UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

KAÍQUE NASCIMENTO AZEVEDO DA SILVA

A FÍSICA E O ÂNGULO POLAR: uma proposta de material didático para facilitar o processo de ensino-aprendizagem sobre os Polinômios de Legendre

Caruaru
2022

KAÍQUE NASCIMENTO AZEVEDO DA SILVA

A FÍSICA E O ÂNGULO POLAR: uma proposta de material didático para facilitar o processo de ensino-aprendizagem sobre os Polinômios de Legendre

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Física do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Física.

Área de Concentração: Ensino de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Heydson Henrique Brito da Silva

Caruaru
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Kaíque Nascimento Azevedo da.
A Física e o Ângulo Polar: uma proposta de material didático para facilitar o processo de ensino-aprendizagem sobre os Polinômios de Legendre. / Kaíque Nascimento Azevedo da Silva. - Caruaru, 2022.
123 p.

Orientador(a): Heydson Henrique Brito da Silva
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Física - Licenciatura, 2022.
Inclui referências, anexos.

1. Ensino de Física Matemática. 2. Equações Diferenciais. 3. Método de Frobenius. 4. Funções Especiais. 5. Polinômios de Legendre. I. Silva, Heydson Henrique Brito da. (Orientação). II. Título.

530 CDD (22.ed.)

KAÍQUE NASCIMENTO AZEVEDO DA SILVA

A FÍSICA E O ÂNGULO POLAR: uma proposta de material didático para facilitar o processo de ensino-aprendizagem sobre os Polinômios de Legendre

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Física do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Física.

Aprovado em: 27/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Augusto César Lima Moreira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Professor Dr. Gustavo Camelo Neto (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Professor Dr. Heydson Henrique Brito da Silva (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria Rivanilza do Nascimento, à minha companheira, Vitória Saron Florencio da Silva, ao meu avô paterno, Luiz Medeiros da Silva e ao grande amigo Miguel Minerva Sobrinho. Todas essas pessoas foram fundamentais para a concretização da minha jornada acadêmica até aqui. Também o dedico a todos aqueles e aquelas que se interessam pela beleza inerente à física e à matemática, este trabalho foi escrito para vocês.

“O Cosmos é tudo que existiu, existe ou existirá. Nossas contemplações do universo, mesmo as mais breves e superficiais, mexem conosco - há sempre um arrepio na espinha, um embargo na voz, uma sensação de fraqueza, como a memória distante da queda de uma grande altura. Sabemos que estamos diante do maior dos mistérios." Carl Sagan (SAGAN, 2017)

"It is impossible to explain honesty the beauties of the laws of nature without some deep understanding of mathematics." Richard P. Feynman (LEMOS, 2013)

“For a physicist mathematics is not just a tool by means of which phenomena can be calculated, it is the main source of concepts and principles by means of which new theories can be created." Freeman Dyson (LEMOS, 2013)

RESUMO

O presente trabalho surgiu a partir da percepção de que, embora os Polinômios de Legendre sejam de suma importância na física, os principais livros didáticos utilizados no curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Pernambuco no Campus Acadêmico do Agreste não trazem uma dedução completa destes polinômios a partir da Equação de Legendre. Tal problemática pode ter diversas origens, desde a ementa da disciplina de Equações Diferenciais do curso que não traz o Método de Frobenius até o fato de que o curso não possui uma disciplina de Física Matemática obrigatória, na qual se estudem às Funções Especiais. Independentemente da origem do problema, uma consequência direta dele é que inúmeros estudantes chegam ao final do curso sem ter nenhum conhecimento dessas funções e de suas origens. Quando estes estudantes se deparam com a necessidade de resolver a Equação de Schröndinger em Coordenadas Polares Esféricas na disciplina de Física Moderna I, que é obrigatória, o aprendizado tende a se tornar tortuoso, tendo em vista que estes estudantes precisarão estudar os conteúdos associados as funções especiais ao mesmo tempo em que precisarão se familiarizar com os conceitos basilares da Teoria Quântica. Algo semelhante ocorre na disciplina de Eletromagnetismo Clássico I, que é eletiva, nela os estudantes precisam aplicar os Polinômios de Legendre ao mesmo tempo em que precisam se familiarizar com os conceitos intermediários da Teoria Eletromagnética Clássica na forma diferencial. Na intenção de resolver estes problemas, foi desenvolvido o presente material didático que faz uma breve revisão do Eletromagnetismo Clássico e da Mecânica Quântica, deduzindo respectivamente a Equação de Laplace para o Potencial Eletrostático e a Equação de Helmholtz para a parte espacial da Função de Onda. A partir destas equações, se realiza uma Separação de Variáveis. Após algumas considerações, se encontra a Equação de Legendre. É apresentado, então, o Método de Frobenius para solução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Polinomiais Singulares, utilizado para solucionar a Equação de Legendre retornando uma solução em série de potências. Por fim, são apresentadas a Forma Canônica de Liouville e a Fórmula Generalizada de Rodrigues, que, quando combinadas à Equação de Legendre, retornam uma série de potências equivalente à encontrada pelo Método de Frobenius, demonstrando assim a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre que é apresentada comumente pelos livros didáticos.

Palavras-chave: Equação de Legendre; Polinômios de Legendre; Teorema de Frobenius, Método de Frobenius; Fórmula de Rodrigues; Polinômios Ortogonais.

ABSTRACT

The present work arose from the perception that, although Legendre's Polynomial are of paramount importance in physics, the main textbooks used on the Degree in Physics at the Federal University of Pernambuco at the Academic Center of Agreste do not bring a complete deduction of these polynomials from Legendre's Equation. This problem can have several origins, from the syllabus of the Differential Equations course that does not include the Frobenius' Method to the fact that the course does not have a mandatory Mathematical Physics course where Special Functions are studied. Regardless of the source of the problem, a direct consequence of it is that many students reach the end of the course without having any knowledge of these functions and their origins. Unfortunately, when these students are faced with the need to solve the Schrödinger's Equation in Spherical Polar Coordinates in the discipline of Modern Physics I, which is mandatory, learning tends to become tortuous, given that these students will need to study the associated contents special functions while at the same time they will need to become familiar with the basic concepts of Quantum Theory. Something similar occurs in the Classical Electromagnetism I, which is elective, where students need to apply Legendre's Polynomials at the same time as they need to familiarize themselves with the intermediate concepts of Classical Electromagnetic Theory in differential form. In order to solve these problems, thepresent teaching material was developed, which makes a brief review of Classical Electromagnetism and Quantum Mechanics, deducing respectively the Laplace's Equation for the Electrostatic Potential and the Helmholtz's Equation for the spatial part of the Wave Function. From these equations, a Separation of Variables is performed, where after some considerations, the Legendre's Equation is found. The Frobenius' Method for solving Ordinary Linear Differential Equations with Singular Polynomial Coefficients is then presented, which is used to solve Legendre's Equation returning a power series solution. Finally, Liouville's Canonical Form and Rodrigues' Generalized Formula are presented, which when combined with Legendre's Equation, return a power series equivalent to that found by the Frobenius' Method, thus demonstrating Rodrigues' Formula for Legendre's Polynomials that is commonly presented by the textbooks.

Keywords: Legendre's Equation; Legendre's Polynomials; Frobenius' Theorem; Frobenius' Method; Rodrigues' Formula; Orthogonal Polynomials.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

1.1 AS LACUNAS NA LITERATURA

A Equação de Legendre é uma equação peculiar de grande papel na história da física, ela “surge naturalmente” em inúmeras situações físicas descritas em um sistema de coordenadas polares esféricas com simetria sobre o ângulo de azimute. Três grandes exemplos são: a solução para a equação que descreve a coordenada polar do potencial dos campos Gravitacional e Eletrostático, ambos na Física Clássica, e a solução da equação para a coordenada polar da Função de Onda do átomo de hidrogênio, na Mecânica Quântica.

O objetivo deste trabalho é trazer ao âmbito do ensino de física uma discussão minimamente aprofundada sobre como é feita a dedução da Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre, que por suas vezes são soluções da Equação de Legendre, sendo essa última uma consequência direta da análise de situações físicas.

A Equação de Legendre surge, na física, em inúmeras situações mas, neste trabalho, trataremos brevemente sobre o Potencial Eletrostático, pertence ao ramo do Eletromagnetismo Clássico, e da Equação de Schröndinger Independente do Tempo, pertencente ao ramo da Mecânica Quântica Moderna. A primeira nos conduz a Equação de Laplace, e a segunda nos conduz à Equação de Helmholtz (ou ainda, à Equação de Difusão, devido a presença de uma derivada temporal de primeira ordem). Ambas são Equações Diferenciais Parciais Homogêneas (Também chamadas de EDPs Homogêneas) e estão diretamente associadas ao Operador Laplaciano.

O Operador Laplaciano, por sua vez, assume diversas formas algébricas a depender do sistema de coordenadas utilizado. Neste trabalho, será utilizado o Sistema de Coordenadas Polares Esféricas. Tal escolha foi feita devido às simetrias exploradas nos ramos da física supracitados e porque este é o sistema que origina, naturalmente, a Equação de Legendre.

Embora, quando em mais de uma dimensão, as Equações de Laplace e de Helmholtz sejam EDPs, é possível utilizar o Método da Separação de Variáveis e obter três Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), onde, devido a escolha do Sistema de Coordenadas Polares Esféricas, uma destas três EDOs será a Equação de Legendre.

A Equação de Legendre, por sua vez, é uma Equação Diferencial Ordinária com Coeficientes Polinomiais contendo Singularidades Regulares, e por isso ela não possui solução em termos de funções elementares, tal qual ocorre nas EDOs com Coeficientes Constantes que geralmente são estudadas na disciplina obrigatória de Introdução à Equações Diferenciais da Licenciatura em Física da Universidade Federal de Pernambuco no Centro Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA). Essa disciplina, porém, não aborda a solução das EDOs com Coeficientes Polinomiais, o que pode ser facilmente verificado observando a ementa curricular da disciplina, disponível no Anexo A (na página 106). Se a disciplina em questão deveria ou não abordar esse assunto é uma discussão que transpassa o intuito deste texto. O fato é que a disciplina não aborda, e posteriormente esse tipo de conhecimento será exigido do estudante ainda no próprio curso, na disciplina de Física Moderna I ao precisar resolver a Equação de Schrödinger em Coordenadas Polares Esféricas.

De fato, tal decisão de abordar ou não esse tipo de EDO varia entre as universidades e seus respectivos cursos. Por vezes, o assunto é suprimido da ementa mas é trabalhado, posteriormente, em disciplinas de Física Matemática ou, até mesmo, nas próprias disciplinas de Física. Infelizmente nada disso ocorreu durante a formação deste que vos escreve.

EDOs com Coeficientes Polinomiais surgem com alta frequência no estudo da física e têm extrema importância para a resolução de problemas importantes. Por isso, acredita-se que os estudantes de física devem estudar esse tipo de EDO, pelo menos uma vez, durante a graduação. Independentemente de se tratar de um curso de licenciatura ou bacharelado, acredita-se que conhecer os detalhes basilares da física clássica e da física moderna é essencial para a formação destes estudantes, tendo em vista que, independentemente de sua habilitação, estes serão físicos e físicas. Em se tratando de estudantes de bacharelado, estes estudantes precisarão conhecer as bases matemáticas e teóricas da física para seguir no ramo da pesquisa teórica e aplicada. E se tratando de estudantes da licenciatura, estes precisão conhecer a física com primazia tão profunda quanto os bacharéis para que possam trazer discussões com clareza e profundidade na sala de aula. Este é o ponto de vista do autor deste trabalho.

Especificamente, para os estudantes da Licenciatura em Física da UFPE-CAA, a Equação de Legendre pode ser encontrada na disciplina obrigatória de Física Moderna I e nas disciplinas eletivas de Eletromagnetismo Clássico I e Mecânica Quântica I. As ementas destas disciplinas podem ser encontradas respectivamente nos Anexos B (na página 110), C(na página 115) e D (na página 119). A depender da decisão do professor, ela também pode ser encontrada na disciplina eletiva de Física Matemática, porém esta disciplina só foi ministrada uma vez na história do curso até o momento e sua ementa não se encontra no PPC. Todos os anexos aqui citados foram retirados do Projeto Político-Pedagógico do Curso (PPC) (FREITAS, 2011), acessado na data de entrega deste trabalha à banca avaliadora.

Felizmente, durante o curso, o autor deste trabalho teve a oportunidade de cursar todas as disciplinas acima citadas, mas, infelizmente, a Equação de Legendre não foi resolvida de forma detalhada em nenhuma delas. O motivo disto, acredita-se, é perfeitamente compreensível. As EDOs com Coeficientes Polinomiais que surgem com frequência na física têm uma resolução longa e com muitos detalhes, de modo que talvez fosse inconveniente resolvê-las em sala de aula, pois isso tomaria muito tempo. Tais soluções possuem muitas propriedades importantes para a física, e talvez esse tempo seja melhor aproveitado estudando tais propriedades.

Nesse contexto, espera-se então que os livros-texto das disciplina se encarreguem de resolver a equação, e por vezes isso ocorre, mas por vezes não. Para melhor detalhar o que se quer dizer, foram avaliadas as formas de apresentação dos Polinômios de Legendre na literatura de Física e de Física Matemática, e as conclusões serão apresentadas a seguir.

No que tange aos livros de Equações Diferenciais, foram analisados os livros *Equações Diferenciais - Volume I*, dos autores Dennis G. Zill e Michael R. Cullen - (ZILL; CULLEN, 2001) -, e *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, dos autores Willian E. Boyce e Richard C. DiPrima - (BOYCE; DIPRIMA, 2010) -, que geralmente são os principais livros utilizados na disciplina de Introdução à Equações Diferenciais pelos professores da disciplina na UFPE-CAA.

Em (ZILL; CULLEN, 2001) a Equação de Legendre é resolvida através do método da Solução em Série de Potências, porém a solução é apresentada apenas como uma série infinita e a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre não é apresentada. Em (BOYCE; DIPRIMA, 2010) a Equação de Legendre é citada, porém não é resolvida, sua resolução e a verificação de suas propriedades são deixadas como exercício para o leitor.

No que tange aos Livros de Física Moderna, foram analisados os livros *Física Moderna* do autor Paul A. Tipler - (TIPLER, 2014) -, *Física Quântica*, dos autores Robert Eisberg e Robert Resnick - (EISBERG; RESNICK, 1979) -, e *Introduction to the Structute of Matter: A Course in Modern Physics* dos autores Jhon J. Brehm e Willian J. Mullin - (BREHM; MULLIN, 1989) -, que geralmente são os livros utilizados nesta disciplina pelos professores da UFPE-CAA.

Nos três livros a equação de Legendre é citada porém não é resolvida. Apenas é apresentada sua solução através da Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre ou da Fórmula de Rodrigues para os Polinômios Associados de Legendre. Vale ressaltar, no entanto, que em *Física Quântica* (EISBERG; RESNICK, 1979) existe a dedução dos Polinômios de Hermite, que tem uma dedução construída pelas mesmas bases matemáticas dos Polinômios de Legendre, feita no Apêndice H do referido exemplar.

No que tange aos livros de Eletromagnetismo Clássico foram analisados os livros *Eletrodinâmica*, do autor David J. Griffiths - (GRIFFITHS, 1999) -, *Classical Electrodynamics*, do autor John David Jackson - (JACKSON, 1998) -, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, dos autores John R. Reitz, Frederick J. Milfod e Robert W. Christy - (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982) -, *Eletrodinâmica Clássica*, do autor José M.

F. Bassalo - (BASSALO, 2007) -, e *Teoria do Eletromagnetismo - Volume I*, do autor Kleber Daum Machado - (MACHADO, 2000) -. Tais escolhas se deram pois são obras frequentemente utilizadas pelos professores que ministram a disciplina na Licenciatura em Física da UFPE-CAA ou porque são obras acessíveis aos estudantes do campus, estando disponíveis na biblioteca da universidade.

Na obra *Eletrodinâmica* (GRIFFITHS, 1999), a Equação de Legendre não é resolvida, sua solução é apenas apresentada como sendo a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre. Em *Classical Electrodynamics* (JACKSON, 1998), a Equação de Legendre é resolvida durante o texto pelo Método de Frobenius até se encontrar uma relação de recorrência para os coeficientes da série. Após isso, são feitos alguns comentários sobre convergência e apresentadas as expressões dos cinco primeiros Polinômios de Legendre. Em seguida, apenas é apresentada a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre.

Na obra *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982) a Equação de Legendre não é resolvida, nem a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre é apresentada. Este livro apenas mostra uma tabela com os quatro primeiros Polinômios de Legendre. Em *Teoria do Eletromagnetismo - Volume I* de (MACHADO, 2000) a Equação de Legendre é resolvida no Apêndice C com uma quantidade razoável de detalhes. A resolução é feita pelo Método de Frobenius até se encontrar uma relação de recorrência para os coeficientes da série. Após isso, a convergência da expressão é testada e são feitos feitos comentários sobre a convergência da série. Depois, são apresentadas as expressões dos seis primeiros Polinômios de Legendre e, em seguida, é apresentada a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre. Por fim, no exemplar de *Eletrodinâmica Clássica* (BASSALO, 2007), os Polinômios de Legendre são brevemente citados na Seção 1.10, mas não são aprofundados, e a Equação de Legendre não é citada.

Em todos estes livros, menos em *Eletrodinâmica Clássica* (BASSALO, 2007), a Equação de Legendre é devidamente obtida a partir do Método da Separação de Variáveis aplicado à Equação de Laplace para o Potencial Eletrostático, na qual o Operador Laplaciano é desenvolvido em um sistema de Coordenadas Polares Esféricas. Na maior parte destes livros, após a apresentação de Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre, a expressão de Rodrigues é utilizada para demonstrar algumas relações de recorrência e também algumas outras propriedades dos Polinômios de Legendre, tais como sua ortogonalidade e, as vezes, sua normalização à unidade.

No que se refere a Mecânica Quântica, foram analisados os livros *Introduction to Quantum Mechanics*, dos autores David J. Griffiths e Darrell F. Schroether - (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018) -, *Principles of Quantum Mechanics*, do autor Ramamurti Shankar - (SHANKAR, 1994) -, e *Quantum Mechanics - Concepts and Aplications*, do autor Noredini Zettilli - (ZETTILLI, 2009) -. Novamente, todos estes livros foram escolhidos pois foram utilizados por professores da Licenciatura em Física da UFPE-CAA.

No livro *Introduction to Quantum Mechanics* (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018) a Equação de Legendre é apresentada mas não é resolvida, apenas se apresenta a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre e uma tabela contendo os seis primeiros polinômios. No livro de (SHANKAR, 1994) os Polinômios de Legendre e os Polinômios Associados de Legendre são citados quando se trata dos autovalores do momentum angular, mas a Equação de Legendre não é citada. No livro de (ZETTILLI, 2009) ocorre algo parecido, quando o livro discute sobre os autovalores do momentum angular a Equação de Legendre é citada, porém não é resolvida, apenas são apresentadas as Fórmulas de Rodrigues para os Polinômios de Legendre e para os Polinômios Associados de Legendre, seguidas de uma tabela contendo os seis primeiros polinômios gerados por cada uma.

Outros livros de Mecânica Quântica também foram analisados, contudo os Polinômios e a Equação de Legendre mal são citados nesse livro. Acredita-se que isso se dá devido a sua natureza mais avançada, tais livros apenas se referem diretamente aos Harmônicos Esféricos. Tal atitude é perfeitamente compreensível, pois já é esperado que um estudante que está cursando uma disciplina de Mecânica Quântica já tenha tido algum contato prévio com as Funções Especiais, pelo menos na disciplina de Eletromagnetismo, por exemplo.

A maioria dos livros de Física quando cita os Polinômios de Legendre nos induz a procurar por algum livro de física matemática. O que faz perfeito sentido, dado que estes são livros voltados especificamente para a matemática que se faz necessária na física. Por isso, foram analisados os livros *Mathematical Physics*, do autor Eugene Butkov - (BUTKOV, 1973) -, *Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, dos autores George B. Arfken e Hans J. Weber - (ARFKEN; WEBER, 2003) -, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, da autora Mary L. Boas - (BOAS, 2006) -, *Matemática Para Físicos, Com Aplicações - Volume II - Tratamentos Clássico e Quântico*, do autor João Barcelos Neto - (NETO, 2011)-, *Methods of Theoretical Physics - Parts I and II*, dos autores Philip M. Morse e Herman Feshbach - (MORSE; FESHBACH, 1953a) e (MORSE; FESHBACH, 1953b) -, e *Notas Para Um Curso de Física Matemática*, que é um livro digital em constante atualização pelo professor João C. A. Barata - (BARATA, 2022) -. Os dois primeiros livros desta lista foram escolhidos por serem livros canônicos adotados nas disciplinas de Física Matemática das universidades brasileiras, o terceiro foi uma indicação do orientador deste trabalho, e os demais foram escolha pessoal do autor deste trabalho devido ao seu apreço pela qualidade de tais livros.

No livro de (BUTKOV, 1973) a Equação de Legendre é apresentada e resolvida na seção de 3.5 na forma de um exemplo do Método de Frobenius. O caminho entre a apresentação da série de potências como proposta de solução e a Equação de Recorrência leva apenas um parágrafo. Depois é feito um teste de convergência e em seguida são apresentadas equações utilizadas na escolhas dos coeficientes arbitrários das soluções linearmente independentes, isto é, das soluções par e ímpar. Por fim é apresentada uma lista com os cinco primeiros Polinômios de Legendre. Posteriormente, já na seção 9.5 do livro, uma expressão para os Polinômios de Legendre é obtida a partir de uma Expansão em Multipolos. Após isso, outras propriedades são apresentadas. No livro de (ARFKEN; WEBER, 2003) os Polinômios de Legendre são deduzidos a partir de Função de Geratriz, obtida com base numa Expansão em Multipolos no Potencial Eletrostático de uma carga pontual. Após isso algumas propriedades são deduzidas e é apresentada uma tabela com os nove primeiros Polinômios de Legendre.

No livro de (NETO, 2011) a Equação de Legendre é apresentada e em seguida resolvida pelo Método de Frobenius até ser encontrada uma Relação de Recorrência, após isso a convergência da Relação de Recorrência é testada e são apresentados os cinco primeiros Polinômios de Legendre. Pouco depois são apresentados também os Harmônicos Zonais, funções com grande importância para o Eletromagnetismo Clássico. Posteriormente, é feita uma dedução da Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre com base numa expressão generalizada da Fórmula de Rodrigues. Toda a discussão no texto de (BASSALO, 2007) conduz o leitor a Teoria de Sturm-Liouville sobre Polinômios Ortogonais. No texto de (BOAS, 2006) a Equação de Legendre é apresentada e resolvida com substituição de uma Série de Potências. A autora não cita isso diretamente durante a resolução, mas trata-se evidentemente do Método de Frobenius. A autora cita o método em outros momentos durante seu livro. Em seguida, a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre é apresentada e algumas propriedades são deduzidas utilizando-a.

O livro de (MORSE; FESHBACH, 1953a) foi analisado devido a sua extrema abrangência de assuntos, e também devido a sua riqueza de detalhes, formalismo e elegância matemática. Este livro, no entanto, é extremamente complexo. As discussões feitas sobre funções especiais são construídas de forma generalizada em termos de uma representação integral no plano complexo. Em seguida, o autor faz uma da Equação de Legendre com base na representação complexa e depois faz uma dedução dos Polinômios de Legendre com base na Função Geratriz. Já em (MORSE; FESHBACH, 1953b) são apresentadas expressões para o cálculo dos Polinômios Associados de Legendre. No livro de (HASSANI, 2008), é apresentada a Equação de Legendre e esta é resolvida com base no Método de Frobenius, uma relação de recorrência é encontrar e a solução é desenvolvida até de fato se encontrar uma expressão para os Polinômios de Legendre. Em seguida, são apresentadas a Função Geratriz para os Polinômios de Legendre e a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre.

Por fim, no livro de (BARATA, 2022) a Equação de Legendre é apresentada no

Capítulo 15, e é então resolvida com base no Método de Frobenius até se encontrar uma relação de recorrência e em seguida é apresentada uma solução na forma da combinação linear de dois polinômios, um com potências pares e outro com potências ímpares. Posteriormente, no apêndice 15.B do referido livro, é feita uma dedução da expressão que retorna os Polinômios de Legendre, a mesma que foi deduzida por (BOAS, 2006) e por (ARFKEN; WEBER, 2003). No Capítulo 16 é deduzida a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre. Este livro foi o que mais agradou o autor, devido a sua elegância matemática e também a sua riqueza de detalhes. Foi um texto bastante esclarecedor e sem dúvidas foi o texto que fundamentou todo o Capítulo 4 deste trabalho.

Perceba que os livros de Física Matemática tendem a abordar muitos temas diferentes, com um número extenso de exercícios e exemplos. Tal estrutura textual tem como consequência um tratamento breve das funções especiais, resolvendo as equações em poucas linhas, de maneira quase superficial, dando "saltos"entre uma conclusão e outra. Talvez para estudantes mais experientes, em nível de pós graduação ou até mesmo no final da graduação, tal abordagem seja suficiente. Mas para estudantes que estão no processo de transição entre as disciplinas de Cálculo do primeiro ciclo da graduação e as aplicações intermediárias do Cálculo que vêm na segunda metade, essa abordagem com "saltos"pode causar problemas, pois suas lacunas entre uma expressão matemática e outra podem gerar fortes dúvidas nos estudantes, conduzindo-os a caminhos incorretos, ou até mesmo a uma sensação de frustração ao ponto de abandonar a dedução, passando a utilizar apenas a expressão final quando lhe for necessária.

O que pode, talvez, causar grande dificuldade é que cada livro dá uma contribuição individual, ou seja, cada livro desenvolve uma parte do cálculo de forma diferente. Quando já se conhece o caminho, e se compara as metologias, fica evidente que no fundo quase todos estão fazendo a mesma coisa. Mas quando ainda está aprendendo, as lacunas que um livro apresenta, mesmo que esta possa ser preenchida por outro livro, torna o caminho muito mais tortuoso. O caminho percorrido entre a Equação de Legendre e a dedução da Fórmula de Rodrigues surge na literatura quase como um quebra-cabeças, onde cada livro texto possui um peça, e quando se junta tudo obtêm-se a maioria dos detalhes necessários para de fato se compreender a sutileza e a elegância das Fórmulas de Rodrigues.

Antes de finalizar estes comentários sobre as lacunas da literatura, vale salientar que, nada do que foi dito aqui é uma crítica negativa direta a estrutura dos textos, ou sequer a escolha dos professores em utiliza-los. Cada texto é escrito por alguém com uma forma particular de ver a física e a matemática, e também é escrito para perfis diferentes de estudantes. As análises feitas aqui refletem somente a visão de mundo e a opinião pessoal do autor deste trabalho. O principal ponto a se deixar evidenciado é que a maioria dos livros citados não trás a resolução da Equação de Legendre em detalhes, isto é, em seu passo a passo, com o motivo de porquê cada decisão é tomada em seu caminho. Esta é a observação do autor, este foi o motivo que desencadeou o desenvolvimento desta pesquisa, e é neste contexto que se pretende dar uma contribuição. Somente isso.

1.2 O OBJETIVO DESTE TRABALHO E O SEU PÚBLICO ALVO

O objetivo deste trabalho é construir um material didático que possa servir de apoio aos estudantes da Licenciatura em Física da UFPE CAA e também de outras instituições. Espera-se que os estudantes possam ler o texto após cursar as disciplinas de Cálculo I, II e III, e também a disciplina de Introdução a Equações Diferenciais. Ou então, quando for necessário, a medida que se aprofundarem em disciplinas do ciclo profissional, como por exemplo, Eletromagnetismo Clássico I ou Física Moderna I.

O ideal, no entanto, é que este texto seja lido após as disciplinas de Cálculo e de Equações Diferenciais, pois compreende-se que neste estágio os estudantes têm uma bagagem ampla o suficiente acerca das ferramentas básicas de cálculo, mas que devido a compartimentação de conteúdos para fins didáticos de cada disciplina, os estudantes ainda não têm a maturidade necessária para aplicar várias dessas ferramentas de maneira conjunta na resolução de um problema de maneira objetiva. Tal situação é perfeitamente natural e ocorre com qualquer estudante, o processo de construção do conhecimento exige maturidade, paciência, e continuidade. Dado que neste texto serão utilizadas ferramentes pertencentes a ementa das quatro disciplinas, espera-se que seja um ótima oportunidade para que os estudantes possam aplicá-las e que possam perceber suas inter-relações.

Também serão, obviamente, utilizados conhecimentos da matemática básica ao longo do desenvolvimento do texto. Porém, se o estudante sentiu a necessidade de aprender o métodos usados neste trabalho, provavelmente já possui os conhecimentos que serão necessariamente utilizados. Um conhecimento elementar de Álgebra Linear é visto como útil, mas não é uma exigência. Se o estudante tiver tais conhecimentos saberá ver com outros olhos o contexto de soluções de equações diferenciais, em termos de espaços de solução e etc, mas como tais termos não serão citados no texto, o estudante que não os tiver não será prejudicado.

1.3 UM GUIA DE LEITURA

Como já foi dito, a principal observação que aqui se traz, é a de que a maioria dos livros analisados não traz em detalhes a resolução da Equação de Legendre, a maioria apenas aplica o método de Frobenius por no máximo uma ou duas laudas e em seguida apresenta alguma tabela com os primeiros Polinômios de Legendre. Dentre os livros citados, apenas os livros de (BARATA, 2022) e de (NETO, 2011) trazem uma dedução da Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre.

