta etapa será deduzida a solução particular do sistema não homogêneo h_p . É necessário se conhecer o problema que está sendo proposto, no qual a recarga e a vazão de extração serão constantes para os intervalos de tempo. Partindo da equação (51) para a equação de solução partícula abaixo:

$$[S]\{h_p\} + [T]\{h_p\} = \{Q\} \quad (68)$$

Utilizando o método do coeficiente indeterminado para chegar ao valor de h_p e sabendo que o vetor da recarga $\{Q\}$ será também um vetor constante no intervalo de tempo considerado, a solução que se chega é (ZILL, 2018):

$$h_p = \begin{Bmatrix} h_{p_1}(t) \\ h_{p_2}(t) \\ \vdots \\ h_{p_n}(t) \end{Bmatrix} \text{ vetor constante ao longo do tempo .} \quad (69)$$

Como a solução é um vetor constante ao longo do tempo, significando que sua primeira derivada será nula (ZILL, 2018). Assim:

$$h_p = \text{constant vector} \quad \therefore \dot{h}_p = 0 \quad (70)$$

Tratando-se de um vetor constante, sua primeira derivada consequentemente é zero e com essa informação pôde-se substituir na equação (68) e se chega na equação (71),

$$[S]\{0\} + [T]\{h_p\} = \{Q\} \quad \setminus \quad \{h_p\} = [T]^{-1}\{Q\} \quad (71)$$

Mostrando que a solução da parcela particular da equação não homogênea pode ser escrita pela equação (71), completando assim o valor procurado para a equação geral do problema proposto.

6.3.4 Solução geral da Equação Diferencial

Tem-se finalmente a equação geral do sistema não homogêneo como a soma das contribuições da parte homogênea e da parte particular $h = h_c + h_p$, onde h_c é a solução para o sistema homogêneo (solução geral) e a h_p é a solução particular do sistema da parte não homogênea:

$$h = \sum_i^n L^{(i)} c_i e^{\lambda_i t} + [T]^{-1}\{Q\} \quad (72)$$

Sendo essa a equação usada para o sistema de equações não homogênea, chegando à formulação usada neste artigo, para resolução por superposição modal.

6.3.5 Desacoplamento do sistema

O método de superposição modal não pode ser aplicado diretamente a sistemas acoplados, conforme a equação (41). Assim, encontrar um sistema de coordenadas que não exiba nenhuma forma de acoplamento é a essência do procedimento do método de superposição. Uma vez a equação (41) desacoplada, o sistema de equação pode ser solucionado independentemente. As coordenadas que permitem o desacoplamento das equações do sistema são chamadas de bases principais, ou bases normais (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998).

Para desacoplar um sistema de equações diferenciais, é necessário introduzir um conjunto de bases alternativas (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998):

$$\{q\} = \{q(h_1, h_2, \dots, h_n)\}, \quad (73)$$

onde a equação (41) pode ser transformada em um conjunto de n equações desacopladas, ou seja, suas soluções poderão ser determinadas independentemente.

A base normal ou principal $\{q\}$ é definida por uma matriz de transformação (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998)

$$\{h\} = [L]\{q\} \quad \therefore \quad \{\dot{h}\} = [L]\{\dot{q}\} \quad (74)$$

onde $[L]$ é a matriz modal ($n \times n$) determinada pela solução de um problema de autovalor.

Para que se mude um sistema de equação da base física para a base normal é necessário que se multiplique as matrizes modais desta transformação na equação (41), conforme equação (75):

$$[L]^T ([S]\{\dot{h}\} + [T]\{h\} = \{Q\}) \quad (75)$$

onde, $[L]^T$ é a transposta da matriz modal. A equação desacoplada na base normal ou principal é obtida pela substituição da equação (74) na equação (75) (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998):

$$[L]^T [S] [L] \{\dot{q}\} + [L]^T [T] [L] \{q\} = [L]^T \{Q\}, \quad (76)$$

que pode ser escrita como,

$$[\bar{S}]\{\dot{q}\} + [\bar{T}]\{q\} = \{\bar{Q}\}, \quad (77)$$

onde $[\bar{S}]$, $[\bar{T}]$ e $[\bar{Q}]$ são respectivamente a matriz modal do armazenamento hidráulico específico, a matriz modal de transmissibilidade e o vetor modal da recarga e/ou exploração, dadas por (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998):

$$[\bar{S}] = [L]^T [S] [L] \quad (78)$$

$$[\bar{T}] = [L]^T [T] [L] \quad (79)$$

$$[\bar{Q}] = [L]^T [Q] \quad (80)$$

Neste ponto, obtêm-se as n equações desacopladas (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998):

$$\bar{S}_r \dot{q}_r + \bar{T}_r q_r = \bar{Q}_r \quad r = 1, 2, L, n \quad (81)$$

onde:

$$\bar{S}_r = \{L\}_r^T [S] [L]_r \quad (82)$$

$$\bar{T}_r = \{L\}_r^T [T] [L]_r \quad (83)$$

$$\bar{Q}_r = \{L\}_r^T \{Q\} \quad (84)$$

Para transforma para as bases físicas, faz-se necessário impor as condições iniciais do problema (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998):

$$\{h(0)\} = [L] \{q(0)\} \quad \therefore \quad \{\dot{h}(0)\} = [L] \{\dot{q}(0)\} \quad (85)$$

Multiplicando a equação (85) por $[L]^T [S]$ chega-se a:

$$\begin{aligned} [L]^T [S] \{h(0)\} &= [L]^T [S] [L] \{q(0)\} \\ [L]^T [S] \{\dot{h}(0)\} &= [L]^T [S] [L] \{\dot{q}(0)\} \end{aligned} \quad (86)$$

Como $[\bar{S}] = [L]^T [S] [L]$, pode-se assim obter:

$$\begin{aligned} [L]^T [S] \{h(0)\} &= [\bar{S}] \{q(0)\} \\ [L]^T [S] \{\dot{h}(0)\} &= [\bar{S}] \{\dot{q}(0)\} \end{aligned} \quad (87)$$

Onde com a matriz $[\bar{S}]$ diagonal, a equação acima pode ser resolvida para as condições iniciais do modelo, resultando em (TEDESCO, MCDOUGAL e ROSS, 1998)

$$\left. \begin{aligned} q_r(0) &= \left(\frac{1}{\bar{S}_r} \right) \{L\}_r^T [S] \{h(0)\} \\ \dot{q}_r(0) &= \left(\frac{1}{\bar{S}_r} \right) \{L\}_r^T [S] \{\dot{h}(0)\} \end{aligned} \right\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (88)$$

Chegando aos valores da solução do problema apresentado neste trabalho

6.3.6 Solução desacoplada

A solução para a superposição modal do problema proposto do trabalho fica conforme descrito abaixo:

$$h_r = \left(\sum_r^n l^{(r)} c_r e^{\lambda_r t} \right)_r + \left(\frac{\bar{Q}_r}{\bar{T}_r} \right) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (89)$$

onde cada termo das equações acima vem definido anteriormente pelas equações (83) e (84) e para o valor da constante de integração c_r chega se conforme a equação (90) abaixo:

$$c_r = \{q(0)\}_r - \frac{\bar{Q}_r}{\bar{T}_r} \quad (90)$$

Dessa forma, a formulação para o método da superposição modal foi concluída e está pronta para ser implementada em um programa computacional desenvolvido em Matlab, no

próprio laboratório, a fim de resolver problemas de fluxo em meios porosos utilizando a técnica da superposição modal.

6.4 AVANÇO DO TEMPO

Para resolver o problema proposto sem superposição modal, ou seja, via formulação clássica onde se discretizam o domínio espacial pelo método dos elementos finitos e o domínio temporal pelo método das diferenças finitas, faz necessário explicitar este último, onde foi adotado um esquema implícito de integração temporal, que é incondicionalmente estável. A solução empregada para o passo do tempo pode ser aproximada usando diferenças finitas conforme equação (91) abaixo (HUYAKORN e PINDER, 1983):

$$\left(\theta [T] + \frac{1}{\Delta t} [S] \right) \{h\}^{k+1} = \left((\theta - 1) [T] + \frac{1}{\Delta t} [S] \right) \{h\}^k + \theta \{Q\}^{k+1} + (1 - \theta) \{Q\}^k \quad (91)$$

onde k e $k+1$ são os níveis de tempo anterior e novo respectivamente, conforme Figura 19, o θ é o fator de ponderação do tempo. O que segundo Huyakorn e Pinder (1983) $\{Q\}^{k+1}$ depende dos valores dos fluxos q e q' no nível de tempo atual.

Para $\theta > 0$ os sistemas de equações são ditos implícito, já para casos onde $\theta > \frac{1}{2}$, os sistemas são estáveis e para o $\theta = 1$ o sistema é incondicionalmente estável.

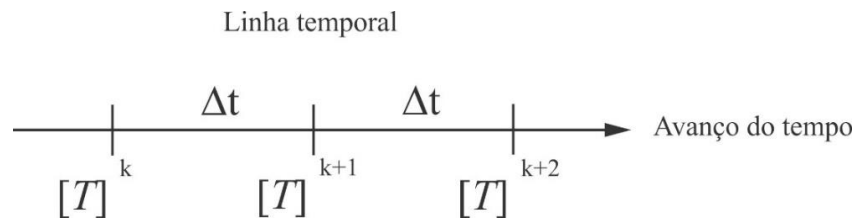


Figura 19 - Interpretação da linha temporal das Matrizes.

Com a equação (41) definida pode-se ter a parte transiente do código de elementos finitos definido. E a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias linear de primeira ordem não homogênea sendo representada pela equação (92) abaixo:

$$\{h\} = \begin{Bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ h_n(t) \end{Bmatrix} \quad (92)$$

7 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

Nesta etapa será demonstrada a aplicabilidade dos métodos estudados neste trabalho. Esses métodos foram desenvolvidos a partir de técnicas da área de estruturas para a área de geomecânica, empregando as abordagens de particionamento e superposição modal. Foram criados códigos em Matlab para cada método e utilizados em problemas fictícios, demonstrando sua eficácia na resolução de questões reais nas áreas de engenharia geotécnica e de reservatório.

No método de particionamento, foram abordadas duas situações distintas. Para uma configuração em 2D, foi analisado o fluxo de água no solo resultante da instalação de uma escavação com estacas prancha. Já em uma configuração em 3D, o foco foi o estudo do fluxo dentro de um reservatório. Quanto ao método de superposição modal, foi realizada uma análise da extração de água de um aquífero sujeito a recarga.

Em todos os modelos, diversos testes foram conduzidos com a utilização dos códigos com os estudos de cada método implementados neste trabalho. Os resultados desses testes foram interpretados e apresentados por meio de gráficos e tabelas, proporcionando uma compreensão mais aprofundada do comportamento físico dos sistemas estudados e permitindo a avaliação do desempenho numérico dos métodos desenvolvidos.

7.1 PARTICIONAMENTO DE GUYAN

7.1.1 Particionamento 2D

Para se iniciar com os estudos do método de particionamento utilizou-se, um exemplo muito utilizado na engenharia que é a escavação com escoramento por estaca prancha usadas, por exemplo, para a instalação de dutos tanto em obras em regiões rurais como em cidades. Nas regiões com lençol freático muito alto, à estaca resistirá ao empuxo lateral e à pressão hidrostática exercida pela água. Normalmente se usa um sistema de bombeamento para evitar a inundação da escavação. Trata-se de uma solução geotécnica de execução segura, rápida e prática.

A estaca prancha funciona como uma estrutura de contenção para as obras subterrâneas, que são bastantes utilizadas em contenção de subsolo em centros urbanos, em benfeitorias de estruturas enterradas, nas escavações em diversas áreas como por exemplo da arqueologia, em construções de dutos, viadutos, túneis e até obras em regiões alagadas para contenção de solo e água, conforme Figura 20, Figura 21 e Figura 22.

Figura 20 - Método de estaca prancha em rede de dutos enterrados



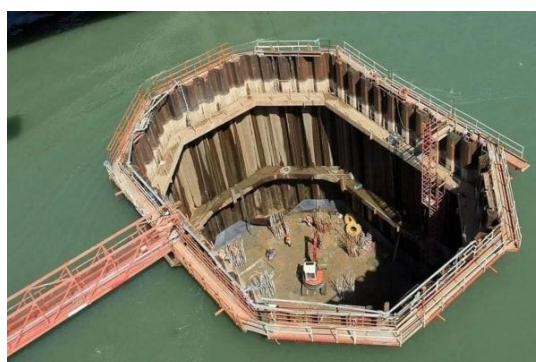
Fonte: VPA equipamentos -<https://vpaequipamentos.com.br/blog/solucoes-para-escoramento-de-valas-e-taludes>

Figura 21 - Método de estaca prancha com abaixamento de lençol freático.



Fonte: blog Belgo arames- <https://blog.belgo.com.br/engenharia/geotech/estaca-prancha/>

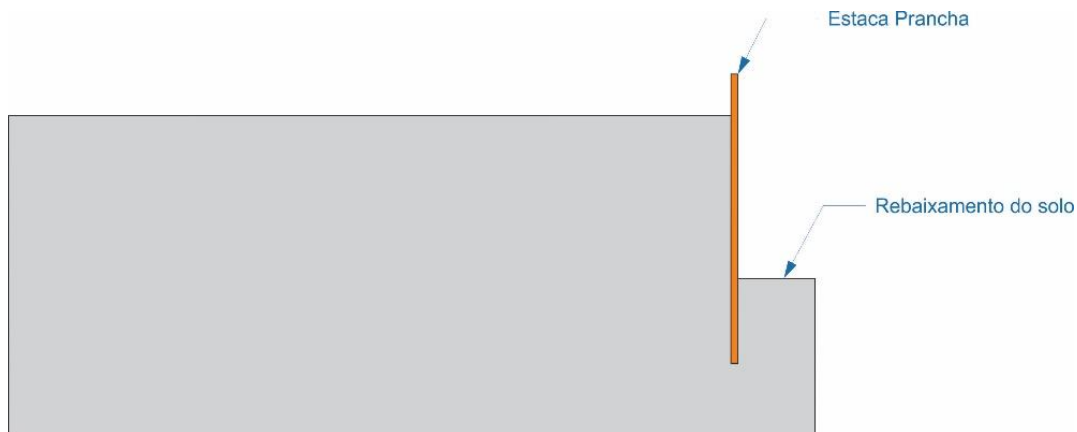
Figura 22 - Método de estaca prancha na contenção de solo e água



Fonte: Carluc - <https://carluc.com.br/estrutura/estaca-prancha/>

Neste estudo será verificada a evolução da pressão hidrostática do solo com a introdução da estaca prancha e já considerando a execução da escavação com bombeamento contínuo para manter a base da escavação seca, conforme Figura 23 abaixo:

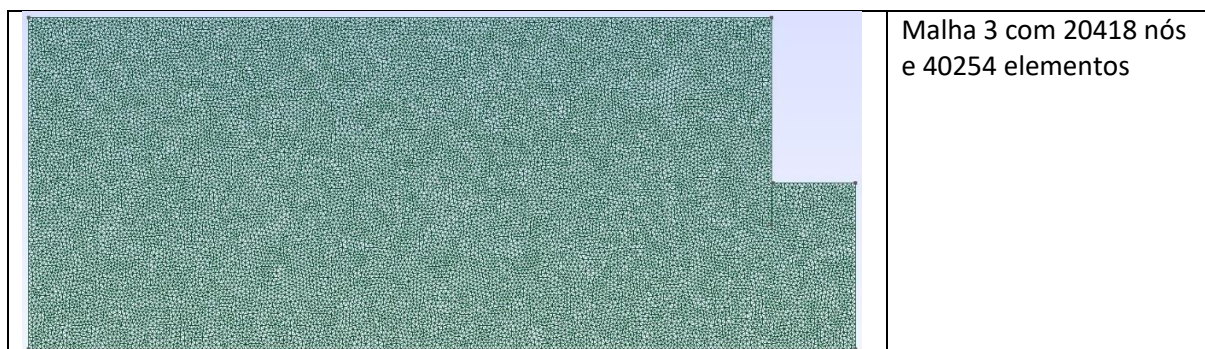
Figura 23 - Figura esquemática do exemplo de estaca prancha desenvolvido para o código



Com o problema apresentado e o domínio definido necessitou-se discretizar o domínio bidimensional para realizar o estudo do método numérico com o particionamento. Na discretização usou-se 3 malhas diferentes para verificar os efeitos da discretização do domínio.

