



UNIVERSIDADE  
FEDERAL  
DE PERNAMBUCO

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**

**CENTRO ACADÊMICO DO AGreste**

**NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE**

**CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA**

**EDUARDO HENRIQUE VALDIVINO SILVEIRA**

**A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: Uma proposta didática para o  
ensino médio**

Caruaru

2023

EDUARDO HENRIQUE VALDIVINO SILVEIRA

**A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA:** Uma proposta didática para o  
Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Licenciatura em  
Matemática da Universidade Federal de  
Pernambuco, como requisito parcial para a  
obtenção do título de licenciado em  
Matemática.

**Área de concentração:** Ensino  
(Matemática)

**Orientador:** Profº. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Caruaru  
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silveira, Eduardo Henrique Valdivino.

A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: Uma proposta didática  
para o Ensino Médio / Eduardo Henrique Valdivino Silveira. - Caruaru,  
2023.

34 p : il.

Orientador(a): José Ivanildo Felisberto de Carvalho  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática -  
Licenciatura, 2023.

Inclui referências, apêndices, anexos.

1. Matemática. 2. Fotografia. 3. Didática. 4. Proporção Áurea. 5.  
Ensino Médio. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de. (Orientação).  
II. Título.

510 CDD (22.ed.)

EDUARDO HENRIQUE VALDIVINO SILVEIRA

**A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: Uma proposta  
didática para o Ensino Médio**

Monografia submetida ao Corpo  
Docente do Curso de  
MATEMÁTICA – Licenciatura do  
Centro Acadêmico do Agreste da  
Universidade Federal de  
Pernambuco.

Aprovada em: 28/09/2023

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>a</sup>. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Andreza Rodrigues da Silva (Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>a</sup>. Anderson Rodrigo Oliveira da Silva (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus, por me abençoar, por mais que eu não mereça, mas tua misericórdia é infinita, me deu a oportunidade de ingressar em uma universidade federal e conclui-la com sucesso.

Quero agradecer aos meus pais Margarete e Edmilson, por sempre me incentivarem e me dar tudo ao alcance deles para que eu fizesse a faculdade, tirando da onde não tinha até, para pagar o transporte, além de sempre acreditarem em mim, amo vocês imensamente, obrigado por serem pais tão incríveis.

Agradeço a minha namorada Mayara, que desde que começamos a namorar sempre me incentivou e acreditou, me dando forças nos dias difíceis e estando junto comigo, você é luz na minha vida e uma pessoa muito importante para mim, te amo.

Agradeço a Cristiano Ronaldo por ser uma fonte de inspiração para mim, me ensinando que temos sempre que lutar por nossos objetivos e jamais desistir, dando sempre nosso máximo, para mim você sempre será o melhor do mundo (Siuuuu).

Agradeço ao professor Ivanildo por ter me ajudado nessa etapa tão difícil que é o TCC, muito obrigado mesmo, tudo de melhor para o senhor.

E agradeço a todos aqueles que também indiretamente contribuíram para que eu chegassem até aqui.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo propor aos futuros professores sobre como o estudo sobre a proporção áurea por meio da fotografia pode ser utilizado como didática para uma turma de ensino médio. E as questões que procuramos responder com essa pesquisa são: como a fotografia pode ser utilizada para ensinar a proporção áurea, e percepção de futuros professores sobre a fotografia e o ensino da proporção áurea. Para alcançar o objetivo proposto o campo de investigação foram os licenciandos da Licenciatura em Matemática da UFPE, Campus Agreste, na turma de Metodologia. A pesquisa apresenta natureza descritiva e qualitativa, na qual a coleta de dados se dá através de um questionário. A análise foi realizada através de quatro questões, onde a primeira traz informações sobre o conhecimento prévio e as demais depois traz informações após eles entenderem sobre o tema e apresentar a proposta didática para eles. Para que as demais perguntas não influenciassem na resposta da primeira, colocamos a primeira em uma folha a parte. Dessa forma busca-se apresentar a proporção áurea na fotografia como algo que pode-se acrescentar na didática em sala de aula, assim contribuindo na formação de futuros (as) professores (as) de Matemática. Após a análise percebemos que o questionamento da pesquisa, de fato, é relevante, conseguindo feedback destes futuros professores em como tal questionamento pode agregar para a sala de aula.

Palavras-chave: Proporção Áurea; Fotografia; Didática; Ensino Médio; Matemática

## ABSTRACT

The present work aims to propose to future teachers how the study of the golden ratio through photography can be used as a didactic approach for a high school class. The questions we seek to answer with this research are: how can photography be used to teach the golden ratio, and what is the perception of future teachers regarding photography and the teaching of the golden ratio. To achieve the proposed objective, the field of investigation was the students of the Mathematics Education program at UFPE, Campus Agreste, in the Methodology class. The research has a descriptive and qualitative nature, and data collection is done through a questionnaire. The analysis was conducted through four questions, where the first provides information about prior knowledge, and the subsequent questions gather information after they have grasped the subject and been presented with the didactic proposal. To prevent the later questions from influencing the response to the first one, the first question was presented on a separate sheet. In this way, we aim to present the golden ratio in photography as something that can be added to the didactic approach in the classroom, thus contributing to the education of future mathematics teachers. After the analysis, we realized that the research question is indeed relevant, as it provides feedback from these future teachers on how such a question can enhance the classroom experience.

Keywords: Golden Ratio; Photography; Didactics; High School; Math

## **SUMÁRIO**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>10</b>
2.1	GERAL.....	10
2.2	ESPECÍFICOS.....	10
<b>3</b>	<b>FOTOGRAFIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA .....</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>PROPORÇÃO ÁUREA.....</b>	<b>13</b>
4.1	Construção do retângulo áureo.....	16
4.2	Espiral Áurea .....	18
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA DA PESQUISA .....</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>26</b>
6.1	DESCRIÇÃO DOS ENTREVISTADOS.....	26
6.2	O QUE ENTENDEM SOBRE A PROPORÇÃO ÁUREA.....	26
6.3	RESULTADOS DA APRESENTAÇÃO DA OFICINA .....	27
6.4	RESULTADOS APÓS A APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA.....	28
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>32</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>34</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Aprender Matemática através da arte é uma concepção a qual pode ser entendida ao longo da história dessa ciência, pois muitos filósofos, geômetras e arquitetos como Tales de Mileto, Euclides e o famoso brasileiro Oscar Niemeyer desenvolveram projetos em que a Matemática foi fundamental para tais.

