



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

João Antônio Miranda Gondim

**Sapos, Árvores e Partículas Coalescentes**

Recife

2023

João Antônio Miranda Gondim

## **Sapos, Árvores e Partículas Coalescentes**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística.

**Área de Concentração:** Probabilidade

**Orientador:** Pablo Martín Rodríguez

Recife

2023

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G637s Gondim, João Antônio Miranda  
Sapos, árvores e partículas coalescentes / João Antônio Miranda Gondim.  
– 2023.  
45 f.: il., fig., tab.

Orientador: Pablo Martín Rodriguez.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,  
Estatística, Recife, 2023.  
Inclui referências.

1. Probabilidade. 2. Processos estocásticos. I. Martín Rodriguez, Pablo  
(orientador). II. Título.

519.2

CDD (23. ed.)

UFPE - CCEN 2023-153

JOÃO ANTÔNIO MIRANDA GONDIM

SAPOS, ÁRVORES E PARTÍCULAS COALESCENTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovado em: 13 de julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez  
Orientador, UFPE

Prof. Dr. Alex Dias Ramos  
Examinador Interno, UFPE

Prof. Dr. Rinaldo Bruno Schinazi  
Examinador Externo à Instituição

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nevena Maric  
Examinadora Externa à Instituição

Para Cecília.

## AGRADECIMENTOS

Cursar um Mestrado após concluir um Doutorado não é algo nem um pouco comum. Essa aventura não poderia ter sido possível sem o apoio de meu eterno orientador e grande amigo César Castilho, que, quando perguntado por mim se isso seria loucura de mais, apenas me encheu de incentivos. Sua busca contínua por capacitação em tópicos diferentes da sua área original sempre têm sido fonte de inspiração pra mim e, com certeza, me motivou muito a tentar seguir seus passos.

Na época em que decidi cursar este Mestrado, meu grande objetivo de carreira a curto prazo era me tornar professor do Departamento de Matemática da UFPE. Sabia que não seria um objetivo simples e, por isso, decidi que precisava diversificar mais minha área de atuação. Claro, a ansiedade e o medo das incertezas apareceram e, por conta disso, preciso agradecer à minha irmã, Juliana Gondim. Quando eu só conseguia pensar no que poderia dar errado, ela me lançou a pergunta “mas e se der certo?” Isso renovou minhas forças. Eventualmente, deu certo mesmo: hoje sou professor do DMat/UFPE.

O Mestrado me permitiu conhecer novos professores, que me deram valiosos exemplos que levarei por toda minha carreira. Dentre eles, destaco, especialmente, o professor Pablo Rodriguez, que aceitou ser o orientador deste trabalho e que me apresentou estes belos artigos, e o professor Raydonal Ospina, do qual hoje sou colaborador de pesquisa, com muito orgulho. O curso também me proporcionou dividir as disciplinas com pessoas como Alice, Jonatha, Ludmila, Débora, Pedro e Maria Júlia. Admiro muito vocês.

Finalmente, nada disso seria possível sem o apoio da minha família. Minha esposa Rafaela Gomes, que sempre me apoia quase que incondicionalmente em tudo que eu faço. Meus pais, Kleber Gondim e Socorro Miranda, que são, além de tudo, grandes amigos meus e me proporcionaram tantos valores e educação de qualidade. Meus avós, tias e primos, por todo amor e amizade de sempre. Minha sogra Vevé: como se não fosse suficiente todo o cuidado de sempre, ainda acolheu nossa família em sua casa. E, por último, a integrante mais recente da família: minha filha Cecília, a pessoa mais importante do mundo. Estarei sempre aqui pra te amar e te apoiar em qualquer sonho que você tenha. Que você nunca duvide que você pode ser tudo o que você quiser.

## RESUMO

Esta dissertação considera alguns modelos estocásticos discretos. No primeiro modelo, analisamos um modelo em árvores  $n$ -árias no qual variáveis aleatórias uniformes independentes são associadas aos vértices. Chamamos essa variável aleatória de *fitness* do vértice e estamos interessados em determinar quando existe um caminho acessível, isto é, um caminho da raiz até uma folha ao longo do qual o *fitness* é crescente. Isso fornece uma interpretação biológica do problema, pois o modelo pode representar um genótipo que sofre uma mutação a cada geração. Por seleção natural, é esperado que surjam genótipos mais adaptados ao ambiente no decorrer desse processo. Em seguida, abordamos modelos sobre os inteiros. Um deles diz respeito a partículas coalescentes em um intervalo. Inicialmente, temos uma partícula em cada inteiro do intervalo  $[0, n]$  e, a cada instante (discreto) de tempo, sorteamos aleatoriamente uma delas (exceto a que está em 0), a qual salta para o inteiro imediatamente à esquerda, coalescendo com qualquer partícula que eventualmente já ocupe esta posição. O resultado apresentado neste texto estuda o tempo esperado para que todas as partículas coalesçam em 0. Finalmente, fechamos o trabalho com o modelo dos sapos, o qual considera um número infinito de partículas realizando passeios aleatórios independentes sobre os inteiros, e estudamos a condição para que o modelo seja recorrente.

**Palavras-chaves:** processos estocásticos discretos; percolação acessível; partículas coalescentes; modelo dos sapos.

## ABSTRACT

This dissertation considers a few discrete stochastic models. In the first one, we analyse a model in  $n$ -ary trees in which independent uniform random variables are associated to the vertices. We call this random variable the fitness of the vertex and we are interested in determining whether there is an accessible path, that is, a path from the root to a leaf along which the fitness is increasing. This gives a biological interpretation of the problem, because the model could represent a genotype that suffers a mutation after each generation. By natural selection, it is expected that genotypes more adapted to the environment appear during the course of this process. The next models are settled over the integers. One of them considers coalescing particles in an interval. Initially, we have a particle in every integer of the interval  $[0, n]$  and, at every (discrete) time, we randomly select one of them (excluding the one at 0). This particle, then, jumps to the integer immediately to the left, coalescing with every particle that might be already there. Finally, we close this work with the frog model, which considers an infinite number of particles performing independent random walks over the integers, and we study the condition for the model to be recurrent.

**Keywords:** discrete stochastic processes; accessibility percolation; coalescing particles; frog model.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Uma árvore $n$ -ária na qual $n = 3$ e $h = 2$ . . . . .	14
Figura 2 – Uma árvore $n$ -ária com $n = 2$ e $h = 3$ . Em vermelho, temos um caminho acessível. . . . .	14
Figura 3 – Ilustração para o cálculo do segundo momento. . . . .	16
Figura 4 – Ilustração do conjunto $D_\epsilon$ . . . . .	22
Figura 5 – Primeiros movimentos do modelo de partículas coalescentes com $n = 7$ . As partículas sorteadas em cada instante estão destacadas em vermelho. . . . .	31
Figura 6 – Primeiros movimentos em um modelo dos sapos. As partículas pretas são as ativas, enquanto as brancas são as inativas. . . . .	36

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição dos conjuntos $M_j$ para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . . . . .	28
--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL EM ÁRVORES N-ÁRIAS</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	O ARTIGO DE DE NOWAK E KRUG . . . . .	13
2.2	TRANSIÇÃO DE FASE . . . . .	20
<b>3</b>	<b>MODELOS NOS INTEIROS</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1	PARTÍCULAS COALESCENTES EM UM INTERVALO . . . . .	31
3.2	O MODELO DOS SAPOS NOS INTEIROS . . . . .	36
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>44</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação trata de modelos que pertencem a duas grandes áreas importantes de pesquisa atual em Teoria de Probabilidades. A primeira delas, que envolve o modelo estudado no Capítulo 2, é a percolação, que surgiu como aplicação a um modelo físico em (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957). O objetivo dos autores era entender como aspectos aleatórios de um meio poroso poderiam influenciar a passagem de um fluido através dele. Nesse caso, o meio foi modelado por meio de um reticulado, onde os vértices representavam os poros e as ligações entre eles, por sua vez, representavam os canais por onde o fluido poderia escoar. A cada canal, uma variável aleatória de Bernoulli (todas independentes e mesmo parâmetro  $p$ ) era associada para indicar se o canal estaria ou não aberto para escoamento do fluido. Assim, uma questão que surge é a da existência de um caminho de comprimento infinito passando por canais abertos. Os autores constataram que existia um parâmetro crítico  $p = p_C$  das variáveis aleatórias de Bernoulli para o qual existe um caminho de comprimento infinito contendo a origem se  $p > p_C$ . Resultados deste tipo ficaram conhecidos como transição de fase.

Nos anos seguintes, diversas generalizações para este trabalho surgiram, as quais forneciam modelos para outros fenômenos naturais. Neste contexto, destacamos o trabalho de (NOWAK; KRUG, 2013), que introduziu o conceito de percolação acessível. Nesse trabalho, aos vértices de uma árvore eram associadas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, as quais chamaremos de *fitness* de cada vértice, e a questão de interesse era se havia um caminho da raiz até uma folha que apresentasse *fitness* crescente. Claramente, o modelo tem uma interpretação em Seleção Natural, com o *fitness* sendo interpretado como o quanto está adaptado (ao ambiente, por exemplo), e a monotonicidade reflete a direção da seleção natural a cada geração.

Este trabalho, bem como o trabalho de (ROBERTS; ZHAO, 2013), que o complementou ainda no mesmo ano, fornecem o conteúdo do Capítulo 2. Percolação acessível também tem sido estudada em outros ambientes, como hipercubos (LI, 2018), árvores simetricamente esféricas (COLETTI; GAVA; RODRÍGUEZ, 2018) e em produtos cartesianos de grafos (SCHMIEGELT; KRUG, 2023), por exemplo.

A segunda grande área considerada por esta dissertação é a de Sistemas de Partículas. Dois modelos, em especial, são analisados no Capítulo 3. Primeiramente, apresentamos o

---

trabalho de (LARSEN; LYONS, 1999), que considera uma partícula em cada inteiro do intervalo  $[0, n]$ , com  $n$  natural positivo. A cada instante discreto de tempo, uma das partículas em  $\{1, \dots, n\}$  é sorteada aleatoriamente e salta para a posição imediatamente à sua esquerda, coalescendo com qualquer partícula que por ventura já esteja ocupando este lugar. O objetivo do trabalho foi estimar o tempo médio até que todas as partículas coalesçam. Um modelo mais recente similar a este foi proposto, por exemplo, em (THACKER; VOLKOV, 2018), no qual considera-se um grafo no qual certos vértices são destacados. Inicialmente, uma partícula é emitida de uma origem  $v_0$  e realiza um passeio aleatório até alcançar um vértice adjacente a um dos vértices destacados. Nesse momento, o passeio aleatório é encerrado e o vértice final da partícula passa a ser destacado também. Então, uma nova partícula é emitida de  $v_0$  e o processo se repete até que  $v_0$  também torne-se destacado.

Finalmente, a dissertação encerra-se com o estudo do famoso modelo dos sapos, que, de acordo com (ALVES; MACHADO; POPOV, 2002), surgiu como a versão em tempo discreto de um modelo de difusão de informação proposto por R. Durrett em 1996, a quem também é devido o nome do modelo. O primeiro resultado provado sobre ele apareceu em (TELCS; WORMALD, 1999), onde foi chamado de “modelo dos ovos”. A versão aqui apresentada encontra-se em (GANTERT; SCHMIDT, 2009). Inicialmente, cada inteiro é ocupado por uma certa quantidade (não-negativa) de partículas, sendo apenas uma partícula na origem. Esta partícula realiza um passeio aleatório e, ao visitar algum vértice, ativa as partículas presentes nele, as quais também passam a realizar passeios aleatórios independentes e de mesmo parâmetro. O objetivo é estudar se o modelo é recorrente, isto é, se a origem é visitada infinitas vezes por partículas ativas com probabilidade 1. Este trabalho foi generalizado, por exemplo, em  $\mathbb{Z}^d$  em (DÖBLER; PFEIFROTH, 2014), e em árvores em (HOFFMAN; JOHNSON; JUNGE, 2017) e em (GALLO; RODRIGUEZ, 2018).

