UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROBSON DIAS PIMENTEL

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU: uma análise das praxeologias do professor de matemática em conformidade com o livro didático

Caruaru
2023

ROBSON DIAS PIMENTEL

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU: uma análise das praxeologias do professor de matemática em conformidade com o livro didático

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida

Caruaru

2023

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Nasaré Oliveira - CRB/4 - 2309

P644s Pimentel, Robson Dias.
Sistema de equações do 1° grau: uma análise das praxeologias do professor de matemática em conformidade com o livro didático. / Robson Dias Pimentel. – 2023.
134 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Fernando Emílio Leite de Almeida.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2023.
Inclui Referências.

1. Equação do 1° grau. 2. Livro didático. 3. Praxeologia. I. Almeida, Fernando Emílio Leite de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2023-056)

ROBSON DIAS PIMENTEL

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU: uma análise das praxeologias do professor de matemática em conformidade com o livro didático

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticado Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática

Aprovada em: 30/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. FERNANDO EMÍLIO LEITE DE ALMEIDA
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Orientador)

____

Prof. Dr. EDELWEIS JOSE TAVARES BARBOSA
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Examinador Interno)

____

Prof. Dr. ROCHELANDE FELIPE RODRIGUES
Universidade Federal do Cariri – UFCA (Examinador Externo)

Dedico este trabalho a minha filha Rebeca, a minha esposa Julia e aos meus pais, Manoel e Rosilene.

AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho, passei por momentos de dificuldades e algumas vezes pensei em desistir, porém, algumas pessoas foram importantes para que eu buscasse forças e prosseguisse na realização deste sonho, por isto, gostaria de aproveitar este espaço para agradecer a todos que fizeram parte deste processo. Assim, agradeço...

...primeiramente a Deus por ter proporcionado este momento, pois sem ele nada do que conquistei seria possível. Reconheço que por minha capacidade tão limitada não teria condições de ser aprovado e muito menos ter concluído o PPGECM.

...a minha filha Rebeca, pois nos dias em que estava desanimado e sem forças, o seu sorriso me fez lembrar que tenho muitos motivos para seguir em frente, motivos para lutar por dias melhores e nunca desistir dos meus sonhos.

...a minha esposa Julia, por estar comigo em todos os momentos, me auxiliando na realização deste sonho. Por sua dedicação ao nosso lar e a nossa família, pelo seu apoio e companheirismo.

...aos meus pais, Manoel e Rosilene, por serem tão zelosos comigo, me ajudando sempre nos momentos mais difíceis. Apesar de não terem uma formação acadêmica, se dedicaram para que eu pudesse estudar e correr atrás dos meus sonhos.

...aos meus irmãos, Rogério e Ronaldo, por serem além de irmãos, amigos e companheiros que sempre estiveram comigo. E também as suas esposas, Joselma e Rosélia e aos seus filhos, Micaias, Isabel e Débora.

...a minha vó, Deta, que sempre esteve ao meu lado, auxiliando e me ensinando com as suas experiências de vida.

...a minha sogra Ivanir e ao meu sogro Luciano, pois são como pais para mim, me auxiliando e ajudando nos momentos difíceis. E também aproveito para agradecer aos meus cunhados, Luciano Jr. e Luana.

...aos meus amigos do grupo *nerd*, Amanda, Ana Larissa, Gutierry, Irlann e Matias, pois são além de amigos, irmãos que sempre acreditaram e torceram por mim.

...aos irmãos da igreja Missão da Bênção que estiveram orando por mim e pela realização deste sonho.

...a todos os meus colegas de trabalho que torceram pelo sucesso, e me auxiliaram nos momentos que precisei me ausentar para realizar esta pesquisa.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de maneira direta ou indireta para que eu pudesse está neste momento celebrando mais esta conquista na vida.

“Bem sei eu que tudo podes, e que nenhum dos teus propósitos pode ser impedido”. *(*Jó 42, 2)

RESUMO

Esta dissertação teve como objetivo analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas presente no livro didático das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula. Assim, esta investigação contou com o aporte teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Chevallard (1991) e colaboradores, por ter como objetos de estudos as praxeologias matemáticas e didáticas. Para análise do livro didático foi utilizado como referência o modelo apresentado por Bittar (2017) baseado em uma investigação sobre trabalhos que tiveram como objetivo a análise sobre livros didáticos. A metodologia se constituiu em uma abordagem qualitativa baseada na análise do livro de didático e no estudo de caso que teve como participante um professor de matemática do 8° ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal da cidade de Cumaru/PE. As análises foram discutidas e apresentadas por meio da identificação das praxeologias presentes no livro didático e na ação didática do professor. Os resultados apontaram que mesmo o professor tendo atuado como um agente regulador da conformidade e demonstrando interesse em está adequado a instituição livro didático, as praxeologias identificadas apresentaram tanto momentos de conformidades quanto de desconformidades. No entanto, apesar de ter optado em seguir um caminho diferente dos métodos de resoluções dos abordados no livro didático, verificou-se que não houve alterações quanto as praxeologias matemáticas e didáticas analisadas.

Palavras-chave: equação do 1° grau; livro didático; praxeologias.

ABSTRACT

This dissertation aimed to analyze the conformities between the praxeologies found on the content of systems of 1st degree equations with two unknowns present in the textbook of praxeologies used by the teacher in the classroom. Thus, this investigation relied on the theoretical contribution of the Anthropological Theory of Didactics (TAD) proposed by Chevallard (1991) and collaborators, as its objects of study were mathematical and didactic praxeologies. To analyze the textbook, the model presented by Bittar (2017) was used as a reference, based on an investigation into works that aimed to analyze textbooks. The methodology consisted of a qualitative approach based on the analysis of the textbook and the case study whose participant was a mathematics teacher from the 8th year of elementary school at a municipal public school in the city of Cumaru/PE. The analyzes were discussed and presented through the identification of praxeologies present in the textbook and in the teacher's teaching action. The results showed that even though the teacher acted as a regulatory agent of conformity and demonstrated interest in whether the textbook institution was suitable, the praxeologies identified presented both moments of conformity and non-conformity. However, despite having chosen to follow a different path to the resolution methods covered in the textbook, it was found that there were no changes to the mathematical and didactic praxeologies analyzed.

Keywords: 1st degree equation; textbook; praxeologies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática desempenha um importante papel na sociedade por ser algo tão essencial em muitas tarefas do cotidiano, é usada de forma significativa em vários contextos como: calcular valores que serão gastos em uma cesta básica, dimensionamentos e formas para a construção de casas, o troco a receber de uma determinada compra, também pode ser utilizada em grandezas físicas (distância, temperatura, velocidade, tempo, etc.)

No ambiente escolar, a matemática é introduzida já com as crianças a partir dos anos iniciais através da aritmética, em que é trabalhada os conceitos básicos das quatro operações fundamentais, multiplicação, divisão, adição e subtração. Para Brizuela (2006, p.17), "as crianças, nos mais diversos contextos socioeconômicos e culturais, estão imersas em um mundo de notações matemáticas desde o momento em que chegam ao mundo".

Sendo assim, no decorrer da vida do estudante na medida em que vai avançando seu grau de formação, os conteúdos matemáticos vão ficando cada vez mais sofisticados, e até mesmo mais complexos, uma vez que são introduzidos novos conceitos que generalizam a aritmética justificando formalmente alguns objetos matemáticos.

A partir destes conceitos, a álgebra é apresentada aos estudantes com uma proposta bem mais abrangente que a aritmética, por trabalhar não apenas com números, mas também, com sinais e letras na função de incógnitas e/ou variáveis que expressam termos gerais a diversas operações. É a partir de então, que alguns alunos começam a apresentar um pouco mais de dificuldades na compreensão de conceitos, que podem estar ligadas a fatores como o formalismo e dificuldade de abstração (Gil, 2008).

Um outro ponto que devemos destacar é a dificuldade de compreensão ainda na parte introdutória da álgebra, pois o não entendimento de alguns conceitos básicos podem implicar na falta de elementos que possibilitem a compreensão de conceitos mais abstratos. Segundo Da costa, et al. (2016, p.4) "os conceitos iniciais são a base para a formação de diversos conceitos algébricos posteriores, e quando não são trabalhados o suficiente, é provável que o déficit no ensino de álgebra se prolongue".

Assim, a álgebra é tida como algo bastante difícil e complexa, pois este termo para alguns pode significar, usar apenas letras para expressar os problemas matemáticos, passando o sentido de que os objetos fundamentais da álgebra são apenas expressões e equações (PONTES; BRANCO; MATOS, 2009).

Devido a este pensamento, é comum ouvirmos a expressão “os conteúdos de álgebra são muito difíceis”, “não consigo entender nada de álgebra”. De certa forma, ao deparamos com as equações pela primeira vez, ficamos surpresos, pois até aquele momento não tínhamos o contato com este tipo de linguagem matemática, no qual é possível associar uma determinada expressão a uma incógnita (ou variável), expressa na grande maioria das vezes pelas letras “x” e/ou “y”.

Desta forma, ao analisarmos os conceitos, associações e conteúdos matemáticos podemos compreender que o estudo da álgebra não está presente apenas a partir dos anos finais do ensino fundamental, mas está presente desde os anos iniciais, porém este estudo encontra-se baseado sobretudo nas ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.

De acordo com a BNCC, é imprescindível que o trabalho com algumas dimensões da álgebra esteja presente desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais nos processos de ensino e aprendizagem, neste caso, por meio das ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Porém, nesta fase de ensino não se utiliza, mesmo que de forma mais simples, o uso de letras para expressar regularidades (BRASIL, 2018).

Assim, destacamos a importância de os alunos terem domínio destes conhecimentos antes de ingressar definitivamente no ensino da álgebra com o uso de “letras”, já que, para um bom aprendizado dos conteúdos podemos deduzir que se faz necessário entender estas propriedades. Um outro fator importante para destacarmos, é a forma como o professor aborda os conteúdos de álgebra, podendo fazer com que o aluno não compreenda a propriedade da igualdade corretamente, isto é, usando termos que podem causar confusão na cabeça do aluno, como “passa para o outro e muda o sinal” ou aplicando de maneira equivocada, o inverso da operação, neste caso na multiplicação/divisão e potenciação/radiciação, fazendo com que eles internalizem e generalizem de forma mecânica este processo.

Neste sentido, é evidente que as metodologias e práticas do professor podem contribuir para uma melhor compreensão das propriedades matemáticas, e portanto, é preciso encontrar meios que possam propiciar uma melhor abordagem e apresentação dos conteúdos. Neste caso, destacamos a existência de inúmeras ferramentas de apoio pedagógico, porém daremos ênfase a um material que é muito usado pelo professor, o livro didático, por atribuir: sequências didáticas e apresentação de conceitos matemáticos de forma explicativa, entre outras funções.

Nesta perspectiva, o livro didático, na realidade da maioria das escolas, é praticamente o único instrumento de apoio do professor, e para os alunos constitui uma importante fonte de estudo e pesquisa (Frison et al, 2009), isto ocorre por inúmeros fatores, entre eles estão as más condições de trabalho, que em muitos casos inviabilizam a utilização de outros materiais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que "o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileira" (BRASIL, 1998, p.96).

Alguns autores como, Almeida e Farias (2016), Bittar (2017), Deixa, Chicote e Sobra (2019), Da costa e Dos Santos (2019), Silva et al. (2020), destacam a importância do livro didático na ação didática de ensino do professor, para tanto, as análises dos autores citados tiveram em comum o aporte teórico na TAD – Teoria Antropológica do didático proposta por Chevallard (1991, 1999) e colaboradores.

A Teoria Antropológica do didático surge das inter-relações entre as noções de saberes e instituições. É importante destacar que esta teoria considera que os saberes ensinados na escola, pode ter sido gerado fora dela e transposto até a sala de aula. Nesse sentido, "para que certo conhecimento seja ensinado na escola, é necessário um trabalho transpositivo que faça possibilitar algo que não foi criado para escola sofra as mudanças necessárias para poder ser reconstruído dentro da escola" (BOSCH e GASCÓN, 2007b, p.387).