Conforme Franco (2013) defende sua proposta sobre o uso da arte na educação matemática. As relações transcurriculares entre essas duas disciplinas despertam a sensibilidade, a criatividade e a imaginação do aluno, e podem ser estabelecidas relações com as formas de retratar a realidade no âmbito da arte e da matemática.

Dentre os conceitos matemáticos que transcendem os limites do abstrato e encontram morada na beleza concreta da natureza, destaca-se a proporção áurea, que também ficou conhecida como o número de ouro, é bastante conhecida entre matemáticos e estudiosos como sendo o representante matemático da perfeição na natureza, pois aparece em quase todos os lugares. De uma forma mais sucinta a proporção áurea é um “fenômeno” que consideramos agradáveis aos olhos Os gregos antigos, em particular, têm sido associados à proporção áurea. O matemático grego Euclides, por volta de 300 a.C., descreveu a proporção em sua obra "Os Elementos". No entanto, a proporção áurea já era conhecida e utilizada por culturas anteriores, como os egípcios e os babilônios.

Segundo Leopoudino (2016, p.15) “conhecido desde a Antiguidade, o Número de Ouro recebeu títulos honoríficos no século XIX como número áureo, razão áurea e seção áurea; no século XVI chegou a ser chamado de Proporção Divina, [...]”, ocasionalmente, proporção áurea. ”

Além da matemática, outro campo que explora a proporção áurea de forma notável é a fotografia. Em princípio, pode-se dizer que a fotografia é a exposição e captura da luz, pois o registro fotográfico se dá apenas com sua presença, em um ambiente iluminado artificial ou naturalmente. Além disso, o que vemos na própria fotografia é o reflexo da luz nos objetos ou cenários que compõem toda a imagem.

A origem da palavra, em latim “photo” significa luz e “graphein” significa desenho. Ou seja, podemos até entender que a fotografia também tem o significado de “reprodução do que o olho humano vê através da luz”. Um ótimo exemplo disso é o tão famoso Mito da Caverna de Platão, que é uma metáfora filosófica que descreve pessoas acorrentadas em uma caverna, vendo apenas sombras projetadas na parede. Elas acreditam que as sombras são a realidade. Quando um prisioneiro é libertado e descobre o mundo exterior, percebe que as sombras eram ilusões. Ele tenta compartilhar o conhecimento com os outros prisioneiros, mas eles não acreditam nele. O mito simboliza a busca pelo conhecimento, a distinção entre aparência e realidade e a resistência à mudança e à verdade. É uma alegoria importante na filosofia de Platão..

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 GERAL

Propor aos futuros professores sobre como o estudo sobre a proporção áurea por meio da fotografia pode ser utilizado como didática para uma turma de ensino médio.

### 2.2 ESPECÍFICOS

- Identificar como a fotografia pode ser utilizada para ensinar a proporção áurea;
- Analisar a percepção de futuros professores sobre a fotografia e o ensino da proporção áurea.

### 3 FOTOGRAFIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A relação entre Arte e Matemática é um tema importante que vem ganhando destaque tanto na produção artística quanto no campo educacional, temos como referência, a dissertação “Matemática e Arte: Uma associação possível” de Helena Antoniazzi. É evidente que muitos artistas ao longo da história utilizaram conhecimentos matemáticos de maneira consciente ou inconsciente na criação de suas obras. Alguns exemplos notáveis incluem Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Wassily Kandinsky, Piet Mondrian, Maurits Cornelis Escher e István Orosz, que exploraram temas como proporção áurea, geometria projetiva, formas geométricas em pinturas abstratas, tesselações, pavimentações e anamorfoses. Além disso, educadores matemáticos têm utilizado a Arte como uma ferramenta para trazer novas perspectivas e conhecimentos em Matemática para o contexto educativo, como o uso da música, teatro, artes visuais e múltiplas linguagens.

No contexto educacional, a Matemática enfrentou desafios com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM) na década de 1960, que adotava um modelo de ensino tradicionalista e descontextualizado, afastando os estudantes do conhecimento. Para superar essa abordagem, emergiram tendências em Educação Matemática como a Etnomatemática e a Modelagem Matemática, que buscavam uma maior integração com questões sócio-étnico-culturais e uma abordagem mais crítica e significativa do ensino de Matemática.

Diante desse cenário, os estudos sobre a proporção áurea na fotografia assumem relevância. Franco Amaury (2021) desenvolveu uma proposta didática para o Ensino Médio, utilizando a proporção áurea como conceito matemático central e empregando fotografias feitas pelos próprios estudantes como ferramenta de ensino. A atividade proposta foi dividida em sete momentos, incluindo o uso de plataformas como o Instagram para tornar o conteúdo mais atrativo, mas sempre focando no aprendizado matemático associado à fotografia.

Já o trabalho das autoras Brito e Dalcin (2022) teve como objetivo explorar conceitos matemáticos através da leitura de imagens fotográficas. Elas propuseram cinco atividades para desenvolver com os estudantes, abordando temas como

progressão geométrica em máquinas fotográficas, a função do diafragma de lentes, conceitos de homotetia e perspectiva, entre outros. Essas atividades visam ampliar o conhecimento dos estudantes sobre os processos fotográficos e como a Matemática está presente nessa prática.

Por sua vez, a autora Camargo (2020) realizou uma pesquisa qualitativa sobre como estudantes relacionam conceitos matemáticos com técnicas fotográficas. Seu estudo foi conduzido em um curso de fotografia digital para iniciantes, onde foi possível observar e analisar como os conceitos de proporcionalidade, simetria, ângulos e perspectivas são aplicados na fotografia e como isso influencia a percepção dos alunos sobre a matemática na vida cotidiana.

Esses estudos são importantes para o estudo da Proporção Áurea na Fotografia porque evidenciam a relevância de conectar a Matemática com outras áreas, como a Arte e a Fotografia. Ao utilizar a proporção áurea como um conceito central, o estudo proposto busca despertar o interesse dos estudantes, mostrando-lhes como a matemática está presente em seu cotidiano, especialmente em uma área que eles se identificam e que faz parte de sua cultura visual. Através dessas abordagens interdisciplinares, o estudo visa oferecer uma experiência de aprendizagem mais significativa e motivadora, aproximando os estudantes da Matemática e promovendo uma visão mais ampla e crítica sobre o conhecimento matemático em contextos reais, como por exemplo, na proporção áurea.

## 4 PROPORÇÃO ÁUREA

A proporção áurea como já falamos é algo que deixa aquilo que estamos vendo mais agradável aos olhos, os fotógrafos por exemplo utilizam disso como uma técnica para que suas fotos fiquem mais bonitas aos olhos do público.