Tentaremos aqui juntar o máximo de peças possível deste "quebra-cabeças", de modo a entregar algo robusto e detalhado ao estudante. Construiremos um caminho que vai em detalhes desde a Teoria Eletromagnética Clássica até a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre. Isso não significa, no entanto, que o estudante não deva resolver as expressões ao longo de texto, ou que deva apenas realizar uma leitura superficial. Pelo contrário, espera-se que ao longo da leitura o estudante reflita e procure compreender a fundo cada uma das passagens, o motivo de cada decisão tomada, e que reflita se teria feito a mesma escolha e porquê. A criticidade por parte do estudante é fundamental neste contexto. Espera-se que os estudantes sejam capazes de ler, refletir, e em seguida realizar sozinhos os cálculos, de modo a construir uma aprendizagem sólida, e também para que possam treinar a aplicação das ferramentas aprendidas nas disciplinas até aqui.

Salienta-se ainda que as ferramentes aqui aprendidas servirão de base para resolver não apenas a Equação de Legendre, mas também para resolver outros tipos de equação de tenham a mesma estrutura, tais como a Equação de Airy, a Equação de Laguerre, a Equação de Hermite, e muitas outras.

No mais, este texto foi escrito de estudante para estudante, com carinho e dedicação. Espera-se que seja minimamente útil, que possa servir como uma luz através das passagem obscuras que se encontram nos livros texto comumente utilizados, e também que possa lhes ajudar a desviar de frases do tipo "é fácil ver que" ou "é trivial notar que". Se assim for, o autor deste trabalho estará satisfeito. Boa leitura!

2 A FÍSICA E A EQUAÇÃO DE LEGENDRE

2.1 UMA BREVE REVISÃO DO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

Da Teoria Eletromagnética Clássica (GRIFFITHS, 1999) sabe-se que existe uma entidade fundamental associada aos fenômenos eletromagnéticos chamada de Carga. Sabe-se também que quando esta entidade se faz presente em uma dada região do espaço-tempo, esta região adquire propriedades energéticas, isto é, manifesta-se nesta região um Campo Eletromagnético. Se esta carga está parada em relação a um observador localizado em um Referencial Inercial, para este observador detecta-se somente a parte Elétrica deste Campo, ou seja, um Campo Eletrostático, e se ela estiver em movimento em relação a este referência, para um observador neste referencial detecta-se também a parte magnética do campo, isto é, detecta-se também a presença de um Campo Magnético. Contudo, trataremos aqui apenas do Campo Eletrostático. Quando uma segunda carga está presente nesta mesma região do espaço-tempo, ela sofre uma força impulsionada através do Campo Eletrostático associado a primeira Carga.

A Lei de Gauss (GRIFFITHS, 1999) nos fornece uma maneira de acurar com notável precisão as características espaciais deste Campo Eletrostático. Ela nos diz que o Fluxo de Campo que existe ao redor da carga é diretamente proporcional ao valor da carga (ou da soma dos valores do conjunto de cargas) que existe naquela região, ou seja,

$$\Phi_E \propto q.$$

Onde a Constante de Proporcionalidade está associada a reação do meio à passagem do Fluxo Elétrico, ou seja, o retardo que a informação elétrica sofre ao atravessar o meio no qual ela estiver inserida, esse retardo depende das propriedades do material que preenche a região. Essa constante é definida como o inverso da grandeza chamada Permissividade Elétrica que é representada pelo símbolo ϵ e possui seu valor no vácuo (representado por ϵ_0) mensurado como $8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/N^2m^2$, de modo que para a Lei de Gauss temos

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Para calcular o Fluxo Eletrostático total podemos lançar mão das ferramentas do Cálculo Vetorial (STEWART, 2013a) e modelar uma Superfície Gaussiana (β) ao redor da carga, computar o fluxo de campo eletrostático que passa em cada um dos pontos da superfície gaussiana e em seguida somar todos eles fazendo a soma convergir a uma Integral de Superfície (STEWART, 2013a), de modo que a forma integral da Lei de Gauss (GRIFFITHS, 1999) é dada por

$$\oiint_{\beta} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{2.1}$$

Explicitamente, o a função que descreve o campo elétrico pode depender das coordenadas do vetor posição (e, portanto, de suas coordenadas) e do tempo, ou seja, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$. O mesmo vale para a função ρ que descreve a densidade cargas e a função potencial V que será usada em breve, ou seja, $\rho = \rho(\vec{\mathbf{r}}, t)$ e $V = (\vec{\mathbf{r}}, t)$. Naturalmente, os elementos infinitesimais de área e volume também dependem das coordenadas. No entanto, neste trabalho usaremos apenas $\vec{\mathbf{E}}$, ρ, V, e assim por diante. Esta decisão foi tomada no intuito de facilitar a escrita e a leitura do texto, e também para que se tenha em vista que as equações aqui deduzidas são válidas para qualquer sistema de coordenadas adotado.

Na Equação (2.1), podemos fazer uso do Teorema da Divergência de Gauss (STEWART, 2013a) para passar a Equação (2.1) da forma integral para forma diferencial. Primeiro, aplicamos o teorema do lado esquerdo da equação para obter

$$\oiint_{\beta} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \iiint_{\partial\beta} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) \mathrm{d}V\,, \tag{2.2}$$

sendo $\partial\beta$ o símbolo que indica que os limites de integração são tomados na borda da superfície β.

Agora, do lado direito da equação, tomamos a carga total como a integral volumétrica da densidade de cargas (GRIFFITHS, 1999),

$$q = \iiint_{\partial\beta} \rho \, \mathrm{d}V\,, \tag{2.3}$$

e por fim, substituímos as Equações (2.2) e (2.3) na Equação (2.1), e obtemos

$$\iiint_{\partial\beta} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) \mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\partial\beta} \rho \, \mathrm{d}V\,,$$

onde podemos inserir a constante de permissividade elétrica dentro da integral através da propriedade distributiva,

$$\iiint_{\partial\beta} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) \mathrm{d}V = \iiint_{\partial\beta} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}V\,.$$

Agora, subtraímos toda a integral tripla que está do lado direto da equação em ambos os lados, de modo que trazemos toda esta integral para o lado esquerdo,

$$\iiint_{\partial\beta} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) \mathrm{d}V - \iiint_{\partial\beta} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}V = 0,$$

agora, apenas coloca-se em evidência os símbolos associados à integração,

$$\iiint_{\partial\beta} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) \mathrm{d}V = 0.$$

Portanto, dado que ambos os termos são linearmente independentes, podemos concluir que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.4}$$

que é de fato a forma diferencial da Lei de Gauss (GRIFFITHS, 1999).

Dado que, na presente situação, se parte do princípio de que a Carga está parada em relação a um observador em um Referencial Inercial, e que por isso neste referencial observa-se somente a parte Elétrica do Campo Eletromagnético, conclui-se que a parte Magnética do Campo é nula. Nestas situações se observa experimentalmente que o Campo Eletroestático é um Campo Conservativo, isto é, se uma Carga de Testes percorrer um caminho fechado dentro da região onde o campo se manifesta será observado que o trabalho realizado pelo campo sobre a carga é nulo. Isso implica que a variação total de energia da carga de testes ao longo do caminho também é nulo (GRIFFITHS, 1999).

Podemos novamente lançar mão do Cálculo Vetorial para modelar a variação de energia da carga de testes. Primeiro, computamos a ação do campo sobre a carga de testes em cada ponto da trajetória γ, e depois somamos todas as contribuições fazendo a soma convergir a uma Integral de Linha (STEWART, 2013a). Dessa forma, o trabalho total realizado pelo campo eletrostático sobre a carga de testes em um caminho γ fechado será dado por (GRIFFITHS, 1999)

$$\mathscr{W}_{tot} = \oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}},$$

onde, tendo em vista que o campo é conservativo, e que portanto o trabalho total realizado num caminho fechado é nulo, conclui-se que

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0. \tag{2.5}$$

Podemos usar o Teorema de Stokes (STEWART, 2013a) para passar a Equação (2.5) da forma integral para forma diferencial,

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \iint_{\partial\gamma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0,$$

o que, levando em conta o resultado (2.5), nos leva a concluir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0, \tag{2.6}$$

onde essa é a forma diferencial da Equação (2.5) (GRIFFITHS, 1999).

Ainda do Cálculo Vetorial, sabe-se que quando um campo é conservativo é possível encontrar uma única Função Potencial, de modo a redefinir o campo vetorial como sendo o gradiente de um campo escalar (STEWART, 2013a), conhecido na literatura como Campo Potencial. Isso se dá por causa da propriedade do operador rotacional, onde $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0, \forall V$. Sendo assim, para o Campo Eletrostático teremos que

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv -\vec{\nabla} V, \tag{2.7}$$

onde V será chamado de Potencial Eletrostático (GRIFFITHS, 1999), e o sinal negativo é arbitrariamente colocado para indicar que a energia armazenada no campo potencial diminui a medida que o trabalho é realizado sobre alguma carga de testes, de modo a satisfazer o Princípio da Conservação de Energia.

Substituindo o lado direito da Equação (2.7) na Equação (2.4), e multiplicando ambos os lados da equação resultante por -1, obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} V \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

onde lembramos que a definição do Operador Diferencial Laplaciano para campos escalares (STEWART, 2013a) é justamente essa, $\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, portanto,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.8}$$

que é a famosa Equação de Poisson para o Potencial Eletrostático (GRIFFITHS, 1999).

Contudo, se concentrarmos nossos estudos em uma região do espaço-tempo suficientemente distante das cargas de fonte, onde ainda é possível sentir a presença do campo, mas não se nota visualmente a presença das cargas, podemos assumir naturalmente $\rho = 0$ na Equação (2.8), e obter a famosa Equação de Laplace para o Potencial Eletrostático (GRIFFITHS, 1999), representada por

$$\nabla^2 V = 0. \tag{2.9}$$

Esta mesma equação, assim como a Equação de Helmholtz que veremos na Seção 2.2, quando feita a consideração de simetria em torno do Ângulo Azimutal, nos conduzirá a importantíssima Equação de Legendre, que temos por objetivo central resolver neste trabalho.

2.2 UMA BREVE REVISÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA

Na Mecânica Quântica (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018) postula-se a existência de uma função que guarda em si as informações completas sobre o estado físico de um determinado sistema quântico, ou até mesmo do próprio universo.

Tal função chama-se Função de Onda, e esta precisa satisfazer quatro condições fundamentais: precisa ser quadraticamente integrável em todo o universo, precisa ser continua em todo o seu domínio e em toda a sua imagem, sua derivada precisa ser continua em todos os pontos onde o potencial não for divergente ao infinito, e ela precisa também satisfazer a Equação de Schröndiger (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018). Satisfeitas tais condições, a função pode ser considerada uma função de onda e pode ser tomada com a solução física para guardar a informação sobre as propriedades do sistema físico em questão.

Na prática, parte-se da Equação de Schröndiger, depois se manipula as constantes da solução para tornar a função quadraticamente integrável, e também de modo que ela satisfaça as condições de continuidade.

A Equação de Schröndiger, no entanto, não é facilmente solucionável, visto que trata-se de uma Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem Linear e Acoplada, com variáveis no Espaço e no Tempo, como se pode notar abaixo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{2.10}$$

onde $\Psi = \Psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ é a candidata a Função de Onda, $\hbar$ é a Constante Reduzida de Plank, m é a massa da onda-partícula ou do sistema quântico em questão, i é a Unidade Imaginária dos Números Complexos, $V = V(\vec{\mathbf{r}}, t)$ é o Potencial associado ao sistema, enquanto ∇^2 e $\frac{\partial}{\partial t}$ são respectivamente os operadores diferenciais Laplaciano e de derivação parcial no tempo.

O lado esquerdo da Equação (2.10) pode ser condensado usando o conhecido Operador Hamiltoniano, representado simbolicamente por $\hat{\mathscr{H}}$, que atua sobre a Função de Onda Ψ, de forma tal que

$$\hat{\mathscr{H}}\Psi \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi \quad \therefore \quad \hat{\mathscr{H}}\Psi \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi,$$

logo, a Equação (2.10) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathscr{H}}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Nas situações onde o potencial é estático, isto é, não depende explicitamente do tempo, nota-se que os termos associados ao operador hamiltoniano, do lado esquerdo da Equação (2.11), dependem somente das coordenadas espaciais, enquanto o operador de derivação parcial no tempo, do lado direito, depende apenas da coordenada temporal.

Com o objetivo de resolver a Equação de Schrödinger podemos usar duas propriedades presentes na Equação (2.11). Primeiro, a homogeneidade temporal do potencial indica que este pode ser desacoplado dos termos dependentes do tempo. Segundo, o fato de a parte espacial da função de onda estar fisicamente associada a densidade de probabilidade de encontrar-se a onda-partícula (ou o sistema quântico em questão) numa determinada região do espaço, e que esta densidade de probabilidade por sua vez se conserva de acordo com o Principio de Conservação de Informação representado na Equação de Continuidade para a Função de Onda (GRIFFITHS;

SCHROETER, 2018). Esse princípio diz que a informação sobre um sistema físico não deve, em princípio, apenas desaparecer ao longo da passagem de um instante de tempo para outro instante de tempo consecutivo no universo conhecido, a informação apenas se redistribui, ela jamais deve ser destruída. Isso implica que a parte espacial da função de onda pode ser desacoplada da parte temporal da função de onda. Então, usaremos essas propriedades como argumento para aplicar o Método da Separação de Variáveis (ARFKEN; WEBER, 2003) à Equação (2.11), dividindo assim a solução em uma parte associada somente ao Espaço e em outra associada somente ao Tempo. A ideia consiste em impor que a solução tenha a forma

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}},t) \equiv \psi(\vec{\mathbf{r}})\Phi(t) \quad \therefore \quad \Psi = \psi\Phi,$$

impondo que ela seja constituída por uma parte espacial e outra temporal. Logo, a Equação (2.11) se torna

$$\hat{\mathscr{H}}\psi\Phi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\Phi,$$

onde os termos que não estão sendo afetados pelos operadores comutam com eles, de modo que podem passar ilesos pelo operador, sendo então retirados da operação,

$$\Phi\hat{\mathscr{H}}\psi = i\hbar\psi\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

agora, dividimos os dois lados da equação acima por $\psi\Phi$ e obtemos

$$\frac{1}{\psi}\hat{\mathscr{H}}\psi = i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{2.12}$$

de modo que agora é possível notar que o lado esquerdo da Equação (2.12) depende somente das coordenadas espaciais, enquanto o lado direito depende somente da coordenada temporal, e assim desacoplamos a parte Espacial da parte Temporal da função de onda que é solução da Equação (2.10).

Tendo em vista que tanto ψ, quanto Φ, variam independentemente um do outro, a única maneira de a Equação (2.12) ser verdadeira é se ambos os lados da equação convergirem para a mesma função, seja ela qual for. Essa arbitrariedade implica que neste caso podemos escolher arbitrariamente a função para qual ambos os lados convergem. Então, escolheremos por conveniência uma função identidade, isto é, uma constate, que é comumente chamada de Constante de Separação (ARFKEN; WEBER, 2003).

Sabendo que, na Mecânica Clássica, o Hamiltoniano de um sistema físico temporalmente homogêneo e quadrático na velocidade representa a energia total do sistema (THORNTON; MARION, 2004), denotaremos a constante de separação por $\mathscr{E}$, pois a parte espacial da função de onda é temporalmente homogênea, fazendo com que seu hamiltoniano seja esquivante a energia total do sistema quântico. Tal conclusão implica também que a a equação para parte temporal da função de onda também seja equivalente a energia total do sistema. Portanto,

$$\frac{1}{\psi}\hat{\mathscr{H}}\psi = i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathscr{E},$$

que nos conduz a um par de equações diferenciais, uma para a parte espacial da função de onda e outra para a sua parte temporal, sendo ψ e Φ essas respectivas funções a serem encontradas resolvendo as equações.

Para a parte temporal, temos

$$i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathscr{E}.$$

Note que na equação acima, para $\Phi(t)$, a derivada parcial converge a uma derivada total, pois Φ é função apenas de t,

$$i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E},$$

reorganizando os termos, é possível perceber que essa separação de variáveis nos presenteia com uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem Homogênea e Linear,

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \frac{i\mathscr{E}}{\hbar}\Phi = 0. \tag{2.13}$$

Convenhamos que a Equação (2.13) é facilmente solucionável, basta aplicarmos o Método das Variáveis Separáveis para Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem (ZILL; CULLEN, 2001). Se o leitor de fato compreendeu o caminho percorrido para chegar a Equação (2.13), tenho certeza de que também pode resolvê-la. Façamos isso juntos!

Primeiro, isolamos o termo diferencial de um lado,

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}\Phi,$$

em seguida, separamos os termos contendo a função de um lado, e os termos contendo a variável e as constantes em outro,

$$\frac{1}{\Phi}\mathrm{d}\Phi = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}\mathrm{d}t,$$

agora, basta fazermos uma integração indefinida em ambos os lados, onde as constantes naturalmente comutam com o sinal do operador de integração,

$$\int\frac{1}{\Phi}\mathrm{d}\Phi = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}\int\mathrm{d}t,$$

o que resulta em

$$\ln|\Phi| + C_1 = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t + -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}C_2.$$

Agora, isolamos o termo contendo a função Φ,

$$\ln|\Phi| = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t - \frac{i\mathscr{E}}{\hbar}C_2 - C_1,$$

em seguida, se condensa todas as contantes é uma constante mais simples,

$$\ln|\Phi| = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t \underbrace{- \frac{i\mathscr{E}}{\hbar}C_2 - C_1}_{\equiv C_3},$$

e então, obtêm-se

$$\ln|\Phi| = -\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t + C_3.$$

Podemos agora aplicar a Exponencial de Euler em ambos os lados da equação, afim de isolar de fato a função Φ,

$$\exp(\ln|\Phi|) = \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t + C_3\right),$$

onde se recorda a identidade logarítmica $\exp(\ln|\Phi|) = \Phi$. Logo, do lado esquerdo, temos que

$$\Phi = \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t\right)\exp(C_3),$$

aqui vale lembrar que a exponencial euleriana de uma constante é também uma constante, então podemos redefinir tal exponencial como uma constante mais simples,

$$\Phi = \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t\right)\underbrace{\exp(C_3)}_{\equiv C},$$

portanto,

$$\Phi = C\exp\left(-\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t\right).$$

Contudo, tendo em vista que no final teremos o produto $\Psi = \psi\Phi$, podemos absorver esta constante C na função ψ, de modo que, por fim, obtemos $\Phi(t)$, que é a parte associada a evolução temporal de $\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$,

$$\Phi(t) = \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t\right), \tag{2.14}$$

portanto, a função de onda assume a forma

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \psi\exp\left(-\frac{i\mathscr{E}}{\hbar}t\right).$$

Embora não se tenha trabalho aqui a teoria com tal profundidade, vale lembrar que, na teoria quântica, o produto de uma função de onda por um escalar não altera de fato a solução, ou seja, o produto é ainda uma solução. Isso ocorre pois, tanto a equação para parte espacial da função de onda, quanto a equação para a parte temporal, constituem equações de autofunções, que são análogas as equações de autovetores da álgebra linear. E, na álgebra linear, sabe-se que a multiplicação de um autovetor por um escalar qualquer também constitui um autovetor.

Agora, para a parte espacial da função de onda, isto é $\psi(\vec{\mathbf{r}})$, temos,

$$\frac{1}{\psi}\hat{\mathscr{H}}\psi = \mathscr{E},$$

reorganizando os termos obtém-se a chamada Equação de Schröndiger Independente do Tempo (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018), expressa por

$$\hat{\mathscr{H}}\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{2.15}$$

onde, se aplicarmos o operador hamiltoniano sobre a função ψ, obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \mathscr{E}\psi.$$

Agora, se reorganizarmos os termos, deixando o termo com operação de derivação de um lado, e os temos sem operação de derivação do outro, obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \mathscr{E}\psi - V\psi,$$

onde, do lado direito da equação, pode-se colocar a função ψ em evidência,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = (\mathscr{E} - V)\psi,$$

e então, multiplica-se toda a equação por $-(2m)/\hbar^2$, com o intuito de isolar o $\nabla^2\psi$,

$$\nabla^2\psi = -\frac{2m}{\hbar^2}(\mathscr{E} - V)\psi.$$

Em seguida, colocam-se todos os termos contendo a função ψ do mesmo lado da equação novamente, mostrando assim que se trata de uma Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem Homogênea,

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathscr{E} - V)\psi = 0, \tag{2.16}$$

se esta equação será linear ou não depende da expressão do potencial.

Por fim, mas não menos importante, definimos a constante

$$\pm k^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}(\mathscr{E} - V),$$

sendo $k^2 > 0$ se $\mathscr{E} > V$, $k^2 < 0$ se $\mathscr{E} < V$, e evidentemente $k^2 = 0$ se $\mathscr{E} = V$.

Portanto, a Equação (2.16) pode ser reescrita na forma

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0, \tag{2.17}$$

que é a famosa Equação de Helmholtz para um campo escalar. Neste caso o campo escalar em questão é a parte espacial da função da onda.

Essa mesma equação, assim como a Equação de Laplace - Equação (2.9) - encontrada na seção anterior, nos conduzirá a importantíssima Equação de Legendre, que temos por objetivo este trabalho ensinar a resolver.

2.3 A EQUAÇÃO DE LEGENDRE E O ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

Na Equação de Laplace para o Potencial Eletrostático - Equação (2.9) - temos a presença do Operador Diferencial Laplaciano, representado simbolicamente por ∇^2. Ele, enquanto operador, possui uma forma específica de acordo com o sistema de coordenadas adotado para descrevê-lo.

Um importante fato físico a ser levado em consideração nas descrições matemáticas, é que a natureza e os fenômenos naturais devem possuir as mesmas características físicas independentemente do sistema de coordenadas adotado, este é o chamado Princípio da Relatividade, que diz que "A Física deve ser a mesma em todos os referenciais inerciais". Os princípios e as leis sempre devem ser satisfeitos dentro seus respectivos domínios de validade. Ou seja, as propriedades do Cosmos não dependem de como as descrevemos, ela apenas são, o Cosmos não precisa de nossa descrição matemática para "funcionar bem", ele é capaz de apenas "ser", um verbo simples e puro. No entanto, existem sistemas de referência e sistemas de coordenadas específicos que melhor se adaptam a geometria de certos fenômenos físicos, deixando mais simples a nossa descrição matemática dos fenômenos. Logo, torna-se mais pragmático adotar estes sistemas, tendo como objetivo facilitar os cálculos na descrição de um fenômeno, nos permitindo assim focar o máximo possível de atenção na interpretação física do fenômeno em si.

No caso do potencial eletrostático, compreende-se que a ideia de carga nos leva a um conceito pontual no espaço, principalmente se estivermos suficientemente distante da fonte associada ao campo que se estuda. O ponto, por sua vez, é uma grandeza adimensional desde sua postulação por Euclides, e portanto, deve ser descrito em termos de uma geometria perfeitamente simétrica. Por outro lado, de acordo com o Princípio Cosmológico, o espaço-tempo é, em sua essência, Homogêneo e Isotrópico, tendo a sua simetria quebrada apenas pelas propriedades físicas dos objetos que existem em seu interior, neste caso, pela presença da carga. Comparando ambos os pensamentos, conclui-se que o espaço terá características quase totalmente simétricas na região da carga, mas não o será no ponto onde carga em si estará. Enquanto a carga, seu campo associado terá simetria esférica, como bem já se reconhece a partir da Lei de Coulomb (GRIFFITHS, 1999). Isso significa que se pode automaticamente considerar a descrição do sistema campo-carga em termos de um Sistema de Coordenadas Polares Esféricas, e este será suficiente para descrever a região do espaço-tempo em questão.

Num sistema de coordenadas polares esféricas (ARFKEN; WEBER, 2003), o operador laplaciano tem a forma

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \tag{2.18}$$

logo, a Equação de Laplace para o Potencial Eletrostático - Equação (2.9) - pode ser reescrita como segue,

$$\nabla^2 V=0 \quad \therefore \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0.$$

Antes de mais nada, perceba que todos os termos da equação estão multiplicados por $1/r^2$. Note também que o lado direto da igualdade é nulo. Logo, podemos simplesmente multiplicar toda a equação por r^2 sem perda de generalidade, obtendo assim

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0. \tag{2.19}$$

Perceba que trata-se de uma Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem Linear, Homogênea e Acoplada, o que já nos indica que sua solução está longe de ser trivial, mas por outro lado também não é algo impossível de ser solucionado. Podemos começar, por exemplo, aplicando o Método da Separação de Variáveis (ARFKEN; WEBER, 2003) para desacoplar os termos.

Vale ressaltar aqui que não existe uma forma única e específica de se realizar uma separação de variáveis, de fato existem várias maneiras. Para os fins deste trabalho, tomaremos um caminho que tenta de forma simples e concisa chegar a Equação de Legendre (GRIFFITHS, 1999), porém, sem perder a generalidade e sem "dar grandes saltos" entre as equações. A ideia é construir ao longo do caminho o terreno para que no futuro, mas não neste trabalho, o leitor saiba encontrar também a Equação Associada de Legendre (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

Tendo em vista que o campo de uma carga pontual é um Campo de Força Central (THORNTON; MARION, 2004), podemos inicialmente desacoplar a parte radial do potencial da sua parte angular, isto é, podemos redefinir a função V fazendo-a possuir duas partes, uma associada ao módulo do vetor posição e outra associada aos ângulos formados entre o vetor posição e os eixos nas direções polar e azimutal. Dessa forma, temos a imposição

$$V(r,\theta,\varphi) \equiv R(r)Y(\theta,\varphi), \tag{2.20}$$

ou simplesmente,

$$V \equiv RY.$$

Logo, retornando a Equação (2.19), e impondo a condição (2.20), temos

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial RY}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial RY}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 RY}{\partial\varphi^2}=0,$$

onde os termos que não dependem das variáveis que estão sendo derivadas saem da operação,

$$Y\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0,$$

e agora, para finalmente desacoplar os termos, dividimos toda a equação por RY, e então obtemos

$$\frac{\cancel{Y}}{R\cancel{Y}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}Y\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0.$$

ou seja,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0.$$

Perceba que agora o primeiro termo da esquerda para a direita depende somente da variável radial r, e que o segundo e terceiro termos dependem somente das variáveis angulares, chamadas de Polar e Azimutal, representadas respectivamente por θ e φ. Tendo em vista que o primeiro termo depende de apenas uma variável, as suas derivadas parciais convergem para derivadas ordinárias,

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0,$$

agora, isolando a parte da equação que depende somente de r, obtemos

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

A equação acima será verdade se, e somente se, os dois lados tiverem o mesmo valor numérico ou convergirem para a mesma função. Devido a esta arbitrariedade na situação, podemos escolher o formato mais conveniente, desde que este seja imposto a ambos os lados da equação. Então, optamos por definir que os dois lados são iguais a constante $\ell(\ell+1)$, e embora isso definitivamente não seja nada intuitivo, mais tarde ficará perfeitamente claro o porquê dessa escolha, se não a tivéssemos feito aqui, precisaríamos fazê-la depois. Impondo essa constante de separação, obtemos

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\ell(\ell+1).$$

Feito isso, ficamos agora com um par de equações, uma para a coordenada radial e outra para as coordenadas angulares.

Para a coordenada radial, temos

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \ell(\ell+1),$$

onde podemos multiplicar toda a equação por R e em seguida reorganizar os termos de modo a obter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \ell(\ell+1)R = 0, \tag{2.21}$$

que é uma expressão que satisfaz a Forma Canônica de Sturm-Liouville. Essa "forma" é de extrema importância na matemática e a utilizaremos mais tarde neste trabalho, basicamente ela tem esse nome porque este é o "formato" da Equação de Sturm-Liouville (ARFKEN; WEBER, 2003), que é uma equação diferencial genérica cujas soluções são uma família de polinômios ortogonais, tais quais os Polinômios de Legendre que pretendemos encontrar. Inúmeras equações diferenciais satisfazem a Forma Canônica de Sturm-Liouville, e isso dá origem a toda uma teoria matemática, chamada de Teoria de Sturm-Liouville, que está diretamente associada a solução de equações diferenciais como as que aparecem neste trabalho. Não aprofundaremos essa teoria aqui, mas certamente o leitor deveria procurar saber mais sobre ela em algum momento de sua formação acadêmica. Recomenda-se aqui a leitura do capítulo nove de (ARFKEN; WEBER, 2003).

Podemos expandir a derivada no primeiro termo da Equação (2.21) usando a regra do produto para derivadas, de modo a obter

$$2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} - \ell(\ell+1)R = 0,$$

onde, reorganizando os termos, obtemos

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \ell(\ell+1)R = 0, \tag{2.22}$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem, Linear e Homogênea, com Coeficientes Polinomiais. Ela satisfaz ainda a forma da Uma Equação Equidimensional de Cauchy-Euler (ZILL; CULLEN, 2001).

De modo geral, nos cursos básicos de Equações Diferenciais, se aprendem técnicas para resolver diversos tipos de EDOs elementares, mas nem sempre se aprende a resolver os casos onde os coeficientes da EDO são polinômios (vide o Anexo I). E é aqui que consiste uma das perguntas centrais deste trabalho: como se resolve este tipo de equação? Bom, em breve descobriremos, mas por hora continuaremos com a separação de variáveis.

