



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIA EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HUGO LEONARDO DE ANDRADE GUIMARÃES

**DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA MATERIAL ELETRIZADA SOB A AÇÃO DE  
DUAS CARGAS ELÉTRICAS FIXAS**

Recife

2022

HUGO LEONARDO DE ANDRADE GUIMARÃES

**DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA MATERIAL ELETRIZADA SOB A AÇÃO DE  
DUAS CARGAS ELÉTRICAS FIXAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral

Recife

2022

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G963d Guimarães, Hugo Leonardo de Andrade  
Dinâmica de uma partícula material eletrizada sob a ação de duas cargas elétricas fixas / Hugo Leonardo de Andrade Guimarães. – 2022.  
45 f.: il., fig.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2022.  
Inclui referências.

1. Análise. 2. Estabilidade de equilíbrios. I. Cabral, Hildeberto Eulálio (orientador). II. Título.

515                      CDD (23. ed.)                      UFPE - CCEN 2023-165

## HUGO LEONARDO DE ANDRADE GUIMARÃES

### *DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA MATERIAL ELETRIZADA SOB A AÇÃO DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS FIXAS.*

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 30/11/2022

#### **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitória (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho (Examinador Externo)  
Universidade Federal do Piauí

---

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Examinador Externo)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

#### **OBSERVAÇÃO:**

A defesa em epígrafe foi realizada parcialmente, por videoconferência, envolvendo a Banca Examinadora e o discente, através de recursos de videoconferência, que possibilitaram realizar a discussão acadêmica sobre o objeto de estudo, com som e imagem. A defesa assim ocorreu em virtude da das Resoluções 05/2021 do CEPE e 04/2022 do CONSUNI.

Dedico esta tese à minha família, em especial à minha mãe Marleide do Carmo de Andrade Guimarães (*in memorian*) e ao meu pai Miguel Alves Guimarães Junior que me deram condições de chegar onde cheguei, à minha companheira e artista preferida Lílian Neves por todo o suporte durante esse período de doutoramento de pandemia e de pandemônio no Brasil e ao meu tio Izaías (*in memorian*) que sempre me incentivou a seguir em frente.

## AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos à CAPES por todo o suporte financeiro por meio de bolsas de pós-graduação durante o mestrado e o doutorado.

Agradeço a meus pais Marleide do Carmo de Andrade Guimarães (*in memorian*) e Miguel Alves Guimarães Junior que me deram plenas condições de chegar onde cheguei e ao meu irmão Eduardo pelo suporte quando necessário.

Agradeço às minhas tias Maria do Carmo (Carmita) e Marleide por todo carinho e incentivo durante essa caminhada nesse período difícil que vivemos no Brasil de 2017 até 2022.

Agradeço à minha companheira e artista preferida Lílian Neves por todo o suporte emocional e por todo estímulo durante esse período de doutoramento, pandemia e pandemônio no Brasil.

Meus sinceros e eternos agradecimentos ao meu orientador Hildeberto Eulálio Cabral com o qual entendi plenamente o que significa ser, de fato, um orientador de tese de doutorado. Sem as orientações do professor Hildeberto dificilmente eu chegaria a bom termo no doutorado.

Agradeço à banca pela disponibilidade de participar de minha defesa de tese e pelas valiosas sugestões que recebi.

Agradeço aos amigos de caminhada nas figuras de Tiago Duque (o pirraia) e José Laudelino (o sertanejo) pelas conversas extemporâneas ou não.

Agradeço a todas, todos, tod@s, todxs... que de alguma forma ajudaram-me nessa caminhada e em especial agradeço por mim e pela ciência brasileira por termos voltado ao tempo da racionalidade no Brasil. VIVA À CIÊNCIA!!!

## RESUMO

No presente trabalho é feito o estudo da dinâmica, no espaço tridimensional real, de uma partícula material com uma carga elétrica sob a ação de seu peso e das forças eletrostáticas induzidas por duas cargas fixas situadas em um eixo vertical. Nesse estudo usaremos fortemente o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov. Nesse sentido olhamos para todos os autovalores da matriz do sistema Hamiltoniano em questão e também para o conceito de estabilidade orbital nessa direção olhamos para as órbitas enquanto conjuntos geométricos. Nesse trabalho também fizemos uso de conceitos físicos como os de força de Coulomb, "força centrífuga", força gravitacional, velocidade angular, atração elétrica, repulsão elétrica. Com o intuito de facilitar o entendimento e o tratamento para entender as funções que surgiram ao longo do trabalho, usamos fortemente os conhecimentos sobre paridade e sobre o comportamento de funções reais de uma variável real. Também foi usado o conceito de transformações simpléticas para obtenção de Hamiltonianos em sistemas rotatórios de coordenadas, o conceito de redução do número de graus de liberdade do sistema hamiltoniano em questão. Concluímos o trabalho expondo as perspectivas futuras com os dados obtidos até o presente momento.

**Palavras-chaves:** sistemas hamiltonianos; estabilidade de equilíbrios; partícula material eletrizada; teorema de Lyapunov; estabilidade orbital.

## ABSTRACT

The present work studies the dynamics, in real three-dimensional space, of a material particle with an electrical charge under the action of its weight and the electrostatic forces induced by two fixed charges located on a vertical axis. In this study we will heavily use the concept of stability in Lyapunov's sense. In this sense we look at all the eigenvalues of the matrix of the Hamiltonian system in question and also at the concept of orbital stability and in this direction we look at orbits as geometric sets. In this work we also made use of physical concepts such as Coulomb force, "centrifugal force", gravitational force, angular velocity, electrical attraction, electrical repulsion. In order to facilitate understanding and treatment to understand the functions that emerged throughout the work, we heavily used knowledge about parity and the behavior of real functions of a real variable. The concept of symplectic transformations was also used to obtain Hamiltonians in rotating coordinate systems and also the concept of reducing the number of degrees of freedom of the Hamiltonian system in question. We conclude the work by exposing future perspectives with the data obtained to date.

**Keywords:** hamiltonian systems; stability of equilibria; charged mass particle; Lyapunov theorem; orbital stability.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA NUM SISTEMA INERCIAL FIXO</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1	A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO . . . . .	11
2.2	O HAMILTONIANO DO SISTEMA . . . . .	13
2.3	OS EQUILÍBRIOS DO SISTEMA HAMILTONIANO . . . . .	13
2.4	ESTABILIDADE DOS EQUILÍBRIOS . . . . .	19
2.5	CONSIDERAÇÕES SOBRE A DINÂMICA FORA DO EIXO VERTICAL . . . . .	20
<b>2.5.1</b>	<b>Análise da equação de equilíbrio vertical (2.59)</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>3</b>	<b>DINÂMICA NUM SISTEMA ROTATÓRIO</b> . . . . .	<b>26</b>
3.1	O HAMILTONIANO NO SISTEMA ROTATÓRIO . . . . .	26
3.2	EQUILÍBRIOS DO SISTEMA HAMILTONIANO NO SISTEMA ROTATÓRIO . . . . .	27
3.3	ESTABILIDADE DOS EQUILÍBRIOS . . . . .	30
<b>4</b>	<b>ESTABILIDADE DA ÓRBITA CIRCULAR</b> . . . . .	<b>32</b>
4.1	PROCESSO DE REDUÇÃO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE . . . . .	32
4.2	HAMILTONIANO REDUZIDO . . . . .	35
<b>4.2.1</b>	<b>Redução a dois graus de liberdade</b> . . . . .	<b>37</b>
4.3	OS EQUILÍBRIOS DO SISTEMA HAMILTONIANO REDUZIDO . . . . .	39
4.4	ESTABILIDADE DOS EQUILÍBRIOS . . . . .	40
<b>4.4.1</b>	<b>Comentário sobre a dinâmica para uma carga fixa na origem</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>44</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>45</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O problema da tese surgiu durante discussões sobre a dinâmica de uma partícula de massa  $m$  e carga negativa de intensidade  $q$  atraída por uma carga positiva de intensidade  $Q$  fixa na origem que estava sendo estudado pelo professor Hildeberto Cabral.

A questão naturalmente foi colocada para a variante do problema em que o centro fixo é substituído por duas cargas elétricas iguais, fixas em pontos situados simetricamente em relação à origem do sistema de coordenadas.

Na tese estudamos o movimento do ponto material  $P$  no espaço  $R^3$  na dinâmica deste sistema com dois centros eletrizados fixos.

No capítulo 1, após a formulação da equação do movimento num sistema inercial fixo de coordenadas usamos um processo de adimensionalização para simplificar a equação do movimento, tornando-a livre de grandezas físicas.

Em seguida formulamos o problema em termos de um sistema Hamiltoniano e estudamos os seus equilíbrios. Mostramos que existem dois equilíbrios sobre o eixo fixo das duas cargas e que eles são instáveis.

Não havendo equilíbrios fora do eixo dos  $z$  buscamos obter pontos onde é nula a componente vertical da força resultante sobre a partícula. Provada a existência de um tal ponto imprimimos a ele uma velocidade conveniente que resulta em uma órbita circular em torno do eixo dos  $z$ . Mostramos que esta órbita é instável no sentido de Lyapunov, pois existem órbitas circulares vizinhas que são percorridas com velocidades angulares distintas. Pomos então a questão de saber se esta órbita circular é orbitalmente estável, isto é, se a órbita de qualquer solução com condição inicial próxima da órbita circular é um conjunto geométrico em  $R^3$  vizinho da órbita circular.

No capítulo 2, para estudar a dinâmica na vizinhança da órbita circular tomamos um sistema rotatório de coordenadas definido pela velocidade angular da órbita circular. O sistema Hamiltoniano fica então modificado pelo acréscimo de um termo proveniente da rotação e que é uma integral primeira do sistema. Este Hamiltoniano, no sistema rotatório, agora tem um equilíbrio fora do eixo vertical, o qual corresponde à órbita circular estudada no sistema inercial fixo. A estabilidade deste equilíbrio no sentido de Lyapunov no sistema rotatório significa a estabilidade orbital da órbita circular no sistema inercial fixo.

Para estudar a estabilidade do equilíbrio que está fora do eixo no sistema rotatório fazemos

a redução do sistema Hamiltoniano usando a integral primeira contida em sua expressão. Neste capítulo expomos a teoria necessária à redução a um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade.

Obtido o sistema reduzido, fazemos o estudo de seus equilíbrios. Para o equilíbrio fora do eixo obtemos um critério para a sua estabilidade linear. Gostaríamos de chegar a um critério envolvendo só as duas coordenadas do equilíbrio do sistema reduzido a exemplo do critério encontrado para o caso de uma carga fixa na origem, mas devido a complexidade das expressões das derivadas do potencial do sistema reduzido, em termos das quais nosso critério é formulado, ainda não conseguimos esta informação.

Ficamos com esta última questão em aberto para estudo futuro. De nosso conhecimento este problema ainda não foi estudado de modo que não há na literatura trabalhos que possam ser consultados sobre o assunto.