Para Huntley (1985), foi sugerido no século XX que a letra grega  $\phi$  a letra inicial do nome de Fídias fosse adotada para nominar a razão áurea. E quem deu essa ideia de homenagear Fidias segundo Contador (2007, p.86) e Lívio (2008 apud Oliveira e Ferreira, 2010 p.65) foi de Mark Barr, um matemático americano.

De acordo com Lívio (2008 apud Oliveira e Ferreira, 2010, p.65):

A fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido bases de sua ubiqüidade e seu apelo. De fato, provavelmente, é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do qualquer outro número na história da matemática

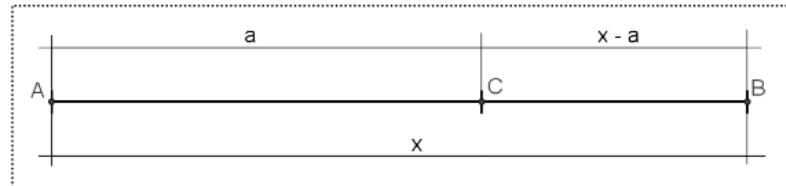
Acreditava-se também que a proporção áurea era alguma “mensagem de Deus” por estar presente em muitos lugares da natureza, e para Huntley (1985, p.36) “era um símbolo do universo”, ele afirmou isso sobre o dodecaedro, que fez com que os gregos dessem um significado especial a figura em que suas doze faces representavam os doze signos do zodíaco.

Como aponta Lívio (2011 apud Leopoudino, 2016, p.10):

“embora a descoberta deste número seja atribuída aos pitagóricos, a definição acima, que mais tarde se tornou conhecido com a razão áurea, foi dada por volta de 300 a.c., pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria (330 a.c.)”.

A primeira definição da proporção áurea foi dada no livro “Os Elementos” de Euclides de Alexandria, livro VI. Euclides a denominou de “razão extrema e média”, que segundo Alonso (2017, p. 30) foi assim definida: “Um segmento de reta diz-se dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior do segmento é igual à razão entre o maior e o segmento todo.”

Figura 1 – Proporção áurea representadas por retas



Fonte: O número de ouro e a proporção áurea: harmonia e beleza na matemática da vida

Com a definição de Euclides de “razão extrema e média” podemos obter a equação:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{x-a} \Leftrightarrow a^2 = x^2 - xa \Leftrightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$$

Ao resolver esta equação quadrática, teremos as seguintes raízes:

$$X' = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \text{ e } X'' = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2}$$

A segunda será descartada por conveniência, pois a Geometria não admite medidas negativas.

O número  $\frac{(1 + \sqrt{5})}{2} = 1,6180339887 \dots$  é o número de ouro que é irracional

Ou seja, dado um segmento, podemos obter seu segmento áureo interno e também o seu segmento áureo externo.

E um matemático que teve importante participação para a proporção áurea, segundo Contador (2007) foi Leonardo de Pisa (1175–1250) mais conhecido como Leonardo Fibonacci. Ficou conhecido pela chamada Sequência de Fibonacci que levou seu nome, apresentada no Liber Abaci como resposta para um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos”, que era o seguinte:

Uma população de coelhos cresce de acordo com o seguinte modelo:

- no primeiro mês há apenas um casal de coelhos;
- os casais se reproduzem apenas no segundo mês de vida;
- todo mês, cada casal com pelo menos dois meses de vida tem um casal de filhos;

- os coelhos nunca morrem.

Assim, se  $f_n$  é o número de casais no início mês  $n$ , obtemos, de maneira recursiva,

$$F_n = F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Os primeiros números da sequência são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... e seus termos têm diversas propriedades interessantes. Por exemplo, dois termos consecutivos são sempre relativamente primos e o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$  é a razão áurea  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ou seja, a razão entre dois números consecutivos de Fibonacci, aproxima-se cada vez mais de  $\varphi$ , à medida que  $n$  aumenta. Ou seja,  $\frac{F_{n+1}}{F_n} \cong 1,618 \dots$

Partindo então para a formulação de Euclides da razão extrema e média, que foi posteriormente estudada por Eudoxo de Cnido (um matemático grego que viveu de cerca de 408 a 355 aC) de acordo com Martins (2008), a teoria das proporções e descobriu as propriedades do retângulo, que mais tarde ficou conhecido como retângulo áureo ou retângulo de ouro.

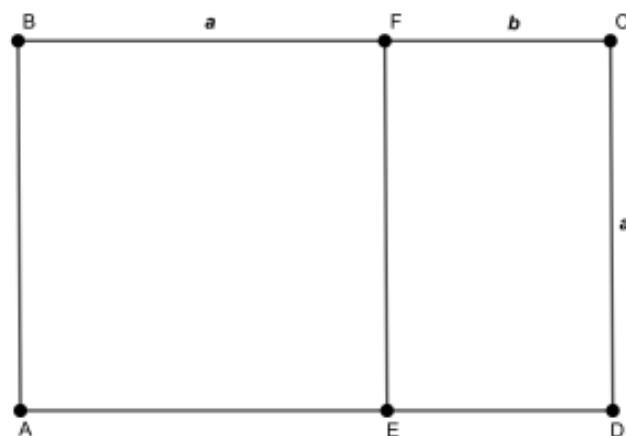
O retângulo áureo é um objeto que, segundo os cientistas, se desenvolveu e ainda tem tanto prestígio por sua regularidade e harmonia. Este retângulo é utilizado como base para diversas áreas do conhecimento humano como arquitetura, arte, e também é encontrado na natureza através da sequência de Fibonacci. No retângulo áureo, a razão entre o lado mais longo e o lado mais curto resulta no número  $\varphi$ .

O retângulo áureo está inteiramente ligado à proporção áurea, ou seja, a divisão em proporção média e extrema (Ávila, 2018). O retângulo é, portanto, apenas uma das maneiras de usar a proporção áurea.

#### 4.1 CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO

Qualquer retângulo ABCD, Figura 3, com a seguinte propriedade é chamado de retângulo dourado: se dele retirarmos um quadrado, por exemplo ABFE, o retângulo restante, CFED, será semelhante ao retângulo original.

