



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIAS E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DANILO MAGALHÃES DE SOUZA CAVALCANTE

MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS NA MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS POROMECÂNICOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

Recife

2023



CARACTERIZAÇÃO E SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS, ENERGIAS RENOVÁVEIS
E BIOTECNOLOGIA AMBIENTAL

Apoio



Gestão



DANILO MAGALHÃES DE SOUZA CAVALCANTE

**MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS NA MODELAGEM E SIMULAÇÃO
DE PROBLEMAS POROMECÂNICOS EM RESERVATÓRIOS DE
PETRÓLEO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em engenharia mecânica.

Orientador: Paulo Roberto Maciel Lyra

Recife
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Cavalcante, Danilo Magalhães de Souza.

Método dos volumes finitos na modelagem e simulação de problemas poromecânicos em reservatórios de petróleo / Danilo Magalhães de Souza Cavalcante. - Recife, 2023.

47p. : il., tab.

Orientador(a): Paulo Roberto Maciel Lyra

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Engenharia Mecânica - Bacharelado, 2023.

1. acoplamento geomecânico. 2. fluxo bifásico. 3. geomecânica. 4. método dos volumes finitos. I. Lyra, Paulo Roberto Maciel. (Orientação). II. Título.

620 CDD (22.ed.)

DANILO MAGALHÃES DE SOUZA CAVALCANTE

**MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS NA MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE
PROBLEMAS POROMECÂNICOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 26/09/2023

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra
(Orientador)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiario de Carvalho
(Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria
Antunes (Examinador Externo)

Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que estiveram ao meu lado ao longo desta jornada.

A Luciolo Victor, aquele que me incentivou a ingressar neste campo e prestou uma grande ajuda até o momento.

Ao Professor Paulo Lyra, meu orientador, e ao Professor Darlan Karlo, pelo apoio constante e orientação valiosa.

À minha amada namorada, Bianca, expresso minha gratidão pelo amor incondicional e pelo apoio incansável neste trabalho.

À minha querida família, agradeço pelo incentivo contínuo e pelo apoio emocional.

Aos meus amigos do laboratório, Pedro Vitor e Phillipe Caetano, reconheço o apoio técnico fundamental que me proporcionaram.

À Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – ANP e à Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP, por meio do Programa de Formação de Recursos Humanos da ANP para o Setor de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – PRH-ANP/FINEP, em particular ao PRH 48.1 “Caracterização e Simulação de Reservatórios, Energias renováveis e Biotecnologia Ambiental” (PROCESSO ANP Nº48610.201019/2019-38), do Departamento de Energia Nuclear do Centro de Tecnologia e Geociências da UFPE, pelo apoio financeiro.

Sem todos vocês, este Trabalho de Conclusão de Curso não teria sido possível. A todos, de alguma forma direta ou indireta envolvidos, o meu sincero agradecimento por fazerem parte desta conquista.

"A persistência é o caminho do êxito"
(Charles Chaplin)

RESUMO

Reservatórios de petróleo são sistemas complexos, onde diversos fenômenos físicos ocorrem simultaneamente, podendo envolver aspectos térmicos, hídricos, mecânicos e químicos. Com o intuito de representá-los com mais acurácia, faz-se necessário o desenvolvimento de técnicas de modelagem que consigam representar estes quatro fenômenos. No presente trabalho, consideraremos os dois fenômenos físicos: Escoamento e Geomecânica. Este trabalho estudará o acoplamento geomecânico para meios porosos considerando escoamento bifásico, efeitos de compressibilidade da rocha e efeitos de compressibilidade leve do fluido. Essas considerações são fundamentais na representação dos fenômenos poromecânicos. Diferente da maioria dos trabalhos da literatura, aqui utiliza-se uma metodologia do método dos volumes finitos baseado no cálculo dos fluxos por múltiplos pontos que utiliza os pontos harmônicos MPFA-H (*Multipoint Flux Approximation type H*), que é não convencional e foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa PADMEC (Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional) para simular tanto o escoamento do fluido quanto a deformação da rocha. As soluções numéricas para o modelo matemático são verificadas por meio de problemas de Benchmark.

Palavras-chaves: acoplamento geomecânico; fluxo bifásico; geomecânica; método dos volumes finitos.

ABSTRACT

Oil reservoirs are complex systems, where several physical phenomena occur simultaneously and may involve thermal, hydric, mechanical and chemical aspects. In order to represent them more accurately, it is necessary to develop modeling techniques that can represent all four physical phenomena, here we address two: Flow and Geomechanics. This work will study the geomechanical coupling in porous media with two-phase flow and rock compressibility effects considering slightly compressible fluids. These considerations are fundamental in the representation of poromechanical phenomena. Differently from the majority of the works, this work uses a finite volume methodology based on the calculation of flux through multiple points using the harmonic points MPFA-H (Multipoint Flux Approximation type H), which is unconventional and was developed by the PADMEC (High Performance Computing in Computational Mechanics) research group to simulate both fluid flow and rock deformation. Numerical solutions to the mathematical model are verified through Benchmark problems.

Key-words: finite volume method; geomechanical coupling; geomechanics; two-phase flow.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquemático do reservatório simplificado para o modelo de Buckley-Leverett	17
Figura 2 – Representação dos parâmetros físicos e geométricos do método MPFA-H.	19
Figura 3 – Algoritmo da estratégia IMPES	22
Figura 4 – Algoritmo de solução do modelo geomecânico	30
Figura 5 – Algoritmo de solução do modelo poromecânico com fluido bifásico levemente compressível.	32
Figura 6 – Fluxo de Trabalho para análise numérica	34
Figura 7 – Problema de Terzaghi: geometria e condições de contorno	37
Figura 8 – Gráficos da solução numérica versus solução analítica para densidades de malha com: (a) 8 elementos; (b) 64 elementos; (c) 256 elementos e (d) 1.024 elementos.	39
Figura 9 – Gráfico do erro em função do número de elementos de discretização da malha para o problema de Buckley-Leverett.	40
Figura 10 – Gráficos da solução numérica versus solução analítica para o problema monofásico levemente compressível com densidades de malha de: (a) 5 elementos; (b) 10 elementos; (c) 40 elementos; (d) 160 elementos e (e) 320 elementos.	41
Figura 11 – Esquemático do Reservatório de Petróleo com um poço produtor na face da esquerda.	42
Figura 12 – Gráfico do erro em função do número de elementos de discretização da malha para o problema monofásico levemente compressível.	42
Figura 13 – Problema de Therzaghi: Distribuição da pressão em meio poroso em diversos instantes de tempo com $\Delta t = 1s$	43
Figura 14 – Problema de Therzaghi: Distribuição de pressão com $\Delta t = 1s$	43
Figura 15 – Problema de Therzaghi: Perfil de deslocamento vertical com $\Delta t = 1s$	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos erros entre as soluções numérica e analítica segundo a norma L1 para o Problema de Buckley-Leverett.	38
Tabela 2 – Valores dos erros entre as soluções numérica e analítica segundo as normas L1 e L2 para o problema monofásico levemente compressível.	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	OBJETIVOS	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	INTRODUÇÃO	13
2.2	ESCOAMENTO BIFÁSICO INCOMPRESSÍVEL	13
2.2.1	<i>Equação de Buckley-Leverett</i>	16
2.2.2	<i>Formulação Numérica</i>	17
2.2.3	<i>Acoplamento usando a estratégia IMPES</i>	21
2.3	ESCOAMENTO MONOFÁSICO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL COM CONSIDERAÇÕES GEOMECÂNICAS	22
2.3.1	<i>Modelo do Comportamento Fluido</i>	22
2.3.2	<i>Modelo do Comportamento Mecânico</i>	24
2.4	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	26
2.4.1	<i>Acoplamento Monofásico com Geomecânica</i>	27
2.5	MODELO POROMECÂNICO COM FLUIDO BIFÁSICO	29
2.5.1	<i>Modelo de Acoplamento Bifásico Levemente Compressível com Considerações Geomecânicas</i>	31
3	METODOLOGIA	33
3.1	ESTRUTURA DO CÓDIGO	33
3.2	PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT	33
3.3	PROBLEMA MONOFÁSICO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL	35
3.4	PROBLEMA DE Terzaghi	36
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
4.1	PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT	38
4.2	PROBLEMA MONOFÁSICO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL	39
4.3	PROBLEMA DE TERZAGHI	40
5	CONCLUSÕES	45
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

1 INTRODUÇÃO

A exploração e a produção de petróleo em reservatórios subterrâneos representam um desafio complexo e crítico na indústria de petróleo e gás. Reservatórios de petróleo são sistemas complexos onde múltiplos fenômenos físicos ocorrem simultaneamente (CHEN, 2007). A modelagem e a simulação numérica desses fenômenos desempenham um papel fundamental na compreensão de como o reservatório se comporta e como os poços respondem durante a produção de petróleo. Esse conhecimento é essencial para a tomada de decisões eficazes, tanto nas fases iniciais de exploração, como na descoberta de novos campos, como no contexto das operações mais avançadas, incluindo a exploração de poços no pré-sal.

Tradicionalmente, modelos simplificados de reservatórios negligenciam ou simplificam excessivamente a influência do escoamento de fluidos na deformação da rocha e vice-versa, com o objetivo de economizar recursos computacionais e reduzir a complexidade dos modelos. No entanto, problemas como o colapso de poços, reativação de falhas e mudanças no comportamento da produção devido à depleção do reservatório têm destacado a necessidade premente de uma compreensão mais aprofundada da interação entre a geomecânica e o escoamento de fluidos nos reservatórios (ZOBACK, 2007). Portanto, a seleção criteriosa de modelos matemáticos que melhor representem esses fenômenos é fundamental para a previsão acurada das taxas de produção desejadas.

A tecnologia de simulação de reservatórios está em constante evolução e aprimoramento. Novos modelos para simular esquemas de recuperação cada vez mais complexos são propostos constantemente. Para lidar com essa complexidade, tornou-se imperativo o desenvolvimento de técnicas de simulação numérica capazes de representar de forma mais sofisticada tanto o escoamento de fluidos quanto a geomecânica, além de seu acoplamento. Essa abordagem é essencial para obter uma representação acurada dos reservatórios de petróleo (AZIZ; SETTARI, 1979).

Da fusão do estudo do escoamento em meio poroso com a geomecânica surge a disciplina conhecida como poromecânica. Essa teoria teve suas raízes nos trabalhos pioneiros de Terzaghi (1923) sobre a consolidação de solos, que descreviam como a compactação do solo era influenciada pela diminuição da pressão de fluido em seus poros. Posteriormente, Biot (1941) estendeu essa teoria para três dimensões, tornando-a aplicável à análise de sólidos e fluidos em reservatórios de petróleo e rochas. A poromecânica continua sendo uma área em desenvolvimento constante e serve como base para os principais modelos matemáticos utilizados na simulação de reservatórios. A chave para uma modelagem poromecânica precisa é o acoplamento cuidadoso entre as equações diferenciais que governam o comportamento dos sólidos e dos fluidos, a

fim de representar devidamente os fenômenos acoplados e sem o aparecimento de oscilações não-físicas.

1.1 OBJETIVOS

Investigar e auxiliar no desenvolvimento de metodologias para a modelagem e a simulação numérica de escoamentos em reservatórios de petróleo considerando o acoplamento com o fenômeno de deformação da rocha, utilizando o método dos volumes finitos com o cálculo dos fluxos por múltiplos pontos (MPFA) para ambos os problemas, auxiliando na verificação das formulações e dos códigos computacionais desenvolvidos.

Para atingir tal objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

- Aprendizado dos modelos físico-matemáticos, das formulações numéricas e de programas desenvolvidos no grupo.
- Implementação em um ambiente unificado, incluindo:
 - Formulação monofásica levemente compressível
- Verificação do código através de problemas de *Benchmark*.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO

A teoria da poroelasticidade teve suas raízes iniciais no trabalho pioneiro de Karl Terzaghi, que a desenvolveu em 1923 e posteriormente expandiu em 1925. Inicialmente, Terzaghi formulou a teoria para descrever o comportamento de meios porosos em condições unidimensionais (TERZAGHI, 1943). No entanto, o desenvolvimento contínuo da teoria levou a uma expansão para casos tridimensionais sob a liderança de Maurice Biot (BIOT, 1941).

Além disso, o cientista Henry Darcy desempenhou um papel fundamental ao estabelecer uma relação linear crucial entre a velocidade do fluido e o gradiente de potencial hidráulico (DARCY, 1856). Essa descoberta revolucionou a compreensão das interações entre fluidos e meios porosos, e é uma base fundamental da teoria da poroelasticidade (VERRUIJT, 2016).

Este trabalho conta com a generalização da formulação de Biot, onde a compressibilidade da matriz porosa e do fluido são levadas em consideração, sendo de extrema importância para a engenharia de reservatórios.

Nas próximas subseções, apresentaremos três modelos matemáticos distintos: um para o escoamento bifásico incompressível, outro para o escoamento monofásico levemente compressível com considerações geomecânicas, e, por fim, o modelo matemático que acopla o comportamento de um fluido bifásico levemente compressível com o comportamento geomecânico.