Tabela 1 - Tabela de Malhas da discretização 2D

	Malha 1 com 215 nós e 370 elementos
	Malha2 com 1314 nós e 2480 elementos

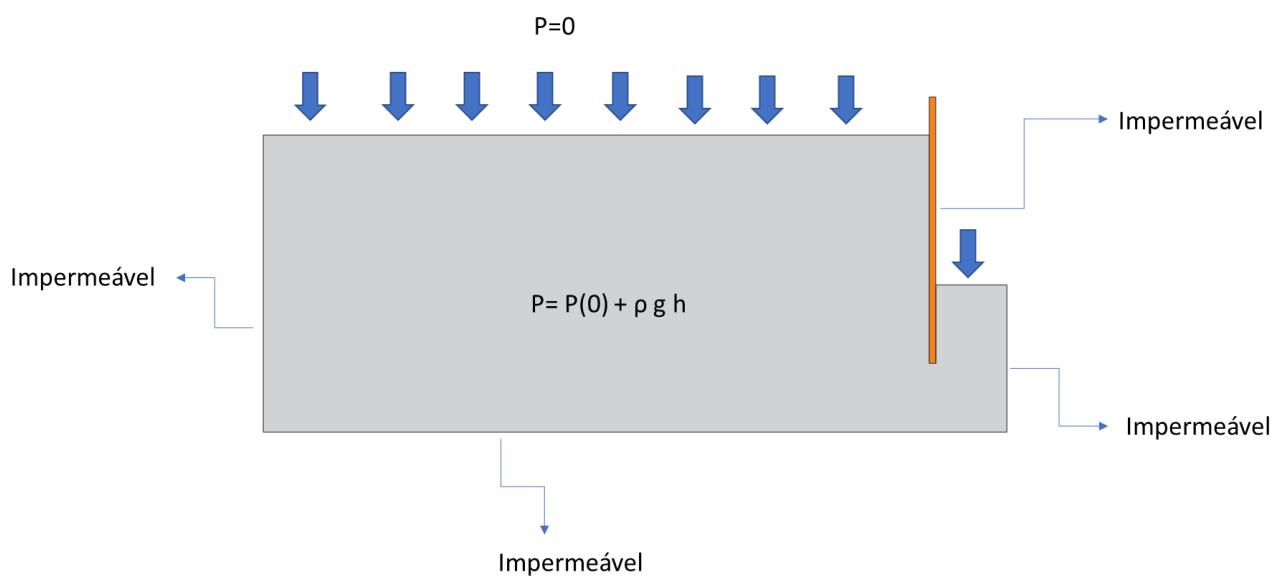


Foi introduzido no código os dados das propriedades do problema conforme Tabela 2, e a condição de contorno conforme Figura 24 abaixo:

Tabela 2 - Propriedades do problema 2D

Propriedades		
Porosidade	1,00E-01	
Compressibilidade(m ² /MN)	4,51E-04	
Permeabilidade (m ²)	Kx	1,00E-14
	Ky	1,00E-14
Viscosidade (MPa.s)	1,00E-09	

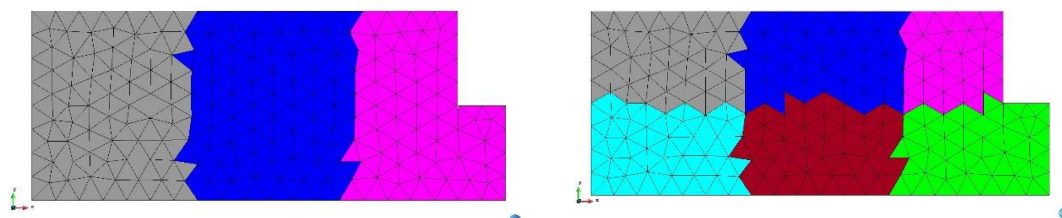
Figura 24 - Indicação da condição de contorno mostrando as regiões impermeáveis do modelo e a pressão zero nas superfícies



Para cada malha foi feito um particionamento de 3 e 6 subdomínios.

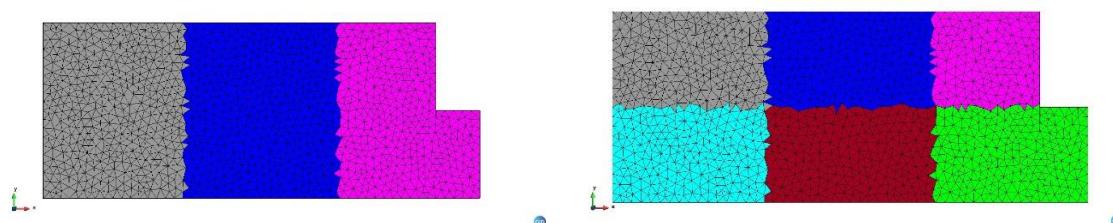
Na *Figura 25*, referente à malha 1 listada na Tabela 1, é possível observar a aplicação do particionamento. À esquerda, temos a subdivisão em 3 subdomínios, enquanto à direita, a subdivisão é feita em 6 subdomínios.

Figura 25 - Particionamentos da Malha 1



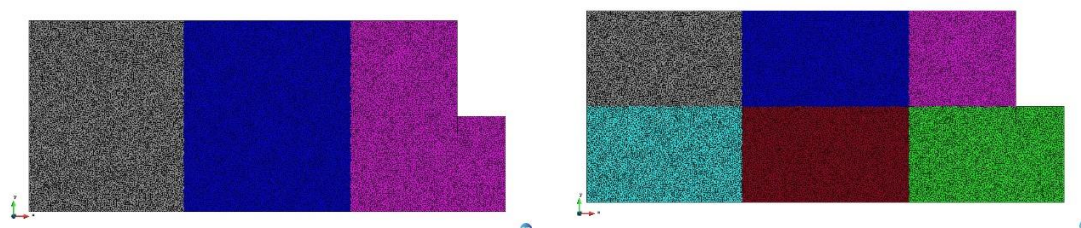
Já na *Figura 26*, neste caso referente à malha 2 listada na Tabela 1, é possível observar a aplicação do particionamento. À esquerda, temos a subdivisão em 3 subdomínios, enquanto à direita, a subdivisão é feita em 6 subdomínios.

Figura 26 - Particionamentos da Malha 2



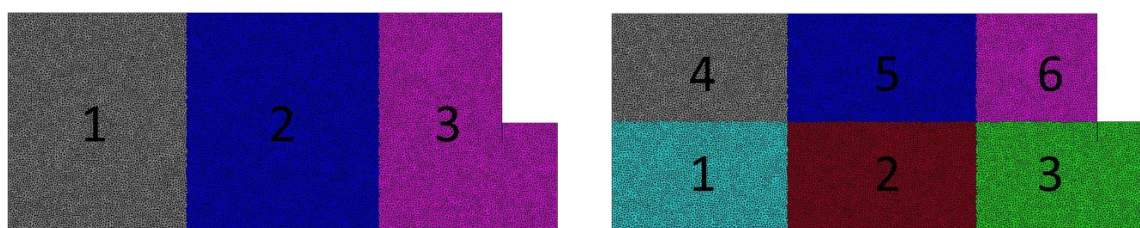
E na *Figura 27*, neste caso referente à malha 3 listada na Tabela 1, é possível observar a aplicação do particionamento. À esquerda, temos a subdivisão em 3 subdomínios, enquanto à direita, a subdivisão é feita em 6 subdomínios.

Figura 27 - Particionamentos da Malha 3



Para uma melhor compreensão de como cada particionamento foi realizado e como os setores do domínio foram divididos, a *Figura 28* está apresentando uma numeração que destaca cada partição:

Figura 28 - Setores do Particionamento.



Nos setores mencionados, é possível escolher as áreas de subestruturação do bloco utilizando o método de Guyan, que emprega nós Mestres (interfaces) e Escravos (internos), ou optar por só particionar em blocos sem utilizar o método. No caso de particionamento em 3 blocos, as regiões de particionamento de Guyan foram definidas como setores 1 e 2, enquanto a região 3 permaneceu sem utilizar o método de Guyan, englobando todos os nós no domínio do bloco. Para o particionamento em 6 blocos, as regiões de particionamento de Guyan foram os setores 1 e 4, enquanto as regiões 2, 3, 5 e 6 permaneceram sem particionamento.

7.1.1.1 Resultado do método de Particionamento de Guyan 2D

Os resultados do método de particionamento Guyan, ilustrados com o exemplo da Estaca Prancha, foram discutidos anteriormente na seção 6.2. Após a definição dos setores, os resultados são apresentados nas Figura 29 a Figura 34, retratando a distribuição de pressão hidráulica de acordo com as condições de contorno representadas na Figura 24. Nestas figuras, a pressão hidráulica é exibida em uma distribuição no domínio analisado, permitindo a análise do impacto da escavação, da estaca prancha (atuando como uma barreira impermeável) e das bordas do problema nessa distribuição.

Figura 29 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 1 com 3 setores de Particionamento

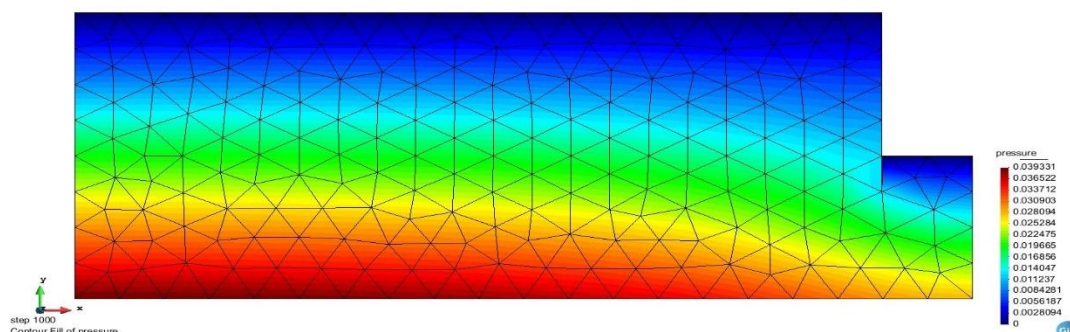


Figura 30 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 1 com 6 setores de Particionamento

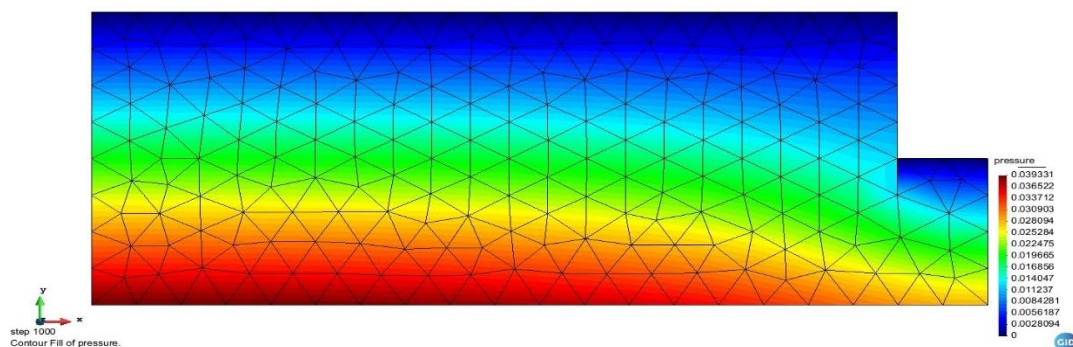


Figura 31 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 2 com 3 setores de Particionamento

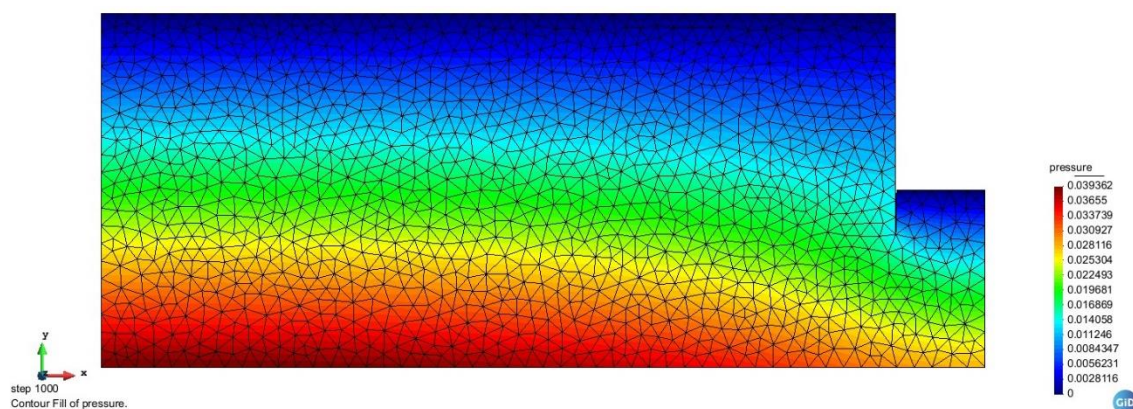


Figura 32 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 2 com 6 setores de Particionamento

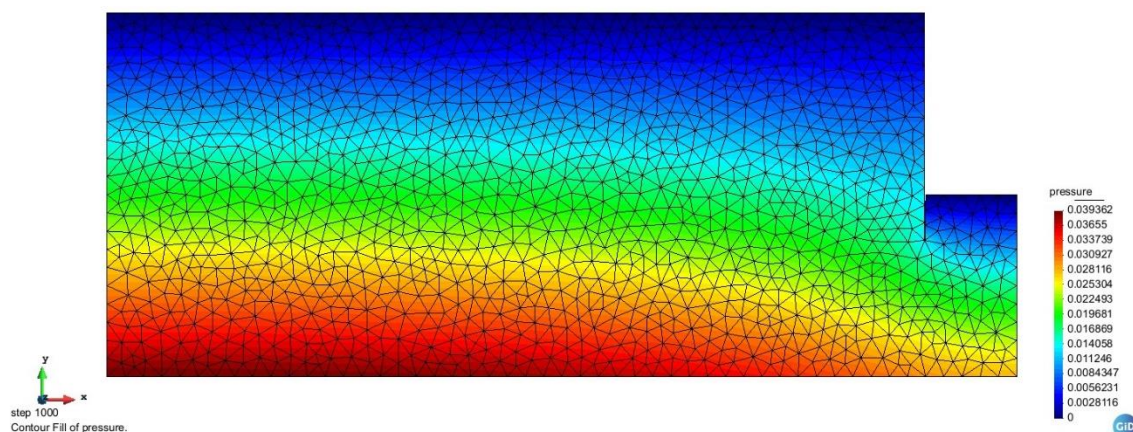


Figura 33 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 3 com 3 setores de Particionamento

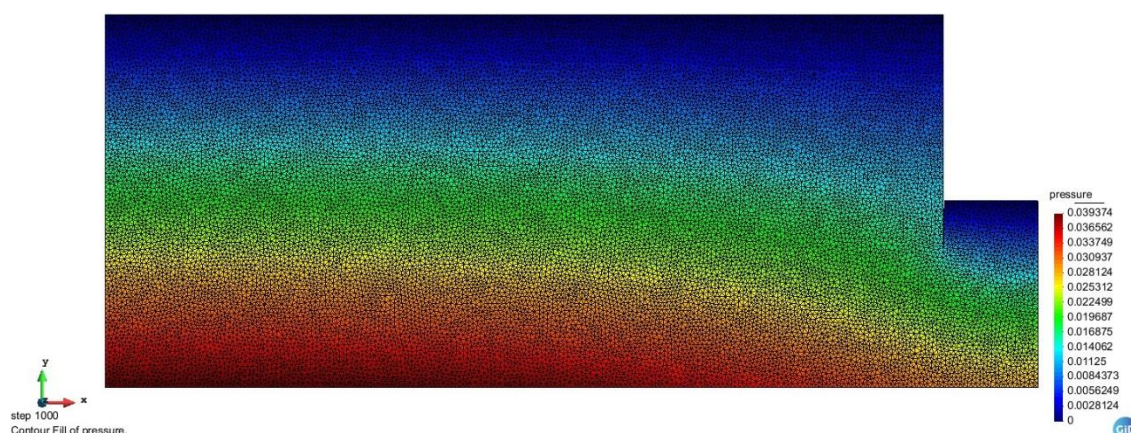
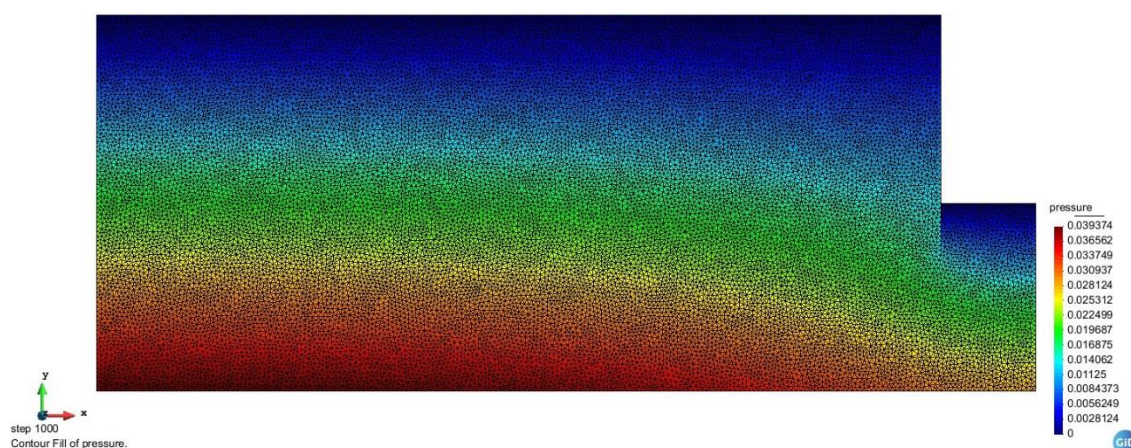


Figura 34 - Distribuição de pressões para um tempo de simulação de 1000 segundos da Malha 3 com 6 setores de Particionamento



Os resultados apresentados nas figuras indicam que a intercambialidade dos métodos em um único domínio pode ser realizada sem causar distorções nos resultados. Isso fica evidente ao observar que, em cada malha com seus respectivos particionamentos, a distribuição dos resultados é bastante semelhante. A única variação nos resultados é atribuída à discretização da malha, o que naturalmente gera resultados mais precisos com o aumento do número de nós.