## 2 PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL EM ÁRVORES N-ÁRIAS

Considere uma população que comporta um determinado genótipo. Se uma mutação ocorre, um novo genótipo é criado, o qual pode ser eliminado ou substituir o anterior, o que acontece, de acordo com a seleção natural, se o novo genótipo possuir um *fitness* maior que o anterior (isto é, se for mais adaptado ao ambiente). A longo prazo, o genótipo da população segue um caminho monotonicamente crescente, o qual é dito **seletivamente acessível**. Associamos valores de *fitness* a genótipos de forma aleatória, de modo que o problema assume um caráter estatístico.

### 2.1 O ARTIGO DE DE NOWAK E KRUG

Considere um grafo  $G$  no qual uma variável aleatória uniforme  $\omega(\sigma)$  é associada a cada vértice  $\sigma$ . Um caminho de vértices adjacentes

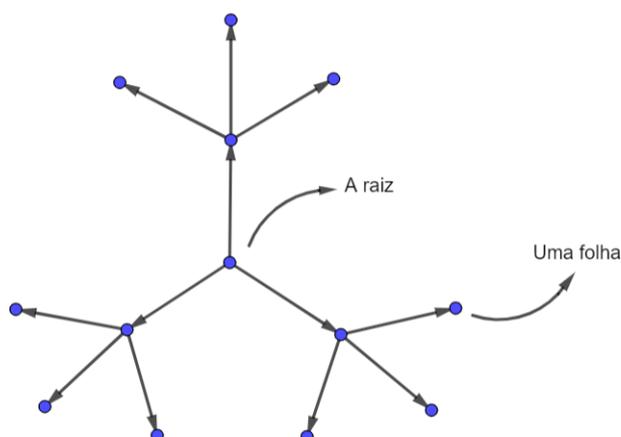
$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_n$$

é dito **acessível** se

$$\omega(\sigma_1) < \omega(\sigma_2) < \cdots < \omega(\sigma_n).$$

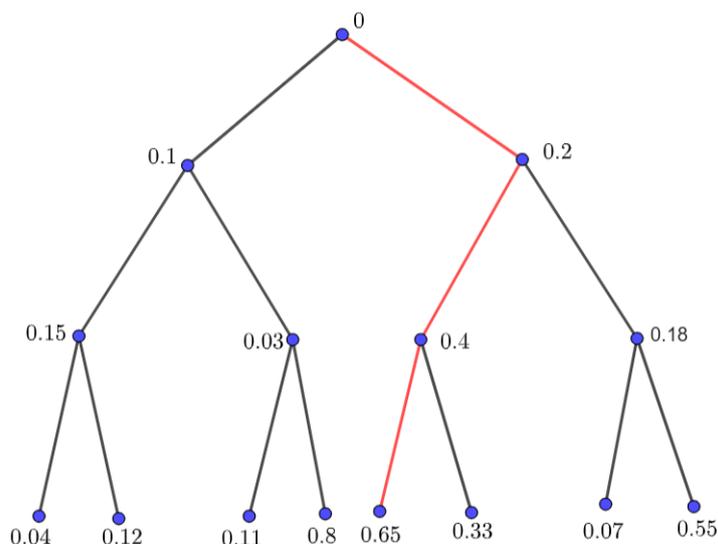
Neste trabalho, baseado em (NOWAK; KRUG, 2013), consideraremos o problema em **árvores  $n$ -árias**, que são árvores com raiz na qual cada vértice está conectada a  $n$ -vértices filhos, a menos das folhas (vértices finais), que não possuem filhos. A **altura**  $h$  da árvore é definida como a distância da raiz às folhas, isto é, qualquer caminho da raiz a uma folha consiste de  $h + 1$  vértices. Observe a Figura 1. A Figura 2 ilustra uma árvore  $n$ -ária com  $n = 2$  e  $h = 3$  e os valores do *fitness* de cada vértice. Destacamos, em vermelho, um caminho acessível nesta árvore.

Figura 1 – Uma árvore  $n$ -ária na qual  $n = 3$  e  $h = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2 – Uma árvore  $n$ -ária com  $n = 2$  e  $h = 3$ . Em vermelho, temos um caminho acessível.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que o número de folhas é igual a  $n^h$ . Além disso, como cada folha corresponde univocamente a um caminho (da raiz a uma folha), então há exatamente  $n^h$  caminhos. Nosso objetivo será estudar a probabilidade de que exista percolação acessível na árvore. Assim, se  $N$  denota o número de caminhos acessíveis na árvore, queremos analisar  $\mathbb{P}(N \geq 1)$ . Podemos obter uma cota superior observando que

$$\mathbb{P}(N \geq 1) \leq \mathbb{E}(N)$$

pela Desigualdade de Markov. Para obter uma cota inferior, seja  $1_{N \geq 1}$  a função indicadora do evento  $\{N \geq 1\}$ . Se o segundo momento de  $N$  for finito, podemos aplicar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\mathbb{E}(N)^2 = \mathbb{E}(1_{N \geq 1}N)^2 \leq \mathbb{E}(1_{N \geq 1}^2)\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{P}(N \geq 1)\mathbb{E}(N^2),$$

de modo que, se  $\mathbb{E}(N^2) \neq 0$ , então

$$\mathbb{E}(N) \geq \mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}(N)^2}{\mathbb{E}(N^2)}. \quad (2.1)$$

Vamos, então, calcular os dois primeiros momentos de  $N$  (e verificar que o segundo momento é não-nulo). Ao longo deste trabalho, usaremos a hipótese de que a raiz possui o valor mínimo do *fitness*. Supondo que as variáveis aleatórias  $\omega(\sigma)$  nos vértices sejam i.i.d., então há  $h!$  permutações dos *fitness* dos outros  $h$  vértices em um dado caminho, portanto a probabilidade de um caminho ser acessível é  $\frac{1}{h!}$ . Por linearidade da esperança, segue do fato de existirem  $n^h$  caminhos que

$$\mathbb{E}(N) = \frac{n^h}{h!}. \quad (2.2)$$

Para calcular o segundo momento, considere as variáveis aleatórias  $\Theta_i$ , indicadoras do evento em que o  $i$ -ésimo caminho é acessível. Então

$$N = \sum_{i=1}^{n^h} \Theta_i,$$

essas variáveis são identicamente distribuídas e satisfazem

$$\mathbb{E}(\Theta_i) = \mathbb{E}(\Theta_i^2) = \mathbb{P}(\Theta_i = 1) = \frac{1}{h!}.$$

Dessa forma,

$$\mathbb{E}(N^2) = \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{E}(\Theta_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^h} \mathbb{E}(\Theta_i \Theta_j) = \frac{n^h}{h!} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^h} \mathbb{E}(\Theta_i \Theta_j) = \mathbb{E}(N) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^h} \mathbb{E}(\Theta_i \Theta_j) \quad (2.3)$$

por (2.2).

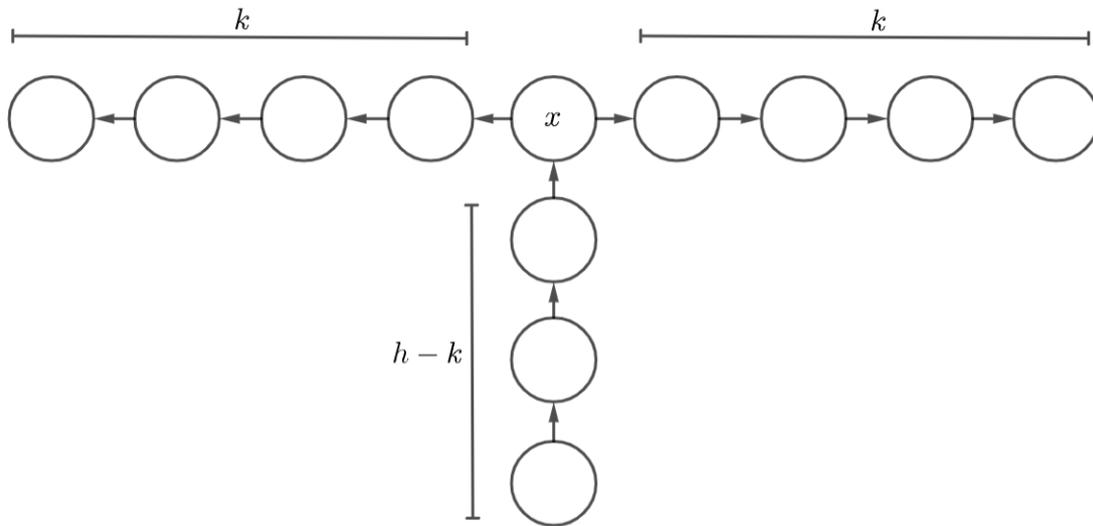
Fixados  $i$  e  $j$ , note que  $\mathbb{E}(\Theta_i \Theta_j)$  é igual à probabilidade de que os caminhos  $i$  e  $j$  sejam acessíveis. Suponha que estes caminhos possuem  $h - k + 1$  vértices coincidentes e  $k$  vértices distintos, como na Figura 3. Se o último vértice comum entre esses caminhos tem *fitness*  $\omega(\sigma_{h-k}) = x$ , então os demais  $h - k - 1$  vértices comuns (retirando  $\sigma_{h-k}$  e a raiz) devem ter seus *fitness* todos menores que  $x$  e, dentre as  $(h - k - 1)!$  permutações desses números,

há apenas uma na qual o *fitness* é crescente ao longo dos vértices. Analogamente, em ambos os caminhos, os  $k$  vértices distintos devem ter *fitness* todos maiores que  $x$  e, dentre as  $k!$  permutações desses valores, há apenas uma na qual o *fitness* é crescente. Assim, pelo Teorema da Probabilidade Total, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Theta_i\Theta_j) &= \mathbb{P}(\Theta_i = 1, \Theta_j = 1 | \omega(\sigma_{h-k}) = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(\Theta_i = 1, \Theta_j = 1 | \omega(\sigma_{h-k}) = x) f(x) dx \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(\omega(\sigma_1) < \dots < \omega(\sigma_{h-k-1}) < x) (\mathbb{P}(x < \omega(\sigma_{h-k+1}) < \dots < \omega(\sigma_h))^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{h-k-1}}{(h-k-1)!} \left( \frac{(1-x)^k}{k!} \right)^2 dx,\end{aligned}$$

onde  $f(x) = 1_{[0,1]}$  é a função densidade das variáveis aleatórias em questão, que são i.i.d. uniformes no intervalo  $[0, 1]$ .