2.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO INCOMPRESSÍVEL

O modelo matemático clássico que descreve o fluxo regido pela Lei de Darcy consiste em duas equações fundamentais: a equação de conservação de massa aplicada ao meio poroso e a equação de fluxo de Darcy (VERRUIJT, 2016).

Assumindo que inicialmente a rocha reservatório possui uma distribuição uniforme de espaços vazios, a porosidade é definida pela razão entre o volume total de vazios V_{Vazios} e o volume do reservatório avaliado V_{Res} (AZIZ; SETTARI, 1979):

$$\Phi = \frac{V_{Vazio}}{V_{Res}} \quad (2.1)$$

Para um meio bifásico (água e óleo), cada um em sua respectiva fase ocupa uma parcela do volume de vazios da rocha reservatório. A saturação de cada componente no meio poroso é definida pela seguinte relação (AZIZ; SETTARI, 1979):

$$S_i = \frac{V_{S_i}}{V_{\text{azios}}} \quad (2.2)$$

O V_{S_i} representa o volume ocupado pelo componente i , com $i = w$ ou $i = o$, representando as fases água e óleo, respectivamente. As saturações e outras variáveis são referenciadas pelos subscritos w ou o (S_w e S_o , por exemplo). Diz-se que o meio é totalmente saturado quando os poros são totalmente preenchidos por óleo e água. Essa hipótese gera a seguinte restrição (AZIZ; SETTARI, 1979; CHEN, 2007; FANCHI; PENNINGTON, 2001):

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.3)$$

A rocha é considerada indeformável, de modo que a porosidade ϕ se mantém constante no intervalo de tempo $[0, t]$, simplificando substancialmente a solução do modelo matemático. Como os componentes estão na mesma fase, não há transferência de massa entre fases. Alguns efeitos são desconsiderados: efeito térmico, adsorção, dispersão, capilaridade e efeito gravitacional. A quantidade de movimento no meio poroso é regida pela forma generalizada da Lei de Darcy, relação linear entre a velocidade do fluido e o gradiente de potencial hidráulico (BEAR, 1988).

Ao longo deste trabalho, utilizamos uma abordagem segregada na qual as equações fundamentais são derivadas a partir da combinação adequada da conservação de massa e da Lei de Darcy, que podem ser expressas para as fases $i = o$ (óleo) ou $i = w$ (água) da seguinte maneira, respectivamente (CONTRERAS, 2017):

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} = - \nabla \cdot (\phi \rho_i \vec{v}_i) \quad (2.4)$$

e

$$\vec{v}_i = -\lambda_i \mathbf{K} \nabla p_i, i = o, w \quad (2.5)$$

Nas equações (2.4), que descreve a conservação da massa do fluido, e (2.5), que representa a velocidade de Darcy através de uma relação linear com o gradiente de pressão, uma vez desconsiderado o efeito da gravidade, ρ_i é densidade e q_i é o termo fonte ou sumidouro (i.e., injeção ou produção). \vec{v}_i é a velocidade de fase e \mathbf{K} é o tensor de permeabilidade da rocha, que satisfaz a condição elíptica. A mobilidade do fluido é dada por $\lambda_i = \frac{k_{r_i}}{\mu_i}$, onde μ_i representa a viscosidade e k_{r_i} é a permeabilidade relativa da fase i (CONTRERAS, 2017).

A permeabilidade relativa pode ser interpretada como a facilidade com que a fase do fluido pode escoar na rocha porosa em presença de outras fases. Ela tem uma dependência com a saturação do meio, $k_{r_i}(S_i)$ e é definida a partir de relações

constitutivas. Na literatura é possível encontrar diversos modelos (HELMING, 1997; PINDER; GRAY, 2008). Para esse trabalho foram utilizadas as relações paramétricas de Brooks-Corey, que são definidas da seguinte forma (KOZDON *et al.*, 2011):

$$k_{rw} = k_{w,max}(S_e)^{n_w} \quad k_{ro} = k_{o,max}(1 - S_e)^{n_o} \quad (2.6)$$

Os expoentes n_w e n_o dependem das propriedades dos fluidos, enquanto os parâmetros $k_{w,max}$ e $k_{o,max}$ são limites superiores para as funções k_{rw} e k_{ro} , estes variando de 0 a 1. A saturação efetiva S_e é uma normalização da fase molhante S_w em relação aos valores de saturação irreduzível de água S_{wi} e de saturação residual de óleo S_{or} como definido em (SOUZA, 2015).

$$S_e = \frac{(S_w - S_{wi})}{(1 - S_{wi} - S_{or})} \quad (2.7)$$

A partir das equações (2.3) a (2.5) e realizando manipulações algébricas apropriadas, obtemos a seguinte expressão para a equação de pressão global (CONTRERAS, 2017):

$$\nabla \cdot \vec{v} = Q \quad (2.8)$$

Na equação anterior, \vec{v} é a velocidade de Darcy total, a qual é obtida somando as velocidades da água e do óleo. O termo fonte global é representado pela equação $Q = Q_w + Q_o$, em que $Q_i = q_i/\rho_i$

Para obter a equação de saturação para a fase água, combinamos e manipulamos as equações (2.3) e (2.5), onde a velocidade da fase água é definida como $\vec{v}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \vec{v}$. Isso nos leva à seguinte equação (CONTRERAS, 2017):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) + Q_w \quad (2.9)$$

Na equação (2.9), o fluxo hiperbólico é definido como $\vec{F}_w(S_w) = f_w \vec{v}$, onde f_w é o fluxo fracionário de água, que é uma função não-linear e representa a fração mássica da fase molhante transportada no meio poroso (SOUZA, 2015).

O modelo matemático, conforme descrito nas equações (2.8) e (2.9), fica completamente determinado com a aplicação de condições iniciais e de contorno apropriadas. Esse conjunto é composto pelas condições de contorno de Dirichlet Γ_D e Neumann Γ_N , pressão prescrita e vazão prescrita, respectivamente (SOUZA, 2015).

$$\begin{aligned} p(\vec{x}, t) &= g_D \quad \text{em } \Gamma_D \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N \quad \text{em } \Gamma_N \times [0, t] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nos contornos internos, que correspondem aos poços de injeção e produção, a pressão pode ser igualmente especificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} p(\vec{x}, t) &= g_I \quad \text{em } \Gamma_I \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_P \quad \text{em } \Gamma_P \times [0, t] \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou

$$\begin{aligned} p(\vec{x}, t) &= g_P \quad \text{em } \Gamma_P \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_I \quad \text{em } \Gamma_I \times [0, t] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nas equações anteriores, o valor da função escalar g é conhecido, e os subscritos D , N , I e P representam as condições de Dirichlet e Neumann e poços injetor e produtor, respectivamente (SOUZA, 2015).

Na equação de saturação, as condições inicial e de fronteira onde há injeção de água são especificadas como:

$$\begin{aligned} S_w(\vec{x}, 0) &= \bar{S}_w^0 \quad \text{em } \Omega \\ S_w(\vec{x}, t) &= \bar{S}_w \quad \text{em } \Gamma_D \quad \text{ou } \Gamma_I \end{aligned} \quad (2.13)$$

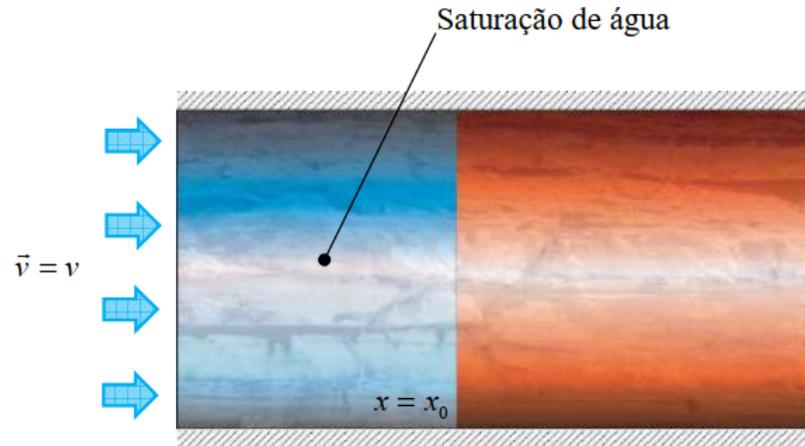
onde \bar{S}_w^0 é o valor de saturação inicial, que pode variar em um intervalo da 0 a 1.

2.2.1 Equação de Buckley-Leverett

O modelo de escoamento de dois fluidos imiscíveis em um meio poroso é descrito pela equação de Buckley-leverett (BUCKLEY; LEVERETT, 1942). O modelo representa o deslocamento imiscível e essencialmente unidimensional de óleo por água em um meio poroso rígido com permeabilidade homogênea, como ilustrado na Figura 1 (CARVALHO, 2019).

Conforme ilustrado na Figura 1, o óleo residente na rocha é varrido pelo fluxo de água da esquerda para a direita. A descontinuidade na saturação de água, característica

Figura 1 – Esquemático do reservatório simplificado para o modelo de Buckley-Leverett



Fonte: SOUZA (2015).

típica de um problema de Riemann, é definida já na condição inicial (HELMIG, 1997), dada por:

$$S_w(S, 0) = \begin{cases} 1 - S_{or} & \text{se } x \geq x_0 \\ S_{wi} & \text{se } x \leq x_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde S_{or} é a saturação irreduzível de óleo e S_{wi} , a saturação irreduzível de água. A variável x representa a posição no domínio e x_0 , a posição inicial da frente da onda (SOUZA, 2015).

A partir da equação (2.9), considerando o deslocamento unidimensional de óleo por água, desprezando o termo fonte e considerando $\vec{v} = cte$ e o gradiente de pressões constante, chegamos à seguinte expressão (Equação de Buckley-Leverett) (SOUZA, 2015):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

A equação anterior é uma equação hiperbólica de transporte não-linear, onde a não linearidade que depende de S_w está no termo que multiplica $\frac{\partial S_w}{\partial x}$ (CARVALHO, 2019).

2.2.2 Formulação Numérica

A aplicação de um algoritmo localmente conservativo para discretizar o problema de fluxo que consiste em duas equações: uma da pressão elíptica para o campo de pressão e outra hiperbólica não linear para o campo de saturação. A metodologia

IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) é utilizada para realizar o acoplamento entre as equações.

O método MPFA-H é usado para discretizar o termo de pressão, mas, a rigor, todos os termos de difusão serão discretizados usando esse método. A metodologia utiliza pontos harmônicos. Inicialmente são calculados os fluxos nas faces de cada volume de controle independente e então uma expressão única para os fluxos é obtida por uma combinação convexa dos fluxos unilaterais.

Para o primeiro termo da equação (2.8), integrando o termo de fluxo ao longo do volume de controle e aplicando o Teorema da Divergência de Gauss, resulta em:

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (2.16)$$

onde \vec{n} é o vetor unitário para fora de IJ.

O sistema é localmente conservativo, uma vez que a soma dos fluxos à esquerda e à direita da face IJ é igual a zero, conforme ilustrado na equação subsequente:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \vec{v}_{JI} \cdot \vec{N}_{JI} = 0 \quad (2.17)$$

onde \vec{v}_{IJ} é a velocidade média da face IJ e \vec{N}_{IJ} representa o vetor área (comprimento em 2-D) normal à face IJ.

Aplicando a velocidade de Darcy, o fluxo com respeito ao volume de controle \hat{L} é expresso como:

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \lambda \mathbf{K}_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \lambda \nabla p \cdot \mathbf{K}_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} ds \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{K}_{\hat{L}}^T$ representa a matriz transposta de $\mathbf{K}_{\hat{L}}$.