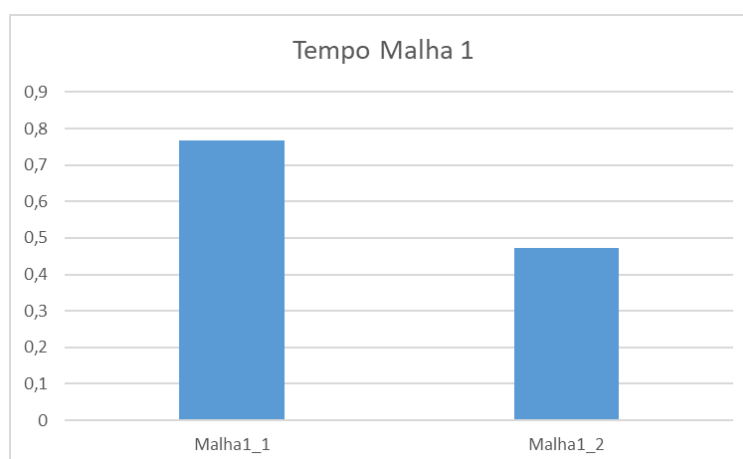
No que se refere ao tempo de processamento, é possível notar uma melhora significativa no tempo de processamento quando se utiliza malhas com 6 setores de particionamento.

Os resultados a seguir estão organizados de acordo com as malhas e os respectivos tipos de particionamento. Na legenda, o primeiro número faz referência à malha conforme listada na Tabela 1 mencionada anteriormente, enquanto o segundo número indica o tipo de

particionamento. O valor "1" corresponde ao particionamento com 3 setores, e o valor "2" representa o particionamento com 6 setores. Portanto, a legenda segue o formato "MALHA X_Y", em que "X" corresponde à malha e "Y" corresponde ao tipo de particionamento.

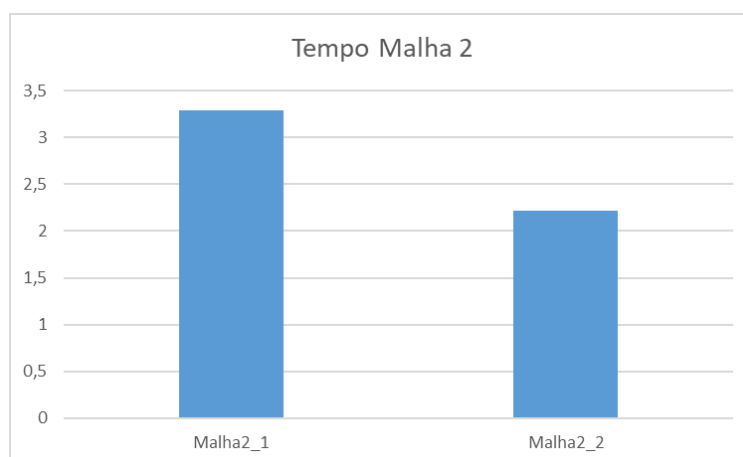
A Figura 35, abaixo representa o resultado para a Malha 1 com 3 particionamentos levou 39% mais de tempo que no particionamento com 6 setores.

Figura 35 - Tempo de processamento para a malha 1 -



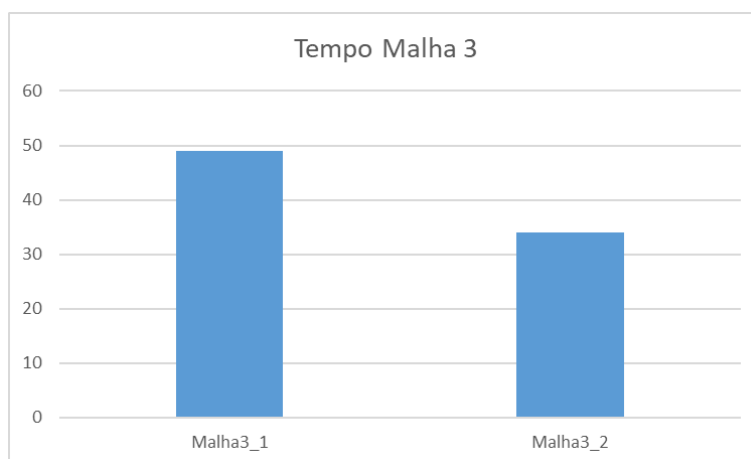
Para a malha 2 o resultado para o particionamento de 3 setores levou 33% mais tempo que no particionamento com 6 setores, conforme Figura 36.

Figura 36 - Tempo de processamento para a malha 2



Já para a malha 3 o resultado para o particionamento de 3 setores levou 30% mais tempo que no particionamento com 6 setores, conforme Figura 37.

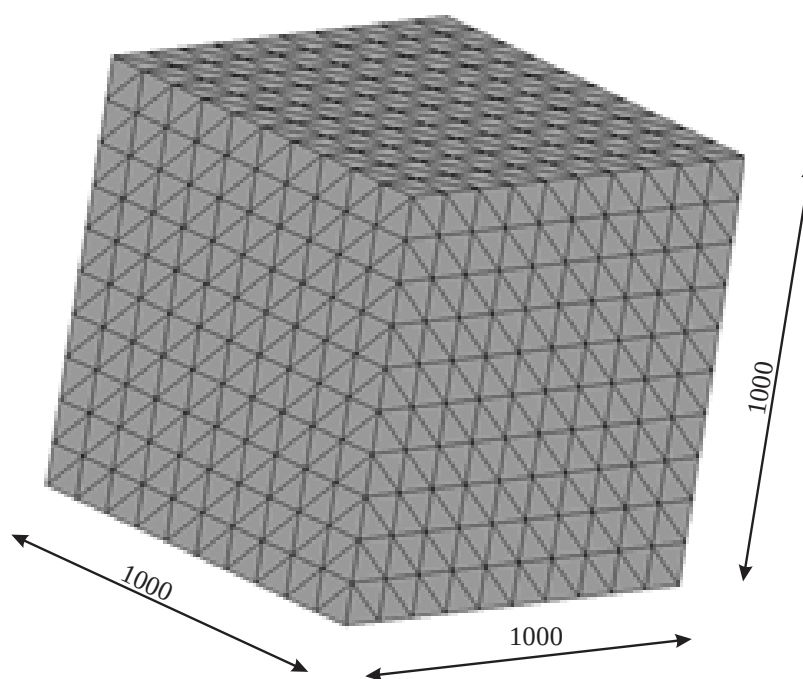
Figura 37 - Tempo de processamento para a malha 3



7.1.2 Particionamento 3D

Para verificar a técnica de particionamento em problemas tridimensionais foi construído um domínio fictício de dimensões de 1000 x 1000 x 1000 metros, composto por 1331 nós e 6000 elementos, conforme figura abaixo:

Figura 38 - Dimensões em metros do domínio hipotético para análise de fluxo pela técnica de particionamento



As propriedades da rocha e do fluido do reservatório estão apresentadas conforme a Tabela 3 abaixo:

Tabela 3 - Propriedade do aquífero do Particionamento de Guyan

Porosidade	1,00E-01	
Compressibilidade	4,50E-04	1/Pa
Kx	1,00E-11	m ²
Ky	1,00E-11	m ²
Kz	1,00E-11	m ²
Viscosidade	1,00E-09	Pa.s
Densidade	1000	Kg/m ³

Com os dados de entrada já referenciados, necessita-se agora impor as condições de contorno da simulação de fluxo transiente. Foi imposta ao longo do eixo x uma diferença de carga hidráulica de 2 m. Para esta carga hidráulica, o tempo total de análise foi de 3.000 segundos.

Para se alcançar os resultados, os testes foram separados em dois, os quais foram denominados como “Teste 1” e “Teste 2”. Para a avaliação dos testes propostos os dois tiveram seus domínios discretizados em 10 elementos tetraédricos em cada uma das 3 direções (x, y e z). Nestes testes verificou-se como seria o comportamento do particionamento do domínio, optando-se para o teste denominado “Teste 1” em um particionamento do domínio em 8 partes iguais, como mostrado na Figura 39. Já para o “Teste 2” o particionamento foi de 8 vezes maior e o domínio ficou particionado em 64 partes, como mostrado na Figura 40. Um dos intuitos deste trabalho é verificar o que ocorre com a variação do particionamento do domínio.

Para avaliação dos resultados foram escolhidos nós da malha para que seja verificada a carga hidráulica, possibilitando assim avaliar o método e comparar as diferenças dos modelos quanto ao particionamento.

A Figura 43 mostra a distribuição da carga hidráulica no domínio após os 3000 segundos de simulação. Os resultados dos “Testes 1” e “Teste 2” foram analisados em dois pontos com coordenadas dadas na Tabela 4.

Os pontos P1 e P2 são os pontos escolhidos para a medição de fluxo e estão representados pela Figura 41, assim como a distribuição da carga hidráulica no tempo total analisado.

Tabela 4 - Coordenadas dos pontos P1 e P2.

	P1	P2
x	900	500
y	200	500
z	1000	1000

Para iniciação do problema foi imposto uma carga hidráulica de 2 m no eixo x, conforme ilustrado na Figura 42, proporcionando uma distribuição hidráulica ao domínio conforme apresentado na Figura 43, em seu tempo final de análise.

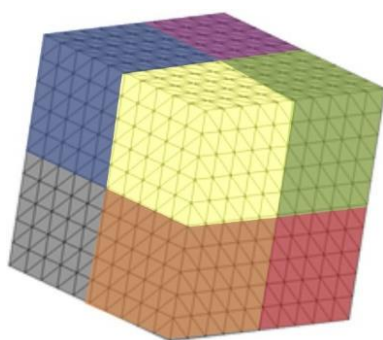


Figura 39 - Discretização e particionamento do domínio em 8 partes

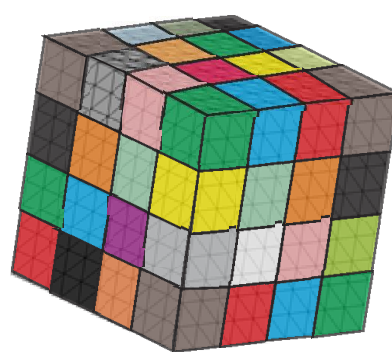


Figura 40 - Particionamento para 64 partes do domínio.

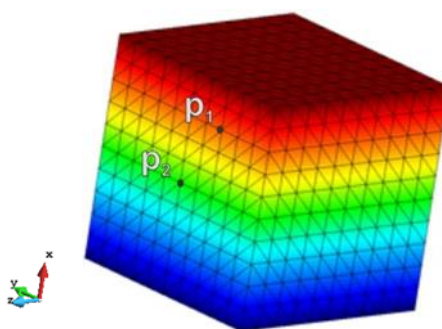


Figura 41 - Distribuição da carga hidráulica e posicionamento dos pontos P1 e P2 de estudo.

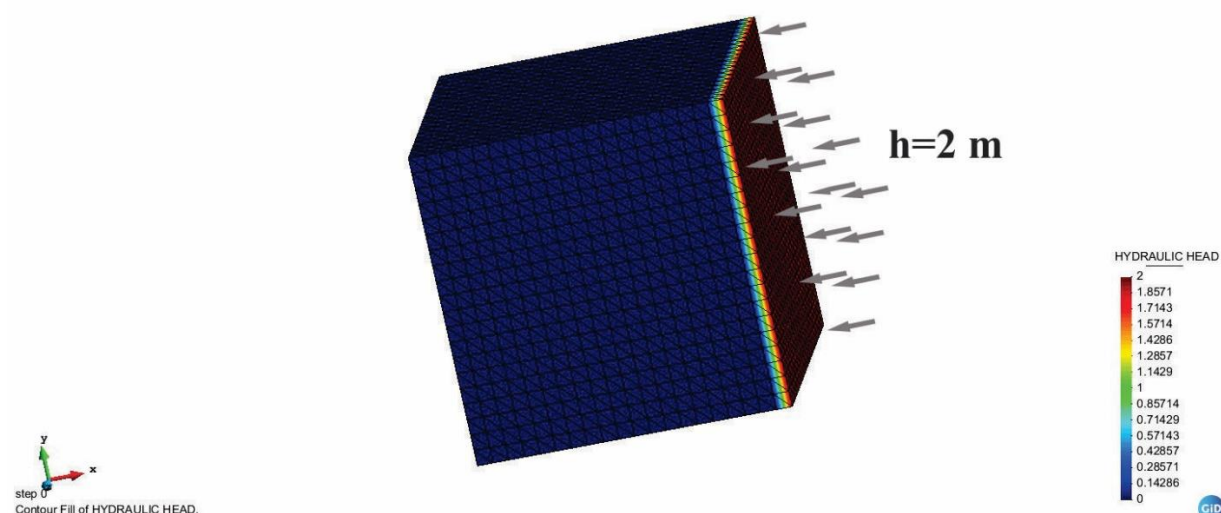


Figura 42 - Condição de contorno com a carga hidráulica inicial de 2 m, no tempo inicial.

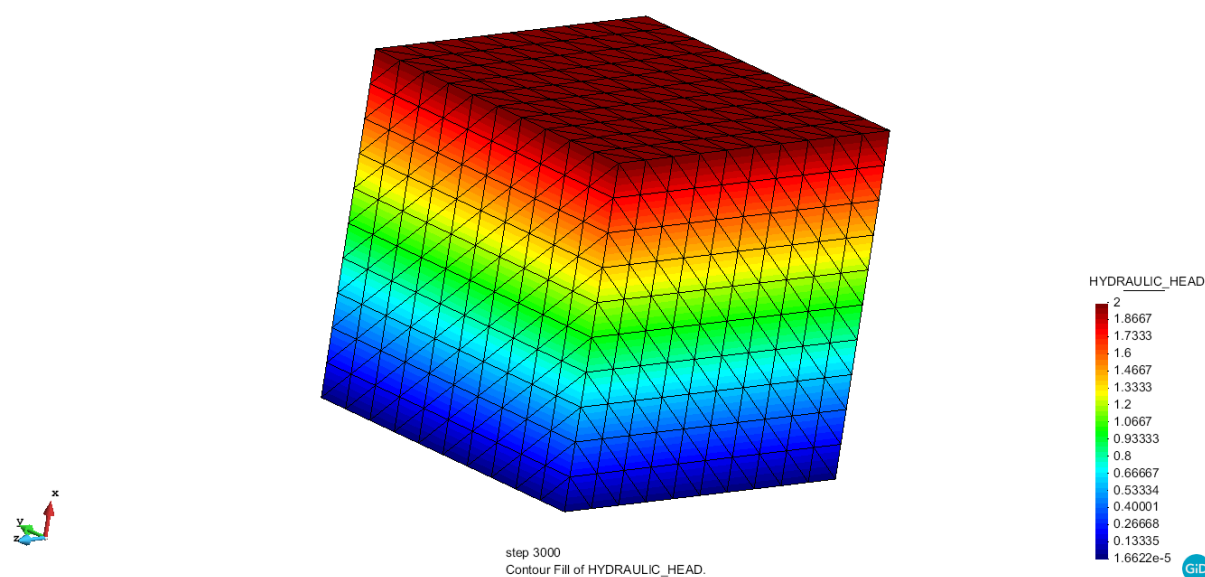


Figura 43 - Carga Hidráulica no tempo final.

7.1.2.1 Resultado do método de Particionamento de Guyan 3D

Os resultados obtidos pelo método de particionamento são aqui apresentados utilizando as formulações descritas na seção 6.2 deste trabalho e o domínio em 3D descrito acima na seção 7.1.2. Esses resultados são exibidos graficamente nas Figura 44 e Figura 45, demonstrando a evolução dos valores da carga hidráulica ao longo do tempo. Cada grupo de método utilizado é representado por uma linha específica na legenda do gráfico e diferenciado por abreviações

correspondentes aos grupos utilizados nos testes. Os grupos de métodos incluem Sem Redução (SR), Concentrado (C), Não Concentrado (NC) e Sem Redução Concentrado (SC) conforme descrito na secção 6.2.1, que descreve os métodos comparativos.