Figura 3 – Ilustração para o cálculo do segundo momento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa expressão pode ser simplificada usando a função Beta de Euler (ARTIN, 2015), definida como

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

portanto

$$\mathbb{E}(\Theta_i\Theta_j) = \frac{B(h-k, 2k+1)}{(h-k-1)!k!^2}.$$

Neste caso, os coeficientes  $x$  e  $y$  da função Beta são inteiros, portanto vale

$$B(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!},$$

logo

$$\mathbb{E}(\Theta_i \Theta_j) = \frac{(h-k-1)!(2k)!}{(h+k)!(h-k-1)!k!^2} = \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{1}{(h+k)!},$$

ou seja,

$$\mathbb{E}(\Theta_i \Theta_j) = \binom{2k}{k} \frac{1}{(h+k)!}. \quad (2.4)$$

Para finalizar o cálculo do segundo momento, basta determinar quantos pares de caminhos possuem  $h - k + 1$  vértices coincidentes. Começemos pelo primeiro caminho, que pode ser escolhido arbitrariamente, ou seja, há  $n^h$  escolhas possíveis. Já o segundo caminho possui  $h - k + 1$  vértices em comum, portanto o primeiro vértice não-comum pode ser escolhido entre os  $n - 1$  filhos do último vértice comum restantes (excluído o que está no primeiro caminho). Daí em diante, os  $k - 1$  vértices restantes podem ser escolhidos arbitrariamente entre os  $n$  filhos disponíveis do vértice anterior. Dessa forma, há  $n^h(n - 1)n^{k-1}$  pares de caminhos possíveis. Por (2.3) e (2.4), temos

$$\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{E}(N) + \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{(n-1)n^{h+k-1}}{(h+k)!} = \mathbb{E}(N) + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \quad (2.5)$$

Separando o termo com  $k = h$ , obtemos

$$\frac{(2h)!n^{2h}}{h!^2(2h)!} = \left(\frac{n^h}{h!}\right)^2 = \mathbb{E}(N)^2.$$

Com isso, simplificamos (2.5) abaixo:

$$\mathbb{E}(N^2) < \mathbb{E}(N) + \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} = \mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(N)^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}. \quad (2.6)$$

Se

$$S(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}, \quad (2.7)$$

então, combinando (2.1), (2.6) e (2.7), obtemos

$$\mathbb{E}(N) \geq \mathbb{P}(N \geq 1) > \frac{\mathbb{E}(N)^2}{\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(N)^2 + S(h)}. \quad (2.8)$$

Para continuar a análise sobre  $\mathbb{P}(N \geq 1)$ , vamos supor que  $n = n(h) = h\alpha(h)$ , com  $\alpha(h) = \alpha$  constante.

Vamos supor, também, que  $n(h+1) \geq n(h)$  para todo  $h$ . Para começar, note que, por (2.2), temos

$$a_h = \mathbb{E}(N) = \frac{h^h \alpha^h}{h!}.$$

Como

$$\frac{a_{h+1}}{a_h} = \frac{(h+1)^{h+1} \alpha^{h+1} h!}{h^h \alpha^h (h+1)!} = \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \alpha \rightarrow e\alpha \quad (2.9)$$

quando  $h \rightarrow \infty$ . Assim, se  $\alpha > e^{-1}$ , então

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{a_{h+1}}{a_h} > 1.$$

Pelo Teste da Razão, a série de termo geral  $a_h$  é divergente, com  $\mathbb{E}(N) = a_h \rightarrow \infty$  quando  $h \rightarrow \infty$ . Por outro lado, se  $0 < \alpha < e^{-1}$ , então

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{a_{h+1}}{a_h} < 1.$$

Pelo Teste da Razão, a série de termo geral  $a_h$  é convergente, de modo que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N) = 0$$

se  $\alpha < e^{-1}$ . Por (2.8), segue que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = 0 \quad (2.10)$$

se  $\alpha < e^{-1}$ . Quando  $\alpha = e^{-1}$ , o Teste da Razão é inconclusivo, mas veremos a seguir que também temos  $a_h \rightarrow 0$  nesse caso, logo (2.10) vale para  $\alpha \leq e^{-1}$ . Começemos definindo a sequência

$$b_h = \frac{1}{a_h} = \frac{h! e^h}{h^h}.$$

Para todo  $h \geq 2$ , temos

$$\frac{b_h}{b_{h-1}} = \frac{h! e^h (h-1)^{h-1}}{(h-1)! e^{h-1} h^h} = e \left(1 - \frac{1}{h}\right)^{h-1}.$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados, obtemos

$$\log b_h - \log b_{h-1} = 1 + (h-1) \log \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

Usando a Série de Taylor do logaritmo, encontramos

$$\log b_h - \log b_{h-1} = 1 - (h-1) \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2h^2} + O\left(\frac{1}{h^3}\right)\right) = \frac{1}{2h} + O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

Agora, somamos essas equações para  $h$  de 2 a  $n$ . O lado esquerdo é uma soma telescópica e resulta em  $\log b_n - \log b_1$ , portanto

$$\log b_n = \frac{1}{2} \sum_{h=2}^n \frac{1}{h} + \log b_1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Como a série harmônica é divergente, segue que  $\log b_h \rightarrow \infty$ , portanto  $b_h \rightarrow \infty$  e, então,  $a_h \rightarrow 0$  para  $\alpha = e^{-1}$ , como queríamos.

Agora, suponha que  $\alpha > 1$ . Considere a função

$$\xi(h) = S(h)\mathbb{E}(N)^{-2}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \xi(h+1) &= \frac{(h+1)!^2}{n(h+1)^{2h+2}} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{n(h+1)^{h+k+1}}{(h+k+1)!} \\ &= \frac{(h+1)!^2}{n(h+1)^{h+1}} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{n(h+1)^k}{(h+k+1)!} \\ &= \underbrace{\frac{(h+1)!^2}{n(h+1)^{h+1}} \binom{2h}{h} \frac{n(h+1)^h}{(2h+1)!}}_A + \underbrace{\frac{(h+1)!^2}{n(h+1)^{h+1}} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n(h+1)^k}{(h+k+1)!}}_B \end{aligned}$$

Podemos simplificar  $A$  notando que

$$A = \frac{(h+1)^2 \cancel{h!^2} (2h)!}{n(h+1) \cancel{h!^2} (2h+1) (2h)!} = \frac{(h+1)^2}{n(h+1)(2h+1)}.$$

Por outro lado,

$$B = \frac{(h+1)!^2}{n(h+1)} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n(h+1)^{k-h}}{(h+k+1)!} \leq \frac{(h+1)!^2}{n(h+1)} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n(h)^{k-h}}{(h+k+1)!}$$

pois  $k-h < 0$  e  $n(h+1) \geq n(h)$ . Daí,

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{(h+1)^2 h!^2}{n(h+1)n(h)^h} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n(h)^k}{(h+k+1)(h+k)!} \\ &\leq \frac{(h+1)^2 h!^2}{n(h+1)n(h)^h(h+2)} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n(h)^k}{(h+k)!} \end{aligned}$$

pois  $h+k+1 \geq h+2$  para todo  $k \geq 1$ . Finalmente, multiplicamos por  $n(h)^h$  no numerador e no denominador do lado direito para obter

$$B \leq \frac{(h+1)^2 h!^2}{n(h+1)n(h)^{2h}(h+2)} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n(h)^{h+k}}{(h+k)!} = \frac{(h+1)^2}{(h+2)n(h+1)} \xi(h).$$

Combinando as estimativas para  $A$  e  $B$ , voltamos a

$$\begin{aligned} \xi(h+1) &\leq \frac{(h+1)^2}{(2h+1)n(h+1)} + \frac{(h+1)^2}{(h+2)n(h+1)} \xi(h) \\ &= \frac{(h+1)^2}{(2h+1)(h+1)\alpha(h+1)} + \frac{(h+1)^2}{(h+2)(h+1)\alpha(h+1)} \xi(h), \end{aligned}$$

portanto

$$\xi(h+1) \leq \frac{1}{\alpha(h+1)} + \frac{1}{\alpha(h+1)}\xi(h) = \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h+1)}. \quad (2.11)$$

Como  $\alpha(h) = \alpha$  é constante, segue que

$$\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha}.$$

Provemos, por indução, que, se  $\alpha > 1$ , então  $\xi(h) \leq \frac{1}{\alpha-1}$  para todo  $h \geq 1$ . Observe que, se  $h = 1$ , então o somatório que aparece em  $S(1)$  é calculado sobre um conjunto vazio (pois começamos de  $k = 1$  e terminamos em  $k = 0$ ). Isso significa que  $\xi(1) = 0$ , portanto  $\xi(1) \leq \frac{1}{\alpha-1}$  trivialmente. Agora, supondo que a afirmação é válida para  $h$ , temos

$$\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha} \leq \frac{1+\frac{1}{\alpha-1}}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1},$$

e a afirmação segue. Assim, podemos usar (2.8) para escrever

$$\mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(N)^{-1} + 1 + \xi(h)} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha-1}}$$

já que  $E(N) \rightarrow \infty$  se  $\alpha > 1$ . Com isso,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}. \quad (2.12)$$

Combinando (2.10) e (2.12), provamos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \begin{cases} = 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1} \\ \geq 1 - \frac{1}{\alpha}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}.$$

## 2.2 TRANSIÇÃO DE FASE

Nesta seção, complementamos a seção anterior feita seguindo (ROBERTS; ZHAO, 2013).

Vamos provar que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1} \\ 1, & \text{se } \alpha > e^{-1} \end{cases} \quad (2.13)$$

no caso  $\alpha(h) = \alpha$  constante, mostrando que há transição de fase em  $\alpha = 1/e$ . Com base no trabalho feito acima, basta mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{existe percolação acessível}) = 1$$

se  $\alpha > 1/e$ . De fato, provaremos o seguinte resultado:

**Teorema 1** (Roberts & Zhao). *Se  $\alpha > 1/e$ , então existem  $\delta > 0$  e  $\eta > 0$  tais que*

$$\mathbb{P}(\text{existem pelo menos } \exp(\delta h) \text{ caminhos acessíveis}) \geq 1 - \exp(-\eta h).$$

Ao longo do que se segue, usaremos a seguinte estimativa para a fórmula de Stirling:

$$2 < \frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} < 3. \quad (2.14)$$

De fato, em (ROBERTS; ZHAO, 2013), é apresentada a estimativa

$$\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{12n+1}\right) < \frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} < \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

Em ambas as exponenciais que aparecem acima, à medida que aumentamos o valor de  $n$ , os expoentes diminuem, portanto tratam-se de exponenciais decrescentes. A da esquerda teria seu menor valor, 1, quando  $n \rightarrow \infty$ , enquanto a da direita teria seu maior valor,  $\exp(1/12)$ , quando  $n = 1$ . Daí,

$$\sqrt{2\pi} < \frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} < \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{12}\right).$$

Como  $2 < \sqrt{2\pi}$  e  $\sqrt{2\pi} \exp(1/12) \approx 2,5 < 3$ , a nossa estimativa segue.

Já abemos que há  $n^h$  caminhos na árvore. Dado um caminho  $u$ , escreveremos

$$X(u) = (X(u_1), \dots, X(u_h))$$

para denotar os valores dos *fitness* associados a seus vértices. Para cada dois caminhos  $u$  e  $v$ , seja

$$a(u, v) = \max\{k : u_k = v_k\}$$

(isto é, até onde os caminhos coincidem). É claro que  $X(u_j) = X(v_j)$  para todo  $j \leq a(u, v)$ .

Defina

$$I = \{(x_1, \dots, x_h) \in [0, 1]^h : x_1 < x_2 < \dots < x_h\},$$

e, para cada  $\epsilon \in [0, 1)$ ,

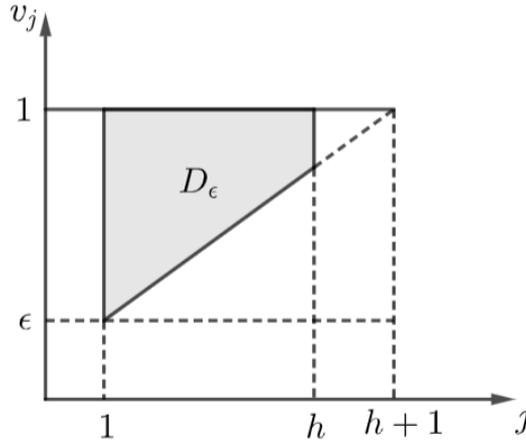
$$C_\epsilon = \{(x_1, \dots, x_h) \in [0, 1]^h : x_j \geq \epsilon \forall j\}$$

e

$$D_\epsilon = \left\{ (x_1, \dots, x_h) \in [0, 1]^h : x_j \geq \epsilon + (1 - \epsilon) \left( \frac{j-1}{h} \right) \forall j \right\}.$$

Isso significa que os valores de  $x_j$  estão acima da reta que passa pelos pontos  $(1, \epsilon)$  e  $(h+1, 1)$ . Uma ilustração de  $D_\epsilon$  encontra-se na Figura 4.