Para as coordenadas angulares, temos

$$\frac{1}{Y\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\ell(\ell+1),$$

o que ainda não é muito bom para o que se deseja, porque esta segue sendo uma equação diferencial acoplada. No entanto, podemos multiplicar a equação inteira por $(\mathrm{sen}^2\theta)Y$. E assim, deixar o termo referente a derivada parcial em relação φ dependendo somente de uma variável, exceto pela própria função Y, que ainda depende de θ e φ. Realizando a multiplicação, obtêm-se que

$$\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\left[\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta\right]Y,$$

onde, reagrupando todos os termos no mesmo lado da equação, obtêm-se

$$\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta\right]Y+\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0. \tag{2.23}$$

Aqui podemos mais uma vez aplicar o Método da Separação de Variáveis, já que na equação acima o último termo, a derivada parcial referente a φ, dependeria somente do próprio φ se não fosse pela função Y que depende de ambos os ângulos. Neste contexto, redefinimos a função Y de forma a ser constituída por duas partes independentes, uma referente ao Ângulo Polar θ e outra referente ao Ângulo Azimutal φ. Logo, temos a condição

$$Y(\theta,\varphi)\equiv\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \tag{2.24}$$

ou simplesmente

$$Y\equiv\Theta\Phi.$$

Agora, retornando a Equação (2.23) com a condição (2.24) em mãos, temos

$$\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta\Phi}{\partial\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta\right]\Theta\Phi+\frac{\partial^2\Theta\Phi}{\partial\varphi^2}=0,$$

onde novamente os termos que não dependem das variáveis que estão sendo derivadas saem da operação,

$$\Phi\,\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta\right]\Theta\Phi+\Theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0.$$

Então, dividimos toda a equação por $\Theta\Phi$, de modo a desacoplar definitivamente as duas variáveis,

$$\frac{\cancel{\Phi}\mathrm{sen}\theta}{\Theta\cancel{\Phi}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\left[\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta\right]\cancel{\Theta\Phi}}{\cancel{\Theta\Phi}}+\frac{\cancel{\Theta}}{\cancel{\Theta}\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0,$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0.$$

Por fim, simplesmente isolamos os termos referentes ao ângulo polar em um lado da igualdade e o termo referente ao ângulo azimutal do outro lado,

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

Novamente, a equação acima só pode ser verdade se, e somente se, os dois lados tiverem o mesmo valor numérico ou convergirem para a mesma função. Dada a situação podemos também escolher o caso arbitrariamente. Então, se opta por definir que os dois lados da equação sejam iguais a constante m^2, e embora mais uma vez isso não seja muito intuitivo, logo ficará claro o porquê desta escolha. Impondo-se a constante de separação, obtemos

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=m^2.$$

Feito isso, ficamos mais uma vez com um par de equações, uma para a coordenada polar e outra para a coordenada azimutal.

Para o ângulo azimutal temos,

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=m^2,$$

onde, tendo em vista que a função Φ depende apenas da variável φ, o operador de derivação parcial converge para um operador de derivação ordinário,

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=m^2,$$

então, multiplicando ambos os lados da equação por Φ e reorganizando de modo a manter todos os termos não nulo do lado esquerdo, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0,$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes. Convenhamos que é uma equação de simples solução, e é aqui que fica evidente o porquê de termos escolhido m^2 como nossa constante de separação, essa escolha torna a equação para o ângulo azimutal uma EDO com coeficientes constantes.

Podemos resolver a EDO para coordenada azimutal através do Método do Polinômio Característico (ZILL; CULLEN, 2001), o que será feito a seguir.

Primeiro, extraímos o polinômio característico,

$$x^2 + m^2 = 0,$$

em seguida resolvemos a equação para o polinômio característico, isto é, encontramos os valores de x que tornam a equação verdadeira. Para isso, basta isolarmos x^2, obtendo

$$x^2 = -m^2,$$

então, tiramos a raiz quadra em ambos os lados da igualdade, obtendo

$$x = \pm\sqrt{-m^2},$$

portanto, lançando mão da unidade imaginária e utilizando as propriedades algébricas dos números complexos, onde têm-se $\sqrt{-1} \equiv i$, obtemos

$$x = \pm i m.$$

Logo, tendo em vista que as soluções são complexas e distintas, de acordo com (ZILL; CULLEN, 2001) a solução geral será do tipo,

$$\Phi(\varphi) = A\exp\left(im\varphi\right) + B\exp\left(-im\varphi\right), \tag{2.25}$$

Para que o ângulo azimutal definido na equação (2.25) fique bem definido, e para fazer com que ao dar um giro de 2π o valor retorne a um múltiplo inteiro do valor antes do giro, precisamos que m assuma somente valores inteiros não negativos, o que leva então a uma quantização do ângulo azimutal, onde $m = \{0, 1, 2, \cdots, +\infty\}$.

Por fim, mas não menos importante, temos a equação para o ângulo polar,

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta = m^2.$$

Antes de mais nada, note que, a função Θ depende somente da variável θ, e portanto, as derivadas parciais convergem para derivadas ordinárias,

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta = m^2.$$

Em seguida, podemos isolar o termo contendo as derivadas,

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\left[\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta\right] + m^2,$$

e então, multiplicamos toda a equação por $\Theta/\mathrm{sen}^2\theta$,

$$\frac{\cancel{\Theta}}{\mathrm{sen}^{\cancel{2}}\theta}\frac{\cancel{\mathrm{sen}\theta}}{\cancel{\Theta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{\Theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\left\{-\left[\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta\right] + m^2\right\},$$

portanto, obtemos

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=\{-[\ell(\ell+1)\mathrm{sen}^2\theta]+m^2\}\frac{\Theta}{\mathrm{sen}^2\theta}.$$

Agora, aplicando a propriedade distributiva na fração $1/\mathrm{sen}^2\theta$ que está do lado direito da equação, temos

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=\left[-\ell(\ell+1)+\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta}\right]\Theta,$$

onde, deixando todos os termos não nulos do lado esquerdo da equação, temos

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\left[-\ell(\ell+1)+\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta}\right]\Theta=0,$$

por fim, apenas reorganizando os termos entre colchetes, obtemos

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta}\right]\Theta=0, \tag{2.26}$$

que é também um equação que satisfaz a forma canônica da Equação de Sturm-Liouville, tal qual a Equação (2.21).

Bom, podemos admitir que a equação acima parece um tanto quanto complexa de se resolver, mas podemos deixa-la um pouquinho mais simples fazendo uma Substituição de Variável,

$$\begin{cases} x\equiv\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x=-\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \text{e} \quad x^2=\cos^2\theta, \\ \mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}^2\theta=1-\cos^2\theta \quad\therefore\quad \mathrm{sen}^2\theta=1-x^2, \end{cases}$$

dessa forma a Equação (2.26) pode ser reescrita com os diferenciais em termos de x, segue que

$$\underbrace{\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}}_{\equiv-\mathrm{d}x}\left(\mathrm{sen}\theta\underbrace{\frac{\mathrm{sen}\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}}_{\equiv-\mathrm{d}x}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta}\right]\Theta=0,$$

e ainda, além do cancelamento mútuo entre os sinais negativos dos termos termos diferenciais recém introduzidos, nota-se também outra possível substituição,

$$\cancel{-}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\underbrace{\mathrm{sen}^2\theta}_{1-x^2}\left(\cancel{-}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right)\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\underbrace{\mathrm{sen}^2\theta}_{1-x^2}}\right]\Theta=0,$$

portando, obtêm-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{(1-x^2)}\right]\Theta=0, \tag{2.27}$$

que também satisfaz a forma canônica da Equação de Sturm-Liouville, mas que aparenta ser um pouco mais simples que a sua versão anterior, a Equação (2.26).

Agora, podemos expandir o termo da derivada, de modo que

$$-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{(1-x^2)}\right]\Theta=0,$$

onde, reorganizando os termos, obtemos

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{(1-x^2)}\right]\Theta=0, \tag{2.28}$$

cuja qual é conhecida na literatura por Equação Associada de Legendre, que embora tenha um nome parecido com a equação que nos propomos a resolver neste trabalho, infelizmente não é ela. A equação que nos propomos a resolver é um caso particular desta Equação (2.28), que ocorre quando têm-se $m=0$.

Efetivamente, neste trabalho estamos interessados na situação onde Potencial Eletrostático possui completa Simetria Azimutal, isto é, nas situações onde o valor do ângulo φ não influência no valor do potencial. Nessas situações, a Equação (2.25) passa a ter o valor de uma constante. Para conseguir isso, basta tomarmos $m=0$ na equação, de modo que as exponenciais convergem a unidade e a função se torna $\Phi(t)=A\exp(0)+B\exp(0)=A+B$, ou seja, uma constante arbitrária.

Feitas estas considerações, ao retornarmos nossa atenção para a Equação (2.28) é possível perceber que, quando $m=0$, um dos termos associadas a derivada de ordem zero da função Φ, desaparece. Portanto, a Equação (2.28) finalmente se torna

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\ell(\ell+1)\Theta=0, \tag{2.29}$$

que é a equação central deste texto, a equação cuja qual nos propomos a resolver, a famosa Equação de Legendre.

Tal qual ocorre na Equação (2.22), trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Polinomiais. Contudo, ao contrário da Equação (2.22), a Equação (2.29) é uma equação é do tipo singular, além disso, esta sua singularidade é regular. Descobriremos mais sobre isso em breve, no Capítulo 3.

2.4 A EQUAÇÃO DE LEGENDRE E A MECÂNICA QUÂNTICA

Na Mecânica Quântica sabe-se que não existem simplesmente ondas nem partículas, o que existe na verdade é uma terceira entidade que se apresenta no nosso universo com ambas as propriedades. Damos a este ente o nome de Onda-Partícula.

Do ponto de vista das propriedades de partícula, o que a Equação de Schröndiger descreve são objetos suficientemente pequenos para serem considerados como objetos perfeitamente pontuais. Por outro lado, devido a homogeneidade e isotropia do universo, do ponto de vista das propriedades de onda, a informação sobre a onda-partícula se espalha pelo espaço-tempo de forma, em principio, esférica. A onda-partícula se manifesta simultaneamente em inúmeros pontos de uma dada região, e quando realizamos uma medição, esta entidade colapsa na existência de forma pontual, ocupando um ponto do espaço-tempo, de onde então a informação sobre sua presença se propaga isotropicamente (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

Feitas as considerações acima, fica perfeitamente natural então tomar o Sistema de Coordenadas Polares Esféricas (ARFKEN; WEBER, 2003) para descrever a parte espacial da Função de Onda. Como foi visto anteriormente, na Seção 2.2, a função de onda por ser encontrada através de uma Equação de Helmholtz, que de acordo com a Equação (2.17), pode ser expressa por,

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0, \tag{2.30}$$

onde

$$\pm k^2(\vec{\mathbf{r}}) \equiv \frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathscr{E} - V(\vec{\mathbf{r}})\right].$$

Devido a simetria do sistema de coordenadas adotado, o potencial $V\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ é um potencial de força central, ou seja, $V\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = V(r)$, sendo r o módulo de $\vec{r}$. Portanto, k^2 depende apenas da coordenada radial também, sendo então expresso por

$$\pm k^2(r) \equiv \frac{2m}{\hbar^2}[\mathscr{E} - V(r)].$$

Agora, escrevendo o Laplaciano em Coordenadas Polares Esféricas obtemos,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \pm k^2(r)\psi = 0. \tag{2.31}$$

Note que a Equação (2.31) é uma Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem, Linear, Homogênea, e Acoplada. Ela depende das variáveis r, θ e φ.

Dado ao fato de que o Potencial possui dependência somente do raio torna-se interessante separar a parte radial das partes angulares da equação. Assim, usaremos novamente Método da Separação de Varáveis (ARFKEN; WEBER, 2003), definindo

$$\psi \equiv R(r)Y(\theta,\varphi), \tag{2.32}$$

ou simplesmente,

$$\psi = RY.$$

Retornando a Equação (2.31), com a condição representada na Equação (2.32) em mãos, obtêm-se

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}RY\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}RY\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}RY \pm k^2(r)RY = 0.$$

Note que os termos que não dependem das variáveis que estão sendo derivadas saem livremente da operação,

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\pm k^2(r)RY=0.$$

Agora, dividindo toda a equação por RY, obtemos

$$\frac{\cancel{Y}}{R\cancel{Y}r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}Y\,r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}Y\,r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\pm k^2(r)=0,$$

portanto, conclui-se que

$$\frac{1}{R\,r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\,r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\,r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\pm k^2(r)=0.$$

Note que, contando da esquerda para a direita, o primeiro e o quarto termos dependem somente da variável radial, enquanto o segundo e o terceiro dependeriam somente das variáveis angulares se não fosse pelo termo $1/r^2$. No entanto, podemos resolver isso multiplicando toda a equação por r^2, assim

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\pm k^2(r)r^2=0.$$

Feito isso, os primeiro e quarto termos dependem somente da variável radial, e os segundo e terceiro termos dependem somente das variáveis angulares θ e φ.

Chamaremos, a partir de agora, o termo $k^2(r)$ simplesmente de k^2, pois sua dependência da coordenada radial já deve estar evidente para o leitor.

Ainda, tendo em vista que o primeiro termo depende de apenas uma variável, as derivadas parciais da coordenada radial convergem para derivadas ordinárias sobre a mesma variável,

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{Y\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\pm k^2r^2=0. \tag{2.33}$$

Agora, podemos reorganizar os termos de modo a isolar a parte da equação dependente de r do lado esquerdo da igualdade e a parte da equação dependente de θ e φ do lado direito,

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\pm k^2r^2=-\frac{1}{Y\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

Evidentemente, a equação acima só pode ser verdade se, e somente se, os dois lados tiverem o mesmo valor numérico ou convergirem para a mesma função, dada a situação podemos escolher o caso arbitrariamente, definiremos então que os dois lados são iguais a constante $\ell(\ell+1)$. Embora isso definitivamente não seja nada intuitivo, aprendemos na seção anterior que isso nos levará a principal equação deste texto, a Equação de Legendre, e ainda nos ajudará na Seção 3.3, quando estivermos resolvendo a equação para a parte radial do Potencial Eletrostático. Portanto, impondo a constante de separação, obtêm-se

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) \pm k^2r^2 = -\frac{1}{Y\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Y\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \ell(\ell+1).$$

Feito isso, temos agora um par de equações, uma para a parte radial e outra para a parte angular, tal qual fizemos no caso do Potencial Eletrostático, exceto que agora temos uma pequena diferença na equação da parte radial (ela tem um termo a mais).

Para a coordenada radial temos,

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) \pm k^2r^2 = \ell(\ell+1),$$

onde, reorganizando os termos todos de um mesmo lado, obtemos

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) \pm k^2r^2 - \ell(\ell+1) = 0,$$

ou ainda, multiplicando toda a equação por R, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\pm k^2r^2 - \ell(\ell+1)\right]R = 0.$$

Podemos ainda expandir o termo que contém derivadas, obtendo assim

$$2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \left[\pm k^2r^2 - \ell(\ell+1)\right]R = 0,$$

onde, reorganizando os termos, e nos lembrando da definição de k^2, temos

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left\{\frac{2m}{\hbar^2}[\mathscr{E} - V(r)]r^2 - \ell(\ell+1)\right\}R = 0. \tag{2.34}$$

A Equação (2.34) é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem, Homogênea, e com Coeficientes Polinomiais. Isso é tudo que se pode dizer sobre ela até que seja definido qual a forma do Potencial $V(r)$. Aprofundar-se sobre a forma do potencial foge ao escopo deste texto mas é possível encontrar uma discussão introdutória sobre isso em (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018), onde após feitas as devidas considerações chega-se a Equação de Laguerre, que também é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem, Homogênea, e com Coeficientes Polinomiais Singulares. Além disso, a Equação de Laguerre também satisfaz a Forma Canônica da Equação de Sturm-Liouville, dando assim origem aos Polinômios de Laguerre.

E por fim, para as coordenadas angulares temos,

$$\frac{1}{Y\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\ell(\ell+1), \tag{2.35}$$

que é idêntica ao que encontramos para as coordenadas angulares no caso do Potencial Eletrostático, logo após a Equação (2.22). Portanto, feitas as mesma considerações que antes, ela também nos levará a Equação de Legendre.

3 SOLUÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS E O MÉTODO DE FROBENIUS

3.1 ALGUNS PRÉ-ELEMENTOS

Antes de prosseguirmos em buscas da nossa solução, precisamos nos certificar de ter bem estabelecidos alguns conceitos fundamentais.

Primeiro, é necessário dizer que o método que estudaremos agora funciona muito bem especificamente para Equações Diferenciais Ordinárias de N-ésima Ordem Lineares com Coeficientes Polinomiais, como por exemplo a Equação de Cauchy-Euler (ZILL; CULLEN, 2001),

$$a_n x^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) + a_{n-1} x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x) + \cdots + a_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + a_0 f(x) = g(x),$$

ou de forma mais compacta

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = g(x), \tag{3.1}$$

onde cada um dos termos a_k é uma constante, cada termo x^k é uma potência da variável x e $g(x)$ é uma função qualquer. No entanto, o curioso desta equação é que a ordem k é sempre a mesma para a potência $a_k x^k$ e para o operador de derivada $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$, o que leva a Equação (3.1) a ser também chamada de Equação Equidimensional. Note que o coeficiente que acompanha cada uma das derivadas é um termo polinomial, e daí vem a classificação Equação Diferencial *com Coeficientes Polinomiais*.

Nesse contexto, por exemplo, a Equação (2.22) para a parte Radial do Potencial Eletrostático é uma equação de ordem $k = 2$, possui $f(x) \equiv R(r)$, possui $g(x) = 0$ e os coeficientes polinomiais são

$$\begin{cases} P_2(x) = r^2, \\ P_1(x) = 2r, \\ P_0(x) = -\ell(\ell+1), \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad \begin{cases} a_2 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_0 = -\ell(\ell+1). \end{cases}$$

Um caso mais geral que este da Equação (3.1) seria uma situação onde os coeficientes podem ser polinômios com vários termos de ordens diferentes e não apenas uma potência de valor isolado, ou seja,

$$P_n(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) + P_{n-1}(x) \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x) + \cdots + P_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + P_0(x) f(x) = g(x),$$

ou de forma mais compacta

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = g(x), \tag{3.2}$$

onde cada um dos P_k é por si só um polinômio de grau k,

$$P_k(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Uma condição importante é que o grau do polinômio P_k deve ser menor, ou no máximo igual, ao grau do Operador de Derivação que ele acompanha. Se, por exemplo, tivermos o termo $b_k = 0$ o polinômio P_k será ordem $k-1$ (e tudo bem), mas para que a Expansão em Série de Potências que veremos em breve funcione, não poderíamos ter um polinômio da ordem $k+1$, pois a ordem máxima da Equação Diferencial (3.2) é simplesmente k.

Para tornar o exemplo mais palpável, em uma Equação Diferencial de Segunda Ordem, poderíamos tranquilamente ter algo do tipo

$$\underbrace{(3x+2)}_{P_2(x)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) + \underbrace{7x}_{P_1(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \underbrace{5}_{P_0(x)}f(x) = 0,$$

onde o grau da Equação Diferencial é $k = 2$, mas o P_2 que acompanha acompanha $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ tem grau menor que 2, o grau de P_1 que acompanha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ é $k = 1$ e o grau de P_0 que acompanha o termo sem derivada é $k = 0$.

Por outro lado **não** seria permitido algo deste tipo

$$\underbrace{(3x^5 + 6x^4 + x^2 + 1)}_{P_2(x)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) + \underbrace{7x}_{P_1(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \underbrace{5}_{P_0(x)}f(x) = 0,$$

onde o polinômio P_2 que acompanha $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ é de grau 5, e embora esteja tudo em ordem com os polinômios P_1 e P_0 o fato de a ordem do polinômio P_2 ser maior que o permitido nos leva a singularidades irregulares, o que, como veremos em breve, pode fazer nossos planos de resolver a equação “irem à ruína".

De modo geral, ao longo deste texto, estaremos concentrando nossa atenção em Equações Diferenciais de Segunda Ordem, então devemos procurar soluções para equações do tipo

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) + (b_1x + b_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + c_0 f(x) = G(x), \tag{3.3}$$

onde os Coeficientes Polinomiais são respectivamente

$$\begin{cases} P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \\ P_1(x) = b_1x + b_0, \\ P_0(x) = c_0. \end{cases}$$

Nesse contexto, por exemplo, a Equação de Legendre (Equação (2.28)) é uma equação de ordem $k = 2$, possui $f(x) \equiv \Theta(x)$, possui $g(x) = 0$ e os coeficientes polinomiais são

$$\begin{cases} P_2(x) = -x^2 + 1, \\ P_1(x) = -2x^2, \\ P_0(x) = \ell(\ell+1). \end{cases} \qquad \text{Onde} \qquad \begin{cases} a_2 = -1, a_1 = 0, a_0 = \ell(\ell+1), \\ b_1 = -2, b_1 = 0, \\ c_0 = \ell(\ell+1). \end{cases}$$

Então, agora que já sabemos o que são Equações Diferenciais Ordinárias com Coeficientes Polinomiais, precisamos aprender a diferenciar se elas são Analíticas ou Singulares.

De modo geral, a Teoria de Funções Analíticas só vem a “encontrar toda sua glória"no Corpo dos Números Complexos, onde se vem a construir a Análise Complexa (ARFKEN; WEBER, 2003), e onde o conceito de Função Analítica fica extremamente bem definido em termos das condições estabelecidas nas Equações Cauchy–Riemann (ARFKEN; WEBER, 2003).

No entanto, neste trabalho nos ateremos ao conceito de Analiticidade trazido de forma mais rudimentar ao Corpo dos Números Reais por (ZILL; CULLEN, 2001), e também nos restringiremos ao caso particular das Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem com Coeficientes Polinomiais.

Uma Função qualquer é Analítica em uma dada região se, e somente se, ela e suas derivadas forem contínuas nessa região. De modo geral as funções que estamos interessados, os polinômios, são analíticos em todo seu domínio, exceto nos pontos onde há eventualmente alguma divisão por zero; Nessas regiões como se sabe, existem descontinuidades nas funções, pois a divisão por zero não é bem definida na matemática.

Seja uma situação tal qual a que ocorre na Equação (3.2). Se dividirmos toda a equação por $P_n(x)$ temos

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)+\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}f(x)+\cdots+\frac{P_1(x)}{P_n(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+\frac{P_0(x)}{P_n(x)}f(x)=\frac{G(x)}{P_n(x)}, \tag{3.4}$$

onde podemos definir as funções,

$$p_k(x)=\frac{P_k(x)}{P_n(x)} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{G(x)}{P_n(x)},$$

de modo que,

$$p_1(x)=\frac{P_1(x)}{P_n(x)},\ p_2(x)=\frac{P_2(x)}{P_n(x)},\ \cdots,\ p_{k-1}(x)=\frac{P_{k-1}(x)}{P_n(x)},\ p_k(x)=\frac{P_k(x)}{P_n(x)},$$

o que significa que temos $k-1$ termos p_k diferentes para uma Equação Diferencial de ordem k.

Observemos melhor os termos p_k, note que se trata de uma Função Racional, ou seja, é uma razão entre dois polinômios. O numerador P_k dessa razão naturalmente será sempre analítico, pois se trata de um polinômio e está bem definido em todos os seus pontos. Já o divisor P_n, que também é um polinômio, apesar de também estar bem definido em todos os seus pontos, por se encontrar no denominador da razão fará com que a função racional p_k tenha um “falha" ou descontinuidade em cada um dos zeros da função P_n. Essas descontinuidades são chamadas de "singularidades". Uma equação é dita "analítica" se esta não tiver singularidades. Uma equação é dita "singular" quando tiver em sua imagem alguma singularidade, ou seja, alguma quebra de continuidade. Se houver apenas uma singularidade na imagem, a singularidade é de grau um. Se houverem duas, três ou m singularidades, dize-se que a singularidade é de grau dois, três ou m, respectivamente.

De acordo com (ZILL; CULLEN, 2001), podemos checar se uma singularidade é regular ou irregular tomando a seguinte operação

$$(x-x_0)^{n-k}p_k(x) = (x-x_0)^{n-k}\frac{P_k(x)}{P_n(x)}, \tag{3.5}$$

onde x_0 é o ponto que está sendo avaliado enquanto analítico ou singular. Se após a operação restar no denominador um polinômio de singularidade de grau menor ou igual $n-k$, então a singularidade é dita "regular", caso contrário é dita "irregular".

Pode exemplo, nos casos em que o grau da equação é 2, realizam-se as duas operações a seguir,

$$(x-x_0)^1\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad \text{e} \quad (x-x_0)^2\frac{P_0(x)}{P_2(x)},$$

então se o resultado da expressão que está à esquerda for uma equação com singularidade de grau, no máximo, igual a um, e se o resultado da expressão que está a direita for uma singularidade de grau, no máximo, igual a dois, então x_0 é uma singularidade regular. Caso contrário, a singularidade será irregular.

3.2 SOLUÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS

De acordo com (ZILL; CULLEN, 2001), uma série de potências representa uma função, cujo domínio de continuidade é igual ao raio de convergência da série, ou seja, uma determinada função pode ser expandida em um série de potências se ela for analítica (não tiver descontinuidades) na região de interesse. Ainda de acordo com esses autores, equações como a (3.3) podem ser resolvidas através de uma série de potências. A ideia é partir do princípio de que a solução existe, e de que esta será analítica pelo menos em algum intervalo de seu domínio, portanto, dentre desse intervalo ela poderá ser expandida em uma série de potência que seja equivalente a solução.

Existe um teorema de deixa esse método mais formal, o teorema não será demonstrado aqui, apenas utilizado. Chama-se Teorema de Frobenius e de acordo com (ZILL; CULLEN, 2001) enuncia que

Teorema 3.2.1 (**Teorema de Frobenius**). *Se $x = x_0$ for um ponto singular da Equação* (3.2)*, então existe pelo menos uma solução em série na forma*

$$f(x) = (x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{k+r},$$

em que o número r é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < (x - x_0) < R$.

O expoente r serve para ajudar a decidir o formato das soluções nos casos em que pelo menos uma das singularidades é irregular. Isso não ocorrerá nas equações que resolveremos neste trabalho e portanto podemos sempre tomar $r = 0$ sem perda de generalidade. O que nos leva a outro teorema apresentado por (ZILL; CULLEN, 2001), dessa vez tratando-se de pontos ordinários.

Teorema 3.2.2 (**Existência de Soluções em Séries de Potências**). *Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da equação diferencial* (3.2)*, podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de uma série de potências centrada em x_0, isto é,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Essa série convergirá para uma solução em $|x - x_0| < R$, em que R é a distância do ponto x_0 ao ponto singular mais próximo (real ou complexo).

Perceba que o Teorema 3.2.2 é diferente do Teorema 3.2.1 no sentido em que o Teorema 3.2.2 vale apenas para pontos ordinários, enquanto o Teorema 3.2.1 vale também para pontos singulares. Com estes teoremas em mãos, já se pode prosseguir em busca da solução da Equação de Legendre.

3.3 SOLUÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS E A EQUAÇÃO RADIAL DO POTENCIAL ELETROSTÁTICO

Com o Teorema 3.2.2 em mãos, podemos resolver a Equação (2.22), expressa por

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} R + 2r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} R - \ell(\ell+1) R = 0, \tag{3.6}$$

pois colocando-a na forma canônica temos que

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} R + \frac{2r}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} R - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R = 0,$$

ou ainda, simplificando o fração no coeficiente da derivada de ordem um, temos que

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} R + \frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} R - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R = 0. \tag{3.7}$$

Na Equação (3.7) é possível identificar que

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} R + \underbrace{\frac{2}{r}}_{p_1(r)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} R - \underbrace{\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}}_{p_0(r)} R = 0.$$

Realizando a operação (3.5) em $p_1(r)$ para verificar se o ponto $r=0$ é ordinário, temos que

$$(r-0)^{2-1}\frac{2}{r}=r\times\frac{2}{r}=2,$$

onde se nota que $r=0$ é ordinário para $p_1(x)$, pois resulta em uma constante.

Realizando a operação (3.5) em $p_0(r)$ para verificar se o ponto $r=0$ é ordinário, temos que

$$(r-0)^{2-0}\frac{2}{r}=r^2\times\left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]=-\ell(\ell+1),$$

onde se nota que $r=0$ é ordinário para $p_0(x)$, pois resulta também em uma constante.

Portanto, conclui-se que $r=0$ é um ponto ordinário da Equação (3.6), o que significa que podemos fazer uso do Teorema 3.2.2 e encontrar uma solução na forma

$$R(r)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(r-0)^k \quad \therefore \quad R(r)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k. \tag{3.8}$$

Substituindo a solução (3.8) na Equação (3.6), temos que

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]+2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]-\ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]=0. \tag{3.9}$$

Resolveremos a equação acima um passo de cada vez, e um termo de cada vez. Nessa situação convém definir as seguintes nomenclaturas para que possamos nos referir de forma mais direta aos termos da equação, segue que

$$\underbrace{r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]}_{\text{Derivada de 2ª Ordem}}+\underbrace{2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]}_{\text{Derivada de 1ª Ordem}}-\underbrace{\ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]}_{\text{Derivada de Ordem 0}}=0,$$

Para a derivada de ordem zero, nada precisamos fazer.

Para a derivada de primeira ordem, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right],$$

onde se pode usar a linearidade do operador de derivada para obter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}a_kr^k\right],$$

e, dado que os termos a_k são apenas constantes escalares, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k\right]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^k\right],$$

onde, pela regra de derivação para polinômios (STEWART, 2013b), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k r^{k-1},$$

utilizando a comutatividade de escalares entre a_k e k, encontramos por fim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k r^{k-1}. \tag{3.10}$$

Note que, na Equação (3.10), o primeiro termo do somatório, isto é, quando $k = 0$, obtemos simplesmente um valor igual a zero,

$$0 a_0 r^0 = 0,$$

neste caso, podemos desprezar o termo $k = 0$ e começar a série em $k = 1$ sem perda de generalidade,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k r^{k-1}. \tag{3.11}$$

Talvez o leitor se questione o porquê de termos feito isso, mas perceba que, visto que estamos trabalhando com infinitos termos (pois o limite superior do somatório é o próprio infinito), quanto mais pudermos simplificar a conta, melhor, de modo a realizar menos trabalho. Em breve precisaremos alinhar os somatórios de modo a deixá-los todos no mesmo grau inicial, e nesta hora quanto menos termos desprezíveis tivermos, menos cálculos teremos que fazer. Então essa escolha foi feita de modo que simplificaremos os cálculos.