Chevallard (1991), propõem que um saber não existe "no vácuo", isto é, "todo saber é o saber de uma instituição". O conceito de instituição "é definido como um dispositivo social total, que certamente pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar" (ARAÚJO, 2009, p.34). Logo, entendemos que o livro didático também é uma instituição, que por sua vez, possui saberes que precisam ser transpostos para a compreensão do aluno.

De certa forma, os saberes apresentados no livro didático podem auxiliar o professor na prática em sala de aula. Como destacamos, o livro didático é uma das principais ferramentas de grande parte dos professores, por isto, se torna indispensável entender se as práticas apresentadas pelo professor estão em conformidade com o livro didático ou não. Sendo assim, destacamos que as praxeologias matemáticas e didáticas se apresentam como elementos que podem caracterizar estas conformidades, ou seja, para estar em conformidade é preciso que as praxeologias apresentadas pelo professor estejam de acordo (conforme) com as mostradas no livro didático.

Nesta perspectiva, a nossa pesquisa procura investigar a ação didática utilizada pelo professor de matemática e a conformidade com o livro didático na sala de aula. Esse tema foi motivado ainda na formação inicial, na licenciatura em matemática. No Estágio Supervisionado, PIBID e no Residência Pedagógica, foi possível perceber que, em várias situações, a ação didática do professor não refletia com os saberes apresentados no livro didático, situação semelhante, acontecia com os alunos.

Diante das experiências vivenciadas na graduação, foi perceptível sobre o saber matemático, que a prática do professor revelava que existia um desconforto em relação aos conteúdos de álgebra, possivelmente, por que os alunos sentiam dificuldades de compreender o que era solicitado pelo professor nos problemas propostos.

Reforçamos a existência destas dificuldades, também durante a participação na disciplina de estágio supervisionado I. Foi notória as dificuldades enfrentadas pelos alunos principalmente quando o assunto da álgebra estudado era equações e sistema de equações do 1° grau, muitas vezes o professor precisava oscilar entre a abordagem do conteúdo sobre o ponto de vista do livro didático, daquelas em que eram buscadas em outras fontes como internet, livros e artigos. Ainda durante o estágio, na regência, o professor solicitou que fosse seguido o conteúdo na ordem em que o livro didático trazia, porém deixou claro que poderia ser utilizado como ferramenta metodológica outros materiais que abordassem o mesmo conteúdo.

Diante disto, surgiram algumas indagações que ao nosso ponto de vista, são problemáticas que precisam ser averiguadas, sendo assim, destacamos o seguinte questionamento: Quais as aproximações, distanciamentos e conformidades entre as praxeologias que encontramos no livro didático das utilizadas pelo professor em sala de aula sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas?

Assim, como referência teórica para discussão da temática da nossa pesquisa, decidimos utilizar a Teoria Antropológica do Didático, por acreditarmos que esta teoria possui elementos importantes para uma melhor análise e compreensão das práticas e dos saberes presentes no livro didático e na ação didática do professor em sala de aula. Deste modo, na teoria abordamos as noções de praxeologias matemáticas como tipos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, e as praxeologias didáticas através dos momentos de estudos ou didáticos, além da discussão sobre os saberes.

Para uma melhor leitura deste trabalho, organizamos a nossa dissertação, da seguinte forma: no primeiro capítulo a Introdução; no segundo capítulo os Objetivos; no terceiro capítulo a TAD – Teoria Antropológica do Didático; no quarto capítulo o livro didático; no quinto capítulo a Álgebra – Equações e sistemas de equações; no sexto capítulo os aspectos metodológicos; no sétimo capitulo a análise praxeológica de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas; e por fim as considerações finais.

O primeiro capítulo, refere-se a esta introdução onde tratamos das questões de pesquisa, apresentando os objetos nos quais iremos analisar, bem como as motivações que nos levaram a pesquisar sobre a temática proposta. Assim, houve destaque para a teoria que embasou esta pesquisa, ou seja, a teoria antropológica do didático, além de uma breve discussão sobre a matemática, a álgebra e o livro didático.

No segundo capítulo, trouxemos os objetivos da nossa pesquisa, organizados em objetivo geral e específicos. Estes objetivos surgiram através do questionamento que tratamos em nossa introdução, questionamento este que nos levou a propor uma pesquisa que analisasse as praxeologias presente no livro didático e na ação didática do professor em sala de aula sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

No terceiro capítulo, abordamos a Teoria Antropológica do Didático proposta por Ives Chevallard e colaboradores, no qual, tratamos na discussão aspectos importantes dos saberes (científico, a ensinar e ensinado), com enfoque na noção de praxeologias matemáticas (tipos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria), praxeologias didáticas (Momentos didáticos) e Conformidade e não conformidade. Para introduzir estes conceitos, apresentamos elementos iniciais que deram base para esta teoria, a Transposição Didática.

O quarto capítulo, é composto por uma discussão teórica acerca do livro didático, do seu uso e importância para as práticas pedagógicas do professor, em especial do professor de matemática. Trataremos também neste capítulo, do modelo de análise do livro didático proposto por Bittar (2017), este modelo servirá de base para analisarmos as propostas sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau de um livro didático de matemática do 8° ano do ensino fundamental – anos finais.

Destinamos o quinto capítulo, para uma abordagem sobre o objeto matemático álgebra – equações e sistema de equações. Neste, discutimos um pouco sobre a história, relatando acerca do surgimento da álgebra, pois acreditamos ser importante para o entendimento da importância da sua utilização no cotidiano. Trataremos também nesta parte do trabalho, sobre alguns pontos de vista relacionados ao ensino e a matemática.

Os procedimentos da pesquisa e os métodos são apresentados no sexto capitulo. Neste capitulo, tratamos dos aspectos metodológicos importantes para o desenvolvimento desta pesquisa, assim, apresentamos uma breve discrição sobre o local e participante, além das etapas e instrumentos de coleta de dados.

No sétimo capitulo, realizamos a análise das praxeologias matemáticas e didáticas mostradas no livro "Matemática Essencial" de Patano e Balestri (2018) e pela ação didática do professor participante desta pesquisa. Assim, verificamos a conformidade entre as praxeologias observadas no livro didático e nas aulas do professor.

Por último, discutimos acerca das considerações finais, no qual tratamos das considerações pertinentes da pesquisa apontando os principais destaques, assim, discorremos sobre os resultados obtidos através da análise dos dados. Diante do que foi apresentado nesta introdução, destacamos que no próximo capitulo, trataremos da teoria que irá embasar teoricamente esta pesquisa, a Teoria Antropológica do Didático.

2 OBJETIVOS

Neste capitulo, apresentamos os objetivos da nossa pesquisa que tiveram como referências os questionamentos apontados na introdução.

2.1 OBJETIVO GERAL

Analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas presente no livro didático das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar as praxeologias presentes no livro didático do professor de matemática sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas;
- Analisar as praxeologias do professor de matemática durante aulas de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas;
- Analisar as conformidades das praxeologias encontradas no livro didático com aquelas que emergiram da ação didática do professor de matemática sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

3 TAD - TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Nossa pesquisa tem como objetivo geral analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas presente no livro didático das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula.

Para alcançar nossos objetivos, utilizamos alguns elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) como: Noções de Praxeologia, Praxeologia Matemática, Praxeologia Didática, conformidade e sujeito adequado em certa instituição. Acreditamos que estes elementos são suficientes para analisarmos tanto o livro didático quanto a ação didática do professor em sala de aula, pois como veremos, esta teoria se baseia na noção de saberes e instituições, abordando aspectos centrais dos fenômenos didáticos, tendo como foco principal as praxeologias matemáticas e didáticas.

3.1 ELEMENTOS INICIAIS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

O termo transposição didática foi apresentado pela primeira vez no trabalho de Michel Verret, publicado em 1975, assumindo aspectos sociais da distribuição de atividades apresentadas pela escola e tendo como objetivo ajudar na construção do ser social. Em 1991, foi publicado por Chevallard o livro “A Transposição Didática”, no qual, foi relatado o estudo de caso realizado com sua colaboradora Marie-Alberte Joshua, tendo como base as ideias de Verret (GOMES, GOMES E TERÁN, 2014).

Yves Chevallard define a Teoria da Transposição Didática, como o trabalho ou o conjunto de transformações adaptativas que o saber a ensinar sofre, tornando-o apto a transformar-se em saber ensinado. O pesquisador entende que,

> um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ’trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p.39).

Neste caso, para que o aluno se aproprie do saber produzido pela comunidade científica, o saber científico (saber sábio), é necessária uma transformação ou adaptação em um saber acessível, que faça sentido para ele. Para Chevallard, a transposição didática se distingue em três momentos: o saber científico, produzido por cientistas e intelectuais, o saber a ensinar, contido em programas curriculares e livros didáticos, e o saber ensinado, que é aquele produzido em sala de aula.

O saber científico, conhecido também como saber sábio, é fruto do trabalho de cientistas, este tipo de conhecimento é apresentado nas palavras originais de seus autores. As produções científicas trazem uma linguagem formal, que se torna inacessível para pessoas mais leigas e para os próprios alunos. Por isso, este saber precisa passar por transformações que possibilitem chegar a um saber que seja acessível.

Por outro lado, o saber a ensinar é aquele saber procedentes dos livros didáticos, revistas, cartilhas, folhetos, propostas curriculares, entre outros. Dentre os materiais que trazem este saber, destacamos o livro didático (LD), por ser o principal elemento pedagógico utilizado pelos professores e alunos no contexto brasileiro, este item traz conceitos que muitas vezes fazem os estudantes ficarem confusos com a linguagem apresentada. Apesar da sua formalidade, o que vemos no LD é uma representação “adaptativa” de saberes originários ao saber científico, porém esta não é a etapa final dos saberes.

Nesta perspectiva, Chevallard (1991, p. 16) traz um outro tipo de saber correspondente à última etapa da transposição didática, “o saber tal como é ensinado, o saber ensinado, é necessariamente distinto do saber inicialmente designado como o que deve ser ensinado, o saber a ensinar”. O saber ensinado é aquele apresentado ao aluno no cotidiano da sala de aula. Percebemos então, que o saber passa por uma série de transformações até cumprir o seu papel no saber ensinado.

Para Chevallard, “todo saber é saber de uma instituição”. O conceito de instituição é bem amplo dentro da transposição didática. Escola, igreja, livros didáticos são exemplos de instituições. A teoria apresenta quatro tipos de instituições: produtivas (academias, empresas que fazem pesquisas), utilizadoras (escolas profissionalizantes, comércio), ensino (escolas, livros didáticos) e transpositivas (Ministério da Educação, diretrizes curriculares).

A transposição didática, traz um foco maior nas instituições transpositivas (noosfera), pois é nesta que ocorre com mais frequência a troca de saberes entre as instituições. Chevallard (1991) define a noosfera como “instituições de transposição de saberes”, na qual é pensado o funcionamento didático, ou seja, espaço em que é operado a interação entre o sistema didático e o ambiente social.

> A noosfera é o centro operacional do processo de transposição, que traduzirá nos fatos a resposta ao desequilíbrio criado e comprovado (entre os ideais e possibilidades dos saberes científicos expresso pelos matemáticos, pelos pais, pelos professores mesmos). (CHEVALLARD, 1991, p.34)

Neste caso, observamos que a noosfera geralmente está voltada para os conteúdos de ensino, isto é, o saber a ensinar. Evidentemente, é nesta instituição que ocorrem as transformações do saber científico para o saber a ensinar. Portanto, é por meio do livro didático (instituição de ensino) que nos é apresentado o saber a ensinar.

Na próxima seção, iremos discutir sobre alguns conceitos da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Assim, daremos enfoque aos principais elementos que subsidiaram este trabalho no que diz respeito às noções de praxeologias.