Figura 4 – Ilustração do conjunto  $D_\epsilon$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se  $P$  denota o conjunto de todos os caminhos na árvore, definamos, ainda,

$$N_\epsilon = \sum_{u \in P} 1_{\{X(u) \in I \cap D_\epsilon\}} \text{ e } N = \sum_{u \in P} 1_{\{X(u) \in I\}}.$$

Assim,  $N$  representa o número de caminhos acessíveis na árvore, enquanto  $N_\epsilon$  denota o número de caminhos acessíveis cujos *fitness* crescem de maneira um tanto bem comportada.

**Lema 2.** *Sejam  $U_1, \dots, U_j \sim U[0, 1]$  i.i.d. Então*

$$\mathbb{P}\left(U_1 \leq \dots \leq U_j, U_1 \geq \frac{1}{j+1}, \dots, U_j \geq \frac{j}{j+1}\right) = \frac{1}{(j+1)!}.$$

*Demonstração.* Seja

$$p = \mathbb{P}\left(U_1 \leq \dots \leq U_j, U_1 \geq \frac{1}{j+1}, \dots, U_j \geq \frac{j}{j+1}\right)$$

e, para cada  $i = 2, \dots, j$ , defina

$$I_i = \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \int_{\frac{j-1}{j+1}}^{v_j} \dots \int_{\frac{i}{j+1}}^{v_{i+1}} \left( \frac{v_i^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{v_i^{i-2}}{(j+1)(i-2)!} \right) dv_i \dots dv_j.$$

Observe que

$$p = \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \int_{\frac{j-1}{j+1}}^{v_j} \dots \int_{\frac{1}{j+1}}^{v_2} 1 dv_1 \dots dv_j = \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \int_{\frac{j-1}{j+1}}^{v_j} \dots \int_{\frac{2}{j+1}}^{v_3} \left( v_2 - \frac{1}{j+1} \right) dv_2 \dots dv_j = I_2.$$

Além disso, para cada  $i = 2, \dots, j - 1$ , temos

$$\begin{aligned}
I_i &= \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \int_{\frac{j-1}{j+1}}^{v_j} \cdots \int_{\frac{i}{j+1}}^{v_{i+1}} \left( \frac{v_i^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{v_i^{i-2}}{(j+1)(i-2)!} \right) dv_i \cdots dv_j \\
&= \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \int_{\frac{j-1}{j+1}}^{v_j} \cdots \int_{\frac{i+1}{j+1}}^{v_{i+2}} \left( \frac{v_i^i}{i!} - \frac{v_i^{i-1}}{(j+1)(i-1)!} \right)_{v_i=\frac{i}{j+1}}^{v_i=v_{i+1}} dv_{i+1} \cdots dv_j \\
&= \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \int_{\frac{j-1}{j+1}}^{v_j} \cdots \int_{\frac{i+1}{j+1}}^{v_{i+2}} \left( \frac{v_{i+1}^i}{i!} - \frac{v_{i+1}^{i-1}}{(j+1)(i-1)!} - \frac{i^i}{(j+1)^i i!} + \frac{i^i}{(j+1)^i i!} \right) dv_{i+1} \cdots dv_j \\
&= I_{i+1}.
\end{aligned}$$

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned}
p &= I_2 = I_j \\
&= \int_{\frac{j}{j+1}}^1 \left( \frac{v_j^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{v_j^{j-2}}{(j+1)(j-2)!} \right) dv_j \\
&= \left( \frac{v_j^j}{j!} - \frac{v_j^{j-1}}{(j+1)(j-1)!} \right)_{\frac{j}{j+1}}^1 \\
&= \frac{1}{j!} - \frac{1}{(j+1)(j-1)!} - \frac{j^j}{(j+1)^j j!} + \frac{j^j}{(j+1)^j j!} \\
&= \frac{1}{j!} - \frac{j}{(j+1)j!} = \frac{j+1}{(j+1)!} - \frac{j}{(j+1)!} = \frac{1}{(j+1)!}.
\end{aligned}$$

□

### Proposição 3.

$$\mathbb{E}(N_\epsilon) \geq \frac{(\alpha(1-\epsilon)e)^h}{3h^{3/2}}.$$

*Demonstração.* Pela definição de  $N_\epsilon$  e pela linearidade da esperança, temos

$$\mathbb{E}(N_\epsilon) = n^h \mathbb{P}(X(u) \in I \cap D_\epsilon).$$

Condicionando sobre  $X(u) \in C_\epsilon$ , temos

$$\mathbb{E}(N_\epsilon) = n^h \mathbb{P}(X(u) \in I \cap D_\epsilon | X(u) \in C_\epsilon) \mathbb{P}(X(u) \in C_\epsilon),$$

pois  $D_\epsilon \subset C_\epsilon$ . Como  $X(u_j) \sim U[0, 1]$  para todo  $j = 1, \dots, h$ , temos  $\mathbb{P}(X(u) \in C_\epsilon) = (1-\epsilon)^h$ , por independência. Além disso, como uma variável uniforme em  $[0, 1]$ , condicionada para ser pelo menos  $\epsilon$ , também tem distribuição uniforme em  $[\epsilon, 1]$ , temos

$$\mathbb{P}(X(u) \in I \cap D_\epsilon | X(u) \in C_\epsilon) = \mathbb{P}(X(u) \in I \cap D_0).$$

De fato, se  $U_1, \dots, U_h$  são variáveis uniformes em  $[0, 1]$  e  $U = (U_1, \dots, U_h)$ , então  $\mathbb{P}(U \in I \cap D_\epsilon | U \in C_\epsilon)$  corresponde à razão do volume de  $I \cap D_\epsilon$  pelo volume do hipercubo  $[1 - \epsilon]^h = C_\epsilon$ , já que também trata-se de uma distribuição uniforme em  $[\epsilon, 1]$ . Multiplicando as medidas de todos os lados por  $1/(1 - \epsilon)$  (isto é, fazendo uma homotetia) para que o lado do hipercubo passe a ser 1 e, em seguida, realizando uma translação para que o hipercubo torne-se  $[0, 1]^h$ , a razão entre os volumes continua a mesma, mas essa transformação leva  $I \cap D_\epsilon$  em  $I \cap D_0$ , portanto

$$\mathbb{P}(U \in I \cap D_\epsilon | U \in C_\epsilon) = \mathbb{P}(U \in I \cap D_0).$$

Por outro lado

$$\mathbb{P}(U \in I \cap D_0) \geq \mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{1}{h}\right) \mathbb{P}\left(U_2 \leq \dots \leq U_h, U_i \geq \frac{i-1}{h} \forall i = 2, \dots, h\right) = \frac{1}{h} \frac{1}{h!}$$

pelo Lema 2. Daí,

$$\mathbb{E}(N_\epsilon) \geq \frac{(\alpha h(1 - \epsilon))^h}{hh!} > \frac{(\alpha h(1 - \epsilon))^h}{h} \frac{1}{3\sqrt{h}(h/e)^h} = \frac{(\alpha(1 - \epsilon)e)^h}{3h^{3/2}}$$

por (2.14). □

Assim como na seção anterior, nosso próximo passo é estabelecer uma estimativa para o segundo momento. Faremos isso na próxima proposição.

**Proposição 4.** *Se  $\alpha(1 - \epsilon)e > 1$ , então existe uma constante  $c > 0$  tal que*

$$\mathbb{E}(N_\epsilon^2) \leq \mathbb{E}(N_\epsilon) + \mathbb{E}(N_\epsilon^2) + c(\alpha(1 - \epsilon)e)^{2h}.$$

*Demonstração.* Vamos analisar o segundo momento como uma soma sobre caminhos que coincidem nos primeiros  $k$  vértices (sem contar a raiz). O argumento é o mesmo usado na seção anterior. Observe novamente a Figura 3.

Definamos, para  $k = 0, 1, \dots, h$ ,

$$N_\epsilon^2 = \sum_{\substack{u, v \in P \\ a(u, v) = k}} 1_{\{X(u), X(v) \in I \cap D_\epsilon\}}.$$

Como

$$N_\epsilon^2 = \sum_{u, v \in P} 1_{\{X(u), X(v) \in I \cap D_\epsilon\}},$$

vemos que

$$N_\epsilon^2 = \sum_{k=0}^h N_\epsilon^2(k).$$

É claro que  $N_\epsilon^2(h) = N_\epsilon$ . Além disso,  $\mathbb{E}(N_\epsilon^2(0)) = \mathbb{E}(N_\epsilon)^2$  por independência, já que o único vértice comum é a raiz.

Sejam  $U = (U_1, \dots, U_h)$  e  $V = (V_1, \dots, V_h)$  i.i.d com distribuição  $U[0, 1]$  tais que  $U_j = V_j$  para  $j \leq k$  e  $U_j$  e  $V_j$  são independentes para  $j > k$ . Como na seção anterior, o número de caminhos com  $k$  vértices iniciais coincidentes é igual a  $n^h(n-1)n^{h-k-1}$  e, novamente usando o fato de que uma variável aleatória uniforme em  $[0, 1]$  condicionada para ser pelo menos  $\epsilon$  é uma variável aleatória uniforme em  $[\epsilon, 1]$ , temos, para  $k = 2, \dots, h-1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_\epsilon^2(k)) &= n^h(n-1)n^{h-k-1}\mathbb{P}(U, V \in I \cap D_\epsilon) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right) n^{2h-k}\mathbb{P}(U, V \in I \cap D_\epsilon | U, V \in C_\epsilon)\mathbb{P}(U, V \in C_\epsilon) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right) (\alpha h)^{2h-k}\mathbb{P}(U, V \in I \cap D_0)(1-\epsilon)^h(1-\epsilon)^{h-k}, \end{aligned}$$

onde  $(1-\epsilon)^h$  denota a probabilidade de que um dos caminhos esteja em  $C_\epsilon$  e, como o segundo caminho coincide com ele nos primeiros  $k$  vértices, basta exigir que os  $h-k$  vértices restantes do segundo caminho pertençam a  $[\epsilon, 1]$ . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U, V \in I \cap D_0) &= \int_{\frac{k-1}{h}}^1 \mathbb{P}(U, V \in I \cap D_0 | U_k = x) dx \\ &\leq \int_{\frac{k-1}{h}}^1 \mathbb{P}(U_1 < U_2 < \dots < U_{k-1} < x) \mathbb{P}(x < U_{k+1} < \dots < U_h)^2 dx \\ &= \int_{\frac{k-1}{h}}^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{(1-x)^{h-k}}{(h-k)!}\right)^2 dx, \end{aligned}$$

exatamente como na seção anterior.