Agora, para a derivada de segunda ordem, temos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right],$$

aqui podemos simplesmente recordar a definição de derivadas de segunda ordem, e obter

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right]\right\},$$

note que o termo entre chaves do lado direito é exatamente a derivada de primeira ordem, cuja qual já conhecemos o resultado, que por sua vez é o lado direito da Equação (3.10). Logo, substituindo o lado direito da Equação (3.10) no lado direito da equação acima, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} k a_k r^{k-1}\right\}.$$

Podemos utilizar novamente a linearidade do operador de derivada, dessa vez no lado direito da equação acima. Assim, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} k a_k r^{k-1}\right\},$$

tendo em vista que os termos k e a_k são constantes, e que constantes comutam com o operador de derivada, temos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{k a_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r^{k-1}\right\},$$

onde pela regra para derivação de polinômios (STEWART, 2013b), temos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{k a_k (k-1) r^{k-2}\right\},$$

por fim, utilizando a comutatividade entre escalares, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{k(k-1) a_k r^{k-2}\right\}. \tag{3.12}$$

Note que, desta vez, temos valores iguais a zero para os dois primeiros termos da série no lado direito da Equação (3.12), isto é, em $k=0$ e em $k=1$,

$$0 a_0 r^0 = 0 \quad \text{e} \quad 1\underbrace{(1-1)}_{=0} a_1 r^1,$$

de modo que os dois primeiros termos da série são desprezíveis e podemos, sem perda de generalidade, iniciar o somatório em $k=2$ para simplificar os cálculos,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k r^{k-2}. \tag{3.13}$$

Agora, substituindo os resultados (3.11) e (3.13) na Equação (3.9), temos que

$$r^2\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k r^{k-2}\right] + 2r\left[\sum_{k=1}^{\infty} k a_k r^{k-1}\right] - \ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right] = 0,$$

onde se pode utilizar a propriedade distributiva e levar os termos externos aos somatórios para dentro deles, segue que

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty} r^2 k(k-1) a_k r^{k-2}\right] + \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2r k a_k r^{k-1}\right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ell(\ell+1) a_k r^k\right] = 0,$$

aqui se pode utilizar a comutatividade entre escalares para levar as potências de r que estavam do lado de fora do somatório para junto das potências de r que estavam dentro do somatório. Tal operação nos conduzirá a uma multiplicação de monômios com mesma base, onde se multiplicam suas partes literais e se adicionam seus expoentes. Neste contexto temos que

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k r^{k-2+2}\right] + \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k r^{k-1+1}\right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k\right] = 0,$$

o que resulta em

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k r^{k}\right] + \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k r^{k}\right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k\right] = 0. \tag{3.14}$$

A Equação (3.14) possui três somatórios, para facilitar a análise de cada um iremos nos referir a eles como se segue

$$\underbrace{\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k r^{k}\right]}_{\text{1º Somatório}} + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k r^{k}\right]}_{\text{2º Somatório}} - \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k\right]}_{\text{3º Somatório}} = 0.$$

Para que possamos encontrar alguma relação entre os termos destes três somatórios, é mais conveniente se pudermos relacioná-los de maneira que a análise independa dos somatórios. Para isso, tem-se a intenção de colocar os somatórios em evidência, mas infelizmente não se pode colocá-los em evidência se eles tiverem valor inicial distinto. Com a intenção de contornar esse problema pode se expandir o somatório, abrindo seus termos de maneira conveniente. Logo, para chegar ao objetivos, faremos o que se segue.

Para o primeiro somatório, quando se tem o menor valor de seus índice, isto é, $k = 2$, o grau da potência é 2. Para o segundo somatório, quando se tem o menor valor de seu índice, isto é, $k = 1$, o grau da potência é 1. E para o terceiro somatório, quando se tem o menor valor de seu índice, isto é, $k = 0$, o grau da potência é 0. Infelizmente não é possível diminuir o valor inicial do primeiro somatório, pois $k = 2$ já é seu mínimo. Mas podemos expandir o segundo e o terceiro somatório para que seus valores iniciais também sejam dois, faremos isso a seguir.

Para o segundo somatório, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k r^k = 2 \times 1 \times a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2ka_k r^k,$$

onde apenas se expandiu o somatório de modo a retirar o termo associado a $k = 1$. Dessa forma, o índice do somatório restante tem início em $k = 2$. Resolvendo a multiplicação se obtém que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k r^k = 2a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2ka_k r^k. \tag{3.15}$$

Para o segundo somatório, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k = \ell(\ell+1)a_0 r^0 + \ell(\ell+1)a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k, \tag{3.16}$$

onde, novamente, apenas se expandiu o somatório de modo a retirar os termos associados a $k=0$ e $k=1$. Dessa forma, o índice do somatório restante tem início em $k=2$.

Substituindo as equações (3.15) e (3.16) na Equação (3.14), obtêm-se que

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k r^k\right] + \left[2a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2k a_k r^k\right] - \left[\ell(\ell+1)a_0 r^0 + \ell(\ell+1)a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k\right] = 0,$$

onde eliminando os colchetes, temos que

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k r^k + 2a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2k a_k r^k - \ell(\ell+1)a_0 r^0 - \ell(\ell+1)a_1 r^1 - \sum_{k=2}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k = 0.$$

Agora, pode-se reorganizar os termos de modo a reunir os monômios soltos, deixando-os uma ao lado do outro,

$$-\ell(\ell+1)a_0 r^0 + 2a_1 r^1 - \ell(\ell+1)a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k r^k + \sum_{k=2}^{\infty} 2k a_k r^k - \sum_{k=2}^{\infty} \ell(\ell+1)a_k r^k = 0,$$

onde agora se pode colocar em evidência não apenas o símbolo de somatório, mas também os coeficientes da expansão e as potências de r. Portanto,

$$-\ell(\ell+1)a_0 r^0 + [2-\ell(\ell+1)]a_1 r^1 + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)+2k-\ell(\ell+1)]a_k r^k = 0. \tag{3.17}$$

Agora, para que possamos obter algum resultado a partir da Equação (3.17), nos reacordemos um pouco do que a Álgebra Linear nos disse sobre a igualdade de polinômios. Polinômios são iguais se, e somente se, ele forem iguais termo a termo. Segue um exemplo.

Seja a igualdade de polinômios abaixo,

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = b_0 y^0 + b_1 y^1 + \cdots + b_n y^n.$$

Esta igualdade é verdade somente se os termos forem iguais entre si, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{cases} a_0 x^0 = b_0 y^0, \\ a_1 x^1 = b_1 y^1, \\ \qquad \vdots \\ a_n x^n = b_n y_n. \end{cases}$$

Logo, retornando nossos olhos para a Equação (3.17), se nota que esta nos retorna três igualdades, sendo estas abaixo,

$$\ell(\ell+1)a_0 r^0 = 0, \tag{3.18}$$

$$[2-\ell(\ell+1)]a_1 r^1 = 0, \tag{3.19}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)+2k-\ell(\ell+1)]a_k r^k = 0. \tag{3.20}$$

As equações (3.18) e (3.19) aqui não trazem um resultado significativo, pois a Equação (3.16) é regular, ou seja, não possui singularidades. Quando se tem o caso de uma equação singular, os monômios das equações (3.18) e (3.19) servem para se encontrar relações de recorrência entre os termos, para que se possa determinar os demais coeficientes da série. Quando se tem o caso de uma equação singular irregular, os monômios das equações (3.18) e (3.19) são somados de maneira a se obter um polinômio, e este polinômio da origem a algo chamado de Equação Indicial, que ajuda a determinar o valor do expoente r que aparece no Teorema 3.2.1, o Teorema de Frobenius.

Deixando então as equações (3.18) e (3.19) de lado, voltemos nossa atenção para a Equação (3.20). Nessa equação é importante partirmos do princípio que a_k e r^k são não nulos, pois caso contrário isso faria toda a série simplesmente convergir à zero. O que não é interessante do ponto de vista de encontrar uma solução que descreva o mundo físico. Para descrever o mundo físico com o máximo de precisão possível, e interessante que o resultado seja válido para todo o domínio dos reis, afinal de contas, a natureza não assume somente os valores que desejamos, mas sim os valores consequentes dos fenômenos naturais. Logo, se $a_k \neq 0, \forall k$, e se $r^k \neq 0, \forall k$, temos que

$$k(k-1)+2k-\ell(\ell+1)=0. \tag{3.21}$$

Tendo em vista que Equação (3.6) é uma equação diferencial ordinária com coeficientes polinomiais regulares, de acordo com (ZILL; CULLEN, 2001) as raízes da (3.21) irão ditar o formato da solução. A situação se divide em três casos, nenhum deles será detalhadamente explicado ou demonstrado, mas os três serão apresentados abaixo.

Caso 1. ***Raízes Reais e Distintas.***

Quando as raízes λ_1 e λ_2 são reais e distintas, então tem-se duas soluções possíveis,

$$R_1(r)=r^{\lambda_1} \quad \text{e} \quad R_2(r)=r^{\lambda_2},$$

de modo que a combinação linear de ambas forma o conjunto fundamental de soluções

$$R(r)=Ar^{\lambda_1}+Br^{\lambda_2}.$$

Caso 2. ***Raízes Reais e Iguais.***

Quando as raízes λ_1 e λ_2 são reais e iguais, isto é, quando $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, então tem-se apenas uma solução possível,

$$R_1(r)=r^{\lambda},$$

mas é possível construir outra solução a partir destas, de maneira que ambas são linearmente independentes, e de modo que a combinação linear de ambas forma o *conjunto fundamental de soluções*

$$R(r) = Ar^{\lambda} + Br^{\lambda}\ln(r).$$

Caso 3. *Raízes Complexas Conjugadas.*

Quando as raízes λ_1 e λ_2 são complexas e são também complexo conjugado uma da outra, isto é, quando $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, então tem-se duas soluções possíveis

$$R_1(r) = r^{\alpha+i\beta} \quad \textit{e} \quad R_2(r) = r^{\alpha-i\beta},$$

de modo que a combinação linear de ambas forma o conjunto fundamental de soluções

$$R(r) = r^{\alpha}\left[A\cos\left(\beta\ln(r)\right) + Bsen\left(\beta\ln(r)\right)\right].$$

Agora, basta resolver a Equação (3.21) e ver em que caso ela se encaixa. Usando a propriedade distributiva em k, temos que

$$k(k-1) + 2k - \ell(\ell+1) = k^2 - k + 2k - \ell(\ell+1),$$

onde simplificando o lado direito, temos

$$k^2 + k - \ell(\ell+1) = 0, \tag{3.22}$$

que é nada mais que uma equação polinomial de segundo grau em k. Portanto, aplicando o método da equação resolutiva, geralmente atribuído a Bhaskara, podemos encontrar as raízes que satisfazem a equação. Então, para as raízes, temos que

$$k = \frac{-(1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times[-\ell(\ell+1)]}}{2\times 1},$$

logo, simplificando os termos, tem-se que

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\ell(\ell+1)}}{2}.$$

O termo dentro da raiz, pode ser fatorado, tal qual se segue

$$1 + 4\ell(\ell+1) = 1 + 4\ell^2 + 4\ell \quad \therefore \quad 1 + 4\ell(\ell+1) = 4\ell^2 + 4\ell + 1,$$

onde esta última expressão pode ser expressa como um binômio newtoniano de grau dois,

$$4\ell^2 + 4\ell + 1 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \therefore \quad (2\ell+1)^2 = (a+b)^2.$$

Conveniente esse resultado, não é? Assim que retornarmos este termo para a raiz quadrada de onde o retiramos, ele se cancelará automaticamente com o operador de radiciação, deixando assim as raízes da Equação (3.22) livres de termos contendo raízes quadradas. Aqui vale lembrar que $\ell(\ell+1)$ é simplesmente uma constante arbitrária que adotamos durante a separação de variáveis entre a parte radial e angular das equações de Laplace e Helmholtz, e poderíamos ter escolhido qualquer outra constante ali. Poderia ter sido, por exemplo, um simples α, mas a esta altura teríamos $1+4\alpha$ como discriminante, e seria necessário encontrar $\sqrt{1+4\alpha}$ através de alguma outra substituição que nos permitisse eliminar a raiz quadrada. Ou então, manter este termo inconveniente nas raízes da equação. Quando esta escolha de tomar a constante como $\ell(\ell+1)$ foi feita, pouco antes do resultado apresentado na Equação (2.21), o leitor foi informado de que posteriormente, ao longo do texto, ficaria claro o porquê daquela escolha. Bom, este é o porquê, somente para simplificar os termos e cancelar a operação de raiz quadrada. É isso.

Contudo, por que especificamente $\ell(\ell+1)$ e não outra constante que também nos permitisse eliminar a raiz? Bom, mais a frente, quando estivermos resolvendo a Equação de Legendre, será perceptível que a escolha da constante teria que ser exatamente algo no formato de $\ell(\ell+1)$, caso contrário a solução da equação não seria convergente, e para ela fosse convergente teríamos que fazer outra substituição de modo que ela tivesse exatamente este formato.

É impressionante o quanto essa escolha simples e despretensiosa possui consequências importantíssimas na física e na matemática. Na Mecânica Quântica essa condição necessária para à convergência da solução da Equação de Legendre irá implicar na quantização do momentum angular orbital do elétron quando se resolve a Equação de Schröndinger em três dimensões para o átomo de hidrogênio. Esse mesmo valor de ℓ irá implicar a existência de infinitas soluções distintas para infinitas equações de Legendre distintas, sendo uma para cada valor possível de ℓ. Enfim, essa escolha aparentemente simples e despretensiosa, além de simplificar a resolução desta equação radial, terá implicações impontantes em outros campos da física e da matemática. Não significa que a quantização do momentum angular orbital, por exemplo, só exista por causa dessa escolha. Não é isso. Mas essa escolha de coeficientes certamente teve grande valor histórico, chamando a nossa atenção para questões que, talvez com outra escolha, tivessem passado despercebidas por mais tempo.

Agora, retomando a resolução da Equação (3.22), temos

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\ell(\ell+1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(2\ell+1)^2}}{2} \quad \therefore \quad k = \frac{-1 \pm (2\ell+1)}{2},$$

onde obtêm-se duas raízes distintas, que chamaremos de k_+ e k_-.

Para k_+, temos que

$$k_+ = \frac{-1+(2\ell+1)}{2} = \frac{-1+2\ell+1}{2} = \frac{2\ell}{2} = \ell \quad \therefore \quad k_+ = \ell.$$

Para k_-, temos que

$$k_- = \frac{-1-(2\ell+1)}{2} = \frac{-1-2\ell-1}{2} = \frac{-2\ell-2}{2} = -\ell-1 = -(l+1) \quad \therefore \quad k_- = -(\ell+1).$$

Onde vale recordar que ℓ é um parâmetro real. Portanto, as raízes k_+ e k_- são reais e distintas, o que nos indica que a solução será aquela na forma apresentada dentro do Caso 1. Logo,

$$R(r) = Ar^{k_+} + Br^{k_-},$$

ou seja,

$$R(r) = Ar^{\ell} + Br^{-(\ell+1)},$$

ou ainda,

$$R(r) = Ar^{\ell} + B\frac{1}{r^{\ell+1}}. \tag{3.23}$$

A Equação (3.23) é a solução formal para a parte radial do Potencial Eletroestático, isto é, a Equação (2.22). Ela não satisfaz a parte radial da Função de Onda, pois esta só é satisfeita pelos Polinômios de Laguerre, que são parentes próximos dos Polinômios de Legendre. Ambos são da classe dos Polinômios Ortogonais, extensamente estudados na matemática, e ambos são também da classe das Funções Especiais, extensamente estudadas na física e na matemática. No entanto, os Polinômios de Laguerre, assim como vários outros Polinômios Ortogonais, fogem ao escopo deste trabalho, e não serão aqui apresentados.

4 AS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LEGENDRE

4.1 O MÉTODO DE FROBENIUS E A EQUAÇÃO DE LEGENDRE

No Capítulo 2 foi construída uma argumentação físico matemática, com base no Eletromagnetismo Clássico e na Mecânica Quântica, de modo que foi encontrada a Equação de Legendre,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x)-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)+\ell(\ell+1)\Theta(x)=0, \tag{4.1}$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem, Linear e Homogênea, com Coeficientes Polinomiais contendo Singularidades Regulares de Grau Dois (ZILL; CULLEN, 2001).

Colocando a Equação de Legendre na forma padrão, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x)-\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)+\frac{\ell(\ell+1)}{\left(1-x^2\right)}\Theta(x)=0, \tag{4.2}$$

onde podemos identificar os termos,

$$P_1(x)=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)},\text{e} \tag{4.3}$$

$$P_2(x)=\frac{\ell(\ell+1)}{\left(1-x^2\right)}. \tag{4.4}$$

Contemplando as equações (4.3) e (4.4) é possível constatar que ambas possuem duas singularidades, isto é, ambas deixam de ser analíticas em dois pontos. As singularidades de ambas as equações surgem nos pontos $x=+1$ e $x=-1$, pois no denominador de ambos os casos temos $x^2=(\pm1)^2=1$, o que implica $(1-1)=0$, gerando um zero no denominador, e consequentemente uma divisão por zero, que por sua vez é um resultado sem significado matemático bem definido, pois a existência de $1/0$ implicaria uma violação na definição formal de divisão.

De acordo com (ZILL; CULLEN, 2001), podemos verificar se estas singularidades são regulares ou irregulares realizando as operações,

$$\left(1-x^2\right)P_1(x), \quad \text{e} \tag{4.5}$$

$$\left(1-x^2\right)^2P_2(x), \tag{4.6}$$

se ambas as operações resultarem em funções analíticas, o pontos $x=\pm1$ serão singularidades regulares, mas se uma ou ambas as operações resultarem em funções não analíticas, as singularidades serão irregulares.

Realizando as operações (4.5) e (4.6), obtemos

$$\left(1-x^2\right)P_1(x) = \left(1-x^2\right)\frac{2x}{\left(1-x^2\right)} = 2x, \quad \text{e} \tag{4.7}$$

$$\left(1-x^2\right)^2 P_2(x) = \left(1-x^2\right)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{\left(1-x^2\right)} = \left(1-x^2\right)\ell(\ell+1), \tag{4.8}$$

contemplando o resultados (4.7) e (4.8) é possível perceber que ambos são analíticos em todos os valores de x, de modo que os pontos $x = \pm 1$ são singularidades regulares da equação Equação de Legendre. Tal resultado implica que a Equação (4.1) é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem, Linear e Homogênea, com Coeficientes Polinomiais contendo Singularidades Regulares de Grau Dois.

Por outro lado, o ponto $x = 0$ é um ponto perfeitamente regular, pois $\left(1-0^2\right) = (1-0) = 1$, que aplicado as equações (4.3) e (4.4) nos retorna,

$$P_1(0) = \frac{2 \times 0}{\left(1-0^2\right)} = \frac{0}{1} = 0, \text{e} \tag{4.9}$$

$$P_2(0) = \frac{\ell(\ell+1)}{\left(1-0^2\right)} = \frac{\ell(\ell+1)}{1} = \ell(\ell+1). \tag{4.10}$$

Refletindo sobre os resultados até aqui, sabemos que a Equação de Legendre é uma Equação Diferencial com Coeficientes Polinomiais com singularidades nos pontos $x = \pm 1$, mas que é regular em $x = 0$. De acordo com o Teorema de Frobenius e com estes resultados, fica perceptível que podemos encontrar uma solução para a Equação (4.1) na forma de uma expansão em Série de Potências em torno de $x = 0$, e esta solução será convergente para todo o intervalo aberto $(-1, +1)$.

Evocando o Teorema de Frobenius (Teorema 3.2.1), a solução será da forma,

$$\Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r}, \tag{4.11}$$

onde a_k são os coeficientes da expansão, x é a variável em questão, e o termo $k + r$ retornará o grau do polinômio resultante.

Contudo, tendo em vista que o ponto $x = 0$ pertence ao intervalo de convergência da solução, $(-1, +1)$, podemos tomar, sem perda de generalidade, o ponto $x_0 = 0$ e realizar a expansão em torno dele. E tendo em vista também que o ponto x_0 neste caso é regular, o expoente r torna-se desprezível, de modo que podemos tomá-lo, também sem perda de generalidade, como sendo nulo, isto é, $r = 0$. Feitas essas considerações, e evocando então o Teorema da Existência de Soluções em Séries de Potências (Teorema 3.2.2), a Equação (4.11) assume a forma

$$\Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-0)^k \quad \therefore \quad \Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{4.12}$$

que é simplesmente uma expansão em série da solução em torno do ponto $x_0 = 0$.

Bom, finalmente chegou a hora de resolver de fato a Equação de Legendre, para isso iremos substituir a Equação (4.12) na Equação (4.1), obtendo,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]+\ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]=0. \tag{4.13}$$

Antes de prosseguir, primeiro derivaremos as séries. Para que possamos identifica-las sem problemas, usaremos as seguintes denominações,

$$\left(1-x^2\right) \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]}_{\text{Derivada de 2ª Ordem}} - 2x \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]}_{\text{Derivada de 1ª Ordem}} + \ell(\ell+1) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}_{\text{Derivada de Ordem 0}} = 0.$$

Para a derivada de ordem zero, nada precisamos fazer.

Para a derivada de primeira ordem, já se conhece o resultado a partir da Equação (3.11), isto é,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right]=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k r^{k-1}, \tag{4.14}$$

onde fazendo a devida substituição de r por k, obtêm-se que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k\right]=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k r^{k-1} \xrightarrow{r\to x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right]=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}. \tag{4.15}$$

Para a derivada de segunda ordem, já se conhece o resultado a partir da Equação (3.13), isto é,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right]=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k r^{k-2}, \tag{4.16}$$

onde fazendo a devida substituição de r por k, obtêm-se que

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right]=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k r^{k-2} \xrightarrow{r\to x} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \tag{4.17}$$

Tendo devidamente derivado as séries, agora basta substituir o lado direito das equações (4.15) e (4.17) na Equação (4.13), de modo que obtemos

$$\left(1-x^2\right)\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}\right]-2x\left[\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}\right]+\ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]=0. \tag{4.18}$$

Quando se trata da álgebra de séries é sempre mais conveniente deixar os somatórios iniciando em índices de mesmo valor, para que se possa trabalhar com eles de maneira sincronizada. No caso da Equação (4.18), cada somatório inicia em um valor diferente para o índice, mas podemos resolver este problema com uma substituição de variável.

Para designar a que somatório estamos nos referindo durante este processo, utilizaremos a seguinte nomenclatura

$$\left(1-x^2\right)\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}}_{3^{\text{o}}\text{ Somatório}} - 2x\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}}_{2^{\text{o}}\text{ Somatório}} + \ell(\ell+1)\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k}}_{1^{\text{o}}\text{ Somatório}} = 0.$$

Os índices de um somatório são mudos, isto é, podemos substituí-los por qualquer outra letra sem perda de significado, desde que façamos os devidos ajustes em todos os termos do somatório que contenham o índice.

No primeiro somatório faremos a substituição direta da letra k pela letra m, que se representa por $k \to m$, dessa maneira, o primeiro somatório se torna,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \xrightarrow{k\to m} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \tag{4.19}$$

dessa forma, o somatório continua iniciando no índice igual a zero. Olhe com muito amor e carinho para o que foi feito, perceba que todos os índices foram devidamente substituídos no somatório do lado direito.

No segundo somatório, faremos a substituição $k \to m+1$, o que implica que o somatório iniciará em zero, pois na parte inferior do símbolo de somatório teremos

$$[k=1] \quad \Rightarrow \quad [m+1=1] \quad \Rightarrow \quad [m=1-1] \quad \Rightarrow \quad [m=0],$$

já no expoente da variável x, temos a presença do termo $k-1$, de modo que, com a substituição $k \to m+1$, temos

$$[k-1] \quad \Rightarrow \quad [m+1-1] \quad \Rightarrow \quad [m],$$

assim, fazendo a substituição, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \xrightarrow{k\to m+1} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)a_{m+1} x^m, \tag{4.20}$$

mais uma vez, perceba que todo os índices k foram devidamente substituídos por $m+1$.

Para o terceiro somatório faremos $k \to m+2$, o que implica que o somatório iniciará em zero, pois na parte inferior do símbolo de somatório teremos

$$[k=2] \quad \Rightarrow \quad [m+2=2] \quad \Rightarrow \quad [m=2-2] \quad \Rightarrow \quad [m=0],$$

já no expoente da variável x, temos a presença do termo $k+2$, de modo que, com a substituição de variável, obtemos

$$[k-2] \quad \Rightarrow \quad [m+2-2] \quad \Rightarrow \quad [m],$$

logo, fazendo a substituição, temos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \xrightarrow{k\to m+2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m, \tag{4.21}$$

por fim, mas não menos importante, substituiremos o lado direito das expressões (4.19), (4.20), e (4.21) na Equação (4.18), de modo a obter

$$\left(1-x^2\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m\right] - 2x\left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)a_{m+1}x^m\right] + \ell(\ell+1)\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right] = 0. \tag{4.22}$$

Agora, que todos os somatórios estão iniciando no mesmo índice, pode-se prosseguir o cálculo com clareza. Para prosseguir, utilizaremos a seguinte nomenclatura

$$\underbrace{\left(1-x^2\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m\right]}_{I} \underbrace{- 2x\left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)a_{m+1}x^m\right]}_{II} \underbrace{+ \ell(\ell+1)\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right]}_{III} = 0.$$

Na ideia de simplificar cada vez mais a equação, podemos passar os temos que multiplicam os somatórios para dentro deles. Isso é possível porque estes termos não dependem dos índices do somatório, de modo que, pela propriedade distributiva, eles podem entrar ou sair do somatório a qualquer momento.

Para o termo I, temos

$$\left(1-x^2\right)\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m,$$

para facilitar a compreensão do que será feito, chamaremos momentaneamente o somatório inteiro de alfa, ou seja,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m \equiv \alpha,$$

dessa forma,

$$\left(1-x^2\right)\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = \left(1-x^2\right)\alpha,$$

onde aqui aplica-se a propriedade distributiva, de modo a obter-se,

$$\left(1-x^2\right)\alpha = \alpha - x^2\alpha,$$

e agora substitui-se α de volta pelo somatório,

$$\left(1-x^2\right)\alpha = \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - x^2\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m,$$

onde agora, apenas transfere-se o x^2 que multiplica o segundo somatório, para dentro dele. Perceba que, ao fazermos isso, dentro do segundo somatório teremos

$$x^2(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = (m+2)(m+1)a_{m+2}\underbrace{x^2x^m}_{x^{m+2}},$$

desse modo, o segundo somatório será rescrito como segue

$$x^2\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}\underbrace{x^2x^m}_{x^{m+2}},$$

portanto, conclui-se que para I, temos

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = & \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m \\ & - \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Para II, temos

$$2x\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m,$$

onde agora transferiremos não apenas a variável x, mas também o número dois que a acompanha, para dentro do somatório. Desse modo, dentro do somatório, teremos

$$2x(m+1)a_{m+1}x^m = 2(m+1)a_{m+1}\underbrace{xx^m}_{x^{m+1}},$$

portanto, para II, conclui-se que

$$2x\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m = \sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}. \tag{4.24}$$

Para III, temos

$$\ell(\ell+1)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m,$$

onde simplesmente toda a constante $\ell(\ell+1)$ será transportada para dento do somatório, portanto,

$$\ell(\ell+1)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m = \sum_{m=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_mx^m. \tag{4.25}$$

Por fim, substituiremos o lado direito das equações (4.23), (4.24), e (4.25) na Equação (4.22), de modo a obter

$$\left(1-x^2\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m\right]-2x\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m\right]+\ell(\ell+1)\left[\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right]$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m-\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}\right]-\sum_{m=0}^{\infty}\left[2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}\right]$$
$$+\left[\sum_{m=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m\right],$$

portanto,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m-\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}-\sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m=0. \quad (4.26)$$

Para a análise que se segue, utilizaremos a seguinte nomenclatura

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m}_{\text{1º Somatório}}-\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}}_{\text{2º Somatório}}-\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}}_{\text{3º Somatório}}$$
$$+\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m}_{\text{4º Somatório}}=0. \quad (4.27)$$

Note, contudo, que embora os somatórios iniciem todos no mesmo valor, os valores das potências de x iniciarão em valores diferente. O objetivo aqui é encontrar uma relação entre os termos coeficientes, então é interessante que se possa descartar os termos com expoentes quando for necessário. Por isso, eles serem diferentes é um problema que deve ser resolvido.

Felizmente, podemos contornar este problema com mais uma substituição de variável, primeiro precisamos deixar todas as séries na mesmo valor inicial para o expoente, em seguida basta fazer a substituição de variável para ajustar os somatórios e deixa-los iguais.

No primeiro somatório, quado $m=0$, temos a potência x^0. No segundo somatório, quando $m=0$, temos a potência x^2. No terceiro somatório, quando $m=0$, temos a potência x^1. E, por fim, no quarto somatório, quando $m=0$, temos a potência x^0.

Organizando essas ideias, temos

$$
\begin{array}{llll}
1^{\text{o}} \text{ Somatório} & \rightarrow & m=0 & \Rightarrow & x^0, \\
2^{\text{o}} \text{ Somatório} & \rightarrow & m=0 & \Rightarrow & x^2, \\
3^{\text{o}} \text{ Somatório} & \rightarrow & m=0 & \Rightarrow & x^1, \\
4^{\text{o}} \text{ Somatório} & \rightarrow & m=0 & \Rightarrow & x^0.
\end{array}
$$

Contemplando a Equação (4.27), é perceptível que podemos expandir os somatórios 1º, 3º e 4º, de maneira que eles passem a iniciar com potências de expoente igual a 2, mas infelizmente não é possível fazer o 2º Somatório iniciar uma potência mais baixa, pois não se pode tomar valores negativos de m em séries deste tipo. Quando se tem valores negativos de índice negativos trata-se então de uma soma vazia, definida como zero, (o elemento neutro da soma). Portanto, para evitar tal situação, nos resta apenas manipular os somatórios 1º, 3º e 4º.

Expandindo o 1º Somatório para retirar os termos de ordem 0 e 1, temos

$$
\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = (0+2)(0+1)a_{0+2}x^0 + (1+2)(1+1)a_{1+2}x^1 + \sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m,
$$

onde, resolvendo os termos entre parênteses, temos

$$
\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = 2a_2x^0 + 6a_3x^1 + \sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m, \tag{4.28}
$$

dessa forma a primeira potência do somatório será de ordem 2.