Figura 2 – Retângulo áureo



Fonte: Franco, Amaury (2021)

Se  $a+ba$  e  $a$  são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição do retângulo áureo significa:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Determinamos um retângulo dourado de qualquer quadrado. E desta forma vamos listar alguns pontos:

- Considere um quadrado ABCD e no segmento CD tome M como seu ponto médio. Então,

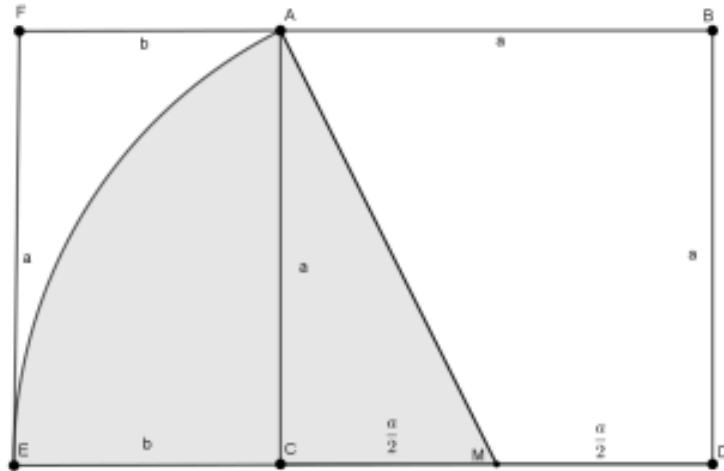
$$CM = MD;$$

- Em seguida, assista ao segmento AM;
- Com o compasso fixo no ponto M, desenhe um arco de comprimento MA. Marque E para a intersecção deste arco com a semirreta que contém MC;

- Trace por E uma linha perpendicular à base do quadrado (linha CD). Mais tarde, denotamos F a interseção desta linha reta com o raio SBA;

Dessa forma, podemos observar todos os caminhos tomados, como mostra a Figura 4.

Figura 3 – Retângulo áureo



Fonte: Franco, Amaury (2021)

Afirmamos que o retângulo obtido é um retângulo áureo. De fato, para verificar se o retângulo BEFD é de fato áureo, observe que, por construção,

$$MA = ME = \frac{a}{2} + b.$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo MAC, temos:

$$\text{Equação (1)} \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = \text{Equação (2)} a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

Assim,

$$b^2 + ab = a^2 \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

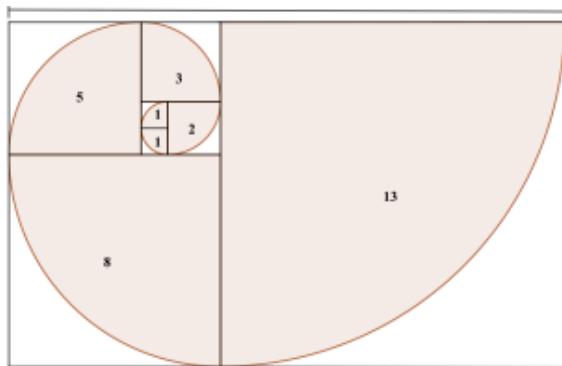
Logo, EFBD é Áureo. Nota-se que as equações (1) e (2) são iguais, ou seja, obtivemos o Número de Ouro.

## 4.2 ESPIRAL ÁUREA

Outro objeto de estudo dentre a proporção áurea é a espiral áurea, que se sabe que a proporção entre os números sucessores e predecessores na sequência de Fibonacci se aproxima gradualmente do número  $\varphi$ . Assim, na Figura 5 podemos observar que um retângulo construído de quadrados em que as medidas dos lados desses quadrados são números de Fibonacci forma um retângulo áureo, pois a razão entre seus lados se aproxima de seu crescimento mais próximo do número  $\varphi$ .

Por esse mesmo retângulo, a partir da origem dos quadrados, quando seus arcos concêntricos passam pelos pontos de divisões sucessivas entre os quadrados, encontramos uma espiral, como mostra a figura 5.

Figura 4 – Retângulo Áureo e a Espiral Áurea



Fonte: Franco, Amaury (2021)

Figura 5 – Nautilus Marinho



Fonte: Ferrer (2005)

Esta espiral é conhecida como a Espiral Áurea ou Digital de Deus (porque está presente em estruturas naturais) ou uma Espiral Logarítmica. Podemos ver esta espiral no nautilus, este é um molusco que tem uma concha em forma de espiral, como mostrado na Figura 5.

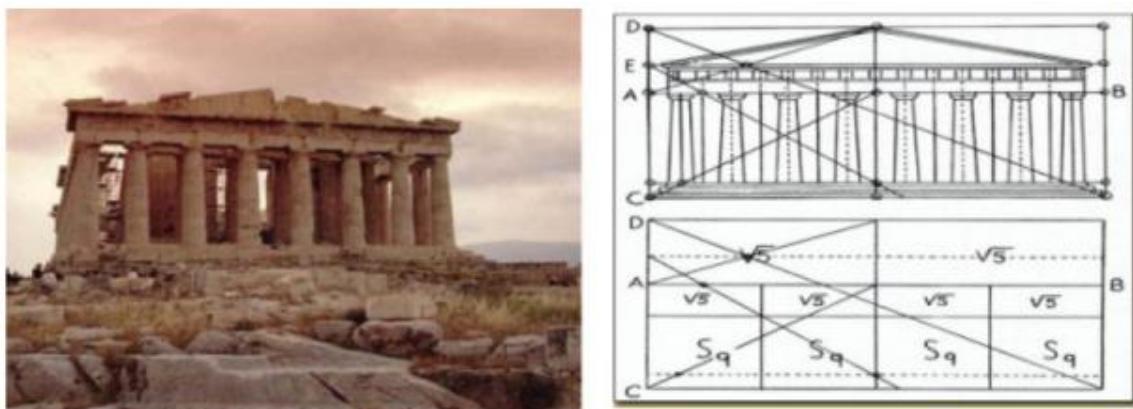
Através de todo esse estudo sobre a proporção áurea podemos observar alguns âmbitos em que ela é aplicada. Com a dinâmica de organização dos objetos naturais, a proporção áurea já foi encontrada por diversas partes de diversas áreas, criando formas de extraordinária beleza. Sendo assim, não é difícil encontrar exemplos da presença da proporção áurea, pois sua existência se estende na

natureza, em uma simples planta até a galáxia; segundo Lívio (2008), “a atratividade do número de ouro origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera”.

Dessa forma, o homem passou a utilizar a proporção, como um dos exemplos, temos a arquitetura que de acordo com Contador (2007), os arquitetos buscam a beleza tanto estética quanto harmônica, através da matemática ou da geometria em várias proporções da natureza e do corpo humano.

Para retratar a utilização da proporção na arquitetura, apresentamos o Partenon, na Figura 7, que embora muitos arquitetos tenham usado a proporção áurea em outras construções, é o exemplo mais comentado e que de certa forma, desempenha grande relevância para a história. E dessa forma, o Partenon é um dos monumentos mais importantes da antiga civilização grega. Construído entre os anos de 447 a. C. e 432 a. C. e situado na Acrópolis, uma montanha no centro da cidade de Atenas.