A função  $x \mapsto x^{k-1}(1-x)^{2h-2k}$  é decrescente para  $x > \frac{k-1}{2h-k-1}$ . De fato,

$$\frac{d}{dx}[x^{k-1}(1-x)^{2h-2k}] = x^{k-2}(1-x)^{2h-2k-1}\Phi(x),$$

onde  $\Phi(x) = -(2h-k-1)x + (k-1)$ . Como  $\Phi(x) < 0$  quando  $x > \frac{k-1}{2h-k-1}$ , a afirmação está provada. Com isso, como  $k \leq h-1$ , temos  $-k-1 \geq -h$ , logo  $2h-k-1 \geq h$ , e então  $\frac{k-1}{2h-k-1} \leq \frac{k-1}{h}$ . Segue, então, que o maior valor dessa função entre  $\frac{k-1}{h}$  e 1 ocorre em  $\frac{k-1}{h}$ , portanto

$$\int_{\frac{k-1}{h}}^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{(1-x)^{h-k}}{(h-k)!}\right)^2 dx \leq \frac{\left(\frac{k-1}{h}\right)^{k-1} \left(\frac{h-k+1}{h}\right)^{2h-2k}}{(k-1)! (h-k)!^2} \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{h}\right)}_{\leq 1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_\epsilon^2(k)) &\leq (\alpha h(1-\epsilon))^{2h-k} \frac{((k-1)/h)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{((h-k+1)/h)^{2h-2k}}{(h-k)!^2} \\ &\leq (\alpha(1-\epsilon))^{2h-k} h \frac{(k-1)^{k-1} (h-k+1)^{2h-2k+2}}{(k-1)!(h-k+1)!^2}.\end{aligned}$$

Pela aproximação de Stirling, temos

$$(k-1)! > 2\sqrt{k-1} \left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1} \quad \text{e} \quad (h-k+1)! > 2\sqrt{h-k+1} \left(\frac{h-k+1}{e}\right)^{h-k+1},$$

logo, após simplificações, obtemos

$$\mathbb{E}(N_\epsilon^2(k)) < \frac{e}{8} \frac{(\alpha(1-\epsilon)e)^{2h-k} h}{(k-1)^{1/2} (h-k+1)}.$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_\epsilon^2(1)) &\leq (\alpha h)^{2h-1} (1-\epsilon)^{2h-1} \int_0^1 \frac{(1-x)^{2h-2}}{(h-1)!} dx \\ &\leq (\alpha h(1-\epsilon))^{2h-1} \frac{1}{(h-1)!^2} \\ &= (\alpha h(1-\epsilon))^{2h-1} \frac{h^2}{h!^2} \\ &< \frac{e}{4} (\alpha(1-\epsilon)e)^{2h-1},\end{aligned}$$

onde novamente usamos a aproximação de Stirling para passar da penúltima para a última linha. Até aqui, mostramos que

$$\mathbb{E}(N_\epsilon^2) = \sum_{k=0}^h \mathbb{E}(N_\epsilon^2(k)) \leq \mathbb{E}(N_\epsilon) + \mathbb{E}(N_\epsilon)^2 + \frac{e}{4} (\alpha(1-\epsilon)e)^{2h-1} + \sum_{k=2}^{h-1} \frac{e}{8} \frac{(\alpha(1-\epsilon)e)^{2h-k} h}{(k-1)^{1/2} (h-k+1)}.$$

Se  $\alpha(1-\epsilon)e > 1$ , então  $(\alpha(1-\epsilon)e)^{2h-k} < (\alpha(1-\epsilon)e)^{2h}$  para todo  $k = 1, \dots, h-1$ , de modo que

$$\mathbb{E}(N_\epsilon^2) \leq \mathbb{E}(N_\epsilon) + \mathbb{E}(N_\epsilon)^2 + C(\alpha(1-\epsilon)e)^{2h},$$

onde

$$C = \frac{e}{4} + \sum_{k=2}^{h-1} \frac{e}{8} \frac{h}{(k-1)^{1/2} (h-k+1)}.$$

□

Usaremos o seguinte lema na demonstração do resultado principal desta seção:

**Lema 5** (Cota de Chernoff). *Se  $Z_1, \dots, Z_r$  são variáveis aleatórias independentes de Bernoulli e  $Z = \sum_{i=1}^r Z_i$ , então*

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{2}\right) \leq \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Z)}{8}\right).$$

*Demonstração.* Ver (MITZENMACHER, 2005). □

Finalmente, vamos à demonstração de (1).

*Demonstração.* Pela Proposição 3, temos

$$\mathbb{E}(N_\epsilon) \geq \frac{(\alpha(1-\epsilon)e)^h}{3h^{3/2}}, \quad (2.15)$$

logo

$$(\alpha(1-\epsilon)e)^{2h} \leq 9h^3 \mathbb{E}(N_\epsilon)^2,$$

portanto, pela Proposição 4,

$$\mathbb{E}(N_\epsilon^2) \leq \mathbb{E}(N_\epsilon) + (1 + 9Ch^3) \mathbb{E}(N_\epsilon)^2.$$

Para todo  $h$  suficientemente grande, o lado direito é dominado por  $h^3 \mathbb{E}(N_\epsilon)^2$ , logo

$$\mathbb{E}(N_\epsilon^2) \leq C'h^3 \mathbb{E}(N_\epsilon)^2$$

para todo  $h$  suficientemente grande e para alguma constante  $C'$ .

Agora, consideremos  $\delta \in (0, \log(\alpha(1-\epsilon)e))$  (note que o logaritmo é positivo pois estamos supondo que  $\alpha(1-\epsilon)e > 1$ ), então  $\delta < \log(\alpha(1-\epsilon)e)$  implica  $e^\delta < \alpha(1-\epsilon)e$ . Por (2.15), temos

$$\frac{\mathbb{E}(N_\epsilon)}{e^{\delta h}} \geq \frac{1}{3h^{3/2}} \left( \frac{\alpha(1-\epsilon)e}{e^\delta} \right)^h.$$

Como  $\frac{\alpha(1-\epsilon)e}{e^\delta} > 1$ ,  $\left( \frac{\alpha(1-\epsilon)e}{e^\delta} \right)^h$  cresce exponencialmente, ao passo que  $\frac{1}{3h^{3/2}}$  cresce apenas polinomialmente. Consequentemente, quando  $h \rightarrow \infty$ , vemos que  $\frac{\mathbb{E}(N_\epsilon)}{e^{\delta h}} \rightarrow \infty$ , portanto temos

$$\mathbb{E}(N_\epsilon) > 2e^{\delta h} \quad (2.16)$$

para todo  $h$  suficientemente grande.

Pela desigualdade de Payley-Zygmund, temos

$$\mathbb{P}\left(N_\epsilon \geq \frac{\mathbb{E}(N_\epsilon)}{2}\right) \geq \frac{\mathbb{E}(N_\epsilon)^2}{4\mathbb{E}(N_\epsilon^2)}.$$

Daí, se tomarmos  $\delta \in (0, \log(\alpha(1-\epsilon)e))$  e  $h$  suficientemente grande, temos

$$\mathbb{P}(N_\epsilon > \exp(\delta h)) \geq \frac{1}{4C'h^3}. \quad (2.17)$$

Consideremos caminhos começando na raiz e de altura 4 (isto é, contendo 4 vértices além da raiz). Para cada  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , seja  $M_j$  o conjunto dos caminhos  $v$  começando na raiz e seguindo até a altura  $j$  tais que  $X(v_i) \in [(i-1)\epsilon/4, i\epsilon/4)$  para cada  $i = 1, \dots, j$ . A Tabela 1 contém uma descrição mais detalhada desses conjuntos.

Tabela 1 – Descrição dos conjuntos  $M_j$  para  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Conjunto	Propriedade
$M_1$	$X(v_1) \in [0, \epsilon/4)$ .
$M_2$	$X(v_1) \in [0, \epsilon/4)$ e $X(v_2) \in [\epsilon/4, \epsilon/2)$ .
$M_3$	$X(v_1) \in [0, \epsilon/4)$ , $X(v_2) \in [\epsilon/4, \epsilon/2)$ e $X(v_3) \in [\epsilon/2, 3\epsilon/4)$ .
$M_4$	$X(v_1) \in [0, \epsilon/4)$ , $X(v_2) \in [\epsilon/4, \epsilon/2)$ , $X(v_3) \in [\epsilon/2, 3\epsilon/4)$ e $X(v_4) \in [3\epsilon/4, \epsilon)$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que  $M_j \subset M_{j-1}$ , logo  $\#M_j \leq \#M_{j-1}$ . Observe também que  $\#M_1$  é uma soma de  $n$  variáveis aleatórias independentes de Bernoulli de parâmetro  $\epsilon/4$ . Além disso, dado que  $\#M_{j-1} \geq k$ , então  $\#M_j$  é maior ou igual que a soma de  $kn$  variáveis aleatórias independentes de parâmetro  $\epsilon/4$ , para  $j = 2, 3, 4$ . Com efeito, se há pelo menos  $k$  caminhos em  $M_{j-1}$ , cada um dos  $nk$  filhos tem probabilidade  $\epsilon/4$  de pertencer a  $M_j$ .

Afirmamos que

$$\mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right) \leq 4 \exp\left(-\frac{n\epsilon^4}{16.384}\right). \quad (2.18)$$

De fato, observe que, na altura 1, há  $n$  vértices, e  $\mathbb{E}(\#M_1) = n\epsilon/4$ . Pelo Lema 5, temos

$$\mathbb{P}\left(\#M_1 \leq \frac{n\epsilon}{8}\right) \leq \exp\left(-\frac{n\epsilon}{4 \cdot 8}\right). \quad (2.19)$$

Na altura 2, dado que  $\#M_1 > n\epsilon/8$ , então  $\#M_2$  é maior ou igual à soma de  $n^2\epsilon/8$  Bernoullis independentes, todas de parâmetro  $\epsilon/4$ . Daí,

$$E = \mathbb{E}\left(\#M_2 \mid \#M_1 > \frac{n\epsilon}{8}\right) \geq \frac{n^2\epsilon^2}{4 \cdot 8}.$$

Pelo Lema 5, temos

$$\mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \frac{E}{2} \mid \#M_1 > \frac{n\epsilon}{8}\right) \leq \exp\left(-\frac{E}{8}\right).$$

Como  $(n\epsilon/8)^2 \leq E/2$ , temos

$$\mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2 \mid \#M_1 > \frac{n\epsilon}{8}\right) \leq \mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \frac{E}{2} \mid \#M_1 > \frac{n\epsilon}{8}\right),$$

e como  $E/8 \geq (n\epsilon/8)^2/4$ , vemos que

$$\exp\left(-\frac{E}{8}\right) \leq \exp\left(-\frac{(n\epsilon/8)^2}{4}\right),$$

de modo que

$$\mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2 \mid \#M_1 > \frac{n\epsilon}{8}\right) \leq \exp\left(-\frac{(n\epsilon/8)^2}{4}\right). \quad (2.20)$$

Repetindo os mesmos argumentos acima, obtemos as estimativas

$$\mathbb{P}\left(\#M_3 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3 \mid \#M_2 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2\right) \leq \exp\left(-\frac{(n\epsilon/8)^3}{4}\right) \quad (2.21)$$

e

$$\mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4 \mid \#M_3 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right) \leq \exp\left(-\frac{(n\epsilon/8)^4}{4}\right). \quad (2.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right) &= \overbrace{\mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4 \mid \#M_3 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right)}^{\leq 1} \mathbb{P}\left(\#M_3 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right) \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4 \mid \#M_3 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right)}_{\leq 1} \mathbb{P}\left(\#M_3 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\#M_3 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right) + \mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4 \mid \#M_3 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Cálculos análogos, então, fornecem

$$\mathbb{P}\left(\#M_3 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3\right) \leq \mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2\right) + \mathbb{P}\left(\#M_3 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^3 \mid \#M_2 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2\right)$$

e

$$\mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2\right) \leq \mathbb{P}\left(\#M_1 \leq \frac{n\epsilon}{8}\right) + \mathbb{P}\left(\#M_2 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^2 \mid \#M_1 > \frac{n\epsilon}{8}\right).$$

Assim, por (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right) &\leq e^{-\frac{(n\epsilon/8)^4}{4}} + e^{-\frac{(n\epsilon/8)^3}{4}} + e^{-\frac{(n\epsilon/8)^2}{4}} + e^{-\frac{n\epsilon/8}{4}} \\ &\leq e^{-\frac{n(\epsilon/8)^4}{4}} + e^{-\frac{n(\epsilon/8)^3}{4}} + e^{-\frac{n(\epsilon/8)^2}{4}} + e^{-\frac{n\epsilon/8}{4}} \\ &\leq e^{-\frac{n(\epsilon/8)^4}{4}} + e^{-\frac{n(\epsilon/8)^4}{4}} + e^{-\frac{n(\epsilon/8)^4}{4}} + e^{-\frac{n(\epsilon/8)^4}{4}} \\ &= 4 \exp\left(-\frac{n\epsilon^4}{16.384}\right), \end{aligned}$$

pois da primeira para a segunda linha, e da segunda para a terceira linha, os expoentes das exponenciais aumentaram. Isso prova (2.18). Para finalizar, observe que

$$\mathbb{P}(N \leq \exp(\delta h)) \leq \mathbb{P}\left(\#M_4 \leq \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right) + \mathbb{P}\left(N \leq \exp(\delta h) \mid \#M_4 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right). \quad (2.23)$$

Seja  $u \in M_4$  e considere a subárvore de altura  $h - 4$  com raiz no vértice  $u_4$  de  $u$ . Essa subárvore tem altura  $h' = h - 4$ , número de filhos por vértice  $n' = n$ , e seja  $N'_\epsilon$  definido de modo análogo a  $N_\epsilon$  para a subárvore. Note que, para a subárvore, temos

$$\alpha' = \frac{n}{h-4} > \frac{n}{h} = \alpha,$$

portanto, se  $\alpha > 1/e$ , então também temos  $\alpha' > 1/e$ . Assim, a estimativa (2.17) também vale para a subárvore:

$$\mathbb{P}(N'_\epsilon \leq e^{\delta h}) \leq 1 - c'h^{-3}$$

para alguma constante positiva  $c'$ .