3.2 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A partir das contribuições e da necessidade de ampliação da teoria da Transposição Didática e do estudo de práticas institucionais existentes em uma instituição, nos anos 80 foi desenvolvida por Chevallard e colaboradores a Teoria Antropológica do Didático (TAD), que tem como conceitos primitivos objetos, pessoas, instituições, relação (pessoal) de um indivíduo com o objeto e relação (institucional) de uma instituição com o objeto.

Deste modo, podemos observar que a TAD funciona como uma forma de explicar a Transposição didática (TD) no ambiente (ecossistema) da sala de aula, isto é, a TAD é uma espécie de prolongamento desta teoria. Para Chevallard, a transposição didática tinha uma limitação em distinguir os objetos matemáticos, e que esta limitação o conduziu a

> propor uma teorização em que qualquer objeto pudesse aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto matemático, mas existe igualmente o objeto escola, o objeto professor, o objeto aprender, o objeto saber, o objeto dor de dente, o objeto fazer xixi, etc. (Chevallard, 1998, p.92)

Dentre os conceitos apresentados, o objeto (O) é considerado pelo autor como a base de toda a sua construção teórica. Neste sentido, Chevallard (2003, p.81) também destaca que um “objeto é toda entidade ou não, que existe para ao menos um indivíduo”. Com base neste mesmo pensamento, o autor propõe que “todas as coisas são objetos, as pessoas X e as instituições I também são objetos, assim como outras entidades que irei introduzir, são objetos de um tipo particular” (CHEVALLARD, 1996, p. 127).

Outros conceitos primitivos bastante relevantes para a teoria é a “relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O” e a “relação institucional com o objeto. Assim, o primeiro conceito está relacionado a todas as interações que o indivíduo X pode ter com o objeto O R(X,O), e o segundo a todas as interações existentes entre instituição e objeto $R_I(O)$, estas interações expressam o que seria a relação de conhecimento na TAD.

Ao entrar em uma instituição, a pessoa (X) pode se deparar tanto com objetos conhecidos quanto novos. Neste caso, quando a relação R(X,O) é não vazia, implica que X conhece O (CHEVALLARD, 1996). Logo, a aprendizagem irá ocorrer quando R(X,O) é alterada, Chevallard (1996, p.130) destaca que “há, pois, aprendizagem (para a pessoa X, relativamente ao objeto O) quando R(X,O) se altera.” De forma análoga, quando R(X,O) não se altera, podemos considerar que X não aprendeu.

Por sua vez, ao entrar na instituição I, cada sujeito poderá traçar caminhos diferentes. Neste caso, os sujeitos irão assumir posições (*p*) diferentes em relação ao objeto O, de maneira que estas posições irão implicar em distintas relações com esse objeto. Ao entrar em uma instituição I, o sujeito poderá introduzir alterações cognitivas no universo cognitivo (CAVALCANTE, 2018).

Deste modo, quando as alterações cognitivas estabelecem correspondência entre R(X,O) e $R_I(O)$, temos que R(X,O) é tida em conformidade com $R_I(O)$, indicando que X é considerado como um sujeito adequado. A relação de não conformidade de R(X,O), ocorre quando X assume a condição de um sujeito com relação desadequada do ponto de vista institucional.

> Uma pessoa X revela-se um sujeito adequado de I, relativamente ao objeto institucional O, quando a sua relação pessoal R(X,O) é considerada conforme a relação institucional $R_I(O)$. Poderá igualmente revelar-se sujeito desadequado, incapaz de entrar no contrato institucional C_I, e talvez por ser expulso de I. (CHEVALLARD, 1996, p.131)

Mais especificamente, a TAD nos permite uma análise sobre o objeto do saber de uma determinada instituição e do nível de conformidade existente entre as relações pessoais e institucionais. Para tanto, a determinação do nível de conformidade existente no interior de cada instituição entre as relações institucionais e as relações pessoais têm forte vínculo com as praxeologias.

De acordo com Araújo (2009), Chevallard desenvolveu a noção de praxeologia, como método de análise da TAD, esta noção se ancora em conceitos como: tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Levando em consideração estes quatro elementos, Chevallard (1999) afirma que a partir deles é possível analisar e modelizar as atividades matemáticas.

Desta forma, salientamos que na próxima seção iremos discutir acerca do elemento teórico da TAD, praxeologia. Este será importante para o desenvolvimento e análise dos objetos matemáticos em questão, ou seja, nos permitirá analisar as praxeologias presentes no livro didático das utilizadas pelo professor de matemática durante as suas aulas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas.

3.2.1 Noções de Praxeologia

Na TAD a noção de praxeologia está relacionada à didática, que tem se dedicado a estudar as suas propostas. Segundo Chevallard (2007, p. 719), a "didática se dedica a estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias se propõem a viver, a migrar, a mudar, a operar, a definhar, a desaparecer, a renascer, etc. no seio das instituições humanas".

Com isto, a noção de praxeologia é constituída pelos tipos de tarefas (T) cumpridas com formas de ser executadas, no qual é denominada como técnica (τ), e que para isto, é explicada por elementos tecnológicos (θ), e assim, justificada pela teoria (Θ). Neste sentido, a praxeologia (T, τ, θ, Θ) é composta por estes quatro elementos que formam os blocos prático-técnico (T, τ), que é o saber fazer, e o tecnológico-teórico (θ, Θ), que é referente ao saber.

De acordo com Chevallard (1999), a raiz da praxeologia se encontra nas noções de tarefa t e o tipo de tarefa T. Assim, quando t forma parte de um tipo de tarefa T, dizemos que existe t ϵ T. Por outro lado, uma tarefa e o tipo de tarefa associada é expressa, na grande maioria dos casos, por um verbo.

Desta forma, para que o comando seja apontado como um tipo de tarefa, é preciso que o verbo esteja acompanhado por uma expressão que indique o que ou onde a ação do verbo deverá ocorrer, por exemplo, *lavar* a caixa d'água, apenas o verbo *lavar* não indica uma tarefa, pois não expressa o que deverá ser lavado. Neste caso, quando dizemos *calcular o valor da função no ponto*…, estamos trazendo um tipo de tarefa. Porém, apenas a expressão *calcular*, diz respeito a um gênero de tarefas, que necessita de um determinante (CHEVALLARD, 1999).

Para Bessa de Menezes (2010), os tipos de tarefas também podem ser classificados em subtipos, ou seja, tarefas oriundas de tarefas principais. Por exemplo, o tipo de tarefa T, no qual denominaremos como "resolver equações de 2° grau", além disso, podemos citar a resolução da equação na forma reduzida como um subtipo da tarefa T, assim teremos: resolver a equação do 2° grau na forma $ax^2 + c = 0$.

Ainda no bloco prático-técnico, além dos tipos de tarefas T temos a sua parte de resolução denominada de técnica τ. A técnica é uma praxeologia que está relacionada à tarefa T, ou seja, uma maneira de realizar as tarefas $\tau \in$ T, neste caso, para a realização das tarefas T é necessário um modo de fazer (CHEVALLARD, 1999). Em uma instituição I, existe uma única técnica, ou pelo menos um pequeno número institucionalmente reconhecido, para um determinado tipo de tarefa T.

Um outro conceito da noção de praxeologia é a tecnologia θ, é entendido por um discurso racional cujo objetivo é justificar racionalmente a técnica τ. Por outro lado, seja qual for o tipo de tarefa T, a tecnologia relativa a T será sempre acompanhada por ao menos, um vestígio de tecnologia θ.

Além de justificar, a tecnologia θ também tem a função de explicar, tornar inteligível e esclarecer a técnica. Nesta função, se pretende expor porque é correto. Na matemática, a função de justificação predomina sobre a função de explicação, por meio da demanda demonstrativa. Em uma equação do segundo grau, para que se tenha raiz dupla real, o delta[1] precisa ser maior do que 0, caso seja menor, não teremos raízes dentro dos Reais, este tipo de afirmação pode ser explicado com a ajuda dos números complexos (CHEVALLARD, 1999, p.226).

Nesta perspectiva, ainda podemos destacar outro termo mais atual da tecnologia que é a função de produção de técnicas. Neste caso, é o que chamamos de tecnologias em potencial, ou seja, esperando técnicas, ou até mesmo, tecnologias que não são de alguma técnica, esta também ocorre quando uma tecnologia permite a geração de uma outra técnica.

Diante do que já foi apresentado das praxeologias, é preciso inserir um novo elemento que é a teoria (Θ). Do mesmo modo que as tecnologias cumprem a função de justificar/explicar/produzir as técnicas, as teorias têm a mesma funcionalidade diante das tecnologias. Neste contexto, para garantir a existência e o funcionamento de uma fórmula, é necessária uma determinada tecnologia que está associada a um conjunto teórico para conferir validade institucional, a partir de toda a complexidade do processo. Todos os conceitos apresentados fazem parte da organização ou praxeologia matemática.

3.2.2 Praxeologia Matemática

Podemos relacionar a Praxeologia Matemática (PM) ou Organização Matemática (OM) a toda a atividade matemática, que por sua vez é construída e desenvolvida em sala de aula. Neste caso, as OM são desenvolvidas a partir dos objetos matemáticos que são: os tipos de tarefas (T) realizadas e resolvidas pelas técnicas (τ) explicadas pelas tecnologias (θ) e justificadas por meio das teorias (Θ) (ALMEIDA (2016); BARBOSA (2011) e ARAUJO (2009)).

> Tal organização não é senão uma organização praxeológica de natureza matemática: ela se constitui em torno de um ou de vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que demandam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas, e mais ou menos justificadas por tecnologias matemáticas mais ou menos sólidas, que são desenvolvidas no quadro de uma teoria mais ou menos explícita (CHEVALLARD, 1997, p.35).

[1] Delta corresponde a expressão utilizada para encontra o valor do discriminante na formula de Bhaskara dada por $\Delta = b^2 - 4ac$.

Para Chevallard (1997), caracterizar e determinar as praxeologias matemáticas a serem trabalhadas, consiste no primeiro trabalho do professor ou pesquisador. Este tipo de trabalho pode ser realizado através da análise de documentos oficiais como programas e livros didáticos, nesta análise devem ser considerados os saberes de referências, ou seja, os saberes ensinados pelo professor e aprendidos pelos alunos (ALMEIDA, 2016).

De acordo com Almeida (2016, p.108), Barbosa (2011, pp.68-69), Araújo (2009, p.40) e Bessa de Meneses (2010, pp.82-83), o professor ou pesquisador precisa responder às seguintes questões:

- Existe clareza nos tipos de tarefa e eles são bem identificados? Eles são representativos? Os tipos de tarefa são pertinentes em relação às necessidades matemáticas? Está explicada a razão de ser dos tipos de tarefa?
- As técnicas propostas para a resolução dos tipos de tarefa foram efetivamente elaboradas? São suficientes para os tipos de tarefa propostas? Poderão sofrer evoluções?
- As tecnologias disponíveis dão conta das técnicas empregadas? As justificativas têm um distanciamento grande, ou estão próximas das formas canônicas matemáticas? Esclarecem as técnicas utilizadas?
- Os elementos teóricos são explicitados? Justificam a tecnologia empregada?

Neste sentido, podemos relacionar dois aspectos que a atividade matemática apresenta: o processo de construção de conhecimento e o processo de estudo ou processo didático. Desta forma, o processo de estudo pode ser modelado, como atividade humana, assim, este processo recebe o nome de praxeologia didática (CHEVALLARD, 1999).

3.2.3 Praxeológia Didática

A Praxeologia Didática ou Organização Didática (OD) ocorre quando está sendo colocada em prática uma Organização Matemática (OM), ou seja, é referente a forma que possibilita a realização do estudo de um determinado tema. Logo, a organização didática também será composta de tipos de tarefas, no qual será resolvida por meio de técnicas, explicadas pelas tecnologias, e assim, justificadas pelas teorias.