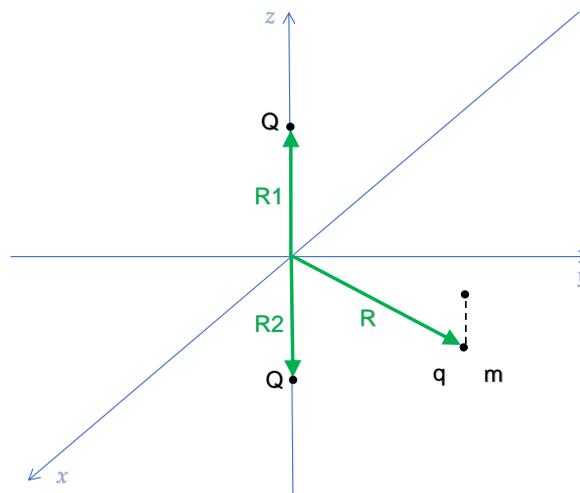
## 2 DINÂMICA NUM SISTEMA INERCIAL FIXO

Neste capítulo obtemos as equações do movimento da partícula material carregada em um sistema fixo de coordenadas. Após considerações sobre as grandezas físicas, com o objetivo de tornar as equações adimensionais, escrevemos estas em forma Hamiltoniana. Em seguida, obtemos os equilíbrios do sistema Hamiltoniano e estudamos a questão de sua estabilidade. Terminamos o capítulo com algumas considerações sobre a existência de órbitas circulares em torno do eixo que contém as cargas fixas.

### 2.1 A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Sejam  $\mathbf{R}_1 = (0, 0, R_0) = -\mathbf{R}_2$  os vetores-posição das cargas de intensidade  $Q$ . Seja  $\mathbf{R}$  o vetor-posição da massa  $m$ , com carga de intensidade  $q$  ilustrados na figura a seguir

Figura 1 – Cargas no espaço



Fonte: O Autor (2022)

As forças sobre a massa  $m$  são o peso  $-mg\mathbf{k}$ ; onde o vetor  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  é o terceiro vetor da

base ortonormal  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ; e a força eletrostática devida às cargas

$$\mathbf{F}_c = \sigma \left( \frac{\kappa_0 Q q}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1\|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) + \frac{\kappa_0 Q q}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2\|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_2) \right), \quad (2.1)$$

onde  $\kappa_0$  é a constante de Coulomb. Se a força eletrostática for de atração, isto é, se as cargas  $Q$  e  $q$  possuem sinais contrários, então teremos  $\sigma = -1$ . Se a força eletrostática for de repulsão, isto é se as cargas  $Q$  e  $q$  possuem sinais iguais, então teremos  $\sigma = +1$ .

Pela segunda lei da dinâmica,

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -mg\mathbf{k} + \mathbf{F}_c. \quad (2.2)$$

Disso obtemos a equação diferencial que rege o movimento da partícula de massa  $m$ ,

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -mg\mathbf{k} + \sigma \left( \frac{\kappa_0 Q q}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1\|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) + \frac{\kappa_0 Q q}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2\|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_2) \right), \quad (2.3)$$

onde o ponto sobre a letra significa derivada em relação ao tempo  $t$ .

Para adimensionalizar a equação (2.3) tomemos um comprimento  $L$  e um instante  $t_0$  a serem, depois, escolhidos convenientemente e, em seguida, consideremos os vetores adimensionais  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  e o escalar adimensional  $s$  definidos por

$$\mathbf{R} = L\mathbf{r}, \quad \mathbf{R}_1 = L\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{R}_2 = L\mathbf{r}_2 \quad \text{e} \quad t = t_0 s. \quad (2.4)$$

Denotando por  $'$  a derivada em relação ao tempo adimensional  $s$ , temos

$$\ddot{\mathbf{R}} = L\mathbf{r}''t_0^{-2} \quad (2.5)$$

e a equação (2.3) toma a forma

$$\mathbf{r}'' = -\frac{gt_0^2}{L}\mathbf{k} + \sigma \frac{\kappa_0 Q^2 t_0^2}{mL^3} \mu \left[ \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right], \quad (2.6)$$

onde

$$\mu = \frac{q}{Q}. \quad (2.7)$$

Observemos que os quocientes  $\frac{gt_0^2}{L}$  e  $\frac{\kappa_0 Q^2 t_0^2}{mL^3}$  são adimensionais<sup>1</sup>. Escolhamos agora  $t_0$  e  $L$  de modo que tenhamos

$$\frac{gt_0^2}{L} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\kappa_0 Q^2 t_0^2}{mL^3} = 1.$$

Então, a equação (2.6) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{r}'' = -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

<sup>1</sup> A dimensionalidade de  $\kappa_0$  é  $Nm^2/C^2$ .

onde o potencial  $U$  é dado por

$$U(\mathbf{r}, s, \mu) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle + \sigma\mu \left[ \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|} \right], \quad (2.9)$$

ou seja, temos a seguinte equação adimensional

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{k} + \sigma\mu \left[ \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right]. \quad (2.10)$$

Como a equação diferencial (2.10) é adimensional, o vetor  $\mathbf{r}$  simplesmente representa um ponto no espaço  $R^3$  dos ternos  $(x_1, x_2, x_3)$  de números reais.

## 2.2 O HAMILTONIANO DO SISTEMA

Fazendo  $\mathbf{x} = \mathbf{r}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{r}'$ , re-escrevemos a equação (2.8) como um sistema Hamiltoniano

$$\mathbf{x}' = H_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y}' = -H_{\mathbf{x}}, \quad (2.11)$$

com a função Hamiltoniana

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s, \mu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 + V(\mathbf{x}, s, \mu), \quad (2.12)$$

na qual

$$V(\mathbf{x}, s, \mu) = U(\mathbf{x}, s, \mu) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle + \sigma\mu \left[ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|} \right], \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 = (0, 0, a), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_2 = (0, 0, -a) \quad \text{e} \quad a = \frac{R_0}{L}. \quad (2.14)$$

## 2.3 OS EQUILÍBRIOS DO SISTEMA HAMILTONIANO

A dinâmica do sistema Hamiltoniano é descrita pelas equações (2.11), isto é,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}' = -V_{\mathbf{x}}. \quad (2.15)$$

Portanto, os equilíbrios são os pontos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R^3 \times R^3$  que satisfazem às equações

$$\mathbf{y} = 0 \quad \text{e} \quad V_{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.16)$$

Como  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , temos para  $d_j = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ ;  $j = 1, 2$ ; as igualdades

$$d_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + a)^2}. \quad (2.17)$$

Com isso o potencial  $V$  em (2.13) pode ser escrito como

$$V = \langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle + \sigma\mu \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right). \quad (2.18)$$

De (2.17) obtemos

$$\frac{\partial d_1}{\partial x_3} = \frac{x_3 - a}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial x_3} = \frac{x_3 + a}{d_2}, \quad \frac{\partial d_1}{\partial x_j} = \frac{x_j}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial x_j} = \frac{x_j}{d_2}, \quad (j = 1, 2)$$

e calculamos as seguintes derivadas parciais do potencial  $V$ :

$$V_{x_1} = -\sigma\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) x_1, \quad V_{x_2} = -\sigma\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) x_2, \quad V_{x_3} = 1 - \sigma\mu \left( \frac{x_3 - a}{d_1^3} + \frac{x_3 + a}{d_2^3} \right). \quad (2.19)$$

Por conseguinte, das equações (2.16) e (2.19) para os equilíbrios, obtemos as seguintes equações

$$\sigma\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) x_1 = 0, \quad \sigma\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) x_2 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\mu \left( \frac{x_3 - a}{d_1^3} + \frac{x_3 + a}{d_2^3} \right) = 1. \quad (2.20)$$

Das duas primeiras equações acima podemos concluir que num equilíbrio teremos  $x_1 = x_2 = 0$ .

E assim, com  $x_1 = x_2 = 0$  podemos escrever a terceira equação de (2.20) da seguinte forma

$$\frac{x_3 - a}{|x_3 - a|^3} + \frac{x_3 + a}{|x_3 + a|^3} = \frac{\sigma}{\mu}. \quad (2.21)$$

Primeiro analisemos o caso atrator, isto é, quando  $\sigma = -1$ .

Para  $x_3 < -a$ , temos  $x_3 - a < 0$  e  $x_3 + a < 0$ , logo a equação (2.21) pode ser escrita como

$$f_1(x_3) = \frac{1}{(x_3 - a)^2} + \frac{1}{(x_3 + a)^2} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.22)$$

Disso temos que

$$f_1(x_3) > 0, \quad \forall x_3. \quad (2.23)$$

Calculando a derivada de  $f_1$  obtemos

$$f_1'(x_3) = -2 \left( \frac{1}{(x_3 - a)^3} + \frac{1}{(x_3 + a)^3} \right) \quad (2.24)$$

e vemos que

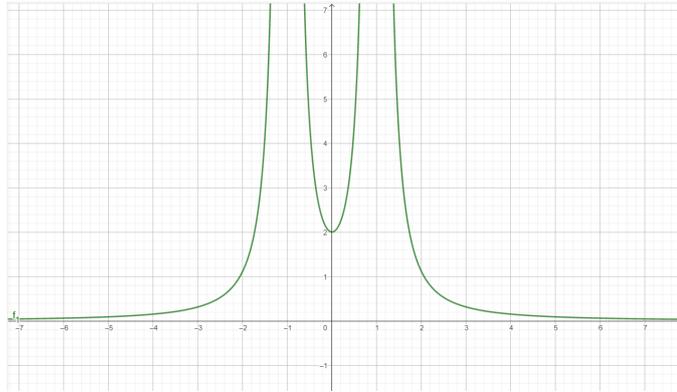
$$f_1'(x_3) > 0, \quad \forall x_3 < -a. \quad (2.25)$$

Portanto  $f_1$  é crescente na semi-reta  $x_3 < -a$ .

Notemos que

$$f_1(x_3) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow -\infty, \quad (2.26)$$

Figura 2 – Função  $f_1$  com  $a = 1$



Fonte: O Autor (2022)

$$f_1(x_3) \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow -a^- . \quad (2.27)$$

Concluimos que existe um único ponto  $x_3^{(1)}$  na semi-reta  $x_3 < -a$  tal que  $f_1(x_3^{(1)}) = \frac{1}{\mu}$ .

Para  $-a < x_3 < a$  temos  $x_3 - a < 0$  e  $x_3 + a > 0$ , logo a equação (2.21) pode ser escrita como

$$f_2(x_3) = \frac{1}{(x_3 - a)^2} - \frac{1}{(x_3 + a)^2} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.28)$$

A função  $f_2$  é ímpar e calculando a sua derivada obtemos

$$f_2'(x_3) = -2 \left( \frac{1}{(x_3 - a)^3} - \frac{1}{(x_3 + a)^3} \right). \quad (2.29)$$

Vemos que

$$f_2'(0) = \frac{4}{a^3} > 0 \quad (2.30)$$

e, devido à paridade da função  $f_2$ ,

$$f_2'(x_3) > 0 \quad \text{para} \quad -a < x_3 < 0 \quad \text{e} \quad \text{para} \quad 0 < x_3 < a. \quad (2.31)$$

Portanto,  $f_2$  é crescente no intervalo  $-a < x_3 < a$ .