Se $\overrightarrow{X_{\hat{L}} X_{\hat{L},i(IJ)}}$ e $\overrightarrow{X_{\hat{L}} X_{\hat{L},j(IJ)}}$ são arestas de um triângulo $\Delta x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)} x_{\hat{L},j(IJ)}$, o termo $\mathbf{K}_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}$ pode ser escrito como uma combinação linear dessas arestas (CONTRERAS, 2017):

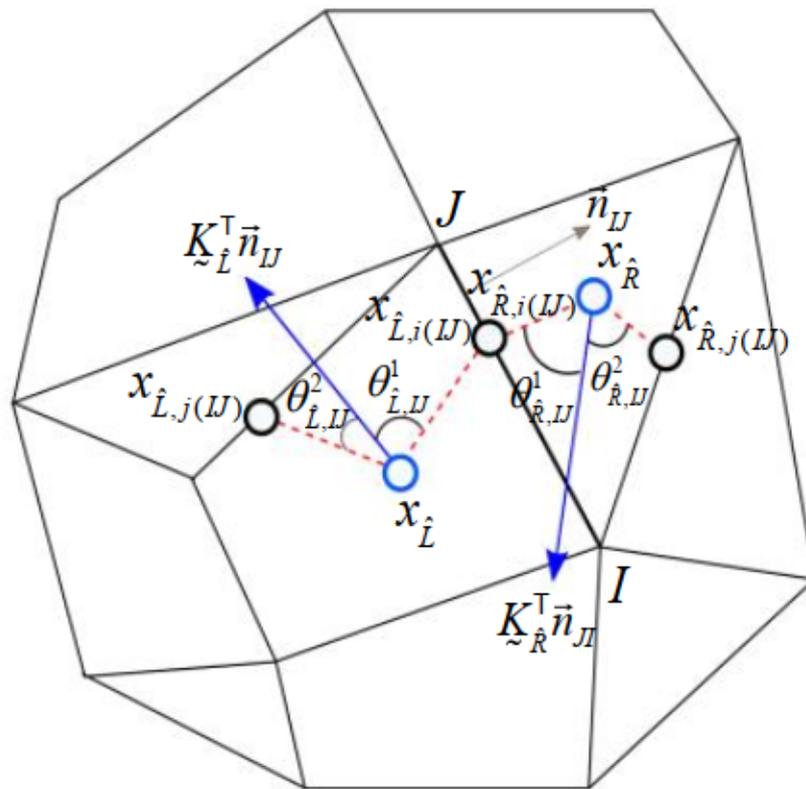
$$\mathbf{K}_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \overrightarrow{X_{\hat{L}} X_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \overrightarrow{X_{\hat{L}} X_{\hat{L},j(IJ)}} \quad (2.19)$$

onde $X_{\hat{L},i(IJ)}$ e $X_{\hat{L},j(IJ)}$ são os pontos de interpolação mostrados na Figura 2, e os coeficientes $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$ e $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$ são dados como:

$$\alpha_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\| \mathbf{K}_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} \| \sin \theta_{\hat{L},IJ}^1}{\sin \theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2} \quad \alpha_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\| \mathbf{K}_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} \| \sin \theta_{\hat{L},IJ}^2}{\sin \theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2} \quad (2.20)$$

Para que os coeficientes existam e sejam positivos, as seguintes condições devem ser satisfeitas: $0 < \theta_{\hat{L},IJ}^1, \theta_{\hat{L},IJ}^2 < \pi$ e $\theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2 < \pi$ (CONTRERAS, 2017). Estes ângulos podem ser vistos na Figura 2.

Figura 2 – Representação dos parâmetros físicos e geométricos do método MPFA-H.



Fonte: CONTRERAS (2017).

Após algumas manipulações algébricas, a equação da discretização do fluxo unilateral, que nessa equação representa o fluxo no volume da esquerda, é escrita como:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ} \| \vec{IJ} \| (\xi_{\hat{L},i(IJ)}(p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},i(IJ)}) + (\xi_{\hat{L},j(IJ)}(p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},j(IJ)}))) \quad (2.21)$$

onde

$$\xi_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{L},i(IJ)}}{\| \vec{X}_{\hat{L}} X_{\hat{L},i(IJ)} \|} \quad \xi_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{L},j(IJ)}}{\| \vec{X}_{\hat{L}} X_{\hat{L},j(IJ)} \|} \quad (2.22)$$

De forma semelhante, o fluxo é escrito para o volume de controle da direita. Após isso, deve-se construir um fluxo único através de cada face, onde são considerados os fluxos das faces à direita e à esquerda. A contribuição de cada um é ponderada por pesos, que são definidos em função do tamanho da aresta e da projeção do tensor de permeabilidade, equação (2.23). Além disso, como o sistema é localmente conservativo, a soma dos pesos deve ser igual a um. Para obter mais informações, consultar (CONTRERAS *et al.*, 2016).

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ}k_{\hat{R},IJ}^{(n)}}{h_{\hat{L},IJ}k_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}k_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad \text{e} \quad w_{\hat{R},IJ} = 1 - w_{\hat{L},IJ} \quad (2.23)$$

Sendo cada termo da equação (2.23) definido por:

- $h_{\hat{L}}$ e $h_{\hat{R}}$, distância ortogonal do centróide $x_{\hat{L}}$ e $x_{\hat{R}}$, respectivamente, até a face IJ do volume.
- $k_{\hat{L},IJ}^{(n)}$ e $k_{\hat{R},IJ}^{(n)}$, tensores de permeabilidade à esquerda e à direita, respectivamente, de cada face do volume de controle IJ.

A construção de um fluxo único através das faces IJ é expressa pela equação abaixo:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = w_{\hat{R},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - w_{\hat{L},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \quad (2.24)$$

A pressão é calculada nos pontos de interpolação através de uma combinação convexa, expressa como:

$$p_{IJ} = w_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} + w_{\hat{R},IJ} p_{\hat{R}} \quad (2.25)$$

Já os pontos harmônicos são definidos usando a seguinte expressão (CONTRERAS *et al.*, 2016):

$$x_{IJ} = \frac{h_{\hat{L},IJ}k_{\hat{R},IJ}^{(n)}x_{\hat{R}} + h_{\hat{R},IJ}k_{\hat{L},IJ}^{(n)}x_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ}h_{\hat{R},IJ}(\mathbf{K}_{\hat{L}}^T - \mathbf{K}_{\hat{R}}^T)\vec{n}_{IJ}}{h_{\hat{L},IJ}k_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}k_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad (2.26)$$

Para discretizar a equação de saturação existem diversas maneiras. O método utilizado foi o das diferenças finitas de primeira ordem tipo *upwind*, que produz soluções monótonas a baixo custo computacional. Por outro lado, sofre influência da malha, além do excesso de difusão numérica, que leva a uma baixa acurácia do método (SOUZA, 2015).

Para discretizar a equação (2.9), deve-se integrar no intervalo de tempo entre t_0 e t e no domínio Ω , obtendo:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = -\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) dV dt + \int_{t_0}^t \int_{\Omega} Q_w dV dt \quad (2.27)$$

Considerando uma discretização do domínio em Ω , a equação (2.27) pode ser obtida como o somatório das integrais calculadas em cada volume de controle. Considerando o volume de controle $V_{\hat{L}}$ e usando Euler avançado para discretizar o termo temporal, aplicando o Teorema da Divergência de Gauss na equação do divergente do fluxo e integrando no intervalo de tempo definido, chegamos à seguinte equação discretizada da saturação:

$$S_{w,\hat{L}^{n+1}} = S_{w,\hat{L}^n} - \frac{\Delta t}{\phi V_{\hat{L}}} \sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t \bar{Q}_w}{\phi V_{\hat{L}}} \quad (2.28)$$

onde o fluxo hiperbólico é dado como: $F_{IJ} = f_w(S_{wIJ}^n) \vec{v}_{IJ}$

O cálculo do passo de tempo é feito respeitando o critério de estabilidade de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), e deve satisfazer à seguinte desigualdade (SOUZA, 2015):

$$\Delta t \leq CFL \frac{V_{\hat{L}}}{\max_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} [(\Delta f_w(S_w) / \Delta S_w)_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}]} \quad (2.29)$$

O valor do CFL utilizado, para o método de *upwind* de primeira ordem descrito, deve ser sempre ≤ 1 (HIRSCH, 2007).

Vale ressaltar que o valor do fluxo $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$ é o mesmo valor do fluxo calculado na equação de pressão.

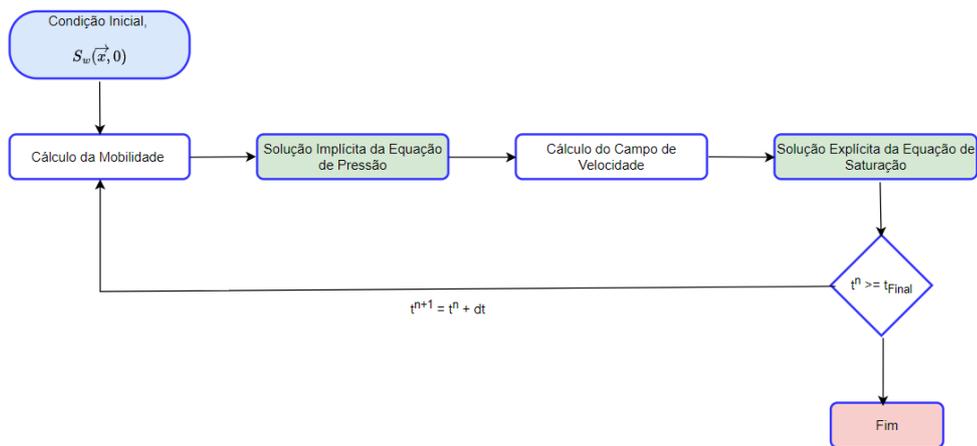
2.2.3 Acoplamento usando a estratégia IMPES

A estratégia IMPES teve sua origem nos trabalhos de (SHELDON; CARDWELL, 1959) e (STONE; GARDER, 1961). A concepção subjacente a essa abordagem consiste em separar o conjunto acoplado de equações diferenciais em dois componentes distintos: uma equação de pressão, tratada implicitamente, e uma equação de saturação, tratada explicitamente. Essas equações têm a finalidade de descrever o comportamento do fluxo em meios bifásicos, conforme discutido por (CHEN, 2007).

A estratégia IMPES, ver Figura 3, é amplamente reconhecida e empregada na indústria petrolífera devido às suas vantagens, que incluem baixo custo computacional,

simplicidade na implementação e robustez quando aplicada a fluxos incompressíveis ou levemente compressíveis, como evidenciado por (CHEN *et al.*, 2006). No entanto, é importante observar que o tratamento explícito da equação de saturação pode representar uma limitação significativa. Isso se deve ao fato de que, para garantir a estabilidade do método, são necessários passos de tempo relativamente pequenos, o que, por sua vez, pode tornar a simulação impraticável em certos casos (PACHECO *et al.*, 2017).

Figura 3 – Algoritmo da estratégia IMPES



Fonte: Adaptado de SOUZA (2015).

2.3 ESCOAMENTO MONOFÁSICO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL COM CONSIDERAÇÕES GEOMECÂNICAS

2.3.1 Modelo do Comportamento Fluido

O modelo geomecânico incorpora o acoplamento entre as respostas do fluido e do solo, segundo a Lei da consolidação de Biot. Um dos princípios fundamentais desse modelo é a conservação da massa dos dois componentes: sólido e fluido (VERRUIJT, 2016).

A equação de balanço para o fluido é apresentada como (VERRUIJT, 2016):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi C_f \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_f) = 0 \quad (2.30)$$

A equação de balanço da matéria sólida pode ser escrita de forma semelhante à equação (2.30):

$$-\frac{\partial(1 - \phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (2.31)$$

sendo ρ_s a densidade do solo, \vec{v}_s , a velocidade do solo e \vec{v}_f , a velocidade do fluido.

Assumindo que a densidade é uma função da tensão isotrópica total (para mais detalhes verificar (VERRUIJT, 2016)), a equação (2.31) se reduz a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C_s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \phi \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \nabla \cdot [(1 - \phi) \vec{v}_s] = 0 \quad (2.32)$$

Visando simplificar as equações e eliminar a dependência do termo de porosidade, soma-se as equações (2.32) e (2.30), resultando em:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s + \nabla \cdot [\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s)] + \phi(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} + C_s \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (2.33)$$

Aplicando a Lei de Darcy, substituímos a velocidade relativa entre o sólido e o fluido por uma relação linear com o potencial hidráulico do fluido. Simultaneamente, aplicando a relação constitutiva, que relaciona a deformação volumétrica com o deslocamento, $\epsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u}$, obtemos a seguinte equação após algumas manipulações algébricas (VERRUIJT, 2016):

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \phi(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} + C_s \frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.34)$$

onde \vec{v} é a velocidade de Darcy do fluido monofásico. Diferente da equação para um fluido bifásico, que possui um termo de mobilidade, a velocidade de Darcy para um fluido monofásico não o tem, e pode ser escrita da seguinte forma: $\vec{v} = \frac{k}{\mu} \nabla \cdot p$.

Pela Teoria de Terzaghy, temos a relação entre a tensão total σ e a tensão efetiva σ' :

$$\sigma = \sigma' + \alpha p \quad (2.35)$$

onde σ' é a tensão efetiva na rocha, α , coeficiente de Biot, descrito como $\alpha = 1 - \frac{C_s}{C_m}$, p , a pressão no fluido e C_m , a compressibilidade no meio poroso. Vale ressaltar que esta última difere da seção anterior, que tratava da velocidade total devido à natureza bifásica do escoamento. Após algumas manipulações chegamos à equação abaixo (VERRUIJT, 2016):

$$\alpha \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.36)$$

sendo S o coeficiente de armazenamento, definido como:

$$S = \phi C_f + (\alpha - \phi) C_s \quad (2.37)$$

A equação (2.36) descreve o balanço de massa de um fluido monofásico levando em consideração a deformação da rocha no reservatório.

2.3.2 Modelo do Comportamento Mecânico

Para determinar o comportamento mecânico do meio, utiliza-se a equação de equilíbrio mecânico em conjunto com a relação constitutiva do material em questão (SILVA, 2018). O balanço do momento linear em conjunto com o princípio da tensão efetiva de Terzaghi serve para modelar a resposta mecânica da rocha e das rochas circundantes (ALBUQUERQUE, 2023).

O comportamento mecânico é expresso pela equação de momento linear, a Lei de Cauchy de Movimento. Considerando um carregamento quase-estático a equação de equilíbrio é escrita na forma matricial como (ALBUQUERQUE, 2023):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad (2.38)$$

com $\boldsymbol{\sigma}$ sendo o Tensor de Tensão de Cauchy e \vec{f} compreendendo as forças do corpo que atuam no corpo elástico. Sob a suposição de deformação plana, o tensor de tensão de Cauchy pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

O Princípio das Tensões Efetivas, desenvolvido por Terzaghi, relaciona os componentes mecânicos e hidráulicos e pode ser escrito da seguinte forma (VERRUIJT, 2016):

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \alpha p \mathbf{I} \quad (2.40)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}'$ é chamado de tensão efetiva, α é o coeficiente de Biot, p é a pressão do fluido e \mathbf{I} é a matriz identidade. A tensão efetiva é a tensão que atua diretamente na rocha, como pode ser analisada na equação (2.40). A contribuição de pressão do fluido é subtraída da tensão total.

Substituindo a equação (2.40) na equação (2.38), pode-se chegar à equação de equilíbrio:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \nabla p \mathbf{I} = \vec{f} \quad (2.41)$$

Sob a suposição da Teoria da Deformação Infinitesimal, a deformação do corpo elástico pode ser descrita pelo Tensor de Deformação de Almansi-Hamel (ALBUQUERQUE, 2023):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

com $\vec{u} = [u \ v]^T$ sendo o vetor deslocamento, cujas componentes são u e v , e ∇ sendo o operador gradiente.

A Lei de Hooke é uma relação constitutiva que relaciona a tensão e a deformação. Sob a consideração de que o material estará apenas no regime elástico linear, obtemos a seguinte equação tensorial:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.43)$$

Na equação (2.43), \boldsymbol{C} é um tensor constitutivo de posto 4. Sob a suposição de elasticidade linear isotrópica, todas as 81 entradas de \boldsymbol{C} podem ser escritas como funções de apenas dois parâmetros, λ e G , que são chamados de primeiro e segundo parâmetros de Lamé, respectivamente. Usando os parâmetros de Lamé, a equação (2.43) pode ser escrita como (ALBUQUERQUE, 2023):

$$\boldsymbol{\sigma}' = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.44)$$

onde $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ representa um traço de matriz.

Substituindo a equação (2.44) na equação (2.41) e fazendo as manipulações algébricas necessárias, pode-se chegar a um equivalente poromecânico da Equação de Navier-Cauchy, que é dado por (ALBUQUERQUE, 2023):

$$(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + G \nabla \cdot (\nabla \vec{u}) - \alpha \nabla p = \vec{f} \quad (2.45)$$

Um conjunto adequado de condições de contorno para a equação (2.41) faz-se necessário, além de uma condição inicial para o deslocamento, pois a equação governante depende indiretamente do tempo. Esse conjunto é composto pelas condições de contorno de Dirichlet e Neumann, bem como pela condição inicial, descritos a seguir:

$$\vec{u}(x, t) = \vec{g}_D^u \text{ em } \Gamma_D^u \quad (2.46)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{n} = \vec{g}_N^u \text{ em } \Gamma_N^u \quad (2.47)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0 \quad (2.48)$$

onde \vec{n} é o vetor normal unitário ao contorno, Γ_D^u denota a condição de contorno de Dirichlet e Γ_N^u , a condição de contorno de Neumann, ambos para o problema geomecânico. \vec{g}_D^u junto com \vec{g}_N^u são os valores prescritos do deslocamento $\vec{u} \cdot \vec{n}$ e da carga σ' no contorno.

2.4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Com a finalidade de discretizar o primeiro termo da equação (2.36), que descreve o escoamento levemente compressível monofásico, que corresponde à velocidade do solo, é necessário integrá-lo ao longo do domínio $\Omega_{\hat{L}}$ (ALBUQUERQUE, 2023).

$$\int_{\Omega_{\hat{L}}} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} d\Omega_{\hat{L}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\hat{L}}} \epsilon_v d\Omega_{\hat{L}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\hat{L}}} \nabla \cdot \vec{u} d\Omega_{\hat{L}} = \frac{\partial E_{\hat{L}}}{\partial t} \quad (2.49)$$

onde $E_{\hat{L}} = \int_{\Omega_{\hat{L}}} \nabla \cdot \vec{u} d\Omega_{\hat{L}}$.

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss e considerando a contribuição dos deslocamentos nas faces de cada volume de controle, chegamos à expressão de $E_{\hat{L}} = \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} \int_{\Omega_{\hat{L}}} \nabla \cdot \vec{u} ds$. Discretizando o termo $E_{\hat{L}}$ usando diferenças finitas e truncando no primeiro termo, ficamos com a relação: $\frac{\partial E_{\hat{L}}}{\partial t} = \frac{E_{\hat{L}}^{n+1} - E_{\hat{L}}^n}{\Delta t}$.

Para discretizar o segundo termo da equação (2.36), devemos integrar ao longo do domínio e posteriormente utilizar diferenças finitas de primeira ordem, ficando com a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_{\hat{L}}} S \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega_{\hat{L}} \approx \frac{V_{\hat{L}} S_{\hat{L}}}{\Delta t} (p_{\hat{L}}^{n+1} - p_{\hat{L}}^n) \quad (2.50)$$

onde $p_{\hat{L}}^{n+1}$ e $p_{\hat{L}}^n$ são os valores de pressão na célula L nos respectivos tempos t^{n+1} e t^n com o $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. $V_{\hat{L}}$ é o volume, mas como estamos trabalhando em domínio bidimensional corresponde à área de cada elemento.

Para discretizar o primeiro termo da equação (2.41), que descreve o comportamento mecânico da rocha, procedemos com a integração sobre o domínio aplicando o Teorema do Valor Médio e o Teorema da Divergência, o que nos leva à seguinte equação (ALBUQUERQUE, 2023):

$$\int_{\Omega_{\hat{L}}} \nabla \cdot \sigma' d\Omega_{\hat{L}} = \int_{\Omega_{IJ}} \sigma' \cdot \vec{n}_{IJ} d\Omega_{\hat{L}} = |IJ| \vec{\tau}_{IJ} \quad (2.51)$$

onde $\vec{\tau}$ é o vetor de tensão normal e pode ser escrito como:

$$\vec{\tau}_{IJ} = \left[\mathbf{C} : \frac{\nabla \vec{u} \nabla \vec{u}^T}{2} \right] \cdot \vec{n}_{IJ} = \begin{bmatrix} \nabla u \cdot \mathbf{C}_{IJ}^{xx} \vec{n}_{IJ} + \nabla v \cdot \mathbf{C}_{IJ}^{xy} \vec{n}_{IJ} \\ \nabla u \cdot \mathbf{C}_{IJ}^{yx} \vec{n}_{IJ} + \nabla v \cdot \mathbf{C}_{IJ}^{yy} \vec{n}_{IJ} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo. Semelhante ao que foi definido na discretização da equação de pressão, aqui também temos os termos de difusão, como $\nabla u \cdot \mathbf{C}_{IJ}^{xx} \vec{n}_{IJ}$, que serão discretizados utilizando a mesma metodologia de Volumes Finitos, nomeadamente o método MPFA-H (ALBUQUERQUE, 2023).

2.4.1 Acoplamento Monofásico com Geomecânica

A utilização de malha co-localizada com aproximações de mesma ordem de erro nas equações de equilíbrio e balanço de massa viola a condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, comumente referida como a condição de LBB (ALBUQUERQUE, 2023). A violação dessa condição resulta em oscilações não físicas do tipo "par-ímpar". Para contornar esse problema, o deslocamento na face pode ser interpolado usando o método de Rhie-Chow modificado (ZHANG; ZHAO; BAYYUK, 2014), forçando o acoplamento entre a pressão p e o deslocamento \vec{u} .

Até o momento, este método ainda não foi implementado em nosso código. É importante ressaltar que os problemas que foram simulados até o momento não exigiram esse acoplamento

Sem perda de generalidade, para simplificar a equação (2.45), podemos desconsiderar o primeiro termo da equação, representado por $(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$ e o termo forças de corpo \vec{f} . Estas considerações são feitas somente durante o processo de interpolação. Isso nos permite reescrever a equação (2.45), conforme discutido por (ALBUQUERQUE, 2023):

$$G \nabla \cdot (\nabla \vec{u}) = \alpha \nabla p \quad (2.53)$$

A derivação da interpolação parte da equação (2.53), definida na aresta IJ e discretizada usando as discretizações já mencionadas para o gradiente de pressão e o termo de difusão. Contudo, como não existe malha dual uma vez que o esquema é co-localizado e centrado na célula, os parâmetros físico-geométricos necessários são obtidos via interpolação dos parâmetros físico-geométricos definidos para os volumes de controle \hat{L} e \hat{R} que compartilham IJ. Mais detalhes da interpolação consultar (ALBUQUERQUE, 2023). Logo, a interpolação para o deslocamento na aresta IJ pode ser definido como:

$$\vec{u}_{IJ} = \vec{u}_{IJ} - (1-\beta) \frac{\alpha_{\hat{L}}}{a_{u,\hat{L}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} |IJ| p_{IJ} \vec{n}_{IJ,x} - \beta \frac{\alpha_{\hat{R}}}{a_{u,\hat{R}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{R}}} |IJ| p_{IJ} \vec{n}_{IJ,x} + \frac{\alpha_{IJ} V_{IJ}}{a_{u,IJ}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.54)$$

$$\vec{v}_{IJ} = \vec{v}_{IJ} - (1-\beta) \frac{\alpha_{\hat{L}}}{a_{v,\hat{L}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} |IJ| p_{IJ} \vec{n}_{IJ,x} - \beta \frac{\alpha_{\hat{R}}}{a_{v,\hat{R}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{R}}} |IJ| p_{IJ} \vec{n}_{IJ,x} + \frac{\alpha_{IJ} V_{IJ}}{a_{v,IJ}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.55)$$

onde

$$\vec{u}_{IJ} = (1-\beta) \vec{u}_{\hat{L}} + \beta \vec{u}_{\hat{R}} \quad (2.56)$$

$$\vec{v}_{IJ} = (1-\beta) \vec{v}_{\hat{L}} + \beta \vec{v}_{\hat{R}} \quad (2.57)$$

$$a_{u,\hat{L}} = \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} w_{\hat{R},i(IJ)}^G (A_{\hat{L},IJ}^G - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{\hat{L},\gamma(IJ)}^G w_{\hat{L},\gamma(IJ)}^G + \alpha_{\hat{R},i(IJ)}^G w_{\hat{L},i(IJ)}^G) \quad (2.58)$$

$$a_{u,\hat{R}} u_{\hat{R}} = \sum_{nb} (a_{u,nb})_{\hat{R}} + \alpha_R \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{R}}} |IJ| p_{IJ} n_{IJ,x} \quad (2.59)$$

$$V_{IJ} = \left((1-\beta) \frac{\alpha_{\hat{L}} V_{\hat{L}}}{a_{u,L}} + \beta \frac{\alpha_{\hat{R}} V_{\hat{R}}}{a_{u,R}} \right) \frac{a_{u,IJ}}{\alpha_{IJ}} \quad (2.60)$$

$\alpha_{\hat{L}}$ é o coeficiente de Biot, $\beta = 1/2$ e $A_{\hat{L},ij}^G = (\alpha_{\hat{L},i(IJ)}^G + \alpha_{\hat{L},j(IJ)}^G)$

A aproximação do gradiente de pressão da equação (2.53) na face IJ é dada por:

$$\nabla p|_{IJ} = \frac{p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}}{|\vec{r}_{\hat{L},\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ}|} \vec{n}_{IJ}. \quad (2.61)$$

onde $\vec{r}_{\hat{L},\hat{R}} = x_{\hat{R}} - x_{\hat{L}}$, em que $x_{\hat{R}}$ representa o vetor posição do centróide do volume da direita e $x_{\hat{L}}$ volume da esquerda. A discretização dos deslocamentos \vec{u}_{IJ} e \vec{v}_{IJ} é expressa em termos de $\vec{u}_{\hat{L}}$, $\vec{u}_{\hat{R}}$, $p_{\hat{L}}$ e $p_{\hat{R}}$, como evidenciado nas equações (2.54), (2.55) e (2.61) (ALBUQUERQUE, 2023).

Inicialmente, a equação 2.36 é resolvida com uma taxa de deformação volumétrica constante. Com isso, o campo de pressão é determinado. A equação de equilíbrio é resolvida usando o campo de pressão encontrado, que por sua vez determina o

campo de tensão e deslocamento. A convergência é verificada usando a equação (2.62):

$$\tau \geq \frac{\|p_\omega^{k+1} - p_\omega^k\|_\infty}{p_\omega^{k+1}} \quad (2.62)$$

Caso a convergência não seja atingida, atualiza-se o termo de deformação volumétrica através do método de deformação fixa usando a Interpolação de Rhie-Chow modificada. O método de deformação fixa é condicionalmente estável, obedecendo à relação da equação (2.63). A condição de estabilidade depende exclusivamente das propriedades do material. A solução finaliza quando o tempo total de simulação atinge o tempo final. Um fluxograma do algoritmo de solução é mostrado na Figura 4.

$$C = \frac{\alpha}{SK} \leq 1 \quad (2.63)$$

Os termos da equação anterior são definidos como:

- α , coeficiente de Biot
- S , coeficiente de armazenamento
- k , módulo de compressibilidade

2.5 MODELO POROMECÂNICO COM FLUIDO BIFÁSICO

Este módulo tem como propósito a apresentação do modelo poromecânico com fluido bifásico. Diferentemente dos outros modelos que serão empregados para reproduzir resultados, este serve unicamente para apresentar o modelo que será utilizado em trabalhos futuros.

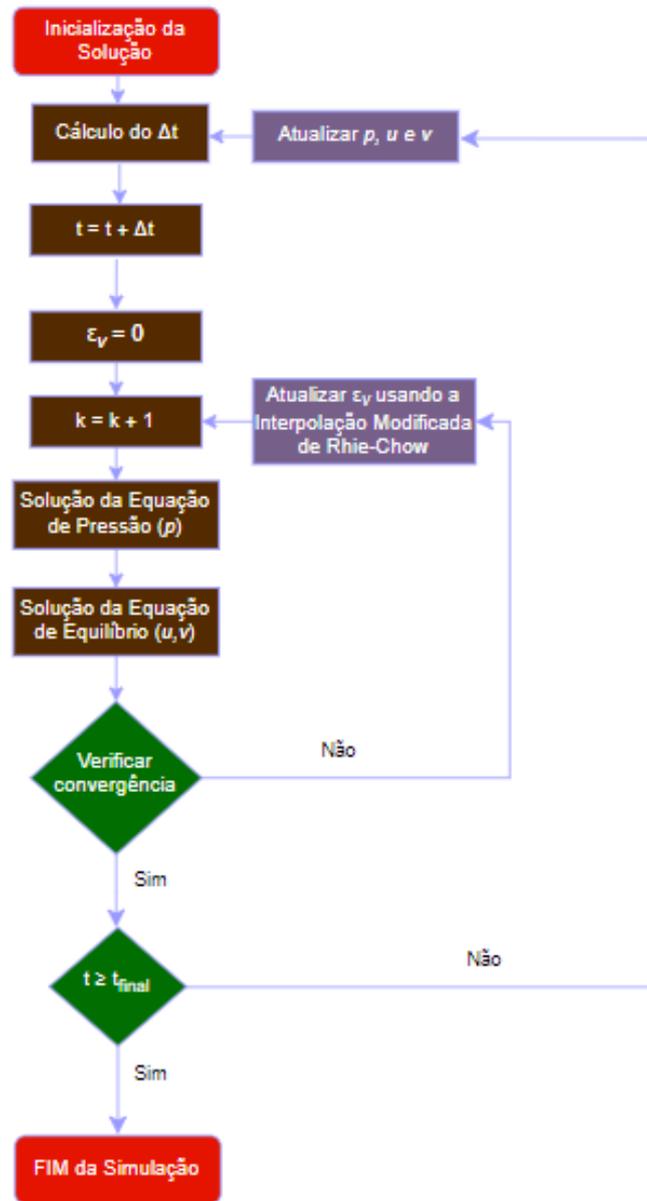
A equação de pressão, equação (2.64), incorpora a velocidade relativa entre o solo e o fluido, equivalente à equação de Darcy, equação (2.65), em um meio bifásico. A porosidade será mantida constante. Essa simplificação inicial será aprimorada em futuras pesquisas.

$$\alpha \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.64)$$

$$\vec{v}_i = -\lambda_i \mathbf{K} \nabla p_i, i = o, w \quad (2.65)$$

O modelo geomecânico incorpora a equação de equilíbrio, equação (2.66), conforme previamente abordado na seção anterior.

Figura 4 – Algoritmo de solução do modelo geomecânico



Fonte: Adaptado de ALBUQUERQUE (2023).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \nabla p \mathbf{I} = \vec{f} \quad (2.66)$$

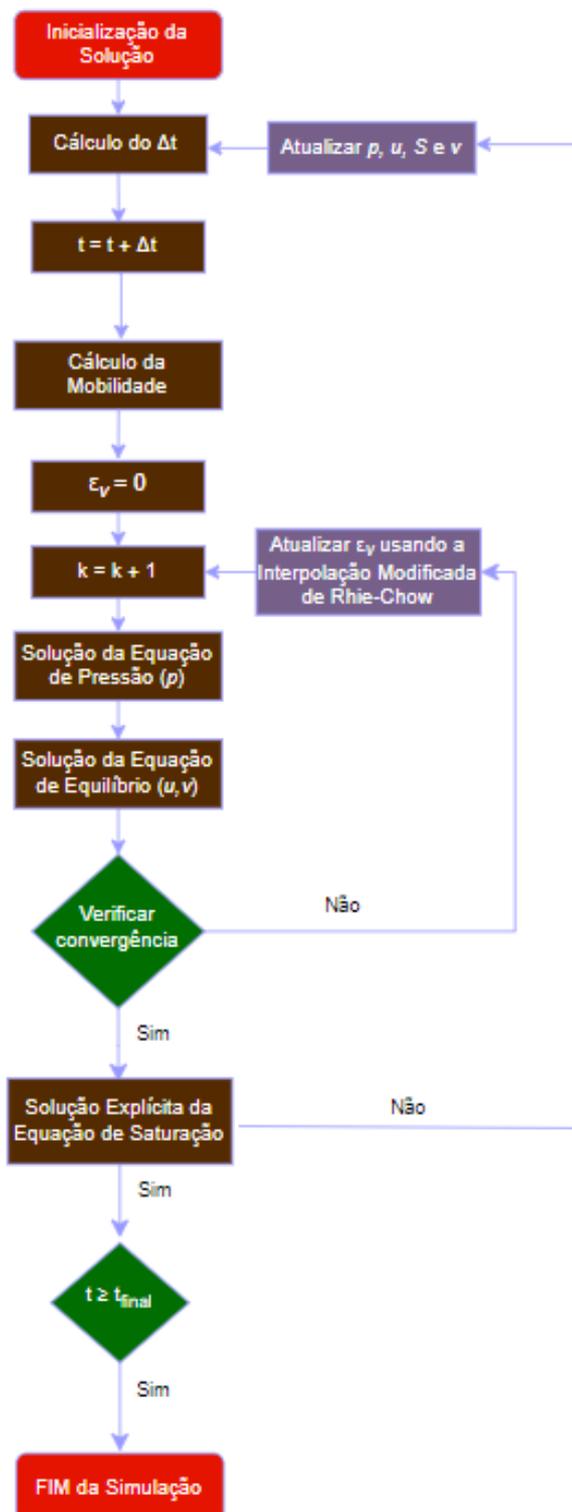
A equação de saturação assemelha-se à equação (2.9) do modelo bifásico incompressível, com uma distinção importante: inclui-se um termo de pressão devido à natureza ligeiramente compressível do fluido bifásico, como evidenciado na equação (HALLACK *et al.*, 2019):

$$\phi_{c_{r+w}} S_w \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) + Q_w \quad (2.67)$$

2.5.1 Modelo de Acoplamento Bifásico Levemente Compressível com Considerações Geomecânicas

O algoritmo para resolver o acoplamento entre o escoamento bifásico levemente compressível e a geomecânica é baseado no trabalho de (MURAD *et al.*, 2021) e segue o fluxograma da Figura 5. Conforme ilustrado na Figura 5, ele adota uma metodologia semelhante à utilizada no modelo geomecânico monofásico. A diferença significativa reside na introdução da equação de saturação e na atualização da mobilidade. A equação de saturação é introduzida imediatamente após a convergência do cálculo da equação de equilíbrio. A sequência de operações após a resolução da saturação envolve a atualização da mobilidade, seguida da repetição do mesmo ciclo descrito para o modelo monofásico levemente compressível.

Figura 5 – Algoritmo de solução do modelo poromecânico com fluido bifásico levemente compressível.



Fonte: Adaptado de ALBUQUERQUE (2023).

3 METODOLOGIA

3.1 ESTRUTURA DO CÓDIGO

A formulação numérica descrita foi idealizada no ambiente do *Visual Studio Code*, editor desenvolvido pela Microsoft. Utilizou-se a linguagem Python, pois os códigos herdados foram escritos nessa linguagem, códigos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa PADMEC, grupo no qual o aluno faz parte.

A estrutura do software consiste em realizar o processamento dos dados. As fases de pré-processamento são realizadas no *software* aberto *Gmsh*, por onde é gerado o domínio computacional com malha discreta e a especificação das condições de contorno. O pós-processamento é realizado no software de domínio público, Para-View, que facilita a visualização dos resultados a partir de um arquivo em formato VTK exportado pelo código do grupo.

A entrada dos dados é feita em um arquivo chamado de *startdat*. Nele estão contidos todos os parâmetros do poço, características do fluido e da rocha, tempo de simulação e dados numéricos.

O *impress*, biblioteca de pré-processamento desenvolvida pelo grupo, é utilizado para chamar todos os parâmetros relacionados à malha computacional desenvolvida no GMSH, como: estrutura de dados auxiliares, tamanho "médio" e área dos elementos.

O esquemático da Figura 6 resume as atividades necessárias a serem desenvolvidas nas análises numéricas, bem como as etapas de pré-processamento e pós-processamento:

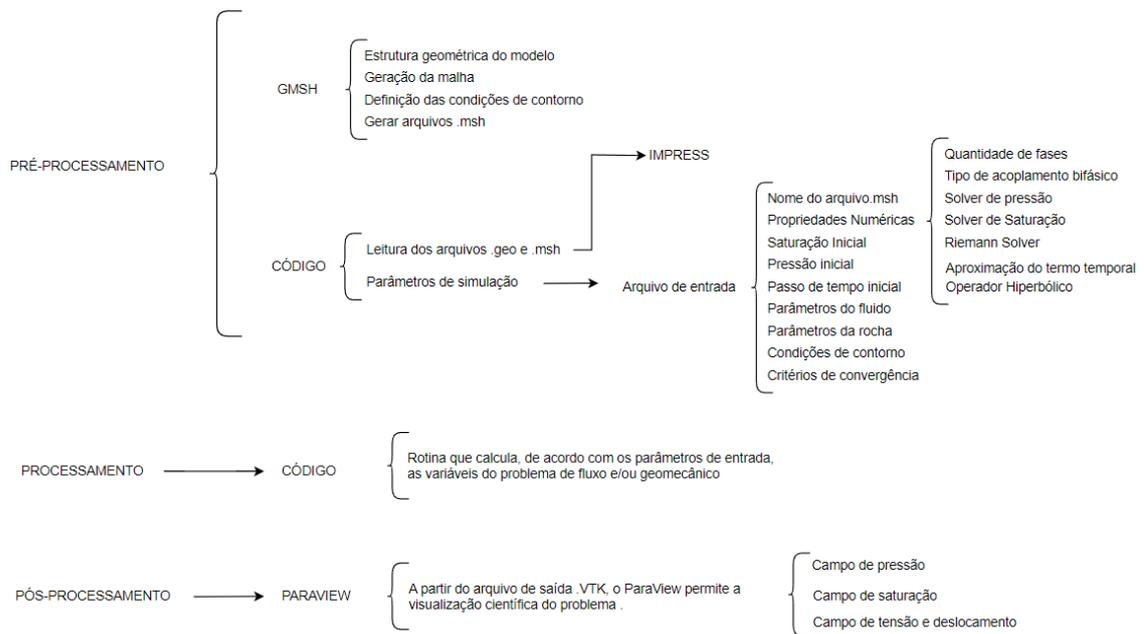
3.2 PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT

O problema de Buckley-Leverett foi simulado utilizando o software de fluxo bifásico desenvolvido pelo grupo PADMEC a fim de entender o funcionamento do mesmo e, posteriormente, ser possível realizar o acoplamento com o software de geomecânica em trabalhos futuros.

O modelo de Buckley-Leverett, adaptado por (CARVALHO, 2019), é resolvido numericamente utilizando as técnicas numéricas apresentadas anteriormente. O reservatório consiste em um domínio homogêneo e isotrópico com tensor de permeabilidade K dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Figura 6 – Fluxo de Trabalho para análise numérica



Fonte: O autor.

Parâmetros utilizados na simulação:

- O reservatório tem dimensões de 75 m no eixo y e 300 m no eixo x.
- Nas faces inferior e superior, o fluxo é nulo.
- Na face esquerda, a saturação é igual a 1 e o fluxo é de $1.944 \text{ m}^3/\text{s}$.
- Na face direita, a pressão é prescrita como 0 Pa.
- As saturações irreduzíveis são $S_{wi} = S_{ro} = 0$.
- A razão de mobilidade é unitária, e o modelo de Brooks-Corey é usado com expoentes $S_{wi} = S_{ro} = 2$.
- O passo de tempo calculado com base em um número de Courant de 0,3
- O tempo total de simulação é de 1.500 dias.

As soluções numéricas são comparadas com a solução semi-analítica encontrada em (PINDER; GRAY, 2008) para diferentes malhas computacionais. A análise conta com 8 refinamentos realizados utilizando elementos quadrilaterais. A análise vai desde uma malha grosseira com 8 elementos a malhas mais finas com 1024 elementos na direção longitudinal. A quantificação dos erros foi feita baseada na norma L1, equação (3.2) e taxa de erro L1, equação (3.3).

$$E_{L_1}^{S_w} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{VC}} |S_{w_{ana}}(x) - S_{w_{num}}(x)| \Omega_i}{\sum_{i=1}^{N_{VC}} \Omega_i} \quad (3.2)$$

$$R_{L_1}^{S_w} = \frac{\log(E_{L_1}^{S_w}(N_{CV_2})/E_{L_1}^{S_w}(N_{CV_1}))}{\log(N_{CV_2}/N_{CV_1})} \quad (3.3)$$

3.3 PROBLEMA MONOFÁSICO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL

A fim de verificar a formulação monofásica levemente compressível, implementou-se o problema unidimensional com fluido monofásico compressível em um meio poroso homogêneo e isotrópico, com tensor de permeabilidade \mathbf{K} dado pela equação (3.4). O reservatório possui um poço - produtor na face da esquerda como pode ser visto na Figura (11) e fluxo nulo em todas as outras faces.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A solução de referência usada para comparar com a solução numérica foi extraída do trabalho de (LI, 2012). As análises de erros foram conduzidas com auxílio das normas de erro L1, equação (3.5), e L2, equação (3.6), com a taxa de erro definida pela equação 3.7. A análise conta com diferentes densidades de malha que foram geradas diretamente sobre o domínio computacional com as subdivisões de: (1x5), (1x10), (1x20), (1x40), (1x80), (1x160) e (1x320).

$$E_{L_1}^p = \frac{\sum_{i=1}^{N_{VC}} |p_{ana}(x) - p_{num}(x)| \Omega_i}{\sum_{i=1}^{N_{VC}} p_{ana}(x) \Omega_i} \quad (3.5)$$

$$E_{L_2}^p = \frac{\sum_{i=1}^{N_{VC}} (p_{ana}(x) - p_{num}(x))^2 \Omega_i}{\sum_{i=1}^{N_{VC}} (p_{ana}(x))^2 \Omega_i} \quad (3.6)$$

$$R_L^p = \frac{\log(E_L^p(N_{CV_2})/E_L^p(N_{CV_1}))}{\log(N_{CV_2}/N_{CV_1})} \quad (3.7)$$

A seguir são definidos os parâmetros utilizados na simulação encontrados no trabalho de (LI, 2012):

- Dimensões do reservatório: comprimento horizontal de 609,6 (m) e vertical 3,048 (m).
- Porosidade = 0,2
- Compressibilidade da rocha = 1,5e-9 (1/Pa)

- Permeabilidade = 500 (m^2)
- Viscosidade da água = 0,000249 (Pa*s)
- Densidade da água = 0,001 (kg/m^3)
- Compressibilidade do fluido = 1,5e-9 (Pa)
- Água residual de água = 0,2
- Pressão no poço produtor = 13.100.044 (Pa)
- Pressão Inicial = 13.789.520 (Pa)
- Tempo total de simulação = 3 (D)
- Coeficiente de Fourier = 1

3.4 PROBLEMA DE Terzaghi

O problema consiste na aplicação de um carregamento sobre uma coluna poroelástica homogênea e isotrópica, totalmente saturada de água, que possui capacidade drenante apenas no topo, o que faz com que a solução ocorra apenas na direção vertical (SILVA, 2018). A Figura 7 contém informações sobre as dimensões do reservatório e a localização das condições de contorno. O tipo de condição de contorno e seus respectivos valores prescritos são definidos nas equações abaixo:

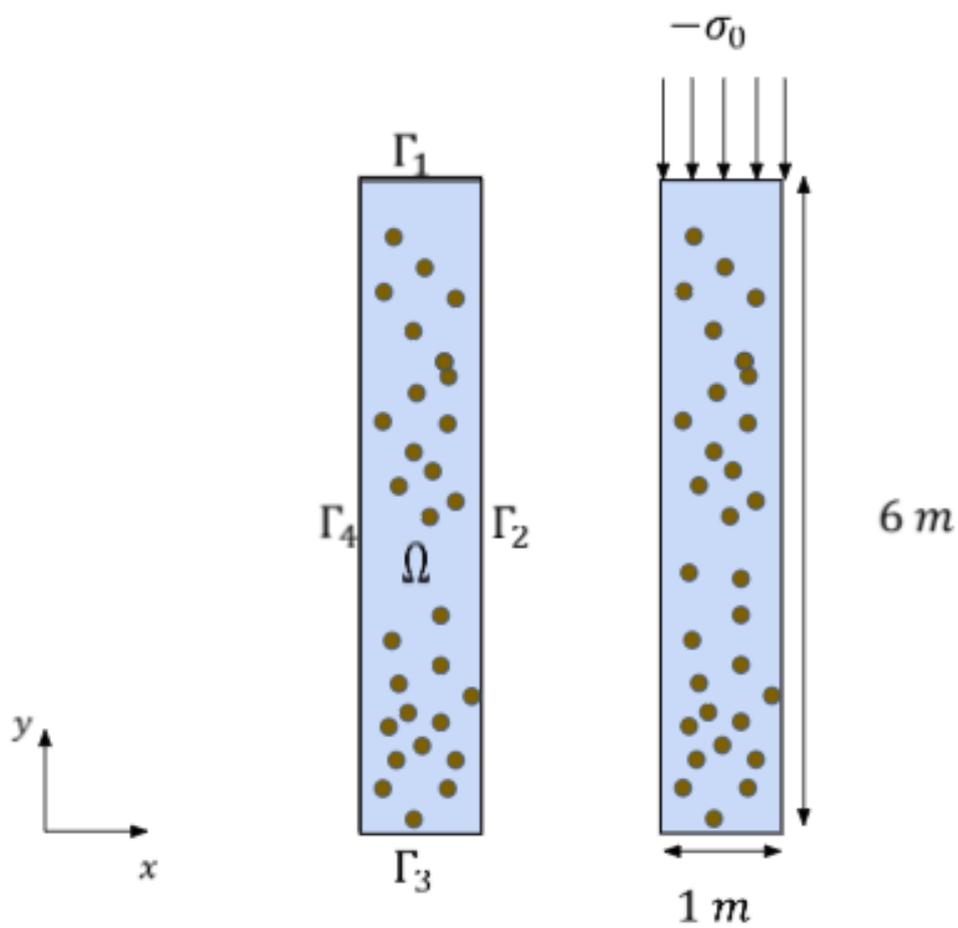
$$\Gamma_1 = \begin{cases} p = 0Pa \\ \sigma_x = 0Pa \\ \sigma_y = -1e6Pa \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} \vec{v}_t \cdot \vec{n}_{IJ} = 0m/s \\ u = 0m \\ \sigma_y = 0Pa \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\Gamma_3 = \begin{cases} \vec{v}_t \cdot \vec{n}_{IJ} = 0(m/s) \\ \sigma_x = 0Pa \\ v = 0m \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\Gamma_4 = \begin{cases} \vec{v}_t \cdot \vec{n}_{IJ} = 0(m/s) \\ u = 0m \\ \sigma_y = 0Pa \end{cases} \quad (3.11)$$

Figura 7 – Problema de Terzaghi: geometria e condições de contorno



Fonte: O autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão analisados e descritos os resultados obtidos por meio das técnicas numéricas discutidas nos capítulos anteriores.

Em alguns problemas, será possível quantificar os erros nos campos de pressão e saturação, comparando a solução obtida numericamente com a solução analítica.

4.1 PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT

O problema de Buckley-Leverett foi simulado utilizando o software bifásico. Os resultados podem ser vistos na Figura 8. Observou-se que à medida que a quantidade de elementos de discretização aumenta, a solução numérica tende para a solução analítica e conseguiu-se uma melhor captura do choque, conforme esperado. As malhas com 8 e 64 elementos, correspondentes às Figuras 8(a) e (b), respectivamente, são mais grosseiras e, portanto, representam de forma pobre a solução de referência. Enquanto que as malhas mais refinadas da análise, mostradas nas Figuras 8 (c) e (d), representam com acurácia a descontinuidade.

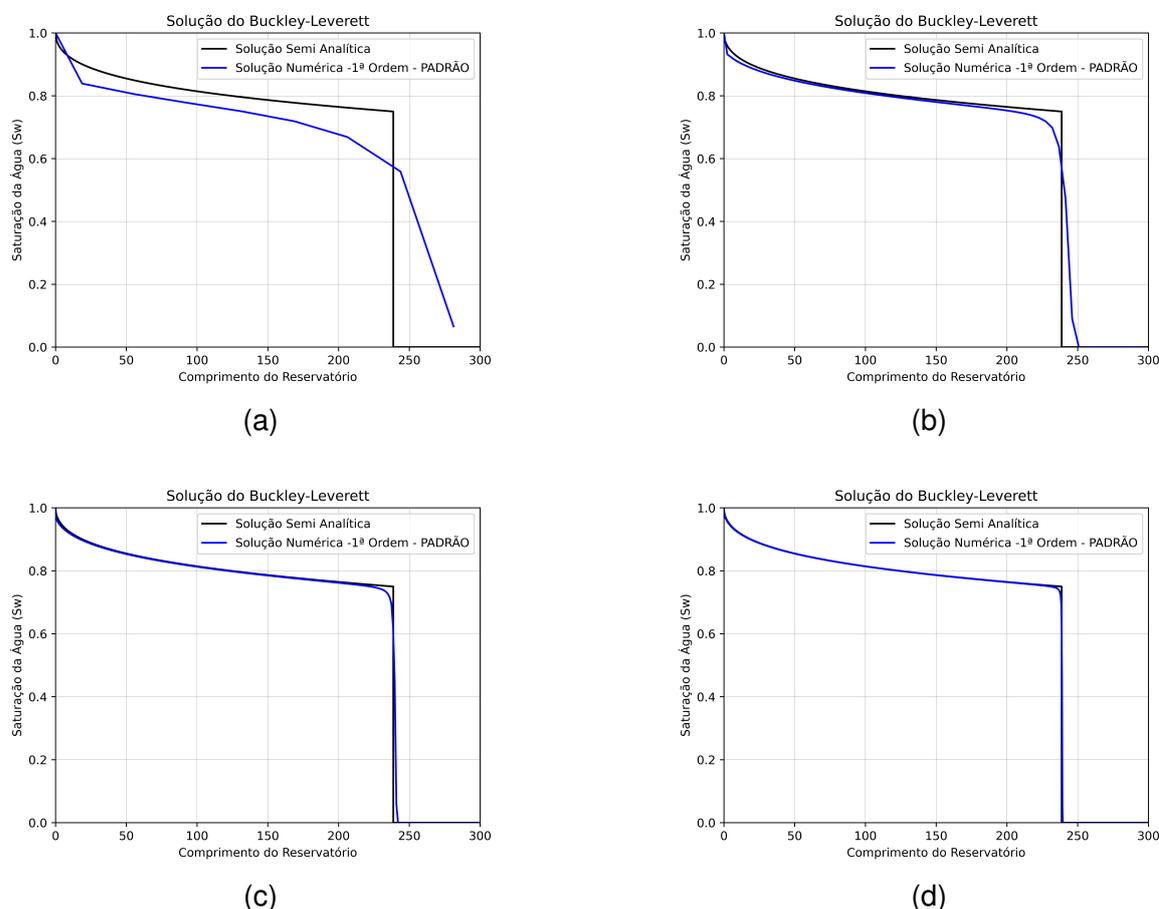
Além disso, também é possível comparar de forma quantitativa a discrepância entre as soluções numérica e analítica. A Tabela 1 reúne os valores obtidos dos erros associados à discretização da malha utilizando a norma L1. Nota-se uma tendência de decaimento do erro a zero em função do aumento da densidades de malha. Isto é igualmente observado no gráfico da função $\log(N)$ versus $\log(\text{erro})$, sendo N o número de divisões da malha, mostrado na Figura 9.

Tabela 1 – Valores dos erros entre as soluções numérica e analítica segundo a norma L1 para o Problema de Buckley-Leverett.

Divisões N	Erro L1	
	Valor	Taxa
8	0.1211384	-
16	0.0573394	1.08
32	0.0407242	0.49
64	0.0187404	1.12
128	0.0100084	0.90
256	0.0051836	0.95
512	0.0033404	0.63
1024	0.0014417	1.21

Fonte: O autor.

Figura 8 – Gráficos da solução numérica versus solução analítica para densidades de malha com: (a) 8 elementos; (b) 64 elementos; (c) 256 elementos e (d) 1.024 elementos.



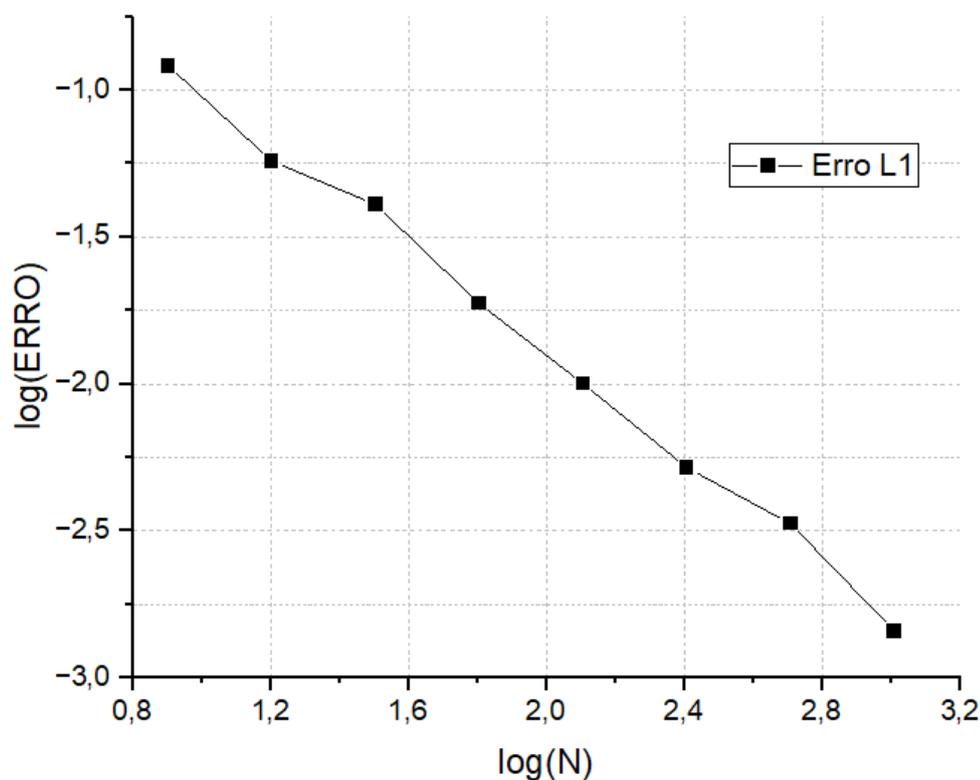
Fonte: O autor.

4.2 PROBLEMA MONOFÁSICO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL

Os resultados correspondentes ao problema monofásico levemente compressível podem ser vistos graficamente na Figura 10. A solução numérica foi plotada junto à solução de referência para diferentes densidades de malha e avaliadas num tempo total de 3 dias. Como era esperado, para uma malha grossa com 5 elementos, a solução numérica teve menor acurácia em comparação à solução analítica. À medida que a malha foi sendo refinada, resultados mais acurados foram obtidos, como pode ser visto nas malhas subsequentes, Figuras 10(b)-(e).

No gráfico da Figura 12 é evidente que à medida que o número de subdivisões aumenta o erro cai, tanto pela norma L1, quanto pela norma L2, indicando que a solução numérica tende à solução de referência, numa taxa aproximadamente 2 como esperado para um método de segunda ordem, como o usado. A Tabela 2 traz em detalhes os valores obtidos dos erros e das taxas de erros encontrados em cada norma.

Figura 9 – Gráfico do erro em função do número de elementos de discretização da malha para o problema de Buckley-Leverett.



Fonte: O autor.

Tabela 2 – Valores dos erros entre as soluções numérica e analítica segundo as normas L1 e L2 para o problema monofásico levemente compressível.

Divisões N	Erro L1		Erro L2	
	Valor	Taxa	Valor	Taxa
5	4.74×10^{-2}	-	5.10×10^{-2}	-
10	1.37×10^{-2}	1.79	1.45×10^{-2}	1.82
20	3.58×10^{-3}	1.93	3.78×10^{-3}	1.94
40	8.96×10^{-4}	2.00	9.47×10^{-4}	2.00
80	2.25×10^{-4}	1.99	2.37×10^{-4}	2.00
160	5.63×10^{-5}	2.00	5.94×10^{-5}	2.00
320	1.41×10^{-5}	2.00	1.48×10^{-5}	2.00

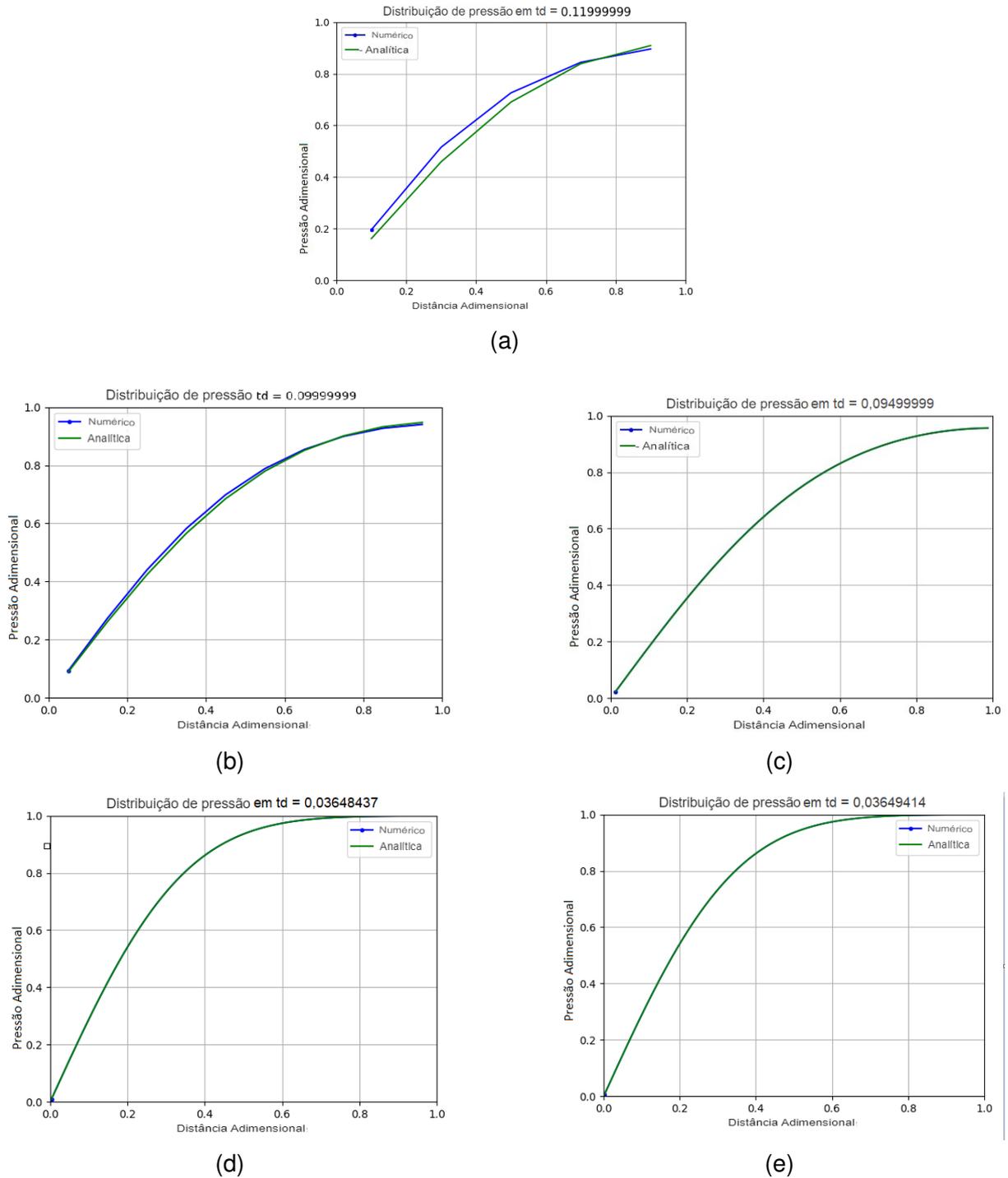
Fonte: O autor.

4.3 PROBLEMA DE TERZAGHI

Os resultados obtidos para o problema de Terzaghi são apresentados na Figura 13, que mostra a solução numérica versus a solução de referência em diversos instantes de tempo. Ao analisar a imagem, constatou-se que os dados obtidos numericamente representaram de forma acurada a solução analítica.

Os perfis de pressão e deslocamento são mostrados nas Figuras 14 e 15,

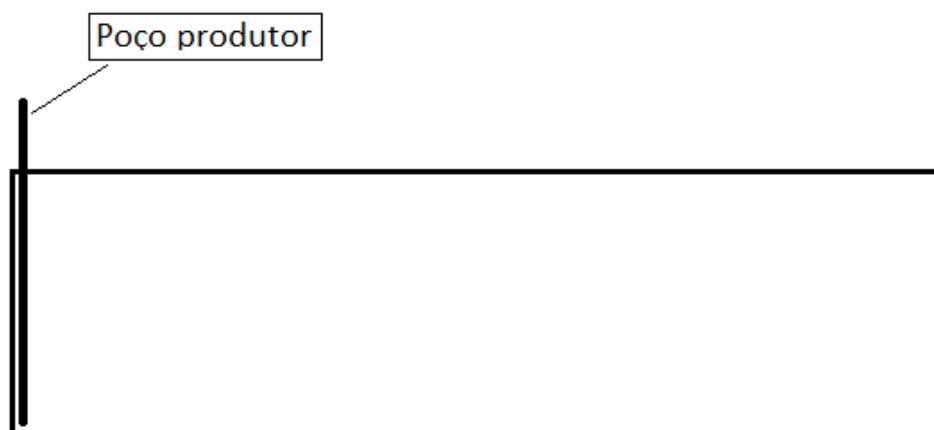
Figura 10 – Gráficos da solução numérica versus solução analítica para o problema monofásico levemente compressível com densidades de malha de: (a) 5 elementos; (b) 10 elementos; (c) 40 elementos; (d) 160 elementos e (e) 320 elementos.



Fonte: O autor.

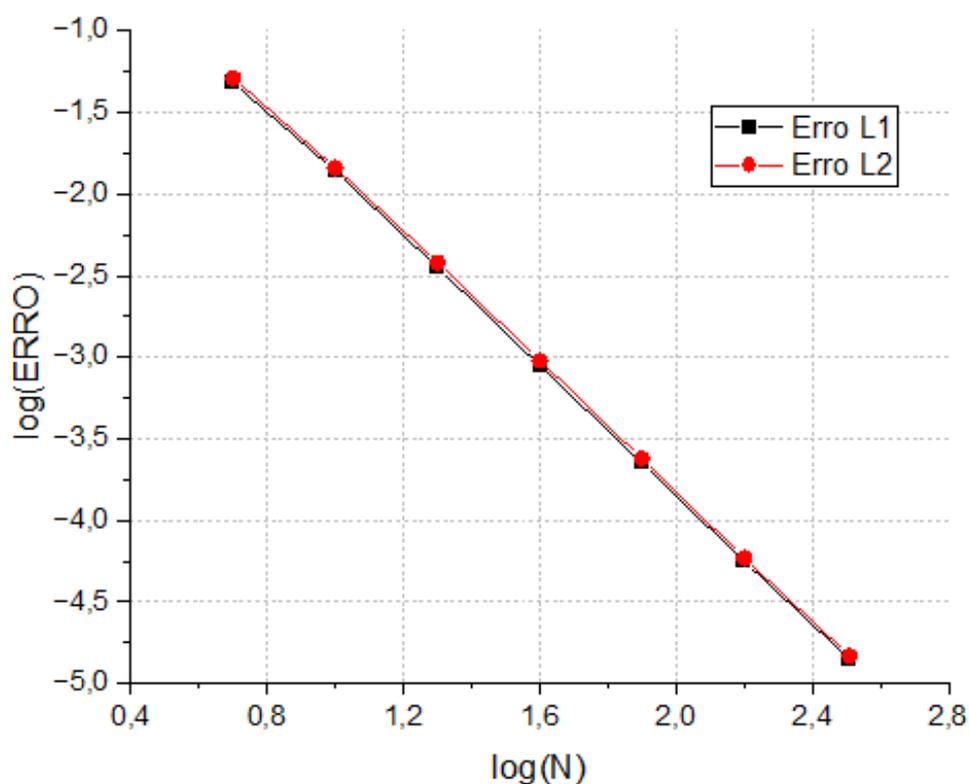
respectivamente. A pressão aplicada no topo do reservatório comprime o meio poroso causando uma drenagem de água, visto que o topo permite passagem de fluido. A

Figura 11 – Esquemático do Reservatório de Petróleo com um poço produtor na face da esquerda.



Fonte: (LI, 2012).

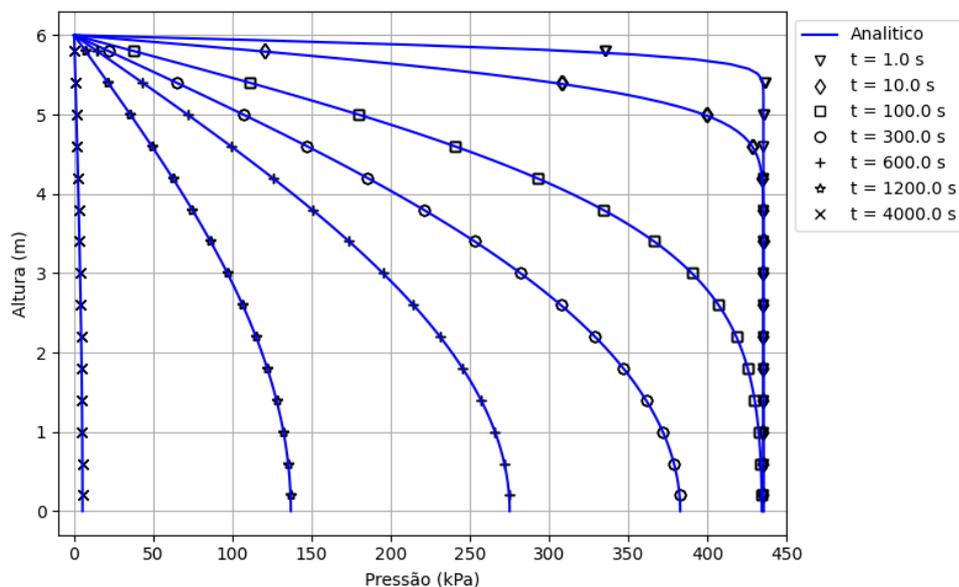
Figura 12 – Gráfico do erro em função do número de elementos de discretização da malha para o problema monofásico levemente compressível.