Para o 2º somatório, nada precisamos fazer, pois este já tem sua primeira potência no menor valor possível.

Expandindo o 3º Somatório, para retirar a potência de ordem 1, temos

$$
\sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1} = 2(0+1)a_{0+1}x^{0+1} + \sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1},
$$

onde, resolvendo os termos entre parênteses, temos

$$
\sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1} = 2a_1x^1 + \sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}, \tag{4.29}
$$

dessa forma, a primeira potência do somatório também será de ordem 2.

Expandindo o 4º Somatório para retirar os termos de 0 e 1, temos

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m = \ell(\ell+1)a_0x^0 + \ell(\ell+1)a_1x^1 + \sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m, \tag{4.30}
$$

dessa forma, a primeira potência do somatório terá ordem 2, assim como nos demais somatórios.

Substituindo os lados direitos das equações (4.28), (4.29) e (4.30), em seus respectivos termos na Equação (4.26), obtemos

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2} - \sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m = \left[2a_2x^0+6a_3x^1+\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m\right]$$

$$-\sum_{m=10}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2} - \left[2a_1x^1+\sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}\right]$$

$$+\left[\ell(\ell+1)a_0x^0+\ell(\ell+1)a_1x^1+\sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m\right].$$

É altamente recomendado que, neste ponto, o leitor pare, retroceda a este último cálculo, e por obséquio reflita sobra a igualdade acima (inclusive sobre onde está o sinal de igualdade), de modo que verifique onde está cada termo do lado direito e onde está sua origem do lado esquerdo.

Agora, prosseguindo com o cálculo, dada a igualdade acima, temos

$$\underbrace{\left[2a_2x^0+6a_3x^1+\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m\right]}_{\text{Advindo do 1º Somatório}} \underbrace{-\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}}_{\text{Exatamente o 2º Somatório}}$$

$$\underbrace{-\left[2a_1x^1+\sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}\right]}_{\text{Advindo do 3º Somatório}} + \underbrace{\left[\ell(\ell+1)a_0x^0+\ell(\ell+1)a_1x^1+\sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m\right]}_{\text{Advindo do 4º Somatório}} = 0,$$

onde eliminando os colchetes e realizando as devidas mudanças de sinal no termo advindo do 3º Somatório, se obtêm

$$2a_2x^0+6a_3x^1+\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}$$

$$-2a_1x^1-\sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}+\ell(\ell+1)a_0x^0+\ell(\ell+1)a_1x^1+\sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m = 0.$$

Podemos reorganizar os termos, de modo a deixar as potências livres juntas, e também de modo a deixar os somatórios juntos, fazendo isso, obtemos

$$2a_2x^0+6a_3x^1-2a_1x^1+\ell(\ell+1)a_0x^0+\ell(\ell+1)a_1x^1+\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}-\sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}+\sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m = 0,$$

por fim, colocando x^0 e x^1 em evidência, obtemos

$$[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0]x^0 + [6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1]x^1 + \sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2} - \sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1} + \sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m = 0. \quad (4.31)$$

Contemplando a Equação (4.31) se nota que ela representa de fato um polinômio, com os termos de ordem 0 e 1 livres, e com os termos de ordem maior que 2 representados pela soma das séries. Seria extremamente conveniente se pudéssemos representar os termos de ordem maior do que 2 com apenas uma série, e felizmente isso é possível, mas primeiro precisa-se de mais uma substituição de variável.

Substituiremos os índices das séries para que iniciem todas no índice de valor 2, dessa maneira todos os expoentes também terão valor 2. Nesta abordagem, utilizaremos a seguinte nomenclatura

$$\underbrace{[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0]x^0 + [6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1]x^1}_{\text{Polinômio I(x)}} + \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m}_{\text{1º Somatório}}$$

$$-\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}-(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2}}_{\text{2º Somatório}} - \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1}}_{\text{3º Somatório}} + \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m}_{\text{4º Somatório}} = 0.$$

Observa-se que na equação anterior, os índices dos quatro somatórios fazem com que as potências iniciem na ordem dois, ou seja,

$$\begin{aligned}
&\text{1º Somatório} &\rightarrow\quad & m = 2 &\Rightarrow\quad & x^2,\\
&\text{2º Somatório} &\rightarrow\quad & m = 0 &\Rightarrow\quad & x^2,\\
&\text{3º Somatório} &\rightarrow\quad & m = 1 &\Rightarrow\quad & x^2,\\
&\text{4º Somatório} &\rightarrow\quad & m = 2 &\Rightarrow\quad & x^2.
\end{aligned}$$

Trabalharemos as substituições uma à uma, para o 1º Somatório substitui-se diretamente m por n, de modo que,

$$\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m \quad \xrightarrow{m\to n} \quad \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \quad (4.32)$$

Para o 2º Somatório substitui-se m por $n-2$, dessa forma para os termos do somatório temos

$$(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2} \quad \xrightarrow{m\to n-2} \quad (n-2+2)(n-2+1)a_{n-2+2}x^{n-2+2} = n(n-1)a_n x^n,$$

e para índice inicial do somatório, temos

$$m = 0 \quad \xrightarrow{m\to n-2} \quad n-2 = 0 \;\therefore\; n = 2,$$

portanto, para o 2º Somatório, temos

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m+2} \xrightarrow{m\to n-2} \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n. \tag{4.33}$$

Para o 3º Somatório substitui-se m por $n-1$, dessa forma para os termos do somatório, temos

$$2(m+1)a_{m+1}x^{m+1} \xrightarrow{m\to n-1} 2(n-1+1)a_{n-1+1}x^{n-1+1} = 2(n)a_n x^n,$$

e para o índice inicial do somatório, temos

$$m=1 \xrightarrow{m\to n-1} n-1=1 \;\therefore\; n=2,$$

portanto, para o 3º Somatório, temos

$$\sum_{m=1}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^{m+1} \xrightarrow{m\to n-1} \sum_{n=2}^{\infty}2na_n x^n. \tag{4.34}$$

Para o 4º Somatório substitui-se diretamente m por n, dessa forma para os termos do somatório, temos

$$\ell(\ell+1)a_m x^m \xrightarrow{m\to n} \ell(\ell+1)a_n x^n,$$

e para o índice inicial do somatório, temos

$$m=2 \xrightarrow{m\to n} n=2,$$

portanto, para o 4º Somatório, temos

$$\sum_{m=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_m x^m \xrightarrow{m\to n} \sum_{n=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_n x^n. \tag{4.35}$$

Portanto, agora temos a seguinte relação entre os índices e os valores iniciais das potências,

1º Somatório $\rightarrow$ $n=2$ $\Rightarrow$ x^2,

2º Somatório $\rightarrow$ $n=2$ $\Rightarrow$ x^2,

3º Somatório $\rightarrow$ $n=2$ $\Rightarrow$ x^2,

4º Somatório $\rightarrow$ $n=2$ $\Rightarrow$ x^2.

Por fim, substituindo respectivamente o lado direito das equações (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35), em seus termos referentes na Equação (4.31), obtemos

$$[2a_2+\ell(\ell+1)a_0]x^0+[6a_3-2a_1+\ell(\ell+1)a_1]x^1+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n-\sum_{n=2}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\ell(\ell+1)a_n x^n=0,$$

onde, agora que são todos iguais, podemos colocar os símbolos de somatório em evidência;

$$[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0]x^0 + [6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1]x^1$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - n(n-1)a_n x^n - 2na_n x^n + \ell(\ell+1)a_n x^n\right] = 0,$$

e também pode-se colocar o termo x^n em evidência, dessa forma, obtêm-se

$$[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0]x^0 + [6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1]x^1$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \ell(\ell+1)a_n]x^n = 0. \tag{4.36}$$

É notável o resultado (4.36), vale contemplá-lo um pouco e refletir sobre o caminho percorrido até aqui. Primeiro parte-se da Equação de Legendre ((4.1)), e em seguida se lança mão do Teorema de Frobenius, para argumentar que a solução pode ser expressa por uma série de potências como a que foi expressa na Equação (4.12). Em seguida substituiu-se a Equação (4.12) na Equação (4.1), onde realizaram-se as devidas operações de derivação e substituição para se obter a Equação (4.22), então a propriedade distributiva foi aplicada e obteve-se a Equação (4.26). Por fim, foram feitas as devidas expansões nos somatórios e a devida substituição de variável, para que por fim se chegasse a Equação (4.36).

A Equação (4.36) é evidentemente uma série de potências, seu primeiro termo é termo de ordem 0 acompanhado de seu respectivo coeficiente, o segundo termo é o termo de ordem 1 também acompanhado de seu respectivo coeficiente, e o terceiro termo é um somatório que representa todos os outros infinitos termos de ordem maior que um, cada termo com seus respectivos coeficientes. Dessa maneira têm-se todos os termos necessários para formar um polinômio.

Embora a Equação (4.36) indique que a Equação (4.12) é uma boa solução para a Equação (4.1) do ponto de vista matemático, do ponto de vista físico essa solução ainda tem alguns problemas, a começar pelos coeficientes, que tem sua forma desconhecida, e para além disso é extremamente complexo determinar o valor ou a expressão de infinitos coeficientes, precisamos generalizar uma expressão para eles e assim tornar o cálculo possível.

Outro problema da solução (4.12) é que seu raio de convergência se mantêm apenas no intervalo aberto $[-1,1]$. Para que a solução seja fisicamente aceitável, precisa-se que esta seja convergente em todos os pontos de interesse, o que tanto no caso do Potencial Eletroestático quanto no caso da Equação de Schrödinger, significa que ela precisa ser válida em todos os valores do espaço, inclusive na origem. Vale lembrar que estas equações foram a força motriz que nos delegou o trabalho de aprender a resolver a Equação de Legendre. O objetivo central neste trabalho é principalmente apresentar uma solução para o Potencial Eletroestático e para a Equação de Schrödinger no caso em que elas têm simetria no Ângulo Azimutal.

Por fim, tem ainda o fato de que a solução é uma somatório com infinitos termos, e além de isso evitar a convergência para valores maiores do que $x = \pm 1$, também nos leva a uma situação onde esta solução não pode ser facilmente representada em termos de uma função elementar, isto é, ela não é facilmente convertida em apenas senos e cossenos, ou apenas logaritmos e exponencias, ou pelo menos uma mistura dos quatro. Isso nos delega o dever de trabalhar de fato com o somatório constantemente, e ter que somar esses termos sempre que se for desenvolver um problema.

Bom, ainda faltam alguns passos para de fato encontrarmos uma solução fisicamente aceitável. Mas podemos começar com o problema de determinar os coeficientes, basta nos lembrarmos um pouco do que a Álgebra Linear nos disse sobre a igualdade de polinômios. Polinômios são iguais se, e somente se, ele forem iguais termo a termo. Tal qual ocorreu no capítulo três.

Logo, voltando novamente os olhos para a Equação (4.36), ela nos dá exatamente esta situação, o que significa que os termos daquele polinômio são todos simultaneamente iguais a zero, ou seja

$$[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0]x^0 = 0, \tag{4.37}$$

$$[6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1]x^1 = 0, \tag{4.38}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \ell(\ell+1)a_n]x^n = 0. \tag{4.39}$$

Acima temos três equações interessantes, iremos analisá-las uma à uma, começando pela primeira linha, a Equação (4.37), temos que

$$[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0]x^0 = 0,$$

onde $x^0 = 1$, portanto,

$$2a_2 + \ell(\ell+1)a_0 = 0,$$

agora, isolando o termo a_2, temos

$$a_2 = -\frac{\ell(\ell+1)}{2}a_0. \tag{4.40}$$

Para a Equação (4.38), temos

$$[6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1]x^1 = 0,$$

podemos considerar $x \neq 0$, pois como foi comentado anteriormente queremos uma solução válida para qualquer valor de x, portanto, os termos entre colchetes devem resultar em zero, isto é

$$6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1 = 0,$$

onde podemos colocar o termo a_1 em evidência,

$$6a_3 + [-2 + \ell(\ell+1)]a_1 = 0,$$

agora, isolando o termo a_3, temos

$$a_3 = -\frac{-2 + \ell(\ell+1)}{6}a_1,$$

onde devido ao sinal que antecede a fração iremos inverter os sinais do numerador,

$$a_3 = \frac{2 - \ell(\ell+1)}{6}a_1. \tag{4.41}$$

Para a Equação (4.39), temos

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \ell(\ell+1)a_n]x^n = 0,$$

onda novamente se assume $x \neq 0$, para garantir que os cálculos retornarão uma expressão válida para qualquer valor de x, portanto,

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \ell(\ell+1)a_n] = 0,$$

dado que cada um dos termos dessa somatório será igualmente zero, e dado que todos obedecerão o padrão da expressão que está dentro do somatório, usaremos apenas essa expressão para o cálculo e ela valerá para todos os valores do índice,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \ell(\ell+1)a_n = 0,$$

onde podemos colocar a_n em evidência,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + [-n(n-1) - 2n + \ell(\ell+1)]a_n = 0,$$

agora é possível simplificar a equação acima, condensando os termos $-n(n-1)$ e $-2n$, segue que, $-n(n-1)-2n = -n^2+n-2n = -n^2-n = -n(n+1)$, portanto, $-n(n-1)-2n = -n(n+1)$. Em consequência disso, podemos reescrever a relação como se segue,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + [-n(n+1) + \ell(\ell+1)]a_n = 0,$$

por fim, isolando a_{n+2}, temos

$$a_{n+2} = -\frac{-n(n+1) + \ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}a_n,$$

onde devido ao sinal que antecede a fração iremos inverter os sinais do numerador,

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}a_n. \tag{4.42}$$

Esta última relação é chamada de Equação de Recorrência, pois é uma relação cursiva, onde se insere o valor de n em ambos os lados da equação e esta retorna um valor para a_{n+2} que sempre depende de outro valor anterior a_n.

Contemplemos um pouco estes resultados. A Equação (4.40) nos fornece uma expressão para o cálculo de a_2 desde que se saiba o valor de a_0, e a Equação (4.41) nos fornece uma expressão para o cálculo de a_3 desde que se saiba a_1. Já a expressão (4.42) nos fornece uma expressão para o calcular o valor de qualquer a_{n+2}, desde que se saiba o valor a_n, e desde que n seja maior ou igual a 2, pois a expressão foi originada em um somatório de com valor inicial de índice definido como 2.

Para procurar ainda alguma relação entre as três expressões, podemos observá-las lado à lado,

$$a_2 = -\frac{\ell(\ell+1)}{2}a_0, \qquad a_3 = \frac{2-\ell(\ell+1)}{6}a_1, \qquad a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

Note que existe um certo padrão entre a_1, a_3 e a_{n+2}, onde ambas as relações podem ser colocadas em um formato tal que,

$$\gamma = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 \times \alpha_2}\gamma_0. \tag{4.43}$$

Para que a_2 tenha esse formato basta apenas somar um zero em seu numerador, o que não irá alterar e nada seu resultado, e também multiplicar seu denominador por um, o que também não altera seu valor, segue que,

$$a_2 = \frac{0-\ell(\ell+1)}{2\times 1}a_0.$$

Já para a_3, para que tenha o formato desejado, basta apenas fatorar o seu seu denominador tendo em vista que $6 = 3\times 2$, dessa forma temos que

$$a_3 = \frac{2-\ell(\ell+1)}{3\times 2}.$$

Dessa forma, voltemos a comparar as três relações,

$$a_2 = \frac{0-\ell(\ell+1)}{2\times 1}a_0, \qquad a_3 = \frac{2-\ell(\ell+1)}{3\times 2}a_1, \qquad a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}a_n,$$

onde já se percebe maior semelhança entre as relações, porém nenhuma delas teve seu valor alterado.

Podemos melhorar ainda mais a visualização desse padrão, no numerador da relação para a_2 o termo 0 será substituído sem alteração de seu valor pelo termo 0×1, dessa forma se obtém,

$$a_2 = \frac{0\times 1-\ell(\ell+1)}{2\times 1}a_0, \tag{4.44}$$

e no numerador da relação trocaremos o termo 2 será substituído, também sem perda de generalidade, pelo termo 1×2, dessa forma obtêm-se que,

$$a_3 = \frac{1\times 2 - \ell(\ell+1)}{3\times 2} a_1. \tag{4.45}$$

Dessa forma, comparando novamente as três expressões, temos

$$a_2 = \frac{0\times 1-\ell(\ell+1)}{2\times 1} a_0, \quad a_3 = \frac{1\times 2-\ell(\ell+1)}{3\times 2} a_1, \quad a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)} a_n,$$

dessa forma as três expressões têm o mesmo formato da Equação (4.43). Agora, para verificar se esse padrão encontrado é verdadeiro, vamos atribuir alguns valores para n na última relação. O valor mais baixo possível é 2, visto que o somatório que originou a relação tinha o valor inicial de seu índice definido como 2.

Logo, para $n=2$, temos

$$a_{2+2} = a_4 = \frac{2(2+1)-\ell(\ell+1)}{(2+2)(2+1)} a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{2\times 3-\ell(\ell+1)}{4\times 3} a_2,$$

onde se conhece a_2 a partir da Equação (4.44), portanto,

$$a_4 = \frac{2\times 3-\ell(\ell+1)}{4\times 3} \times \frac{0\times 1-\ell(\ell+1)}{2\times 1} a_0 \;\therefore\; a_4 = \frac{[2\times 3-\ell(\ell+1)] \times [0\times 1-\ell(\ell+1)]}{4\times 3\times 2\times 1} a_0,$$

ou ainda, colocando o numerador em ordem crescente, temos

$$a_4 = \frac{[0\times 1-\ell(\ell+1)] \times [2\times 3-\ell(\ell+1)]}{4\times 3\times 2\times 1} a_0. \tag{4.46}$$

Para $n=3$, temos

$$a_{3+2} = a_5 = \frac{3(3+1)-\ell(\ell+1)}{(3+2)(3+1)} a_3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \frac{3\times 4-\ell(\ell+1)}{5\times 4} a_3,$$

onde se conhece a_3 a partir da Equação (4.45), portanto,

$$a_5 = \frac{3\times 4-\ell(\ell+1)}{5\times 4} \times \frac{1\times 2 - \ell(\ell+1)}{3\times 2} a_1 \;\therefore\; a_5 = \frac{[3\times 4-\ell(\ell+1)] \times [1\times 2 - \ell(\ell+1)]}{5\times 4\times 3\times 2} a_1,$$

ou ainda, colocando o numerador em ordem crescente, temos

$$a_5 = \frac{[1\times 2-\ell(\ell+1)] \times [3\times 4-\ell(\ell+1)]}{5\times 4\times 3\times 2} a_1. \tag{4.47}$$

Para $n=4$, temos

$$a_{4+2} = a_6 = \frac{4(4+1)-\ell(\ell+1)}{(4+2)(4+1)} a_4 \quad \Rightarrow \quad a_6 = \frac{4\times 5-\ell(\ell+1)}{6\times 5} a_4,$$

onde se conhece a_4 a partir da Equação (4.46), portanto,

$$a_6 = \frac{4\times 5-\ell(\ell+1)}{6\times 5} \times \frac{[0\times 1-\ell(\ell+1)][2\times 3-\ell(\ell+1)]}{4\times 3\times 2\times 1} a_0,$$

logo,

$$a_6 = \frac{[4\times 5-\ell(\ell+1)]\ \times\ [0\times 1-\ell(\ell+1)]\ \times\ [2\times 3-\ell(\ell+1)]}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}a_0,$$

onde colocando o numerador em ordem crescente temos

$$a_6 = \frac{[0\times 1-\ell(\ell+1)]\ \times\ [2\times 3-\ell(\ell+1)]\ \times\ [4\times 5-\ell(\ell+1)]}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}a_0. \tag{4.48}$$

Para $n = 5$, temos

$$a_{5+2} = a_7 = \frac{5(5+1)-\ell(\ell+1)}{(5+2)(5+1)}a_5 \quad \Rightarrow \quad a_7 = \frac{5\times 6-\ell(\ell+1)}{7\times 6}a_5,$$

onde se conhece a_5 a partir da Equação (4.47), portanto,

$$a_7 = \frac{5\times 6-\ell(\ell+1)}{7\times 6} \times \frac{[1\times 2-\ell(\ell+1)]\ \times\ [3\times 4-\ell(\ell+1)]}{5\times 4\times 3\times 2}a_1,$$

logo,

$$a_7 = \frac{[5\times 6-\ell(\ell+1)]\ \times\ [1\times 2-\ell(\ell+1)]\ \times\ [3\times 4-\ell(\ell+1)]}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}a_1,$$

colocando o numerador em ordem crescente temos

$$a_7 = \frac{[1\times 2-\ell(\ell+1)]\ \times\ [3\times 4-\ell(\ell+1)]\ \times\ [5\times 6-\ell(\ell+1)]}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}a_1. \tag{4.49}$$

Para $n = 6$, temos

$$a_{6+2} = a_8 = \frac{6(6+1)-\ell(\ell+1)}{(5+2)(6+1)}a_6 \quad \Rightarrow \quad a_8 = \frac{6\times 7-\ell(\ell+1)}{8\times 7}a_6,$$

onde se conhece a_6 a partir da Equação (4.48), portanto,

$$a_8 = \frac{6\times 7-\ell(\ell+1)}{8\times 7} \times \frac{[0\times 1-\ell(\ell+1)]\ \times\ [2\times 3-\ell(\ell+1)]\ \times\ [4\times 5-\ell(\ell+1)]}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}a_0,$$

logo,

$$a_8 = \frac{[6\times 7-\ell(\ell+1)]\ \times\ [0\times 1-\ell(\ell+1)]\ \times\ [2\times 3-\ell(\ell+1)]\ \times\ [4\times 5-\ell(\ell+1)]}{8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}a_0,$$

colocando o numerador em ordem crescente, obtêm-se

$$a_8 = \frac{[6\times 7-\ell(\ell+1)]\ \times\ [0\times 1-\ell(\ell+1)]\ \times\ [2\times 3-\ell(\ell+1)]\ \times\ [4\times 5-\ell(\ell+1)]}{8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}a_0. \tag{4.50}$$

Contemplando as equações (4.44) à (4.50) é possível perceber que seus denominadores podem sempre ser condensados em um fatorial. Um fatorial é simplesmente uma operação matemática que consiste em multiplicar um número por por todos os seus antecessores até 1, e representamos essa operação pelo símbolo latino de exclamação "!", ou seja, para um dado número n, temos

$$n! \equiv n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1,$$

por vezes esses números aparecem explicitamente somente até o número 2, visto que 1 é o elemento neutro da multiplicação e não altera o resultado.

Podemos ainda utilizar uma notação um pouco mais complexa, trata-se da notação de Produtório. Tendo em vista que a utilizaremos em breve, vale a pena introduzi-la agora. A notação de produtório tem uma função parecida com a notação de somatório, exceto que no somatório trata-se evidentemente de uma adição, já no produtório trata-se de uma multiplicação. Assim como no somatório somamos termo a termo de acordo com valor dos índices, no produtório multiplicamos termo a termo de acordo com os índices. Formalmente, temos que o produtório é representado pela legra grega maiúscula Pi, de forma que

$$\prod_{j=0}^{n} x_j \equiv x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n,$$

dessa maneira, a operação fatorial pode ser reescrita como segue,

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j,$$

ou ainda,

$$n! = \prod_{j=0}^{n-1} (n-j).$$

Após essa breve consideração, retornemos novamente nossa atenção as equações (4.44) à (4.50), como dito anteriormente, seus denominadores podem ser condensados utilizando o símbolo da operação fatorial (vale lembrar que, embora na relações de índice ímpar os números apareçam explicitamente com a multiplicação até número 2, o número 1 está ali, ele está apenas oculto), reescrevendo as relações em termos desse símbolo, temos que

$$a_2 = \frac{0\times 1-\ell(\ell+1)}{2!}a_0, \tag{4.51}$$

$$a_3 = \frac{1\times 2-\ell(\ell+1)}{3!}a_1, \tag{4.52}$$

$$a_4 = \frac{[0\times 1-\ell(\ell+1)]\times[2\times 3-\ell(\ell+1)]}{4!}a_0, \tag{4.53}$$

$$a_5 = \frac{[1\times 2-\ell(\ell+1)]\times[3\times 4-\ell(\ell+1)]}{5!}a_1, \tag{4.54}$$

$$a_6 = \frac{[4\times 5-\ell(\ell+1)]\times[0\times 1-\ell(\ell+1)]\times[2\times 3-\ell(\ell+1)]}{6!}a_0, \tag{4.55}$$

$$a_7 = \frac{[1\times 2-\ell(\ell+1)]\times[3\times 4-\ell(\ell+1)]\times[5\times 6-\ell(\ell+1)]}{7!}a_1, \tag{4.56}$$

$$a_8 = \frac{[6\times 7-\ell(\ell+1)]\times[0\times 1-\ell(\ell+1)]\times[2\times 3-\ell(\ell+1)]\times[4\times 5-\ell(\ell+1)]}{8!}a_0. \tag{4.57}$$

Observando as relações acima, espera-se que fique perceptível que as relações se dividem em dois grupos, o dos coeficientes que são proporcionais a a_0 e dos coeficientes que são proporcionais a a_1. Também vale notar que os coeficientes que são proporcionais a a_0 são todos pares, enquanto os coeficientes que são proporcionais a a_1 são todos ímpares. Esse padrão tende a se manter, pois devido ao fato de todos advirem da Equação (4.42), eles continuarão oscilando da mesma maneira.

A principal vantagem de voltar os olhos para as equações (4.51) à (4.57) é que a partir delas fica possível formular expressões gerais que represem os coeficientes de modo mais direto do que a Equação (4.42).

Observando os coeficientes de índice par, é possível observar que, no denominador, o número que está associado ao fatorial é exatamente o número que está no índice de a. Em a_2 o fatorial do denominador é construído a partir do 2, em a_4 o fatorial do denominador é construído a partir do 4, e assim sucessivamente.

Também se nota que a partir de a_2 sempre surge mais um termo multiplicativo no numerador. Em a_2 temos um termo, em a_4 temos dois termos, sendo um em cada colchete, em a_6 temos três termos, sendo também um em cada colchete, e assim sucessivamente.

É possível notar ainda que, dentro dos colchetes, sempre há a presença da constante $\ell(\ell+1)$, a constante que herdamos da equação radial durante a separação de variáveis.

E além, dentro do colchetes também há a presenta de dois termos que se multiplicam, e estes termos são sempre, respectivamente, duas e uma unidade menores que o índice em questão. Por exemplo, em a_2 temos a multiplicação 0×1, que podem ser representados respectivamente por $2-2=0$ e $2-1=1$. Em a_4, além do termo multiplicativo herdado de a_2, temos a presença de mais um termo multiplicativo representado pelos colchetes, onde novamente se observa a presença da constante $\ell(\ell+1)$, e também se nota a presença de dois termos que se multiplicam, neste caso trata-se de 2×3, que podem ser reapresentados respectivamente por $4-2=2$ e $4-1=3$. Em a_6 e a_8 ocorrem situações análogas, e certamente também ocorrerão situações análogas em a_{10}, a_{12},a_{14}, e assim sucessivamente.

Portanto, com base nas análises feitas acima, podemos condensar todos os coeficientes de índice par na seguinte expressão

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} [k(k+1) - \ell(\ell+1)]}{n!} a_0,$$

onde lançamos mão do símbolo de produtório outrora apresentado no texto. Podemos ainda reorganizar os termos para evidenciar o produtório, de forma que

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} [k(k+1) - \ell(\ell+1)]. \tag{4.58}$$

Perceba que a expressão (4.58) realmente retorna todos as relações pares das expressões (4.51), (4.53), (4.55) e (4.57) de forma bem mais direta que a expressão (4.42). Aqui recomenda-se fortemente que o estudante reflita um pouco, atribua valores a n, e verifique para que tenha toda certeza de que o que foi dito é verdade.

Por fim, perceba que se tomarmos $n = 0$ a relação (4.58) também funciona, pois termos o que segue

$$a_0 = \underbrace{\frac{a_0}{0!}}_{=1} \prod_{k=0}^{\overbrace{0-1}^{=-1}} [k(k+1) - \ell(\ell+1)],$$

onde o produtório terá limite superior com valor -1, contudo, os valores do índice do produtório devem sempre pertencer ao subconjunto dos inteiros positivos, de modo que a existência desse termo de valor negativo é um problema. Para evitar esse tipo de situação, na matemática se define algo chamado de Produto Vazio, que ocorre em situações deste tipo, onde a operação com o produtório simplesmente não está bem definida. O produto vazio é sempre definido com 1, o elemento neutro do da multiplicação. Portanto, na situação acima, o produtório tem automaticamente o valor 1. Então, conclui-se que

$$a_0 = \frac{a_0}{1} \times 1 = a_0 \quad \therefore \quad a_0 = a_0,$$

o que mostra que a expressão (4.58) retorna todos os coeficientes pares, tal qual desejávamos.

Para tornar o trabalho com esta expressão mais simples, podemos impor a condição de que os índices sejam sempre múltiplos de dois, dessa forma eles sempre serão pares, e tendo em vista que os índices são mudos, isso nada altera nos resultados. Façamos então a substituição $n \to 2n$, dessa forma obtém-se que

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)], \tag{4.59}$$

note que o limite superior do produtório permaneceu inalterado pois a mudança em n foi substituída por uma mudança direta nos termos do produtório, substituindo k por $2k$, o que gera o mesmo resultado, ou seja, retorna apenas valores pares. É importante lembrar aqui que, toda essa busca pelos coeficientes a_n se dá sob o pretexto de descrever os polinômios gerados pela série que será solução da Equação de Legendre, ou seja, esta expressão será em breve colocada em um somatório cujo limite superior é infinito, então não precisamos, por enquanto nos preocupar com o valor máximo de n, porque ele simplesmente não existe. Nesse contexto, a substituição de n por $2n$ também não gera nenhum problema.