Para distinguir entre os níveis de particionamento nos testes, foram utilizadas as designações “Teste 1” e “Teste 2”, referidos como t-1 e t-2, respectivamente. O “Teste 1” foi o de menor particionamento com 8 blocos de divisões, conforme ilustrado na Figura 39, já o “Teste 2” envolveu um nível mais elevado de particionamento, com uma divisão em 64 blocos conforme ilustrado na Figura 40. Para identificar os pontos de medição das cargas hidráulicas, adotou-se a notação t-1-1 para o “Teste 1” no “ponto 1” (P1), e t-2-1 para o “Teste 2” no mesmo ponto. Essa convenção também foi estendida para o ponto 2 (P2), onde o número foi alterado para 2. Essa representação está detalhada nas legendas dos gráficos, proporcionando uma interpretação didática dos resultados apresentados. Isso permite uma visualização clara dos resultados por meio dos gráficos gerados a partir da implementação do código.

Ao analisar o gráfico da Figura 44, que apresenta os resultados do teste 1 com particionamento em 8 blocos, observa-se um maior distanciamento dos resultados no grupo de método Sem Redução Concentrado (SC). Nesse grupo, utiliza-se o método dos elementos finitos com o particionamento do domínio e concentração do armazenamento específico nas bordas, resolvendo sem o método de particionamento de Guyan, mas sim pelo método clássico dos elementos finitos. Isso demonstra que, para um baixo particionamento do domínio, essa abordagem se distancia da solução aproximada do “Teste 1” em ambos “ponto 1” e “ponto 2”. Por outro lado, todos os outros grupos se aproximam do resultado esperado, que é o do grupo Sem Redução, o qual utiliza o método dos elementos finitos.

No caso do “Teste 2”, o resultado ilustrado na Figura 45, no qual foi utilizado um particionamento maior do domínio conforme apresentado na Figura 40, os resultados dos grupos convergiram melhor para o grupo Sem Redução. Conforme esperado, o aumento do particionamento do domínio Figura 39, demonstra a aproximação de todos os grupos em relação aos resultados do grupo Sem Redução, que serve como referência. No grupo Sem Redução com Concentração, o ajuste da curva é ainda mais visível ao passar do “Teste 1” para o “Teste 2”, pois quanto mais se particiona o domínio, mais próximo chega-se à discretização completa do domínio, resultando em uma aproximação mais precisa. Quanto ao grupo Não Concentrado, os resultados foram praticamente idênticos aos do grupo Sem Redução.

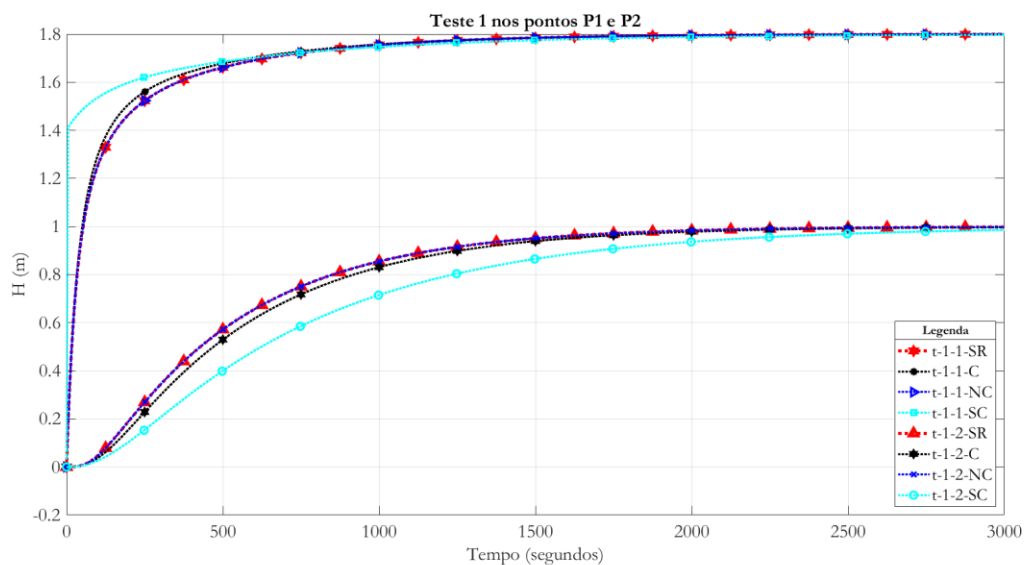


Figura 44 - Resultado do Teste 1 nos pontos P1 e P2 conforme os grupos apresentados.

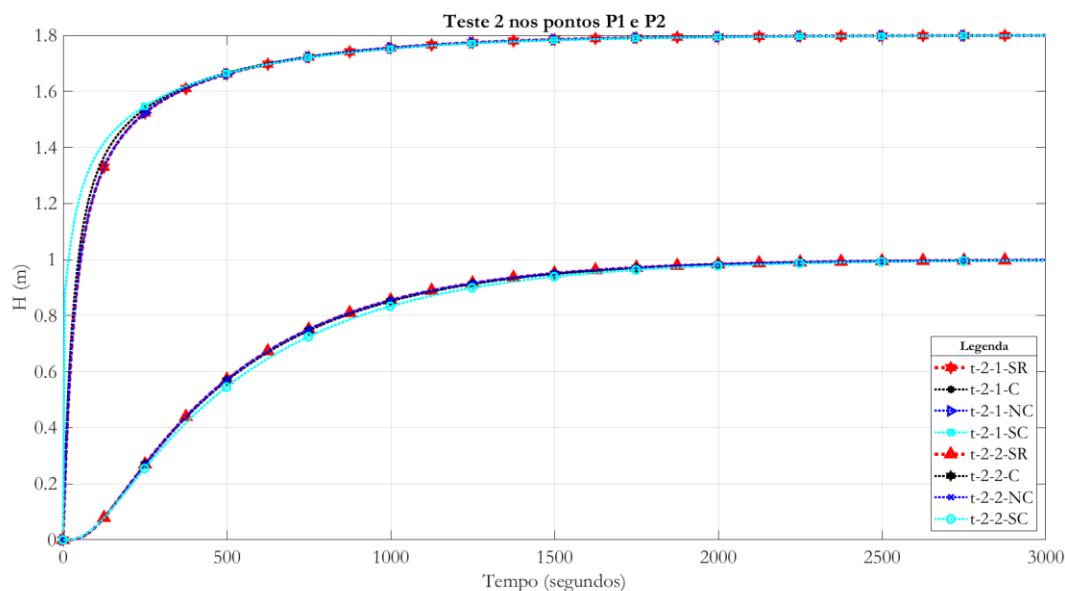


Figura 45 - Resultado do Teste 2 nos pontos P1 e P2 conforme os grupos apresentados.

Para a análise, utilizou-se como parâmetro a comparação dos valores dos pontos com a Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE), tendo como referência os valores obtidos pelo método dos elementos finitos (SR). Nesse contexto, a comparação revela que o desvio médio em relação ao valor de referência, ou seja, o valor encontrado, representa o erro em relação à previsão.

O cálculo para determinar o desvio de cada método por meio da Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE) envolve a diferença entre o valor de referência (p) e o valor a ser comparado (a). A fórmula geral para o cálculo do RMSE é:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - p_i)^2} \quad i = 1..n \quad (93)$$

Nesse contexto, o RMSE é uma medida que quantifica o erro entre o valor de referência (p) e o valor a ser comparado (a).

As tabelas abaixo apresentam o desvio de cada método em relação ao método de referência, que foi o de Elementos Finitos (SR). Vale ressaltar que o método Não Concentrado (NC) é uma técnica de particionamento especialmente adaptada para problemas de fluxo em meios porosos, derivando-se os demais métodos a partir dele por meio de modificações matemáticas destinadas à Redução de Ordem. Na Tabela 5, são apresentados os desvios correspondentes ao “ponto 1” da “malha 1”, destacando que o maior valor observado ocorreu no caso do método Sem Redução Concentrado (SC).

Tabela 5 - Tabela comparativa de Erro do Ponto 1 Malha 1

Ponto 1 Malha 1	
Método	RMSE
Concentrado (C)	0,1546
Não Concentrado (NC)	0,0023
Sem Redução Concentrado (SC)	0,6774

Na Tabela 6, são exibidos os erros associados ao Ponto 1 da Malha 2, e é importante notar que o maior valor identificado também corresponde ao método Sem Redução Concentrado (SC).

Tabela 6 - Tabela comparativa de erro do Ponto 1 Malha 2

Ponto 1 Malha 2	
Método	RMSE
Concentrado (C)	0,0974
Não Concentrado (NC)	0,0025
Sem Redução Concentrado (SC)	0,2885

A Figura 46 representa os resultados dos métodos para o Ponto 1 nas duas malhas, permitindo uma visualização mais clara dos desvios de cada método em relação ao método de Elementos Finitos, que está sendo considerado como referência.

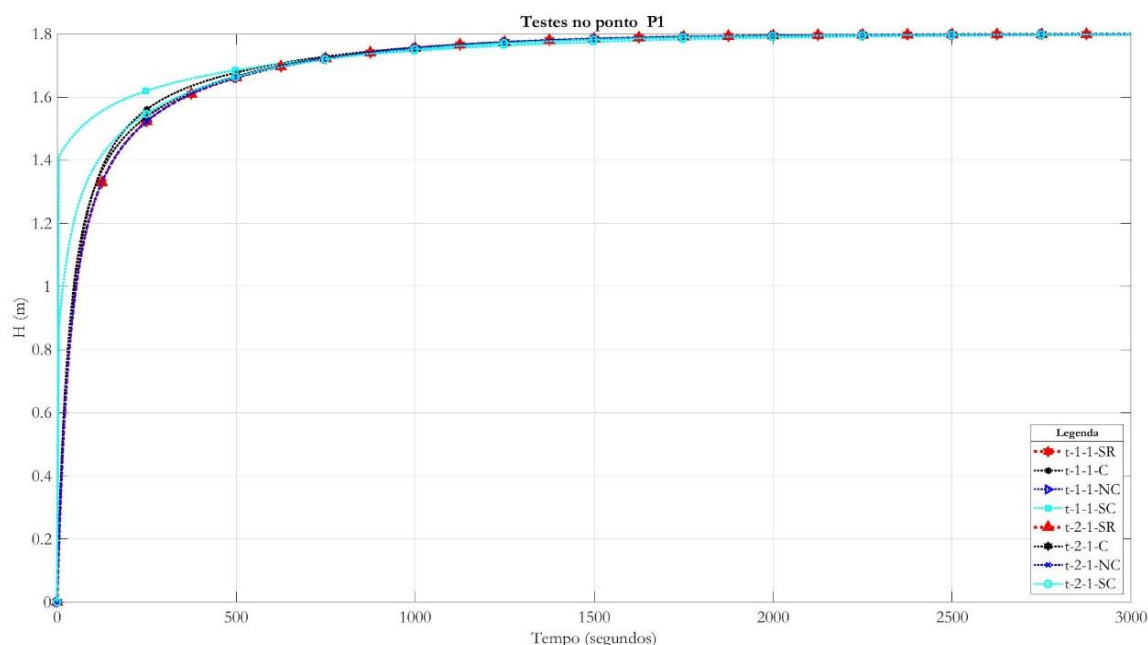


Figura 46 - Ponto 1 nas Malhas 1 e 2 - para verificar os Desvios

Para o Ponto 2, as tabelas a seguir exibem os desvios calculados também pelo método do RMSE. Na Tabela 7 - Tabela comparativa de erro do Ponto 2 Malha 2 Tabela 7, são apresentados os erros referentes ao Ponto 2 da Malha 1, ressaltando que o maior valor encontrado ocorreu no caso do método Sem Redução Concentrado (SC).

Tabela 7 - Tabela comparativa de erro do Ponto 2 Malha 2

Ponto 2 Malha 1	
Método	RMSE
Concentrado (C)	0,3840
Não Concentrado (NC)	0,00078521
Sem Redução Concentrado (SC)	2,0103

Na Tabela 8, são exibidos os erros associados ao Ponto 2 da Malha 2, e é importante notar que o maior valor identificado também corresponde ao método Sem Redução Concentrado (SC).

Tabela 8 - Tabela comparativa de erro do Ponto 2 Malha 2

Ponto 2 Malha 2	
Método	RMSE
Concentrado (C)	0,0411
Não Concentrado (NC)	0,00088239
Sem Redução Concentrado (SC)	0,2825

Para a Figura 47, são exibidos os resultados dos métodos para o Ponto 2 nas duas malhas, permitindo uma visualização mais clara dos desvios para este ponto.

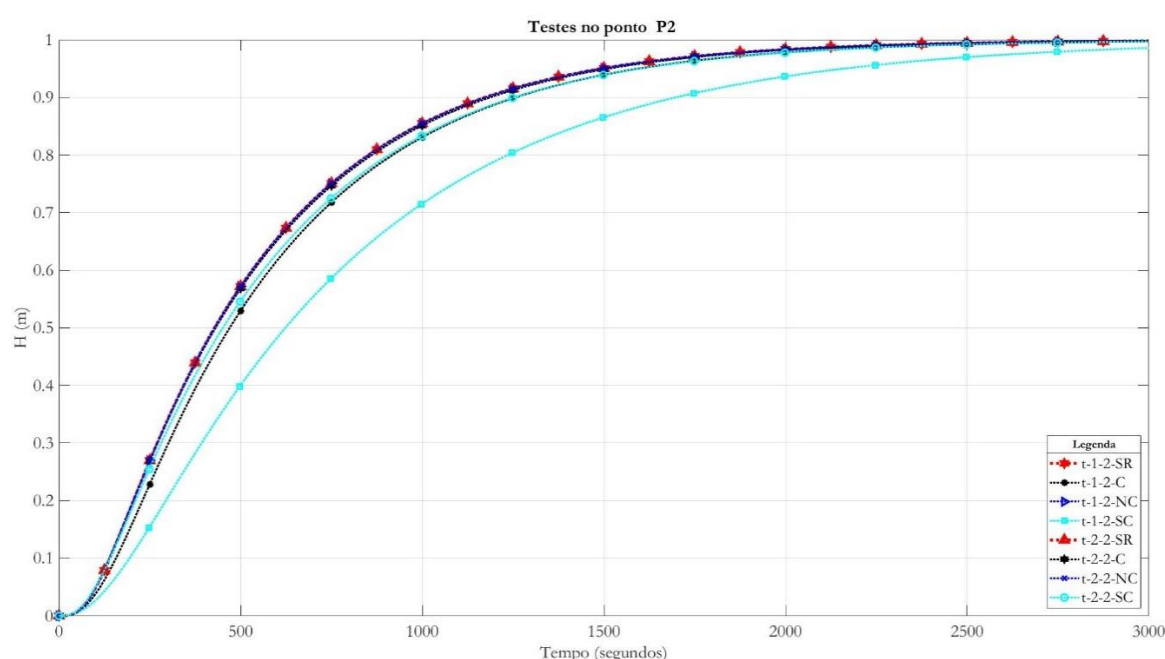


Figura 47 - Ponto 2 nas Malhas 1 e 2 - para verificar os Desvios

O particionamento do domínio apresenta uma peculiaridade que é visível nas bordas entre os particionamentos por causa da concentração de massa nos nós mestre, o que pode ser contornado com o aumento do particionamento e a discretização mais refinada da malha. Na Figura 48, a frente de carga hidráulica, que deveria ser uniforme, apresenta-se desuniforme mas avança em média na mesma velocidade do problema convencional, onde não se concentra a massa dos nós escravos nos nós mestres.

Essa descontinuidade pode ser mitigada por meio de estratégias como o aumento do particionamento, que aumenta o número de nós mestres com relação aos nós escravos, e a utilização de uma discretização mais refinada da malha. Essas medidas visam minimizar o

efeito das perturbações nas bordas e proporcionar uma representação mais precisa da carga hidráulica ao longo do domínio.