Dado que há pelo menos  $(n\epsilon/8)^4$  vértices em  $M_4$ , como o evento  $\{N \leq \exp(\delta h)\}$  implica o evento  $\{N'_\epsilon \leq \exp(\delta h)\}$ , vemos que

$$\mathbb{P}\left(N \leq e^{\delta h} \mid \#M_4 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right) \leq \mathbb{P}\left(N'_\epsilon \leq e^{\delta h} \mid \#M_4 > \left(\frac{n\epsilon}{8}\right)^4\right) \leq (1 - c'h^{-3})^{(n\epsilon/8)^4}.$$

Por outro lado, como  $1 + x \leq e^x$ , segue que

$$(1 - c'h^{-3})^{(n\epsilon/8)^4} \leq (e^{-c'h^{-3}})^{(n\epsilon/8)^4} = \exp\left(-\frac{n^4 c' \epsilon^4 h^{-3}}{8^4}\right) = \exp\left(-\frac{\alpha^4 c' \epsilon^4}{8^4} h\right).$$

Por (2.23) e por (2.18), temos

$$\mathbb{P}(N \leq \exp(\delta h)) \leq 4 \exp\left(-\frac{\alpha \epsilon^4}{16.384} h\right) + \exp\left(-\frac{\alpha^4 c' \epsilon^4}{8^4} h\right).$$

Finalmente, temos

$$\frac{Ae^{-at} + Be^{-bt}}{e^{-ct}} = Ae^{(c-a)t} + Be^{(c-b)t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

se  $c - a < 0$  e  $c - b < 0$ , ou seja, se  $c < \min\{a, b\}$ . Concluimos que  $Ae^{-at} + Be^{-bt} < e^{-ct}$  para todo  $t$  suficientemente grande. Dessa forma, se

$$\eta < \min\left\{\frac{\alpha \epsilon^4}{16.384}, \frac{\alpha^4 c' \epsilon^4}{8^4}\right\},$$

segue que

$$\mathbb{P}(N \leq \exp(\delta h)) \leq \exp(-\eta h)$$

para todo  $h$  suficientemente grande, o que completa a demonstração do Teorema 1.

□

### 3 MODELOS NOS INTEIROS

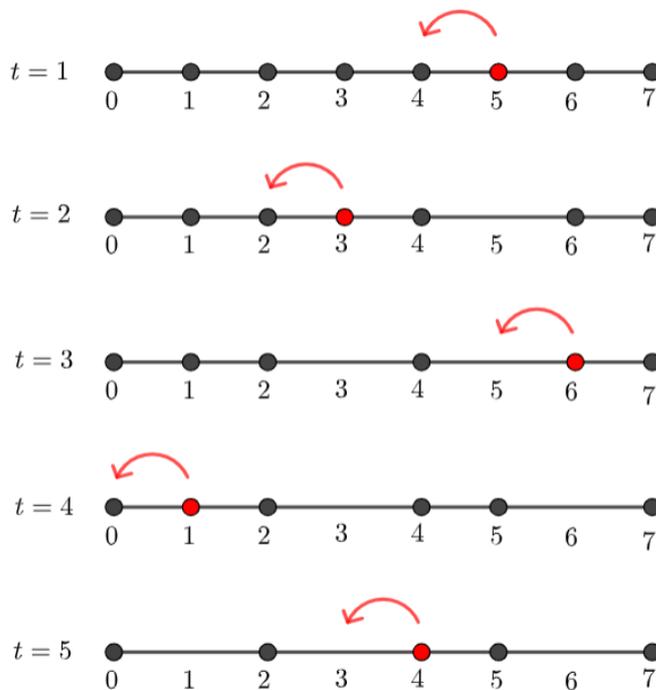
Neste capítulo são abordados modelos nos inteiros. Na primeira seção, o modelo foi introduzido em (LARSEN; LYONS, 1999) e envolve partículas em cada inteiro do intervalo  $[0, n]$ . Uma dessas partículas (com exceção da que está no 0), a cada instante, é escolhida aleatoriamente e salta para o inteiro imediatamente à esquerda de sua posição atual, coalescendo com qualquer partícula que eventualmente esteja ocupando este lugar.

Já na segunda seção, o Modelo dos Sapos, proposto em (GANTERT; SCHMIDT, 2009), é exposto. A abordagem que seguimos é baseada em (RODRIGUEZ, 2019).

#### 3.1 PARTÍCULAS COALESCENTES EM UM INTERVALO

Suponha que, em um instante inicial, há uma partícula em cada inteiro no intervalo  $[0, n]$ . A cada instante de tempo inteiro positivo, uma das partículas remanescentes em  $[1, n]$  é escolhida aleatoriamente e salta uma unidade para a esquerda, coalescendo com qualquer partícula que possa estar lá. Observe a Figura 5.

Figura 5 – Primeiros movimentos do modelo de partículas coalescentes com  $n = 7$ . As partículas sorteadas em cada instante estão destacadas em vermelho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Teorema 6** (Larsen & Lyons, 1999). *Seja  $T_n$  o tempo até todas as partículas coalescerem (em 0). Então*

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{2n(2n+1)}{3} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n} \sim \frac{4n^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \approx 0,752n^{3/2}.$$

*Demonstração.* Rotulando as partículas pelas suas posições iniciais, seja  $\tau_k$  o número de movimentos necessários da partícula que começou em  $k$  até coalescer com a que começou em  $k-1$ . Temos

$$T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k.$$

Mais geralmente, defina  $\tau(u, v)$  como o número de movimentos da partícula  $u$  até coalescer com a partícula  $v$  para  $u \geq v$ . Considere a função geradora

$$G(\lambda, x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c(\lambda, i, j) x^i y^j,$$

onde

$$c(\lambda, i, j) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j+i,j)}).$$

Como  $\tau(j+i, j) \leq j+i$ , as monotonicidades da esperança e da função exponencial garantem que

$$c(\lambda, i, j) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j+i,j)}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda(j+i)}) = e^{\lambda(j+i)}.$$

Daí,  $G(\lambda, x, y)$  converge se  $|x| < e^{-\lambda}$  e  $|y| < e^{-\lambda}$ . De fato,

$$0 \leq c(\lambda, i, j) |x|^i |y|^j \leq e^{\lambda i} e^{\lambda j} |x|^i |y|^j = |e^{\lambda} x|^i |e^{\lambda} y|^j,$$

e a série geométrica

$$\sum_{i,j} (e^{\lambda} x)^i (e^{\lambda} y)^j$$

converge para  $|x| < e^{-\lambda}$  e  $|y| < e^{-\lambda}$ .

Temos também

$$c(\lambda, 0, j) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j,j)}) = \mathbb{E}(e^0) = 1$$

para todo  $j \geq 0$  e

$$c(\lambda, i, 0) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau(i,0)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda i}) = e^{\lambda i}$$

para todo  $i \geq 0$ . Condicionando sobre qual partícula entre  $j+i$  e  $j$  se move primeiro, vemos que

$$c(\lambda, i, j) = \frac{e^{\lambda} c(\lambda, i-1, j) + c(\lambda, i+1, j-1)}{2}$$

se  $i, j \geq 1$ .

De fato,

$$c(\lambda, i-1, j) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j+i-1, j)}) \quad \text{e} \quad c(\lambda, i+1, j-1) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j+i, j-1)})$$

e

$$\mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j+i, j)}) = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}(e^{\lambda[1+\tau(j+i-1, j)]})}_{\text{Dado que } j+i \text{ moveu primeiro}} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}(e^{\lambda\tau(j+i, j-1)})}_{\text{Dado que } j \text{ moveu primeiro}}.$$

Como

$$c(\lambda, i, j) - \frac{e^\lambda c(\lambda, i-1, j)}{2} - \frac{c(\lambda, i+1, j-1)}{2} = 0,$$

seguimos procedimentos usuais quando usamos funções geradoras (ver (PEMANTLE; WILSON, 2013)) e multiplicamos ambos os lados da equação que define  $G(\lambda, x, y)$  por

$$1 - \frac{e^\lambda}{2}x - \frac{1}{2}\frac{y}{x},$$

ou ainda, cancelando denominadores, por  $2x - e^\lambda x^2 - y$  para simplificar coeficientes.

Temos

$$(2x - e^\lambda x^2 - y)G(\lambda, x, y) = (2x - e^\lambda x^2 - y) \sum_{i, j=0}^{\infty} c(\lambda, i, j) x^i y^j.$$

O lado direito pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} c(\lambda, i, j) x^{i+1} y^j - e^\lambda \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} c(\lambda, i, j) x^{i+2} y^j - \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} c(\lambda, i, j) x^i y^{j+1} \\ &= 2 \underbrace{\sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} c(\lambda, i, j) x^{i+1} y^j}_A - e^\lambda \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{\infty} c(\lambda, i-1, j) x^{i+1} y^j}_B - \underbrace{\sum_{\substack{i=-1 \\ j=1}}^{\infty} c(\lambda, i+1, j-1) x^{i+1} y^j}_C. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} \underbrace{[2c(\lambda, i, j) - e^\lambda c(\lambda, i-1, j) - c(\lambda, i+1, j-1)]}_0 x^{i+1} y^j = 0.$$

Em  $A$ , ainda sobram  $i = 0$  e  $j = 0, 1, \dots, \infty$ , resultando em

$$2x \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{c(\lambda, 0, j)}_1 y^j = \frac{2x}{1-y}.$$

Em  $A$ , também sobram  $j = 0$  e  $i = 1, \dots, \infty$ , resultando em

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{c(\lambda, i, 0)}_{e^{\lambda i}} x^{i+1} = 2x \sum_{i=1}^{\infty} (e^\lambda x)^i = \frac{2e^\lambda x^2}{1 - e^\lambda x}.$$

Em  $B$ , sobram  $j = 0$  e  $i = 1, \dots, \infty$ , o que resulta em

$$-e^\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{c(\lambda, i-1, 0)}_{e^{\lambda(i-1)}} x^{i+1} = -x \sum_{i=1}^{\infty} (e^\lambda x)^i = -\frac{e^\lambda x^2}{1 - e^\lambda x}.$$

Em  $C$ , sobram  $i = -1$  e  $j = 1, \dots, \infty$ , resultando em

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{c(\lambda, 0, j-1)}_1 y^j = -\frac{y}{1-y}.$$

Finalmente, em  $C$  também sobram  $i = 0$  e  $j = 1, \dots, \infty$ , resultando em

$$-\sum_{j=1}^{\infty} c(\lambda, 1, j-1) x y^j = -x y \sum_{j=1}^{\infty} c(\lambda, 1, j-1) y^{j-1} = -x y \sum_{j=0}^{\infty} c(\lambda, 1, j) y^j.$$

Seja

$$H(\lambda, y) = \sum_{j=0}^{\infty} c(\lambda, 1, j) y^j.$$

Juntando tudo, temos

$$(2x - e^\lambda x^2 - y)G(\lambda, x, y) = \frac{2x - y}{1 - y} + \frac{e^\lambda x^2}{1 - e^\lambda x} - xyH(\lambda, y).$$

O lado esquerdo se anula quando  $2x - e^\lambda x^2 - y = 0$ , portanto o lado direito também se anula quando isso acontece. Resolvendo a equação do segundo grau em  $x$ , obtemos  $x = e^{-\lambda}(1 \pm \sqrt{1 - e^\lambda y})$ .