De maneira completamente análoga, podemos obter uma expressão para os coeficientes de índice ímpar, ou ainda, tendo em vista que as expressões com índice ímpar também tem origem a partir da Equação (4.42), podemos simplesmente substituir o índice $2n$ por $2n+1$ na expressão (4.59). Dessa maneira, ao invés de obtermos valores pares, obteremos valores valores ímpares, onde para o termo a_1 se terá novamente um produto vazio. É importante lembrar que neste caso devemos substituir o coeficiente a_0 por a_1 para que a expressão faça sentido, caso contrário a expressão resultante retornaria coeficientes em função de a_0, e isso estaria errado. Portanto, tomando $2n \to 2n+1$ em (4.59), obtemos que

$$a_{2n+1} = \frac{a_1}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}[(2k+1)(2k+2)-\ell(\ell+1)]. \tag{4.60}$$

Embora aqui tenha sido feito este salto para se concluir uma expressão para os coeficientes ímpares, alerta-se que sua dedução é análoga em todas os passos à dedução da expressão para os coeficientes pares, e por isso deixa-se como exercício de fixação ao leitor demonstrar passo a passo a expressão (4.60). Agora, tendo em mão as equações (4.59) e (4.60), podemos expressar as soluções formais da Equação de Legendre. Tal qual foi argumentado pouco antes da apresentação da Equação (4.12), a solução da Equação de Legendre poderá ser expressa como uma série de potências em torno de $x=0$, ou seja, exatamente a Equação (4.12), que lembramos ser expressa como segue,

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

onde os a_n são os coeficientes que encontramos nas equações (4.59) e (4.60). Contudo, tendo em vista que se trata de uma Equação Diferencial de Segunda Ordem, se espera que ela tenha duas soluções linearmente independentes. O que é ótimo, pois temos exatamente dois tipos de expressões para os coeficientes, e já que uma se trata de termos pares e a outra de termos ímpares, ambas são linearmente independentes. Nessa caso, obtemos duas soluções, uma contendo os a_n pares, e a outra contendo os a_n ímpares. Nesse contexto, a solução geral será uma combinação linear da solução par com a solução ímpar, segue que,

$$\Theta(x) = a_0\Theta_{par}(x) + a_1\Theta_{impar}(x), \tag{4.61}$$

onde a solução par terá os coeficientes e expoentes pares, e a solução ímpar terá os coeficientes e expoentes ímpares.

Para a solução par, temos que

$$a_0\Theta_{par}(x) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]\right\}x^{2n},$$

o valor do expoente em x foi substituído de n para $2n$ para garantir que os seus valores serão pares e para ser coerente com os valores dos coeficientes a_{2n}. Podemos ainda usar a comutatividade de a_0 e de x^{2n} com os termos do produtório para reescrever x^{2n} ao lado de a_0 e acima de $(2n)!$, de modo que a equação pode ser reescrita como segue,

$$a_0\Theta_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_0 x^{2n}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]\right\}. \tag{4.62}$$

De modo análogo, obtêm-se a solução ímpar, podemos encurtar o processo fazendo $2n \to 2n+1$. Portanto,

$$a_1\Theta_{impar}(x) = a_1\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}[(2k+1)(2k+2)-\ell(\ell+1)]\right\}x^{2n+1},$$

onde podemos novamente comutar a_1 e x^{2n+1} com o produtório e reescrever a equação como segue,

$$a_1\Theta_{impar}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}[(2k+1)(2k+2)-\ell(\ell+1)]\right\}. \tag{4.63}$$

Portanto, com base nas equações (4.62) e (4.63), e com base em todos os detalhes e considerações feitas até aqui, conclui-se que a solução geral será expressa por

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_0 x^{2n}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]\right\}\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}[(2k+1)(2k+2)-\ell(\ell+1)]\right\},\end{aligned} \tag{4.64}$$

onde esta é a solução formal da Equação de Legendre, exatamente como queríamos demonstrar. Seu raio de convergência é $-1<R<+1$, ou seja, um intervalo aberto.

De certo ponto de vista, a solução (4.64) é suficiente para responder a pergunta “Qual é a função satisfaz a Equação de Legendre?". Isso se dá no ponto de vista matemático, pois essa solução de fato satisfaz a equação, e tem seu raio de convergência bem definido, além de ser contínua e diferenciável neste dado intervalo de convergência. Contudo, do ponto de vista físico, tal solução é sim necessária, mas ainda não é suficiente. Essa solução não é suficiente para a física porque ela é divergente em todos os pontos fora do intervalo de convergência, isso significa que ela só explica bem a realidade em certos valores, somente em valores que estejam entre um negativo e um positivo. Tal convergência, finita e restritiva, é bem inconveniente do ponto de vista físico, afinal de contas, a natureza assume os valores que deseja, e não apenas os valores que determinamos em nossos laboratórios. Por isso, para que esta solução seja fisicamente aceitável, se faz necessário que esta satisfaça algumas condições, e uma delas é que esta seja convergente em todos os valores de seu domínio.

Comecemos por esta última condição, as séries de potências das equações (4.62) e (4.63) são dois polinômios de grau infinito, o que significa que para valores menores que um, o resultado da potência x^n se torna cada vez menor, de modo que esta série converge a um à medida que o expoente n vai para o infinito em intervalos inteiros pelo lado positivo da reta. Já para valores maiores ou iguais a um, o resultado da potência só tende a aumentar na medida que n aumenta, de modo que a série diverge a infinito neste caso.

Contudo, essa análise semântica sobre a convergência das soluções (4.62) e (4.63) esquece de observar o que ocorre com os coeficientes desta potência, que podem em algum momento se anular, causando convergências para outros valores. Observemos então o que ocorre com os coeficientes da solução (4.62) a medida que o valore de n aumenta.

Contemplemos a Equação (4.59), ela expressa que

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)].$$

Observe que, até aqui, ainda não se argumentou sobre os valores de ℓ. Temos bem definidos os valores de n, que são os valores determinados pela sequência da série e que retornarão os expoentes das potências de x, e temos bem definidos os valores de k, que são os valores determinados pela sequência do produtório para obtermos parte dos termos de proporcionalidade entre os coeficientes a_{2n} e o coeficiente arbitrário a_0. Mas ℓ segue arbitrário, o que nos dá uma excelente oportunidade de impor condições sobre ele, de maneira a limitar os valores da solução, torná-los finitos.

Observe com atenção o termo dentro do produtório,

$$2k(2k+1)-\ell(\ell+1), \tag{4.65}$$

perceba que o valor de k só tende a aumentar em intervalos inteiros de valores positivos à medida que o valor de n aumenta em intervalos também inteiros e de valores positivos. Também é possível notar que, dentro do produtório, os termos têm certa semelhança entre si, o que implica que, se em algum momento os valores dos termos $2k(2k+1)$ e $\ell(\ell+1)$ se igualharem, teremos então $2k(2k+1)-\ell(\ell+1)=0$, fazendo com que todos os termos seguintes do produtório estejam multiplicados por zero, implicando assim que os coeficientes de todas as próximas potências sejam nulos.

Em outras palavras, se $k=\frac{\ell}{2}$, temos que

$$k=\frac{\ell}{2} \;\;\Rightarrow\;\; 2k(2k+1) = 2\frac{\ell}{2}\left(2\frac{\ell}{2}+1\right) = \ell(\ell+1),$$

o que implica que, neste momento, teremos

$$k(2k+1)-\ell(\ell+1) = \ell(\ell+1)-\ell(\ell+1) = 0.$$

No produtório, teremos que

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = {} & [2\times 0(2\times 0+1)-\ell(\ell+1)] \\ & \times\ [2\times 1(2\times 1+1)-\ell(\ell+1)] \\ & \times\ [2\times 2(2\times 2+1)-\ell(\ell+1)]\ \times\ \cdots \\ & \times\ \underbrace{\left[\overbrace{2\frac{\ell}{2}\left(2\frac{\ell}{2}+1\right)}^{=\ell(\ell+1)}-\ell(\ell+1)\right]}_{=0}\ \times\ \cdots \\ & \times\ \{2\times(n-3)[2\times(n-3)+1]-\ell(\ell+1)\} \\ & \times\ \{2\times(n-2)[2\times(n-2)+1]-\ell(\ell+1)\} \\ & \times\ \{2\times(n-1)[2\times(n-1)+1]-\ell(\ell+1)\} \\ = {} & 0,\end{aligned}$$

dessa forma, todos resultados do produtório, em que $k \geq \ell/2$, serão automaticamente nulos, pois teremos uma sequência de termos multiplicados por zero. Porém, vale aqui salientar que os valores de k são sempre inteiros e positivos, o que implica que a nulidade do produtório ocorrerá apenas em valores inteiros e positivos de ℓ. Em termos puramente matemáticos, temos

$$\{\ell \in \mathbf{Z} | \ell = \mathbf{Z}_{\geq 0}\}.$$

Tal conclusão implica que os resultados de $\ell/2$ terão de ser exatos, para garantir que serão números inteiros. Bom, um número inteiro positivo só é dividido por dois de maneira exata se esse número for par. Aliás, esta é de fato a definição de números pares, um número par é um número natural (o que é equivalente a inteiro e positivo) que quando dividido por dois tem como resto a nulidade. Portanto, conclui-se que o produtório da solução (4.59) só será nulo quando ℓ for número par. E conclui-se também que, o produtório só será diferente de zero se o seu limite superior for menor que $\ell/2$, ou seja, para obter valores não nulos o limite superior do produtório precisa ser no máximo $\ell/2-1$.

Portanto, para que o produtório retorne valores não nulos, precisamos que $n-1 \leq \ell/2-1$, logo, calcula-se que

$$(n-1) \leq \left(\frac{\ell}{2}-1\right) \ \ \therefore\ \ n \leq \frac{\ell}{2}, \tag{4.66}$$

que é o valor do monômio de maior grau que contém coeficiente não nulo dentro da série.

Nesta mesma linha de raciocínio lógico, retornaremos agora à Equação (4.62), mas desta vez com a conclusão da Equação (4.66) em mãos, de maneira verificar o que tal conclusão implica para a série como um todo. A solução par até então tem a forma

$$a_0\Theta_{par}(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n},$$

onde utilizando a Equação (4.59) para os coeficientes a_{2n}, segue que

$$a_0\Theta_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)]x^{2n},$$

onde pode se comutar as potências x^{2n} com o produtório, de modo que

$$a_0\Theta_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0x^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)],$$

onde se nota, por fim, que o limite do superior do somatório não precisa mais ser infinito, pois para os valores de n que forem maiores do que $\ell/2$, todos os monômios gerados serão nulos e podem ser desprezados em relação ao resultado final da série sem perda de generalidade. Portanto, conclui-se que

$$a_0\Theta_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2} \frac{a_0x^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)], \tag{4.67}$$

onde a solução acima gera polinômios finitos, e portanto, convergentes, para todo os seu domínio, que neste caso se trata do conjunto dos números reais.

Contudo, é importante notar que teremos um grau diferente para o polinômio resultante a depender do valor de ℓ, pois perceba que o grau do polinômio está associado o valor máximo de n, onde este por sua vez está associado ao limite superior do somatório, que é $\ell/2$. Portanto, quando n estiver em seu valor máximo, o polinômio terá o grau de acordo com o cálculo abaixo

$$x^{2n}\bigg|_{n=\ell/2} = x^{2\times\frac{\ell}{2}} = x^{\ell} \quad \therefore \quad x^{2n}\bigg|_{n=\ell/2} = x^{\ell}.$$

Refletindo sobre isso, é possível concluir então que a Equação (4.67) representa não apenas uma solução com valor bem definido para ℓ, mas sim um conjunto infinito de soluções, uma para cada valor possível de ℓ, sendo todas estas um polinômio de grau finito e igual a ℓ. Em outras palavras, o que temos na Equação (4.67) é na verdade um conjunto infinito de soluções, com todas elas convergentes em todos os valores do conjunto dos reais!

Também vale ressaltar que os valores de ℓ também implicar em várias equações de Legendre diferentes, pois seus valores também implica nos coeficientes da equação. Por exemplo, abaixo seguem as equações de Legendre para os 4 primeiros valores de ℓ.

Para $\ell = 0$, temos $0(0+1) = 0$, portanto,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) + 0\Theta(x) = 0,$$

ou seja,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) = 0. \tag{4.68}$$

Para $\ell = 1$, temos $1(1+1) = 2$, portanto,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) + 2\Theta(x) = 0. \tag{4.69}$$

Para $\ell = 2$, temos $2(2+1) = 6$, portanto,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) + 6\Theta(x) = 0. \tag{4.70}$$

Para $\ell = 3$, temos $3(3+1) = 12$, portanto,

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) + 12\Theta(x) = 0. \tag{4.71}$$

E assim sucessivamente, com valores pares e ímpares de ℓ implicando equações de Legendre diferentes e também soluções diferentes.

Nesse contexto, convém chamar a solução par não mais de $\Theta_{par}(x)$, mas sim de $\Theta^{\ell}_{par}(x)$, representando que teremos assim uma solução diferente para cada valor de ℓ. Portanto, feitas essas devidas considerações, conclui-se que a solução par será convergente em todo o domínio dos reais quando ℓ for um número par, e a solução será então escrita por

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2} \frac{a_0 x^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)]. \tag{4.72}$$

De maneira análoga é possível obter-se uma expressão para a solução ímpar, e deixamos isso como exercício ao leitor. Aqui, apenas tomaremos $2n \to 2n+1$, para garantir valores ímpares, $\ell/2 \to (l-1)/2$, para garantir valores pares, e $a_0 \to a_1$, para garantir a coerência dos resultados.

$$a_1\Theta^{\ell}_{impar}(x) = \sum_{n=0}^{(\ell-1)/2} \frac{a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} [(2k+1)(2k+2) - \ell(\ell+1)]. \tag{4.73}$$

Por fim, mas não menos importante, conclui-se então que a expressão geral para as equações de Legendre são

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) + \ell(\ell+1)\Theta(x) = 0, \tag{4.74}$$

e que suas soluções formais e convergentes em todo o domínio são expressar por

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2} \frac{a_0 x^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)]$$
$$+ \sum_{n=0}^{(\ell-1)/2} \frac{a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} [(2k+1)(2k+2) - \ell(\ell+1)], \tag{4.75}$$

novamente, como queríamos demonstrar.

Tal expressão está de acordo com a expressão deduzia por (BARATA, 2022) em seu referido livro. De fato, a dedução acima foi feita pelo autor deste trabalho de conclusão de curso, mas com forte embasamento no livro de (BARATA, 2022), seu texto foi sem dúvida o mais elucidador dentre todos os outros livros lidos. Também vale ressaltar sua vital importância para que os cálculos feitos nas seções 4.2 e 4.3, que virão a seguir, pudessem ser feitos em detalhes.

4.2 A SOLUÇÃO NORMALIZADA DA EQUAÇÃO DE LEGENDRE

A função definida pela Equação (4.75) satisfaz a Equação de Legendre, mas infelizmente ainda não é a solução na forma que buscamos neste trabalho. Sim, a Equação (4.75) é solução da Equação de Legendre, e sim, a Equação (4.75) representa um conjunto de polinômios de grau ℓ, mas estes polinômios não são os Polinômios de Legendre.

Tal qual já citado ao longo das páginas deste trabalho, a equação e os polinômios de Legendre fazem parte de um conjunto muito mais amplo de funções, que por sua vez constroem uma teoria muito mais ampla e profunda chamada Polinômios Ortogonais, ou ainda, que por sua vez satisfazem as equações do tipo Hipergeométricas, sendo a Equação de Legendre pertencente a esta classe. Também pode ser chamada de Teoria de Sturn-Liouville (ARFKEN; WEBER, 2003).

Para o leitor que chegou até aqui, e que provavelmente passou, passa, ou passará em breve, por um curso de Álgebra Linear, saiba que, assim como existem Espaços Vetoriais, cujos elementos são chamados de Vetores, existem também Espaços Funcionais, cujos elementos são chamados de Funções. E assim como existem vetores ortogonais entre si, também existem funções ortogonais entre si. Assim como um vetor pode ser normalizado para se obter um certo valor, uma função também pode. Assim como um certo conjunto vetores ortogonais e normalizados (ou, simplesmente, ortonormais) podem ser utilizados para construir a base de um espaço vetorial, um certo conjunto de funções ortonormais pode ser utilizado para construir a base de um espaço funcional. Enfim, os paralelos ocorrem em várias escalas. Aqui não estamos usando explicitamente espaços vetoriais ou funcionais de maneira rigorosa, mas a Álgebra evidentemente fundamenta todos os cálculos feitos aqui. Por isso, vale citar tais espaços aqui, devido a sua importância fundamental para o estudo aprofundado de

Polinômios Ortogonais e demais Funções Especiais. E também para que o leitor pelo menos seja apresentado a sua existência, caso isso ainda não tivesse acontecido.

Os Polinômios de Legendre têm grande importância histórica, o próprio Legendre os desenvolveu com o intuito de calcular a parte angular do Potencial Gravitacional, que estático por natureza na Teoria da Gravitação Newtoniana. Como já foi citado, esses outros polinômios ortogonais também tiveram um papel de fundamental relevância ao longo do desenvolvimento da Teoria Quântica. Vale citar aqui, para que o leitor possa se aprofundar sobre eles em outro momento, os polinômios Hermite, Laguerre, Tchebychev, Jacobi e Gegenbauer. Todos esses polinômios, cada um com suas respectivas equações de mesmo nome historicamente atribuído, foram essenciais para que pudéssemos superar a barreira do pensamento clássico e caminhar no rumo da quantização, aumentando exponencialmente nosso conhecimento acerca do Cosmos e também o nosso poder de ação sobre ele. Para mais informações, verifique (NETO, 2011).

Cada uma dessas funções especiais, os Polinômios de Legendre incluso, foram desenvolvidas com o intuito de resolver um problema específico, mas com o tempo se percebeu que tais funções tinham inúmeras aplicações na ciência e na tecnologia. De acordo com a necessidade da ocasião, alguns parâmetros podem ser mudados de modo a facilitar algumas manipulações algébricas, redefinindo as funções sempre da maneira mais conveniente (NETO, 2011). No que tange aos Polinômios de Legendre, é um consenso na literatura que eles são definidos de modo que $\Theta_\ell(1) = 1$ (BARATA, 2022) e (ZILL; CULLEN, 2001). Essa condição pode ter inúmeras origens históricas distintas e, provavelmente, a certeza de porquê ela é assim definida já se perdeu no tempo e na história. É possível, no entanto, especular que essa condição elimina as partes literais dos monômios que compõem o polinômio, pois sempre que se tem Θ_ℓ (1), tem-se também $x^n = 1^n = 1, \forall n$, nos monômios. Dessa forma, restam apenas os coeficientes dos monômios para se manipular da maneira mais conveniente. Eliminar as partes literais dessa forma ainda torna a manipulação dos coeficientes um relação totalmente linear. Quanto ao resultado do polinômio aplicado em um ser equivalente a unidade, especula-se que é porque isso normaliza o polinômio de modo que o produto escalar de um Polinômio de Legendre de grau ℓ com ele mesmo seja equivalente a unidade, e dado que eles são ortogonais por natureza, fica então garantida a condição de ortonormalidade para que estes possam ser utilizados para construir a base de um espaço funcional. Uma aplicação direta dessa ortonormalidade é que se torna possível então utilizar os Polinômios de Legendre para uma base em um Espaço de Hilbert, que é o espaço onde "vivem" as funções de onda, estas que por sua vez satisfazem a Equação de Schröndinger. Nesse contexto, uma normalização conveniente dos Polinômios de Legendre é de suma importância.

Outro ponto a se comentar sobre a normalização $\Theta_\ell(1) = 1$ é que ela pode perfeitamente ser feita Polinômio à Polinômio, isto é, com um de cada vez. Dado que os Polinômios de Legendre são divididos em duas categorias, pares e ímpares, e que cada uma delas possui uma constante arbitrária, a_0 para os valores pares de ℓ e a_1 para os valores ímpares de ℓ, quando as potências de x forem substituídas pelo elemento neutro da multiplicação (o número um), restarão apenas as constantes que são os coeficientes. A soma de todas essas constantes, em conjunto com o coeficiente arbitrário, nos permitirão definir um coeficiente de normalização para o valor do polinômio, de modo a sempre satisfazer a condição de normalização $\Theta_\ell(1) = 1$.

Quando se faz isso para alguns valores pares de ℓ é possível notar o seguinte padrão para os valores de a_0 que normalizam o polinômio de acordo com a condição $\Theta_\ell(1) = 1$, temos que (ZILL; CULLEN, 2001)

$$a_0 = (-1)^{\ell/2} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (n-1)}{2 \times 4 \times \cdots n}, \tag{4.76}$$

e ao se fazer o mesmo para valores ímpares de ℓ é possível notar que

$$a_1 = (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times n}{2 \times 4 \times \cdots \times (n-1)}. \tag{4.77}$$

O caminho que utilizaremos aqui, no entanto, é outro. A ideia é normalizar o coeficiente de grau mais alto, de modo que ele satisfaça a condição $\Theta_\ell(1) = 1$. Historicamente se costuma normalizar os Polinômios de Legendre de modo que o coeficiente de grau mais alto seja exatamente $(2\ell)!/2^\ell(\ell!)^2$ (BARATA, 2022). O porquê de normalizar estes polinômios, e o porquê de ser uma igualdade tão específica, infelizmente é algo que, aparentemente, se perdeu ao longo da história. Tentaremos aqui realizar a dedução da maneira mais intuitiva possível, tal qual foi feito até aqui. Porém, é preciso admitir que, por mais que se tente atribuir significados aos passos que faremos a seguir, algumas decisões sobre quando prosseguir ou não no cálculo, quando simplificar ou não um termo, se dão apenas com o intuito de chegar a expressão que se objetiva, que é uma expressão que retorna os Polinômios de Legendre no formato em que eles são apresentados na literatura.

Tomaremos nos cálculos a seguir a Equação (4.72), mas a versão dedução para o caso de ℓ ímpar é, novamente, *mutatis mutantis* análoga. Dada a Equação (4.72), temos que

$$a_0 \Theta^\ell_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2} \frac{a_0 x^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)].$$

O coeficiente de mais alta ordem será aquele que ocorre quando $n = \ell/2$, logo

$$a_0 \Theta^\ell_{par}(x) \bigg|_{n=\frac{\ell}{2}} = \frac{a_0 x^{2\times\frac{\ell}{2}}}{\left(2 \times \frac{\ell}{2}\right)!} \prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1} [2k(2k+1) - \ell(\ell+1)],$$

ou seja,

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x)\bigg|_{n=\frac{\ell}{2}} = \frac{a_0x^{\ell}}{\ell!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]. \tag{4.78}$$

Agora, retirando x^{ℓ} da equação, tudo que nos resta é o coeficiente, e fica então evidente que a expressão do coeficiente de mais alta ordem é dada por

$$\frac{a_0}{\ell!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)],$$

que deve ser igual a

$$\frac{(2\ell)!}{2^{\ell}(\ell!)^2},$$

portanto,

$$\frac{a_0}{\ell!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = \frac{(2\ell)!}{2^{\ell}(\ell!)^2}.$$

Isolando agora o coeficiente arbitrário a_0, temos que

$$a_0 = \frac{(2\ell)!}{2^{\ell}(\ell!)^2}\,\ell!\,\frac{1}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]},$$

ou ainda, notando que os fatoriais de ℓ se cancelam e que podemos representar essa fração contendo o produtório com uma potência negativa, temos que

$$a_0 = \frac{(2\ell)!}{2^{\ell}\ell!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]^{-1}. \tag{4.79}$$

Agora, retornando para a Equação (4.72), podemos retirar o termo a_0 de dentro do somatório,

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = a_0\sum_{n=0}^{\ell/2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)].$$

contudo, com a expressão (4.79) em mãos, podemos concluir que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \frac{(2\ell)!}{2^{\ell}\ell!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]^{-1}\sum_{n=0}^{\ell/2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)],$$

onde se pode comutar os termos advindos de a_0 com o produtório, tendo em vista a propriedade distributiva e também que nenhum dos termos advindos de a_0 contém a variável n. Logo,

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!}{2^{\ell}\ell!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]^{-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]\right\},$$

dada a simetria da operação de multiplicação escalar, pode-se também comutar os produtórios com os demais termos dentro do somatório,

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!}{2^{\ell}\ell!}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]\right\},$$

ou ainda, podemos reorganizar os termos e obter

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{2n}}{(2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]}\right\}. \tag{4.80}$$

Observemos um pouco esta razão entre os produtórios,

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]}, \tag{4.81}$$

sabemos que, independentemente do valor de ℓ, o valor de n será sempre menor ou igual a $\ell/2$. Quando $n = \ell/2$ a razão entre os produtórios é um, mas nos demais valores de n isso não é verdade. Nesses casos, o produtório no numerador terá menos termos que o produtório no denominador. Analisemos os produtórios separadamente.

Para o produtório no numerador, temos que

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = &[2\times 0(2\times 0+1)-\ell(\ell+1)]\\ &\times[2\times 1(2\times 1+1)-\ell(\ell+1)]\\ &\times[2\times 2(2\times 2+1)-\ell(\ell+1)]\\ &\times\cdots\times\\ &\times[2\times(n-2)(2\times(n-2)+1)-\ell(\ell+1)]\\ &\times[2\times(n-1)(2\times(n-1)+1)-\ell(\ell+1)],\end{aligned}$$

onde resolvendo as multiplicações e os parênteses, obtêm-se que

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = &[0\times 1-\ell(\ell+1)]\\ &\times[2\times 3-\ell(\ell+1)]\\ &\times[4\times 5-\ell(\ell+1)]\\ &\times\cdots\times\\ &\times[(2n-4)(2n-3)-\ell(\ell+1)]\\ &\times[(2n-2)(2n-1)-\ell(\ell+1)],\end{aligned}$$

ou ainda, de foma bastante compacta, temos que

$$\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = [0\times 1-\ell(\ell+1)]\times\cdots\times[(2n-2)(2n-1)-\ell(\ell+1)]. \tag{4.82}$$

Enquanto para o produtório que está no denominador, temos que

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] =& [2\times 0(2\times 10+1)-\ell(\ell+1)]\\
&\times[2\times 1(2\times 1+1)-\ell(\ell+1)]\\
&\times[2\times 2(2\times 2+1)-\ell(\ell+1)]\\
&\times\cdots\times\\
&\times[2\times(n-2)[2\times(n-2)+1]-\ell(\ell+1)]\\
&\times[2\times(n-1)[2\times(n-1)+1]-\ell(\ell+1)]\\
&\times[2\times(n-0)[2\times(n-0)+1]-\ell(\ell+1)]\\
&\times[2\times(n+1)[2\times(n+1)+1]-\ell(\ell+1)]\\
&\times\cdots\times\\
&\times\left[2\times\left(\frac{\ell}{2}-2\right)\left(2\times\left(\frac{\ell}{2}-2\right)+1\right)-\ell(\ell+1)\right]\\
&\times\left[2\times\left(\frac{\ell}{2}-1\right)\left(2\times\left(\frac{\ell}{2}-1\right)+1\right)-\ell(\ell+1)\right],\end{aligned}$$

onde resolvendo as multiplicações e os parênteses, obtêm-se que

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = & [0\times 1-\ell(\ell+1)] \\
& \times[2\times 3-\ell(\ell+1)] \\
& \times[4\times 5-\ell(\ell+1)] \\
& \times\cdots\times \\
& \times[(2n-4)[2n-3]-\ell(\ell+1)] \\
& \times[(2n-2)[2n-1]-\ell(\ell+1)] \\
& \times[(2n)(2n+1)-\ell(\ell+1)] \\
& \times[(2n+2)(2n+3)-\ell(\ell+1)] \\
& \times\cdots\times \\
& \times[(l-4)(l-3)-\ell(\ell+1)] \\
& \times[(l-2)(l-1)-\ell(\ell+1)],
\end{aligned}
$$

ou ainda, de forma mais compacta,

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)] = & [0\times 1-\ell(\ell+1)]\times\cdots\times[(2n-2)(2n-1)-\ell(\ell+1)] \\
& \times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\ell(\ell+1)]. \qquad (4.83)
\end{aligned}
$$

Agora, para facilitar a leitura e a compreensão da razão a seguir, iremos substituir a constante $\ell(\ell+1)$ pela constante α, isto é, usaremos $\ell(\ell+1)=\alpha$, dessa forma as equações (4.81), (4.82), e (4.83), tornam-se respectivamente

$$
\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\alpha]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]}, \qquad (4.84)
$$

$$
\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\alpha] = [0\times 1-\alpha]\times\cdots\times[(2n-2)(2n-1)-\alpha], \qquad (4.85)
$$

$$
\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha] = [0\times 1-\alpha]\times\cdots\times[(2n-2)(2n-1)-\alpha]\times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\alpha]. \qquad (4.86)
$$

Logo, substituindo as equações (4.85) e (4.86) na Equação (4.84), temos que

$$
\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\alpha]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]} = \frac{[0\times 1-\alpha]\times\cdots\times[(2n-2)(2n-1)-\alpha]}{[0\times 1-\alpha]\times\cdots\times[(2n-2)(2n-1)-\alpha]\times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\alpha]},
$$

contemplando a equação acima, é possível perceber que todos os termos no numerador se cancelam com respectivos termos no denominador. Isso já era, no mínimo, esperado, tendo em vista que $n \geq \ell/2\,, \forall n$. Portanto, dentre os valores do produtório que possui o $\ell/2$ no limite superior, estarão consequentemente, todos os valores possíveis de n. Em consequência disso, temos que

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\alpha]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]} = \frac{\cancel{[0\times 1-\alpha]}\times\cdots\times\cancel{[(2n-2)(2n-1)-\alpha]}}{\cancel{[0\times 1-\alpha]}\times\cdots\times\cancel{[(2n-2)(2n-1)-\alpha]}\times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\alpha]},$$

note que, no denominador, restarão somente os termos onde o índice for maior ou igual a n, pois todos os valores anteriores, isto é, até $n-1$, foram cancelados. E tendo em vista que $\ell/2 \leq n$, é perfeitamente natural que sobrem tais termos no denominador. Feitas estas considerações, conclui-se que

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\alpha]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]} = \frac{1}{[(2n-0)(2n+1)-\alpha]\times[(2n+2)(2n+3)-\alpha]\times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\alpha]},$$

onde a fração do lado direito por ser condensada no produtório,

$$\prod_{k=n}^{\frac{\ell}{2}-1}\frac{1}{[2k(2k+1)-\alpha]} = \frac{1}{[(2n-0)(2n+1)-\alpha]\times[(2n+2)(2n+3)-\alpha]\times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\alpha]},$$

ou ainda,

$$\prod_{k=n}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]^{-1} = \{[(2n-0)(2n+1)-\alpha]\times[(2n+2)(2n+3)-\alpha]\times\cdots\times[(l-2)(l-1)-\alpha]\}^{-1}.$$

Assim sendo, é possível concluir que

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\alpha]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]} = \prod_{k=n}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\alpha]^{-1},$$

logo, retornando a substituir $\alpha = -\ell(\ell+1)$, temos por fim

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]}{\prod_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]} = \prod_{k=n}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]^{-1}. \tag{4.87}$$

Agora, substituindo o lado direito da Equação (4.87) na Equação (4.80), obtêm-se

$$a_0\Theta_{par}^{\ell}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{2n}}{(2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\prod_{k=n}^{\frac{\ell}{2}-1}[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)]^{-1}\right\}. \tag{4.88}$$

Bom, a Equação (4.88) retorna os polinômios de Legendre de maneira normalizada, mas trabalhar com este produtório nem sempre é conveniente, então tentaremos manipulá-lo de modo que ele se torne algum fatorial, ou algo do tipo.