Notemos que

$$f_2(0) = 0, \quad (2.32)$$

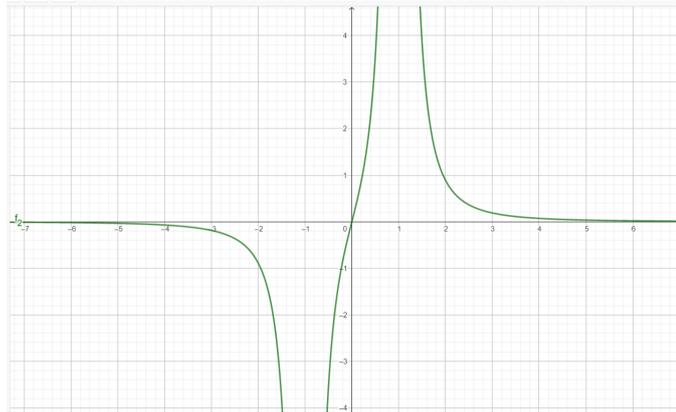
$$f_2(x_3) \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow a^- \quad (2.33)$$

e

$$f_2(x_3) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow -a^+. \quad (2.34)$$

Portanto, não existe nenhum ponto  $x_3$  no intervalo  $-a < x_3 < 0$  tal que  $f_2(x_3) = \frac{1}{\mu}$ . Assim podemos garantir que existe um único ponto  $x_3^{(2)}$  no intervalo  $0 < x_3 < a$  tal que  $f_2(x_3^{(2)}) = \frac{1}{\mu}$ .

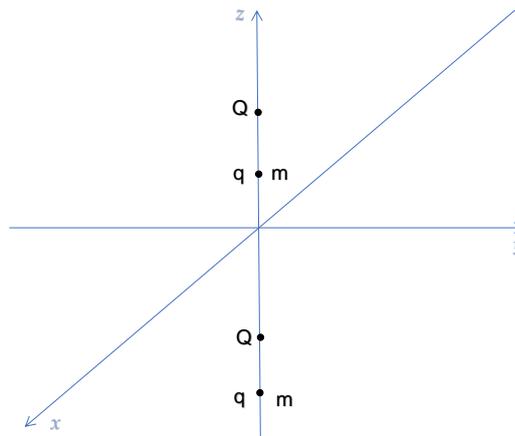
**Figura 3 – Função  $f_2$  com  $a = 1$**



Fonte: O Autor (2022)

Com tudo isso podemos concluir que, no caso atrator, existem apenas dois equilíbrios e estes estão no eixo  $x_3$ , um na semi-reta  $x_3 < -a$ , outro no intervalo  $0 < x_3 < a$ .

**Figura 4 – Equilíbrios no caso atrator**



Fonte: O Autor (2022)

Agora analisemos o caso repulsor, isto é, quando  $\sigma = +1$ .

Para  $a < x_3$ , temos  $x_3 - a > 0$  e  $x_3 + a > 0$ . Logo, a equação (2.21) pode ser escrita como

$$f_3(x_3) = \frac{1}{(x_3 - a)^2} + \frac{1}{(x_3 + a)^2} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.35)$$

Disso temos que

$$f_3(x_3) > 0, \quad \forall x_3. \quad (2.36)$$

Calculando a derivada de  $f_3$  obtemos

$$f'_3(x_3) = -2 \left( \frac{1}{(x_3 - a)^3} + \frac{1}{(x_3 + a)^3} \right) \quad (2.37)$$

e vemos que

$$f'_3(x_3) < 0 \quad \text{para } a < x_3, \quad (2.38)$$

portanto  $f_3$  é decrescente na semi-reta  $a < x_3$ .

Notemos que

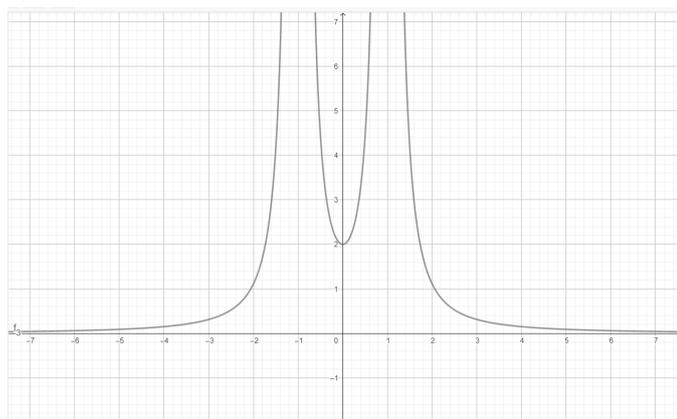
$$f_3(x_3) \rightarrow 0 \quad \text{quando } x_3 \rightarrow +\infty \quad (2.39)$$

e

$$f_3(x_3) \rightarrow +\infty \quad \text{quando } x_3 \rightarrow a^-. \quad (2.40)$$

Concluimos que existe um único ponto  $x_3^{(3)}$  na semi-reta  $a < x_3$  tal que  $f_3(x_3^{(3)}) = \frac{1}{\mu}$ .

**Figura 5 – Função  $f_3$  com  $a = 1$**



Fonte: O Autor (2022)

Para  $-a < x_3 < a$  temos  $x_3 - a < 0$  e  $x_3 + a > 0$ , logo a equação (2.21) pode ser escrita como

$$f_4(x_3) = -\frac{1}{(x_3 - a)^2} + \frac{1}{(x_3 + a)^2} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.41)$$

A função  $f_4$  é ímpar e calculando a sua derivada obtemos

$$f_4'(x_3) = 2 \left( \frac{1}{(x_3 - a)^3} - \frac{1}{(x_3 + a)^3} \right). \quad (2.42)$$

Vemos que

$$f_4'(0) = -\frac{4}{a^3} < 0 \quad (2.43)$$

e, por conta da paridade da função  $f_4$ ,

$$f_4'(x_3) < 0 \quad \text{para} \quad -a < x_3 < 0 \quad \text{e} \quad \text{para} \quad 0 < x_3 < a. \quad (2.44)$$

Portanto,  $f_4$  é decrescente no intervalo  $-a < x_3 < a$ .

Notemos que

$$f_4(0) = 0 \quad (2.45)$$

e que

$$f_4(x_3) \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow -a. \quad (2.46)$$

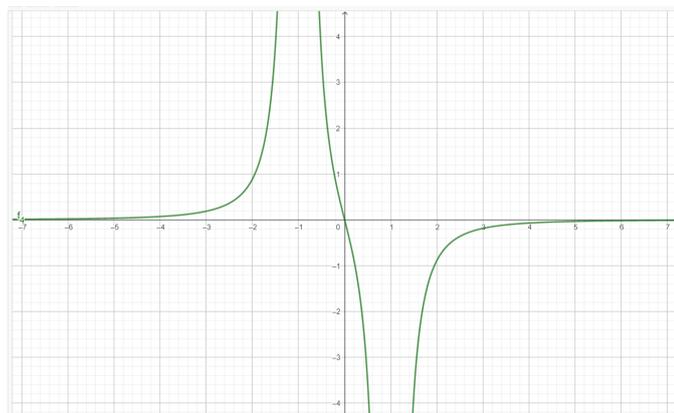
Concluimos que existe um único ponto  $x_3^{(4)}$  no intervalo  $-a < x_3 < 0$  tal que  $f_4(x_3^{(4)}) = \frac{1}{\mu}$ .

Como

$$f_4(x_3) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow a^-. \quad (2.47)$$

Podemos garantir que não existe nenhum ponto  $x_3$  no intervalo  $0 < x_3 < a$  tal que  $f_4(x_3) = \frac{1}{\mu}$ .

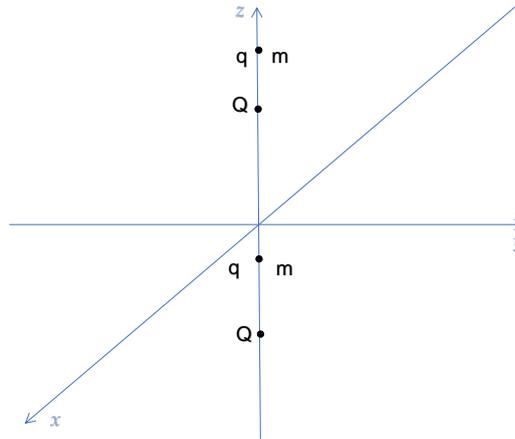
**Figura 6 – Função  $f_4$  com  $a = 1$**



Fonte: O Autor (2022)

Com tudo isso podemos concluir que, no caso repulsor, existem apenas dois equilíbrios e estes estão no eixo  $x_3$ . Um na semi-reta  $0 < x_3$ , outro no intervalo  $-a < x_3 < 0$ .

Figura 7 – Equilíbrios no caso repulsor



Fonte: O Autor (2022)

## 2.4 ESTABILIDADE DOS EQUILÍBRIOS

Vamos agora analisar a questão da estabilidade dos equilíbrios obtidos. Nessa direção iremos fazer uso Teorema de Lyapunov encontrado no livro **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra** de HIRSH e SMALE.

### Teorema 2.4.1 (Teorema de Lyapunov)

*Se um sistema Hamiltoniano possui autovalor que não é imaginário puro então o sistema hamiltoniano é instável.*

*Se um sistema Hamiltoniano é estável então todos os autovalores são imaginários puros.*

Na direção de obter os autovalores do sistema Hamiltoniano temos a seguinte matriz Hessiana do Hamiltoniano (2.12)

$$G = Hess(H) = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

onde

$$H_{xx} = V_{xx}, \quad H_{yy} = I_3 \quad \text{e} \quad H_{yx} = H_{xy} = 0_3. \quad (2.49)$$

Consequentemente

$$\lambda I_6 - JG = \begin{bmatrix} \lambda I_3 & -I_3 \\ V_{\mathbf{xx}} & \lambda I_3 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Calculando as derivadas segundas do potencial  $V$  nos equilíbrios, que são todos da forma

$$(0, 0, x_3) \quad (2.51)$$

temos

$$V_{x_1x_2} = V_{x_2x_1} = V_{x_1x_3} = V_{x_3x_1} = V_{x_2x_3} = V_{x_3x_2} = 0, \quad (2.52)$$

também

$$V_{x_1x_1} = V_{x_2x_2} = -\sigma\mu \left( \frac{1}{|x_3 - a|^3} + \frac{1}{|x_3 + a|^3} \right) \quad (2.53)$$

bem como

$$V_{x_3x_3} = 2\sigma\mu \left( \frac{1}{|x_3 - a|^3} + \frac{1}{|x_3 + a|^3} \right). \quad (2.54)$$

Para achar a equação característica vamos usar a fórmula para calcular o determinante de uma matriz dada em blocos  $n \times n$ ,

$$\text{Det} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{Det} [DA - DBD^{-1}C] \quad (2.55)$$

encontrada no §18, página 123, do livro **Lectures on Celestial Mechanics** de SIEGEL e MOSER.

De (2.50) - (2.54) temos que

$$\text{Det}[\lambda I_6 - JG] = \text{Det}[\lambda^2 I_3 + V_{\mathbf{xx}}] = (\lambda^2 + V_{x_1x_1})(\lambda^2 + V_{x_2x_2})(\lambda^2 + V_{x_3x_3}). \quad (2.56)$$

Por (2.53) e (2.54) vemos que tanto no caso atrator, como no caso repulsor, alguma das derivadas  $V_{x_i x_i}$  calculada nos equilíbrios é negativa. Portanto o polinômio característico (2.56) tem raízes reais. Logo, pelo Teorema de Lyapunov, todos os equilíbrios tanto no caso atrator,  $\sigma = -1$ , como no caso repulsor,  $\sigma = +1$ , são instáveis.