Figura 6 – Partenon Grego



Fonte: Dias (2015)

Dedicado à deusa Atena, o Partenon, segundo Costa (2008, p. 194), caracteriza-se pela ideia de beleza e simetria do retângulo dourado. Ainda hoje, este monumento é um dos exemplos que evidenciam o conhecimento em geometria dos matemáticos e arquitetos gregos da época.

Portanto, essa noção simétrica é estabelecida pelo uso de um retângulo dourado quase exato em sua frente. No entanto, não há evidências históricas de que

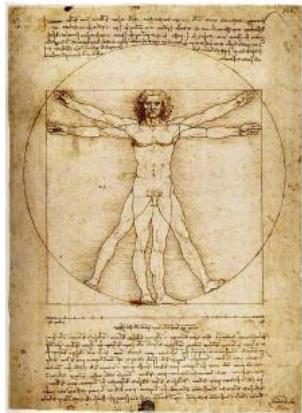
os arquitetos de Péricles tenham usado conscientemente o retângulo dourado quando foi construído.

Segundo Ferrer (2005), essa estrutura foi encomendada a uma equipe de arquitetos e artistas liderada pelo escultor Fídias (ou Fídeas). Fídias era conhecido por usar a proporção áurea em suas obras, e por isso muitos historiadores acreditam que a construção do Partenon não poderia ter sido diferente.

Partindo para a parte da arte, esta relação entre ambas existe e sempre existiu, pois assim é possível explicar o realismo, a perfeição e sentir a beleza do passado que ainda persiste no presente (Contador, 2007). Desde os tempos antigos, a proporção áurea tem sido usada na arte. Com uma busca persistente pela beleza e perfeição. Seu uso é frequente em pinturas renascentistas, das quais se destaca Leonardo da Vinci (1452 a 1519).

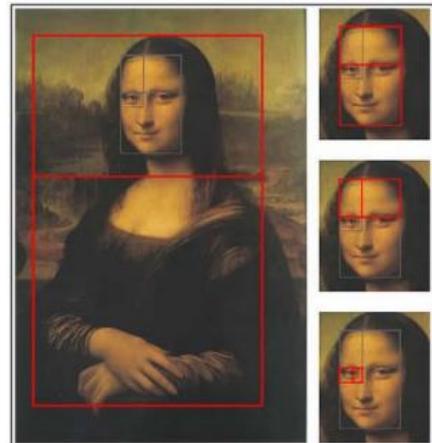
A ilustração de Leonardo da Vinci para o livro "De Divina Proportioni" do monge Luca Pacioli mostra as relações geométricas entre o homem e o universo. O chamado "homem vitruviano", como podemos ver na Figura 8, ilustra perfeitamente as medidas do corpo humano, em que a proporção de suas medidas se aproxima da proporção do número  $\varphi$ , tais como: a proporção entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio, medida do cotovelo até a ponta do dedo médio; a relação entre a altura do indivíduo e a altura do umbigo; relação entre a altura do quadril e a altura do joelho; a relação da medida cintura-cabeça para a medida cintura-peito, entre outras possíveis razões a serem analisadas nesta arte que se aproxima da proporção áurea.

Figura 7 – O homem Vitruviano  
desenhado por Da Vinci  
em um bloco de notas.



Fonte: Oliveira e Ferreira (2010)

Figura 8 – Os retângulos áureos na quadro  
Mona Lisa.



Fonte: Matemática Planetária (2009)

## 5 METODOLOGIA DA PESQUISA

A pesquisa se enquadra mais em qualitativa, que segundo Bodgan e Biklen (1982) “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”, pois prioriza a coleta de observações e reflexões dos participantes durante a análise das fotografias. Essa abordagem busca entender as percepções individuais e coletivas dos participantes sobre a proporção áurea na fotografia.

E a escolha desse grupo, que foram de futuros professores de Licenciatura em Matemática da UFPE da turma de Metodologia do Ensino da Matemática 3, que ao total se deram 9, foi devido entendermos que como futuros professores é altamente relevante eles entenderem este assunto para poderem repassar em sala de aula, considerando que nosso TCC está voltado para a área da Matemática e tem como tema a proporção áurea na fotografia que pode ser uma ferramenta de didática pertinente em sala de aula. A atividade proposta está diretamente relacionada com o conteúdo estudado e explorado, o que torna a vivência ainda mais significativa para os participantes. Com isso pensamos numa proposta que demos o nome de: Oficina de Exploração da Proporção Áurea na Fotografia

Esta atividade consiste em uma oficina na qual os participantes tiveram a oportunidade de explorar conceitos da proporção áurea na fotografia por meio de análise de imagens e produção fotográfica.

Descrição da Atividade:

**1º Momento:** A atividade começa com uma pergunta simples “1º) O que é a proporção áurea? ”, logo após breve apresentação do tema “A proporção Áurea na Fotografia”, com foco na área da matemática e na proposta didática para a sala de aula que consiste da seguinte forma:

Nesta proposta metodológica demonstramos como a proporção áurea e a fotografia podem ser abordadas em sala de aula, com o objetivo de apresentar conteúdos matemáticos relacionados a uma atividade que todos conhecem, a

fotografia. Em relação ao número de ouro, Landin (2014) observa que “dificilmente é trabalhado no Ensino Médio e, em alguns casos, é pouco trabalhado no ensino superior, inclusive alguns graduados em Matemática nunca estudaram algo sobre este número na graduação”

1º parte: Apresentar e explicar a proporção áurea, as aplicações que se destacaram ao longo dos anos na arte, arquitetura, fotografia, design e descoberta na natureza, de uma forma que os alunos possam fazer conexões sobre esse tema e entender melhor o desenvolvimento da atividade, ou seja, entender essas relações em geral.

Em seguida fazer um questionário com as seguintes perguntas:

1. Conseguiram observar a proporção áurea e a matemática no mundo a volta de vocês?
2. Quais as dificuldades tiveram ao aproximar a proporção áurea e a fotografia?
3. O que o conteúdo matemático motivou na composição das fotos?

2º parte: Sugerir que os alunos verifiquem se há proporção em determinados objetos, explicar que pode ser considerado qualquer material encontrado no seu cotidiano, ou seja, o que estiver disponível para o aluno (por exemplo, a tela de uma TV; tela de um celular; um caracol por meio da espiral áurea; uma calculadora e etc). Explicar que se a razão se aproximar do número 1,61... existe a proporção áurea. O objetivo é despertar o interesse dos alunos para que eles possam se indagar e procurar diversos objetos que provavelmente verificará a proporção áurea seja na natureza ou não.