Para tal, façamos a substituição de variável $n \to \ell/2 - n$, temos que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{2\left(\frac{\ell}{2}-n\right)}}{\left[2\left(\frac{\ell}{2}-n\right)\right]!\,\ell!\,2^{\ell}}\prod_{k=\frac{\ell}{2}-n}^{\frac{\ell}{2}-1}\left[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)\right]^{-1}\right\},$$

ou seja,

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\prod_{k=\frac{\ell}{2}-n}^{\frac{\ell}{2}-1}\left[2k(2k+1)-\ell(\ell+1)\right]^{-1}\right\}. \tag{4.89}$$

Fazendo também a substituição $k \to \ell/2 - k$, temos

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\prod_{\frac{\ell}{2}-k=\frac{\ell}{2}-n}^{\frac{\ell}{2}-1}\left\{2\left(\frac{\ell}{2}-k\right)\left[2\left(\frac{\ell}{2}-k\right)+1\right]-\ell(\ell+1)\right\}^{-1}\right\},$$

ou seja,

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\prod_{k=1}^{n}\left[(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1)\right]^{-1}\right\}. \tag{4.90}$$

Observemos com atenção o termo que está sendo operado pelo produtório na Equação (4.90),

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1),$$

perceba que podemos realizar as multiplicações e obter

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1) = \ell^2 - 2k\ell + \ell - 2k\ell + 4k^2 - 2k - \ell^2 - \ell,$$

onde os termos que mesmo módulo e sinal oposto se cancelam mutuamente,

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1) = \cancel{\ell^2} - 2k\ell + \cancel{\ell} - 2k\ell + 4k^2 - 2k - \cancel{\ell^2} - \cancel{\ell},$$

e os monômios semelhantes são somados

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1) = -2k\ell + 4k^2 - 2k,$$

onde, reorganizando-se os termos, temos

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1) = 4k^2 - 4k\ell - 2k.$$

Note que na expressão acima podemos fatorar o $-2k$ e colocá-lo em evidência, portanto,

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1) = -2k(-2k+2\ell+1),$$

ou seja,

$$(\ell-2k)(\ell-2k+1)-\ell(\ell+1)=-2k(2\ell-2k+1). \tag{4.91}$$

Assim, substituindo o lado direito da Equação (4.91) na Equação (4.90), obtêm-se que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x)=\sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1}\right\}. \tag{4.92}$$

Contemplemos novamente o produtório da Equação (4.92),

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1},$$

perceba que no fundo se trata de três termos se multiplicando entre si,

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = \prod_{k=1}^{n}[(-1)\times(2k)\times(2\ell-2k+1)]^{-1},$$

onde vale lembrar que o produtório de uma multiplicação é equivalente a multiplicação dos produtórios, isto é,

$$\prod[a\times b]=\prod a\times\prod b \quad ,$$

portanto, temos

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = \prod_{k=1}^{n}[-1]^{-1}\times\prod_{k=1}^{n}(2k)^{-1}\times\prod_{k=1}^{n}(2\ell-2k+1)^{-1},$$

ou ainda, salientando que $1/-1=-1$, temos

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = \prod_{k=1}^{n}[-1]\times\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k}\right]\times\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right]. \tag{4.93}$$

Na Equação (4.93) temos três produtórios, iremos nos referir a cada um deles com a seguinte nomenclatura,

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = \underbrace{\prod_{k=1}^{n}[-1]}_{\text{1º Produtório}}\times\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k}\right]}_{\text{2º Produtório}}\times\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right]}_{\text{3º Produtório}}.$$

Para o primeiro produtório, temos

$$\prod_{k=1}^{n}[-1]=\underbrace{(-1)\times(-1)\times\cdots\times(-1)}_{\text{n vezes}},$$

portanto, podemos condensar o resultado em

$$\prod_{k=1}^{n}[-1]=(-1)^{n}. \tag{4.94}$$

Para o segundo somatório, temos

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k}\right]=\frac{1}{2\times 1}\times\frac{1}{2\times 2}\times\frac{1}{2\times 3}\times\cdots\times\frac{1}{2\times(n-1)}\times\frac{1}{2\times n},$$

ou seja,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times\cdots\times\frac{1}{2n-2}\times\frac{1}{2n}.$$

Para facilitar a visualização podemos utilizar aqui o expoente -1,

$$\prod_{k=1}^{n}[2n]^{-1}=[2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times n]^{-1}. \tag{4.95}$$

Perceba que o resultado que encontramos na Equação (4.95) é razoavelmente parecido com um fatorial, mas não é a mesma coisa que encontraríamos se fizéssemos $(2k)!$, essa operação ainda renderia um decaimento de um em um nos valores. O que vemos na Equação (4.95) está variando de dois em dois. Esse resultado pode ser condensado em algo conhecido como Fatorial Duplo, ou Duplo Fatorial. Essa operação é uma generalização da operação fatorial, para os valores possam diminuir dessa maneira. A operação é representada por

$$(n)!!=(n-0)\times(n-2)\times(n-4)\times\cdots\times[n-(n-2)]\times[n-(n-1)],$$

ou seja,

$$(n)!!=n\times(n-2)\times(n-4)\times\cdots\times 2\times 1,$$

pode-se ainda condensar esse resultado em mais de um produtório,

$$(n)!!=\prod_{k=1}^{n/2}[2k],\ \text{para números pares, e} \tag{4.96}$$

$$(n)!!=\prod_{k=1}^{n+1/2}[2k+1],\ \text{para números ímpares, ou} \tag{4.97}$$

$$(n)!!=\prod_{k=0}^{n-1}[n-2k],\ \text{para ambos.} \tag{4.98}$$

Seja qual for o produtório escolhido pelo leitor, o resultado da Equação (4.95) poderá ser expresso por

$$\prod_{k=1}^{n}[2k]^{-1}=[(2n)!!]^{-1},$$

ou ainda,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k}\right]=\frac{1}{(2n)!!}, \tag{4.99}$$

note que de fato se trata de $(2n)!!$, e não de $n!!$. Isso ocorre porque o limite superior na Equação (4.99) é n, e não $n/2$, implicando que o último termo será $2n$, e não n. Conclui-se, então, que realmente se trata do duplo fatorial do dobro de n, isto é, $(2n)!!$.

Por fim, para o terceiro produtório, temos

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right],$$

contudo, visto que n não é um dos termos dentro do produtório, fica um pouco complicado ver para onde o produtório vai. Tomemos a seguinte multiplicação, onde o termo introduzido *ad hoc*, introduzido para manipular o produtório do lado direito, é simplesmente um, o elemento neutro da multiplicação. Portanto,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right]=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right]\times\frac{\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}{\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]},$$

ou ainda,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right]=\frac{\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}{\prod_{k=1}^{n}[2\ell-2k+1]\times\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}. \tag{4.100}$$

Note que na Equação (4.100) os limites superiores e inferiores dos dois produtórios que estão no denominador, perceba que, onde o produtório da esquerda termina, o da direita começa, de maneira que os dois produtórios se complementam. Expandindo os termos, observa-se que

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}[2\ell-2k+1]\times\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1] &= (2\ell-2\times 1+1)\\ &\times\cdots\times\\ &\times(2\ell-2\times n+1)\\ &\times(2\ell-2\times(n+1)+1)\\ &\times\cdots\times\\ &\times(2\ell-2\times\ell+1),\end{aligned}$$

ou seja, pode-se apenas condensar ambas as multiplicações em um produtório só,

$$\prod_{k=1}^{n}[2\ell-2k+1]\times\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]=\prod_{k=1}^{\ell}[2\ell-2k+1]. \tag{4.101}$$

Logo, substituindo a Equação (4.101) na (4.100), temos que

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right]=\frac{\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}{\prod_{k=1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}. \tag{4.102}$$

Agora, com relação ao produtório obtido na Equação (4.101), expandindo seus termos, é possível observar que

$$\prod_{k=1}^{\ell}[2\ell-2k+1] = (2\ell-2\times 1+1)$$

$$\times(2\ell-2\times 2+1)$$

$$\times\cdots\times$$

$$\times[2\ell-2\times(\ell-1)+1]$$

$$\times(2\ell-2\times l+1),$$

ou seja,

$$\prod_{k=1}^{\ell}[2\ell-2k+1] = (2\ell-1)$$

$$\times(2\ell-3)$$

$$\times\cdots\times$$

$$\times 3$$

$$\times 1,$$

portanto, é possível concluir que

$$\prod_{k=1}^{\ell}[2\ell-2k+1] = (2\ell-1)!!. \tag{4.103}$$

Substituindo o resultado (4.103) na Equação (4.102), obtêm-se que

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\ell-2k+1}\right] = \frac{\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}{(2\ell-1)!!}. \tag{4.104}$$

Agora, substituindo os resultados das equações (4.94), (4.99), e (4.104), na Equação (4.93), obtêm-se que

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = (-1)^n \times \frac{1}{(2k)!!} \times \frac{\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]}{(2\ell-1)!!},$$

ou seja,

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = \frac{(-1)^n}{(2k)!!(2\ell-1)!!}\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1]. \tag{4.105}$$

Ainda resta um produtório do lado direito da Equação (4.105), segue que

$$\prod_{k=n+1}^{\ell}[2\ell-2k+1],$$

fazendo a substituição $k \to k+n$, temos

$$\prod_{k+n=n+1}^{\ell-n} [2\ell - 2(k+n) + 1],$$

ou seja,

$$\prod_{k=1}^{\ell-n} [2\ell - 2k - 2n + 1],$$

onde se pode organizar os termos que estão sob a ação do produtório de modo que

$$\prod_{k=1}^{\ell-n} [2(\ell-n) - 2k + 1].$$

Agora, expandindo os termos do produtório, obtêm-se

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\ell-n} [2(\ell-n) - 2k + 1] &= [2(\ell-n) - 2\times 1 + 1]\\ &\times [2(\ell-n) - 2\times 2 + 1]\\ &\times [2(\ell-n) - 2\times 3 + 1]\\ &\times \cdots \times\\ &\times [2(\ell-n) - 2\times(\ell-n-1) + 1]\\ &\times [2(\ell-n) - 2\times(\ell-n) + 1],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\ell-n} [2(\ell-n) - 2k + 1] &= [2(\ell-n) - 1]\\ &\times [2(\ell-n) - 3]\\ &\times [2(\ell-n) - 5]\\ &\times \cdots \times\\ &\times 3\\ &\times 1,\end{aligned}$$

portanto, é possível perceber que

$$\prod_{k=1}^{\ell-n} [2(\ell-n) - 2k + 1] = [2(\ell-n) - 1]!! \tag{4.106}$$

Então, substituindo o resultado da Equação (4.106) na Equação (4.105), obtêm-se que

$$\prod_{k=1}^{n}[-2k(2\ell-2k+1)]^{-1} = \frac{(-1)^n[2(\ell-n)-1]!!}{(2k)!!(2\ell-1)!!}. \tag{4.107}$$

Por fim, substituindo o lado direito da Equação (4.107) na Equação (4.92), obtêm-se que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(2\ell)!\,x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!\,\ell!\,2^{\ell}}\frac{(-1)^n[2(\ell-n)-1]!!}{(2k)!!(2\ell-1)!!}\right\},$$

onde, reorganizando os termos, obtêm-se que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(-1)^n\,(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{(2k)!!\,(\ell-2n)!\,(2\ell-1)!!\,\ell!\,2^{\ell}}x^{\ell-2n}\right\}. \tag{4.108}$$

Convêm agora olhar para alguns termos específicos, com a intenção de simplificá-los, segue que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\left[\frac{(-1)^n\,x^{\ell-2n}}{2^{\ell}(\ell-2n)}\right]\left[\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!}\right]\right\}, \tag{4.109}$$

onde os termos de interesse estão destacados no maior colchete, à direita.

Ou seja, estamos interessados em simplificar a expressão abaixo,

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!}, \tag{4.110}$$

para tal, utilizaremos duas propriedades associadas aos fatoriais duplo que serão demonstradas a seguir.

Primeiro, seja um inteiro não negativo α, tal que tomaremos o duplo fatorial de seu dobro,

$$(2\alpha)!! = (2\alpha-0)\times(2\alpha-2)\times(2\alpha-4)\times\cdots\times[2\alpha-(2\alpha-2)],$$

ou seja,

$$(2\alpha)!! = (2\alpha-0)\times(2\alpha-2)\times(2\alpha-4)\times\cdots\times(2),$$

logo, colocando 2 em evidência, têm-se que

$$(2\alpha)!! = 2(\alpha-0)\times2(\alpha-1)\times2(\alpha-2)\times\cdots\times2(1),$$

onde reorganizando os termos se obtém

$$(2\alpha)!! = \underbrace{[2\times2\times2\times\cdots\times2]}_{=2^{\alpha}}\underbrace{[(\alpha-0)\times(\alpha-1)\times(\alpha-2)\times\cdots\times2\times1]}_{=\alpha!},$$

portanto, conclui-se que

$$(2\alpha)!! = 2^{\alpha}\alpha!. \tag{4.111}$$

Em seguida, seja novamente um inteiro não negativo α, tal que tomaremos seu fatorial,

$$\alpha! = (\alpha-0)\times(\alpha-1)\times(\alpha-2)\times(\alpha-3)\times(\alpha-4)\times(\alpha-5)\times\cdots\times\times 2\times 1,$$

onde reorganizando os termos, se obtém

$$\alpha! = \underbrace{[\alpha\times(\alpha-2)\times(\alpha-4)\times\cdots\times 2]}_{=\alpha!!}\underbrace{[(\alpha-1)\times(\alpha-3)\times(\alpha-5)\times\cdots\times 1]}_{=(\alpha-1)!!},$$

portanto, conclui-se que,

$$\alpha! = \alpha!!(\alpha-1)!!, \tag{4.112}$$

onde essa última também nos presenteia com mais estas duas relações interessantes,

$$\alpha!! = \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!!}, \text{ e} \tag{4.113}$$

$$(\alpha-1)!! = \frac{\alpha!}{\alpha!!}. \tag{4.114}$$

Agora, com as relações (4.111) à (4.114) em mãos, retornemos nosso olhar para a equação 4.110, onde destacam-se os seguintes termos

$$\frac{(2\ell)![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!(2\ell-1)!!} = \frac{(2\ell)!}{(2\ell-1)!!}\frac{[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!},$$

onde, com base no resultado (4.113), temos que

$$\frac{(2\ell)![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!(2\ell-1)!!} = \frac{(2\ell)!![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!},$$

agora, utilizando o resultado 4.111, expandimos $(2\ell)!!$ e $(2n)!!$, de modo que

$$\frac{(2\ell)![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell}\,\ell![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,2^{n}\,n!},$$

onde naturalmente os termos $\ell!$ que estão no numerador e no denominador da fração se cancelam mutuamente, portanto,

$$\frac{(2\ell)![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell}[2(\ell-n)-1]!!}{2^{n}\,n!},$$

e agora destacam-se as potências de base dois, onde se utiliza a regra para divisão de monômios, de modo que

$$\frac{(2\ell)![2(\ell-n)-1]!!}{\ell!(2n)!!(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell-n}[2(\ell-n)-1]!!}{n!}.$$

Agora, destacando-se o último fatorial duplo do lado direito, temos

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell-n}}{n!}[2(\ell-n)-1]!!,$$

introduzindo o elemento neutro da multiplicação na forma de $[2(\ell-n)]!!/[2(\ell-n)]!! = 1$, temos que

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell-n}}{n!}[2(\ell-n)-1]!!\frac{[2(\ell-n)]!!}{[2(\ell-n)]!!},$$

onde temos, portanto,

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell-n}}{n!}\frac{[2(\ell-n)-1]!!\,[2(\ell-n)]!!}{[2(\ell-n)]!!}.$$

De acordo com a relação (4.112), temos que

$$[2(\ell-n)-1]!!\,[2(\ell-n)]!! = [2(\ell-n)]!.$$

Logo,

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell-n}}{n!}\frac{[2(\ell-n)]!}{[2(\ell-n)]!!}.$$

Onde este duplo fatorial no denominador pode ser expandido com base na relação (4.111), logo

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!} = \frac{2^{\ell-n}}{n!}\frac{[2(\ell-n)]!}{2^{\ell-n}(\ell-n)!},$$

de modo que as potências $2^{\ell-n}$ que estão no numerador e no denominador se cancelam mutuamente.

Portanto, considerando que $[2(\ell-n)]! = (2\ell-2n)!$, conclui-se que

$$\frac{(2\ell)!\,[2(\ell-n)-1]!!}{\ell!\,(2n)!!\,(2\ell-1)!!} = \frac{(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!}. \tag{4.115}$$

Logo, substituindo o resultado da (4.115) na Equação (4.109), obtêm-se

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(-1)^n\,x^{\ell-2n}}{2^{\ell}\,(\ell-2n)!}\,\frac{(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!}\right\},$$

reorganizando os termos da equação acima, obtêm-se que

$$a_0\Theta^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left\{\frac{(-1)^n\,(2\ell-2n)!\,x^{\ell-2n}}{2^{\ell}\,n!\,(\ell-2n)!\,(\ell-n)!}\right\},$$

onde esta é uma expressão matemática que não apenas satisfaz as infinitas Equações Diferenciais de Legendre, mas que também retorna um conjunto de infinitas soluções ortonormalizadas, conhecidas na literatura de física e matemática como Polinômios de Legendre.

Adotaremos a partir de agora a nomenclatura comumente utilizada na literatura, e chamaremos $a_0\Theta^{\ell}_{par}(x)$ simplesmente de $P^{\ell}_{par}(x)$. Logo, com base nos argumentos expressos acima e na já conhecida forma apresentada pela literatura, conclui-se que os Polinômios de Legendre podem ser expressos matematicamente por

$$P^{\ell}_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2} \left\{ \frac{(-1)^n (2\ell-2n)!\, x^{\ell-2n}}{2^{\ell}\, n!\,(\ell-2n)!\,(\ell-n)!} \right\}, \tag{4.116}$$

quod erat demonstrandum!

Tal expressão está de acordo com as expressões encontradas em (ARFKEN; WEBER, 2003) e (BARATA, 2022).

4.3 OS POLINÔMIOS DE LEGENDRE E A FÓRMULA DE RODRIGUES

Como já foi dito, os Polinômios de Legendre fazem parte de um conjunto de Polinômios Ortogonais, que por sua vez são parte de uma teoria mais ampla que aquela que estamos construindo neste trabalho, e por isso ela não será detalhada.

Mas, vale dizer que uma parte importante dessa teoria de Polinômios Ortogonais são as Fórmulas de Rodrigues, que são utilizadas para encontrar os polinômios de interesse um à um. Tendo em vista que os Polinômios de Legendre são Polinômios Ortogonais, existe para eles também uma Fórmula de Rodrigues associada.

Efetivamente, a Equação (4.116) já é suficiente para encontrarmos os Polinômios de Legendre, mas é preciso admitir que se trata de uma equação com muitos parâmetros a serem substituídos, e também é sempre necessário realizar a soma dos termos, onde os termos não conservam seus valores a medida que o parâmetro l muda, fazendo com que sempre seja necessário iniciar novamente a soma a partir do zero. Para valores de l pequenos, como 3 ou 4, o cálculo não é longo, mas a para valores de l um pouco maiores, como 40 ou 50, a situação se torna rapidamente mais complexa. Por isso, os livros didáticos costumam apresentar a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre ao invés de apresentação a (4.116).

Para deduzir a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre, precisaremos utilizar a Forma Canônica da Equação de Sturm-Liouville (ARFKEN; WEBER, 2003), que foi citada inúmeras vezes ao longo do texto e que pode ser apresentada como segue abaixo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right] + \left[\mu w(x) + q(x)\right] f(x) = 0. \tag{4.117}$$

A Equação (2.27) satisfaz esta forma, sendo expressa por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta(x) = 0,$$

onde, tomando $m=0$ devido a suposição de simetria azimutal, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)\right]+\ell(\ell+1)\Theta(x)=0, \tag{4.118}$$

que é simplesmente a Equação de Legendre posta na Forma Canônica da Equação de Sturm-Liouville.

Comparando (4.117) e (4.118), e possível perceber que

$$p(x)=\left(1-x^2\right), \tag{4.119}$$

$$q(x)=0, \tag{4.120}$$

$$\mu=\ell(\ell+1),\text{ e} \tag{4.121}$$

$$w(x)=1. \tag{4.122}$$

A Fórmula de Rodrigues, de forma mais geral, possui o forma apresentado abaixo (NETO, 2011),

$$R_n(x)=\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{w(x)[p(x)]^n\}, \tag{4.123}$$

onde os parâmeros w e p, são os mesmos que os presentes na Forma Canônica da Equação de Sturm-Liouville o porquê de a fórmula ter esse formato no caso mais geral é algo que foge ao escopo deste trabalho e portanto não será deduzido aqui. Contudo, vale dizer que as Fórmulas de Rodrigues surgem da análise das Equações Hipergeométricas, cujas soluções são sempre algum Polinômio Ortogonal Clássico. A Forma Canônica da Equação de Sturm-Liouville é uma equação do tipo Hipergeométrica, e tem portanto suas soluções são polinômios ortogonais, tal qual temos os Polinômios de Legendre para a Equação de Legendre. Também se tem os Polinômios de Hermite para a Equação de Hermite, dentre outros vários exemplos possíveis. Devido a esta correlação entre a Forma Canônica da Equação de Sturm-Liouville, Polinômios Ortogonais e as Fórmulas de Rodrigues, os termos $w(x)$ e $p(x)$ que aparecem em (4.123) são os mesmos que aparecem (4.117), e portanto, com base nas expressões (4.119) e (4.122), a Fórmula de Rodrigues a Equação de Legendre será

$$R_n(x)=\frac{1}{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left\{1\left[1-x^2\right]^n\right\},$$

ou ainda,

$$R_n(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right],$$

onde n é o grau do polinômio resultante. Devido a isso, como já se sabe que os Polinômios de Legendre possuem grau l, faremos aqui a substituição $n\to l$, portanto,

$$R_\ell(x)=\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left[\left(1-x^2\right)^\ell\right]. \tag{4.124}$$

Para expandir o termo $\left(1-x^2\right)^{\ell}$ que surge em (4.124), podemos utilizar o Teorema Binomial de Newton, que pode ser apresentado como segue

$$(x+y)^{\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} x^{\ell-n} y^n.$$

É mais conveniente, afim de facilitar os cálculos, tomar $\left(-x^2+1\right)$, em breve será possível ver porque é mais conveniente aplicar o teorema nesta forma.

Portanto, aplicando o Teorema de Binomial de Newton à expressão $\left(-x^2+1\right)^{\ell}$, temos

$$\left(-x^2+1\right)^{\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\ell!}{\ell!(\ell-n)!} \left(-x^2\right)^{\ell-n} (1)^n,$$

onde $\left(-x^2\right)^{\ell-n} = (-1)^{\ell-n}\left(x^2\right)^{\ell-n}$ e naturalmente $(1)^n = 1$, o elemento neutro da multiplicação. Logo, substituindo estes resultados, temos

$$\left(-x^2+1\right)^{\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} (-1)^{\ell-n} \left(x^2\right)^{\ell-n},$$

vale aqui lembrar a regra para potências de potências, onde $(x^n)^m = x^{n\times m}$, o que implica que $\left(x^2\right)^{\ell-n} = (x)^{2\ell-2n}$, portanto,

$$\left(1-x^2\right)^{\ell} = \left(-x^2+1\right)^{\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} (-1)^{\ell-n} (x)^{2\ell-2n}. \tag{4.125}$$

Agora, retornando à Fórmula de Rodrigues para a Equação de Legendre, com o resultado (4.125), temos

$$R_{\ell}(x) = \frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}} \left\{ \sum_{n=0}^{\ell} \left[\frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} (-1)^{\ell-n} x^{2\ell-2n} \right] \right\} \tag{4.126}$$

onde os termos que não dependem diretamente de x comutam com o operador de derivada,

$$R_{\ell}(x) = \sum_{n=0}^{\ell} \left\{ \frac{\ell!}{\ell!(\ell-n)!} (-1)^{\ell-n} \frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}} \left[x^{2\ell-2n} \right] \right\}.$$

Analisando somente a derivada, temos duas situações, uma se dá quando o grau do expoente resultante de $2\ell-2n$ é menor que a ordem ℓ da derivada implicando que o resultado será nulo, pois se trata de um polinômio, e outro se dá quando quando o resultado do expoente é maior que a ordem da derivada, nesse caso temos a seguinte condição

$$2\ell-2n \geq \ell \;\; \Rightarrow \;\; 2\ell-\ell \geq 2n \;\; \Rightarrow \;\; \ell \geq 2n \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\ell}{2} \geq n, \tag{4.127}$$

ou seja, se $(\ell/2+1) \leq n \leq \ell$ a derivada é nula, e se $0 \leq n \leq \ell/2$ a derivada é não nula. No segundo caso, realizando de forma sucessiva às derivadas, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{2\ell-2n}\right] &= (2\ell-2n)\ x^{2\ell-2n-1}, \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[x^{2\ell-2n}\right] &= (2\ell-2n)\ (2\ell-2n-1)\ x^{2\ell-2n-2}, \\
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[x^{2\ell-2n}\right] &= (2\ell-2n)\ (2\ell-2n-1)\ (2\ell-2n-2)\ x^{2\ell-2n-3}, \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^{\ell-1}}{\mathrm{d}x^{\ell-1}}\left[x^{2\ell-2n}\right] &= (2\ell-2n)\ (2\ell-2n-1)\ \cdots\ [2\ell-2n-(\ell)]\ x^{2\ell-2n-(\ell-1)}, \\
\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left[x^{2\ell-2n}\right] &= (2\ell-2n)\ (2\ell-2n-1)\ \cdots\ [2\ell-2n-(l-2)]\ [2\ell-2n-(\ell-1)]\ x^{2\ell-2n-\ell},
\end{aligned}
$$

logo, para a derivada de ordem ℓ, conclui-se que

$$
\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left[x^{2\ell-2n}\right] = (2\ell-2n)\ (2\ell-2n-1)\ \cdots\ [2\ell-2n-(\ell)]\ x^{2\ell-2n-\ell}, \tag{4.128}
$$

onde podemos conseguir uma notação mais limpa e compacta através da introdução do fatorial abaixo,

$$
\frac{(2\ell-2n-\ell)!}{(2\ell-2n-\ell)!} = 1,
$$

pois ele completa a sequência dos termos que constituem o coeficiente de $x^{2\ell-2n-\ell}$, desse modo obtêm-se o novo fatorial

$$
(2\ell-2n)! = \underbrace{\{(2\ell-2n)\,(2\ell-2n-1)\ \cdots\ [2\ell-2n-(\ell-1)]\}}_{\text{Termos que constituem o coeficiente da Equação (4.128)}}(2\ell-2n-n)!,
$$

logo, para a derivada de ordem ℓ, temos

$$
\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left[x^{2\ell-2n}\right] = (2\ell-2n)\ (2\ell-2n-1)\ \cdots\ [2\ell-2n-(\ell-1)]\ \frac{(2\ell-2n-\ell)!}{(2\ell-2n-\ell)!}\ x^{2\ell-2n-\ell},
$$

portanto,

$$
\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left(x^{2\ell-2n}\right) = \frac{(2\ell-2n)!}{(2\ell-2n-\ell)!}\ x^{2\ell-2n-\ell}.
$$

Note ainda que $(2\ell-2n-\ell) = (\ell-2n)$, logo,

$$
\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left(x^{2\ell-2n}\right) = \frac{(2\ell-2n)!}{(\ell-2n)!}x^{\ell-2n}.
$$

Portanto, com base na condição (4.127), conclui-se que

$$
\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left(x^{2\ell-2n}\right) = \begin{cases} \frac{(2\ell-2n)!}{(\ell-2n)!}x^{\ell-2n}, & \text{se} \quad 0 \leq n \leq \frac{\ell}{2}, \\ 0, & \text{se} \quad \left(\frac{\ell}{2}+1\right) \leq n \leq \ell. \end{cases} \tag{4.129}
$$

Levando a Equação (4.129) à Fórmula de Rodrigues para a Equação de Legendre, temos

$$R_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell}\left[\frac{\ell!}{n!(\ell-n)!}(-1)^{\ell-n}\frac{(2\ell-2n)!}{(\ell-2n)!}x^{\ell-2n}\right],$$

ou ainda, visto que os termos são nulos quando $n \geq (\ell/2+1)$, temos

$$R_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}\left[\frac{\ell!}{n!(\ell-n)!}(-1)^{\ell-n}\frac{(2\ell-2n)!}{(\ell-2n)!}x^{\ell-2n}\right].$$

Agora, reorganizando os termos, obtemos

$$R_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}(-1)^{\ell-n}\frac{\ell!(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n}.$$

Contudo, podemos ainda destacar que $(-1)^{\ell-n} = (-1)^{\ell}(-1)^{-n}$, de modo que

$$R_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell/2}(-1)^{\ell}(-1)^{-n}\frac{\ell!(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n},$$

logo,

$$R_\ell(x) = (-1)^{\ell}\ell!\sum_{n=0}^{\ell/2}(-1)^{-n}\frac{(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n},$$

onde se nota que $(-1)^{-n} = (-1)^{n}$, pois $(-1)^{-n} = 1/(-1)^{n}$, de modo que

$$(-1)^n = \begin{cases} \frac{1}{1} = 1, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{1}{-1} = -1, & \text{se } n \text{ é impar.} \end{cases}$$

dessa forma temos que

$$R_\ell(x) = (-1)^{\ell}\ell!\sum_{n=0}^{\ell/2}\underbrace{(-1)^{-n}}_{=(-1)^n}\frac{(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n},$$

portanto,

$$R_\ell(x) = (-1)^{\ell}\ell!\sum_{n=0}^{\ell/2}\frac{(-1)^n(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n},$$

agora, introduz-se *ad hoc*, o termo $2^\ell/2^\ell = 1$,

$$R_\ell(x) = (-1)^{\ell}\ell!\frac{2^\ell}{2^\ell}\sum_{n=0}^{\ell/2}\frac{(-1)^n(2\ell-2n)!}{n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n},$$

logo, separando a fração $2^\ell/2^\ell$ e colocando um dos termos 2^ℓ no denominador da fração que está sendo operada pelo somatório, temos que

$$R_\ell(x) = (-1)^{\ell}\ell!2^\ell\sum_{n=0}^{\ell/2}\frac{(-1)^n(2\ell-2n)!}{2^\ell n!(\ell-n)!(\ell-2n)!}x^{\ell-2n}. \tag{4.130}$$

Por fim, contemplando a Equação (4.130) e comparando-a com a Equação (4.116), é possível perceber que todo o somatório é exatamente idêntico a expressão que encontrada anteriormente para expressar os Polinômios de Legendre, isto é,

$$R_\ell(x) = (-1)^\ell \ell! 2^\ell \underbrace{\sum_{n=0}^{\ell/2} \frac{(-1)^n (2\ell - 2n)!}{n!(\ell - n)!(\ell - 2n)!} x^{\ell - 2n}}_{P_\ell(x)}. \tag{4.131}$$

Logo, se $R_\ell(x) = (-1)^\ell 2^\ell \ell! P_\ell(x)$, a implicação direta é que $P_\ell(x) = R_\ell(x) / \left((-1)^\ell 2^\ell \ell!\right)$, portanto,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \underbrace{\frac{1}{-1^\ell}}_{=(-1)^\ell} R_\ell,$$

onde lembra-se a definição inicial dada $R_\ell(x)$ em (4.124), de modo que

$$P_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} \left[\left(1 - x^2\right)^\ell \right],$$

onde aqui se usa a comutatividade do termo $(-1)^\ell$ com o operador de derivada, de modo que

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} \left[(-1)^\ell \left(1 - x^2\right)^\ell \right],$$

logo, dentro da derivada, temos que

$$(-1)^\ell \left(1 - x^2\right)^\ell = \left[(-1)\left(1 - x^2\right)\right]^\ell = \left(x^2 - 1\right)^\ell.$$

Por fim, conclui-se que a Fórmula de Rodrigues para os Polinômios de Legendre é expressa por

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} \left[\left(x^2 - 1\right)^\ell \right], \tag{4.132}$$

praecise quod erat demonstrandum!