> Por organização didática podemos entender, a priori, o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta. O enfoque clássico em didática da matemática tem ignorado em geral os aspectos mais genéricos de uma organização de estudo de um tipo dado de sistemas didáticos. (CHEVALLARD, 1999, p 238)

Desta forma, o objetivo da praxeologia didática é permitir que uma praxeologia matemática possa existir com relação a um determinado saber, neste caso, esta organização permite que seja (re)construída ou transposta uma determinada organização matemática. De acordo com Chevallard (1999), qualquer caminho que seja seguido, levará a um momento. A partir de uma análise sobre as organizações didáticas nos permitirá distinguir seis momentos didáticos.

O primeiro momento didático está relacionado ao primeiro encontro com o tipo de tarefa. Por sua vez, essa situação não representa um momento único com o tipo de tarefa, pois em alguns momentos pode surgir o que denominamos reencontro com o mesmo tipo de tarefa. Quanto a isto, Chevallard (1999, p.43) afirma que, é possível "voltar a descobrir um tipo de tarefa como se volta a descobrir uma pessoa que se crê conhecer".

> Por mais que pareça paradoxal, isso acontece várias vezes em função dos ambientes matemáticos e didáticos nos quais ocorre: podemos redescobrir um tipo de tarefa como redescobrimos uma pessoa que acreditávamos conhecer. Assim o trabalho, de repente tão essencial em toda organização de estudo, está integrado na modelização do funcionamento didático (CHEVALLARD, 2007, p. 730).

O segundo momento didático, é o momento de exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica. Chevallard (2007) destaca que o ato de estudar problemas nos permite a criação e utilização de técnica que seja relativa a problemas do mesmo tipo, assim, com a elaboração de técnicas conseguimos resolver problemas rotineiros. Ainda segundo o autor, a elaboração de técnicas é bem mais do que a resolução de problemas isolados, é o coração da atividade matemática.

O terceiro momento didático consiste na constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. Este momento se relaciona com os dois primeiros momentos, já que, ao escolhermos uma técnica devemos explicá-la e justificá-la, para isto, necessitamos do bloco tecnológico-teórico. Alguns professores podem utilizar esta etapa como sendo o primeiro momento, dependendo da sua concepção.

O quarto momento didático é o trabalho da técnica, este também pode ser considerado como trabalho da organização matemática. É neste momento onde irá ocorrer o processo de melhoria da técnica. Assim, o objetivo deste momento é provar o domínio da técnica utilizada para realizar os tipos de tarefas.

O quinto momento didático é o momento de institucionalização, será a partir de então que iremos perceber quais serão os objetos que passarão a constituir a organização matemática em definitivo, e quais não farão mais parte.

> O momento de institucionalização é, de início, aquele que, na construção “bruta”, emergiu do estudo. Pouco a pouco, vai ser separado, por um movimento que engaja o futuro, o “matematicamente necessário”, que será conservado, e o “matematicamente contingente”, que, logo, será esquecido. (CHEVALLARD, 1998, p.112)

O sexto momento didático é o da avaliação, este momento está relacionado diretamente com o momento da institucionalização. O objetivo deste, é avaliar o que foi aprendido com a organização matemática em questão, ou seja, será averiguado o que uma pessoa ou grupo dominam sobre o conjunto de praxeologias (técnicas, tecnologias e teorias) para realização de tipos de tarefa.

> (...) este momento de reflexibilidade, onde qualquer que seja o critério e o juiz se examina o que vale o que se já aprendeu, este momento de reflexão que, apesar das recordações de infância, não é em absoluto invenção da Escola, participa de fato da “respiração” mesma de toda atividade humana. (CHEVALLARD, 1999, p 245)

Os momentos didáticos apresentados nesta seção, permitem que o professor ou pesquisador possa analisar os processos didáticos e determinar se estão ou não em conformidade com as instituições relacionadas. Conforme Chevallard (1998), estes momentos também contribuirão para reflexão acerca do problema de realização dos diferentes momentos de estudo.

3.2.4 Conformidade

A noção de conformidade está relacionada ao ato de concordância, de se pôr de acordo, ou seja, "duas instituições noosféricas estão em conformidade quando elas compartilham do mesmo ponto de vista sobre o ensino e aprendizagem de um objeto em um ambiente escolar" (KASPARY, 2019, p.229). Em contrapartida, a não conformidade poderá ocorrer quando há divergências na concepção da forma de ensino e aprendizagem de um objeto.

Desta forma, podemos citar como exemplo de não conformidade, um grupo de professores com um discurso sobre o ensino de "equações do 2° grau" longe daqueles mostrados nos livros didáticos e por pesquisadores da educação matemática, ou seja, os tipos de praxeologias apresentadas não condizem com as indicadas pelas instituições I.

Diante disto, Chevallard (1998) destaca que um tipo de técnica especifica não é universal para todas as instituições. Assim, pensando na sala de aula como uma instituição I que tem os alunos como sujeito x, alguns agentes irão servir como regulador da conformidade ou não conformidade com as instituições.

> [...] podemos pensar que a instituição sala de aula – a qual chamaremos, a partir deste momento, de I1 – tem em seus sujeitos X1 – os alunos –, objetos O1 – saberes em jogo – e seus agentes que irão regular a conformidade, ou a não conformidade, com a instituição I1, de acordo com a intencionalidade estabelecida – são os professores, o contrato didático e o institucional estabelecidos, as avaliações, entre outros, que aparecerão de acordo com o momento necessário. (BESSA DE MENEZES, 2010, p.75)

Neste caso, observamos que o professor é um dos agentes que pode assumir o papel de regulador da conformidade ou não conformidade, assim, se a instituição I for o livro didático, a relação R(X, O) pode ser satisfeita a medida em que as praxeologias são representadas conforme a instituição, mostrando uma adequação do sujeito quando é instituída uma relação pessoal.

Para Chevallard (2003), o processo de intenção em transformar ou alterar a relação R(x, o) indica a ideia de sujeito adequado. Neste caso, o sujeito adequado irá existir em uma instituição I, quando se estabelece a relação pessoal R(x, o). Logo, existirá uma conformidade na relação institucional R I (o), ou seja, as expectativas da instituição estão sendo realizada pelo sujeito x, isto é, conforme almeja a instituição.

Desta forma, o sujeito x ainda pode utilizar alguns meios como regulador do processo de conformidade. De acordo com Chevallard (1999), a avaliação institucional pode ser designada como um mecanismo que vai através de alguns agentes, determinar a conformidade ou não conformidade de R(x, o) com R(I, o). Assim, a avaliação como um dos agentes controladores da conformidade ou não conformidade em I, pode fazer com que o sujeito X busque moldar o interesse no objeto O, o que pode ocorrer um desejo apenas com a conformidade, isto é, no intuito de está adequado, realiza o conjunto de sequências esperadas pela instituição.

Embora haja a tentativa do sujeito em está adequado com a instituição, alguns fatores poderão contribuir para a não conformidade tornando-o em um sujeito desadequado, quero dizer que a utilização de outros mecanismos que não fazem parte da instituição em destaque pode apresentar praxeologias distintas, pois ao entrar em concordância com a instituição, o sujeito x se submete aos contratos didáticos estabelecidos.

Quanto a definição de sujeito adequado e desadequado, Chevallard (1996, p.131) destaca que,

> uma pessoa X revela-se um sujeito adequado de I, relativamente ao objeto institucional O, quando a sua relação pessoal R (X, O) é considerada conforme a relação institucional RI (O). Poderá igualmente revelar-se sujeito desadequado, incapaz de entrar no contrato institucional CI, e talvez acabe por ser expulso de I. É aqui que engrena um desenvolvimento relativo à avaliação institucional, isto é, relativo aos mecanismos segundo os quais I é levada a pronunciar, através de alguns dos seus agentes, um veredito de conformidade (ou não conformidade) de R (X, O) com RI (O) (CHEVALLARD, 1996, p.131).

Neste sentido, Almeida (2016, p.93) entende que, “em toda instituição, existem os mecanismos próprios que definem, e estes são considerados como regras que dão vida às instituições”. Assim, podemos citar o contrato didático como um dos mecanismos que pode afetar o sistema didático e a relação didática – é na relação didática onde encontram-se o professor e os alunos que se sujeitam a um contrato institucional.

Para que o contrato didático exista, são necessários alguns fatores transpositivos. De acordo com Bosch e Gascón (2007b), grande parte das pesquisas que tratam de fenômenos do ensino da matemática, trazem ao menos um componente transpositivo essencial. Logo, o contrato didático, apresenta uma relação entre professor – aluno – saber, identificadas nas negociações, e a transposição didática, resultante da necessidade de criação de um modelo que apresente com mais clareza as atividades matemáticas e didáticas, irão caminhar juntos numa instituição didática (ALMEIDA, 2016).

Entretanto, é a noção de praxeologias matemática, presente na Teoria Antropológica do Didático, que Chevallard (1999) apresenta como uma ferramenta capaz de modelizar com mais detalhes as práticas matemáticas. O pesquisador acrescenta ainda que, os pressupostos subjacentes da TAD, ao contrário de uma visão de mundo particular, reconhecem que todas as atividades humanas podem ser descritas como um único modelo, resumido pelo termo praxeologia.

No próximo capítulo, traremos a discussão sobre o livro didático, abordando assim, aspectos históricos que contribuíram para a acessibilidade e qualidade dos livros didáticos. Também iremos apresentar algumas pesquisas sobre análise do LD por meio da TAD e o modelo de análise do LD proposto por Bittar (2017).

4 O LIVRO DIDÁTICO

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir sobre a importância do livro didático como ferramenta metodológica e mostrar o modelo de análise do livro didático proposto por Bittar (2017). Desta forma, destacamos como alguns autores tratam sobre a temática, o livro didático, pois acreditamos ser importante esta discussão, devido ao fato de estar presente em quase todas as aulas de boa parte dos professores, sendo assim, esta ferramenta didática pode apresentar meios que contribuem para uma aprendizagem significativa, ou seja, trazem conceitos importantes acerca dos conteúdos abordados, fazendo em sua grande maioria "pontes entre o abstrato e o concreto". Nesta perspectiva, também discutiremos sobre o modelo apresentado por Bittar (2017), pois este servirá como base para analisarmos o livro didático escolhido nesta pesquisa.

4.1 O LIVRO DIDÁTICO

Em 1937, foi criado com incentivo do ministro Gustavo Capanema o Instituto Nacional do Livro Didático (INL), esta instituição era responsável em formular políticas sobre o livro didático. Este órgão foi responsável por dar legitimidade ao LD, sendo precursor no aumento de sua produção (DE BAIRRO, 2009).

Apesar da criação do INL, só um ano depois, mais especificamente no dia 30 de dezembro de 1938, iniciou-se no Brasil, a discussão sobre o livro didático (LD) por meio do decreto de lei n° 1.006. No artigo 3° deste decreto, instituiu-se que, só poderiam ser adotados no ensino das escolas pré-primárias, primárias, normais, profissionais e secundárias, os livros que tivessem autorização prévia, concedida pelo Ministério da Educação. Por sua vez, esta medida só começou a valer a partir de 1° de janeiro de 1940.

Por volta do ano 1971, o Instituto Nacional do Livro (INL) passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF). Cinco anos mais tarde, ocorreu a extinção do INL, e o órgão que ficou responsável pela execução do programa foi a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME), que teve a contribuição dos Estados com recursos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), onde este fazia as aquisições dos livros.

No ano de 1985, através do Decreto-Lei n° 91.542, foi criado o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Este decreto estabeleceu algumas mudanças no PLIDEF como, a indicação do livro pelos professores, reutilização do livro didático, entre outros. Segundo Rojo e Batista (2003), o PNLD foi responsável por definir as diretrizes que orientam as relações do Estado com o livro didático.