3º parte: Por fim, sugerir a construção de um retângulo áureo proporcional ao tamanho das telas dos celulares dos alunos, utilizando papel A4, caneta/lápis e um compasso. Com um pedaço de plástico transparente (acetato) que pode ser encontrado em papelaria e um pincel permanente, fazer a transposição da construção do retângulo áureo para o pedaço de acetato, que ao ser finalizado, será colocado com o auxílio de uma fita adesiva na tela do celular, e dessa forma os alunos terão referência na hora de tirar as fotos buscando a composição por meio da proporção áurea.

Com isso evidenciando sobre a importância da proporção áurea na estética fotográfica e como essa temática pode ser abordada no contexto do ensino de Matemática.

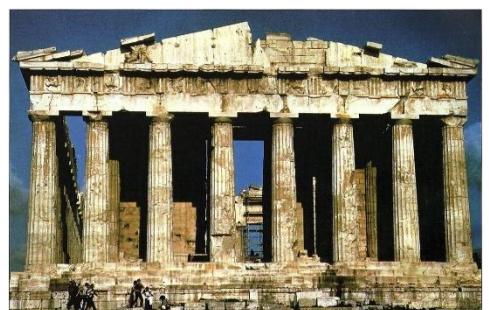
**2º Momento:** Foram distribuídas algumas fotografias impressas que utilizam a proporção áurea em sua composição. Então os participantes terão que observar atentamente as imagens e identificar elementos que seguem a proporção áurea, tais como linhas de enquadramento, posicionamento de objetos, e outras características.

Figura 9 – Caracol na Natureza



Fonte: Áurea Fotográfica(2021)

Figura 10- Parthenon



Fonte: Geoffrey H. Baker(2004)

Figura 11 – A última ceia



Fonte: Arte&Artistas

Figura 12 – Escadaria Bramante



Fonte: Jornal da Fronteira

**3º Momento:** Uma roda de conversa para que os participantes compartilhem suas observações e reflexões sobre a utilização da proporção áurea nas fotografias analisadas. E uma discussão sobre como esse conceito matemático contribui para a estética e a composição das imagens.

E suas percepções de como essa experiência pode influenciar suas práticas como futuros professores de Matemática.

Para analisar a vivência do grupo com essa atividade fizemos da seguinte forma:

**Registro das Observações:** Um registro das observações e reflexões dos participantes durante as análises das fotografias. Com os principais pontos discutidos e as percepções individuais e coletivas.

Nesse processo, os participantes expressaram o que viram em relação à proporção áurea nas imagens por meio de conversas ou discussões. Essas observações verbais capturaram os principais pontos discutidos e as percepções tanto individuais quanto compartilhadas pelos participantes, sem a necessidade de um documento formal escrito. Essa abordagem permite a coleta de informações de maneira direta e imediata, facilitando a compreensão das interpretações sobre o uso da proporção áurea na fotografia.

**Diagnóstico de Avaliação:** Um questionário contendo, além da primeira pergunta no início da atividade, as seguintes perguntas para coletar o feedback dos participantes sobre a atividade.

2º) Como você entende a relevância da proporção áurea na estética fotográfica?"

3º) De que forma essa vivência pode contribuir para o seu trabalho como futuro professor de Matemática?

4º) Você considera que a abordagem da proporção áurea na fotografia pode ser uma estratégia didática interessante no ensino de Matemática?

Os participantes responderam a este questionário após terem adquirido conhecimento sobre o assunto abordado e compreendido a abordagem metodológica utilizada. Suas respostas refletiram suas percepções e avaliações após a experiência

da atividade, considerando o conteúdo e a metodologia compartilhados durante a oficina. O questionário visou fornecer informações valiosas para avaliar a eficácia da abordagem e a compreensão dos participantes em relação ao tópico discutido.

## 6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Organizamos o capítulo da seguinte forma: inicialmente apresentamos a descrição dos licenciandos, que são nossos entrevistados, em seguida, o resultado do questionário em que na primeira seção sobre as perguntas temos o entendimento deles sobre a proporção áurea, e por fim o que eles entenderam após a didática apresentada para eles e se é importante ser usada no ensino médio na visão deles, como futuros professores.

### 6.1 DESCRIÇÃO DOS ENTREVISTADOS

Tivemos presentes 9 participantes da coleta de dados, que se deu através de um questionário com 4 perguntas, todos Licenciandos de Matemática da UFPE, Campus Agreste de Caruaru, e participantes da turma de Metodologia do Ensino da Matemática 3.

### 6.2 O QUE ENTENDEM SOBRE A PROPORÇÃO ÁUREA

Aqui temos as respostas sobre o entendimento prévio sobre a proporção áurea, se eles já tinham ouvido falar, se sabiam conceituar e o que eles achavam que era. A pergunta se dava da seguinte forma “Você já ouviu falar sobre a proporção áurea? Se sim, o que você entende sobre?”

**Licenciando 1:** Já. Não lembro bem, sei que é um padrão geométrico encontrado na natureza.

**Licenciando 2:** Sim, já ouvi. Mas não lembro o que é.

**Licenciando 3:** Tenho a impressão que já ouvi, mas não lembro. Pelo nome acho que tem relação com proporção de áreas.

**Licenciando 4:** Sim, não lembro ao certo, mas creio que se relaciona com o que torna alguma “imagem” agradável aos olhos.

**Licenciando 5:** Sim, pelo o que eu lembro é uma proporção onde a área de um determinado objeto ou figura se expande em uma razão, chamado de o número de Deus. Representado nas conchas dos caracóis, nas pétalas de rosas e no universo.

**Licenciando 6:** Já ouvi falar sobre a proporção áurea, porém não lembro para poder conceituar.

**Licenciando 7:** Sim. Não lembro muito, mas creio que é chamada de número de ouro.

**Licenciando 8:** Sim, trata-se de um conceito de beleza.

**Licenciando 9:** Já ouvi falar sobre proporção áurea, vi inclusive vários vídeos sobre. O que eu entendo é que existe determinada proporção na qual está presente na maior parte das proporções da natureza, por isso algumas pessoas a chamam de número de Deus.