## 2.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE A DINÂMICA FORA DO EIXO VERTICAL

Como não há equilíbrios fora do eixo  $x_3$ , a resultante das forças em qualquer ponto fora deste eixo é não nula. Vamos considerar a possibilidade de que a componente vertical da resultante das forças seja nula, ou seja, que tenhamos estabilidade na direção vertical.

Vamos nos restringir só ao caso atrator,  $\sigma = -1$ .

Assim, vamos em busca de pontos  $\mathbf{R}$  de  $R^3$  onde a componente vertical da resultante é nula.

Para isto retomemos a expressão da força de Coulomb sobre a partícula material:

$$\mathbf{F}_c = -\left(\frac{\kappa_0 Qq}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1\|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) + \frac{\kappa_0 Qq}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2\|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2)\right).$$

Se  $\mathbf{R} = (x, y, z)$ , a componente vertical de  $\mathbf{F}_c$  é dada por

$$\langle \mathbf{F}_c, \mathbf{k} \rangle = -\kappa_0 Qq \left( \frac{z - a}{d_1^3} + \frac{z + a}{d_2^3} \right),$$

onde

$$d_1 = \|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}.$$

Denotaremos por  $D$  a distância do ponto material ao eixo vertical, ou seja,

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.57)$$

Com isso, temos que

$$d_1^2 = D^2 + (z - a)^2 \quad \text{e} \quad d_2^2 = D^2 + (z + a)^2. \quad (2.58)$$

Como o peso da partícula é  $-mg\mathbf{k}$ , a nulidade da componente vertical ocorre quando

$$-\kappa_0 Qq \left( \frac{z - a}{d_1^3} + \frac{z + a}{d_2^3} \right) = mg,$$

ou seja, quando

$$\gamma \left( \frac{z - a}{d_1^3} + \frac{z + a}{d_2^3} \right) = -1, \quad (2.59)$$

onde

$$\frac{\kappa_0 Qq}{mg} = \gamma. \quad (2.60)$$

Adiante vamos fazer uma análise da equação de estabilidade na direção vertical (2.59) para garantir a existência de pontos onde a componente vertical da resultante das forças sobre a partícula material é nula. Por uma rotação em torno do eixo dos  $z$ , podemos supor que este ponto estará no plano  $yz$ , com coordenada  $y > 0$ . Supondo encontrado um tal ponto, vamos considerar a componente horizontal da resultante das forças neste ponto. Para a força eletrostática esta componente é

$$\langle \mathbf{F}_c, \mathbf{j} \rangle = -\kappa_0 Qq \left( \frac{y}{d_1^3} + \frac{y}{d_2^3} \right), \quad (2.61)$$

enquanto a componente horizontal do peso é nula. Nosso objetivo é imprimir uma velocidade à partícula neste ponto de modo que resulte numa força centrífuga de intensidade igual à componente horizontal da força eletrostática de modo a tornar a força total sobre a partícula nula. Isto não será possível no caso repulsor pois a componente horizontal da força eletrostática e a força centrífuga terão mesmo sentido, apontando na direção de afastamento do eixo dos  $z$ . Para o caso atrator, no entanto, isto é possível e dará origem a uma órbita circular em torno do eixo dos  $z$ , situada em um plano horizontal. O estudo da dinâmica na vizinhança desta órbita circular será feito no próximo capítulo.

### 2.5.1 Análise da equação de equilíbrio vertical (2.59)

Fixemos a distância  $D = y$  do ponto  $(0, y, z)$  ao eixo vertical e consideremos a função

$$f(z) = \frac{z - a}{d_1^3} + \frac{z + a}{d_2^3} \quad (2.62)$$

que aparece na equação (2.59), com as distâncias  $d_1$  e  $d_2$  dadas em (2.58).

Vamos estudar o comportamento da função  $f(z)$ . É claro que

$$f(0) = 0. \quad (2.63)$$

Como

$$d_1(-z) = d_2(z) \quad (2.64)$$

vemos que a função  $f$  é ímpar. Também é claro que

$$f(z) < 0 \text{ para } z < -a. \quad (2.65)$$

Logo,

$$f(z) > 0 \text{ para } z > a. \quad (2.66)$$

Notemos ainda que

$$|f(z)| \rightarrow 0 \text{ quando } |z| \rightarrow \infty. \quad (2.67)$$

Vamos agora, no intervalo  $-a < z < 0$ , estudar o sinal da derivada de  $f$

$$f'(z) = \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} - 3\left(\frac{(z - a)^2}{d_1^5} + \frac{(z + a)^2}{d_2^5}\right). \quad (2.68)$$

Usando as expressões (2.58), obtemos

$$\frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} = \frac{D^2 + (z - a)^2}{d_1^5} + \frac{D^2 + (z + a)^2}{d_2^5} = D^2\left(\frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5}\right) + \left(\frac{(z - a)^2}{d_1^5} + \frac{(z + a)^2}{d_2^5}\right) \quad (2.69)$$

e podemos escrever a expressão da derivada de  $f$  em (2.62) na forma

$$f'(z) = (D^2 - 2z^2 - 2a^2) \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right) + 4az \left( \frac{1}{d_1^5} - \frac{1}{d_2^5} \right). \quad (2.70)$$

Para  $-a < z < 0$  teremos  $d_2 < d_1$  e conseqüentemente  $4az \left( \frac{1}{d_1^5} - \frac{1}{d_2^5} \right) > 0$ .

Como  $\frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} > 0$ , para garantir  $f'(z) > 0$  em  $-a < z < 0$  é suficiente que tenhamos

$$D^2 - 2z^2 - 2a^2 \geq 0 \quad (2.71)$$

De (2.71) temos

$$D^2 - 2a^2 \geq 2z^2 \geq 0 \quad (2.72)$$

que nos fornece a primeira relação entre  $D$  e  $a$  que é

$$D^2 \geq 2a^2. \quad (2.73)$$

Assim sendo, podemos escrever a inequação (2.71) do seguinte modo

$$-\sqrt{\frac{D^2}{2} - a^2} \leq z \leq \sqrt{\frac{D^2}{2} - a^2}. \quad (2.74)$$

Como estamos trabalhando com  $-a < z < 0$ , se tivermos

$$-\sqrt{\frac{D^2}{2} - a^2} \leq -a < z < 0 \quad (2.75)$$

automaticamente teremos

$$f'(z) > 0. \quad (2.76)$$

A condição  $-\sqrt{\frac{D^2}{2} - a^2} \leq -a$  pode ser escrita como

$$a^2 \leq \frac{D^2}{2} - a^2 \quad (2.77)$$

que nos fornece a seguinte desigualdade

$$4a^2 \leq D^2 \quad (2.78)$$

que é uma condição suficiente para termos  $f'(z) > 0$  no intervalo  $-a < z < 0$ .

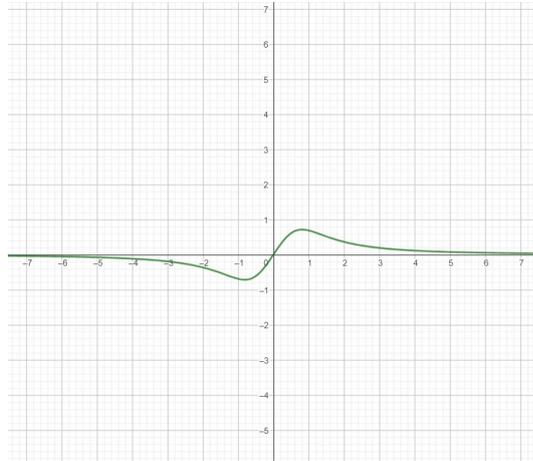
Note que para  $4a^2 \leq D^2$  temos, por (2.70),

$$f'(-a) = (D^2 - 4a^2) \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right) - 4a^2 \left( \frac{1}{d_1^5} - \frac{1}{d_2^5} \right) > 0,$$

pois  $d_2 < d_1$ . Portanto, o mínimo da função  $f$  na semi-reta  $z < 0$  ocorre no intervalo  $z < -a$ .

Na figura 2.5.1 temos um esboço do gráfico da função  $f$  para  $a = \frac{1}{4}$  e  $D = 1$ .

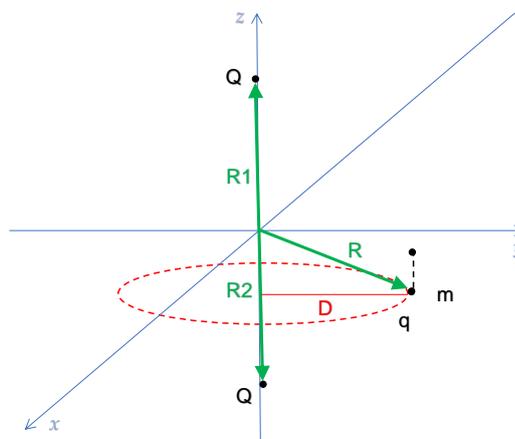
**Figura 8 – função  $f$  com  $a = \frac{1}{4}$  e  $D = 1$**



Fonte: O Autor (2022)

Não temos informação para o sinal da derivada antes de  $f(z)$  de atingir o seu valor mínimo. Com isso obtivemos a informação de que, no caso atrator, a equação (2.59) tem uma raiz  $z_0 < 0$  próxima de zero e, pelo menos mais uma raiz negativa de valor absoluto bem menor do que  $|z_0|$ . Este valor  $z_0$  dá uma órbita circular da partícula material conforme ilustrado na figura (2.5.1).

**Figura 9 – Equilíbrios fora do eixo**



Fonte: O Autor (2022)

No próximo capítulo estudaremos a dinâmica do sistema numa vizinhança desta órbita.

### 3 DINÂMICA NUM SISTEMA ROTATÓRIO

No Capítulo 1 provamos que se a distância horizontal  $D$  da partícula material, localizada no ponto  $(0, y, z)$ ,  $y > 0$ , ao eixo dos  $z$  satisfaz à desigualdade (2.78), isto é,

$$D \geq 4a^2. \quad (3.1)$$

Então, no caso atrator ( $\sigma = -1$ ), existe uma altura  $z_0$ , abaixo do plano horizontal, que corresponde a uma órbita circular da partícula em torno do eixo dos  $z$ . No ponto  $P_0 = (0, D, z_0)$ , a componente vertical da força resultante sobre a partícula é nula e a órbita circular é obtida imprimindo-se a esta, no ponto  $P_0$ , uma velocidade  $\mathbf{v}_0$ , perpendicular ao plano  $yz$ , cuja intensidade resulte numa força centrífuga que contrabalance a componente horizontal da força eletrostática (2.61). A velocidade angular da órbita circular é  $w = \|\mathbf{v}_0\|/D$  e a intensidade da força centrífuga é, portanto,  $mDw^2$ .

Para estudar a dinâmica na vizinhança desta órbita circular vamos passar para um sistema rotatório com velocidade angular  $w$  em torno do eixo dos  $z$ .