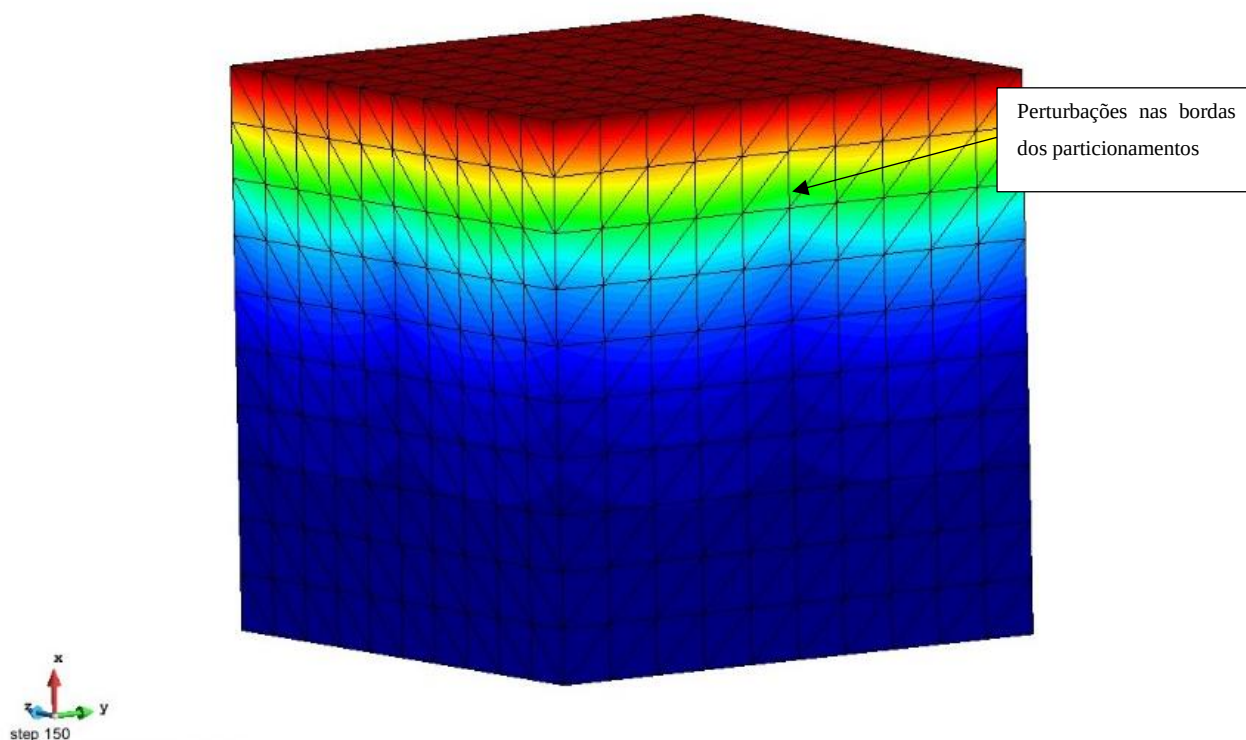


Figura 48 - Passo de 150 segundos da evolução do tempo para o caso de particionamento com 8 particionamentos

Na Figura 49, na qual é utilizado um particionamento bem maior, com 64 partições no domínio, o fenômeno de perturbação nas bordas entre os particionamentos é consideravelmente reduzido. Com uma maior quantidade de partições, as perturbações nas bordas se tornam menos visíveis e praticamente imperceptíveis.

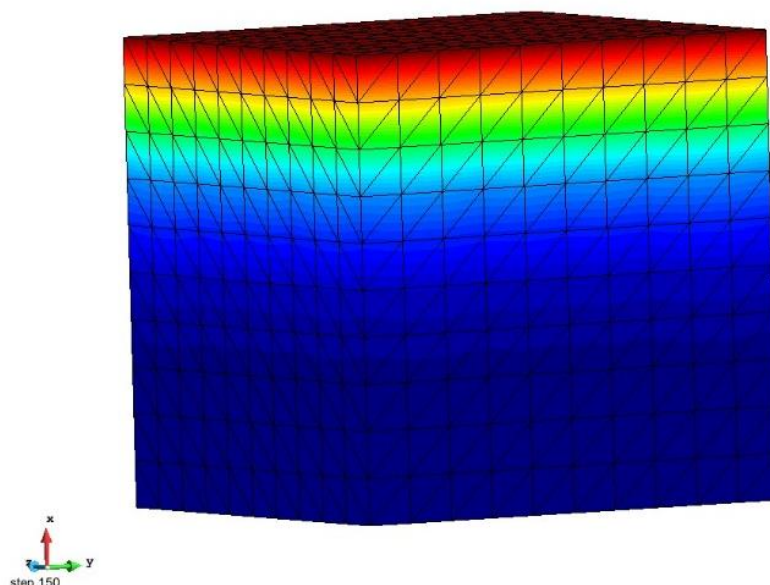


Figura 49 - Passo de 150 segundos da evolução do tempo para o caso de particionamento com 64 particionamentos

Com o intuito de verificar o efeito da discretização, ao se realizar uma maior discretização da malha, como mostrado na Figura 50, essa perturbação é ainda mais imperceptível.

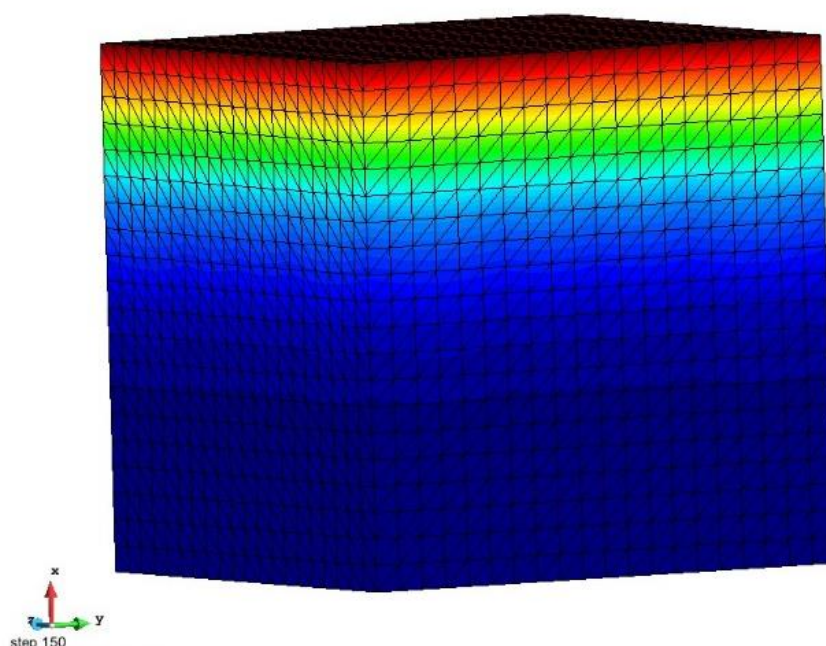


Figura 50 - Passo de 150 segundos da evolução do tempo para o caso de particionamento com 64 particionamentos com uma maior discretização.

7.2 Superposição Modal

Na etapa de superposição modal, foi considerado um aquífero hipotético com dimensões de 6000 metros de comprimento, 6000 metros de largura e 150 metros de espessura. Esse aquífero é composto por duas formações de 60 metros de espessura separados por uma camada de baixa permeabilidade conhecida como aquitardo, que possui uma espessura de 30 metros. A Figura 51 ilustra essa configuração.

As propriedades dos aquíferos e do aquitardo estão apresentadas na Tabela 9. É importante notar que o aquífero superior recebe uma recarga fixa de $1,0 \cdot 10^{-8} \frac{m}{s/m^2}$. Apesar do aquitardo (material 2) apresentar uma permeabilidade mais baixa que os aquíferos (material 1), os aquíferos não estão completamente isolados, pois existe a possibilidade de interação entre eles através da permeabilidade ao longo do eixo z do aquitardo.

Essa configuração hidrogeológica complexa, com camadas de diferentes permeabilidades e interações entre os aquíferos, é considerada na análise para garantir uma representação mais realista do sistema aquífero. Essas informações são fundamentais para compreender o comportamento do fluxo de água e as interações entre as diferentes camadas do aquífero.

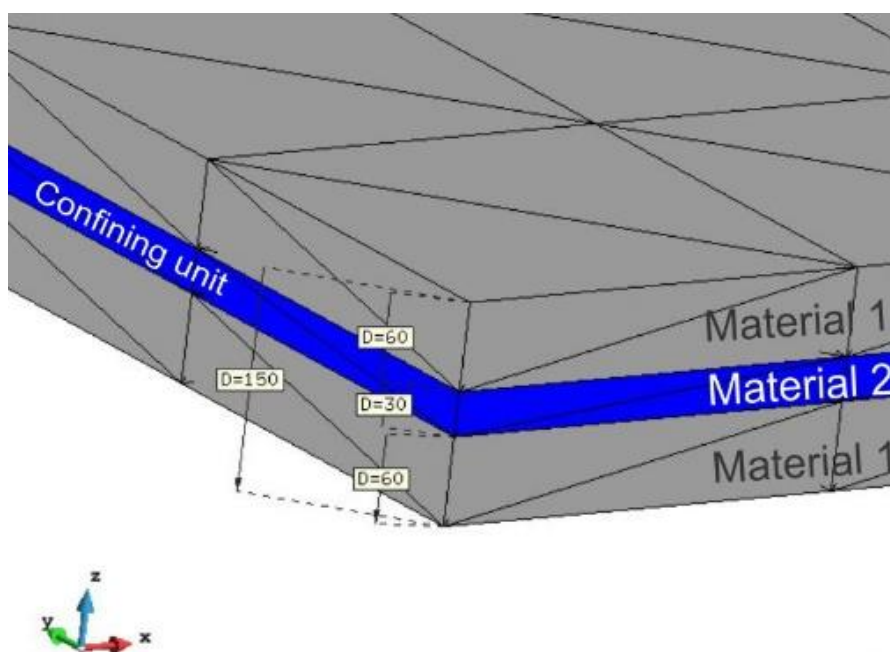


Figura 51 - Camadas de materiais do aquífero.

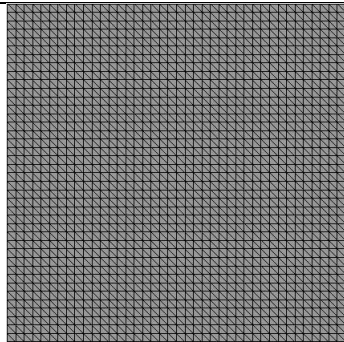
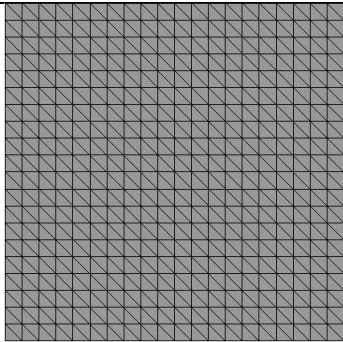
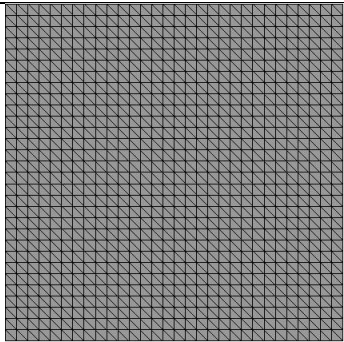
Tabela 9 - Permeabilidade dos materiais do aquífero da Superposição Modal

Material	Permeabilidade
1	$k_x=1.8e-4$ m/s $k_y=1.8e-4$ m/s $k_z=1.8e-5$ m/s
2	$k_x=1e-15$ m/s $k_y=1e-15$ m/s $k_z=3.5e-9$ m/s

Em um problema que se utiliza da resolução em métodos numéricos, a discretização é uma etapa muito importante na análise para que seja determinado a solução aproximada do problema. A qualidade da solução aproximada obtida pelo método numérico depende do número de pontos nodais e elementos que o domínio é discretizado. Com o aumento da discretização, o número de variáveis aumenta e consequentemente o processamento deste problema aumenta. Levando a um maior armazenamento de dados a necessidade de um processamento mais potente para que o programa execute todos os passos necessários para gerar o resultado.

Para a simulação foram usados três níveis de discretização horizontal do domínio, com o intuito de verificar o tempo de processamento e os resultados para cada tipo de discretização em ambos os métodos numéricos utilizados na comparação deste trabalho, nos métodos da superposição modal e no método dos elementos finitos, como descrito anteriormente, conforme Tabela 10 abaixo:

Tabela 10 - Tipos de Malha para a Superposição Modal

		
Malha 1	Malha 2	Malha 3

A discretização vertical (em relação ao eixo z), foi mantida com a mesma configuração em todas as malhas utilizadas na análise. Isso significa que a forma como o aquífero foi dividido verticalmente em elementos permaneceu constante em todas as simulações.

Ao manter essa uniformidade na discretização vertical, é possível analisar como outras variações, como o particionamento do domínio ou a discretização horizontal da malha, afetam os resultados da simulação e a representação do sistema aquífero como um todo. Essa abordagem é comum em estudos hidrogeológicos, pois permite isolar os efeitos de diferentes parâmetros na simulação e obter conclusões mais precisas sobre o comportamento do aquífero sob diferentes condições.

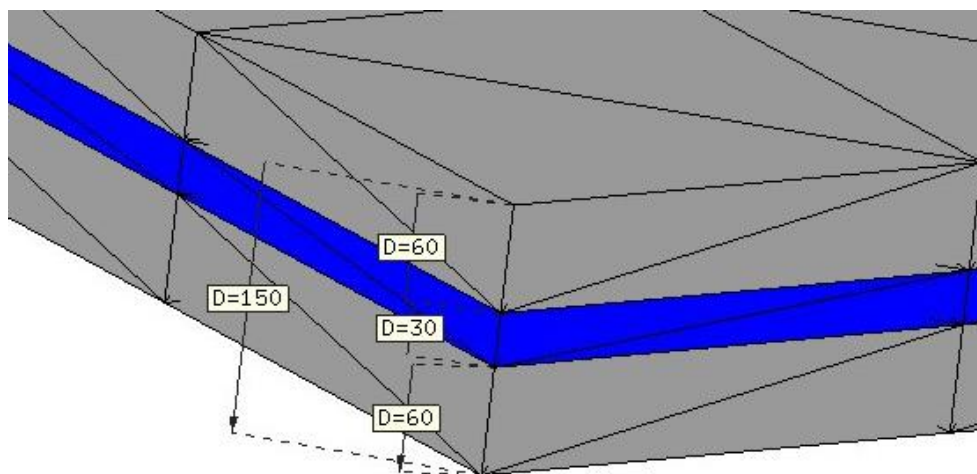


Figura 52 - Discretização vertical

As malhas têm dimensões iguais, só diferenciando o número de elementos e nós, conforme pode ser visto na Tabela 11:

Tabela 11 - Valores de nó e elementos para cada malha

	Nº Nós	Nº Elementos
Malha 1	6.724	28.800
Malha 2	1.764	7.200
Malha 3	3.844	16.200

7.2.1 Resultado do método de Superposição Modal

A fim de comparar os métodos de superposição modal e dos elementos finitos convencionais, o presente trabalho utilizou códigos numéricos construídos especificamente para esse propósito, gerados no próprio laboratório com a formulação apresentada no item 6.3.1. O objetivo era avaliar a qualidade das soluções numéricas e a velocidade de obtenção dessas soluções em ambos os métodos. Para fins de avaliação do custo computacional, o tempo total de CPU foi medido e os resultados em pontos específicos da malha foram comparados entre os dois métodos, em um computador com processador Intel(R) Core (TM) i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz e 16,0 GB de RAM.

A estratégia de comparação numérica envolveu a adoção de um poço no aquífero hipotético, localizado no “ponto 1” com a seta azul, em todas as malhas com coordenadas na origem $(x, y, z) = (0,0,0)$, e o “ponto A” de estudo com coordenadas na $(600,600,60)$, com a seta vermelha, conforme ilustrado na Figura 53. Para cada simulação numérica, foram escolhidas vazões de extração de 30, 90 e 150 l/s, a fim de estudar a influência desses diferentes valores nos resultados obtidos.

Com as vazões de extração e recarga definidas, foram selecionados pontos de análise para acompanhar a simulação numérica. Esses pontos estão listados na Tabela 12. Esses pontos foram escolhidos estrategicamente para representar diferentes regiões do aquífero e permitir a comparação dos resultados obtidos entre os dois métodos em locais específicos de interesse.

Dessa forma, por meio dessa abordagem comparativa, é possível avaliar como os dois métodos se comportam em diferentes cenários de vazão de extração, bem como identificar possíveis diferenças nos resultados em postos-chaves da malha. Isso proporciona uma compreensão abrangente da eficiência e da precisão de cada método, permitindo tomar decisões com mais segurança sobre a escolha da melhor abordagem para simulações futuras.

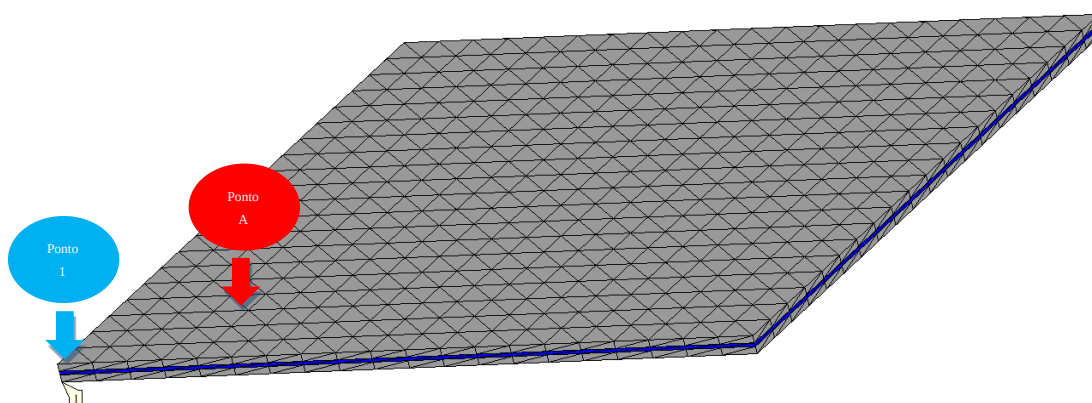


Figura 53 - Localização do Poço (ponto 1) e do local de coleta de dados (ponto A).