Através da análise inicial deste questionário, percebemos que todos os participantes possuem algum nível de conhecimento prévio acerca da proporção áurea, ainda que, em muitos casos, precisem de uma definição formal ou não se recordem com precisão de sua natureza. Além disso, as respostas revelam uma convergência parcial com as definições tradicionalmente atribuídas à proporção áurea, exemplificada, por exemplo, pela alusão ao "número de ouro" ou "número de Deus" como o elemento responsável por conferir apelo estético às imagens. Paralelamente, algumas respostas também estabelecem uma conexão entre a proporção áurea e a naturalidade, enriquecendo a compreensão dessa relação conceitual.

### 6.3 RESULTADOS DA APRESENTAÇÃO DA OFICINA

A apresentação da oficina aos licenciandos foi altamente bem recebida. Eles demonstraram entusiasmo, interagiram de forma ativa e mostraram interesse genuíno pelo tema. As discussões que surgiram durante a oficina evidenciaram o envolvimento profundo dos participantes. Além disso, eles se interessaram pela abordagem metodológica da oficina e consideraram sua aplicação prática no ensino, o que é promissor para futuros professores. Em resumo, podemos dizer que a resposta positiva dos licenciandos à oficina destaca sua eficácia em estimular a reflexão crítica e o interesse pelo tema.

## 6.4 RESULTADOS APÓS A APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nesta seção temos o resultado do questionário com as perguntas relacionadas a se eles entenderam após a didática apresentada para eles, e se é importante ser usada no ensino médio na visão deles, como futuros professores.

O segundo questionamento era o seguinte: “ Como você entende a relevância da proporção áurea na estética fotográfica? ”

**Licenciando 1:** Percebo que há uma descentralização do objeto principal da fotografia além da atribuição de um contexto ao qual aquele objeto está inserido.

**Licenciando 2:** É importante para enquadrar.

**Licenciando 3:** Entendo o que é relevante e que segue uma cultura das representações artísticas.

**Licenciando 4:** Ela emprega uma beleza a mais na fotografia, juntamente com o posicionamento.

**Licenciando 5:** Pra deixa-la mais bela.

**Licenciando 6:** Como algo essencial para transmitir a beleza da fotografia.

**Licenciando 7:** É algo fantástico, pois acrescenta beleza nas fotografias. Consegue trazer destaque para pontos que o fotógrafo deseja focar.

**Licenciando 8:** A partir dela pode se procurar a beleza estética perfeita pois fotografias que seguem a proporção áurea tendem a ser esteticamente mais bonitas.

**Licenciando 9:** Ela ajuda na proporcionalidade da fotografia e imagem e como é considerada bela, as fotografias também seriam ou poderiam ser vistas de certa forma.

No segundo questionamento eles evidenciam a parte em que a proporção áurea enfatiza mais a beleza, da mais foco e destaque, da mais proporcionalidade e estética e traz representações artísticas. Em resumo, as respostas destacam que a proporção áurea é vista como uma ferramenta fundamental na fotografia para criar imagens visualmente atraentes, direcionar o olhar do espectador e inserir objetos em um contexto significativo. Também indicam uma compreensão da relação entre a proporção áurea, a cultura artística e a matemática subjacente à proporção. Essas

respostas fornecem uma visão abrangente de como os licenciandos percebem a importância da proporção áurea na fotografia.

O terceiro questionamento era o seguinte: “ De que forma essa vivência pode contribuir para o seu trabalho como futuro professor de Matemática? ”

**Licenciando 1:** Diante da diversidade existente em sala de aula é necessário conhecer múltiplas formas de abordagem dos conhecimentos matemáticos.

**Licenciando 2:** Como inspiração para trazer mais ludicidade para a sala de aula.

**Licenciando 3:** É importante, pois aumenta nossos conhecimentos e isso ajuda para a construção profissional.

**Licenciando 4:** É um conhecimento a ser empregado em sala de aula, mostrando aos alunos diferentes pontos de vista, acerca da matemática.

**Licenciando 5:** Para mostrar o quanto matemática é bela e está presente no cotidiano.

**Licenciando 6:** Para que eu consiga enxergar a beleza da matemática em algo cotidiano, sob outra ótica.

**Licenciando 7:** Pode trazer para o aluno esses questionamentos, como vivemos em um mundo digital e conectado isso certamente chamará a atenção dos estudantes.

**Licenciando 8:** Podemos com professores, apresentar a sequência de Fibonacci para instigar os alunos a procurarem saber melhor do tema, já que é algo interessante. Pode também fazer com que os alunos comecem a procurar a proporção na natureza.

**Licenciando 9:** Trazendo a matemática para o cotidiano através dessa proporção, mostrando figuras de vários âmbitos em que utiliza a proporção e assim demonstrar que a matemática está em coisas que nem imaginamos.

Neste terceiro questionamento eles evidenciam mais a parte da diversidade do ensino, da ludicidade e inspiração, da beleza matemática e relevância cotidiana, com isso fazendo com que os alunos se tornem mais engajados. Essas respostas indicam uma compreensão sólida da importância da diversificação no ensino da matemática para o sucesso da educação matemática e o desenvolvimento dos estudantes.

Segundo Thies (2013), o ensino não acontece sem que professor disponha de materiais didáticos para trabalhar diferentes conceitos.

O quarto e último questionamento era o seguinte: “ Você considera que a abordagem da proporção áurea na fotografia pode ser uma estratégia didática interessante no ensino de Matemática? ”

**Licenciando 1:** Sim. Pois a fotografia faz parte do interesse de muitos jovens.

**Licenciando 2:** Sim. A fotografia e outros temas que conseguimos relacionar com a matemática são estratégias boas para sala de aula. Normalmente o aluno demonstra mais interesse ao saber que o assunto se relaciona com algo do cotidiano.

**Licenciando 3:** Sim, pois os estudantes sempre buscam por representações menos abstratas e próximas do concreto.

**Licenciando 4:** Considero, pois é uma abordagem interessante acerca da matemática no dia a dia.

**Licenciando 5:** Sim. Sugestão: pedir para eles trazerem fotografia do seu dia a dia que se encaixe na sequência ou que foi baseado nela.

**Licenciando 6:** Sim, porque o estudante começa a observar algo que seria como em seu cotidiano, no caso, a fotografia de uma ótica diferente, observando geometricamente a beleza da fotografia.

**Licenciando 7:** Sim. É uma proposta legal e bem fácil de ser trabalhada em sala.

**Licenciando 8:** Acredito que sim, pois a fotografia sempre foi um tema com alto interesse da população, principalmente entre os jovens devido as redes sociais. Além disso, pode mostrar através de um assunto popular que além da fotografia a proposição pode estar em outros lugares.

**Licenciando 9:** Sim, saindo um pouco do comum dos exercícios e trazer uma atividade mais criativa para ser feita na aula, assim aumentando o interesse dos alunos pela proporção áurea.