Já no ano de 1996, o MEC estabeleceu critérios para avaliar o LD, mostrando uma preocupação maior pela qualidade. A partir de então, os livros inscritos no PNLD foram submetidos a uma análise e avaliação pedagógica (Soares, 2002). Deste modo, os livros que não se enquadravam nos critérios estabelecidos eram excluídos. Estes critérios foram responsáveis pela qualidade dos livros que iam para a escola.

Segundo Miranda e Luca (2004, p.127) daquele momento em diante, “estipulou-se que a aquisição de obras didáticas com verbas públicas para distribuição em território nacional estaria sujeita à inscrição e avaliação prévias, segundo regras estipuladas em edital próprio”.

Atualmente, o governo federal conta com mais dois programas a respeito do livro didático além do PNLD, o primeiro foi criado em 2004, PNLEM – Programa nacional do Livro Didático para o Ensino Médio, o segundo em 2007, PNLA – Programa Nacional do Livro didático para Alfabetização de Jovens e Adultos. Ainda criado em 2007, temos o Programa Nacional do Livro Didático em Braille, destinado a alunos portadores de necessidades especiais.

Diante do que foi exposto nesta seção, observamos que a discussão sobre o livro didático no Brasil foi algo que perdurou por muitos anos, e vários órgãos tiveram participação para que tivéssemos livros didáticos de qualidade que pudessem ser usados por professores como ferramenta pedagógica, considerando a sua participação no processo de escolha.

Desta forma, destacamos que o livro didático pode ser utilizado com uma ferramenta pedagógica muito importante no processo de ensino e aprendizagem. Logo, se faz necessário averiguar as contribuições deste no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, indicamos que na próxima seção iremos realizar um levantamento bibliográfico com a finalidade de observarmos como os autores tratam a respeito do tema levando em consideração o aporte teórico da Teoria Antropológica do Didático.

4.1.1 Algumas pesquisas sobre o livro didático

Nesta seção, apresentaremos alguns trabalhos que tiveram em sua pesquisa, análise de livro didático. Acreditamos ser importante observarmos como alguns autores desenvolveram suas temáticas e quais as contribuições destas análises para as respectivas e futuras pesquisas que envolvem o livro didático. Deste modo, traremos para discussão alguns, artigos, teses e dissertações que possam contribuir de maneira significativa para uma abordagem reflexiva sobre a importância do livro didático.

Desta forma, tivemos a pretensão de buscar subsídios para desenvolvimento desta pesquisa, realizamos uma revisão sistemática da literatura, relacionadas com análise do livro didático e a Teoria Antropológica do Didático. Este levantamento foi realizado através dos bancos de dados do Google Acadêmico[2], Attena Repositório Digital da UFPE[3] e Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES[4].

Utilizamos como metodologia para busca, trabalhos realizados no período de 2016 a 2022, o motivo pela escolha deste período se deu por ser os mais recentes a partir da escrita desta pesquisa. No processo de busca, utilizamos as seguintes palavras-chave: "Análise do livro didático" e "Análise do livro didático e Teoria Antropológica do didático". Assim, para termos resultados satisfatórios com relação ao tema desta pesquisa foi preciso fazer uma filtragem dos dados obtidos através de uma leitura de seus respectivos resumos, levando em consideração, os objetivos, referencial teórico e resultados.

O primeiro trabalho analisado trata-se de um artigo científico dos autores Costa e Santos (2019), intitulado "O estudo de quadrilátero notáveis no livro didático de Matemática: um olhar para a organização matemática''. Este artigo teve como objetivo investigar a organização matemática presente em um livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de quadriláteros notáveis.

Os autores utilizaram como metodologia, uma pesquisa de abordagem qualitativa com caráter de análise documental. Na investigação constataram que o tipo de tarefa mais presente na obra foi T_M - *Determinar a medida de uma grandeza*

[2] Disponível em https://scholar.google.com.br/
[3] Disponível em https://attena.ufpe.br/
[4] Disponível em https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

geométrica associada a um quadrilátero notável. Foi observado também que as técnicas aplicadas se centraram essencialmente em visualização e no uso das apresentações geométricas, com aporte do bloco tecnológico-teórico que estava apoiado nos tipos e propriedades de ângulos, nas definições e propriedades dos quadriláteros e nas operações fundamentais.

O segundo trabalho que analisamos, foi um artigo científico com o título "Análise crítica dos livros didáticos de matemática de Moçambique à luz da Teoria Antropológica do Didático", dos autores Deixa, Chicote e Sobra (2019). Este artigo teve como objetivo analisar como o ensino da trigonometria é proposto nos livros didáticos de Matemática de Moçambique. A pesquisa é de caráter qualitativo tendo como foco uma análise documental.

Foram analisados o capítulo sobre trigonometria de quatro livros didáticos do Ensino Secundário. Como resultado, após observarem 123 tarefas, concluíram que os livros não cumprem as sugestões dos programas de Ensino de Matemática, sugerindo assim, a oportunidade para investigar as percepções dos professores de matemática de Moçambique sobre as diferentes classificações das tarefas.

Uma outra pesquisa que apresentamos tem como autores Trindade e Ferreira (2016), o seu trabalho trata da "Educação financeira nos anos finais do ensino fundamental: um olhar para o livro didático". Este trabalho teve como objetivo Investigar a Educação Financeira no âmbito escolar no Ensino Fundamental, analisando os livros didáticos de matemática aprovados pelo PNLD articulando com a proposta do PCN.

Por outro lado, a pesquisa desenvolvida por Do Lago Mendes (2018), procurou discutir "Números binários em uma coleção de livros didáticos de matemática", com objetivo analisar as organizações praxeológicas matemática e didática referentes ao estudo de números binários em uma coleção de livros didáticos de matemática do Brasil do Ensino Fundamental - Anos Finais avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2014). Como resultado, após identificar apenas um tipo de tarefa, duas técnicas, nenhuma tecnologia e nenhuma teoria, o autor concluiu que a coleção analisada é caracterizada como uma praxeologia pontual, ou seja, praxeologia que apresenta um conjunto de praxeologias desenvolvidas em torno de um único tipo de tarefa (T).

Somando-se aos anteriores, temos, um artigo dos autores Almeida e Farias (2018), que tem como título “Aporte da teoria antropológica do didático numa análise institucional sobre o saber probabilidade para o ensino médio”. O objetivo geral consiste em apresentar uma análise institucional sobre o conceito de Probabilidade que justifica a construção de um modelo epistemológico dominante para o ensino do conceito de Probabilidade. Após uma análise teórica, os autores identificaram um problema didático associado à abordagem do conceito de probabilidade.

A pesquisa de Mestrado de Santana (2016), com o título “Análise das Praxeologias Matemáticas em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio: O caso da função afim”. Esta pesquisa tem como objetivo geral analisar as abordagens de função afim realizadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. Como ferramenta de análise foi adotada a noção de praxeologia matemática desenvolvida por Chevallard, na Teoria Antropológica do Didático. Como resultado constatou a existência de divergências entre as abordagens dos livros didáticos e da sequência didática. Verificou-se ainda que os livros didáticos dão mais importância aos aspectos relacionados ao bloco prático técnico da praxeologia matemática, em detrimento dos aspectos relacionados ao bloco tecnológico teórico.

Ainda sobre a revisão sistemática de literatura, encontramos um artigo de Pachêco e Silva (2019), que teve como objetivo, analisar atividades sobre comparação de áreas de uma coleção de Livros Didáticos dos anos finais do ensino fundamental identificando se sua ênfase resolutiva se respalda nos aspectos geométricos e numéricos. Os resultados mostraram que as atividades acerca da comparação de áreas são pouco exploradas, pelo menos, na coleção Matemática na medida certa. Verificou-se, ainda, que as atividades sobre comparação de áreas quando são propostas na presente coleção de Livros Didáticos abordam com mais ênfase procedimentos numéricos para sua resolução, e a técnica mais usada se trata da contagem de ladrilhos.

Diante dos trabalhos apresentados observamos que a Teoria Antropológica do Didático foi muito importante para análise dos livros didáticos, pois possibilitou que os autores identificassem praxeologias presentes nesta instituição. Destacamos que foram encontrados além destes outros trabalhos sobre análise do livro didático, porém escolhemos enfatizar apenas os que foram abordados nesta seção, por acreditarmos ser suficientes para termos uma ideia da dimensão e da importância de se analisar o livro didático.

Todos os trabalhos apresentados apesar de analisar as praxeologias do livro didático tendo como base a Teoria Antropológica do didático, não tiveram um modelo de análise seguido, isto é, não apresentaram de maneira explicita um tipo de modelo proposto por algum autor que pudesse nortear neste processo, o que não quer dizer que nenhum deles seguiram um “roteiro” específico para esta análise, porém, a utilização de um modelo de análise do livro didático poderia orientar os autores destes trabalhos quanto aos procedimentos de escolha do material a ser analisado, divisão das partes do conteúdo, elaboração e identificação das praxeologias e análise das organizações modeladas.

Com isto, apresentamos na próxima seção um modelo de análise do livro didático, no qual, foi proposto pela autora Marilena Bittar (2017). Este modelo de análise, foi utilizado em nossa pesquisa como um mecanismo norteador do processo de análise do livro didático, orientando quanto aos meios essenciais para atingir os objetivos propostos no início deste trabalho.

4.2 MODELO DE ANÁLIE DO LIVRO DIDÁTICO

Neste momento da pesquisa, discutiremos sobre o modelo de análise do livro didático proposto por Bittar (2017). Desta forma, destacamos que este modelo remete aspectos importantes com um ponto de vista voltado para pesquisas sobre a temática, que por sua vez, foram realizadas e/ou orientadas pela autora.

Como já observado na seção anterior, existem um bom acervo de trabalhos que tiveram como objetivo principal, a análise do livro didático, diante disto, surgem alguns questionamentos, como é feita esta análise? Quais caminhos seguir para realização desta análise? Em busca de responder alguns questionamentos sobre as suas e também pesquisas de seus orientandos, Bittar (2017) elabora com o apoio de uma revisão sistemática sobre estas pesquisas, um material que traz os principais meios utilizados na análise dos livros didáticos.

Com base nisto, a autora enfatiza que os caminhos metodológicos apresentados neste modelo são compostos por cinco fases que são:

> a escolha do material (livro) a ser analisado; a separação entre Curso e Atividades propostas (divisão do material para análise); elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático; elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático; análise das organizações modeladas. (BITTAR, 2017, p. 369)

Para a autora, as fases três e quatro não precisam ser realizadas e nem apresentadas separadamente (nossa pesquisa uniu estas duas fases para facilitar o processo de análise, e que o processo de análise é dinâmico, isto é, com diversas idas e vindas entre o material de estudo.

Na primeira fase do modelo, que consiste na "*escolha dos livros a serem analisados*", a autora destaca que a escolha do material deve ser feita de acordo com o objetivo da pesquisa, ou seja, este processo precisa estar alinhado com o que queremos investigar. Quando o objetivo principal da investigação não é a análise do livro didático, a escolha do livro dependerá do que estamos buscando, neste caso, a escolha terá que ser feita no intuito de responder a questão central da pesquisa (BITTAR, 2017).

Em alguns trabalhos, o objetivo principal está vinculado ao tipo de pesquisa que pode ser documental, no qual a análise pode ser feita em mais de um livro, para isto, o autor precisa definir bem a metodologia, apresentando claramente o processo de escolha, definindo cada etapa. Outros trabalhos trazem análise de apenas um livro, neste caso, o autor precisa informar na metodologia o porquê desta exclusividade.

Na segunda fase descrita pela autora, denominada por *"separando parte curso e parte atividades propostas para análise"*, podemos separá-las em duas partes, sendo a primeira denominada *"Curso"*, e a segunda *"Atividades Propostas"*. Na primeira parte desta segunda fase (*Curso*), temos a explanação de definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. Neste caso, os autores dos livros didáticos trazem, até mesmo de forma implícita, o que para eles os alunos daquele nível de escolaridade precisam aprender, bem como, os meios que os alunos buscam para resolver o que é pedido.