Tal expressão está de acordo com as expressões encontradas em (ARFKEN; WEBER, 2003), (BARATA, 2022), (GRIFFITHS, 1999), e vários outros.

5 CONCLUSÃO

Desde o início deste trabalho, nos propusemos a resolver dois problemas principais. Primeiro, resolver a Equação de Laplace para sistemas descritos em coordenadas polares esféricas com simetria em torno do eixo azimutal. E segundo, resolver a Equação de Legendre, então teríamos resolvido pelo menos uma parte do primeiro problema.

Felizmente, ao longo de todo o texto, logramos em cumprir os nossos objetivos, isto é, resolvemos a Equação de Legendre e também encontramos todas as informações necessárias para descrever uma solução geral para a Equação de Laplace descrita em um sistema de coordenadas polares esféricas com simetria em torno do ângulo azimutal.

Quando fizemos a separação de variáveis na Equação de Laplace, na Seção 2.3, encontramos três EDOs: uma para a coordenada radial, outra para a coordenada polar, e outra para a coordenada azimutal. Devido à simetria em torno do ângulo azimutal, a EDO para esta coordenada pode ser ignorada. Então, nos preocupamos apenas com as outras duas EDOs em prol de encontrar funções para descrever as coordenadas radial e polar, sendo a solução geral o produto de ambas as soluções.

Para a coordenada radial, apresentamos sua solução na Seção 3.3, quando encontramos a Equação (3.23). Já para a coordenada polar, encontramos sua solução na Seção 4.1, mas após as discussões das 4.2 e 4.3, chegamos a conclusão de que a solução para esta coordenada seria melhor representada pela Equação (4.132).

Portanto, tendo ambas as soluções em mãos, podemos em fim apresentar a solução geral para a Equação (2.9), a Equação de Laplace para o Potencial Eletrostático no caso de um sistema descrito em de coordenadas polares esféricas com simetria em torno do ângulo azimutal. Segue que, de acordo com as equações (2.20) e (2.24), a função potencial escalar V será descrita por

$$V(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \tag{5.1}$$

No entanto, deviso a simetria azimutal, a função $\Phi(\varphi)$ deve ser simétrica em relação a operação de multiplicação, para ela não afete a forma do potencial. Neste caso, assim como discutiu-se nos parágrafos acima da equação (2.29), têm-se $m = 0$, que por sua vez implica $\Phi(\varphi) = 1$. Ou seja, a equação (5.1) se resume a

$$V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{5.2}$$

onde, utilizando os resultados apresentados nas Equações (3.23) e (4.132) na Equação (5.2), obtemos

$$V(r,\theta) = \left(Ar^{\ell} + B\frac{1}{r^{\ell+1}}\right)\frac{1}{2^{\ell}\ell!}\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left[\left(x^2-1\right)^{\ell}\right], \tag{5.3}$$

ou ainda, tendo em vista que existem infinitas possibilidades para o valor de ℓ, então temos também infinitas possibilidades para o potencial. Dessa forma, faz a substituição $V \to V_{\ell}$, de maneira que a solução geral será a combinação linear de todas estas possíveis soluções. Portanto, a solução geral será da forma

$$V(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\ell} V_k(r,\theta), \tag{5.4}$$

onde os termos $V_{\ell}(r,\theta)$ são

$$V_{\ell}(r,\theta) = \left(Ar^{\ell} + B\frac{1}{r^{\ell+1}}\right)\frac{1}{2^{\ell}\ell!}\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left[\left(x^2-1\right)^{\ell}\right], \tag{5.5}$$

de modo que a solução geral pode ser reescrita na forma

$$V(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\ell}\left\{\left(Ar^{k} + B\frac{1}{r^{k+1}}\right)\frac{1}{2^{k}k!}\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}x^{k}}\left[\left(x^2-1\right)^{k}\right]\right\}. \tag{5.6}$$

Vale salientar que, na Equação (5.4), as constantes da combinação linear foram omitidas propositalmente, pois se considera que elas foram absorvidas nas constantes A e B, presentes na Equação (5.5). De toda maneira, elas estão presentes na solução geral expressa na Equação (5.6), sendo esta então a solução para a Equação de Laplace com simetria no eixo azimutal, a Equação (2.9). Na literatura, especialmente em (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982), as soluções $V_{\ell}(r,\theta)$ são chamadas de Harmônicos Zonais.

No mais, o autor apenas agradece a cada estudante que chegou ao final da leitura deste trabalho, bem como agradece imensamente a banca avaliadora deste trabalho de conclusão de curso. Se, de alguma forma, esta leitura lhe ajudou a compreender um pouco melhor a origem física e matemática dos Polinômios de Legendre, então o autor está satisfeito.

Referências

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. ***Essencial Mathematical Methods for Physicists***. 525 B Street, Suite 1900, San Diego, CA 92101-4495, USA: Academic Press - A Harcourt Science and Technology Company, 2003.

BARATA, J. C. A. ***Notas para um Curso de Física Matemática***. Publicação Online, 2022. Disponível em: <http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html>. Acesso em: 27 Dez. 2022.

BASSALO, J. M. F. ***Eletrodinâmica Clássica***. Primeira edição. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

BOAS, M. L. ***Mathematical Methods in Physical Sciences***. Third edition. USA: Jhon Wiley and Sons, 2006.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. ***Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno***. Nona edição. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2010.

BREHM, J. J.; MULLIN, W. J. ***Introduction to the Structure of Matter: A Course of Modern Physics***. Sexta edição. USA: Jhon Wiley and Sons, INC, 1989.

BUTKOV, E. ***Mathematical Physics***. First edition. New York, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

EISBERG, R.; RESNICK, R. ***Física Quântica***. Primeira edição. São Paulo, SP: LTC, 1979.

FREITAS, J. F. L. de. ***Projeto Político Pedagógico Física - Licenciatura***. Publicação Online, 2011. Disponível em: <https://www.ufpe.br/documents/480971/0/Projeto+Politico-Pedagogico+Fisica+CAA/8d9d2993-4924-4898-9d24-92c60c8fd54c>. Acesso em: 27 Dez. 2022.

GRIFFITHS, D. J. ***Introduction to Electrodynamics***. Third edition. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice Hall, 1999.

GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. ***Introduction to Quantum Mechanics***. Third edition. University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom: Cambridge University Press, 2018.

HASSANI, S. ***Mathematical Methods - For Students of Physics and Related Fields***. Second edition. USA: Springer, 2008.

JACKSON, J. D. ***Classical Electrodynamics***. Third edition. United Stats of America: Jhon Wiley and Sons, 1998.

LEMOS, N. A. ***Mecânica Analítica***. Segunda edição. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2013.

MACHADO, K. D. ***Teoria do Eletromagnetismo - Volume I***. Primeira edição. Ponta Grosa, Paraná: Editora UEPG, 2000.

MORSE, P. M.; FESHBACH, H. ***Methods of Theoretical Physics - Part I***. First edition. Japan: Kogakusha, 1953.

MORSE, P. M.; FESHBACH, H. ***Methods of Theoretical Physics - Part II***. First edition. Japan: Kogakusha, 1953.

NETO, J. B. ***Matemática para Físicos, com Aplicações - Volume 2 - Tratamentos Clássico e Quântico***. Primeira edição. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2011.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. ***Fundamentos da Teoria Eletromagnética***. Terceira edição. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda, 1982.

SAGAN, C. ***Cosmos***. Primeira edição. São Paulo: Companhia das Letras, 2017.

SHANKAR, R. ***Principles of Quantum Mechanics***. Second edition. New York, USA: Pleinum Press, 1994.

STEWART, J. ***Cálculo***. Sétima edição. Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 04, São Paulo, SP: Cengage Learning, 2013. Volume 2.

STEWART, J. ***Cálculo***. Sétima edição. Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 04, São Paulo, SP: Cengage Learning, 2013. Volume 1.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. ***Classical Dynamics of Particles and Systems***. Fifth edition. Belmont, CA, 94002, USA: Thomson Brooks/Cole, 2004.

TIPLER, P. A. ***Física Moderna***. Sexta edição. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2014.

ZETTILLI, N. ***Quantum Mechanics***. Second edition. United Kingdon: Jhon Wiley and Sons, 2009.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. ***Differential Equations with Boundary-Value Problems***. Seventh edition. Belmont, CA: Cengage Learning, 2001.

Anexo A - Ementa da Disciplina de Introdução às Equações Diferenciais

E.21 Introdução à Equações Diferenciais - 5ºPeríodo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

- [X] Disciplina
- [ ] Prática de Ensino
- [ ] Atividade complementar
- [ ] Módulo
- [ ] Monografia
- [ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

- [X] Obrigatório
- [ ] Eletivo
- [ ] Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
FISC0092	Introdução às Equações Diferenciais	60	0	4	60	5º

Pré-requisitos	FISC0079	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Teoremas de existência e unicidade. Sistemas de Equações Diferenciais. Equações Diferenciais de ordem n. Transformadas de Laplace. Noções da Teoria de Estabilidade.

OBJETIVOS DO COMPONENTE

Introduzir as principais técnicas de resoluções de equações diferenciais elementares e suas aplicações nas áreas de ciências exatas e tecnológicas.

METODOLOGIA

Exposição dialogada com utilização de quadro branco, simulações de equações diferenciais em softwares, exposição gráficas das equações.Seminários expositivos realizados pelos alunos.

AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados por três notas sendo duas por realização de prova escrita e uma pelos seminários realizados durante o período da disciplina. Será considerado apto (aprovado) o aluno que obtiver nota media superior a 7,0 (sete). Caso não haja nota superior a 7,0 o aluno poderar ser submetido a uma avaliação final sendo considerado apto caso sua media final (nota na prova final mais media nas três provas) seja superior ou igual a 5,0 (cinco).

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. - Introdução as equações diferenciais.
2. - Equações diferenciais de primeira ordem.
    - 2.1 - Equações Lineares.
    - 2.2 - Equações separáveis.
    - 2.3 - Diferenças entre equações lineares e não lineares.
    - 2.4 - Equações Exatas e Fatores Integrantes.
    - 2.5 - Existência e Unicidade.
    - 2.6 - Aplicações.
3. - Equações diferenciais de segunda ordem.
    - 3.1 - Equações homogenias com coeficiente constantes.
    - 3.2 - Independência Linear e Wronskiano.
    - 3.3 - Raízes complexas das equações caracteristica.
    - 3.4 - Raízes repetidas, redução de ordem.
    - 3.5 - Equações não-homogênias
    - 3.6 - Vibrações Elétricas, Mecânicas e Forçada.
4. - Equações diferenciais de ordem n.
    - 4.1 - Equações homogênias com coeficientes constantes.
    - 4.2 - Equações não-homogênias com coeficientes constantes.
5. - Transformada de Laplace.
    - 5.1 - Definição do Transforma de Laplace.
    - 5.2 - Soluções de equações diferenciais usando a transformada de Laplace.
    - 5.3 - Funções Degrau e Impulso
    - 5.4 - Convolução.
6. - Sistemas de equações diferenciais.
    - 6.1 - Teoria básica de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.
    - 6.2 - Sistemas lineares homogênios de primeira ordem com coeficientes constantes.

7.0 - Noções de Estabilidades da equações diferenciais.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Ed. LTC, 2002.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais.** São Paulo: Makron Books, 2001.
- SIMMONS, George Finlay; KRANTZ, Steven G. **Equações diferenciais: teoria, técnica e prática.** São Paulo: McGraw-Hill, 2008

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- BASSANEZI, R.C.; FERREIRA, W.C. Jr., **Equações diferenciais com aplicações.** São Paulo: Ed. Harbra, 1988.
- APOSTOL, T. M., **Calculus**. New York, Blaisdell Publishing Company.
- BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel B. **Equações diferenciais.** 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- EDWARDS, C. H.; PENNEY, David E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno.** 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, c1995.
- STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
CAA/NFD Física-Licenciatura	CAA/NFD Física-Licenciatura

amonteiro
Angela Monteiro Pires
Coord. Núcleo de Formação Docente
SIAPE 1295424
Campus do Agreste
UFPE Núcleo de Formação Docente

ASSINATURA DO COORDENADOR DO NÚCLEO

Prof. Dr. João Francisco L. Freitas
Coordenador Física - Licenciatura
Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste - NFD
SIAPE 1836369

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO

Anexo B - Ementa da Disciplina de Física Moderna I

E.31 Física Moderna I - 7ºPeríodo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

- [X] Disciplina
- [ ] Prática de Ensino
- [ ] Atividade complementar
- [ ] Módulo
- [ ] Monografia
- [ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

- [X] Obrigatório
- [ ] Eletivo
- [ ] Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
FISC0101	Física Moderna I	60	0	4	60	7º

Pré-requisitos	FISC0095 e FISC0092	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Teoria da Relatividade. Quantização da carga, luz e energia. Modelos atômicos. Propriedades ondulatórias das partículas. A equação de Schrödinger. Física atômica. Física estatística.

OBJETIVOS DO COMPONENTE

- Ensinar os fundamentos da Teoria da Relatividade Especial e da Física Quântica.
- Discutir a relação entre Física e Matemática e entre Física e Tecnologia.
- Discutir a própria evolução da Física, trazendo à tona elementos históricos.

METODOLOGIA

Aulas expositivas e dialogadas.

AVALIAÇÃO

Provas escritas e eventuais trabalhos em grupo.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Teoria da Relatividade;
    1.1. Relatividade Clássica;
    1.2. O éter;
    1.3. O experimento de Michelson-Morley;
    1.4. Os postulados de Einstein;
    1.5. Consequências cinemáticas dos postulados;
    1.6. A transformação de Lorentz;
    1.7. Momento relativístico;
    1.8. Energia relativística;
    1.9. Noções de Relatividade Geral;
2. Quantização da Carga, Luz e Energia;
    2.1. Quantização da carga elétrica;
    2.2. Radiação de corpo negro;
    2.3. O efeito fotoelétrico;
    2.4. O efeito Compton;
3. Modelos Atômicos;
    3.1. Espectros atômicos;
    3.2. Modelo de Rutherford;
    3.3. Modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio;
    3.4. Espectros de raios X;
    3.5. O experimento de Franck-Hertz;
4. Propriedades Ondulatórias das Partículas;
    4.1. A hipótese de de Broglie;
    4.2. Pacotes de ondas;
    4.3. Interpretação probabilística da função de onda;
    4.4. O princípio da incerteza;
    4.5. Algumas consequências do princípio da incerteza;
    4.6. Dualidade onda-partícula;
5. A Equação de Schrödinger;
    5.1. A Equação de Schrödinger em uma dimensão;
    5.2. O poço quadrado infinito;
    5.3. O poço quadrado finito;
    5.4. Valores esperados e operadores;
    5.5. O oscilador harmônico simples;
    5.6. Reflexão e transmissão de ondas;

6. Física Atômica;
    6.1. A equação de Schrödinger em três dimensões;
    6.2. Quantização do momento angular e da energia do átomo de hidrogênio;
    6.3. As funções de onda do átomo de hidrogênio;
    6.4. O spin do elétron;
    6.5. Momento angular total e interação spin-órbita;
    6.6. A equação de Schrödinger para duas ou mais partículas;
    6.7. Estados fundamentais dos átomos: a tabela periódica;
    6.8. Estados excitados e os espectros dos elementos;
7. Física Estatística;
    7.1. Estatística Clássica;
    7.2. Estatística Quântica;
    7.3. A condensação de Bose-Einstein;
    7.4. O gás de fótons;
    7.5. Propriedades de um gás de férmions.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

• TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. **A.Física Moderna.** Rio de Janeiro: LTC, 2010, 6ª edição.
• EISBERG, R.; RESNICK, R. **Física Quântica.** Rio de Janeiro: Elsevier, 1979. • HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física.** Rio de Janeiro: LTC, 2009, v.4, 8ª edição.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

• HEWITT, P. G.Física conceitual. São Paulo: Bookman, 2002, 9ª edição.
• BREHM J, J.; MULLIN,W. J. **Introduction to the Structure of Matter. A Course in Modern Physics.** John Wiley & Sons. New York, 1989.
• NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica.** São Paulo: Edgard Blücher, 2002, v.4, 4ª edição (revisada).
• GRIBBIN, John. **Fique por dentro da física moderna.** 2. ed. Rio de Janeiro: Cosac & Naify, 2002.
• OLIVEIRA, Ivan S. **Física moderna: para iniciados, interessados e ficionados.** 1.ed. São Paulo: Liv. da Física, 2005.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
CAA/NFD Física-Licenciatura	CAA/NFD Física-Licenciatura

amonteiro
Angela Monteiro Pires
Coord. Núcleo de Formação Docente
SIAPE 1295424
Campus do Agreste
UFPE Núcleo de Formação Docente

ASSINATURA DO COORDENADOR DO NÚCLEO

Prof. Dr. João Francisco L. Freitas
Coordenador Física - Licenciatura
Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste - NFD
SIAPE 1836369

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO

Anexo C - Ementa da Disciplina de Eletromagnetismo Clássico I

E.21 Introdução à Equações Diferenciais - 5ºPeríodo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Prática de Ensino
[ ] Atividade complementar
[ ] Módulo
[ ] Monografia
[ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Obrigatório
[ ] Eletivo
[ ] Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
FISC0092	Introdução às Equações Diferenciais	60	0	4	60	5º

Pré-requisitos	FISC0079	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Teoremas de existência e unicidade. Sistemas de Equações Diferenciais. Equações Diferenciais de ordem n. Transformadas de Laplace. Noções da Teoria de Estabilidade.

OBJETIVOS DO COMPONENTE

Introduzir as principais técnicas de resoluções de equações diferenciais elementares e suas aplicações nas áreas de ciências exatas e tecnológicas.

METODOLOGIA

Exposição dialogada com utilização de quadro branco, simulações de equações diferenciais em softwares, exposição gráficas das equações.Seminários expositivos realizados pelos alunos.

AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados por três notas sendo duas por realização de prova escrita e uma pelos seminários realizados durante o período da disciplina. Será considerado apto (aprovado) o aluno que obtiver nota media superior a 7,0 (sete). Caso não haja nota superior a 7,0 o aluno poderar ser submetido a uma avaliação final sendo considerado apto caso sua media final (nota na prova final mais media nas três provas) seja superior ou igual a 5,0 (cinco).

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. - Introdução as equações diferenciais.
2. - Equações diferenciais de primeira ordem.
    - 2.1 - Equações Lineares.
    - 2.2 - Equações separáveis.
    - 2.3 - Diferenças entre equações lineares e não lineares.
    - 2.4 - Equações Exatas e Fatores Integrantes.
    - 2.5 - Existência e Unicidade.
    - 2.6 - Aplicações.
3. - Equações diferenciais de segunda ordem.
    - 3.1 - Equações homogenias com coeficiente constantes.
    - 3.2 - Independência Linear e Wronskiano.
    - 3.3 - Raízes complexas das equações caracteristica.
    - 3.4 - Raízes repetidas, redução de ordem.
    - 3.5 - Equações não-homogênias
    - 3.6 - Vibrações Elétricas, Mecânicas e Forçada.
4. - Equações diferenciais de ordem n.
    - 4.1 - Equações homogênias com coeficientes constantes.
    - 4.2 - Equações não-homogênias com coeficientes constantes.
5. - Transformada de Laplace.
    - 5.1 - Definição do Transforma de Laplace.
    - 5.2 - Soluções de equações diferenciais usando a transformada de Laplace.
    - 5.3 - Funções Degrau e Impulso
    - 5.4 - Convolução.
6. - Sistemas de equações diferenciais.
    - 6.1 - Teoria básica de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.
    - 6.2 - Sistemas lineares homogênios de primeira ordem com coeficientes constantes.

7.0 - Noções de Estabilidades da equações diferenciais.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

• BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Ed. LTC, 2002.
• ZILL, D. G.; CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais.** São Paulo: Makron Books, 2001.
• SIMMONS, George Finlay; KRANTZ, Steven G. **Equações diferenciais: teoria, técnica e prática.** São Paulo: McGraw-Hill, 2008

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

• BASSANEZI, R.C.; FERREIRA, W.C. Jr., **Equações diferenciais com aplicações.** São Paulo: Ed. Harbra, 1988.
• APOSTOL, T. M., **Calculus**. New York, Blaisdell Publishing Company.
• BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel B. **Equações diferenciais.** 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
• EDWARDS, C. H.; PENNEY, David E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno.** 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, c1995.
• STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
CAA/NFD Física-Licenciatura	CAA/NFD Física-Licenciatura

amonteiro
Angela Monteiro Pires
Coord. Núcleo de Formação Docente
SIAPE 1295424
Campus do Agreste
UFPE Núcleo de Formação Docente

ASSINATURA DO COORDENADOR DO NÚCLEO

Prof. Dr. João Francisco L. Freitas
Coordenador Física - Licenciatura
Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste - NFD
SIAPE 1836369

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO

Anexo D - Ementa da Disciplina de Mecânica Quântica I

F.15 Mecânica Quântica I

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

- [X] Disciplina
- [ ] Atividade complementar
- [ ] Monografia
- [ ] Prática de Ensino
- [ ] Módulo
- [ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

- [ ] Obrigatório
- [X] Eletivo
- [ ] Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
FISC0118	Mecânica Quântica I	60	0	4	60	

Pré-requisitos	FISC0092, FISC0101	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Os princípios da Mecânica Quântica e sua estrutura matemática. O oscilador harmônico simples. As representações de Schrödinger e de Heisenberg. Potenciais bidimensionais e tridimensionais separáveis. Potenciais centrais. O momento angular. O átomo de hidrogênio. Adição de momentos angulares. Spin do elétron e as matrizes de Pauli. O elétron em um campo magnético

OBJETIVOS DO COMPONENTE

Introduzir a mecânica quântica não-relativística para um e dois corpos e suas aplicações.

METODOLOGIA

Aulas expositivas com utilização de quadro branco e/ou ou apresentação em multimídia.

AVALIAÇÃO

Provas escritas e eventuais trabalhos (listas de exercícios, seminário)

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. A equação de Schrödinger e a álgebra de operadores.
    - 1.1. A equação de onda e a sua interpretação;
    - 1.2. Conservação da probabilidade;
    - 1.3. Normalização da função de onda;
    - 1.4. Estados estacionários e não-estacionários;
    - 1.5. Ortogonalidade dos auto-estados;
    - 1.6. Auto estados no espaço de posição e de momentum;
    - 1.7. Valores esperados;
    - 1.8. Operadores, observáveis e relações de incerteza;
    - 1.9. Teorema de Ehrenfest e teorema do Virial;
    - 1.10. Comutadores e regras e comutação;
2. Aplicações da equação de Schrödinger.
    - 2.1. Partícula livre;
    - 2.2. Partícula na caixa;
    - 2.3. Potencial degrau;
    - 2.4. Barreira de potencial retangular;
    - 2.5. Potencial delta;
    - 2.6. Poço quadrado unidimensional;
3. Formalismo da mecânica quântica.
    - 3.1. Postulados da mecânica quântica;
    - 3.2. Funções de onda versus vetores de estado;
    - 3.3. Notação de Dirac: Bras, Kets e representações matriciais;
    - 3.4. Base dos Kets e mudança de base;
    - 3.5. Produto interno (ou escalar);
    - 3.6. Espaço de Hilbert;
    - 3.7. Operadores lineares, Hermitianos e de projeção;
    - 3.8. Autovalores e autovetores de operadores Hermitianos;
    - 3.9. Comutatividade e compatibilidade;
    - 3.10. Produto tensorial de espaços de estados e de operadores;
4. Dinâmica quântica.
    - 4.1- O operador de evolução temporal e a equação de Schrödinger;
    - 4.2- Representação de Schrödinger, Heisenberg e de interação;
    - 4.3- Dependência temporal do valor esperado;
    - 4.4- Equação de movimento de Heisenberg;
5. Oscilador harmônico.
    - 5.1- Equação de Schrödinger para o oscilador harmônico;
    - 5.2- Solução via método analítico;
    - 5.3- Solução via método algébrico: operadores de criação e aniquilação;
    - 5.4- Evolução temporal do oscilador harmônico;
    - 5.5- Estados coerentes;

6. Potenciais centrais e momento angular.
   - 6.1- Momentum angular orbital;
   - 6.2- Autovalores e autofunções do Momentum angular;
   - 6.3- Harmônicos esféricos;
   - 6.4- A redução do problema de força central;
   - 6.5- Partícula na caixa esférica;
   - 6.6- Átomo de hidrogênio;
7. Introdução aos métodos aproximados de resolução da equação de Schrödinger.
   - 7.1- Método Variacional;
   - 7.2- Noções de teoria de perturbação independente do tempo;
   - 7.3- Noções de teoria de perturbação dependente do tempo.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

• EISBERG, Robert Martin; RESNICK, Robert. Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. Rio de Janeiro: Elsevier.
• GRIFFITHS, David J. Introduction to quantum mechanics. 2nd ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, 2005. ix, 468 p
• LOPES, José Leite. A estrutura quântica da matéria: do átomo pré-socrático às partículas elementares. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2005. 931 p.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

•PESSOA JUNIOR, Osvaldo. Conceitos de física quântica. Vol 1, 3.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
•VIANNA, José David Mangueira; FAZZIO, Adalberto; CANUTO, Sylvio. Teoria quântica de moléculas e sólidos: simulação computacional . São Paulo: Livraria da Física, 2004. 401 p.
•COHEN-TANNOUDJI, Claude; DIU, Bernard; LALOË, Franck. Quantum mechanics. New York: J. Wiley ; Paris : Hermann.
•NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. Computação quântica e informação quântica. Porto Alegre: Bookman, 2005.
•VALADARES, Eduardo de Campos; CHAVES, Alaor; ALVES , Esdras Garcia. Aplicações da física quântica: do transistor à nanotecnologia . 1.ed. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física; Livraria da Física,

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
CAA/NFD Física-Licenciatura	CAA/NFD Física-Licenciatura

amonteiro
Angela Monteiro Pires
Coord. Núcleo de Formação Docente
SIAPE 1295424
Campus do Agreste
UFPE Núcleo de Formação Docente

ASSINATURA DO COORDENADOR DO NÚCLEO

Prof. Dr. João Francisco L. Freitas
Coordenador Física - Licenciatura
Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste - NFD
SIAPE 1836369

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO