UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

FILIPE MATHEUS PEREIRA SILVA

SITUAÇÕES DE VETORES NA GEOMETRIA ANALÍTICA:
UMA CLASSIFICAÇÃO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Caruaru
2023

FILIPE MATHEUS PEREIRA SILVA

SITUAÇÕES DE VETORES NA GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA CLASSIFICAÇÃO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, com requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciando em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Profa Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Caruaru

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Filipe Matheus Pereira.
Situações de vetores na geometria analítica: uma classificação à luz da teoria dos campos conceituais / Filipe Matheus Pereira Silva. - Caruaru, 2023.
61 p. : il., tab.

Orientador(a): Verônica Gitirana Gomes Ferreira
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2023.

1. Atividades. 2. Livro. 3. Vergnaud. 4. Classes. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

FILIPE MATHEUS PEREIRA SILVA

SITUAÇÕES DE VETORES NA GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA CLASSIFICAÇÃO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, com requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciando em Matemática.

Aprovada em: 27/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Cristiane de Arimatea Rocha (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Caruaru

2023

Para todos os meus irmãos e irmãs que por falta de oportunidade foram levados a desacreditar do seu próprio potencial. Essa é pra vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, **Maria das Graças Ferreira da Silva** que lutou muito para que eu pudesse chegar aqui.

Agradeço ao meu pai, **Severino Pereira da Silva**, eu também sempre amarei você.

Agradeço ao meu irmão, **Lucas Gabriel Pereira Silva**, por me introduzir e apresentar à matemática e me ajudar com o aprendizado de matemática básica.

Agradeço a minha querida amiga e irmã de consideração, **Maria Anndressa Alves Agreles**, que me ajudou a desopilar nos momentos que eu mais precisava. Ainda vamos desbravar este mundo.

Agradeço ao meu amigo **Rafael Bezerra Luna** e sua esposa **Priscila de Araújo Marques** por me acolherem em sua casa em algumas de minhas idas à Caruaru.

Agradeço aos meus amigos do tempo da escola, **Luís Paulo Silva Trevisan**, **Mariana Costa de Souza**, **Lucas Brandão Holanda da Silva**, **Lucas Leonardo Barros Silva** e **João Vinícius Faustino Revoredo** pela companhia e pelos bons momentos vividos juntos.

Agradeço à **Ana Maria de Jesus Cavalcante**, psicóloga, que muito me ajudou e instruiu a como reconstruir a minha fé em mim mesmo.

Agradeço ao querido **Reinan Santos da Silva Araujo**, amigo de longa distância o qual ainda pretendo conhecer pessoalmente algum dia.

Agradeço ao meu amigo querido, **Davyd Emanuel Santos de Oliveira**, pelas piadas e risadas nos momentos de dificuldade.

Agradeço aos meus amigos e colegas de turma da faculdade **Rayle Maria Silva dos Santos**, **Weslley de Arruda Maciel**, **Vinícius Pereira da Silva**, **Naffitaly Freitas de Araújo**, **Bruno Sebastião da Silva**, **Evila Zaynne Silva Oliveira** e **Maria da Paz Silva Rodrigues** pela união em nossa caminhada.

Agradeço à professora **Maria do Desterro Azevedo da Silva** que me incentivou a melhorar nos momentos de descrença e que me fez entender o significado prático de esmero, esforço e excelência.

Agradeço à professora **Lidiane Carvalho** pelas palavras doces nos momentos difíceis e pelas conversas suaves nos tempos tortuosos.

Agradeço à professora **Verônica Gitirana Gomes Ferreira** por todas as conversas e por toda a paciência e por me acompanhar na jornada de escrita de todo este trabalho.

Agradeço aos professores, **Luan Santos** e **Luana Rafaela da Silva Costa** pelo incentivo, momentos de conversa e acolhimento.

Agradeço à banca examinadora pela disponibilidade e contribuições na expansão deste trabalho.

Gratidão eterna a cada um que fez e que faz parte do meu processo formativo, aqueles que me fizeram rir e com quem pude conversar nos momentos de descontração, e os que, à distância, estiveram ao meu lado.

RESUMO

Vetor é objeto matemático de muita aplicação e, portanto, muito revisitado nos cursos de matemática e de outras áreas como a Física e a Computação. Este estudo tem como foco o campo conceitual de vetores. Na Teoria dos Campos Conceituais, Gérard Vergnaud defende que não se aprende acerca de um conceito por meio de uma única situação, sendo necessário situações de diferentes classes para se trabalhar um mesmo conceito. Neste trabalho, seguimos a TCC buscando como objetivo classificar as situações utilizadas no estudo de vetores no campo da Geometria Analítica. Metodologicamente selecionamos um livro-texto da disciplina, respondemos e analisamos as atividades voltadas à Geometria, para que pudéssemos separar em classes e subclasses as atividades, a partir de seus padrões: incluindo representação incluída, significado atribuído à vetores, e habilidades mobilizadas. Constatamos que podemos encontrar até seis classes de situações muito comuns nos exemplos do livro, duas das quais apresentam outras duas subclasses. Ao final tabelamos as habilidades alcançadas em cada uma das seis divisões que fizemos.

Palavras-chave: Atividades; livro; Vergnaud; Classes.

ABSTRACT

Vector is a mathematical object with many applications and, therefore, much revisited in mathematics courses and other areas such as Physics and Computing. This study focuses on the conceptual field of vectors. In the Theory of Conceptual Fields (TCC), Gérard Vergnaud argues that someone cannot learn about a concept through a single situation, requiring situations from different classes to work on the same concept. In this work, we follow TCC, seeking to classify the situations used to study vectors in Analytical Geometry. Methodologically, we selected a textbook for the subject answered and analyzed the activities focused on Geometry to separate the activities into classes and subclasses, based on their patterns: included representation, meaning attributed to vectors, and mobilized skills. We found that we can find up to six classes of widespread situations in the textbook situations, two of which have two subclasses. At the end, we tabulated the skills achieved in each of our six divisions.

Keywords: Activities; Book; Vergnaud; Classes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O campo conceitual de vetores é extremamente amplo e útil para a matemática, portanto, faz-se inestimável importância o entendimento pleno acerca de vetores quando o estudante vai se defrontar com os conteúdos presentes na geometria analítica ou em outras áreas de estudo como na álgebra linear, em cálculo vetorial, ou mesmo na física:

- Na geometria analítica, vetores são utilizados para gerar retas e identificar as posições relativas entre essas, bem como gerar planos e identificar posições relativas entre esses. Com isto, o conceito de vetor representa uma ferramenta de grande utilidade para lidar com problemas geométricos a partir da utilização de suas propriedades.

- Na álgebra, com os espaços vetoriais, vetores são utilizados para generalizar as propriedades de alguns objetos matemáticos e os tratando com a álgebra de vetores.

- No cálculo vetorial, em integrais de linha, campos vetoriais, parametrização de curvas e entre outros exemplos.

- Na física, com os conceitos de deslocamento, força resultante, velocidade, impulso, enfim, grandezas vetoriais que necessitam de conceitos como sentido, direção e módulo para que façam sentido.

Portanto, é impossível que os discentes dos cursos de matemática terminem sua graduação sem ter se defrontado com o conteúdo de vetores pelo menos algumas vezes em que os vetores assumem diferentes significados. No entanto, poucos estudos mostram ainda os diferentes tipos de situações que formam o campo conceitual de vetores.

Desse modo, ficamos interessados em responder a seguinte questão de pesquisa: Quais os tipo de problema geométricos podem fazer parte de uma aplicação de vetores no estudo introdutório da disciplina de geometria analítica?

Apresentaremos no terceiro capítulo deste trabalho a definição de vetor, definindo-o como um conjunto, bem como algumas de suas operações e representações algébricas e geométricas, a base de que o estudante precisa para aplicar esse conceito em outros mais avançados.

A investigação que realizamos neste Trabalho de Conclusão de Curso baseou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, por considerarmos uma abordagem frutífera para a análise de como se constrói o aprendizado do aluno quando desafiado com situações no ensino de matemática. Como explica Gitirana *et al.* (2008, p. 4) “não só os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sofreram influência da Teoria dos Campos Conceituais, também várias pesquisas internacionais lançaram mão dos seus pressupostos teóricos para desenvolver estudos e análise de resultados.”, desse modo observamos que se trata de uma teoria proveitosa para nossa pesquisa. Outro motivo que nos motivou para realização desse trabalho se deve em parte a termos observado uma escassez de pesquisas brasileiras a respeito da TCC e em outros campos conceituais, diferentes das estruturas aditiva e das multiplicativas, sua aplicação em campos conceituais mais específicos como o de vetores.

No capítulo 4 deste trabalho, expomos os conceitos básicos dessa teoria, bem como a noção de esquema, e do invariante operatório conhecido por Teorema-em-ação, conceitos introduzidos por Piaget e aprimorado, posteriormente, por Vergnaud.

No quinto capítulo, apresentamos a metodologia deste trabalho, onde procedemos com uma investigação bibliográfica exploratória para averiguar os livros textos de geometria analítica. Conforme elucida Gil (2002, p. 41), “Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar uma maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses”. Portanto, usamos como metodologia a análise de atividades de um livro texto, com o fim de classificar as situações a partir da análise das habilidades, dos conceitos e das representações que precisam ser apreendidas pelos estudantes quando estes exploram com o campo conceitual de vetores.

No sexto capítulo, trazemos os resultados e as discussões da pesquisa, investigamos as situações presentes no livro-texto Geometria Analítica: um tratamento vetorial de Camargo e Boulos (2005) com o objetivo de classificar os problemas típicos desse tipo de conteúdo.

Finalizamos o trabalho com o capítulo 7, as considerações finais, onde pontuamos o que conseguimos atingir com a pesquisa.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Em busca de expandir os estudos e pesquisa acerca da Teoria dos Campos Conceituais, trazemos como nosso objetivo mapear e classificar as situações geométricas utilizadas no estudo de vetores no campo da Geometria Analítica buscando dar suporte ao campo conceitual de vetores.

2.2 ESPECÍFICOS

- Identificar os significados que os vetores podem assumir em diferentes situações analisadas em nossa pesquisa.
- Detalhar as habilidades referentes a vetores mobilizadas pelos estudantes ao lidar com as situações contidas nos livros-texto de Geometria Analítica.
- Identificar que tipo de representações (algébrica, geométrica) estão presentes nos livros de geometria analítica quando trabalhamos com o campo conceitual de vetores.
- Resolver as situações, presentes no livro-texto analisado, empregando propriedades de vetores.

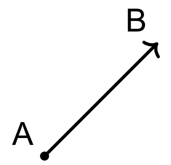
3 VETORES

Neste capítulo vamos definir e estudar alguns dos conceitos básicos de vetores que estão presentes ao iniciar o estudo neste ramo da matemática, nos deteremos a uma abordagem de vetores à luz da Geometria Analítica ensinada nos cursos de formação avançada. Porém, antes de definir o que é um vetor, vamos definir os conceitos de sentido, direção, módulo e de equipolência de segmentos de reta orientados.

3.1 Segmentos de reta orientados

Um segmento de reta orientado, ou simplesmente segmento orientado, está bem definido quando conhecemos dois pontos no plano, um desses pontos é chamado de **origem** do segmento e o outro é a **extremidade** do segmento. Representamos algebricamente o segmento orientado com origem em A e extremidade em B por AB, e podemos representar geometricamente por meio da representação geométrica euclidiana do segmento AB, porém com uma seta em sua extremidade, que utilizamos para indicar o seu **sentido**.

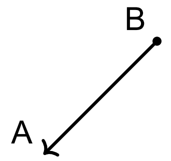
Figura 1 - Segmento orientado AB



Fonte: Autor, 2023.

Por outro lado, representamos o segmento orientado com origem em B e extremidade em A por BA, e sua representação geométrica é

Figura 2 - Segmento orientado BA

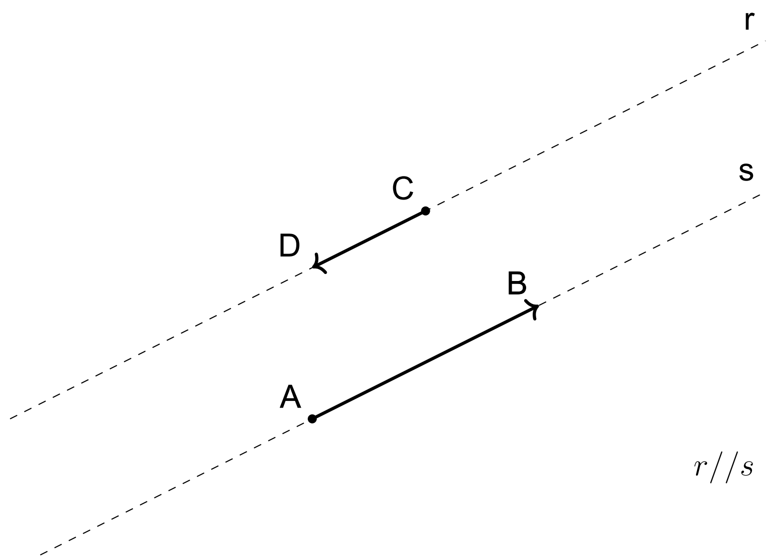


Fonte: Autor, 2023.

Assim, verificamos como a representação geométrica dos segmentos orientados AB e BA se distinguem por seus sentidos opostos.

Por sua vez, a **direção** de um segmento orientado está definida pela reta que o contém (sua reta suporte). Dois ou mais segmentos orientados terão a mesma direção se, e somente se, suas retas suportes forem coincidentes ou paralelas.

Figura 3 - Vetores com a mesma direção



Fonte: Autor, 2023.

Na figura 3 vemos que as retas que contém os segmentos orientados AB e CD são paralelas, portanto esses possuem a mesma direção.

Já o **módulo** de um segmento orientado AB, representado aqui por $|AB|$, é definido como sendo o comprimento do segmento AB, que consiste na distância entre os pontos A e B. Munidos dessa definição, fica fácil constatar que os segmentos orientados AB e BA sempre terão mesmo módulo, já que a distância de A para B é a mesma de B para A.

Da posse dos conceitos de sentido, direção e módulo de um segmento orientado, dizemos que dois segmentos orientados AB e CD são **equipolentes** se possuírem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido e representaremos como $AB \sim CD$, sendo equipolência uma relação de equivalência, isto é, goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Enfim, aparelhados desses conceitos, agora podemos definir o que é um vetor.

O vetor AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB e na mesma dimensão de AB, chamados de **representantes** de AB. Ou ainda, vetor AB é a **classe de equivalência** de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Os vetores determinados por AB, geralmente são representados simbolicamente por $\overrightarrow{AB}$, ou através de uma letra minúscula com uma flecha por exemplo: $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a'}$, $\vec{b'}$, etc. (quando o contexto já deixa claro que tal símbolo se trata de um vetor, é comum o autor de alguns textos dispensar a flecha e representar apenas com uma letra minúscula o vetor, é o que faremos no capítulo 6 deste trabalho). Assim, se usarmos a notação $\vec{v}$ para representar um vetor determinado por AB, podemos enunciar a definição do seguinte modo

$$\vec{v} := \{A'B'; A'B' \sim AB\}.$$

Onde dois vetores serão iguais se, e somente se, dados um representante de cada um deles, esses segmentos têm o mesmo sentido, a mesma direção e o mesmo módulo.

3.2 Representações de um vetor no sistema cartesiano

Neste tópico, vamos dar início definindo as coordenadas de um vetor, assumindo que o leitor tem posse do conhecimento básico de operações entre pares ordenados, a saber: adição e subtração de pares ordenados, igualdade e multiplicação de um par ordenado por um escalar.

Admitiremos aqui verdadeiras algumas proposições que serão úteis para conceituarmos as operações com vetores. No entanto, para não nos estendermos muito, não iremos realizar as suas respectivas demonstrações, podendo o leitor interessado consultar Gómez, Frensel e Santo (2010).

Proposição 1. Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto A', existe e é único o ponto B' tal que $AB \sim A'B'$.

Proposição 2. Dados os pontos do plano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, então

$$AB \sim CD \Leftrightarrow B - A = D - C.$$

Apesar de termos definido um vetor como sendo uma uma classe de equivalência, as proposições 1 e 2 nos permitem operar com os vetores apenas escolhendo um único representante do conjunto e operando com esse representante, como veremos a seguir.

Para definirmos coordenadas de um vetor, consideraremos dados dois pontos A e B de um plano, cujas coordenadas são $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ tem suas coordenadas definidas como $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_1)$.

Exemplo: Dados os pontos $A = (4, 1)$ e o ponto $B = (5, 1)$, o vetor $\vec{v}$ determinado por AB tem suas coordenadas dadas por $\vec{v} = B - A = (5, 3) - (4, 1) = (5 - 4, 3 - 1) = (1, 2)$. De modo análogo, se quisermos calcular as coordenadas do vetor $\vec{u}$ determinado pelo segmento orientado BA, fazemos $\vec{u} = A - B = (4, 1) - (5, 3) = (4 - 5, 1 - 3) = (-1, -2)$. Fica fácil verificar que $\vec{v} = -\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Observação: Graças a proposição 2, não importa o representante que escolhemos do conjunto do vetor que suas coordenadas sempre serão as mesmas, por exemplo, se em vez de escolhermos o representante AB do conjunto $\vec{v}$, escolhermos o representante CD, por definição de vetor como o conjunto de segmentos orientados equipolentes entre si, temos que $AB \sim CD$ o que, pela proposição 2, sabemos que $AB \sim CD \Leftrightarrow B - A = D - C = \vec{v}$.

3.3 Operações com vetores

3.3.1 Soma de vetores

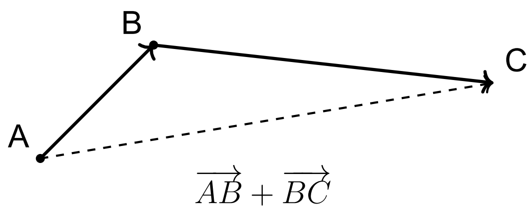
A partir da transposição de vetor para um par ordenado, em vez de definirmos os conceitos de adição, subtração, igualdade e multiplicação por escalar, podemos importar as operações entre pares ordenados, com alguns poucos ajustes, para realizar o estudo de vetores com essas operações. Assim, se quisermos somar os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, fazemos

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

Ou seja, a soma do vetor com origem em A e extremidade em B, com o vetor com origem em B e extremidade C é o vetor com origem em A e extremidade em C.

Representado geometricamente na figura 4.

Figura 4 - Soma de vetores



Fonte: Autor, 2023.

De modo geral, fixados um representante para cada vetor, a soma de dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é definida como sendo a soma das coordenadas desses representantes, ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Dessa maneira, é fácil verificar que a soma de vetores também goza das propriedades comutativa, associativa, simétrica e de existência de elemento neutro.

Exemplo: Dados dois vetores $\vec{v} = (5, 2)$ e $\vec{u} = (4, 3)$ a sua soma é calculada facilmente como se segue $\vec{v} + \vec{u} = (5, 2) + (4, 3) = (5 + 4, 2 + 3) = (9, 5)$.

3.3.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Para multiplicar o vetor $\vec{v}$ por um escalar λ, basta calcularmos as coordenadas de algum dos representantes do vetor e multiplicarmos o par ordenado correspondente por λ. Assim, se $\vec{v} = (v_1, v_2)$, então

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

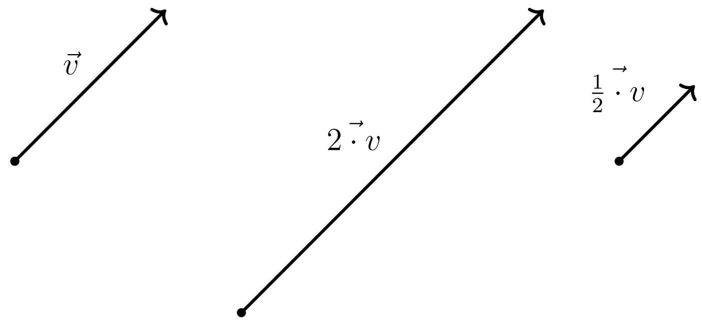
Dessa maneira, é fácil verificar que a multiplicação de vetor por escalar goza das propriedades comutativa, associativa e existência de elemento neutro.

Exemplo: Dados dois pontos $A = (2, 3)$, $B = (1, 1)$ e um escalar $\lambda = 5$ o resultado da multiplicação do vetor determinado pelos segmentos orientados equipolentes a AB e

λ é dado por $\lambda \cdot AB = 5 \cdot (1-3, 1-2) = 5 \cdot (-2, -1) = (5 \cdot (-2), 5 \cdot (-1)) = (-10, -5)$.

Geometricamente, a multiplicação por escalar **dilata** os segmentos orientados representantes do vetor quando $|\lambda| > 1$ e **contrai** o segmento quando $|\lambda| < 1$, como mostra a figura 5.

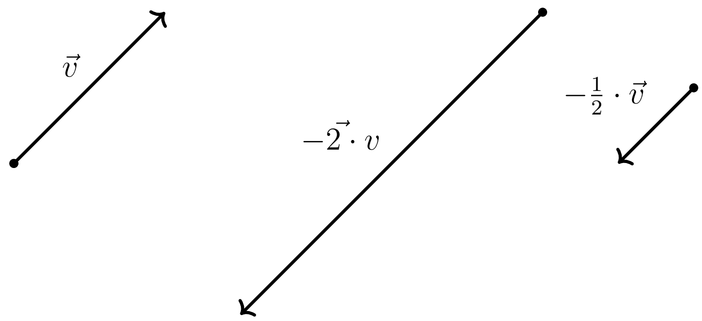
Figura 5 - dilatação e contração de vetores



Fonte: Autor, 2023.

Como já verificamos, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = -1 \cdot \overrightarrow{BA}$, onde AB e BA tem sentidos opostos, ou seja, multiplicar o vetor por um número negativo, altera o seu sentido.

Figura 6 - Mudança de sentido de vetores



Fonte: Autor, 2023.

Se existem dois vetores u e v e um número real λ tais que $u = \lambda v$, diremos que u e v são **múltiplos** um do outro.

3.4 Paralelismo de vetores

Dois vetores são paralelos quando um é múltiplo do outro. Através da representação geométrica das figuras 5 e 6 podemos ver o que acontece geometricamente nesses casos, os segmentos orientados têm a mesma direção, apenas podendo variar seu sentido conforme o sinal do escalar. Dados dois vetores não paralelos, temos uma outra forma de os relacionar por meio da propriedade que enunciamos abaixo

Proposição 3. Sendo u e v dois vetores que não são paralelos e quatro números reais α, β, γ e δ, sempre teremos que se

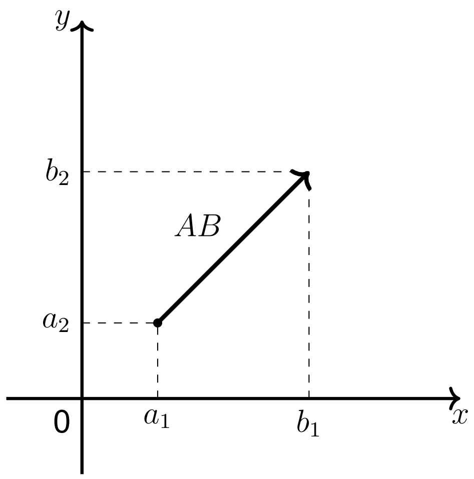
$$\alpha u + \beta v = \gamma u + \delta v \Rightarrow \alpha = \gamma; \beta = \delta.$$

A demonstração de tal proposição pode ser encontrada em Camargo e Boulos (2005).

3.5 Representação geométrica no plano

Evidentemente que da maneira que definimos vetor como um conjunto infinito, é impossível representá-lo geometricamente, mas como já vimos anteriormente que o representante de um vetor carrega consigo as propriedades de todos os segmentos orientados do conjunto, chamaremos de **representação geométrica de um vetor** a representação geométrica de algum dos representantes desse vetor. Portanto, para delinearmos, no plano, a ilustração geométrica de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ com $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, basta escolhermos algum representante desse vetor e marcamos no plano as coordenadas do ponto de origem e as coordenadas do ponto de extremidade, depois traçamos o segmento orientado indo da origem para a extremidade, conforme mostramos na figura 7.

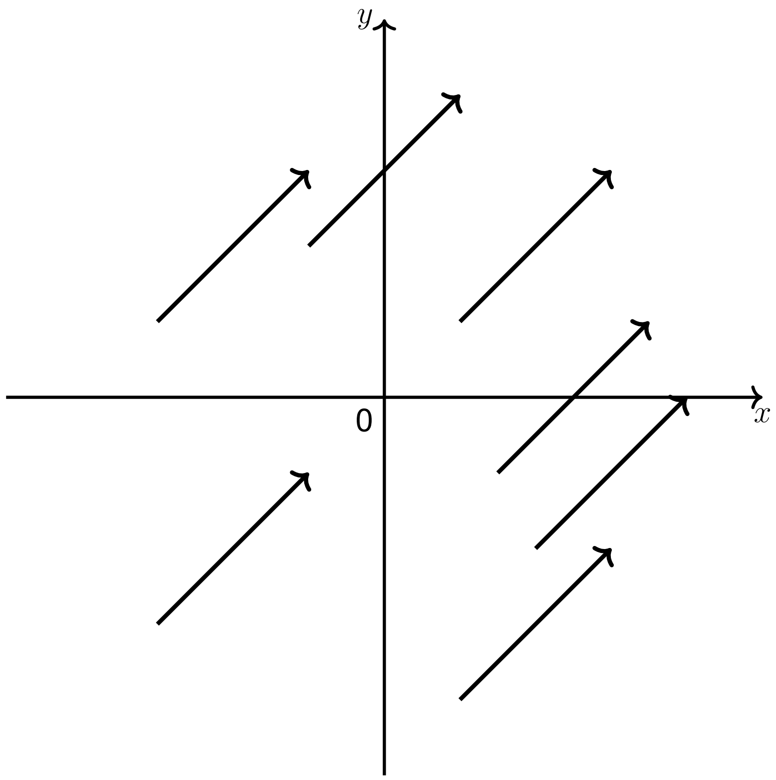
Figura 7 - Representação de um vetor no plano



Fonte: Autor, 2023.

Outras possibilidades de se representar geometricamente o mesmo vetor estão postas na figura 8.

Figura 8 - Diferentes representantes de um mesmo vetor no plano



Fonte: Autor, 2023.

Note que todos os segmentos orientados são paralelos e apontam na mesma direção. Apesar de muitas possibilidades é comum se representar o vetor com um segmento cuja origem é também a origem do sistema de coordenadas.

4 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerárd Vergnaud (Vergnaud, 1983) tem o objetivo de explicar como o estudante desenvolve o seu conhecimento. A teoria de Vergnaud tem fortes inspirações nas teorias do desenvolvimento de Piaget, na qual ele buscou compreender a gênese dos processos de formação do pensamento de um indivíduo na construção do conhecimento e na abordagem historico-cultural em psicologia de Vygotsky, conforme elucida Moreira (2002).

Na TCC, entende-se que um estudante compreende um determinado conceito em um campo de conceitos, não de forma isolada. Um conceito não pode ser entendido em sua totalidade através de uma única situação, sendo necessários o conhecimento prévio de outros conceitos apoiadores e outras situações para poder entendê-lo.

> [...] três argumentos principais levaram Vergnaud ao conceito de campo conceitual: 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Vergnaud, 1983, p. 393 apud Moreira, 2002, p. 3).

Corroborando com o exposto, Gitirana *et al.*, (2008, p. 6) realçam que “A teoria dos Campos Conceituais considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema”.

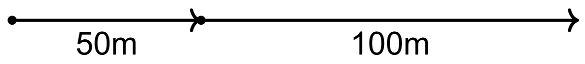
Em articulação com o campo conceitual de vetores, objeto desta pesquisa, tomemos o exemplo de quando o estudante está iniciando os seus estudos a respeito de vetores, se quisermos definir o conceito de soma de vetores como a distância da origem do primeiro vetor até a extremidade do último, naturalmente, ele/ela vai precisar entender o que é um vetor, o que é origem, o que é extremidade e como se calcula a distância entre dois pontos. Portanto, vemos como um conceito básico para o desenvolvimento da autonomia do estudante no estudo de vetores precisa estar apoiado em outros conceitos que não pertencem, ou, ao menos, não são objeto principal de estudo no campo conceitual de vetores. Além disso, um mesmo conceito não pode ser assimilado em sua totalidade apenas trabalhando um só tipo de situação, como veremos a seguir.

Vamos supor que propomos o seguinte exercício para o estudante resolver:

1. João saiu de sua casa com o objetivo de ir para um dos Supermercados de sua cidade, para isso João precisou caminhar 50 m em uma determinada direção, parou para conversar com um amigo no caminho, e logo após caminhou mais 100 m na mesma direção chegando ao Supermercado. Qual a distância total entre a casa de João e o Supermercado?

O estudante pode responder sem muito esforço esse problema de soma de vetores simplesmente somando os valores numéricos que aparecem no enunciado do problema, assim 50 m $+ \, 100$ m $= (50 + 100)$ m $= 150$ m é a distância entre a casa de João e o Supermercado.

Figura 9 - Vetores colineares

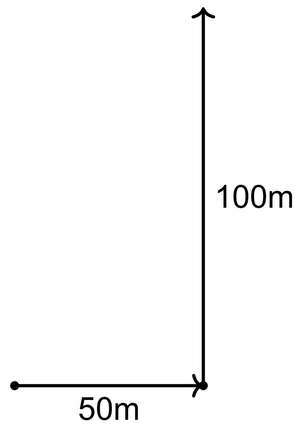


Fonte: Autor, 2023.

No entanto, a mesma técnica utilizada para resolver a situação **1** pode não servir para outras situações que envolvam o mesmo conceito de soma de vetores. Por exemplo, agora vamos propor o seguinte exercício:

2. João saiu de sua casa com o objetivo de ir para um dos Supermercados de sua cidade, para isso João precisou caminhar 50m em uma determinada direção e logo após fez um desvio de $90°$ e caminhou mais 100m em outra direção, conforme mostra a figura 10. Qual a distância total entre a casa de João e o Supermercado?

Figura 10 - Vetores perpendiculares



Fonte: Autor, 2023.

Embora se trate também de um problema de soma de vetores como na situação **1**, inclusive com os mesmos valores numéricos, agora para responder corretamente à questão não podemos simplesmente somar os números que aparecem no enunciado. Para resolver a situação **2** podemos observar que o trajeto percorrido por João forma os catetos de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa (d) é a distância entre a casa de joão e o supermercado, como mostra na Figura 11. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

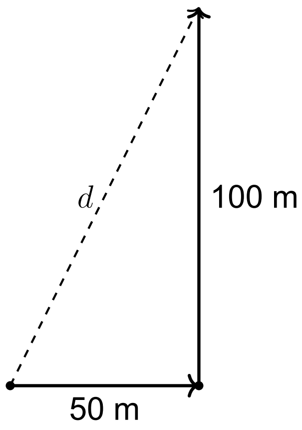
$$d^2 = 100^2 + 50^2 = 10.000 + 2.500 = 12.500,$$

assim,

$$d = \sqrt{12.500} \approx 112.$$

Então, a distância entre a casa de João e o supermercado é de aproximadamente 112 m.

Figura 11 - Visualização da hipotenusa



Fonte: Autor, 2023.

Portanto, um entendimento de um conceito, como soma de vetores, não acontece por meio de situações isoladas, nem de conceitos isolados, uma vez que para solucionar a situação **2** precisávamos, além de interpretar corretamente o problema, verificar a posição relativa entre os vetores e saber aplicar o Teorema de Pitágoras.

Assim, os conceitos matemáticos têm seus sentidos delineados a partir de uma variedade de situações, e cada situação não pode ser analisada com o auxílio de um único conceito (Gitirana *et al.*, 2008). "Por isso é necessário falar-se em campos conceituais"(Moreira, 2002, p. 5).

4.1 A terna (S, I, R) da formação de um conceito

Sob a perspectiva da TCC, Gitirana *et al.* (2008, p. 7), afirmam que

> O estudo do desenvolvimento de um campo conceitual segundo esta teoria, requer que o pesquisador veja um conceito como formado por uma terna de conjuntos (**S, I, R**), onde:
>
> - **S** é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo;
> - **I** é um conceito de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;
> - **R** é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes e, portanto, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

As autoras ainda afirmam que Vergnaud retoma as ideias de Piaget no que se refere a função simbólica (ou função Psico-Semiótica) fazendo uma associação entre a terna (**S, I, R**) e os elementos da função simbólica de Piaget. Nessa perspectiva, a terna que forma o conceito é entendida como sendo o **(S)** se referindo à realidade (ou referente), (**I**) se refere ao significado e (**R**) se refere ao significante, sendo que a interação entre esses dois últimos aspectos do pensamento é considerada a **representação** (Gitirana *et al.*, 2008).

4.2 Competência e concepção

Um importante elemento a ser observado durante o ensino de matemática é a respeito da aptidão e da habilidade que os estudantes possuem para resolver determinado tipo de problema. No intuito de contribuir para o aprendizado por meio de situações-problema, o desafio do professor, na perspectiva da TCC, é o de introduzir uma melhor relação entre os conceitos matemáticos e as resoluções de problemas para que assim se tornem compreensíveis e significativos para o estudante (Gitirana *et al.*, 2008).

Como explica Gitirana *et al.* (2008, p. 10), "a complexidade dos problemas depende da sua estrutura, do contexto envolvido, da característica numérica dos dados e da sua apresentação. Porém, o significado desses fatores depende basicamente do nível cognitivo dos alunos".

Portanto, é preciso que o professor seja atencioso e observe o desenvolvimento e a melhoria dos alunos quando estão aprendendo acerca de determinado campo conceitual, para que assim estruture, contextualize e apresente situações que não vão de desencontro com a realidade do desempenho que os alunos demonstraram em sala de aula, o que não pode ser feito sem o professor refletir acerca da **competência** e **concepção** de seus discentes.

Gitirana *et al.* (2008, p. 11) afirma que "problemas teóricos e práticos levam à formação de conceitos, enquanto conceitos explícitos e conhecimentos implícitos levam à formação de competência". Sendo a competência delineada a partir do modo que o estudante atua quando defrontado com uma situação e a concepção delineada pela forma com que o aluno vai se expressar verbalmente, ou simbolicamente, quando diante da situação.

Portanto, na análise de uma tarefa matemática, a competência do aluno pode ser avaliada segundo três aspectos

> “(a) análise do acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta (b) análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro, porque sua resolução foi mais econômica ou mais rápida, ou ainda, mais elegante; e (c) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema dentro de uma situação particular (Gitirana *et al.* 2008, p. 12) ”.

Desse modo, pode-se reconhecer os avanços que os estudantes estão obtendo em suas resoluções.

4.3 Esquema

De acordo com Gitirana *et al.* (2008), precisamos entender a noção de **esquema** para entender a relação existente entre competência e concepção. Conforme acentua Vergnaud (2009), sendo o conceito de esquema apresentado primeiro por Kant, em seguida foi usado por vários psicólogos, no entanto, foi com Piaget que o conceito ganhou força, fornecendo exemplos concretos e convincentes, para explicar o desenvolvimento da criança, conforme explicam Cruz e Fontana (1997, p. 47)“ é por meio dos esquemas de ação que a criança começa a conhecer a realidade, assimilando-a e atribuindo-lhe significações”. Então, aprimorada com Vergnaud para se tratar de conhecimentos específicos aprendidos pelos estudantes, “esquema significa a forma como a pessoa (o aluno) organiza seus invariantes de ação ao lidar com um conjunto de situações análogas”(Gitirana *et al.* 2008 p. 12).

Conforme comunica Santos (2022, p. 38):

> Os esquemas são unidades totalmente dinâmicas que podem ser sempre recombinadas pelo aluno com o intuito de encontrar um novo. Isso acontece porque, quando o estudante se defronta com uma nova situação, para a qual não possui esquemas disponíveis para solucioná-la, ele precisa se desdobrar e encontrar um novo esquema para poder resolver a situação.

Assim, percebemos como a noção de esquema fornece uma perspectiva importante para entender como o estudante aprende a respeito de determinado campo conceitual. Esse estudante parte do que já sabe e por meio de um processo de reflexão com bases teóricas e lógicas sólidas, vai combinando seus esquemas até chegar na conclusão de como solucionar uma nova situação.

Evidentemente, quando o aluno lida com uma situação que já saiba solucionar, não há um processo de recombinação de esquemas que vá provocar um aprendizado considerável, além de apenas reforçar o que já é compreendido, utiliza o esquema já dominado. Por isso, é importante que o professor vá diversificando o tipo de situação que vai propor para os seus alunos, a fim de trabalhar sobre um mesmo campo conceitual a partir de significados diferentes, ou com variação dos elementos dados em uma mesma classe de situações. Senão, o estudante passa a perceber o conceito em foco, somente quando assumindo um ou poucos significados. Como já vimos, não é porque o aluno sabe solucionar um determinado tipo de situação sobre soma de vetores que ele saberá resolver um outro tipo de problema a respeito do mesmo conceito.

4.4 Teorema-em-ação

O teorema-em-ação também é um conceito emprestado de Piaget que Vergnaud aprimorou em suas pesquisas. Teorema-em-ação, para Vergnaud é o um dos elementos do esquema que ele designa por invariante operatório (Moreira, 2002).

Conforme esclarecem alguns autores, “aos seis anos, a criança dispõe de poucas competências matemáticas. No entanto, na base dessas competências estão conhecimentos matemáticos implícitos profundos que servirão de alicerce para a construção de todo o edifício”(Vergnaud; Laborde, 1994, p. 89 apud Gonçalves, 2008).

Às vezes pode ocorrer do estudante solucionar um determinado problema matemático de maneira correta, mas utilizando conceitos e teoremas matemáticos implicitamente, isto é, sem tomar conhecimento das relações matemáticas correspondentes. Em geral, os problemas desse tipo são um espaço para que o aluno possa agir de maneira a mobilizar o seu conhecimento implícito e intuitivo, onde o professor-pesquisador por sua vez, pode tomar consciência da relação matemática por trás da ação do aluno, e propor novos tipos de situações que possibilitem a expansão do seu conhecimento (Gitirana *et al.*, 2008).

Vamos apresentar um exemplo desse tipo de problema:

Exemplo. Se uma pessoa, uma criança, deseja contar a quantidade de camisas e calças que possui, ela pode contar primeiro a quantidade de camisas e depois contar a quantidade de calças, depois somar os dois resultados e assim obter o resultado, no lugar de contar tudo como um conjunto só. O que há aqui é a aplicação de um teorema, mas de maneira implícita, o teorema pode ser enunciado assim: "Sejam X, Y conjuntos finitos disjuntos, com m e n elementos respectivamente. Então $X \cup Y$ é finito e possui $m + n$ elementos"(Lima, 2019, p. 33). Neste caso, podemos considerar o conjunto das camisas como sendo o X, com m elementos, e o conjunto das calças sendo Y, com n elementos, e o teorema fornece que o total é dado por $m + n$.

As proposições utilizadas pelo aluno durante a resolução de uma situação é uma relação denominada por Vergnaud de **Teorema-em-ação**, conforme explicam Gitirana *et al.* (2008, p. 16)

> "Os Teoremas-em-ação são definidos como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou seqüência de operações, para resolver um problema. Os Teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque a maioria deles não são explícitos. Eles estão subjacentes ao comportamento dos alunos, aparecem de modo intuitivo na ação do aluno e seu âmbito de validade é normalmente menor que o âmbito dos teoremas".

No entanto, mesmo com seu domínio de aplicação restrito, o Teorema-em-ação é um importante objeto de análise para o professor acompanhar o desenvolvimento do estudante e, a partir desse conhecimento, diversificar os tipos de situação que permita o estudante progredir em seus esquemas, construindo novos.

5. METODOLOGIA

Agora apresentaremos o percurso metodológico que atravessamos para desenvolver a nossa pesquisa e alcançar o nosso objetivo.

A seleção da Teoria dos Campos Conceituais como o prisma para realizar nossa análise se dá por conta da importância que essa teoria tem ganhado internacionalmente. Conforme Gitirana (2008) expõe, a TCC tem ajudado pesquisadores a entender a formação e o desenvolvimento de conceitos matemáticos para os alunos.

A escolha do conteúdo de vetores foi realizada para fornecer uma outra abordagem analítica da pesquisa produzida por Bittar (2002) e entendermos que os discentes de licenciatura em matemática, quando têm que confrontar este conteúdo da ementa do curso de geometria analítica, podem encontrar muita dificuldade na base desse campo conceitual, isto é, encontrar desafios quando estudam o conteúdo de vetores. Neste momento de grande desafio para o discente, o maior objeto de apoio para o estudante é o livro-texto.

A abordagem adotada neste trabalho, portanto, tem sua natureza qualitativa, onde, realizamos a análise de um livro-texto de geometria analítica buscando classificar as situações à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Analisando as situações apresentadas no livro, resolvendo-as e elencando suas habilidades, fica claro, como veremos no próximo capítulo, que uma mesma classe de situações pode mobilizar diferentes esquemas no estudante.

Portanto, nossa pesquisa se trata de uma pesquisa documental, o que, diferente de uma pesquisa bibliográfica de acordo com Gil (2002, p. 46),

> “A pesquisa documental apresenta uma série de vantagens. Primeiramente, há que se considerar que os documentos constituem fonte e estável de dados. Como os documentos subsistem ao longo do tempo, tornam-se a mais importante fonte de dados em qualquer pesquisa de natureza histórica”.

O livro didático, como pontua Santana (2006, p. 56),“têm um caráter diferenciado para o aluno, em relação ao professor, visto que contém um saber sistematizado, fornecendo ao aluno uma fonte de conhecimentos necessária à construção e articulação entre as aprendizagens matemáticas”. É o livro didático a principal ferramenta de auxílio do estudante na graduação, por isso decidimos analisar algum dos livros didáticos muito utilizados pelos graduandos à luz da teoria dos campos conceituais.

Assim, para atingirmos nosso objetivo geral, isto é, mapear e classificar as situações utilizadas no estudo de vetores no campo da geometria analítica buscando dar suporte ao campo conceitual de vetores, escolhemos um livro-texto de Geometria Analítica. Para realizar a escolha do livro-texto que aqui analisamos, por facilidade de acesso, fomos até a biblioteca do Campus Acadêmico do agreste-UFPE fizemos a leitura da apresentação do livro e dos conteúdos de cada capítulo e escolhemos aquele que aparentava nos possibilitar aplicar vetores em diferentes contextos geométricos, uma vez que não era de nosso interesse realizar a análise de situações que envolvessem vetores apenas no próprio contexto de vetores.

Após selecionar as atividades que pudessem compor nosso conjunto de situações. Resolvemos cada situação apresentada no livro, buscando identificar como o objeto vetor pode emergir em contextos geométricos variados. Por meio da nossa análise classificamos e tabelamos as habilidades envolvidas em cada situação resolvida, assim como o significado com que vetores aparecia, que foi pouco a pouco sendo refinado.

Em um banco de dados, agrupamos as situações em que vetores apareciam com significados iguais e revisamos os grupos formados. Atribuindo a eles o significado em foco e as habilidades geralmente exploradas.

Os critérios que utilizamos para analisar os exercícios e, assim, gerar as classes de situações, foram embasados em trabalhos já publicados na Teoria dos Campos Conceituais aplicadas a outros campos conceituais. Esses critérios foram com base nos elementos solicitados nos problemas, assim como nos elementos dados e no significado que o vetor assume na situação.

Optamos, também, neste trabalho, como veremos a seguir, apresentar a resolução de pelo menos uma situação de cada classe ou subclasse encontrada no livro analisado para enriquecermos nossas discussões para além dos enunciados.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Do livro selecionado foi realizada a leitura dos primeiros cinco capítulos (capítulo 1: Vetor, capítulo 2: Soma de vetores, capítulo 3: Produto de número real por vetor, capítulo 4: Soma de ponto com vetor, capítulo 5: Aplicações geométricas). No entanto, para a nossa discussão, escolhemos analisar os exercícios do capítulo 5 (Aplicações geométricas), pois nos interessa analisar a utilização de vetores em contextos que não se use vetores apenas para solucionar operações com vetores (adição, subtração, etc), mas sim aplicações em outros contextos geométricos.

As situações do livro são divididas em "exercícios resolvidos"e "exercícios"ao final da discussão de cada classe tabelamos as questões em que a classe aparece do seguinte modo: **R5-x** se refere ao exercício resolvido número x do capítulo 5, **5-x** se refere ao exercício número x do capítulo 5, enquanto **R5-xa** se refere ao item a) do exercício resolvido número x do capítulo 5, etc. A partir desses exercícios, iniciamos a discussão das classes e subclasses que encontramos no campo de vetores. Cabe salientar que os critérios que utilizamos para gerar as classes foram com base nos elementos dados no problema, nos elementos solicitados e no significado que o vetor assume.

6.1 Classe I - Lugar Geométrico Comum

A classe "Lugar Geométrico Comum" foi criada após observarmos nas situações do livro, a presença de demandas comuns: observar que dois objetos geométricos ocupam o mesmo espaço, isto é, têm, na verdade, a mesma localização. Aqui estão problemas em que precisamos determinar que três ou mais segmentos se encontram em um mesmo lugar.

A seguir, veremos como a aparição de vetores se dá nesse tipo de problema, elucidando de forma prática por meio de uma situação recorrente no livro. Replicamos abaixo o enunciado do item c) do exercício resolvido 5-5 (R5-5c) do livro Camargo, Boulos (2005, p. 29) e, ao fim, discutiremos o resultado.

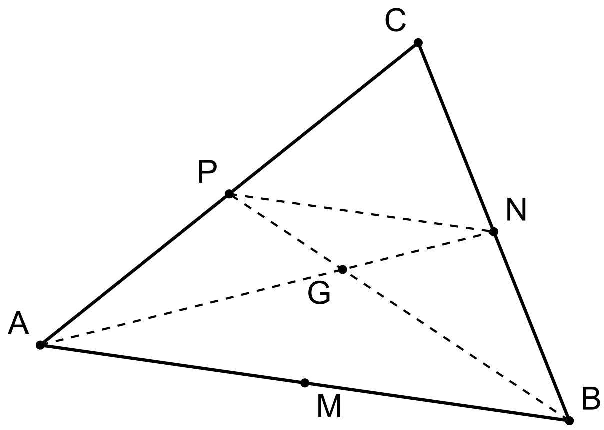
R5-5 Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC.

(c) Prove que as três medianas têm um único ponto comum, que divide (A, N), (B, P) e (C, M) na razão 2 (conhecido como *baricentro* do triângulo).

A seguir resolvemos esse item para que possamos fazer nossa análise.

c)

Figura 12 - Triângulo ABC e suas medianas



Fonte: Autor, 2023.

Seja G o ponto de encontro das medianas AN e BP. Do triângulo PGN, temos

$$PN = PG + GN \tag{1}$$

mas como $AG + GN = AN$ e como AG e AN são paralelos (fazem parte do mesmo segmento), podemos considerar que $AN = \lambda_1 AG$. Reciprocamente, como $PG+GB = PB$ e como PB e GB são paralelos, consideraremos que $PB = \lambda_2 GB$. Assim,

$$AG + GN = AN = \lambda_1 AG \Rightarrow GN = \lambda_1 AG - AG = (\lambda_1 - 1)AG, \tag{2}$$

$$PG + GB = PB = \lambda_2 GB \Rightarrow PG = \lambda_2 GB - GB = (\lambda_2 - 1)GB. \tag{3}$$

Substituindo 2 e 3 em 1, obtemos

$$PN = (\lambda_2 - 1)GB + (\lambda_1 - 1)AG.$$

Porém, como P e N são pontos médios do triângulo ABC, o segmento PN tem metade da medida do lado paralelo do triângulo, isto é, do segmento AB, portanto $PN = \frac{1}{2}AB$. Assim, segue que

$$\frac{AB}{2} = (\lambda_2 - 1)GB + (\lambda_1 - 1)AG \Rightarrow AB = (2\lambda_2 - 2)GB + (2\lambda_1 - 2)AG. \tag{4}$$

E do triângulo ABG, temos que

$$AB = AG + GB$$

Assim, a equação 4 fica

$$AG + GB = (2\lambda_1 - 2)AG + (2\lambda_2 - 2)GB$$

e comparando o coeficiente dos vetores AG e GB do lado esquerdo da equação com os mesmos vetores do lado direito, temos

$$1 = 2\lambda_1 - 2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$$

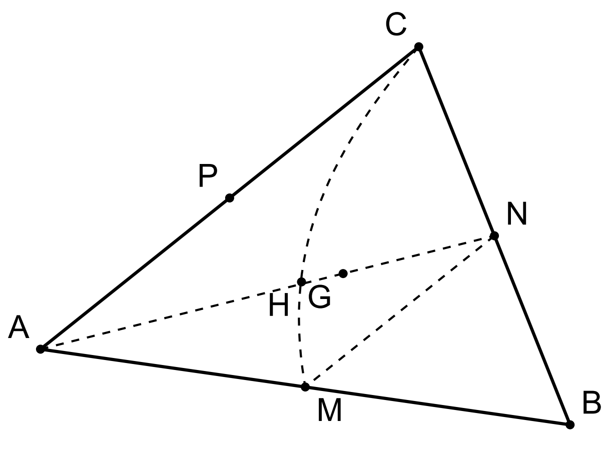
e

$$1 = 2\lambda_2 - 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Portanto $AN = \frac{3}{2}AG$ e $PB = \frac{3}{2}GB$.

Agora vamos supor, por absurdo, que o segmento CM seccione AN em $H \neq G$.

Figura 13 - Pontos de encontro possivelmente distintos para as medianas



Fonte: Autor, 2023.

Do triângulo HMN, temos

$$MN = MH + HN \tag{5}$$

mas como $AH + HN = AN$ e como HN e AN são paralelos (fazem parte do mesmo segmento), podemos considerar $AN = \lambda_3 AH$. Reciprocamente, como $MH + HC = MC$ e como HC e MC são paralelos, consideraremos que $MC = \lambda_4 HC$. Assim,

$$AH + HN = AN = \lambda_3 AH \Rightarrow HN = \lambda_3 AH - AH = (\lambda_3 - 1)AH, \tag{6}$$

$$MH + HC = MC = \lambda_4 HC \Rightarrow MH = \lambda_4 HC - HC = (\lambda_4 - 1)HC. \quad (7)$$

Substituindo 6 e 7 em 5, obtemos

$$MN = (\lambda_4 - 1)HC + (\lambda_3 - 1)AH,$$

porém, como M e N são pontos médios do triângulo ABC, o segmento MN tem metade da medida do lado paralelo do triângulo[1], isto é, do segmento AC, portanto $MN = \frac{1}{2}AC$. Assim, segue que

$$\frac{AC}{2} = (\lambda_4 - 1)HC + (\lambda_3 - 1)AH \Rightarrow AC = (2\lambda_4 - 2)HC + (2\lambda_3 - 2)AH. \quad (8)$$

E do triângulo AHC, temos

$$AC = AH + HC$$

Assim, a equação 8 fica

$$AH + HC = (2\lambda_3 - 2)AH + (2\lambda_4 - 2)HC.$$

e comparando o coeficiente dos vetores AH e HC do lado esquerdo da equação com os mesmos vetores do lado direito, temos

$$1 = 2\lambda_3 - 2 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{2}$$

e

$$1 = 2\lambda_4 - 2 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{3}{2}.$$

Portanto $AN = \frac{3}{2}AH$ e $MC = \frac{3}{2}HC$.

Como já vimos, $AN = \frac{3}{2}AG$ e $AN = \frac{3}{2}AH$ e subtraindo essa última equação pela primeira, obtemos

$$AN - AN = \frac{3}{2}AH - \frac{3}{2}AG \Rightarrow \frac{3}{2}(AH - AG) = 0 \Rightarrow AH - AG = 0 \Rightarrow AH = AG$$

assim,

$$H - A = G - A \Rightarrow H = G.$$

Portanto, $H \neq G$ é absurdo. Então as medianas AN, BP e CM irão se cruzar no mesmo ponto G.

Na resolução notamos que os vetores são utilizados para provar que os pontos G

[1] Teorema da base média de um triângulo

e H são o mesmo ponto, sendo comum às três medianas do triângulo. Nos tipos de problema desta classe, esse é o método que empregamos para solucionar a demanda, para isso utilizamos a representação algébrica de vetores onde destacamos a sua origem e sua extremidade (AB é o vetor com origem em A e extremidade em B), aparelhada da definição de soma de vetores ($AB + BC = AC$). Também utilizamos a definição de paralelismo de vetores e a propriedade 3 ($\alpha u + \beta v = \gamma u + \delta v$ então $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$).

Nos outros problemas desta classe, sempre precisamos determinar o ponto de encontro comum a mais de dois segmentos, as habilidades trabalhadas pelo estudante estão no percurso utilizado para que possa reconhecer a razão que divide cada segmento em dois. Encontrada esta razão, e sendo G o ponto de encontro de dois segmentos e H o ponto de encontro de outros dois segmento, precisa-se provar que o segmento que une H a G não existe.

Realizada a análise dos problemas dessa classe, tabelamos as habilidades relacionadas a vetores que percebemos serem necessárias do estudante para resolver os problemas que provém situações foi tabelada abaixo.

Quadro 1 - Classe 1: Lugar Geométrico Comum

Significados (subclasses)	• Identificar ponto em comum a mais de duas retas
Habilidades	• Determinar a razão que divide um segmento em dois a partir das propriedades de paralelismo de vetores; Identificar inexistência de segmento • Identificar que quatro segmentos se cortam no ponto médio constatando que vetores são, dois a dois, iguais entre si • Identificar coincidência de vetores a partir de igualdade de vetores • Identificar inexistência de segmento
Questões	R5-5c, 5-20, 5-21, 5-3c.

Fonte: Autor, 2023.

No quadro 1 elencamos as habilidades que percebemos serem mobilizadas pelo estudante, bem como as questões em que essas se manifestam.

6.2 Classe II - Dependência Linear

Continuando a análise das situações, discutiremos agora sobre a classe de Dependência Linear, na qual estão os tipos de problemas relacionados às bases no espaço vetorial e os vetores por elas gerados.

A partir da análise das situações dessa classe, notamos a presença do que distinguimos como duas subclasses nessa pesquisa , são estas, **Vetor gerado por uma base** e **Identificar vetores L.D.**. A seguir discutiremos os problemas típicos dessas duas subclasses.

6.2.1 Vetor gerado por uma base

Um exemplo muito típico de situação dessa subclasse é o de escrever um determinado vetor em função de outros dois ou três linearmente independentes (naturalmente, quando o problema acontece no contexto do espaço vetorial bidimensional, não há como ocorrer a escrita de um vetor em função de três outros linearmente independentes, sendo assim, essa quantidade de vetores depende exclusivamente da base onde o espaço vetorial é gerado). Para esta subclasse vamos analisar o Exercício Resolvido 5-5a de Camargo, Boulos (2005, p.29).

R5-5 Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC.

(a) Exprima $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

A seguir, a resolução da situação.

a) É óbvio que

$$BP = BC + CP$$

e, por outro lado,

$$BP = BA + AP$$

somando essas duas expressões obtemos

$$2BP = BC + BA + CP + AP \tag{9}$$

e como P é o ponto médio do lado AC, os segmentos AP e PC são iguais, ou seja

$$AP = PC \Rightarrow AP + CP = 0,$$

assim, a equação 9 é na verdade

$$2BP = BC + BA$$

ou, ainda,

$$2BP = BC + BC + CA = 2BC + CA = CA - 2CB$$

assim,

$$BP = \frac{CA}{2} - CB. \tag{10}$$

Para AN temos que

$$AN = AC + CN$$

por outro lado,

$$AN = AB + BN$$

somando essas últimas equações, temos

$$2AN = AB + AC + CN + BN \tag{11}$$

e como N é o ponto médio do lado BC, os segmentos CN e NB são iguais, ou seja

$$CN = NB \Rightarrow CN + BN = 0,$$

assim, a equação 11 é na verdade

$$2AN = AB + AC$$

ou, ainda,

$$2AN = AC + CB + AC = 2AC + CB = CB - 2CA$$

assim,

$$AN = \frac{CB}{2} - CA. \tag{12}$$

Para CM temos que

$$CM = CA + AM$$

por outro lado,

$$CM = CB + BM$$

somando essas últimas equações, temos

$$2CM = CA + CB + AM + BM \tag{13}$$

e como M é o ponto médio do lado AB, os segmentos AM e MB são iguais, ou seja

$$AM = MB \Rightarrow AM + BM,$$

assim, a equação 13 é na verdade

$$2CM = CA + CB$$

ou, ainda,

$$CM = \frac{CA + CB}{2}. \tag{14}$$

Notamos que a aparição de vetores no item **a** se dá em sua forma algébrica, na resolução não precisamos nem mesmo trabalhar com sistema de coordenadas. Aqui se faz uso contínuo da propriedade de soma de vetores onde $AB + BC = AC$, ou seja, a soma dos vetores, o com origem em A e extremidade em B com o vetor com origem em B e extremidade em C é igual ao vetor com origem em A e extremidade em C. Nos tipos de problema desta subclasse, a técnica inicial empregada, em sua essência, sempre se dá nesta expansão de um vetor como a soma de outros dois e após isso acrescentamos a situação específica do problema nas equações vetoriais que calculamos (a situação específica destacada no exercício R5-5a é a de que os pontos médios de cada segmento geram mais dois vetores iguais, assim acrescentamos essa informação nas equações para chegar ao resultado procurado).

6.2.2 Contração e Dilatação

Ainda na classe Dependência Linear, nem sempre lidaremos com situações em que temos que expressar um vetor como uma combinação linear de vetores de um espaço, em outros casos lidamos com situações em que precisamos identificar quando um vetor é múltiplo ou paralelo a outro, para elucidarmos esse fato veremos o que ocorre com o exercício resolvido 5-3 de Camargo, Boulos (2005, p.27).

R5-3 Seja r a razão em que o ponto P divide o segmento orientado não-nulo (A, B). Prove que $r \neq -1$ e que $\overrightarrow{AP} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{AB}$.

Resolvendo, temos

Caso $r = -1$, então

$$AP = rPB \Rightarrow AP = -PB \Rightarrow AP = BP,$$

mas isto é impossível pois a equação $AP + PB = AB$ seria $BP + PB = AB = 0$, mas o exercício nos informa que AB é não-nulo, portanto, $r = -1$ é impossível. Ainda da relação $AP = rPB$ temos

$$AP = rPB = r(PA + AB) = rPA + rAB \Rightarrow AP + rAP = rAB$$

logo,

$$AP = \frac{r}{1+r}AB.$$

Como queríamos demonstrar.

Aqui, como mencionamos, diferente da outra subclasse, o vetor não é gerado a partir de uma base, percebemos o vetor AP como uma contração em $\frac{r}{1+r}$ do vetor AB, ou seja um vetor é múltiplo do outro, neste caso apenas utilizamos a relação $AP = rPB$ e nos bastamos da expansão desses vetores como soma de outros para solucionarmos o problema.

Neste e em outros problemas dessa subclasse, o que se destaca é que temos que expressar o vetor como múltiplo de um outro, para isto trabalhamos e identificamos as propriedades de paralelismo de vetores e buscamos, através da álgebra, relacioná-los.

Abaixo tabelamos os resultados coletados analisando todas as situações presentes na análise que se encaixassem nesta classe, bem como as habilidades mobilizadas por essas.

Quadro 2 - Classe 2: Dependência linear

Significados (sub-classes)	• Vetor gerado por uma base • Contração e dilatação
Habilidades	• Identificar um vetor como soma de dois outros, dados segmentos. • Identificar um vetor como soma de três, dados segmentos. • Modelar uma figura fechada como soma de vetores. • Identificar quando dois vetores são L.D. (ou paralelos) • Representar um vetor em função de outro paralelo a esse.
Questões	R5-5a, R5-4, 5-1, 5-4b, 5-5, 5-11a, 5-12, 5-13a, 5-15, R5.7, 5-16a, 5-18b, 5-19b, 5-21a, 5-21b, 5-22, 5-9b, 5-2, R5-3, 5-4, 5-16.

Fonte: Autor, 2023.

No quadro 2 elencamos as habilidades que percebemos serem mobilizadas pelo estudante, bem como as questões em que essas se manifestam.

6.3 Classe III - Posição relativa de retas

A necessidade da criação da terceira Classe se dá quando observamos problemas em que a utilização do objeto vetor surge para interpretar a posição relativa entre retas, Nesta classe dividimos os problemas nas subclasses **identificar retas paralelas** e **Identificar retas concorrentes**, veremos a seguir o que ocorre em cada um desses casos.

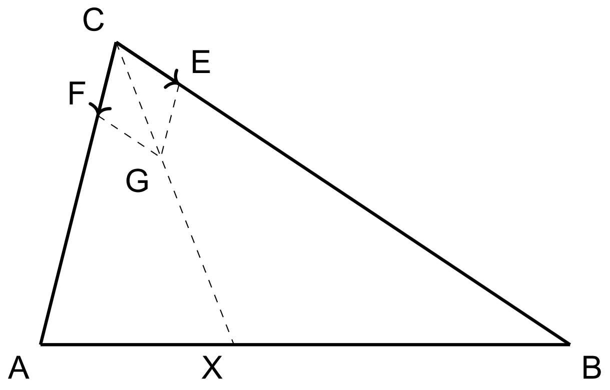
6.3.1 Identificar retas paralelas

Para esta subclasse discutiremos e analisaremos o exercício 5-18 de Camargo, Boulos (2005, p.35).

5-18 Dado o triângulo ABC, seja X a interseção do lado AB com a bissetriz do ângulo interno de vértice C e sejam $a = |CB|$ e $b = |CA|$

(a) Explique geometricamente por que $\overrightarrow{CX}$ é paralelo a $\overrightarrow{CA}/b + \overrightarrow{CB}/a$.

Figura 14 - Bissetriz interna do triângulo ABC



Fonte: Autor, 2023.

Sendo $CE = \dfrac{CB}{a}$ e $CF = \dfrac{CA}{b}$, formamos o quadrilátero $CFGE$ com $EG = CF$ e $FG = CE$ de lados medindo uma unidade, pois os vetores CE e CF são unitários, portanto $CFGE$ é um losango, com diagonal $CG = \dfrac{CA}{b} + \dfrac{CB}{a}$ sendo paralela ao vetor CX, que gera a reta bissetriz ao ângulo C, pois a diagonal de um losango também é bissetriz do ângulo que é divido.

Nesta classe de situações, provamos que as retas coincidem (ou são paralelas) provando que os vetores são paralelos, ou seja, um é múltiplo do outro. Aqui as habilidades mobilizadas são as que envolvem paralelismo de vetores.

6.3.2 Identificar retas concorrentes

A aparição desta subclasse se dá nas situações em que precisamos provar que não há como dois vetores serem múltiplos um do outro, portanto, as retas do plano geradas por eles também não serão paralelas uma a outra. Veremos a seguir o que ocorre no item **b** do **exercício resolvido 5-5** que utilizaremos de exemplo para os problemas desta subclasse.

R5-5 Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC.

(b) Prove que as retas-suportes de duas medianas quaisquer do triângulo são concorrentes.

b) Para provar que as retas-suporte são concorrentes basta provar que não há como elas serem paralelas. Suponhamos, então, que as retas-suportes dos segmentos AN e CM são paralelas, isso implica afirmar que os vetores AN e CM também são paralelos, desse modo $AN = \lambda CM$, e pelas equações 12 e 14, temos

$$-CA + \frac{CB}{2} = \frac{\lambda CA + \lambda CB}{2}$$

e comparando os coeficientes dos vetores CA e CB do lado esquerdo com os mesmos vetores do lado direito, vemos que

$$\frac{\lambda}{2} = -1 \Rightarrow \lambda = -2$$

e

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 1.$$

O que é impossível, portanto, não há como os vetores AN e CM serem paralelos, logo as retas-suporte são concorrentes. Podemos proceder de modo análogo para demonstrar que as retas-suporte de AN e BP são concorrentes, assim como as retas-suporte de BP e CM.

No item **b** utilizamos algumas propriedades de vetores, entre elas, a definição de paralelismo de vetores para provar que eles são concorrentes e, também, o fato de que se $\alpha u + \beta v = \gamma u + \delta v$ então $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$. Aqui o argumento é feito por contradição, supomos que os vetores são paralelos ($AN = \lambda CM$) e provamos que isso é impossível, chegando à conclusão que a negação da hipótese absurda é a verdade.

Nos problemas desta subclasse, utilizamos as propriedades de paralelismo para provar que elas não são válidas, e tiramos a nossa conclusão a partir deste fato, uma maneira diferenciada de se trabalhar com essas propriedades que até então, era utilizada para relacionar vetores paralelos.

A seguir sintetizamos as informações coletadas na análise dos exercícios dessa classe.

Quadro 3 - Classe 3: Posição relativa de retas

Significados (sub-classes)	• Identificar retas concorrentes • Identificar retas paralelas
Habilidades	• Identificar vetores paralelos a partir da ideia de vetores que são linearmente dependentes • Identificar um vetor como soma de dois outros L.D. • Identificar que dois vetores são paralelos • Identificar retas concorrentes a partir da ideia de vetores que são L.I. • Identificar um segmento dividido em certa razão
Questões	R5-5b, 5-13b, 5-14b, R5-7a,5-18a, 5-19a, 5-3b, R5-2, 5-3a, 5-6, 5-7, 5-8, 5-14a, 5-19c.

Fonte: Autor, 2023.

No Quadro 3 elencamos as habilidades que percebemos serem mobilizadas pelo estudante, bem como as questões em que essas se manifestam.

6.4 Classe IV - Colinearidade

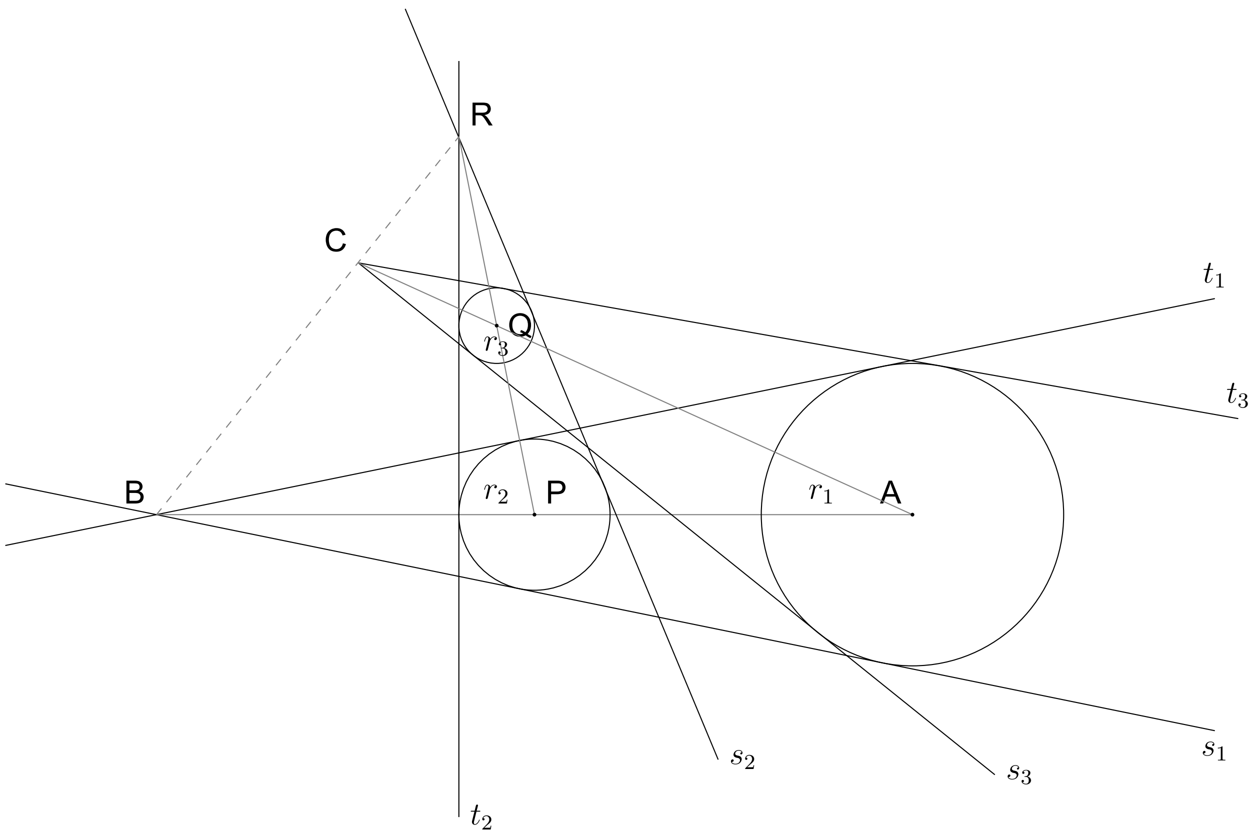
Outro tipo de problema geométrico muito recorrente é o de provar que três ou mais pontos pertencem à mesma reta, isto é, são colineares. No contexto de vetores, problemas desse tipo requerem do estudante a habilidade de identificar quando um vetor gerado por quaisquer dois pontos, sempre vai cruzar os restantes, mediante uma dilatação ou não.

Para discorrer sobre os tipos de problema dessa classe vamos utilizar os itens **a** e **b** do exercício **5-24** do livro analisado

5-24 (a) Dado o triângulo ABC, sejam P, Q e R pontos tais que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{QC}$, $\alpha\overrightarrow{PR} = \beta\overrightarrow{QR}$. Prove que, se $\alpha \neq 1$, então B, C e R são colineares.

(b) Sejam s_1 e t_1 duas retas concorrentes em B, tangentes à circunferência de centro A e raio r_1. Com centro em um ponto P da semi-reta de origem B que contém A, traça-se a circunferência de raio r_2 (menor que r_1), tangente às retas s_1 e t_1. Sejam s_2 e t_2 duas retas tangentes à segunda circunferência, concorrentes em R. Com centro em um ponto Q da semi-reta de origem R que contém P, traça-se a circunferência de raio r_3 (menor que r_2), tangente às retas s_2 e t_2. Sejam s_3 e t_3 as retas tangentes comuns à primeira e à terceira circunferências que tenham em comum um ponto C da reta AQ, exterior ao segmento AQ. Prove que B, C e R são colineares.

Figura 15 - Esquema geométrico do exercício 5-24b.



Fonte: Autor, 2023.

a) Subtraindo a igualdade $AC = \beta QC$ por $AB = \alpha PB$ temos

$$AC + BA = \beta QC - \alpha PB \Rightarrow BC = \beta QC - \alpha(PR + RB) = \beta QC - \alpha PR - \alpha RB$$

e como $\alpha PR = \beta QR$, a equação acima fica

$$BC = \beta QC - \beta QR + \alpha BR = \beta(RQ + QC) + \alpha(BC + CR) = \beta RC + \alpha BC + \alpha CR$$

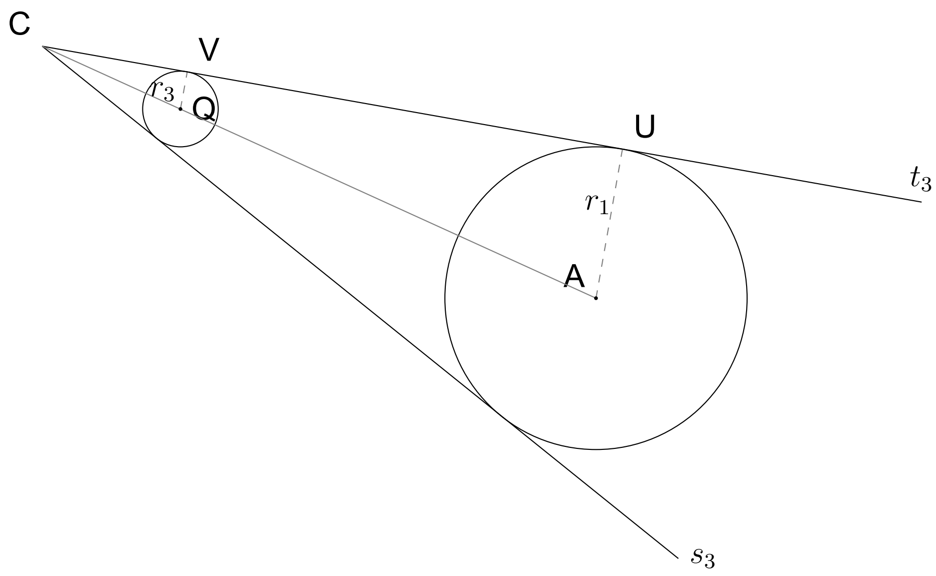
ou, ainda,

$$(1-\alpha)BC = \beta RC - \alpha RC \Rightarrow BC = \frac{(\beta-\alpha)}{1-\alpha}RC.$$

Essa última igualdade nos informa que BC e RC são paralelos quando $\alpha \neq -1$, portanto os pontos B, C e R são colineares para $\alpha \neq -1$.

b) Como AB e PB são paralelos, vamos considerar que $AB = \alpha PB$ e como AC e QC também são paralelos vamos considerar que $AC = \beta QC$, dessa forma só precisamos provar que $\alpha PR = \beta QR$ e usar o resultado da letra a) para provar que B, C e R são colineares. Primeiro seja U o ponto de tangência da circunferência de centro A com a reta t_3 e V o ponto de tangência da circunferência de centro Q com a mesma reta.

Figura 16 - Triângulos CQV e AUC



Fonte: Autor, 2023.

Pelas propriedades das circunferências e retas tangentes, a reta t_3 forma um ângulo reto com os raios r_1 e r_3 das circunferências nos pontos de tangência U e V. Sendo ACU um ângulo qualquer θ_1, então, dos triângulos retângulos AUC e QVC, temos que

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{r_1}{|AC|}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{r_3}{|CQ|},$$

desse modo,

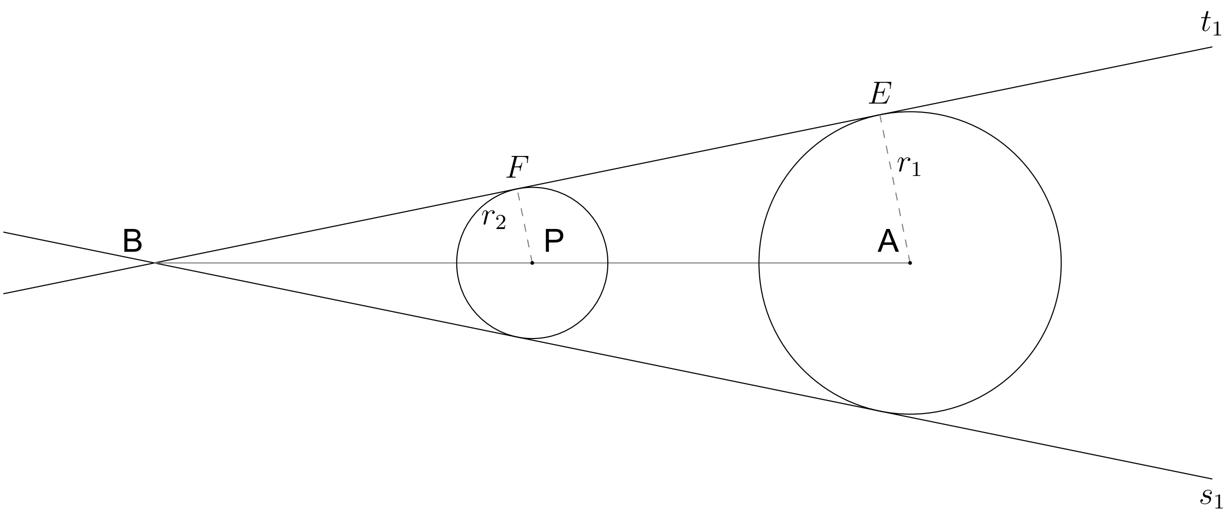
$$\frac{r_1}{|AC|} = \frac{r_3}{|CQ|},$$

mas como $AC = \beta QC$, temos

$$\frac{r_1}{|\beta QC|} = \frac{r_3}{|CQ|} \Rightarrow r_1 = \beta r_3. \tag{15}$$

Agora, seja E o ponto de tangência da circunferência de centro A com a reta t_1 e F o ponto de tangência da circunferência de centro P com a mesma reta.

Figura 17 - Triângulos BPF e BAE



Fonte: Autor, 2023.

Novamente, pelas propriedades das circunferências e retas tangentes, a reta t_1 forma um ângulo reto com os raios r_1 e r_2 das circunferências nos pontos de tangência E e F. Sendo ABE um ângulo qualquer θ_2, então, dos triângulos retângulos AEB e PFB, temos que

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{r_1}{|AB|}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{r_2}{|PB|}$$

desse modo,

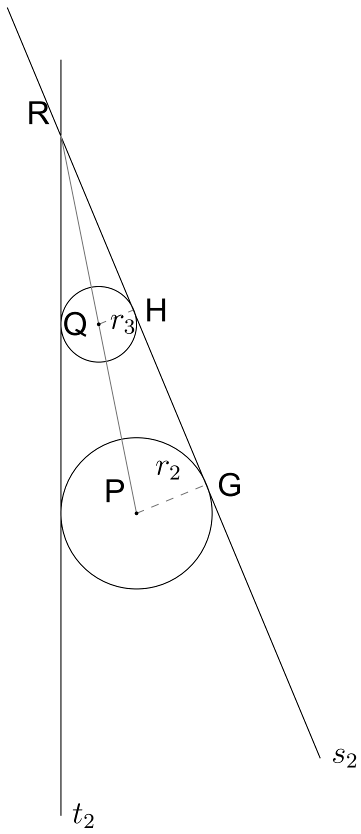
$$\frac{r_1}{|AB|} = \frac{r_2}{|PB|}$$

mas como $AB = \alpha PB$, temos

$$\frac{r_1}{|\alpha PB|} = \frac{r_2}{|PB|} \Rightarrow r_1 = \alpha r_2. \tag{16}$$

Por fim, como PR e QR estão alinhados, vamos considerar que $PR = \lambda QR$. Agora, seja G o ponto de tangência da circunferência de centro P com a reta s_2 e H o ponto de tangência da circunferência de centro Q com a mesma reta.

Figura 18 - Triângulos RQH e RPG



Fonte: Autor, 2023.

Sendo θ_3 o ângulo PRG dos triângulos retângulos PGR e QHR, teremos que

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{r_2}{|RP|}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{r_3}{|RQ|},$$

desse modo,

$$\frac{r_2}{|RP|} = \frac{r_3}{|RQ|}$$

mas como $PR = \lambda QR$, temos

$$\frac{r_2}{|\lambda RQ|} = \frac{r_3}{|RQ|} \Rightarrow r_2 = \lambda r_3. \tag{17}$$

Das equações 15, 16 e 17, temos que

$$\begin{cases} r_1 &= \beta r_3 \\ r_1 &= \alpha r_2 \\ r_2 &= \lambda r_3 \end{cases}$$

substituindo a primeira equação na segunda, temos

$$\beta r_3 = \alpha r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{\beta}{\alpha} r_3$$

e substituindo esse valor de r_2 na terceira equação do sistema, temos

$$\frac{\beta}{\alpha} r_3 = \lambda r_3 \Rightarrow \lambda = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Portanto, a equação $PR = \lambda QR$ fica $PR = \frac{\beta}{\alpha} QR \Rightarrow \alpha PR = \beta QR$ e $\alpha \neq 1$, pois $|AB| > |PB|$. Daí, pelo item **a** provamos que B, C e R são colineares, como queríamos demonstrar.

Aqui utilizamos a definição de paralelismo de vetores nos itens **a** e **b**. No item **a** resolvemos o problema apenas com pura manipulação algébrica com vetores, já no item **b** saímos do campo de vetores para o campo da geometria euclidiana e trigonometria, aplicando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos determinados pela situação, notando aqui a presença de conceitos de outros campos da matemática para solucionar essa situação, como defende a Teoria dos Campos Conceituais pois como afirma Gitirana et al. (2008, p. 5) “quando se defronta com uma nova situação, o estudante usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência de situações anteriores e tenta adaptá-lo à nova situação”.

O método de resolução utilizado no item **a** consiste em provar que os vetores BC e RC são múltiplos um do outro, ou seja, que é possível construir um vetor que cruze B, C e R simultaneamente, portanto esses pontos são colineares. Já no item **b** basta provar que os pontos eram colineares, utilizando técnicas que nos levassem ao resultado obtido no item **a**, pois a prova da colinearidade já estava realizada.

Os tipos de problema dessa classe variam muito e podem até se distanciar de problemas que realmente envolvam vetores, sendo a aparição de vetores uma ferramenta para gerar equações e, a partir dessas equações, posteriormente utilizar outras ferramentas de outros campos para se chegar ao resultado.

A seguir estão tabeladas as habilidades relacionadas à vetores identificadas como necessárias para que o estudante possa lidar com as situações presentes neste tipo de situação.

Quadro 4 - Classe 4: Colinearidade

Significados (sub-classes)	• Colinearidade
Habilidades	• Identificar a razão entre dois segmentos colineares modelando como dois vetores que são linearmente dependentes. • Identificar um vetor como soma de dois outros, dados segmentos • Identificar quando dois vetores são múltiplos um do outro • Identificar vetor que cruze mais de dois pontos
Questões	5-4a, 5-16b, 5-24a, 5-24b.

Fonte: Autor, 2023.

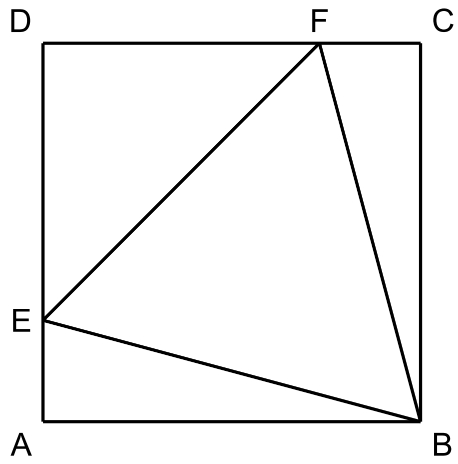
No Quadro 4 elencamos as habilidades que percebemos serem mobilizadas quando tentamos resolver a questão, bem como as questões em que essas se manifestam.

6.5 Classe V - Partição de um segmento

Nessa classe estamos analisando os tipos de problema em que precisamos identificar a razão em que um segmento é divido. Como já vimos, um segmento AB dividido em certa razão α por um ponto X dá origem aos vetores AX e XB tais que $AX = \alpha XB$. A seguir utilizaremos o exemplo da situação **5-23** e veremos como os problemas dessa categoria podem ser complexos, podendo até exigir do estudante um conhecimento para além de vetores para ser solucionado.

5-23 Sejam A, B, C e D vértices de um quadrado, E um ponto de AD e F um ponto de CD, tais que o triângulo BEF seja equilátero. Calcule a razão em que E divide (A, D) e a razão em que F divide (D, C).

Figura 19 - Triângulo contido em quadrado



Fonte: Autor, 2023.

Primeiro, chamaremos de α a razão na qual E divide AD e β na qual F divide DC, desse modo

$$AE = \alpha ED,$$

$$DF = \beta FC$$

Dos triângulos retângulos ABE e BCF, temos que

$$|EB|^2 = |EA|^2 + |AB|^2\text{[2]} \tag{18}$$

$$|FB|^2 = |FC|^2 + |CB|^2$$

e subtraindo a primeira equação pela segunda, temos

$$|EB|^2 - |FB|^2 = |EA|^2 + |AB|^2 - |FC|^2 - |CB|^2,$$

mas $|EB|^2 - |FB|^2 = 0$, pois $|EB| = |FB|$ porque o triângulo EFB é equilátero, também $|AB|^2 - |CB|^2 = 0$ porque o quadrilátero $ABCD$ é equilátero. Desse modo, a equação acima se torna

$$0 = |EA|^2 - |FC|^2 \Rightarrow |EA|^2 = |FC|^2 \Rightarrow |EA| = |FC|. \tag{19}$$

[2] Teorema de pitágoras

E como

$$|DE| + |EA| = |DF| + |FC| \Rightarrow |DE| = |DF|$$

No entanto, como $AE = \alpha ED$ e $FC = \dfrac{1}{\beta}DF$, a equação 19 fica

$$|\alpha ED| = \left|\frac{1}{\beta}DF\right| \Rightarrow \alpha|ED| = \frac{1}{\beta}|DF|$$

e como $|DF| = |DE| \neq 0$ segue que

$$\alpha = \frac{1}{\beta}. \tag{20}$$

Por outro lado, como $AE + ED = AD$, vem que

$$AE + \frac{1}{\alpha}AE = AD \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)AE = AD \Rightarrow AE = \frac{\alpha}{1+\alpha}AD, \tag{21}$$

Dessa relação e da equação 18, obtemos

$$|EB|^2 = |EA|^2 + |AB|^2 = \left|\frac{\alpha}{1+\alpha}AD\right|^2 + |AB|^2 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}|AD|^2 + |AB|^2$$

e como $|AD| = |AB|$,

$$|EB|^2 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}|AB|^2 + |AB|^2 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}|AB|^2 + \frac{(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}|AB|^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\alpha + 1}{(1+\alpha)^2}|AB|^2,$$

ou seja,

$$|EB|^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\alpha + 1}{(1+\alpha)^2}|AB|^2. \tag{22}$$

Novamente, da relação $AE + ED = AD$, teremos ainda

$$\alpha ED + ED = AD \Rightarrow (\alpha + 1)ED = AD \Rightarrow ED = \frac{1}{1+\alpha}AD,$$

e, lembrando que $DF = \beta FC$ e da relação $DF + FC = DC$, temos que

$$DF + \frac{1}{\beta}DF = DC \Rightarrow (1 + \frac{1}{\beta})DF = DC \Rightarrow FC = \frac{1}{\beta+1}DC.$$

Agora, do triângulo retângulo EFD, vem que

$$|EF|^2 = |DF|^2 + |ED|^2 = \left|\frac{\beta}{1+\beta}DC\right|^2 + \left|\frac{1}{\alpha+1}AD\right|^2 = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}|DC|^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2}|AD|^2$$

e como $|AD| = |DC| = |AB|$,

$$|EF|^2 = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}|AB|^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2}|AB|^2. \tag{23}$$

E como o triângulo BFE é equilátero, $|EF| = |EB|$, portanto as equações 22 e 23 são iguais, assim

$$\frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{(1+\alpha)^2}|AB|^2 = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}|AB|^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2}|AB|^2$$

e como $|AB|$ é diferente de 0,

$$\frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{(1+\alpha)^2} = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

e multiplicando por $(1+\alpha)^2$ em ambos os membros da equação, temos

$$2\alpha^2+2\alpha+\cancel{1} = \frac{\beta^2+2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta^2}{(1+\beta)^2} + \cancel{1} \Rightarrow 2\alpha^2+2\alpha = \frac{\beta^2+2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta^2}{(1+\beta)^2}$$

e multiplicando por $(1+\beta)^2$ em ambos os membros da equação, temos

$$(2\alpha^2+2\alpha)(1+2\beta+\beta^2) = \beta^2+2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta^2,$$

ou melhor,

$$2\alpha^2+4\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta^2+2\alpha+4\alpha\beta+\cancel{2\alpha\beta^2} = \beta^2+\cancel{2\alpha\beta^2}+\alpha^2\beta^2$$

e como $\alpha = \frac{1}{\beta}$, (equação 20), segue que

$$2\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\beta + 2\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\beta^2 + 2\left(\frac{1}{\beta}\right) + 4\left(\frac{1}{\beta}\right)\beta = \beta^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\beta^2$$

e simplificando os termos, obtemos

$$\frac{2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} + 2 + \frac{2}{\beta} + 4 = \beta^2 + 1 \Rightarrow \frac{2}{\beta^2} + \frac{6}{\beta} + 5 = \beta^2$$

multiplicando por β^2 os dois membros,

$$2+6\beta+5\beta^2 = \beta^4 \Rightarrow \beta^4 - 5\beta^2 - 6\beta - 2 = 0.$$

Chegamos, assim, a uma equação polinomial de quarto grau em β. Pesquisando as raízes racionais dessa equação, as possibilidades são $\{-1, -2, 1, 2\}$, onde para $\beta =$

-1, obtemos

$$(-1)^4 - 5(-1)^2 - 6(-1) - 2 = 1 - 5 + 6 - 2 = -4 + 4 = 0.$$

Assim, $\beta = -1$ é raiz racional da equação, mas raízes não-positivas não nos interessam, pois, da definição de β, $DF = \beta FC$ e os vetores DF e FC possuem a mesma direção, sendo assim, $\beta > 0$. Continuemos, então, pesquisando as raízes da equação até encontrarmos um valor possível para β. Prosseguindo deste modo, o polinômio $\beta^4 - 5\beta^2 - 6\beta - 2 = 0$ é divisível por $\beta - (-1)$. Efetuando a divisão de polinômios, teremos

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\beta^4 & & -5\beta^2 & -6\beta & -2 & \beta + 1 \\ \cline{6-6}
-\beta^4 & -\beta^3 & & & & \beta^3 - \beta^2 - 4\beta - 2 \\ \cline{1-2}
 & -\beta^3 & -5\beta^2 & & & \\
 & \beta^3 & +\beta^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -4\beta^2 & -6\beta & & \\
 & & 4\beta^2 & +4\beta & & \\ \cline{3-4}
 & & & -2\beta & -2 & \\
 & & & 2\beta & +2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}.$$

Agora, pesquisando as raízes racionais do polinômio $\beta^3 - \beta^2 - 4\beta - 2$, as possibilidades novamente estão no conjunto $\{-1, -2, 1, 2\}$, onde para $\beta = -1$, obtemos

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) - 2 = -1 - 1 + 4 - 2 = -2 + 2 = 0.$$

Assim, $\beta = -1$ é raiz racional de multiplicidade dois na equação e, como já comentamos, raízes não-positivas não cabem ao problema, desse modo, continuemos nossa pesquisa dividindo o polinômio $\beta^3 - \beta^2 - 4\beta - 2$ por $\beta - (-1)$,

$$\begin{array}{rrrr|l}
\beta^3 & -\beta^2 & -4\beta & -2 & \beta + 1 \\ \cline{5-5}
-\beta^3 & -\beta^2 & & & \beta^2 - 2\beta - 2 \\ \cline{1-2}
& -2\beta^2 & -4\beta & & \\
& 2\beta^2 & +2\beta & & \\ \cline{2-3}
& & -2\beta & -2 & \\
& & 2\beta & +2 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}.$$

Munidos de um polinômio de segundo grau em β, calculemos suas raízes por meio da fórmula de Bháskara. Assim,

$$\beta = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Mas como $1 < 3 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{3} \Rightarrow 1 - \sqrt{3} < 0$, essa raiz não nos interessa, restando $\beta = 1 + \sqrt{3}$. Por fim, pela equação 20, obtemos

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Portanto E divide AD na razão $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$ e F divide DC na razão $1 + \sqrt{3}$.

Especificamente nessa situação não usamos muitas propriedades de vetores como em outras situações, aqui, nos exemplos dessa classe, as técnicas e opções podem ser as mais variadas para encontrarmos a razão que divide o segmento e solucionarmos a equação $AE = \alpha ED$.

Essa classe de situações, embora não seja solicitada por muitas questões, pode aparecer indiretamente, por exemplo, quando encontramos a razão em que um segmento é dividido para depois provar que três segmentos vão se encontrar no mesmo local, como vimos na classe 1: lugar geométrico comum. Esta, então, pode ser considerada uma classe de situações intermediárias para se chegar a outras conclusões mais sofisticadas. Mas optamos por escrever no quadro, apenas as questões em que a razão do segmento é solicitada explicitamente, seguindo nossos critérios de análise.

No que se refere as habilidades relacionadas a vetores necessárias a serem mobilizadas para o estudante resolver os problemas desse tipo de situação, desenvolvemos o quadro abaixo onde sintetizamos os resultados obtidos por meio de nossa análise.

Quadro 5 - Classe 5: Partição de um segmento

Significados (sub-classes)	• Identificar a razão que um segmento é dividido
Habilidades	• Identificar a razão que divide um segmento • Distinguir a direção de vetores • Identificar quando dois vetores são múltiplos um do outro • Identificar a razão entre dois segmentos colineares
Questões	R5-7,c 5-17, 5-18c, 5-21d, R5-1, 5-23.

Fonte: Autor, 2023.

No quadro 5 elencamos as habilidades que percebemos serem mobilizadas pelo estudante, bem como as questões em que essas se manifestam.

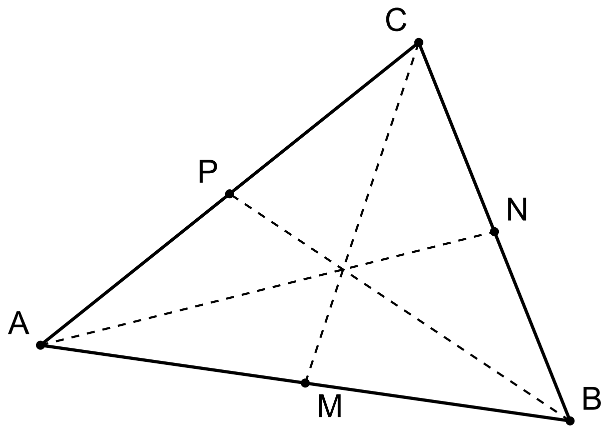
6.6 Classe VI - Formar Figura Fechada

Por fim, chegamos a um outro tipo de situação específica, mas que ocorreu em mais quatro exercícios dos que foram analisados. Nesses, usamos linguagem vetorial para identificar existência de triângulos, figuras fechadas, onde para provar que os vetores u, v e w podem gerar um triângulo, temos que provar que $u + v + w = 0$.

R5-6 Dado um triângulo ABC qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

Sendo AN, BP e CM as medianas do triângulo, precisamos mostrar que é possível construir um triângulo cujos lados possuem mesmo comprimento e direção que os vetores AN, BP, CM

Figura 20 - Triângulo ABC e suas medianas

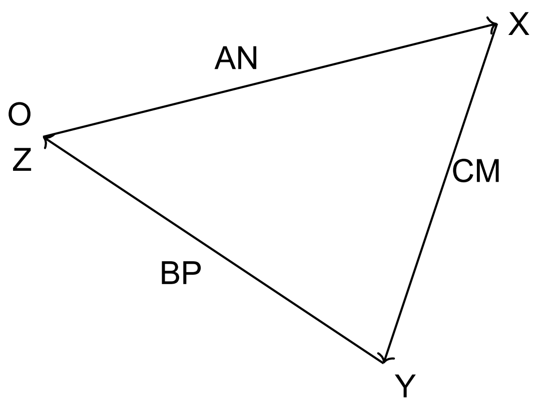


Fonte: Autor, 2023.

Como sabemos, pela proposição 1, dado um vetor e um ponto do plano, existe um único vetor que será igual ao vetor dado, portanto faremos $AN = OX$, $XY = CM$ e $YZ = BP$ e o que temos que fazer é apenas provar que os pontos O e Z coincidem, ou seja, $O = Z$. Ou, ainda, provar que

$$AN + CM + BP = 0$$

Figura 21 - Representação geométrica da soma dos vetores das medianas do triângulo



Fonte: Autor, 2023.

Somando os vetores AN, CM e PB e utilizando as equações 10, 12 e 14, chegamos com facilidade ao resultado

$$AN + CM + PB = \frac{CB}{2} - CA + \frac{CA}{2} - CB + \frac{CA + CB}{2} = 0$$

assim confirmamos que $Z = O$ pois o triângulo que é a representação geométrica da soma dos vetores AN, BP e CM é uma figura fechada.

Nessa última classe, as situações demandam o reconhecimento, por parte do estudante, de quando e porquê uma soma de vetores se anula, geometricamente podemos visualizar essa soma de vetores como a formação de um polígono.

Abaixo está o quadro onde tabelamos as habilidades mobilizadas pelas situações da classe.

Quadro 6 - Classe 6: Formar figura fechada

Significados (subclasses)	• Formar figura fechada
Habilidades	• Modelar uma figura fechada como soma de vetores • Identificar um vetor como uma combinação linear de outros
Questões	R5.6, 5-10, 5-11b, 5-9a..

Fonte: Autor, 2023.

No Quadro 6 elencamos as habilidades que percebemos serem mobilizadas pelo estudante, bem como as questões em que essas se manifestam.

6.7 Resumo da Análise

Através da nossa análise pudemos encontrar seis classes de situações específicas no livro-texto analisado, onde duas dessas seis classes foram divididas em outras duas subclasses. A representação de vetores que prevalece nas situações é sempre a algébrica (simbólica), sem fazer necessário o uso de sistema de coordenadas, e a representação geométrica pode ser utilizada como importante suporte visual para facilitar as abstrações do estudante.

Por fim, a fim de sintetizar os resultados, tabelamos as classes, os exercícios e a página em que cada um desses aparece no livro.

Quadro 7 - Situações analisadas

Classe	Subclasse	Exercícios	Página
I - Lugar Geométrico Comum	....	5-3c	28
		R5-5c	29
		5-20, 5-21	35
II- Dependência Linear	Vetor gerado por uma base	R5-3, R5-4	27
		R5-1, 5-2, 5-4b, 5-5	28
		R5-5a	29
		5-9b, 5-11a, 5-12, 5-13a	32
	Contração/Dilatação	5-15, R5-7	33
		5-16a	34
		5-18b, 5-19b, 5-21a, 5-21b, 5-22	35
III - Posição relativas de retas	Retas Paralelas	R5-2	27
		5-3a, 5-5b	28
		R5-5b, 5-6,5-7, 5-8	29
	Retas concorrentes	5-13b, 5-14a, 5-14b, R5-7a	33
		5-18a, 5-19a, 5-19c	35
IV - Colinearidade	....	5-4a	28
		5-16b	34
		5-24a, 5-24b	36
V - Partição de um segmento	....	R5-1	26
		R5-7c	33
		5-17	34
		5-18c, 5-21d, 5-23	35
VI - Formar figura fechada	....	R5-6	31
		5-9a 5-10, 5-11b	32

Fonte: Autor, 2023.

Seguimos agora para as considerações finais de nossa pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de nosso principal aporte teórico, a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, partindo do princípio que não se pode aprender um conceito só por meio de uma classe de situação, mas sim por um conjunto de distintas situações e, ainda, considerando que não se aprende acerca de uma situação por meio de um só conceito, em nossa pesquisa exploramos as situações presentes em um livro-texto de geometria analítica referente ao campo conceitual de vetores, pois o campo de vetores se faz muito presente em muitas disciplinas vistas nos cursos de graduação em matemática, sendo necessário o seu domínio para uma formação plena do futuro profissional. No trabalho levamos em conta a aplicação dos vetores a contextos geométricos básicos.

Através de nossa metodologia de análise das situações presentes no livro-texto, pudemos agrupar em classes e identificar as habilidades demandadas nas situações, a partir da resolução de cada situação apresentada no capítulo 5 que recortamos para a nossa pesquisa.

Com nossa pesquisa buscamos atingir o seguinte objetivo: classificar as situações utilizadas no estudo de vetores no campo da geometria analítica. Objetivo construído no intuito de dar suporte ao campo conceitual de vetores.

No total pudemos identificar seis classes distintas, as quais identificamos como: Lugar Geométrico Comum, onde os problemas são caracterizados pela utilização de vetores para achar pontos no espaço que são comuns a mais de duas retas; Dependência Linear, no qual os problemas são separados em duas subclasses, Vetor Gerado Por Uma Base e Contração e Dilatação, sobretudo, as situações dessa classe são marcadas pela característica de se escrever um vetor em função de outro(s); Posição Relativa Entre Duas Retas, classe nomeada de forma intuitiva onde a utilização dos vetores era para identificar paralelismo e concorrência de retas; Colinearidade, cujos exercícios se tratam em determinar um vetor que passe ao mesmo tempo por mais de dois pontos; Partição de um Segmento, onde temos que identificar o valor de um certo α nas equações vetoriais do tipo $AX = \alpha XB$; Formar Figura Fechada, onde utilizamos a propriedade de anulamento da soma de vetores para identificar um polígono.

Ao final tabelamos essas classes em quadros bem como as habilidades por elas mobilizadas, como forma de síntese.

REFERÊNCIAS

BITTAR, M.**A teoria dos campos conceituais e o ensino de vetores no ensino secundário francês**. Anais da, v. 15, 2002.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

FONTANA, Roseli A. C.; CRUZ, Maria Nazaré da. **Psicologia e trabalho pedagógico**. São Paulo: Atual, 1997.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GITIRANA, Verônica; NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia M. M.; MAGINA, Sandra. **Repensando Adição e Subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. 3. ed. São Paulo: PROEM, 2008.

GÓMEZ, Jorge J. Delgado; FRENSEL, Kátia Resenvald; SANTO, Nedir do Espírito. **Geometria Analítica I**. 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

GONÇALVES, H. A. **Educação matemática e cálculo mental:** Uma análise de invariantes operatórios a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Gerárd Vergnaud. 2008. Tese (Doutorado em educação) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise Vol. 1**. 15.ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2019.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 7, n.1, p. 7-29, 2002.

SANTANA, W. M. G. de. **O uso de recurso didáticos no ensino do conceito de área:** uma análise de livros didáticos para as séries finais do Ensino Fundamental. 2006. Dissertação (Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SANTOS, D. V. dos. **Situações de Função Exponencial:** um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática-Licenciatura) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2022.

VERGNAUD, G. Theory of Conceptual Field. **Human Development**. v. 52, p. 83-94, 2009.

WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria analítica**. McGraw-Hill Ltda., 1987.