Na segunda parte desta fase, *"Atividades Propostas"*, busca-se "analisar cada atividade identificando qual é a tarefa do aluno e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa, tendo como apoio a(s) praxeologia(s) anteriormente identificada(s)" (BITTAR, 2017, p.373). Para sabermos qual a técnica que o autor gostaria que fosse usada, buscamos elementos presentes no manual do professor, este tipo de análise nos permite identificar como os autores do livro didático querem que sejam resolvidas as atividades.

Para a terceira fase, elaboração do quarteto Praxeológico Matemático, é necessária uma leitura bem minuciosa do LD. Neste momento, é importante ficar atento a cada detalhe que apresentem justificativas para as técnicas apresentadas. Desta forma, para elaboração do quarteto praxeológico matemático, a leitura do LD levará em consideração todos os elementos presentes em cada página.

Na parte de elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático, o pesquisador identifica as praxeologias matemáticas (tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) apresentadas no livro didático, ou seja, é elaborado um esquema (uma espécie de analise *apriori*) mostrando estas praxeologias de maneira organizadas, pois serão elas que servirão de base para analise ou comparação em outro livro didático ou em praxeologias presentes em uma aula.

A quarta fase, Elaboração da Praxeologia Didática, está voltada ao seguinte questionamento: Como ensinar esse conteúdo? Isto, dependerá muito da forma como o professor acredita que ocorre o processo de aprendizagem, caso esta crença esteja baseada em reforço e estímulo, constantemente o aluno será convidado a repetir os procedimentos, agora se o professor considera outros meios de aprendizagem que torne o aluno protagonista no processo, será realizada formas que possam favorecer este comportamento do aluno (BITTAR, 2017).

O processo de elaboração/identificação das praxeologias didáticas, também pode ocorrer de outra forma, por meio dos momentos didáticos propostos por Chevallard (1991), no qual, é composto pelos seis momentos de estudo (especificado no capítulo anterior). Nesta parte, é detalhado cada momento didático relacionando-os com as praxeologias matemática presentes.

Por fim, temos a quinta e última fase proposta neste modelo, que trata-se da Análise das Praxeologias Modeladas, é nesta fase que é interpretada as informações obtidas, ou seja, o pesquisador irá organizar todos os dados, para assim, realizar uma análise do que foi apresentado nas fases anteriores.

No próximo capítulo, abordaremos aspectos históricos sobre o desenvolvimento e construção da álgebra, além de discutirmos sobre a álgebra no contexto escolar da educação básica.

5 A ÁLGEBRA

Este capítulo tem como objetivo apresentar de forma sucinta a história da álgebra e trazer uma breve discussão sobre as equações e os sistemas de equações do 1º grau. Enfatizamos que a apresentação do conteúdo de álgebra se deu devido o objeto de estudo de nossa pesquisa ser sistemas de equações do 1º grau. Neste sentido, estudar a história da álgebra é importante para entendermos todo o processo de desenvolvimento e evolução da sua aplicabilidade e como seus conceitos estão presentes na matemática moderna.

5.1 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE O SURGIMENTO DA ÁLGEBRA

A álgebra por muito tempo ficou conhecida como a parte da matemática que estuda, entre outras, a resolução de equações. Baseado neste ponto de vista, podemos destacar que o surgimento da álgebra é tão antigo quanto a história da humanidade, levando em consideração que a história da humanidade se inicia após a descoberta da escrita.

Entre alguns achados arqueológicos da Suméria, tabuletas de argila e papiros que foram encontrados, continham problemas matemáticos que envolviam em sua resolução, a equação. Em um documento Egípcio denominado Papiro de Rhind de aproximadamente 1650 a.C. o escritor deste achado destaca que este papiro é uma cópia de um outro documento que data de 2000 a.C., neste documento trazia um problema simples de equação sobre distribuição de mercadoria.

Apesar da antiguidade da álgebra, o uso de símbolos para representar as incógnitas só foi utilizado entre 250 a 350 d.C. pelo grego Diofante de Alexandria, sendo precussor na solução das equações indeterminadas, conhecidas como diofantinas. O termo que originou a palavra álgebra (Al-jabr) foi inicialmente usado por Mohammed ibn-Musa al-Khowarismi por volta do ano 825 (século IX), em um livro intitulado Al-jabr Wa-l mugabahah.

Desta forma, a álgebra passou por um longo período de desenvolvimento e transformações, no qual teve seus primeiros registros no Egito e na Babilônia, mais tarde outras civilizações passaram a utilizá-la, e assim contribuíram para que se tornasse a Álgebra que temos hoje. Guelli (2005) e Boyer (1996) destacam que a história da álgebra teve três principais fases: retórica ou verbal, sincopada e simbólica.

O período da Álgebra Retórica ou Verbal, teve início por volta de 1700 a.C. na Babilônia e se estendeu até 250 d.C., época em que viveu o matemático grego Diofanto. Esta fase ocorreu até o período pré-diofantino, tendo sido marcada pela ausência de símbolos e abreviações, neste período todas as equações eram descritas na linguagem corrente.

A fase da Álgebra Sincopada teve seu início com Diofanto de Alexandria. Este período foi muito importante para o desenvolvimento da álgebra, pois foi a partir de então que se passou a utilizar abreviações, o que possibilitou que fosse trabalhada as equações de forma mais concisa. Esta fase teve duração até o início do século XVI, mas antes disso, no século XII os Hindus também se utilizaram de abreviações e alguns símbolos para solucionar problemas de álgebra.

A terceira fase, denominada Álgebra Simbólica, teve início com a introdução de apenas símbolos para expressar os termos algébricos. O primeiro responsável pela introdução e criação de novos símbolos, embora ainda se utilizasse da Álgebra Sincopada, foi o francês François Viète por volta de 1600 d.C., com o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Esta fase teve início depois de Viète a partir de 1600 d.C. e se estendeu até os dias atuais.

Diante do que foi exposto nesta seção, podemos observar que álgebra passou por vários momentos que contribuíram para o seu desenvolvimento, desde quando era representada na linguagem natural até o uso de símbolos para resoluções de problemas. Na próxima seção iremos fazer uma breve discussão sobre o uso da Álgebra como componente curricular da educação básica.

5.2 O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A inserção da álgebra no Brasil se iniciou por meio da Carta Régia em 19 de agosto de 1799. Neste período, a álgebra passou a integrar o currículo junto a outras disciplinas como: Aritmética, Geometria e Trigonometria. Embora fizesse parte do currículo, seu aprendizado acontecia de forma mecânica e reprodutiva, neste processo notava-se a predominância do transformismo algébrico, não tinha preocupação com a compreensão (LOPES, 2021).

Desta forma, o início da álgebra no Brasil foi marcado por uma didática que levava em consideração uma álgebra apenas simbólica e "sem sentido" para os alunos. Sabemos que a aprendizagem da álgebra é importante para desenvolver no aluno o que chamamos de pensamento algébrico. Para Arcavi (2006, p.374), "o pensamento algébrico inclui a conceptualização e aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura".

> O trabalho com a álgebra, no início da escolaridade contribui para que os/as estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico. Essa ideia, atualmente considerada, diferencia - se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos. Nessa perspectiva, algumas dimensões do trabalho com a álgebra estão presentes nos processos de ensino e de aprendizagem, desde os anos iniciais, como as ideias de regularidade de generalização e de equivalência. (BRASIL, 2019, p.278)

Embora a BNCC alerte para as dimensões do trabalho com a álgebra, podemos observar que ainda hoje muitos professores ensinam como responder a questões de álgebra de forma mecânica. A forma de resolução automatizada leva o aluno a se distanciar do pensamento algébrico, pois quando simplesmente é utilizado fórmulas sem se preocupar com o processo, a aprendizagem acaba sendo "pobre", já que em outros contextos o aluno pode não ser capaz de aplicar o mesmo método de resolução.

Neste sentido, Araújo (2008, pp.338-339) afirma que, o "pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem que ocorrem na escola", isto remete a falta de preparo dos alunos quando o assunto é álgebra. Em uma pesquisa realizada por Gil e Felicetti (2016), mostra que uma das maiores dificuldades dos alunos na compreensão da álgebra está na linguagem apresentada no problema, ou seja, muitos não conseguem traduzir o problema em uma linguagem algébrica.

Para Castro (2013, p.6), o ensino de álgebra não mudou muito nas últimas décadas, já que "ainda está bastante referido à pedagogia tradicional baseada na sequência: definição - exemplos – aplicações". Esta forma de ensino representa uma didática arcaica, alguns autores como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Arcavi (2005), Blanton e Kaput (2005), Radford (2009, 2011a, 2011b), Almeida (2016), destacam que o centro da aprendizagem da álgebra deve ser o pensamento algébrico. Para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico é

> um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade. (2005, p.413)

Neste caso, para que ocorra a aprendizagem da álgebra, é necessário que a metodologia de ensino contemple os conhecimentos prévios dos alunos e apresente significado que deem sentido às manipulações, possibilitando assim, o pensamento algébrico. De acordo com Araújo (2008),

> se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação (2008, pp. 336-337).

Segundo Ponte, Branco e Matos (2008, p.95), “deve dar-se atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nas suas diversas vertentes, permitindo aos alunos a elaboração de raciocínios cada vez mais abstratos e complexos”. Nesta perspectiva, Kaput (1999) defende que, ao ensinar com objetivo de desenvolver o pensamento algébrico, possibilita ao aluno uma aprendizagem ativa voltada para a construção e compreensão de significados dos objetos estudados.

Como podemos observar, desenvolver o pensamento algébrico é muito importante para que o aluno seja capaz de compreender as concepções e aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura da álgebra. Em contrapartida, o processo mecânico pode engessar a aprendizagem e limitar os alunos a ser capaz de responder apenas questões não contextualizadas.

Na próxima seção discutiremos sobre as equações e sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Acreditamos que seja importante fazer esta discussão já que se trata do objeto matemático desta pesquisa, mais especificamente sobre sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

5.3 EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

Como já mencionado anteriormente, o uso da equação para resolução de problemas é bastante antigo e foi muito importante para o desenvolvimento da álgebra. Observamos também, alguns períodos que marcaram a evolução e construção de uma álgebra inicial (retórica) em uma álgebra (simbólica) totalmente moderna, na qual usamos até hoje. Apesar da grande importância para a matemática, o conteúdo equações (ao menos com o uso de letras) é visto pela primeira vez pelos alunos no Ensino Fundamental - Anos finais, mais especificamente no 7º ano.

Nesta perspectiva, a BNCC reforça que é na fase do ensino fundamental - Anos Finais que os estudantes devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão.

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2017, p. 271).

Assim, destacamos inferimos que os livros didáticos de matemática trazem o conteúdo de equações no ensino fundamental - anos finais, iniciando assim com o conteúdo de polinômios, dando início primeiramente ao conceito de monômios com as propriedades que envolvem adição, subtração, divisão, multiplicação e até mesmo potenciação com monômios.

A introdução do conceito de polinômios é a base para o estudo das equações, assim, se faz necessário este conhecimento para que se tenha propriedades suficientes para resolver problemas propostos sobre equações. Neste sentido, podemos destacar que muitos alunos possuem dificuldades em resolver questões de equações por não dominarem as propriedades de polinômios. Por exemplo, quando é preciso realizar a multiplicação entre dois monômios, $4ab^2.3a^2b^3$, é comum que muitos alunos multipliquem os coeficientes e esqueça de aplicar a propriedade de potenciação na parte literal, ou seja, repetir a base e somar os expoentes.

Logo após a apresentação das propriedades de polinômios, têm início o conteúdo de equações do 1° grau com uma incógnita, algo bem básico, nos quais as atividades priorizam determinar o valor da variável (representado geralmente pela letra x), como podemos observar no exemplo da figura 1.