#### 3.1 O HAMILTONIANO NO SISTEMA ROTATÓRIO

Feito o processo de adimensionalização (2.4) da Seção 2.1, encontramos o Hamiltoniano, ver (2.12),

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s, \mu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 + V(\mathbf{x}, s, \mu), \quad (3.2)$$

no qual:

$$V(\mathbf{x}, s, \mu) = U(\mathbf{x}, s, \mu) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle + \sigma \mu \left[ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|} \right], \quad (3.3)$$

com

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 = (0, 0, a), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_2 = (0, 0, -a) \quad \text{e} \quad a = \frac{R_0}{L}. \quad (3.4)$$

Vamos agora efetuar uma transformação simplética que nos fornecerá o Hamiltoniano quando tivermos o sistema de coordenadas girando em torno do eixo vertical com uma velocidade angular  $w$ . Consideremos a transformação simplética

$$\mathbf{x} = \Omega \xi, \quad \mathbf{y} = \Omega \eta, \quad (3.5)$$

definida em termos da rotação em torno do eixo dos  $z$  pelo ângulo  $wt = wt_0s = w_0s$ , com  $w_0 = wt_0$ , cuja matriz em relação ao tempo adimensional  $s$  é dada por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos w_0s & -\sin w_0s & 0 \\ \sin w_0s & \cos w_0s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Esta transformação depende do tempo  $s$  e tem por função geradora a função

$$W(\mathbf{x}, \eta, s) = \langle \mathbf{x}, \Omega\eta \rangle, \quad (3.7)$$

cuja derivada em relação ao tempo  $s$ , que será necessária para obter a expressão do novo Hamiltoniano nas coordenadas rotatórias, é dada por:

$$W_s = \langle \mathbf{x}, \Omega'\eta \rangle = \langle \xi, \Omega^T \Omega' \eta \rangle = w_0 \langle \xi, \Sigma \eta \rangle, \quad (3.8)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Nas coordenadas rotatórias o Hamiltoniano é obtido de (3.2) por substituição das variáveis  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi, \eta)$  e a adição da derivada  $W_s$  e, portanto, é dado por

$$\mathcal{H}(\xi, \eta, \mu) = \frac{1}{2} \|\eta\|^2 + w_0 \langle \xi, \Sigma \eta \rangle + V(\xi, \mu), \quad (3.10)$$

com o potencial  $V(\xi, \mu) = U(\Omega\xi, s, \mu)$ . Esse potencial é independente do tempo  $s$ , pois  $\langle r, \mathbf{k} \rangle = \langle \xi, \mathbf{k} \rangle$ ,  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| = \|\xi - \xi_1\|$  e  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\| = \|\xi - \xi_2\|$ , onde  $\xi_1 = (0, 0, a) = -\xi_2$ , sendo  $a = \frac{R_0}{L}$ . A expressão de  $V$ , nas coordenadas rotatórias, é

$$V = \langle \xi, \mathbf{k} \rangle + \sigma\mu \left[ \frac{1}{\|\xi - \xi_1\|} + \frac{1}{\|\xi - \xi_2\|} \right]. \quad (3.11)$$

Logo, o Hamiltoniano (3.10) é autônomo.

### 3.2 EQUILÍBRIOS DO SISTEMA HAMILTONIANO NO SISTEMA ROTATÓRIO

Os equilíbrios do sistema Hamiltoniano definido por (3.10) correspondem a órbitas circulares da partícula material em torno do eixo dos  $z$  no sistema inercial fixo. A dinâmica do sistema Hamiltoniano (3.10) nas coordenadas rotatórias é descrita pelas equações

$$\xi' = \mathcal{H}_\eta = \eta - w_0 \Sigma \xi, \quad \eta' = -\mathcal{H}_\xi = -w_0 \Sigma \eta - V_\xi. \quad (3.12)$$

Portanto, os equilíbrios são os pontos  $(\xi, \eta)$  que satisfazem às equações

$$\eta = w_0 \Sigma \xi \quad \text{e} \quad V_\xi = -w_0^2 \Sigma^2 \xi. \quad (3.13)$$

Como

$$\Sigma^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

da segunda equação de (3.13) obtemos

$$V_{\xi_1} = w_0^2 \xi_1, \quad V_{\xi_2} = w_0^2 \xi_2, \quad V_{\xi_3} = 0. \quad (3.15)$$

Com  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , temos para  $d_j = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\| = \|\xi - \xi_j\|$ ;  $j = 1, 2$ ; as igualdades

$$d_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 - a)^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 + a)^2}. \quad (3.16)$$

Com isso o potencial  $V$  em (3.11) pode ser escrito como

$$V = \langle \xi, \mathbf{k} \rangle + \sigma \mu \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right). \quad (3.17)$$

De (3.16) obtemos

$$\frac{\partial d_1}{\partial \xi_3} = \frac{\xi_3 - a}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial \xi_3} = \frac{\xi_3 + a}{d_2}, \quad \frac{\partial d_1}{\partial \xi_j} = \frac{\xi_j}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial \xi_j} = \frac{\xi_j}{d_2}, \quad (j = 1, 2) \quad (3.18)$$

e calculamos as seguintes derivadas parciais do potencial  $V$  a partir de (3.17) e de (3.18):

$$V_{\xi_1} = -\sigma \mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) \xi_1, \quad V_{\xi_2} = -\sigma \mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) \xi_2, \quad V_{\xi_3} = 1 - \sigma \mu \left( \frac{\xi_3 - a}{d_1^3} + \frac{\xi_3 + a}{d_2^3} \right). \quad (3.19)$$

Por conseguinte, das equações (3.15) e (3.19) para os equilíbrios obtemos as seguintes equações

$$-\sigma \mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) \xi_1 = w_0^2 \xi_1, \quad -\sigma \mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) \xi_2 = w_0^2 \xi_2, \quad \sigma \mu \left( \frac{\xi_3 - a}{d_1^3} + \frac{\xi_3 + a}{d_2^3} \right) = 1 \quad (3.20)$$

No caso repulsor,  $\sigma = +1$ , as duas primeiras equações possuem solução apenas quando tivermos  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . No caso atrator,  $\sigma = -1$ , essas mesmas duas equações também possuem solução com  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . Em ambos os casos temos os mesmos equilíbrios obtidos no caso estático, no Capítulo 1, Seção 2.3. No caso repulsor, teremos dois equilíbrios da forma  $(0, 0, x_3)$ . Um com  $-a < x_3 < 0$  e outro com  $0 < a < x_3$ . No caso atrator, teremos dois equilíbrios da forma  $(0, 0, x_3)$ . Um com  $x_3 < -a < 0$  e outro com  $0 < x_3 < a$ . No caso repulsor não há equilíbrios com  $\xi_1 \neq 0$  ou  $\xi_2 \neq 0$ .

No caso atrator podemos ter equilíbrio com  $\xi_1 \neq 0$  ou  $\xi_2 \neq 0$ . Para tal, em virtude das duas primeiras equações em (3.20), é preciso que, no equilíbrio, tenhamos

$$\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) = w_0^2. \quad (3.21)$$

Esta igualdade nos traz informação a respeito da velocidade angular necessária para obtermos a órbita circular. No caso atrator e com as coordenadas rotatórias, a terceira equação de (3.20) no equilíbrio fora do eixo vertical é, a menos de uma constante, a equação que envolve a função  $f$  em (2.62). A equação (2.59) será escrita como

$$f(\xi_3) = -\frac{1}{\mu}, \quad \text{com} \quad f(\xi_3) = \frac{\xi_3 - a}{d_1^3} + \frac{\xi_3 + a}{d_2^3}. \quad (3.22)$$

Conforme as cálculos feitos no final do Capítulo 1, temos a seguinte condição, ver (2.78), garantindo que a equação (3.22) possua uma solução  $\xi_3 < 0$ , próxima de 0 e, talvez outras soluções  $\xi_3 < 0$  com maior valor absoluto:

$$D^2 \geq 4a^2. \quad (3.23)$$

A depender do valor de  $\mu > 0$ , esta desigualdade poderá não ocorrer e portanto poderemos não ter raiz para a equação  $f(\xi_3) = -\frac{1}{\mu}$ . Fixado um valor de  $\mu$  para o qual a equação (3.22) tenha solução, a terceira equação em (3.20), no caso atrator, nos dá a igualdade:

$$-\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) \xi_3 + \mu \left( \frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right) a = 1 \quad (3.24)$$

Usando (3.21) podemos reescrever esta equação como

$$-(\xi_3 - a)w_0^2 - \frac{2\mu a}{d_2^3} = 1,$$

ou, ainda,

$$((a - \xi_3)w_0^2 - 1)d_2^3 = 2\mu a$$

que nos fornece a seguinte restrição para a terceira coordenada do equilíbrio

$$\xi_3 < a - \frac{1}{w_0^2}, \quad (3.25)$$

ou a seguinte estimativa inferior para a velocidade angular da órbita circular:

$$w_0 > \frac{1}{\sqrt{a - \xi_3}}. \quad (3.26)$$

### 3.3 ESTABILIDADE DOS EQUILÍBRIOS

Os equilíbrios da forma  $(0, 0, \xi_3)$  são todos instáveis pois eles são os mesmos equilíbrios encontrados no sistema fixo de coordenadas do capítulo 1, onde mostramos que eles são instáveis. Uma análise direta como aquela na Seção 2.4, agora usando a matriz Hessiana de  $\mathcal{H}$  em um desses equilíbrios pode ser feita para mostrar a sua instabilidade, mas isto não é necessário, pois sua instabilidade no sistema fixo de coordenadas significa que alguma solução que se inicia próximo ao equilíbrio se afasta dele com o passar do tempo e este afastamento não é impedido pela consideração de um sistema rotatório.

Agora, consideremos a questão da estabilidade do equilíbrio do sistema Hamiltoniano (3.2) fora do eixo  $\xi_3$ . Este equilíbrio também é instável, se considerarmos a sua estabilidade no sentido de Lyapunov. De fato, este equilíbrio corresponde a uma órbita circular determinada, como vimos no capítulo 1, por um ponto  $z_0 = z_0(D)$ . Para um valor  $\tilde{D}$  próximo a  $D$ , a solução  $\tilde{z}_0 = z_0(\tilde{D})$  da equação (2.59) é próxima de  $z_0 = z_0(D)$  e a correspondente velocidade angular  $\tilde{w}$ , é próxima, mas diferente, de  $w = w(D)$ . Assim, as órbitas circulares são próximas porém são percorridas com velocidades constantes diferentes. Portanto, mesmo que no instante  $t = 0$  os pontos estejam próximos eles se afastam com o decorrer do tempo pois o ponto na circunferência de raio menor move-se com velocidade angular maior. Assim, a distância entre eles aumenta além de um dado valor, o que significa que o ponto no círculo menor se afasta do ponto no círculo maior, mesmo no sistema rotatório. Portanto, o equilíbrio do sistema rotatório que está fora do eixo  $\xi_3$  também é instável no sentido de Lyapunov. No entanto, é possível que a órbita periódica seja orbitalmente estável. Isto significa que toda solução que começa em um ponto próximo da órbita circular descreve uma órbita próxima da órbita circular, como um conjunto geométrico de pontos de  $R^3$ , com a distância entre dois conjuntos definida como usualmente.