Escolhendo o sinal negativo, substituindo no lado direito e igualando a zero, obtemos

$$H(\lambda, y) = \frac{1 - \sqrt{1 - e^\lambda y}}{y} \left( \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{\sqrt{1 - e^\lambda y}} \right).$$

De fato, se  $R = \sqrt{1 - e^\lambda y}$ , temos  $x = e^{-\lambda}(1 - R)$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{2x - y}{1 - y} + \frac{e^\lambda x^2}{1 - e^\lambda x} - xyH(\lambda, y) &= 0 \Rightarrow yH(\lambda, y) = \frac{2x - y}{x(1 - y)} + \frac{e^\lambda x}{1 - e^\lambda x} \\ &= \frac{2e^{-\lambda}(1 - R) - y}{e^{-\lambda}(1 - R)(1 - y)} + \frac{1 - R}{R} = \frac{2(1 - R) - e^\lambda y}{(1 - R)(1 - y)} + \frac{1 - R}{R} \\ &= \frac{1 - 2R + \overbrace{1 - e^\lambda y}^{R^2}}{(1 - R)(1 - y)} + \frac{1 - R}{R} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)(1 - y)} + \frac{1 - R}{R} \\ &= \frac{1 - R}{1 - y} + \frac{1 - R}{R} = (1 - R) \left( \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Como  $H(\lambda, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{\lambda \tau_{j+1}}) y^j$ , por propriedades da função geradora de momentos, temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(\tau_{j+1}) y^j = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, y).$$

Temos

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, y) = \frac{1}{(1 - y)^{3/2}}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(T_n) y^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\tau_k) \right) y^{n-1} \\ &= \mathbb{E}(\tau_1) + (\mathbb{E}(\tau_1) + \mathbb{E}(\tau_2))y + (\mathbb{E}(\tau_1) + \mathbb{E}(\tau_2) + \mathbb{E}(\tau_3))y^2 + \dots \end{aligned}$$

Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(T_n) y^{n-1} &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\tau_{k+1}) y^k \right] \cdot \left[ \sum_{j=0}^{\infty} y^j \right] \\ &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, y) \frac{1}{1-y} \\ &= \frac{1}{(1-y)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Assim,  $\mathbb{E}(T_n)$  é igual ao coeficiente de  $y^{n-1}$  na expansão em série de Taylor de  $(1-y)^{-5/2}$  em torno de  $y = 0$ . Da série binomial, temos

$$\mathbb{E}(T_n) = (-1)^{n-1} \binom{-5/2}{n-1}.$$

Podemos reescrever essa expressão notando que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{m=1}^k \frac{n-m+1}{m}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= (-1)^{n-1} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{(-3/2 - m)}{m} = \cancel{(-1)^{n-1}} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)(2m+3)}{2m} \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} \frac{(2m+3)(2m)}{4m^2} = \frac{1}{2^{2(n-1)}} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{(2m+3)(2m)}{m^2} \\ &= \frac{4}{2^n} \cdot \frac{[(2n+1) \cdots 5][(2n-2) \cdots 2]}{(n-1)!(n-1)!} \\ &= \frac{4}{2^n} \cdot \frac{(2n+1)[(2n-1) \cdots 5][(2n-2) \cdots 2]}{(n-1)!(n-1)!} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2n}{2n} \cdot \frac{n}{n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{3 \cdot 2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n+1)(2n)}{3 \cdot 2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Temos

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{e} \quad (2n)! \sim \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &\sim \frac{(2n+1)(2n)}{3 \cdot 2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n} \frac{2^{2n} n^{2n}}{e^{2n}}}{2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}} = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} (4n^{3/2} + 2n^{1/2}) \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(T_n) \sim \frac{4n^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

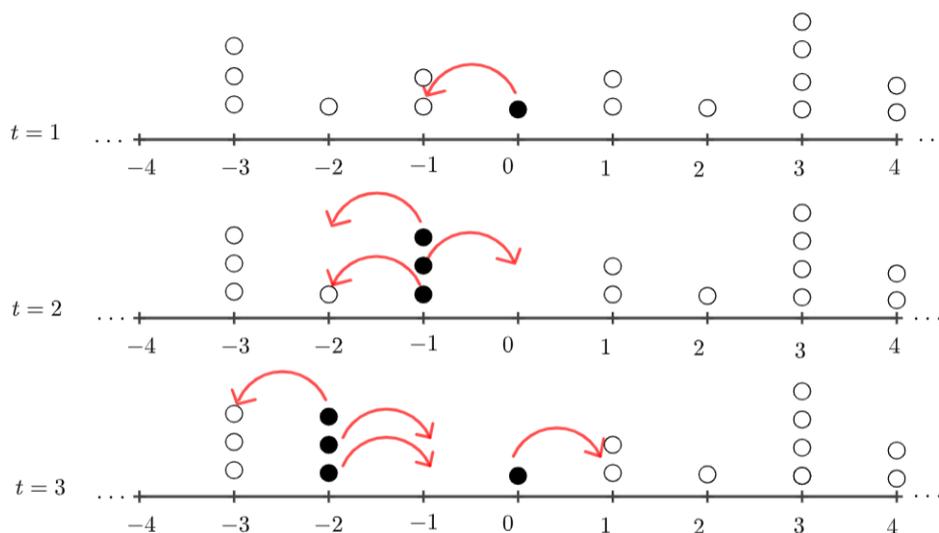
□

### 3.2 O MODELO DOS SAPOS NOS INTEIROS

Nesta seção, consideramos um modelo no qual há um número infinito de partículas realizando passeios aleatórios independentes em  $\mathbb{Z}$ . Mais precisamente, em um instante inicial cada vértice  $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  está ocupado por  $\eta_i$  partículas, onde cada  $\eta_i$  é um inteiro não-negativo. No vértice  $i = 0$ , há apenas uma partícula inicialmente.

Assumimos que as partículas dividem-se em dois tipos: partículas ativas, que realizam passeios aleatórios independentes em  $\mathbb{Z}$  com probabilidade  $p$  de saltar para a direita e  $1 - p$  de saltar para a esquerda, com  $p \in (0, 1)$ ; e partículas inativas, as quais permanecem imóveis até que o vértice em que se encontram é visitado por uma partícula ativa e, a partir de então, tornam-se ativas. Como configuração inicial, vamos supor que somente a partícula em  $i = 0$  está ativa. Observe a Figura 6.

Figura 6 – Primeiros movimentos em um modelo dos sapos. As partículas pretas são as ativas, enquanto as brancas são as inativas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Interpretando as partículas como sapos que saltam de um inteiro para um de seus vizinhos, entendemos de onde vem o nome do modelo. Nosso objetivo é determinar quando o modelo dos sapos é recorrente.

**Definição 1.** O modelo dos sapos em  $\mathbb{Z}$  é dito recorrente se 0 for visitado infinitas vezes, por partículas ativas, com probabilidade 1. Caso contrário, dizemos que o modelo é transiente.

Recordamos que o passeio aleatório simétrico (isto é, em que as probabilidades de salto para a direita e para a esquerda são iguais a  $1/2$ ) em  $\mathbb{Z}$  é recorrente (de fato, o passeio aleatório nos inteiros é recorrente se, e somente se,  $p = 1/2$  - ver (SCHINAZI, 2014) ou (GRINSTEAD; SNELL, 1997)). Segue daí que o modelo dos sapos em  $\mathbb{Z}$  é recorrente se  $p = 1/2$ , uma vez que a partícula inicialmente em 0, por si só, visita 0 infinitas vezes com probabilidade 1. Dessa forma, podemos considerar  $p \neq 1/2$  e, por simetria, basta considerar  $p \in (1/2, 1)$ . Antes de enunciar e provar o teorema sobre recorrência no modelo dos sapos, consideremos os seguintes lemas que serão bastante úteis na demonstração:

**Lema 7.** *Seja  $(Y_n)_{n \geq 0}$  o passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$\mathbb{P}(\tau_n < \infty | Y_0 = 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in [1/2, 1), \\ \left(\frac{p}{1-p}\right)^n, & \text{se } p \in (0, 1/2), \end{cases}$$

onde

$$\tau_n = \inf\{i \geq 1 : Y_i = n\}.$$

*Demonstração.* Considere

$$\beta_n = \mathbb{P}(\tau_n < \infty | Y_0 = 0)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Note que  $\beta_n = \beta_1^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $n = 1$ , não há o que provar. Por indução, suponha que  $\beta_n = \beta_1^n$  e vejamos que  $\beta_{n+1} = \beta_1^{n+1}$ . De fato, dado que  $Y_0 = 0$ , se  $\tau_{n+1} < \infty$ , é claro que  $\tau_n < \infty$ . Daí, o Teorema da Probabilidade Total nos permite escrever

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} < \infty | Y_0 = 0) = \mathbb{P}(\tau_{n+1} < \infty | Y_0 = 0, \tau_n < \infty) \mathbb{P}(\tau_n < \infty | Y_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | Y_0 = 0) \beta_1^n = \beta_1^{n+1}, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese de indução, a propriedade markoviana e o fato de que o processo é homogêneo.

Condicionando sobre o primeiro salto da partícula, temos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | Y_0 = 0) = \underbrace{\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | Y_0 = 0, Y_1 = 1)}_1 \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 = 1 | Y_0 = 0)}_p \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | Y_0 = 0, Y_1 = -1)}_{\mathbb{P}(\tau_2 < \infty | Y_0 = 0)} \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 = -1 | Y_0 = 0)}_{1-p} \end{aligned} \tag{3.1}$$

por homogeneidade e pela propriedade markoviana. Assim, se  $q = 1 - p$ , então

$$\beta_1 = p + q\beta_2 = p + q\beta_1^2.$$

A equação do segundo grau  $q\beta_1^2 - \beta_1 + p = 0$  tem como raízes

$$\beta_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2q}.$$

Como  $1 = p + q = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ , temos  $1 - 4pq = p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2$ , logo

$$\sqrt{1 - 4pq} = |p - q|.$$

Daí,

$$\beta_1 = \frac{p + q \pm (p - q)}{2q},$$

portanto os possíveis valores de  $\beta_1$  são  $p/q$  e 1.

Se  $p \in [1/2, 1)$ , então  $p \geq q$ , logo  $p/q \geq 1$ . Como  $\beta_1$  é uma probabilidade, segue que o único valor possível é 1, logo  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_n = 1$  para todo  $n$  se  $p \geq 1/2$ . Agora, se  $p \in (0, 1/2)$ , então  $p/q < 1$ . Temos, então, um passeio aleatório transiente com probabilidade de salto maior para a esquerda. Dado que o primeiro salto ocorre para a esquerda, vejamos que

$$\mathbb{P}(\tau_1 = \infty | X_0 = 0, X_1 = -1) \geq 1 - \frac{p}{q}.$$

Para isso, considere, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o evento

$$B_n = \{\text{a partícula visita } -n \text{ antes de volta a } 0\}.$$

Note que  $B_{n+1} \subset B_n$  para todo  $n$  (se a partícula visita  $-(n+1)$ , então necessariamente visita  $-n$ ), então

$$B_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{\text{a partícula não retorna a } 0\},$$

de modo que

$$\mathbb{P}(\tau_1 = \infty | X_0 = 0, X_1 = -1) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

pois não retornar a 0 implica nunca visitar 1.