Fonte: O autor.

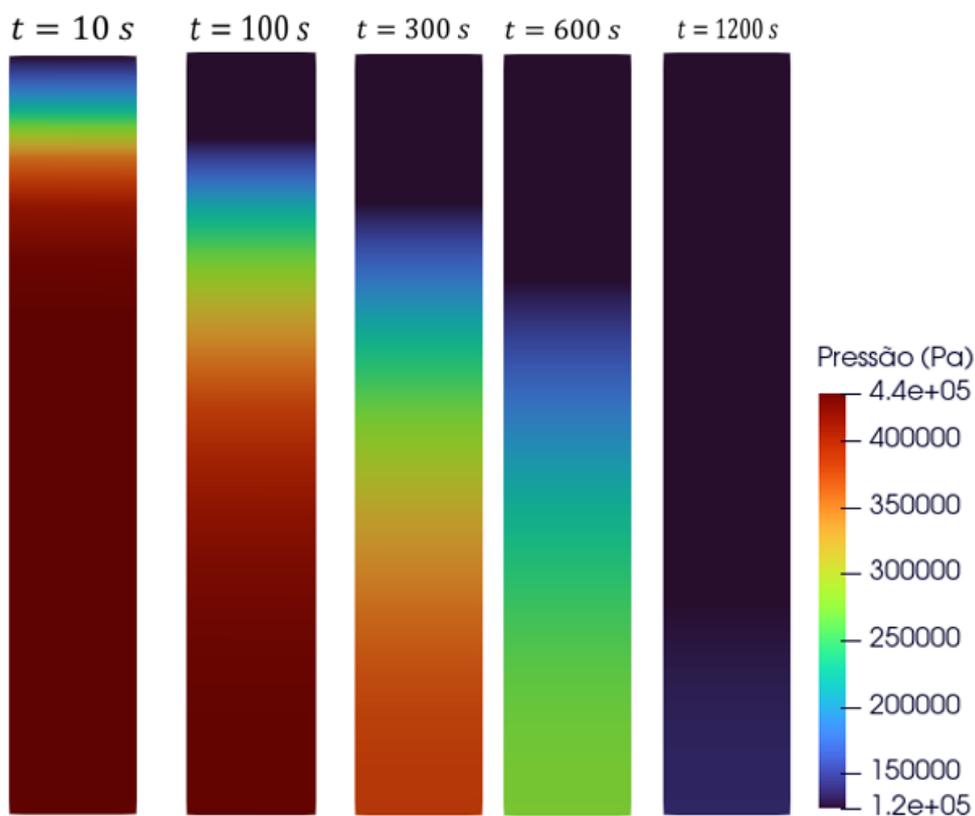
pressão mínima é 0 e fica localizada próxima ao topo do reservatório, já os maiores gradientes de pressão estão localizados no fundo. Esse gradiente decai ao longo do tempo, como é evidente na Figura 14. Os deslocamentos, por sua vez, são mais acentuados próximo ao topo. Como o deslocamento é nulo na base, os deslocamentos próximos dessas intermediações são menores.

Figura 13 – Problema de Therzaghi: Distribuição da pressão em meio poroso em diversos instantes de tempo com $\Delta t = 1s$.



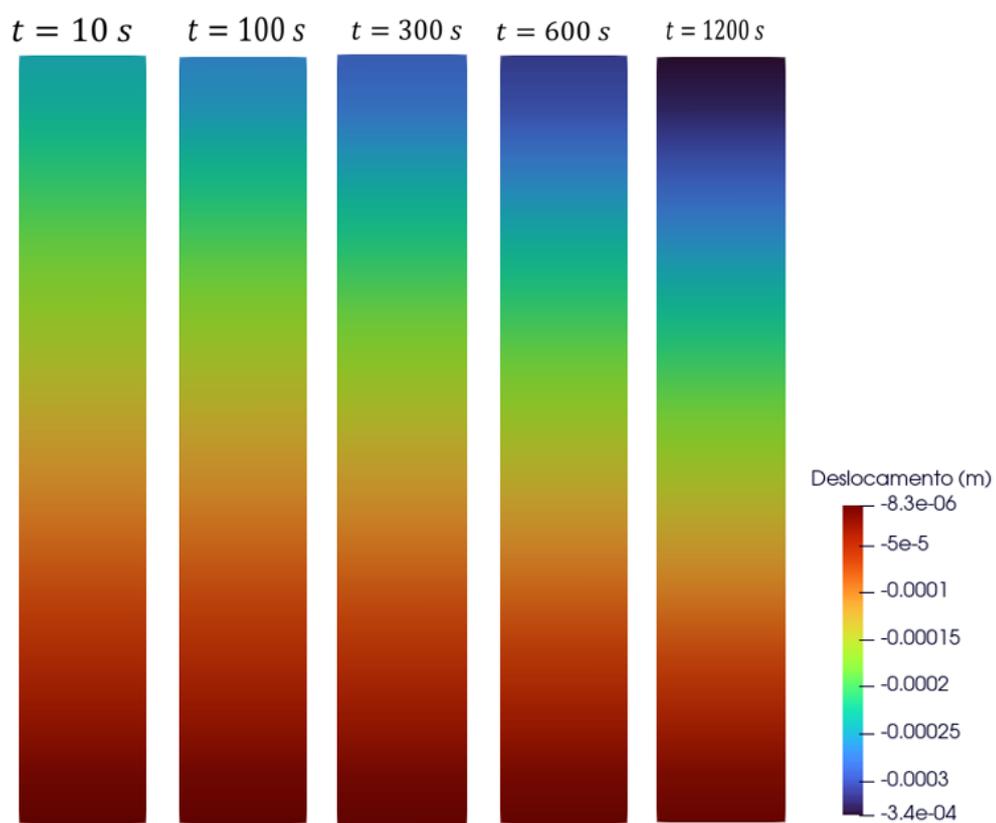
Fonte: O autor.

Figura 14 – Problema de Therzaghi: Distribuição de pressão com $\Delta t = 1s$.



Fonte: O autor.

Figura 15 – Problema de Therzaghi: Perfil de deslocamento vertical com $\Delta t = 1s$.



Fonte: O autor.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho destacou o Método dos Volumes Finitos na modelagem e simulação de sistemas complexos de reservatórios de petróleo. Foram abordados os fenômenos físicos multifacetados presentes nesses reservatórios. A pesquisa teve como objetivo principal investigar e contribuir para o desenvolvimento de metodologias de modelagem e simulação numérica de escoamentos em reservatórios de petróleo, com foco no acoplamento com a deformação da rocha.

Por fim, os objetivos específicos foram plenamente atingidos, abrangendo desde a compreensão dos modelos físico-matemáticos até a implementação em um ambiente integrado, bem como a verificação do código para cenários de referência. Consequentemente, confirmamos que o Método dos Volumes Finitos é uma ferramenta poderosa para a indústria de petróleo e gás, proporcionando uma melhor compreensão e previsão do comportamento dos reservatórios. Além disso, o trabalho desenvolvido investigou através da análise de casos a compreensão dos fenômenos físicos subjacentes nos reservatórios e como eles podem ser representados de maneira mais acurada por meio de abordagens numéricas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBUQUERQUE, P. V. P. *Finite volume method with multipoint flux and stress approximations using harmonic points for solving poroelasticity problems*. 2023.
- AZIZ, K.; SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*. Springer Netherlands, 1979. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GJ5TAAAAMAAJ>>.
- BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover, 1988. (Dover Civil and Mechanical Engineering Series). ISBN 9780486656755. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-XEaxd3hGzoC>>.
- BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1712886>>.
- BUCKLEY, S.; LEVERETT, M. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. *Transactions of the AIME*, v. 146, n. 01, p. 107–116, 12 1942. ISSN 0081-1696. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/942107-G>>.
- CARVALHO, D. K. E. *Uma formulação do método dos volumes finitos com estrutura de dados por aresta para a simulação de escoamentos em meios porosos*. 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/5336>>.
- CHEN, Z. Reservoir simulation - mathematical techniques in oil recovery. In: *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. [s.n.], 2007. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:60169672>>.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898718942>>.
- CONTRERAS, F. R. L. *Método dos Volumes Finitos Robustos para a Simulação de Escoamento Bifásico de Água e Óleo em Reservatório de Petróleo*. 2017. 118 p.
- CONTRERAS, F. R. L.; SOUZA, M.; LYRA, P.; CARVALHO, D. K. de. A mpfa method using harmonic point coupled to a high order modified optimal order detection method (mood) for the simulation of oil-water displacement in petroleum reservoirs. In: . [S.l.: s.n.], 2016.
- DARCY, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris: Dalmont, 1856.
- FANCHI, J. R.; PENNINGTON, W. D. An introduction to this special section : Reservoir Engineering. *The Leading Edge*, v. 20, n. 10, p. 1139–1139, 10 2001. ISSN 1070-485X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1487245>>.
- HALLACK, D. M. C.; FILHO, J. S. D. A. C.; COUTO, P. *Implementation of a Two-Phase Simulator Based on the Brinkman's Equation for Vuggy-Karstified Reservoirs*. 2019. (Offshore Technology Conference Brasil, Day 2 Wed, October 30, 2019). D021S026R005. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/29776-MS>>.
- HELMIG, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface. A contribution to the modeling of hydrosystems*. Berlin: Springer-Verlag, 1997. v. 78. 367 p.

HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. [S.l.]: John Wiley Sons, Ltd, 2007.

IBRAGIMOV AKIF, Z. E. I. I.; ANIKEEV, D. *Fundamentals in Peaceman Model for Well-Block radius For Non-Linear Flows Near Well*. 2022.

KOZDON, J.; MALLISON, B.; GERRITSEN, M. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport in porous media. *Computational Geosciences*, v. 15, p. 399–419, 06 2011.

LI, B. X. *A Collection of Case Studies for Verification of Reservoir Simulators*. 2012. 253 p.

MURAD, M. A.; CORREA, M. R.; BORGES, M. R.; LUÍZAR-OBREGÓN, J. A.; LOPES, T. V. A fixed-stress split strategy for two-phase flow in heterogeneous poroelastic media overlain by viscoelastic rock salt layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 380, p. 113768, 2021. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521001043>>.

PACHECO, T. B.; SILVA, A. F. C. da; MALISKA, C. R. Comparison of impes, sequential, and fully implicit formulations for two-phase flow in porous media with the element-based finite volume method. In: . [s.n.], 2017. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125986622>>.

PINDER, G. F.; GRAY, W. G. Essentials of multiphase flow and transport in porous media. In: . [s.n.], 2008. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:92977908>>.

SHELDON, J. W.; CARDWELL, W. T. J. One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. *Transactions of the AIME*, v. 216, p. 290–296, 1959. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:139482402>>.

SILVA, L. V. M. e. *Método dos Elementos Finitos Aplicado à Solução de Problemas Poromecânicos*. 2018. 226 p.

SOUZA, M. R. d. A. *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos "Verdadeiramente" Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*. 2015.

STONE, H. L.; GARDER, A. O. 1518-g - analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1961. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:92624440>>.

TERZAGHI, K. *Theoretical soil mechanics*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 1943.

VERRUIJT, A. *THEORY AND PROBLEMS OF POROELASTICITY*. 2016.

ZOBACK, M. D. *Reservoir Geomechanics*. [S.l.: s.n.], 2007.

(CONTRERAS *et al.*, 2016) (SILVA, 2018) (BUCKLEY; LEVERETT, 1942) (HIRSCH, 2007) (KOZDON *et al.*, 2011) (LI, 2012) (PINDER; GRAY, 2008) (HELMIG, 1997) (CARVALHO, 2019) (ZOBACK, 2007) (CHEN, 2007) (PACHECO *et al.*, 2017) (CHEN *et al.*, 2006) (CHEN, 2007) (SHELDON; CARDWELL, 1959) (STONE; GARDER, 1961) (CONTRERAS, 2017) (TERZAGHI, 1943) (BIOT, 1941) (DARCY, 1856) (AZIZ; SETTARI, 1979) (HALLACK *et al.*, 2019) (??) (ALBUQUERQUE, 2023) (SOUZA, 2015) (IBRAGIMOV AKIF; ANIKEEV, 2022) (FANCHI; PENNINGTON, 2001) (BEAR, 1988) (VERRUIJT, 2016) (MURAD *et al.*, 2021)