#### Definição 3.3.1 (Órbita)

A órbita de uma solução  $x(t)$  da equação  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in R^n$ , é o conjunto de pontos

$$\gamma = \{x(t), t \in R\} \subset R^n.$$

### Definição 3.3.2 (Estabilidade Orbital)

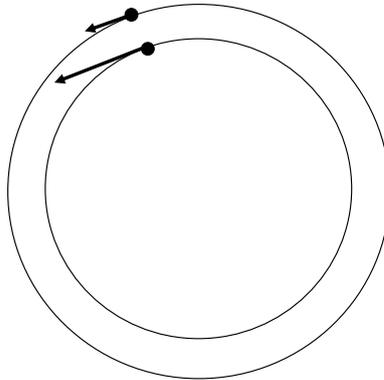
Seja  $x_0(t)$  uma solução  $\tau$ -periódica de  $\dot{x} = f(x)$  com condição inicial  $x(0) = \xi$  e seja  $\gamma_0$  a sua órbita. Dizemos que  $x_0(t)$  é orbitalmente estável se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\xi - \xi_0\| < \delta \Rightarrow \text{dist}(x(t), \gamma_0) < \epsilon, \quad \forall t.$$

Onde  $x(t)$  é a solução com condição inicial  $x(0) = \xi$  e

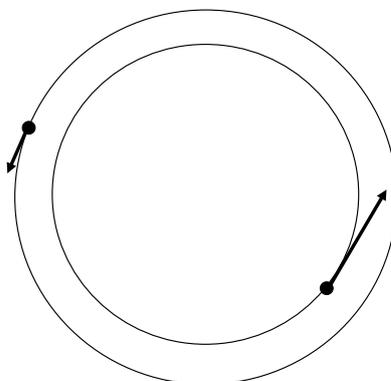
$$\text{dist}(x(t), \gamma_0) = \inf\{\|x(t) - x_0(s)\|, 0 \leq s \leq \tau\}.$$

Figura 10 – Estabilidade orbital



Fonte: O Autor (2022)

Figura 11 – Estabilidade orbital



Fonte: O Autor (2022)

## 4 ESTABILIDADE DA ÓRBITA CIRCULAR

No capítulo anterior vimos que a órbita circular em torno do eixo que contém as cargas fixas não pode ser estável no sentido de Lyapunov e comentamos que ela poderia ser estável no sentido orbital. Neste capítulo vamos analisar esta questão.

### 4.1 PROCESSO DE REDUÇÃO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE

No estudo da estabilidade de um equilíbrio de um sistema Hamiltoniano frequentemente encontramos o caso onde zero é um autovalor do sistema linearizado no equilíbrio. Quando isso acontece devido a existência de uma integral primeira na vizinhança do equilíbrio podemos eliminar o autovalor zero pela passagem ao espaço quociente definido fixando o valor da integral primeira. Inicialmente vamos expor um pouco da teoria que será usada.

**Teorema 4.1.1** *Seja  $\mathbf{x}_0$  um equilíbrio da equação diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^m \quad (4.1)$$

e seja  $\Psi$  uma integral primeira para o sistema definido numa vizinhança de  $\mathbf{x}_0$  e tal que

$$\nabla\Psi(\mathbf{x}_0) \neq 0. \quad (4.2)$$

Então  $A = Df(\mathbf{x}_0)$  possui um autovalor zero.

**Prova:**

Assumamos que  $\mathbf{x}_0 = 0$ , uma vez que podemos obter isso via translação até a origem. Então a equação diferencial (4.1) pode ser escrita na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + O(\|\mathbf{x}\|^2). \quad (4.3)$$

Assuma que  $A$  não possui autovalor zero. Então  $A$  é invertível, conseqüentemente existe um vetor  $\mathbf{v}$  tal que

$$A\mathbf{v} = \nabla\Psi(0). \quad (4.4)$$

Para cada  $s > 0$  próximo de 0, seja  $\mathbf{x}(t, s)$  a solução de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  tal que  $\mathbf{x}(0, s) = s\mathbf{v}$ . Como

$$\Psi(\mathbf{x}(t, s)) \equiv \Psi(s\mathbf{v}), \quad (4.5)$$

diferenciando com respeito a  $t$  obtemos

$$\langle \nabla \Psi(\mathbf{x}(t, s)), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) \rangle \equiv 0. \quad (4.6)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, s) = A\mathbf{x}(t, s) + O(\|\mathbf{x}(t, s)\|^2), \quad (4.7)$$

tomando  $t = 0$ , obtemos

$$\langle \nabla \Psi(s\mathbf{v}), sA\mathbf{v} + O(\|s\mathbf{v}\|^2) \rangle \equiv 0.$$

Dividindo por  $s$  e fazendo  $s$  tender a zero obtemos, usando a continuidade de  $\nabla \Psi$ ,

$$\langle \nabla \Psi(0), A\mathbf{v} \rangle = 0, \quad (4.8)$$

consequentemente  $\|\nabla \Psi(0)\|^2 = 0$ , o que contradiz o fato que  $\nabla \Psi(0) \neq 0$ . Portanto,  $A$  possui um autovalor zero.

**QED**

A prova do teorema a seguir é uma adaptação daquela encontrada no livro **Lectures on Celestial Mechanics** de SIEGEL e MOSER.

**Teorema 4.1.2** *Seja  $\mathbf{x}_0$  um equilíbrio de um sistema Hamiltoniano autônomo e seja  $\Psi$  uma integral primeira na vizinhança desse equilíbrio a qual não depende do tempo e é tal que*

$$\nabla \Psi(\mathbf{x}_0) \neq 0. \quad (4.9)$$

*Então, o número de graus de liberdade do sistema pode ser diminuído de uma unidade.*

**Prova:**

*Seja  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  a integral primeira do sistema Hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade definido por  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Procuramos por uma transformação simplética*

$$\phi : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.10)$$

*cuja função geradora é*

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \quad (4.11)$$

*e de modo que nas novas variáveis  $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$  nós tenhamos*

$$\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = v_n, \quad (4.12)$$

onde

$$\psi(\mathbf{w}) = \Psi(\phi(\mathbf{w})). \quad (4.13)$$

Como  $\mathbf{x} = W_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}, \mathbf{y})$  e  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  temos a equação

$$v_n = \Psi(W_{\mathbf{y}}, \mathbf{y}). \quad (4.14)$$

Assumamos que tenhamos encontrado uma solução particular  $W(\mathbf{u}, \mathbf{y})$  tal que

$$\text{Det } D^2W(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \neq 0. \quad (4.15)$$

Então  $W$  gera uma transformação simplética

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{w}) \quad (4.16)$$

dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (4.17)$$

Seja

$$\mathcal{H}(\mathbf{w}) = H(\phi(\mathbf{w})) \quad (4.18)$$

a nova função Hamiltoniana. Como  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade definido por  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , ao longo de uma solução  $\mathbf{z}(t) = \phi(\mathbf{w}(t))$  do sistema  $\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z})$  temos que

$$\frac{d}{dt}(\Psi(\mathbf{z}(t))) = 0. \quad (4.19)$$

Por outro lado, como

$$\nabla\psi(\mathbf{w}) = D\phi(\mathbf{w})^T \cdot \nabla\Psi(\mathbf{z}), \quad (4.20)$$

ao longo de uma solução  $\mathbf{z}(t) = \phi(\mathbf{w}(t))$  do sistema  $\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z})$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Psi(\mathbf{z}(t))) &= D\Psi(\phi(\mathbf{w})) \cdot (D\phi(\mathbf{w}) \cdot \dot{\mathbf{w}}) = \langle \nabla\Psi(\mathbf{z}), D\phi(\mathbf{w})J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{w}) \rangle = \\ &= \langle D\phi(\mathbf{w})^T \nabla\Psi(\mathbf{z}), J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{w}) \rangle = \langle \nabla\psi(\mathbf{w}), J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{w}) \rangle. \end{aligned}$$

Devido a (4.19), podemos afirmar que

$$\langle \nabla\psi(\mathbf{w}), J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{w}) \rangle = 0. \quad (4.21)$$

Como  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = v_n$  temos que  $\nabla\psi(\mathbf{w}) = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0, 1)$  e com isso obtemos

$$\mathcal{H}_{u_n} = 0 \quad (4.22)$$

ou seja,  $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  independe da variável  $u_n$ . E como

$$\dot{v}_n = \mathcal{H}_{u_n} = 0 \quad (4.23)$$

a variável  $v_n$  é uma constante do movimento. Fixando seu valor,  $v_n^0$ , o Hamiltoniano  $\mathcal{H}(u_1, \dots, u_{n-1}; v_1, \dots, v_{n-1}, v_n^0)$  tem  $n - 1$  graus de liberdade.

**QED**

**Observação 4.1.1** Observe que na matriz Hessiana,  $G$ , do Hamiltoniano  $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , todas as entradas na linha correspondente à variável  $u_n$  são zero. Como  $G$  é simétrica as entradas na  $n$ -ésima coluna de  $G$  são todas iguais a zero. Consequentemente, também todas as entradas da  $n$ -ésima coluna de  $A = JG$  são iguais a zero. Portanto, a matriz  $A$  possui um autovalor zero. Como a matriz  $A$  é Hamiltoniana o autovalor zero aparece, pelo menos, uma vez mais. Ao reduzir a dinâmica à variedade de nível fixado da integral primeira, obtém-se um sistema Hamiltoniano reduzido no qual o autovalor zero foi eliminado, caso ele apareça apenas duas vezes.

## 4.2 HAMILTONIANO REDUZIDO

No nosso caso estamos com o Hamiltoniano, ver (3.10),

$$\mathcal{H}(\xi, \eta, \mu) = \frac{1}{2} \|\eta\|^2 + w_0 \langle \xi, \Sigma \eta \rangle + V(\xi, \mu), \quad (4.24)$$

com o potencial  $V(\xi, \mu)$  independente do tempo  $s$ , ver final da Seção 3.1, e cuja expressão é

$$V = \langle \xi, \mathbf{k} \rangle - \mu \left[ \frac{1}{\|\xi - \xi_1\|} + \frac{1}{\|\xi - \xi_2\|} \right]. \quad (4.25)$$

Temos que o Hamiltoniano (4.24) é autônomo,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e a função  $V(\xi)$  é invariante por rotações em torno do eixo  $\xi_3$ .

Estamos considerando a questão da estabilidade dos equilíbrios fora do eixo de rotação que, no nosso caso, são os equilíbrios da forma  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  com  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = D^2$  e  $\xi_3 < 0$  satisfazendo a equação (3.24). Estes equilíbrios correspondem a órbitas circulares em torno do eixo que

contém as cargas fixas e já vimos na Seção 3.3 que eles são instáveis no sentido de Lyapunov. Portanto, devemos nos concentrar na questão da estabilidade orbital da órbita circular. Para isto vamos fazer a redução do sistema com três graus de liberdade a um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade. Esta redução é feita por meio do Teorema 4.1.2, usando a função

$$Q(\xi, \eta) = w_0 \langle \xi, \Sigma \eta \rangle, \quad (4.27)$$

a qual é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano (4.24) como veremos abaixo.