Figura 1 - Exemplo de questão sobre equação do primeiro grau com uma incógnita

2. Determine, entre as equações a seguir, qual permite responder a cada um dos problemas. Em seguida, resolva-a.

$x + x = 25$ $\quad$ $32 + x = 86$

$x + 25 = 86$ $\quad$ $86 + x = 32$

$x + (x + 1) = 25$

a) A soma de dois números consecutivos é 25. Qual é o valor do menor deles?
$x + (x + 1) = 25; x = 12$

b) Leonardo pagou R$ 86,00 por uma camiseta e um boné. Sabendo que o boné custou R$ 32,00, qual é o preço da camiseta? $32 + x = 86; x = 54 \rightarrow$ R$ 54,00

Fonte: Pataro e Balestri (2018)

Conforme avançam os conteúdos, mais complexo ficam, isto é, os problemas propostos ficam cada vez mais difíceis, e em alguns casos, aumenta-se o número de incógnitas, o grau e até mesmo o número de equações formando o que chamamos de sistema de equações. Quando falamos em sistema de equações, entendemos que este também envolve o número de incógnitas e também o grau. Trataremos a seguir, especificamente sobre sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, pois assim como já destacamos em outro momento trata-se do objeto matemático da nossa pesquisa.

5.3.1 Sistema de equações do 1° grau com das incógnitas

O conteúdo de sistemas de equações é encontrado em várias fases do ensino sejam elas: fundamental, médio ou superior. Problemas que envolvem sistema de equações é bem mais comum no nosso dia a dia do que imaginamos, seja no setor econômico, no supermercado ou até mesmo em situações que envolvam mais de um tipo de grandeza física.

De acordo com a BNCC, é no 8º ano do Ensino Fundamental que temos a resolução algébrica e a representação no plano cartesiano de sistemas de equações do 1 grau (BRASIL, 2016). Alguns livros didáticos de matemática, antes de abordarem o conteúdo de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, trazem uma breve introdução sobre as equações com duas incógnitas.

As equações com duas incógnitas, apresentam variáveis (na grande maioria dos exemplos representadas pelas letras “x” e “y”) que podem representar valores de dois objetos ou de duas grandezas distintas. Porém, a abordagem deste conteúdo nos livros do 8º ano do ensino fundamental, é mostrada de forma rápida e simples, na qual grande maioria das vezes as atividades não apresentam um contexto especifico para as situações propostas.

Para o conteúdo de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, os livros didáticos podem apresentar propostas diferentes, isto é, as sequencias didáticas podem variar conforme a proposta do autor. Alguns livros trazem primeiramente os métodos de resoluções de sistemas (substituição, soma e até mesmo o da comparação), outros mostram antes dos métodos a parte gráfica (como é o caso do livro didático no qual realizamos a nossa análise).

Desta forma, ao iniciar o conteúdo pelos métodos é comum que primeiramente seja apresentado o da substituição, já que outros utilizam-se de parte deste para finalizar a resolução. Assim, o método da substituição consiste na escolha de uma das equações para que seja isolado uma das incógnitas e posteriormente substituído o valor encontrado na outra equação, vejamos o exemplo do sistema, $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$.

Se escolhermos a primeira equação e isolamos a incógnita “x”, teremos $x = 3 - y$. Para chegarmos ao resultado final, substituímos a incógnita “x” (que isolamos) na outra equação. Neste caso, ficaremos com a equação da seguinte forma,

$3(3-y)-y=5$. Para finalizar, basta fazer os cálculos necessários para descobrirmos o valor de “y”, assim, *9 – 3y – y = 5 ⇒ -4y = 5 – 9 ⇒ -4y = -4 ⇒ y = 1*. Após ser encontrado o valor do “y”, substituímos este na equação onde isolamos a incógnita “x”, *x = 3 – y,* logo teremos, *x = 3 - 1 ⇒ x = 2*. Como resposta obtivemos, $x=2$ e $y=1$, ou seja, a solução do sistema é o par ordenado *(2,1).*

Por outro lado, o método da adição consiste na eliminação de termos por meio da soma das equações do sistema, pegando o exemplo anterior, $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=5 \end{cases}$, obteremos ao realizar a soma entre as duas equações:

$$\begin{array}{r} x+y=3 \\ \underline{+\;3x-y=5} \\ 4x+0y=8 \\ x=8/4 \\ x=2 \end{array}$$

Ao encontrar o valor da incógnita substituímos este em uma das equações que pertence ao sistema, neste caso escolhendo a primeira equação (*x + y = 3)*, teremos *2 + y = 3 ⇒ y = 3 – 2 ⇒ y = 1*, resultando assim em $x=2$ e $y=1$ como solução do sistema.

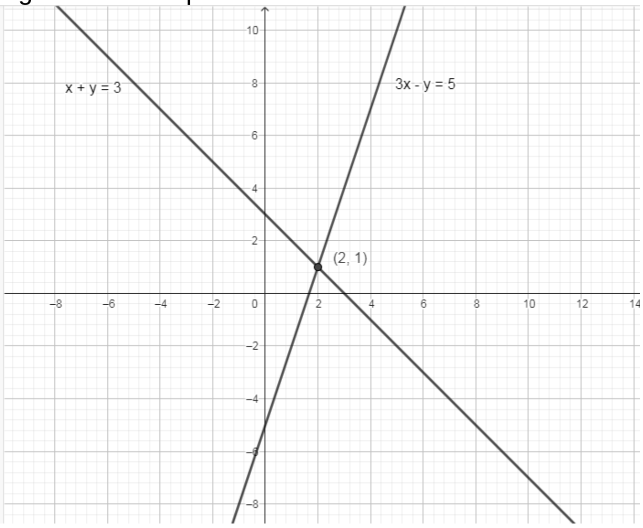
O método da comparação[5] é bem parecido com o da substituição, pois é preciso isolar uma das incógnitas, porém, neste método isolamos a mesma incógnita nas duas equações, e assim igualamos as duas fazendo a comparação entre as igualdades. Pegando novamente o sistema que utilizamos nos dois métodos anteriores, $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=5 \end{cases}$.

Ao escolher uma das incógnitas, de preferência a que torne o processo mais simples, neste caso, vamos isolar o “y” nas duas equações e as igualarmos, assim teremos: $y=3-x$ e $3x-5=y \Rightarrow\ 3-x=3x-5 \Rightarrow 3+5=3x+x \Rightarrow 8=4x \Rightarrow x=8/4 \Rightarrow x=2$. Com isto, é só substituir o valor encontrado da incógnita “x” em qualquer uma das equações do sistema, neste caso, utilizando a primeira ($3x-y=5$), por ser mais simples que a segunda, teremos: $2+y=3 \Rightarrow y=3-2 \Rightarrow\ y=1$. Logo, será obtido a mesma solução já mostrada anteriormente, $x=2$ e $y=1$.

Outra forma de encontrar a solução do sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é através do gráfico, isto ocorre devido a posição em que as retas provenientes das equações se apresentam, ou seja, estas retas podem assumir três posições entre elas que são: concorrentes, paralelas ou coincidentes.

Neste sentido, quando as retas são concorrentes entre si, significa que o sistema possui apenas uma solução possível, isto é, cada incógnita só pode assumir um único valor para satisfazer o sistema. Sendo assim, utilizando o sistema que foi usado nos exemplos anteriores, $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$, obteremos no plano cartesiano duas retas que são concorrentes entre si, significando que as retas irão se interceptar em um ponto, que neste caso é o ponto cuja as coordenadas são (2,1). Logo, a solução do sistema será o ponto de intersecção entre as retas. Neste caso, o sistema será possível e determinado. Vejamos a figura 2.

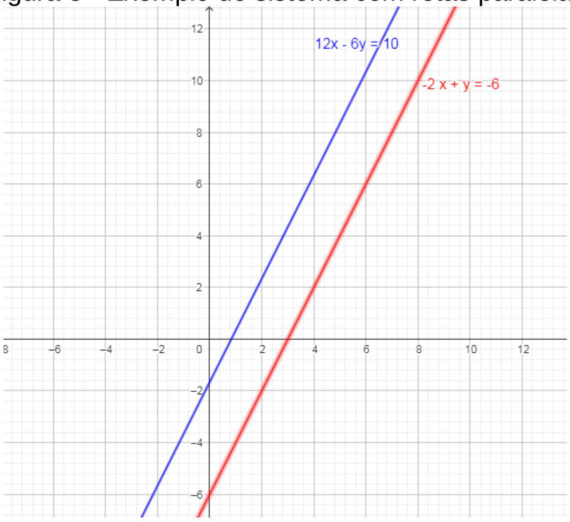
Figura 2 - Exemplo de sistema com retas concorrentes



Fonte: O próprio autor (2023)

Outra forma apresentada é quando o sistema possui retas paralelas entre si, significando que o sistema não possui solução possível, isto ocorre porque as retas não possuem nem um ponto em comum. Assim, dizemos que o sistema é impossível. Vejamos o exemplo a seguir na figura 3, cujo sistema é representado por: $\begin{cases} 12x - 6y = 10 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$.

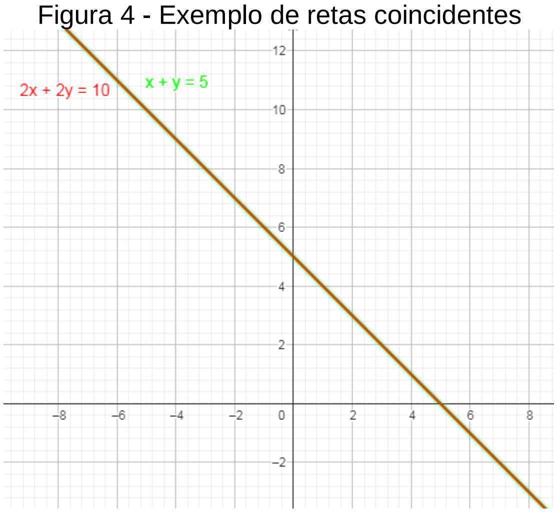
Figura 3 - Exemplo de sistema com retas paralelas



Fonte: O próprio autor (2023)

A última forma gráfica apresentada pelos livros didáticos é quando o sistema possui infinitas soluções, isto é, as retas que representam as equações do sistema são coincidentes entre si. Logo, diremos que o sistema é possível e indeterminado. Um exemplo para esta situação é o sistema, $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$. Vejamos o gráfico deste sistema na figura 4.

Figura 4 - Exemplo de retas coincidentes



Fonte: O próprio autor (2023)

Como observamos nesta seção, os livros didáticos podem apresentar basicamente três métodos de resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, substituição, adição e comparação. Observamos também, que o gráfico pode determinar a solução do sistema, ou seja, se as retas forem concorrentes o sistema será possível e determinado, se forem paralelas o sistema será impossível e se forem coincidentes o sistema será possível e indeterminado.

Nesta perspectiva, destacamos a importância deste capítulo por tratar do objeto matemático (sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas), no qual escolhemos para realização desta pesquisa. Assim, abordamos aspectos históricos da álgebra que nos mostrou (embora de maneira breve) o seu desenvolvimento e evolução, culminando na modernização da linguagem algébrica como um todo, desde os conceitos mais básicos até os mais complexos. Assim, tivemos também, a discussão sobre o ensino da álgebra na educação e o estudo das equações no ensino fundamental.

No próximo capítulo, discutiremos os percursos metodológicos que seguimos para alcançar o objetivo geral. Deste modo, apresentaremos, com o intuito de informar ao leitor, o local (escola e município onde foi realizado a pesquisa) e o participante (professor de matemática do 8° ano do ensino fundamental). Na sequência, trataremos sobre os instrumentos de coletas que foram utilizados na coleta dos dados.