Por comparação com o Problema da Ruína do Jogador (ver (GRINSTEAD; SNELL, 1997)), temos

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1 - p/q}{1 - (p/q)^n}.$$

Com isso, podemos escrever

$$\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_0 = 0, X_1 = -1) \leq 1 - 1 + \frac{p/q p}{= q},$$

portanto, por (3.1), temos

$$\beta_1 \leq p + q \frac{p}{q} = 2p < 1,$$

uma vez que  $p < 1/2$ . Daí, a única possibilidade para  $\beta_1$  é  $p/q$ , ou seja,

$$\beta_n = \left(\frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  se  $p < 1/2$ .

□

**Lema 8.** *Seja  $(x_n)$  uma seqüência de números no intervalo  $[0, 1)$ . Então*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i) = 0 \text{ se, e somente se, } \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty.$$

*Demonstração.* Suponha que  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$ . Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , temos  $0 < 1 - x_i \leq e^{-x_i}$ , logo, para cada  $n$ , tem-se

$$0 < \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , segue do Teorema do Confronto que

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i) = 0.$$

Agora, suponha que  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i) = 0$ . Se  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i \neq 0$ , então  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$  diverge para  $\infty$  e não há o que provar. Assim, podemos supor, sem perda de generalidades, que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ . Note que

$$\sum_{i=1}^{\infty} -\log(1 - x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n -\log(1 - x_i) = \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 - x_i)\right)^{-1} = \infty.$$

Como

$$x \geq -\frac{1}{2} \log(1 - x)$$

para todo  $x$  positivo e suficientemente pequeno e  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ , temos

$$x_i \geq -\frac{1}{2} \log(1 - x_i)$$

para todo  $i$  suficientemente grande. Pelo Teste da Comparação, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty.$$

□

O seguinte resultado é apresentado por Gantert e Schmidt em (GANTERT; SCHMIDT, 2009):

**Teorema 9** (Gantert & Schmidt). *O modelo dos sapos em  $\mathbb{Z}$  com configuração inicial  $\eta = (\eta_i)_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$  e probabilidade de salto para a direita igual a  $p$  é recorrente se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left( \frac{1-p}{p} \right)^i = \infty.$$

*Demonstração.* Chamaremos, genericamente, cada partícula que inicialmente encontrava-se na posição  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  de  $j$ -partícula. Suponha que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left( \frac{1-p}{p} \right)^i = \infty$$

e considere, para cada inteiro positivo  $i$ , o evento

$$A_i = \{\text{o vértice } -i \text{ é visitado por alguma } j\text{-partícula para algum } j \geq 1\}.$$

Como  $p > 1/2$ , sabemos pelo lema anterior que, com probabilidade 1, todas as  $j$ -partículas, com  $j \geq 1$ , serão eventualmente ativadas pela partícula originalmente ativa em 0. Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P} \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\text{alguma } j\text{-partícula visita } -i\} \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\text{nenhuma } j\text{-partícula visita } -i\} \right). \end{aligned}$$

Como a sequência de eventos

$$\bigcap_{j=1}^m \{\text{nenhuma } j\text{-partícula visita } -i\}$$

é monótona não-crescente, podemos usar a continuidade da probabilidade e escrever

$$\mathbb{P}(A_i) = 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m (1 - \mathbb{P}(\text{alguma } j\text{-partícula visita } -i))^{\eta_j}$$

devido à independência dos passeios aleatórios realizados por cada uma das  $\eta_j$   $j$ -partículas.

Por simetria, segue também do lema que, em um passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$  com probabilidade de salto para a direita igual a  $p$ , então a probabilidade de que o vértice  $-n$  seja visitado, dado

que o passeio começa na posição  $m \geq 0$  é igual a  $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n+m}$  se  $p \in (1/2, 1)$ . Dessa forma, concluímos que

$$\mathbb{P}(A_i) = 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+i}\right)^{\eta_j}.$$

Como  $1 - x \leq e^{-x}$  para  $x \geq 0$ , então, para todo  $m \geq 1$ , temos

$$\prod_{j=1}^m \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+i}\right)^{\eta_j} \leq \exp\left(-\sum_{j=1}^m \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+i}\right).$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$  de ambos os lados e notando que

$$\sum_{j=1}^m \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+i} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^i \sum_{j=1}^m \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty,$$

concluímos que  $\mathbb{P}(A_i) = 1$  para todo  $i \geq 1$ . Como a probabilidade da interseção de eventos de probabilidade 1 também tem probabilidade 1, segue que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1. \quad (3.2)$$

Novamente pelo lema, se  $B_i$  denota o evento em que alguma  $(-i)$ -partícula ( $i \geq 1$ ), uma vez ativada, visita eventualmente o 0, temos  $\mathbb{P}(B_i) = 1$ , logo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 1. \quad (3.3)$$

Finalmente, se  $A$  denota o evento em que a partícula originalmente em 0 visita todos os vértices inteiros positivos, então sabemos que  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Se

$$E = A \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i,$$

então  $\mathbb{P}(E) = 1$ . Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \text{ é visitado infinitas vezes}) &= \mathbb{P}(0 \text{ é visitado infinitas vezes} | E) \underbrace{\mathbb{P}(E)}_1 \\ &\quad + \mathbb{P}(0 \text{ é visitado infinitas vezes} | E^c) \underbrace{\mathbb{P}(E^c)}_0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De fato, dado que  $A$ ,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  e  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  ocorrem, então, com probabilidade 1, todas as  $j$ -partículas ( $j \geq 1$ ) são ativadas pela partícula ativa inicial, cada uma das  $(-i)$ -partículas

( $i \geq 1$ ) é ativada por alguma delas, e, para cada  $i$ , alguma  $(-i)$ -partícula, uma vez ativada, visita 0 eventualmente, portanto 0 é visitado infinitas vezes com probabilidade 1, ou seja, o modelo dos sapos é recorrente.

Para a recíproca, suponha que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left( \frac{1-p}{p} \right)^i < \infty.$$

Afirmamos que

$$\mathbb{P}(0 \text{ é visitado infinitas vezes}) \leq \mathbb{P}(-1 \text{ é visitado pelo menos uma vez}).$$

Para provar a afirmação, vamos supor que 0 é visitado infinitas vezes e considerar, para cada  $n$  inteiro positivo, o evento  $E_n$  em que, nas  $n$  primeiras vezes em que 0 é visitado, o processo salta para a direita. Então  $E_{n+1} \subset E_n$  para todo  $n$ , logo

$$E_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{-1 \text{ não é visitado nenhuma vez}\}.$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n = \frac{p}{1-p} < \infty,$$

de modo que  $\mathbb{P}(E) = 0$  pelo Lema de Borel-Cantelli. Assim, dado que 0 é visitado infinitas vezes, a probabilidade de  $-1$  ser visitado ao menos uma vez é 1, ou seja, o evento  $\{0 \text{ é visitado infinitas vezes}\}$  implica o evento  $\{-1 \text{ é visitado pelo menos uma vez}\}$ , como queríamos.

Observe, então, que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1 \text{ é visitado ao menos uma vez}) &= 1 - \mathbb{P}(-1 \text{ nunca é visitado}) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right) \right) \left( 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^{j+1} \right)^{\eta_j}. \end{aligned}$$

De fato, seja  $E_0$  o evento em que a partícula original nunca visita  $-1$  e, para cada  $m$  inteiro positivo, seja  $E_m$  o evento em que nem a partícula original nem nenhuma  $j$ -partícula com  $j \leq m$  jamais visitam  $-1$ . Como antes, temos  $E_{n+1} \subset E_n$  para todo  $n$  e

$$E_n \downarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = \{-1 \text{ nunca é visitado}\}$$

(pois se alguma partícula negativa visitasse  $-1$ , então ela precisou ser ativada pela partícula original ou por alguma partícula positiva previamente, então alguma partícula necessariamente

visitou  $-1$  anteriormente). Pela continuidade da probabilidade, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1 \text{ nunca é visitado}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)\right) \prod_{j=1}^m \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right)^{\eta_j}\end{aligned}$$

novamente pelo lema e pela independência entre os passeios aleatórios descritos pelas partículas.

Pela Desigualdade de Bernoulli, sabemos que se  $x > -1$  e  $n$  é um inteiro não-negativo, então

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Consequentemente, para cada  $j$ , temos

$$\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right)^{\eta_j} \geq 1 - \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1},$$

pois  $-\frac{1-p}{p} > -1$ . Daí,

$$\mathbb{P}(-1 \text{ é visitado alguma vez}) \leq 1 - \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)\right) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right).$$

Pelo Lema 8, temos  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right) > 0$  pois  $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p}\right)^i < \infty$ , ou seja, o modelo dos sapos é transiente.

□

## REFERÊNCIAS

- ALVES, O.; MACHADO, F.; POPOV, S. Phase transition for the frog model. 2002.
- ARTIN, E. *The gamma function*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2015.
- BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes: I. crystals and mazes. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. [S.l.], 1957. v. 53, n. 3, p. 629–641.
- COLETTI, C. F.; GAVA, R. J.; RODRÍGUEZ, P. M. On the existence of accessibility in a tree-indexed percolation model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 492, p. 382–388, 2018.
- DÖBLER, C.; PFEIFROTH, L. Recurrence for the frog model with drift on  $Z^d$ . *Electronic Communications in Probability*, v. 19, 2014.
- GALLO, S.; RODRIGUEZ, P. M. Frog models on trees through renewal theory. *Journal of Applied Probability*, Cambridge University Press, v. 55, n. 3, p. 887–899, 2018.
- GANTERT, N.; SCHMIDT, P. Recurrence for the Frog Model with drift on  $Z$ . *Markov Process. Related Fields*, v. 15, n. 1, p. 51–58, 2009.
- GRINSTEAD, C. M.; SNELL, J. L. *Introduction to Probability*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1997.
- HOFFMAN, C.; JOHNSON, T.; JUNGE, M. Recurrence and transience for the frog model on trees. 2017.
- LARSEN, M.; LYONS, R. Coalescing particles on an interval. *Journal of Theoretical Probability*, Springer, v. 12, p. 201–205, 1999.
- LI, L. Phase transition for accessibility percolation on hypercubes. *Journal of Theoretical Probability*, Springer, v. 31, p. 2072–2111, 2018.
- MITZENMACHER, M. Probability and computing-randomized algorithms and probabilistic analysis. *JOURNAL-OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY*, Palgrave Macmillan Ltd, v. 56, n. 12, p. 1454, 2005.
- NOWAK, S.; KRUG, J. Accessibility percolation on  $n$ -trees. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 101, n. 6, p. 66004, 2013.
- PEMANTLE, R.; WILSON, M. C. *Analytic Combinatorics in Several Variables*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- ROBERTS, M.; ZHAO, L. Increasing paths in regular trees. *Electronic Communications in Probability*, v. 18, n. 87, p. 1–10, 2013.
- RODRIGUEZ, P. M. Modelos probabilísticos in: Actas del XV congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro. 2019.
- SCHINAZI, R. B. *Classical and Spatial Stochastic Processes: with applications to Biology*. [S.l.]: Springer, 2014.

SCHMIEGELT, B.; KRUG, J. Accessibility percolation on cartesian power graphs. *Journal of Mathematical Biology*, Springer, v. 86, n. 3, p. 46, 2023.

TELCS, A.; WORMALD, N. C. Branching and tree indexed random walks on fractals. *Journal of applied probability*, Cambridge University Press, v. 36, n. 4, p. 999–1011, 1999.

THACKER, D.; VOLKOV, S. Border aggregation model. *The Annals of Applied Probability*, JSTOR, v. 28, n. 3, p. 1604–1633, 2018.