Lembremos que a dinâmica do sistema Hamiltoniano nas coordenadas rotatórias é descrita pelas equações

$$\xi' = \mathcal{H}_\eta = \eta - w_0 \Sigma \xi, \quad \eta' = -\mathcal{H}_\xi = -w_0 \Sigma \eta - \nabla V(\xi). \quad (4.28)$$

Portanto, os equilíbrios são os pontos  $(\xi^*, \eta^*)$  que satisfazem às equações

$$\eta^* = w_0 \Sigma \xi^* \quad \text{e} \quad \nabla V(\xi^*) = -w_0^2 \Sigma^2 \xi^*. \quad (4.29)$$

Provemos agora que  $Q(\xi, \eta) = w_0 \langle \xi, \Sigma \eta \rangle$  é uma integral primeira do sistema, ou seja, é constante ao longo das soluções do sistema. Para tal basta provar que, ao longo de uma solução do sistema nós temos

$$\frac{dQ}{ds} = Q' = 0. \quad (4.30)$$

Usando a igualdade

$$\Sigma^T = -\Sigma, \quad (4.31)$$

vemos que ao longo de uma solução do sistema nós temos

$$Q' = -w_0 \left( \langle \Sigma \xi', \eta \rangle + \langle \Sigma \xi, \eta' \rangle \right) = -w_0 \left( \langle \Sigma \eta - w_0 \Sigma^2 \xi, \eta \rangle + \langle \Sigma \xi, -\nabla V(\xi) - w_0 \Sigma \eta \rangle \right). \quad (4.32)$$

Como temos

$$\langle \Sigma \eta - w_0 \Sigma^2 \xi, \eta \rangle + \langle \Sigma \xi, -w_0 \Sigma \eta \rangle = \langle \Sigma \eta, \eta \rangle + \langle -w_0 \Sigma^2 \xi, \eta \rangle + \langle w_0 \Sigma^2 \xi, \eta \rangle = 0, \quad (4.33)$$

de (4.32) temos

$$Q' = w_0 \langle \Sigma \xi, \nabla V(\xi) \rangle. \quad (4.34)$$

Vamos agora mostrar que  $\langle \Sigma \xi, \nabla V(\xi) \rangle = 0$ . Lembremos que  $w_0 \Sigma = \Omega^T \Omega'$ , onde  $\Omega$  é a matriz de rotação

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos w_0 s & -\sin w_0 s & 0 \\ \sin w_0 s & \cos w_0 s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Como o potencial  $V$  é invariante pela rotação  $\Omega = \Omega(s)$ , temos que

$$V(\Omega\xi) = V(\xi) \quad \forall s, \xi. \quad (4.36)$$

Diferenciando a equação acima com respeito ao tempo adimensional  $s$  obtemos

$$\langle \nabla V(\Omega\xi), \Omega'\xi \rangle = 0. \quad (4.37)$$

O fato de que  $\Omega$  é uma matriz ortogonal,  $\Omega^{-1} = \Omega^T$ , implica que

$$\nabla V(\Omega\xi) = \Omega \nabla V(\xi). \quad (4.38)$$

Portanto,

$$Q' = w_0 \langle \Sigma\xi, \nabla V(\xi) \rangle = \langle \Omega^T \Omega'\xi, \nabla V(\xi) \rangle = \langle \Omega'\xi, \Omega \nabla V(\xi) \rangle = \langle \Omega'\xi, \nabla V(\Omega\xi) \rangle = 0. \quad (4.39)$$

E assim fica provado que a função  $Q(\xi, \eta) = w_0 \langle \xi, \Sigma\eta \rangle$  é uma integral primeira do sistema.

Para podermos usar os teoremas enunciados só nos falta verificar a condição de não degeneração da integral primeira no equilíbrio a ser estudado que no nosso caso será

$$\nabla Q(\xi^*, \eta^*) \neq 0. \quad (4.40)$$

Lembrando que

$$\nabla Q(\xi^*, \eta^*) = w_0(\Sigma\eta^*, -\Sigma\xi^*). \quad (4.41)$$

Se  $\nabla Q(\xi^*, \eta^*) = 0$ , então  $\Sigma\xi^* = 0$ . Consequentemente no equilíbrio teremos  $\xi^* = (0, 0, \xi_3^*)$ .

Como estamos trabalhando com equilíbrios fora do eixo vertical temos a garantia que

$\nabla Q(\xi^*, \eta^*) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema 4.1.1, zero aparece como autovalor, pelo menos, duplo do sistema linearizado em torno do equilíbrio fora do eixo vertical.

### 4.2.1 Redução a dois graus de liberdade

Vamos agora usar o processo de redução descrito no Teorema 4.1.2 para o nosso Hamiltoniano (4.24) usando a integral primeira

$$Q(\xi, \eta) = w_0 \langle \xi, \Sigma\eta \rangle = w_0(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2). \quad (4.42)$$

Procuramos por uma transformação simplética

$$(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \quad (4.43)$$

de modo que nas variáveis  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  tenhamos

$$Q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = v_2. \quad (4.44)$$

Como  $Q$  é bilinear tomamos a função geradora  $W(\mathbf{u}, \eta)$  na forma de uma função bilinear de  $g_1, g_2, u_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ , a saber

$$W(\mathbf{u}, \eta) = g_1(u_1, u_2)\eta_1 + g_2(u_1, u_2)\eta_2 + u_3\eta_3. \quad (4.45)$$

A equação (4.14) do teorema do processo de redução aqui significa que

$$W_{u_2} = Q(W_\eta, \eta). \quad (4.46)$$

Por um lado,

$$\xi = W_\eta = (g_1, g_2, u_3). \quad (4.47)$$

Consequentemente,

$$Q(W_\eta, \eta) = g_2(u_1, u_2)\eta_1 - g_1(u_1, u_2)\eta_2. \quad (4.48)$$

Por outro lado,

$$W_{u_2} = g_{1u_2}\eta_1 + g_{2u_2}\eta_2. \quad (4.49)$$

Portanto, a comparação de ambos os membros em (4.46), usando (4.48) e (4.49), nos fornece o seguinte sistema de equações diferenciais com a variável independente  $u_2$ ,

$$g_{1u_2} = g_2(u_1, u_2) \quad \text{e} \quad g_{2u_2} = -g_1(u_1, u_2). \quad (4.50)$$

Vemos que as funções

$$g_1(u_1, u_2) = u_1 \cos u_2 \quad \text{e} \quad g_2(u_1, u_2) = -u_1 \sin u_2 \quad (4.51)$$

nos fornecem uma solução particular de (4.49) para a qual

$$\text{Det } W_{\mathbf{u}, \eta} = -u_1. \quad (4.52)$$

Portanto, na região onde  $u_1 \neq 0$  a função  $W(\mathbf{u}, \eta)$  gera a procurada transformação simplética que é dada por

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u_1 \cos u_2, & \xi_2 &= -u_1 \sin u_2, & \xi_3 &= u_3, \\ \eta_1 &= v_1 \cos u_2 - v_2 \frac{1}{u_1} \sin u_2, & \eta_2 &= -v_1 \sin u_2 - v_2 \frac{1}{u_1} \cos u_2, & \eta_3 &= v_3. \end{aligned}$$

Disso nós temos que

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = u_1^2 \quad \text{e} \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = v_1^2 + \frac{1}{u_1^2} v_2^2. \quad (4.53)$$

Como a função potencial  $V$  é invariante por rotações em torno do eixo vertical  $\xi_3$ , podemos escrevê-la na forma

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = h\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \xi_3\right). \quad (4.54)$$

Como

$$Q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = v_2 \quad (4.55)$$

e  $v_2$  é uma constante do movimento, fixando seu valor como  $v_2 = \gamma$  podemos ignorar o termo  $Q(\xi, \eta) = w_0 \langle \xi, \Sigma \eta \rangle$  na expressão do Hamiltoniano (4.24) e assim obtemos a seguinte expressão para o Hamiltoniano reduzido

$$\mathcal{H}(u_1, u_3, v_1, v_3, \mu, \gamma) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_3^2) + \mathcal{V}(u_1, u_3, \mu, \gamma) \quad (4.56)$$

com

$$\mathcal{V}(u_1, u_3, \mu, \gamma) = \frac{\gamma^2}{2u_1^2} + u_3 - \mu\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right), \quad (4.57)$$

onde

$$d_1 = \sqrt{u_1^2 + (u_3 - a)^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{u_1^2 + (u_3 + a)^2}. \quad (4.58)$$

### 4.3 OS EQUILÍBRIOS DO SISTEMA HAMILTONIANO REDUZIDO

A dinâmica do sistema Hamiltoniano reduzido é dada pelas equações

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathcal{H}_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mathcal{H}_{\mathbf{u}} = -\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{V} \quad (4.59)$$

Consequentemente nos equilíbrios teremos

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{V} = 0 \quad (\mathcal{V}_{u_1} = 0 = \mathcal{V}_{u_3}). \quad (4.60)$$

Notemos que

$$\mathcal{V}_{u_1} = -\frac{\gamma^2}{u_1^3} - \mu\left(-\frac{u_1}{d_1^3} - \frac{u_1}{d_2^3}\right) = 0 \quad (4.61)$$

e

$$\mathcal{V}_{u_3} = 1 - \mu\left(-\frac{u_3 - a}{d_1^3} - \frac{u_3 + a}{d_2^3}\right) = 0 \quad (4.62)$$

Lembremos que estamos analisando os equilíbrios que possuam  $u_1 \neq 0$ , consequentemente podemos fazer uso da igualdade (3.21). De (3.21) e de (4.61) temos

$$\frac{\gamma^2}{u_1^4} = \mu\left[\frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3}\right] = w_0^2 \quad (4.63)$$

e assim, como  $\gamma > 0$ , ver (2.60), obtemos

$$u_1^2 = \frac{\gamma}{w_0}. \quad (4.64)$$

De (4.62) obtemos a equação

$$\frac{u_3 - a}{d_1^3} + \frac{u_3 + a}{d_2^3} = -\frac{1}{\mu} \quad (4.65)$$

que é essencialmente aquela equação com a função  $f$  obtida na abordagem da Seção 3.2 em (3.22) quando procuramos o ponto onde a resultante vertical das forças atuando sobre a partícula material é nula e que nos fornece a seguinte restrição para a coordenada  $u_3$  do equilíbrio, ver seção 2.5 e seção 3.2,

$$u_3 < 0. \quad (4.66)$$

Utilizando (4.63) podemos escrever a equação (4.65) na forma

$$((a - u_3)w_0^2 - 1)d_2^3 = 2\mu a \quad (4.67)$$

que é a mesma obtida em (3.21) e de onde podemos extrair a restrição para o equilíbrio fora do eixo vertical

$$u_3 < a - \frac{1}{w_0^2}. \quad (4.68)$$

Usando a notação da análise feita na última seção do primeiro capítulo podemos escrever a equação (4.65) como sendo

$$f(u_3) = \frac{u_3 - a}{d_1^3} + \frac{u_3 + a}{d_2^3} = -\frac{1}{\mu}, \quad \text{com } \mu > 0. \quad (4.69)$$

Pelo gráfico da função  $f$ , a depender do valor de  $\mu > 0$ , poderemos não ter equilíbrio; este é o caso se

$$-\frac{1}{\mu} < f(u_3), \quad \forall u_3 < 0. \quad (4.70)$$

Poderemos ter apenas um equilíbrio caso tenhamos apenas uma raiz negativa para a equação (4.69) ou dois equilíbrios caso tenhamos duas raízes negativas para a equação (4.69).

#### 4.4 ESTABILIDADE DOS EQUILÍBRIOS

A estabilidade de um equilíbrio do sistema Hamiltoniano reduzido (4.56) definido pelas equações (4.64) e (4.65) significa que a órbita circular é orbitalmente estável.