Neste quarto e último questionamento eles evidenciam o interesse dos alunos, a relevância do assunto para o cotidiano, as Abstração X Concretude que a fotografia pode servir como uma maneira eficaz de tornar os conceitos matemáticos mais tangíveis e acessíveis e a forma mais atrativa que a fotografia pode trazer a

matemática. Ou seja, as respostas dos licenciandos indicam que eles entendem da importância de usar a fotografia como uma ferramenta para tornar o ensino da matemática mais envolvente, concreto e relevante para os alunos. Eles reconhecem o potencial da fotografia para despertar o interesse dos estudantes e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos por meio de aplicações práticas e criativas.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho consistiu em Propor aos futuros professores da UFPE Campus Agreste de uma turma de Metodologia do Ensino da Matemática 3, sobre como o estudo sobre a proporção áurea por meio da fotografia pode ser utilizado como didática para uma turma de ensino médio.

Quanto aos principais resultados obtidos com a pesquisa, é notório que todos os futuros professores da turma já possuíam, pelo menos, um conhecimento básico sobre a proporção áurea, demonstrando uma conscientização prévia sobre esse conceito. Essa familiaridade prévia com a matéria pode ser vista como um ponto de partida valioso ao implementar a abordagem proposta em sala de aula.

Outro ponto de destaque é a importância que os participantes atribuíram à proporção áurea na fotografia. Os resultados obtidos evidenciam que os futuros professores reconhecem a proporção áurea como uma ferramenta fundamental na fotografia, capaz de criar imagens visualmente atraentes, direcionar o olhar do espectador e inserir objetos em um contexto significativo. Isso realça a aplicabilidade prática deste conceito, ressaltando seu potencial para cativar o interesse dos alunos.

Além disso, nossa pesquisa revelou que os futuros professores possuem uma compreensão sólida da importância da diversificação no ensino da matemática. Este entendimento é crucial, uma vez que indica que os participantes estão cientes da necessidade de adotar abordagens criativas e práticas para promover um aprendizado eficaz da matemática.

E também constatamos que os resultados apontam para o potencial da fotografia como um estímulo didático eficaz. Os participantes reconhecem a capacidade da fotografia como um meio poderoso para despertar o interesse dos estudantes e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Isso sugere que a abordagem proposta neste estudo pode ser altamente eficaz ao vincular o estudo da proporção áurea com aplicações práticas e criativas.

A partir das observações feitas depois dos estudos sobre tais assuntos e enquanto licenciando do curso de Licenciatura em Matemática e enquanto fotografo,

observamos que tais assuntos da Arte e Matemática e a fotografia, abordando a proporção áurea que engloba os dois, poderiam ser de suma importância se usados de forma conjunta para construção e aplicação do meu projeto de TCC.

A partir do apresentado ao longo dessa pesquisa, consideramos que, entre suas possíveis contribuições para o curso de Matemática-Licenciatura, está o aprimoramento a formação dos futuros professores de Matemática-Licenciatura. Como sua criatividade, a inovação, o pensamento crítico e a interdisciplinaridade, capacitando os futuros educadores a fornecer uma educação mais rica e envolvente para os alunos do ensino médio. Isso pode ter um impacto positivo na qualidade do ensino da matemática e no desenvolvimento dos estudantes. Quanto às contribuições à formação do pesquisador, podemos citar a compreensão de como outros educadores enxergam a proporção áurea e quanto realmente ela pode ser benéfica para nós licenciandos de Matemática.

Considerando o que foi apresentado, e reconhecendo que este estudo não esgotou as discussões sobre a relação entre a proporção áurea e a fotografia e seu uso como ferramenta didática na matemática, nem pretendia fazê-lo, recomendamos a realização de pesquisas adicionais. Essas pesquisas poderiam incluir análises mais aprofundadas das práticas de ensino adotadas por professores e futuros professores de Matemática, visando identificar o potencial pedagógico dessas abordagens.

## REFERÊNCIAS

- ANTONIAZZI, Helena. MATEMÁTICA E ARTE: UMA ASSOCIAÇÃO POSSÍVEL. Disponível em: <https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3033/1/000339892-Texto+Completo-0.pdf> Acesso em: 05 Out. 2022
- BRITO, Arlete; DALCIN, Andreia. Fotografia no ensino de matemática: algumas possibilidades Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/download/6/6/7>
- CAMARGO, Daiane. “FOTOMATIZANDO”: Conexões entre fotografia e matemática nos anos finais do ensino fundamental de uma escola municipal de Pelotas/RS Disponível em: [https://guaiaca.ufpel.edu.br/bitstream/handle/prefix/6402/Dissertacao\\_Daiane\\_de\\_Jesus\\_Vieira\\_Camargo.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://guaiaca.ufpel.edu.br/bitstream/handle/prefix/6402/Dissertacao_Daiane_de_Jesus_Vieira_Camargo.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- FRANCO, Amaury. A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO. Disponível em: <https://repositorio.ifgoiano.edu.br/handle/prefix/2004> Acesso em: 05 Ago. 2022.
- FERRER, Joseane Vieira. O Número de Ouro na Arte, Arquitetura e Natureza: Beleza e Harmonia. 2005 Disponível em: [https://www.academia.edu/download/37312951/numero\\_de\\_ouro.pdf](https://www.academia.edu/download/37312951/numero_de_ouro.pdf)
- JÚNIOR, Carlos. O que é fotografia?. Fernando Vitolo. Disponível em: <https://fernandovitolo.com.br/o-que-e-fotografia/#top> Acesso em: 06 Out. 2022
- SOARES, Simaria. PESQUISA CIENTÍFICA: UMA ABORDAGEM SOBRE O MÉTODO QUALITATIVO Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/ciranda/article/download/314/348#:~:text=A%20pesquisa%20qualitativa%20ou%20natural%C3%ADstica,14>). Acesso em: 11 Set. 2023
- SANTOS, Edvan; GONÇALVES, Harryson. A Interface entre Arte e Matemática: em busca de perspectivas curriculares críticas e criativas Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/hTWxf5Jf7cHCJ57cHkDc56j/?format=pdf&lang=pt> Acesso em: 11 Set. 2023
- THIES, VANIA GRIM E ALVES, ANTÔNIO MAURICIO MEDEIROS. Material didático para os anos iniciais: ler, escrever e contar. In: Práticas pedagógicas na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental: diferentes perspectivas Editora: FURG, 2013. Disponível em: <https://sead.furg.br/images/cadernos/Novos/Cadernos/Volume016.pdf> Acesso em: 10 Set. 2023