Tabela 12 - Pontos analisados no domínio com as coordenadas e os respectivos nós para cada malha

Ponto	Coordenadas			Dados dos nós escolhidos		
	X	Y	Z	Malha 1	Malha 2	Malha 3
A	600	600	60	1850	486	1058

A análise dos resultados foi realizada para cada malha e cada vazão proposta, utilizando os pontos listados na Tabela 12 para comparação dos resultados obtidos pelos métodos dos elementos finitos convencional e superposição modal. Cada ponto possui coordenadas fixas no domínio e foi utilizado para verificar a precisão e a concordância dos resultados entre os dois métodos.

A notação adotada para representar os resultados é exemplificada como segue: o ponto A na malha 1 com vazão de 30 l/s tem o código 1-3A na simulação utilizando elementos finitos convencional e 1-3AS na simulação utilizando superposição modal.

Na Figura 54, é apresentada a evolução dos valores no “ponto A”, na qual é possível observar a influência da discretização da malha e a evolução das simulações pelos dois métodos. Conforme ilustrado, os valores obtidos nos dois métodos são muito próximos, e essa proximidade se repetiu para todos os pontos selecionados e listados na Tabela 12.

Essa observação de resultados próximos em ambos os métodos para todos os pontos analisados é uma evidência importante da concordância e da validade dos resultados obtidos pelas duas abordagens. Essa consistência é um indicativo da eficiência da técnica de superposição modal em relação ao método dos elementos finitos convencional, especialmente em cenários de discretização de malha e diferentes vazões de extração.

Essa análise comparativa fornece uma base sólida para confiar na utilização da superposição modal como uma alternativa eficaz e precisa para simulações hidrogeológicas, apresentando um bom equilíbrio entre qualidade dos resultados e custo computacional, como será visto a seguir.

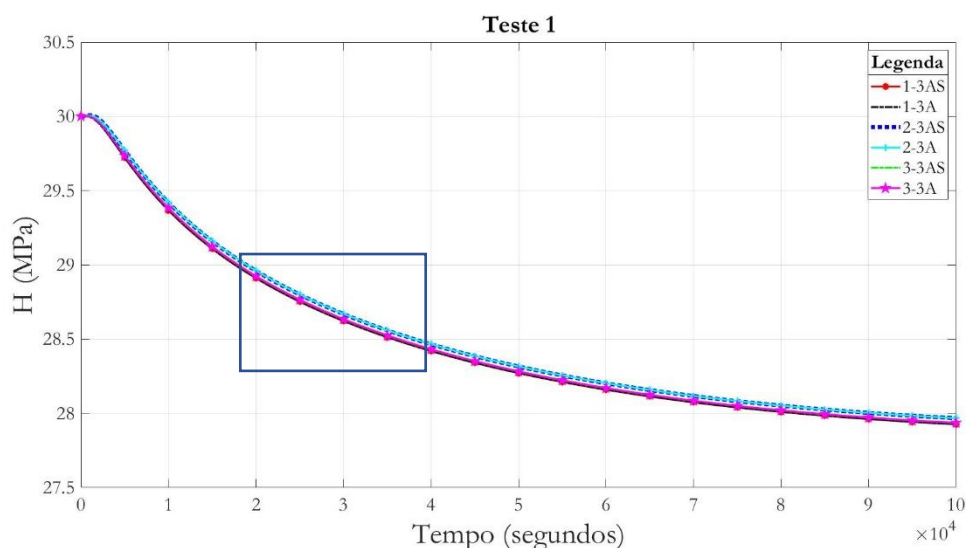


Figura 54 - Evolução da carga hidráulica no ponto A4 comparando as diferentes discretizações das malhas

É possível observar que os resultados para cada malha se concentram em uma região bem definida e apresentam uma proximidade significativa. Isso indica uma concordância satisfatória entre os resultados obtidos pelos dois métodos, ou seja, elementos finitos e superposição modal. Esses achados oferecem informações valiosas acerca da precisão e consistência dos resultados, contribuindo para a avaliação e validação dos modelos numéricos empregados na simulação. Esta conclusão pode ser corroborada com a Tabela 13, na qual os desvios de cada amostra foram calculados utilizando o método da Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE). O RMSE envolve a diferença entre o valor de referência (p) e o valor a ser comparado (a), conforme indicado na equação (93). Que para o caso proposto será em analisar as amostras 3AS com a 3A para cada malha. Essa abordagem permitiu reforçar a adequação e confiabilidade do método de superposição modal, demonstrando suas vantagens em relação ao método convencional dos elementos finitos em termos de qualidade dos resultados.

Tabela 13 - Valores de RMSE das amostras comparadas

Teste 1	
Amostras comparadas	RMSE
1-3AS e 1-3A	0,0281
2-3AS e 2-3A	0.0274
3-3AS e 3-3A (SC)	0.0278

A Figura 55 é uma representação ampliada do quadro estabelecido na Figura 54. Esta ampliação foi realizada para permitir uma análise mais detalhada dos resultados para cada modelo específico.

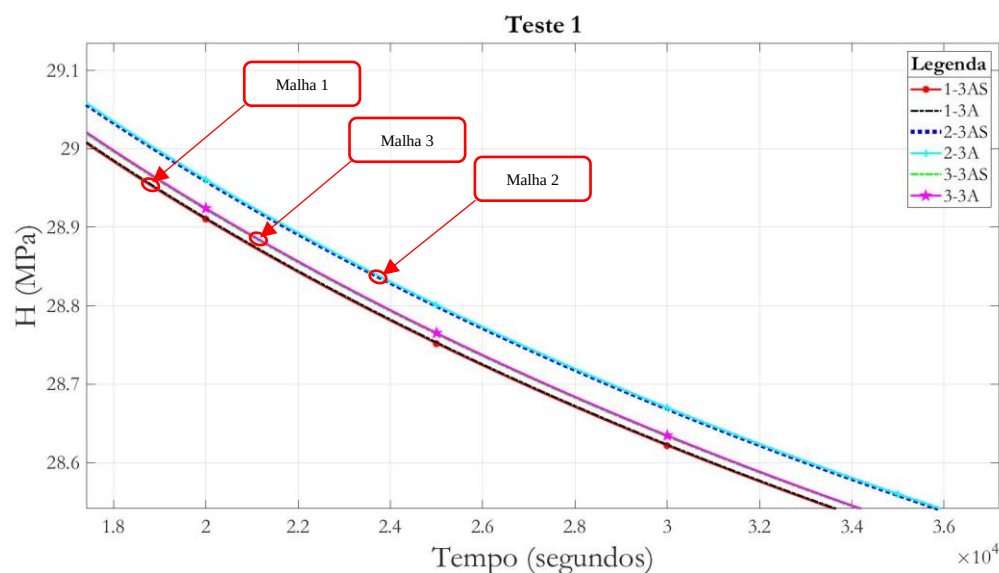


Figura 55 - Ampliação do retângulo da Figura 54 indicando as malhas usadas para cada uma das curvas de evolução da carga hidráulica no “ponto A”.

Na Figura 56 observa-se para o “ponto A”, com malhas de diferentes discretizações e com diferentes vazões de extração de água, a variação de carga hidráulica ao longo tempo. Através dessa representação gráfica, é possível observar novamente a coerência nos resultados, com as soluções apresentando-se muito próximas entre os métodos dos elementos finitos convencionais e o da superposição modal. Essa consistência nos resultados demonstra a eficiência e a precisão da técnica de superposição modal em comparação ao método convencional dos elementos finitos, em diferentes condições de discretização e extração.

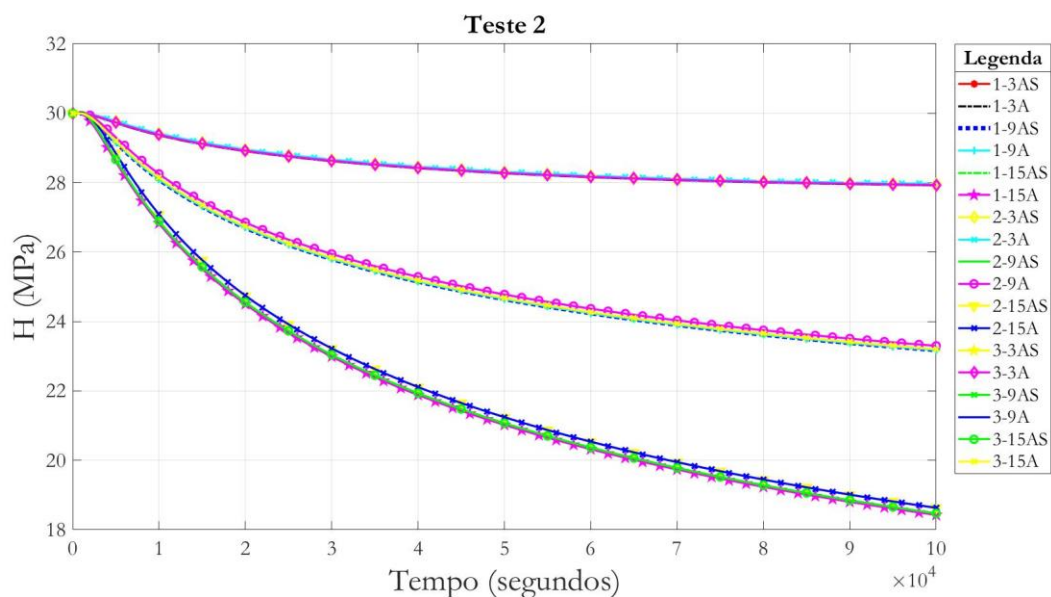


Figura 56 -Evolução temporal da carga hidráulica do “ponto A”, para diferentes discretizações e vazões impostas.

Uma variável importante para ser observada é o tempo total de CPU levado para realizar as simulações. Estes valores podem ser vistos nas Figura 57 e Figura 58, que demonstram o tempo de processamento para o código rodando em Elementos Finitos e outro com Superposição Modal. A legenda está se referindo ao tipo de malha, consequentemente a discretização mostrada na Tabela 12, e à vazão imposta no poço (30, 90 e 150 l/s).

A avaliação da eficiência computacional de cada método depende, em grande parte, da análise do tempo total de CPU. Ao comparar os tempos de processamento entre os métodos dos elementos finitos e a superposição modal em diferentes configurações de malha e taxas de vazão impostas, torna-se possível determinar a economia de tempo proporcionada pela adoção da superposição modal em contraposição ao método convencional.

Torna-se evidente que, no que se refere às mudanças nas taxas de fluxo, o tempo de processamento mantém-se praticamente constante, como evidenciado nas Figura 57 e Figura 58, em ambos os dois métodos analisados. No entanto, em relação à discretização, a situação apresenta variações consideráveis, como destacado na Tabela 11. Essas alterações na quantidade de nós e elementos foram introduzidas para permitir a identificação de diferenças significativas na eficiência dos métodos, possibilitando a avaliação do desempenho por meio da comparação entre eles.

Os testes realizados na “malha 1”, a mais densamente discretizada, demonstram um tempo de processamento maior em comparação com as outras malhas. À medida que reduzimos o número de nós e elementos, observa-se uma diminuição significativa no tempo de

processamento da CPU. Figura 57, as reduções de tempo são notáveis: comparando as amostras 1-3 com 2-3, há uma redução de praticamente 72% no tempo, e no caso de 1-3 com 3-3, uma redução de 40% no tempo de processamento.

Já na Figura 58, as reduções de tempo são ainda mais expressivas para o caso da superposição modal. Na comparação entre a amostra 1-3 e 2-3, observa-se uma redução de praticamente 95%, e no caso de 1-3 com 3-3, uma redução de 74% no tempo de processamento. Isso leva à conclusão de que o número de graus de liberdade é um fator preponderante para o método de Superposição Modal.

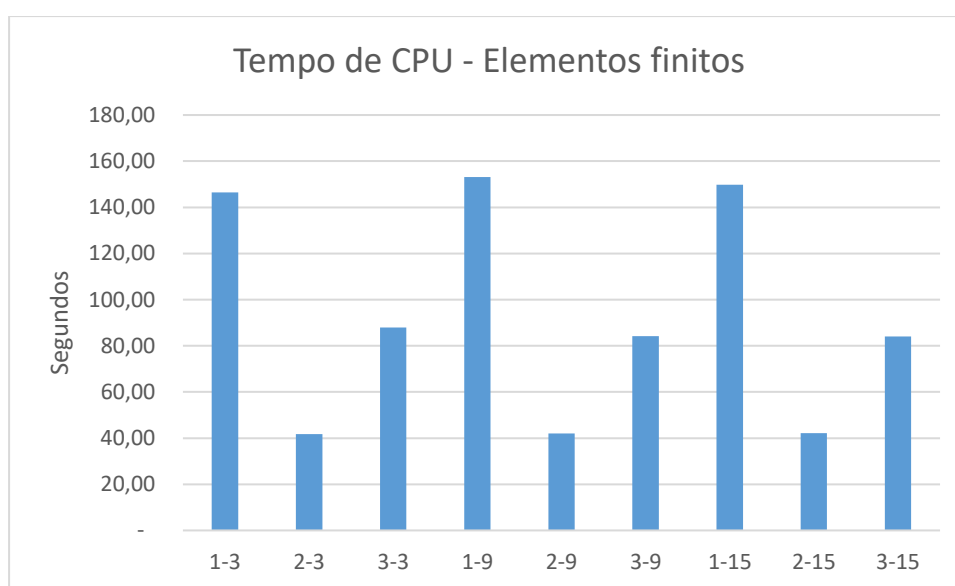


Figura 57 - Tempo gasto de processamento do código de elementos finitos.

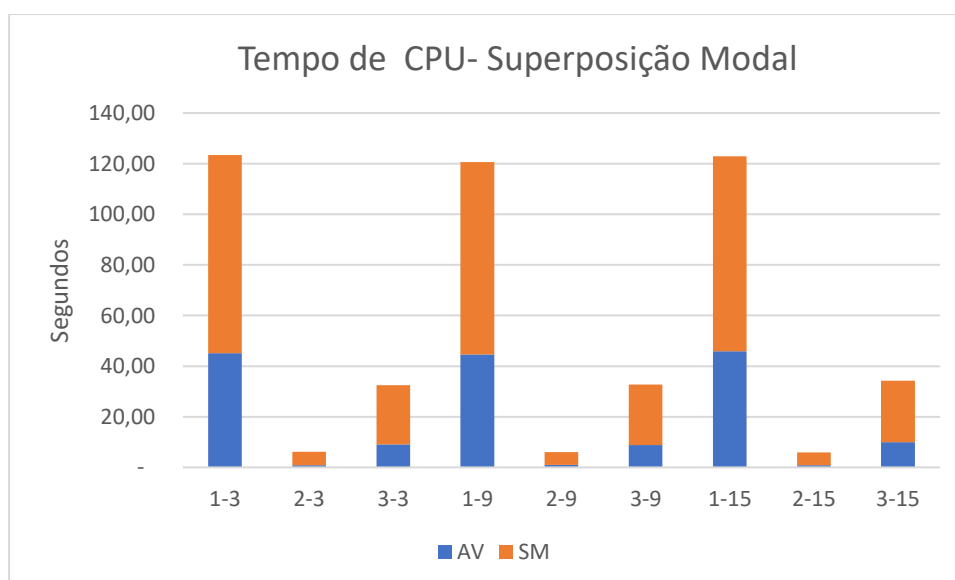


Figura 58 - Tempo gasto de processamento do código de superposição modal - com os cálculos de autovalores e a superposição.

Através da representação gráfica da Figura 58 verifica-se que o processo do código de superposição modal é executado em duas etapas distintas:

1. **Construção da matriz e vetores do problema de fluxo ([S], [T] e {Q}):** Nessa primeira etapa, são construídas a matriz e os vetores que fazem parte do sistema de equações que representa o problema, conforme a Equação (4). Além disso, também são calculados os autovalores [L]. A matriz de autovalores é uma parte essencial para a realização do cálculo da superposição modal, como demonstrado na seção 6.3.2 deste trabalho, e também para o desacoplamento do sistema, como mostrado na seção 6.3.5.

2. **Cálculo da superposição modal e desacoplamento do sistema:** Nesta segunda etapa, ocorre o cálculo da superposição modal e do procedimento de desacoplamento do sistema, conforme demonstrado nas seções 6.3.1 deste trabalho. Isso leva aos resultados da Equação (4) do problema.

Para comparar o tempo de processamento dos dois métodos numéricos (elementos finitos convencionais e superposição modal), a soma das duas etapas descritas acima é considerada como o tempo total de processamento utilizando o método numérico da superposição modal. Em outras palavras, o tempo de processamento para obter os resultados pelo método da superposição modal é a soma do tempo gasto para o processamento da matriz de autovalor (AV) com o tempo de processamento para o cálculo da superposição modal e do sistema de desacoplamento (SM), resultando no tempo total de CPU do método.

Essa análise do tempo de processamento é fundamental para avaliar a eficiência computacional da superposição modal em relação ao método dos elementos finitos convencionais. A capacidade de obter resultados precisos com um menor tempo de processamento é uma das vantagens importantes da superposição modal em simulações hidrogeológicas complexas. Essa economia de tempo pode ser especialmente valiosa ao lidar com grandes domínios ou problemas hidrogeológicos com elevada complexidade, onde os tempos de processamento podem ser consideráveis.