Na direção de analisar a questão da estabilidade dos equilíbrios precisamos da matriz Hessiana do Hamiltoniano (4.56)

$$G = \text{Hess } \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\mathbf{uu}} & \mathcal{H}_{\mathbf{uv}} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{vu}} & \mathcal{H}_{\mathbf{vv}} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

com

$$\mathbf{u} = (u_1, u_3) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_3). \quad (4.72)$$

De (4.56) obtemos

$$\mathcal{H}_{\mathbf{uu}} = \nu_{\mathbf{uu}}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{vv}} = I_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{\mathbf{uv}} = 0 = \mathcal{H}_{\mathbf{vu}} \quad (4.73)$$

Temos as seguintes expressões para as entradas da matriz Hessiana do potencial  $\mathcal{V}$  do Hamiltoniano reduzido:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{u_1 u_1} &= \frac{3\gamma^2}{u_1^4} + \mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) - 3\mu u_1^2 \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right), \\ \mathcal{V}_{u_1 u_3} &= \mathcal{V}_{u_3 u_1} = -3\mu u_1 \left( \frac{u_3 - a}{d_1^5} + \frac{u_3 + a}{d_2^5} \right), \\ \mathcal{V}_{u_3 u_3} &= -3\mu \left( \frac{(u_3 - a)^2}{d_1^5} + \frac{(u_3 + a)^2}{d_2^5} \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Consequentemente,

$$\text{Det} [\lambda I_4 - JG] = \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda I_2 & -I_2 \\ \nu_{\mathbf{uu}} & \lambda I_2 \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Usando a fórmula do determinante de uma matriz em blocos,

$$\text{Det} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{Det} [DA - DBD^{-1}C], \quad (4.76)$$

temos que

$$\text{Det} (\lambda I_4 - JG) = \text{Det} (\lambda^2 I_2 + \mathcal{V}_{\mathbf{uu}}) = \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \mathcal{V}_{u_1 u_1} & \mathcal{V}_{u_1 u_3} \\ \mathcal{V}_{u_3 u_1} & \lambda^2 + \mathcal{V}_{u_3 u_3} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Disso a equação característica pode ser escrita na forma

$$\lambda^4 + (\mathcal{V}_{u_1 u_1} + \mathcal{V}_{u_3 u_3})\lambda^2 + (\mathcal{V}_{u_1 u_1} \mathcal{V}_{u_3 u_3} - \mathcal{V}_{u_1 u_3} \mathcal{V}_{u_3 u_1}) = 0 \quad (4.78)$$

Note que

$$\mathcal{V}_{u_1 u_1} + \mathcal{V}_{u_3 u_3} = \frac{3\gamma^2}{u_1^4} + \mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right) - 3\mu u_1^2 \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right) - 3\mu \left( \frac{(u_3 - a)^2}{d_1^5} + \frac{(u_3 + a)^2}{d_2^5} \right) \quad (4.79)$$

Como estamos analisando a equação característica no equilíbrio fora do eixo vertical, usando (4.63), podemos escrever  $\mathcal{V}_{u_1 u_1} + \mathcal{V}_{u_3 u_3}$  na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{u_1 u_1} + \mathcal{V}_{u_3 u_3} &= 4w_0^2 - 3\mu u_1^2 \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right) - 3\mu \left( \frac{(u_3 - a)^2}{d_1^5} + \frac{(u_3 + a)^2}{d_2^5} \right) = \\ &= 4w_0^2 - 3\mu \left( \frac{u_1^2 + (u_3 - a)^2}{d_1^5} + \frac{u_1^2 + (u_3 + a)^2}{d_2^5} \right) = 4w_0^2 - 3\mu \left( \frac{d_1^2}{d_1^5} + \frac{d_2^2}{d_2^5} \right) = 4w_0^2 - 3\mu \left( \frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right). \end{aligned}$$

Usando novamente (4.63) temos que, no equilíbrio fora do eixo vertical,

$$\mathcal{V}_{u_1 u_1} + \mathcal{V}_{u_3 u_3} = 4w_0^2 - 3w_0^2 = w_0^2 > 0.$$

Com isso, nos equilíbrios, a equação característica (4.78) pode ser escrita na forma

$$\lambda^4 + w_0^2 \lambda^2 + \nu = 0. \quad (4.80)$$

onde

$$\nu = \mathcal{V}_{u_1 u_1} \mathcal{V}_{u_3 u_3} - \mathcal{V}_{u_1 u_3} \mathcal{V}_{u_3 u_1}. \quad (4.81)$$

Olhando a equação (4.80) como uma equação na variável  $\lambda^2$ , temos pela fórmula para solução de uma equação quadrática

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left( -w_0^2 \pm \sqrt{w_0^4 - 4\nu} \right). \quad (4.82)$$

Por conseguinte, as quatro raízes  $\lambda$  da equação característica (4.80) são números imaginários puros e distintos se, e somente se, as seguintes desigualdades forem satisfeitas:

$$0 < \nu < \frac{w_0^4}{4}. \quad (4.83)$$

As desigualdades (4.83) representam a condição necessária e suficiente para que o equilíbrio seja linearmente estável. Elas impõem restrições sobre as coordenadas  $u_1$  e  $u_3$  do equilíbrio definido pelas equações (4.64) e (4.65). Explicitar estas restrições sobre  $u_1$  e  $u_3$  é bem mais difícil do que no caso da dinâmica de uma partícula material carregada atraída por uma carga fixa na origem. Isto deve-se à complexidade das expressões das derivadas (4.74)

#### 4.4.1 Comentário sobre a dinâmica para uma carga fixa na origem

No cursos ministrados pelo professor Hildeberto Cabral ao longo do doutorado no DMAT-UFPE foram vistos vários problemas entre eles o problema da dinâmica de uma partícula de massa  $m$  e carga negativa de intensidade  $q$  atraída por uma carga positiva de intensidade  $Q$

fixa na origem de um sistema de coordenadas inercial. Neste problema, uma condição suficiente para que a órbita circular seja orbitalmente estável é que as coordenadas  $u_1$  e  $u_3$  do sistema reduzido satisfaçam à desigualdade

$$u_1^2 - 8u_3^2 > 0. \quad (4.84)$$

Foi considerado o exemplo em que  $m = 5 \times 10^{-3}$  kg,  $Q = 10 \mu\text{Coulomb}$ ,  $q = 1 \mu\text{Coulomb}$  e  $D = 1$  m. Com estes dados foi visto que existem duas órbitas circulares em torno do eixo dos  $z$ , uma com  $z_0$  pequeno, outra com  $\tilde{z}_0$  grande. Utilizando o critério (4.84) foi visto que a órbita circular correspondente a  $z_0$  é (linearmente) orbitalmente estável e que a órbita circular definida por  $\tilde{z}_0$  é instável.

No nosso caso de dois centros fixos no eixo dos  $z$ , temos que trabalhar a expressão de  $\nu$  dada em (4.81) para poder tirar conclusões sobre  $u_1, u_3$  usando a condição de estabilidade linear (4.83). O que conseguimos até agora foi chegar à seguinte expressão de  $\nu$ :

$$\nu = -3 \left[ 3\mu^2 u_1^4 \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right)^2 - 7w_0^2 \mu u_1^2 \left( \frac{1}{d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right) + 4w_0^4 \right] - \left[ -3\mu u_1 \left( \frac{u_3 - a}{d_1^5} + \frac{u_3 + a}{d_2^5} \right) \right]^2, \quad (4.85)$$

com a qual devemos chegar a alguma relação entre  $u_1$  e  $u_3$  imposta pela condição (4.83).

## 5 CONCLUSÃO

Na tese abordamos o problema da dinâmica de uma partícula material com uma carga elétrica de intensidade  $q$  submetida à ação de seu peso e das forças de Coulomb devidas a duas cargas fixas simetricamente em pontos do eixo dos  $z$ .

No capítulo 1 estudamos a dinâmica em um sistema inercial fixo obtendo informações sobre os equilíbrios e mostramos que eles são instáveis. Em seguida fizemos considerações que levaram a conclusões que permitem decidir se existem órbitas circulares da partícula material em torno do eixo dos  $z$ .

No capítulo 2 fizemos o estudo da dinâmica num sistema rotatório definido pela velocidade angular de uma órbita periódica obtida no capítulo 1. Obtido o Hamiltoniano nas coordenadas do sistema rotatório, fizemos o estudo de seus equilíbrios, obtendo os mesmos equilíbrios no eixo dos  $z$  que já estavam presentes no caso do sistema inercial. Naturalmente obtivemos um equilíbrio fora do eixo dos  $z$  que corresponde à órbita circular considerada. Fizemos considerações sobre a estabilidade dos equilíbrios no eixo dos  $z$  e argumentamos porque o equilíbrio fora do eixo dos  $z$  também é instável no sentido de Lyapunov, mas que poderia ser estável no sentido orbital, isto é, no sentido de que as órbitas são conjuntos próximos.

Para o estudo da estabilidade orbital da órbita circular fizemos no capítulo 3 a redução da dinâmica no sistema rotatório para obter um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, usando uma integral primeira oriunda da rotação do sistema. Nas coordenadas  $u_1$ ,  $u_3$  deste sistema reduzido o equilíbrio fora do eixo  $u_3$  corresponde à órbita circular estudada. A estabilidade deste equilíbrio significa a estabilidade orbital da órbita circular. Obtivemos o critério (4.83) para a estabilidade linear deste equilíbrio, isto é, a condição para que todos os autovalores da equação característica (4.80) sejam imaginários puros e distintos, o parâmetro  $\nu$  nesta equação sendo definido na igualdade (4.85), expressa em termos das derivadas segundas do potencial do Hamiltoniano reduzido.

Para obter uma relação explícita entre as coordenadas  $u_1$  e  $u_3$  do equilíbrio que corresponde à órbita circular temos que trabalhar com a expressão de  $\nu$  dada em (4.85) e usar o critério (4.83), mas devido às expressões das derivadas segundas do potencial reduzido ainda não chegamos a uma conclusão sobre isto. Este ponto será objeto de estudos futuros para ver se conseguimos um critério explícito envolvendo  $u_1$ ,  $u_3$  como foi o caso da desigualdade (4.84) para a dinâmica de um centro fixo

## REFERÊNCIAS

- MEYER, Kenneth R. and OFFIN, Daniel C. **Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem**. Third Edition, Springer, 2017.
- SIEGEL, Carl L. and MOSER, Jürgen K. **Lectures on Celestial Mechanics**. Springer, 1971.
- GIANCOLI, Douglas C. **Physics**. Third Edition, Prentice Hall, 1991.
- WINTTNER, Aurel. **The Analytical Foundations of Celestial Mechanics**. Dover, 2014.
- ARNOLD, Vladimir I.; KOZLOV, Valery V. and NEISHADT, Anatoly I. **Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics**. Third Edition, Springer, 2006.
- HIRSCH, Morris W. and SMALE, Stephen. **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra**. Academic Press INC, 1974.
- LANG, Serge. **Linear Algebra**. Third Edition, Springer, 1987.
- GANTMACHER, F. R. **The Theory of Matrices, Volume1**. American Mathematical Society, 1990.
- GANTMACHER, F. R. **The Theory of Matrices, Volume2**. American Mathematical Society, 1990.
- GOUSART, E. **A Course in Mathematical Analysis, Volume 1**. Ginn and Company, 1904.
- BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel V. **Complex Variables and Applications, 8th edition**. McGraw-Hill, 2009.
- TU, Loring W. **An Introduction to Manifolds, 2nd edition**. Springer, 2011.