A capacidade de dividir o processamento em duas etapas independentes se tornou uma das principais vantagens da superposição modal. A primeira etapa, que envolve o cálculo dos autovalores, é a mais custosa computacionalmente e pode ser realizada uma única vez, independentemente das modificações na recarga do aquífero. Isso significa que, uma vez que os autovalores são calculados, eles podem ser reutilizados para várias simulações com diferentes cenários de recarga e vazões de extração.

Essa característica do método é especialmente valiosa quando se deseja realizar estudos de sensibilidade ou otimização do processo, analisando o comportamento do aquífero em

resposta a diferentes condições de recarga e extração. Em vez de recalcular os autovalores a cada simulação, o que seria computacionalmente intensivo e demorado, a superposição modal permite pular essa etapa e focar apenas no cálculo da superposição modal e do desacoplamento do sistema. Como resultado, o tempo de processamento é significativamente reduzido, permitindo a realização de várias simulações de forma mais rápida e eficiente.

Essa flexibilidade e eficiência do método da superposição modal são cruciais para aumentar a produtividade e a precisão dos estudos hidrogeológicos. Ao permitir a exploração de diferentes cenários e a avaliação de diversos parâmetros de forma mais ágil, essa abordagem ajuda os pesquisadores e profissionais da área a obterem uma compreensão mais completa e detalhada do comportamento do aquífero, auxiliando na tomada de decisões e no planejamento de gerenciamento de recursos hídricos. Assim, a redução do tempo de processamento é uma vantagem importante em aplicações práticas, tornando o método da superposição modal uma ferramenta valiosa para a modelagem e análise de problemas hidrogeológicos complexos.

Além desta divisão do processamento em duas etapas independentes que foi mostrada anteriormente, a superposição modal também permite uma redução dos modos, fazendo com que se tenha uma redução de ordem de sistemas de equações, o que acarreta na diminuição da matriz modal. Essa redução de ordem do problema é uma vantagem significativa que pode melhorar ainda mais o desempenho do código como um todo, e pode ser demonstrada na Figura 59.

Quando se utiliza a técnica de superposição modal, é possível selecionar apenas os modos mais significativos para a resposta do sistema, eliminando os modos de menor importância. Esses modos menos relevantes podem ter contribuições menores ou insignificantes para a solução final, e sua exclusão pode ser feita sem comprometer significativamente a precisão dos resultados.

Ao reduzir a matriz modal e considerar apenas os modos mais importantes, o cálculo dos autovalores e autovetores se torna menos custoso computacionalmente, resultando em um tempo de processamento menor para essa etapa. Isso pode ser especialmente benéfico quando se lida com problemas que envolvem grandes domínios ou sistemas hidrogeológicos complexos, nos quais o número de modos pode ser considerável.

Essa redução de ordem proporcionada pela superposição modal é uma estratégia eficaz para obter uma solução mais rápida e eficiente sem comprometer a precisão dos resultados. A capacidade de reduzir a complexidade do problema mantendo a qualidade dos resultados é uma das razões pelas quais a superposição modal é amplamente utilizada em simulações em outros campos de estudo que envolvem sistemas de equações diferenciais parciais.

Os resultados dessa redução de ordem podem ser visualizados nas Figura 59 e Figura 60, que ilustram um teste comparativo entre o método de elementos finitos e o método de superposição modal. Essas figuras foram geradas com base na discretização da “malha 1”, conforme detalhado na Tabela 10, e uma taxa de vazão do poço de 30 l/s a partir do ponto de coordenadas conhecidas, denominado "ponto A" (conforme indicado na Tabela 12).

Nesse contexto, o método da Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE) foi empregado para estabelecer o parâmetro de desvio entre as curvas representadas na Figura 60. Os resultados revelaram um desvio de RMSE de 0,0281 entre as curvas 1-3A e 1-3AS, e um valor de RMSE de 0,3364 para o desvio entre as curvas 1-3A e 1-3AS2. Esses valores demonstram a proximidade entre os resultados obtidos por meio dos métodos analisados.

A Figura 59 apresenta uma comparação de tempo de processamento entre o método convencional de elementos finitos (1-3A) e o método da superposição modal (1-3AS e 1-3AS2), aplicados à “malha 1”, com uma vazão de poço de 30 l/s, conforme mencionado anteriormente e mostrado pelos códigos de cada amostra.

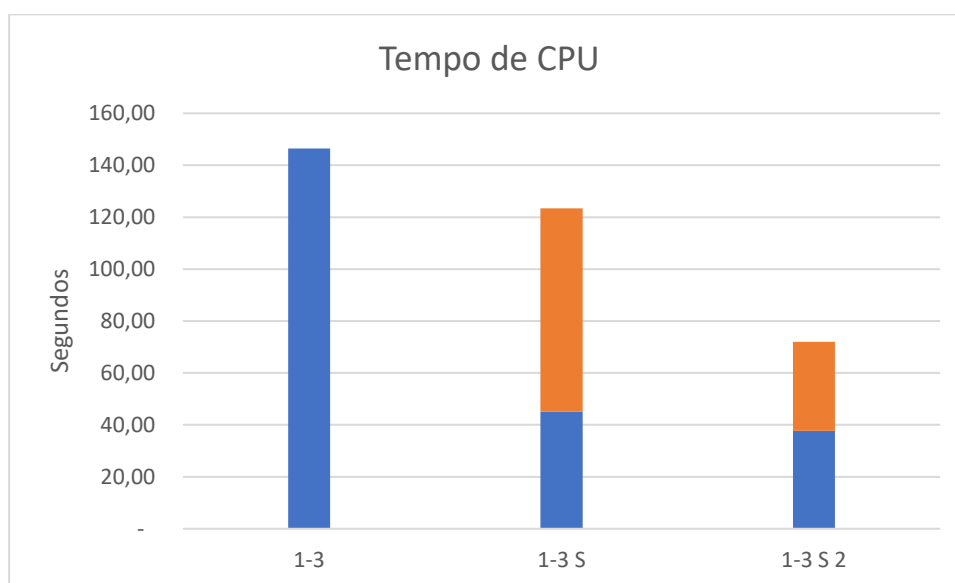


Figura 59 -Comparação do tempo de processamento.

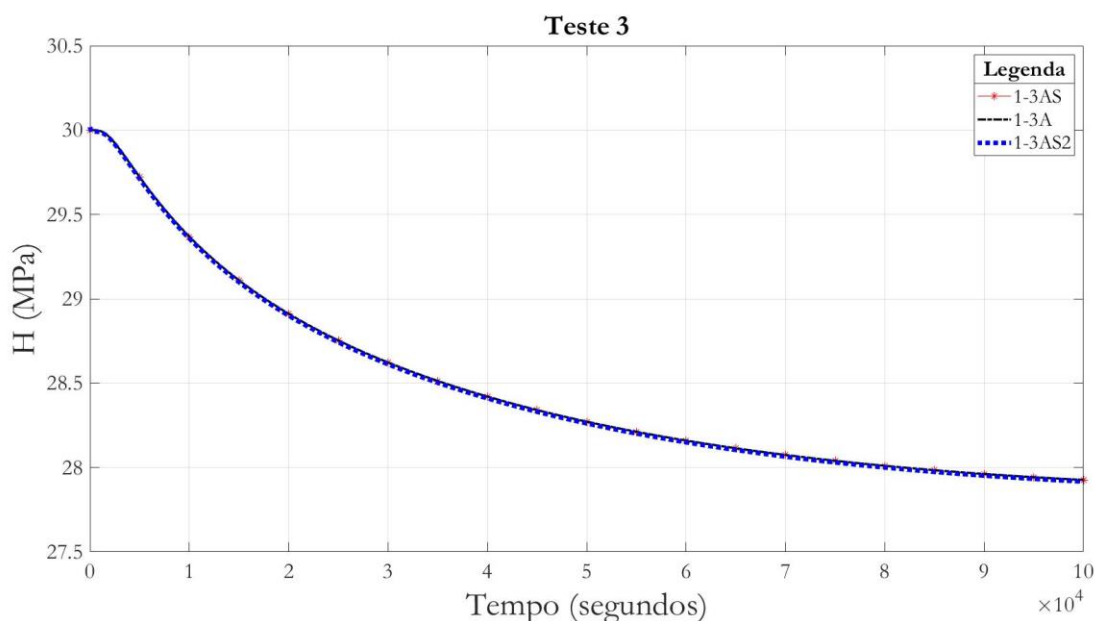


Figura 60 - Comparação da solução dos métodos

A legenda da Figura 59 descreve os resultados de cada método da seguinte maneira:

- Na primeira barra da legenda, representada como 1-3A, observa-se o tempo de processamento para o método convencional de elementos finitos, evidenciando um maior tempo de processamento, entre todas as outras barras evidenciadas.
- Nas duas barras subsequentes, representadas como 1-3S e 1-3S2, são apresentados os tempos de processamento para o método da superposição modal. A primeira barra reflete o processamento padrão desse método, enquanto a segunda barra indica a utilização da redução de ordem com 50% do número de autovalores. Como na Figura 58, as barras são codificadas em duas cores, representando o tempo de processamento da máquina para o cálculo do autovalor e o tempo de processamento para o cálculo da superposição modal.

Analisando as barras que representam os resultados dos métodos de superposição modal, nota-se que, na amostra 1-3S, aproximadamente 37% do tempo de processamento é dedicado ao cálculo dos autovalores, com os restantes 63% destinados ao cálculo da superposição modal. No caso da amostra 1-3S2 (representando a superposição modal com redução de 50% dos autovalores), o cálculo do autovalor requer 53% do tempo total de processamento, enquanto apenas 47% são destinados ao cálculo da superposição modal.

É relevante destacar a comparação de tempo entre o método de elementos finitos e o método de superposição modal. Entre 1-3A e 1-3AS, observamos uma redução de tempo de

aproximadamente 16%, enquanto entre 1-3A e 1-3AS2, a redução de tempo chega a cerca de 51%, redução essa em favor do método de superposição modal.

Sendo assim, importante notar que, ao considerar apenas o tempo de processamento para a etapa de cálculo da superposição modal, esses valores mudam significativamente. Comparando 1-3A e 1-3AS, há uma redução de tempo de aproximadamente 47%, e entre 1-3A e 1-3AS2, a redução de tempo chega a cerca de 77%. Isso evidencia a eficiência do método na otimização do tempo e na redução do custo computacional do processo da superposição modal. Essa eficiência torna a técnica ainda mais atraente para aplicações práticas, permitindo a realização de um maior número de simulações em um período menor, o que amplia as possibilidades de estudo e análise em problemas hidrogeológicos complexos.

É importante mencionar que os resultados dos experimentos foram obtidos em um computador equipado com um processador Intel(R) Core (TM) i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz e 16,0 GB de RAM. Essas informações adicionais são relevantes para compreender o contexto dos testes e a capacidade de processamento do equipamento utilizado nos experimentos.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram desenvolvidas novas abordagens para a aplicação de dois métodos distintos na resolução de sistemas, com o propósito de solucionar problemas de fluxo em aquíferos, permitindo a exploração de estratégias diversas. Isso possibilitou a utilização de cada método como uma técnica de Redução de Ordem, reduzindo o número de graus de liberdade de diferentes maneiras e, conseqüentemente, diminuindo o custo computacional.

Os métodos empregados incluíram o Particionamento do Domínio, desenvolvido a partir da técnica de particionamento de Guyan, originalmente aplicada em estruturas, mas adaptada para a área de geomecânica, especificamente para problemas de fluxo em meio poroso. Esse método envolve a subdivisão do domínio aquífero em subdomínios menores, resultando na redução do número de graus de liberdade e no tamanho das matrizes do sistema de equações a serem resolvidas. Essa redução de ordem é particularmente benéfica ao lidar com domínios extensos ou problemas de alta complexidade.

O outro método adotado foi a Superposição Modal, uma técnica já conhecida na área de estruturas, mas também adaptada para o contexto de fluxo em meio poroso da geomecânica. Esse método permite dividir o processamento em duas etapas independentes, o que reduz significativamente o tempo de processamento global. A primeira etapa compreende o cálculo dos autovalores e a construção da matriz modal, enquanto a segunda etapa envolve o cálculo da superposição modal e o desacoplamento do sistema. Essa divisão do processamento permite que a etapa de cálculo dos autovalores seja realizada apenas uma vez e possa ser reutilizada em várias simulações, economizando tempo de processamento em cenários com diferentes recargas e vazões.

No decorrer deste estudo, ambos os métodos foram adaptados e implementados em códigos específicos no ambiente Matlab para solucionar os problemas descritos. Ambos métodos se mostraram apropriados para a resolução de problemas de fluxo em meio poroso, com algoritmos facilmente ajustáveis às diferentes situações de cada problema.

Os testes realizados com o método de Particionamento, em um problema 2D, demonstraram a robustez desse método ao interagir com diversos métodos de forma independente, ressaltando a vantagem do particionamento. No caso do problema 3D, observou-se que os desvios mais baixos foram obtidos com o método Não Concentrado (NC), que é o método base de redução de ordem derivado do Particionamento de Guyan, também adaptado neste estudo. Até mesmo o método Concentrado (C), uma nova aplicação do método Não

Concentrado NC, apresentou desvios próximos a zero, corroborando a eficácia do método na resolução de problemas de fluxo em meio poroso com o objetivo de redução de ordem.

A adaptação do método de Superposição Modal para a simulação de fluxo em aquíferos possibilitou a realização de simulações com custo computacional reduzido, otimização do tempo de processamento e a capacidade de realizar análises de otimização e considerar incertezas de maneira mais econômica computacionalmente. A divisão do método em duas etapas, juntamente com a redução de ordem, o torna uma ferramenta valiosa para o estudo e gerenciamento de aquíferos em cenários reais e complexos.

9 ESTUDOS FUTUROS

Como contribuição a um estudo posterior pode-se realizar investigações com os métodos em heterogeneidade de malhas com campos com permeabilidade heterogêneas, presença de falhas e fratura, etc. Utilizar problemas com acoplamento hidromecânicos e outros. Fazer uma investigação mais detalhada da influência das frequências dos modos de autovalores nos resultados obtidos que podendo ser uma contribuição valiosa para aprimorar ainda mais o método de superposição modal. O ajuste das frequências dos autovalores pode oferecer oportunidades para melhorar a redução de ordem do sistema e, potencialmente, otimizar ainda mais o tempo de processamento.

Através do uso dos subcomandos disponíveis no Matlab para ajustar as frequências dos valores que serão utilizados, é possível explorar diferentes configurações e tipos de frequências para os modos de superposição modal. A escolha de iniciar pelos modos de baixa frequência, alta frequência ou uma combinação de ambos (*both ends*) pode influenciar a precisão dos resultados e o tempo de processamento.

As figuras representando as frequências de um dado exemplo utilizado no estudo são valiosas para entender as características dos diferentes modos de frequência que podem ser utilizados no código gerado. Essas informações podem ajudar a orientar o estudo posterior na seleção das melhores configurações de frequências para alcançar a redução de ordem mais eficiente e obter resultados precisos.

Explorar diferentes configurações de frequências e entender como elas afetam os resultados é um passo importante para otimizar o método da superposição modal e torná-lo ainda mais eficiente. Esse estudo posterior pode contribuir para aprimorar a técnica, fornecendo insights valiosos sobre como ajustar as frequências dos modos de autovalores para obter soluções mais rápidas e precisas em simulações. No código gerado neste estudo teve-se a opção de escolher uma das funções que o Matlab permite para resolver os autovalores, que abaixo está um exemplo rodado para se verificar cada um desses ajustes.

Para a Figura 61 e Figura 62 utilizou-se da função de *smallest magnitude* parte-se das baixas frequências até as altas. Sendo assim, quando no código o usuário optar pela *smallest magnitude* a função irá selecionar a metade dos números de frequência para utilizar na solução do sistema de equações gerado.

Figura 61 - Exemplo com toda a frequência Modal para a função Smallest magnitude do Matlab

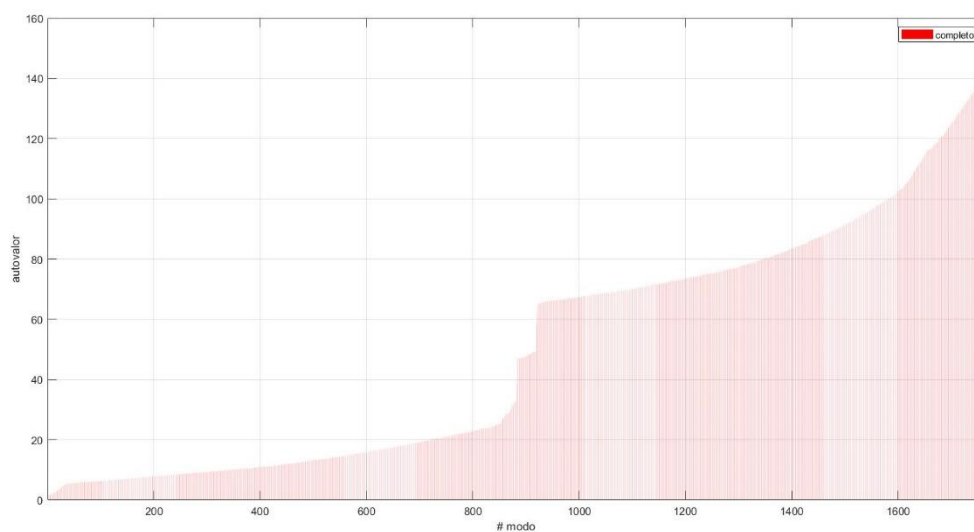
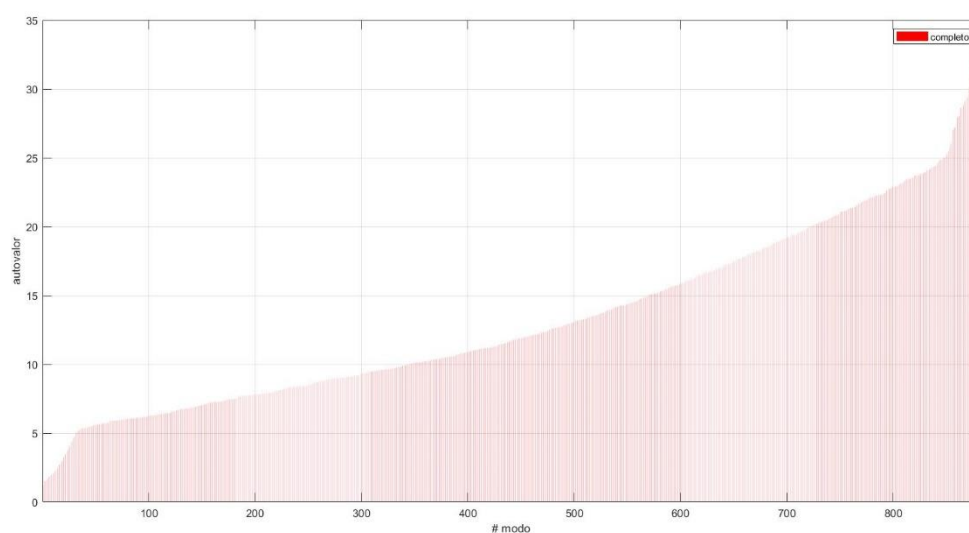


Figura 62 - Exemplo com 50% da frequência Modal smallest magnitude do Matlab



Para a Figura 63 mudou-se o tipo de frequência utilizando a de *largest magnitude* onde se inicia pelos modos de alta frequência e a Figura 64 optou-se para a redução de 50% dos modos o sistema de equação ficando com as altas frequências para gerar os resultados.

Figura 63 - Exemplo com toda a frequência Modal para a função Largest magnitude do Matlab

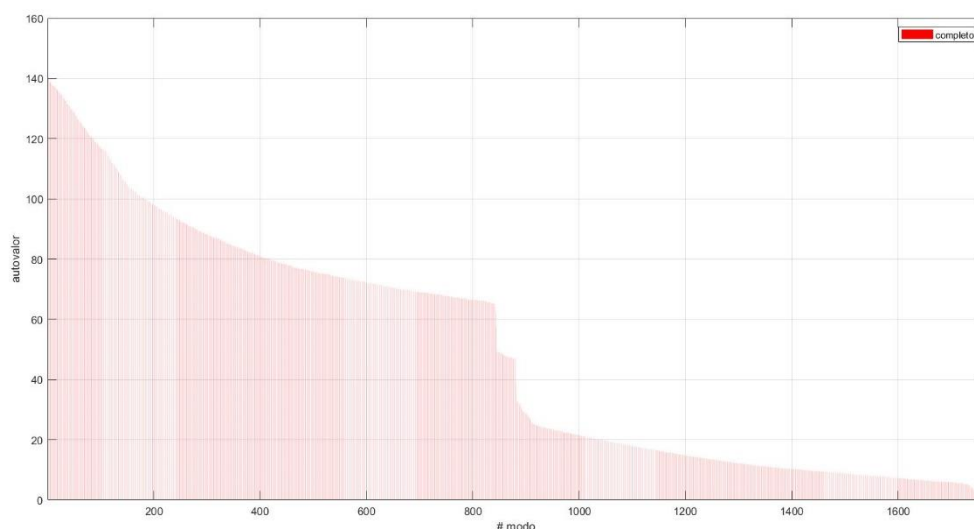
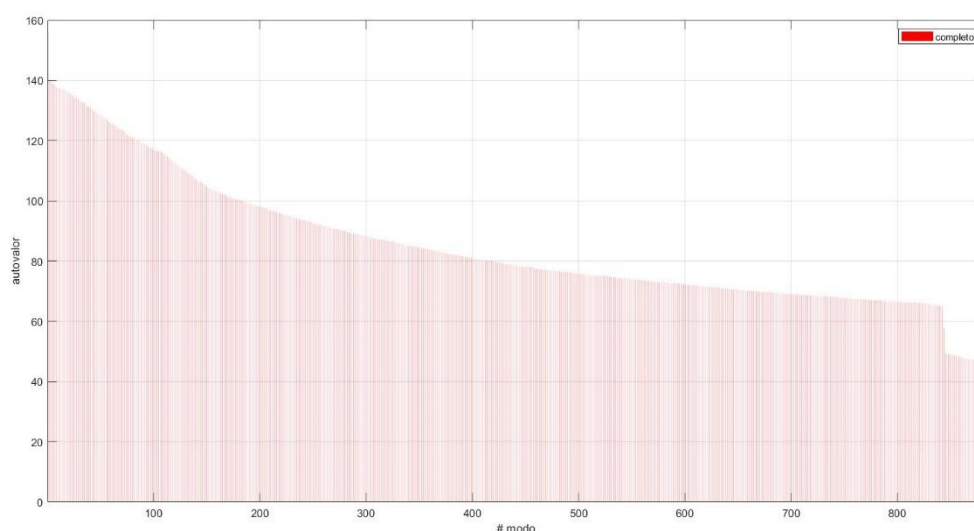


Figura 64 - Exemplo com 50% da frequência Modal Largest magnitude do Matlab



Já quando se usa o comando para utilizar *both ends magnitude* tem como utilizar os modos de frequências altas e baixas como é mostrado nas figuras abaixo.

Na Figura 65 mostra nitidamente a composição dos modos de frequência através desta função com frequências de alta e frequências de baixa, que com foi executado para todo o ranger de frequência ficou com o gráfico parecido com o da *Figura 61*. O que também é visto na *Figura 66*, mesmo com a redução de 50% das frequências.

Figura 65 - Exemplo com toda a frequência Modal para a função Both end magnitude do Matlab

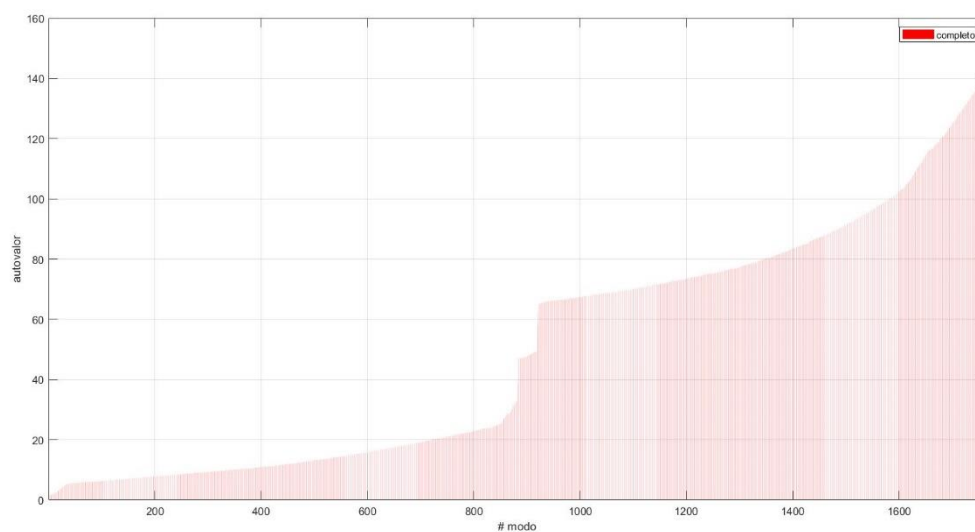
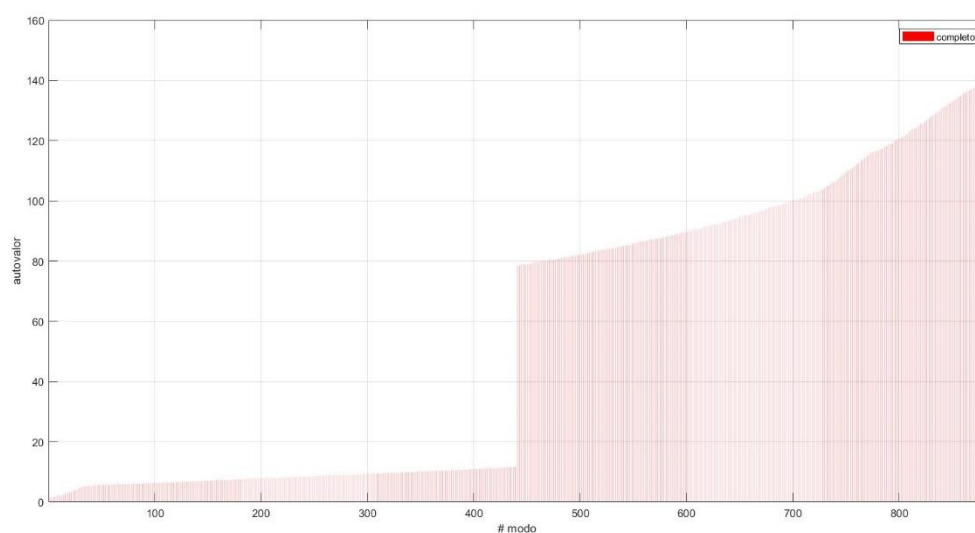


Figura 66 - Exemplo com 50% da frequência Modal para a função Both end magnitude do Matlab



Com as funções descritas o estudo de composições destas frequências pode ser um estudo desafiador para compor uma redução de ordem que consiga chegar a respostas satisfatórias.

REFERÊNCIAS

- [1]. AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO - ANA. **Conjuntura dos recursos hídricos no Brasil 2020: informe anual**. Brasília. 2020.
- [2]. BAO, A. et al. Data-Driven Model Reduction for Coupled Flow and Geomechanics Based on DMD Methods. **Fluids**, v. 4, p. 138, 2019. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2311-5521/4/3/138>>.
- [3]. BEAR, J. **Dynamics of Fluids in Porous Media**. [S.l.]: Dover Publications, 1972.
- [4]. BEAR, J.; VERRUIJT, A. **Modeling Groundwater Flow and Pollution**. [S.l.]: Springer Netherlands, 1987.
- [5]. CARY, L. et al. Origins and processes of groundwater salinization in the urban coastal aquifers of Recife (Pernambuco, Brazil): A multi-isotope approach. **Science of the Total Environment journal**, 2015. 411-429.
- [6]. CASTILHO-BARBOSA, I. N. B. D. et al. Conhecer para conservar aquíferos: como torná-los visíveis? **Terrae didactica**, v. 16, p. 1-12, 2020.
- [7]. CHATURVEDI, D. K. **Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink**. [S.l.]: CRC Press Taylor & Francis Group, 2010.
- [8]. CHINESTA, F.; LADEVEZE, ; CUETO, A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition. **Arch Comput Methods Eng**, 2011. 395–404.
- [9]. CORPORATION, M. S. **MSC Nastran 2017 - Superelements User's Guide**. [S.l.]: [s.n.], 2016. Disponível em: <www.mscsoftware.com>.
- [10]. COUSSY, O. **Poromechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [11]. FEITOSA, F. A. C. et al. **Hidrogeologia ; conceitos e aplicações**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: CPRM - Serviços Geológico do Brasil, 2008.
- [12]. FORTUNA, L.; NUNNARI, G.; GALLO, A. **Model Order Reduction Techniques with Applications in Electrical Engineering**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- [13]. FREEZE, A.; CHERRY, J. A. **Groundwater**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, Inc, 1979.
- [14]. GONG, H. et al. Long-term groundwater storage changes and land subsidence. **Hydrogeology Journal**, p. 1417–1427, 2018.
- [15]. GREENBERG, M. D. **Advanced Engineering Mathematics**. 2nd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1998.

- [16]. GUEDES, R. P.; DE ARAÚJO, P. S.; DE ANDRADE, A. P. G. NECESSIDADE DO GERENCIAMENTO DOS RECURSOS HÍDRICOS EM GRANDES CIDADES COMO RECIFE. **ARCHITECTON - REVISTA DE ARQUITETURA E URBANISMO**, v. 06, p. 107-117, 2021.
- [17]. GUO, H. et al. Groundwater-derived land subsidence in the North China Plain. **Environ Earth Sci**, fev 2015.
- [18]. GUYAN, R. J. **Reduction of stiffness and mass matrices**, Downey, 3 n 2:380, 1965. 380.
- [19]. HE, J.; FU, Z.-F. **Modal Analysis**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [20]. HUGHES, R. J.; LIU, W. K. Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Stability Theory. **Journal of Applied Mechanics**, 45, 1978. 371-374.
- [21]. HUYAKORN, P. S.; PINDER, G. F. **Computational Methods in Subsurface Flow**. [S.l.]: ACADEMIC PRESS, 1983.
- [22]. KHADRI, S. F. R.; PANDE, C. Ground water flow modeling for calibrating steady state using MODFLOW software: a case study of Mahesh River basin, India. **Model. Earth Syst. Environ.**, p. 2-17, 2016.
- [23]. LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method - Sixth Edition**. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.
- [24]. LUNA, R. M. R. D. et al. Groundwater overexploitation and soil subsidence monitoring on Recife plain (Brazil). **Nat Hazards (2017)**, 2017.
- [25]. LV, C. et al. Quantitative assessment of ecological compensation for groundwater overexploitation based on emergy theory. **Environ Geochem Health**, 42, 2019. 733–744.
- [26]. MAIDMENT, D. R. **Handbook of Hydrology**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1993.
- [27]. MANZIONE, R. L. **Águas Subterrâneas: Conceitos e Aplicações sob uma Visão Multidisciplinar**. Jundiaí: Paco Editorial, 2015. 388 p.
- [28]. MODONI, G. et al. Spatial analysis of land subsidence induced by groundwater withdrawal. **Engineering Geology**, 2013. 59–71.
- [29]. MONTENEGRO, S. M. G. L.; CABRAL, J. J. D. S. P.; PAIVA, A. L. R. D. Águas Subterrâneas na Zona Costeira da Planície do Recife (PE) : Evolução da Salinização e Perspectivas de Gerenciamento. **RBRH — Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 14, p. 81-93, 2009.
- [30]. OLIVEIRA, A. D. N. et al. Padrões urbanos facilitadores da recarga de aquíferos. **Revista de Morfologia Urbana**, 2019.

- [31]. PAZ, M.; KIM, Y. H. **Structural Dynamics**. [S.l.]: [s.n.], 2019.
- [32]. QUARTERONI, A.; ROZZA, G. **Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction**. [S.l.]: Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [33]. ROY R. CRAIG, J.; KURDILA, A. J. **Fundamentals of Structural Dynamics**. [S.l.]: John Wiley & Sons. Inc., 2006.
- [34]. S, Y.; XUE Y, W. J.; YAN X, Y. J. Progression and mitigation of land subsidence in China. **Hydrogeol**, v. 24, p. 685-693, 2016.
- [35]. S.M.PALEKAR; K.V.SUBRAMANIAN; M.S.BAVARE. Super-Elements...a Remedy for Non-Linear Analyses of Large-Sized Models. **Transactions of the 17th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 17)**, Prague, 17-22 August 2003.
- [36]. SCHILDERS, W. H. A.; VAN DER VORST, H. A.; ROMMES, J. **Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [37]. TEDESCO, J. W.; MCDOUGAL, W. G.; ROSS, C. A. **Structure Dynamic: Theory and Applications**. [S.l.]: Prentice Hall, 1998. 816 p.
- [38]. TERZAGHI, K. **Theoretical soil mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1943.
- [39]. THOMAS, H. R. et al. SOLVING COUPLED THERMO-HYDRO-MECHANICAL PROBLEMS IN UNSATURATED SOIL USING A SUBSTRUCTURING-FRONTAL TECHNIQUE. **COMMUNICATIONS IN NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, 14, 1998. 783-792.
- [40]. ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. **Finite Elements & Approximation**, 1983.
- [41]. ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 5^a Ed. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, v. 1, 2000.
- [42]. ZILL, D. G. **A First Course in Differential Equation with Modeling Applications**. 11th. ed. Boston: Cengage Learning, 2018.
- [43]. ZU-QING QU. **Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis**. London : Springer-Verlag, 2004.