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo trataremos dos aspectos metodológicos, sendo assim, indicamos que a nossa pesquisa traz uma abordagem investigativa qualitativa, pois não nos preocupamos com representatividade numérica, já que os resultados obtidos após a análise não serão quantificados (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Quanto aos procedimentos, apontamos que se trata de um estudo de caso, já que este tipo de procedimento "visa conhecer em profundidade o como e o porquê de uma determinada situação que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico" (FONSECA, 2002, p.33).

Nesta perspectiva, destacamos que a metodologia adotada em nosso trabalho busca responder a indagação presente na questão de pesquisa, na qual culminou no objetivo geral que é: Analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas no livro didático sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula.

6.1 LOCAL E PARTICIPANTE DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com um professor de matemática do 8° ano do ensino fundamental de uma escola da rede municipal da cidade de Cumaru, que fica localizada na região agreste de Pernambuco a 91 km da capital (Recife). A escolha por esta escola se deu pelo fato de ter sido estudante durante o período do ensino fundamental (anos iniciais e finais), onde passei grande parte da formação inicial e consequentemente tive o primeiro contato com a álgebra.

O processo de escolha do professor de matemática se deu de forma aleatória tendo como pressuposto a aceitação e a disponibilidade para realização da pesquisa. Para tanto, buscamos informações sobre o quantitativo de professores de matemática da rede, e constatamos que apenas um ministrava suas aulas nos 8º anos (a, b e c) do ensino fundamental – anos finais.

6.2 ETAPAS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em duas etapas, a primeira consistiu em uma análise do livro didático tendo como base o modelo proposto por Marilena Bittar (2017), e a segunda, foi por meio de observações de aulas ministradas pelo professor participante da pesquisa sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

Para a análise do livro didático, utilizamos o modelo proposto por Bittar (2017). Este modelo destaca a ocorrência de cinco fases do processo de análise do livro didático, que são: A escolha do material a ser analisado; A separação entre curso e atividades propostas; A elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático; A elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático e a análise das organizações modeladas.

Na primeira fase, realizamos a escolha do material a ser analisado de acordo com o objetivo da pesquisa, este processo foi alinhado com o que pretendíamos investigar. Fizemos assim a escolha baseada nos materiais (livro didático) que o professor utilizava como apoio nas suas aulas. Constatamos assim que o livro didático pertence a coleção “Matemática Essencial” de Pataro e Balestri (2018).

A segunda fase, dividimos em duas partes, a primeira denominada curso, e a segunda atividades propostas. Na primeira parte, observamos a explanação de definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. Na segunda parte buscamos analisar cada atividade identificando os tipos de tarefas correspondentes.

Na terceira fase, elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático, nela realizamos uma leitura bem minuciosa do conteúdo abordado na parte curso, atentando a cada detalhe no qual trazia as justificativas para as técnicas apresentadas. Neste caso, foi elaborado um esquema (uma espécie de analise apriori) mostrando as praxeologias de maneira organizadas.

A quarta fase que diz respeito a elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático, ocorreu por meio da identificação das praxeologias didáticas propostos por Chevallard (1991), no qual, é composto por seis momentos de estudo que são: Primeiro encontro com o tipo de tarefa; Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica; Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica; Trabalho da técnica; Institucionalização e Avaliação.

Por fim, realizamos a última fase proposta no modelo de Bittar (2017), análise das organizações modeladas, procuramos interpretar as informações obtidas, ou seja, organizamos todos os dados, realizando uma análise do que foi apresentado nas fases anteriores.

A análise das praxeologias apresentadas pelo professor, ocorreram durante 11 aulas, entre os dias 08 a 22 de junho de 2022, distribuídas em 7 encontros. O processo de coleta de dados, foi realizado por meio de gravações de vídeos, gravações de áudios e registro em fotos do quadro.

Após a coleta dos dados, realizamos a transcrição dos áudios presentes nas gravações dos áudios e vídeos das aulas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas. Deste modo, a partir das gravações, iniciamos o processo de análise no qual foi observado todo o material disponível, buscando identificar as praxeologias abordadas.

6.3 INSTRUMENTOS DE COLETAS DE DADOS

Os instrumentos de coletas de dados foram utilizados em dois momentos, na análise das praxeologias do livro didático e na análise das praxeologias abordadas durante as aulas do professor sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

Para a análise do livro didático foram utilizados como instrumentos de coletas de dados, o modelo de análise proposto por Bittar (2017. Esta análise nos possibilitou alcançar o primeiro objetivo específico que consiste em identificar as praxeologias presentes no livro didático do professor de matemática sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau.

Por sua vez, os instrumentos de coleta de dados utilizados para identificar as praxeologias que surgiram durante as aulas do professor, foram: gravações de vídeos das aulas; gravações de áudios e fotos do quadro branco. Estes instrumentos de coletas de dados apresentados foram suficientes para alcançarmos o segundo objetivo específico que consiste em analisar as praxeologias do professor de matemática durante as aulas de sistema de equações do 1° grau.

Deste modo, através da comparação dos dados coletados, foi possível alcançar o terceiro e último objetivo específico, que buscou identificar as praxeologias do livro didático e do professor de matemática sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau.

No próximo capítulo, iremos apresentar a análise praxeológica de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas, onde abordaremos a análise praxeológica do livro didático e a análise praxeológica das aulas do professor. Estas análises foram determinantes para alcançarmos o objetivo geral desta pesquisa.

7 ANÁLISE PRAXEOLOGICA DE SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Este capítulo tem por finalidade alcançar o objetivo geral desta pesquisa que corresponde em analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas presente no livro didático das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula. Para isto, iniciamos com uma análise do livro didático utilizado pelo professor de matemática, tendo como referência o modelo de análise proposto por Bittar (2017).

Através deste modelo, traçamos o caminho metodológico que nos levou a identificar os componentes de uma organização matemática (praxeologias), além disso, foi possível verificar os momentos didáticos oriundos das organizações didáticas. Para uma melhor organização e compreensão da nossa análise, dividimos este capitulo em três tópicos: Análise praxeológica do livro didático; Análise praxeológica das aulas do professor; Análise das conformidades entre as praxeologias do livro didático e das aulas do professor.

7.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DIDÁTICO

Esta seção tem como objetivo identificar as praxeologias presentes no livro didático do professor de matemática sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas. Neste sentido, utilizamos como percurso metodológico para análise do livro didático do professor o modelo proposto por Bittar (2017) apresentado no capitulo 3. Como observado, este modelo foi estruturado por meio de uma revisão sistemática de algumas pesquisas orientadas pela autora e que tiveram como aporte teórico a TAD.

Desta forma, destacamos que esta proposta é composta por cinco fases, a escolha do material (livro) a ser analisado, separação entre Curso e Atividades Propostas (divisão do material para análise), elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático, elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático e análise das organizações modeladas. A seguir, iremos apresentar a primeira fase deste modelo que corresponde ao processo de escolha do material a ser analisado, neste caso o livro didático.

7.1.1 Escolha do material a ser analisado

O livro didático no qual iremos analisar tratasse da coleção “Matemática Essencial” de Pataro e Balestri (2018). A escolha deste livro foi realizada por meio de um levantamento sobre os materiais utilizados pelo professor durante as aulas ministradas. Verificamos assim, que o professor utiliza como apoio pedagógico, o livro didático e questões extraídas de outros livros e da internet.

Destacamos assim, que a nossa pesquisa analisará apenas um dos capítulos da coleção, na qual trata especificamente sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas. Desta forma, acreditamos que é importante apresentar algumas informações a respeito da coleção que iremos analisar, pois possibilitará ao leitor deste trabalho compreender como o manual do professor foi pensado e estruturado pelos autores.

Neste sentido, destacamos que o manual do professor possui 388 páginas (versão em PDF)[6], no qual está dividida em 12 capítulos. O capitulo que iremos analisar inicia-se na página 110 com o título “Equações, sistemas de equações e inequações, porém, nossa analise começa a partir da página 118 até 126, no qual de fato iniciasse o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

De acordo com os autores podemos destacar que o manual do professor está estruturado em duas partes principais (figura 5). Na primeira parte, encontramos orientações didáticas e metodológicas da coleção pelas contribuições da BNCC. Na segunda parte, temos a reprodução das páginas do livro do aluno espelhada de maneira reduzida. Este tipo de estrutura dá ao professor meios que podem ser explorados durante a aula como ferramenta didática.

[6] A versão impressa do livro didático foi disponibilizada pelo professor de matemática, porém, pela praticidade optamos em trabalhar com a versão digital.

Figura 5 - Ilustração da configuração da segunda parte do manual do professor

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.13)

Com isto, observamos que o manual do professor foi estruturado com o objetivo de auxiliar os docentes em seu trabalho em sala de aula, pois, encontramos elementos que podem colaborar na ação didática do professor por meios de sugestões e propostas de atividades complementares. Conforme Pataro e Baleste (2018),

> O manual do professor foi pensado com o objetivo de auxiliar os docentes em seu trabalho em sala de aula, de modo a valorizar o papel ativo do professor na construção do conhecimento e estimular a participação dos alunos enquanto agentes do processo de aprendizagem. Nele, explicitamos pressupostos teóricos, tecemos comentários e sugestões e propomos atividades complementares que visam auxiliar o desenvolvimento dos conteúdos e das atividades presentes em cada volume desta coleção. (PATARO E BALESTRI, 2018, p.05)

De acordo com Bittar (2017, p.364), “o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas.” Diante disto, podemos notar que uma boa escolha do livro que será usado durante o ano letivo pode ser uma ferramenta bastante útil no processo de ensino e aprendizagem.

Após esta breve apresentação sobre o livro didático da nossa análise, indicamos que na próxima seção, daremos continuidade no método de análise apresentado por Bittar (2017) que consiste na *"separação entre curso e atividades propostas"*, o que nos irá permitir identificar alguns tipos de tarefas importantes dentro da instituição, livro didático.

7.1.2 Separação entre Curso e Atividades Propostas

Por questão de organização iremos dividir esta seção em duas partes, curso e atividades propostas. Na seção curso, analisaremos toda parte de conteúdo estudado, de acordo com Bittar (2017, p.372), este componente, "compreende a explanação de definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos". É na parte curso que os autores trazem o que consideram importantes para o nível de escolaridade no qual o aluno faz parte.

Na seção atividades propostas, iremos analisar as questões que o livro didático traz ao final de cada parte do conteúdo. O conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas está dividido em duas partes, no qual a primeira traz o método de tentativa e erro e as representações gráficas do sistema, e com estes, são propostas 7 atividades que vão da questão 20 à 26. Na segunda parte do conteúdo, temos os métodos da substituição e da eliminação, após esta explanação, são propostas mais 15 questões que vão da 27 a 41.

A seguir, trataremos da parte curso onde observaremos alguns tipos de tarefas e técnicas que aparecem durante a explanação do conteúdo, porém nossa análise sobre esta parte será de maneira mais aprofundada na seção elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático e didático.

7.1.2.1 Curso

Nesta seção iremos apresentar a parte curso do livro didático, que trata do conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas. Deste modo, iremos observar as definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos, por este motivo iremos apenas mostrar alguns tipos de tarefas e técnicas provenientes da desta parte, pois a finalidade deste tópico é apenas separar a parte curso das atividades propostas.

Com isto, o livro inicia trazendo uma situação problema que trata de um exercício resolvido com a seguinte situação: “Em um estacionamento, entre carros e motos, há 12 veículos, sendo a maioria carros. A diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos é igual a 3” (PATARO E BALESTRI, 2018, p.118). Neste exemplo, conseguimos identificar um tipo de tarefa, que consiste em resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas por tentativa e erro, só que para isto é necessário transformar o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas da linguagem natural para a algébrica. Vejamos a figura 6 a seguir.

Figura 6 - Imagem da página 118 do livro didático

Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Em um estacionamento, entre carros e motos, há 12 veículos, sendo a maioria carros. A diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos é igual a 3.

Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Podemos resolver essa questão escrevendo duas equações: uma para representar a quantidade total de veículos no estacionamento e outra para representar a diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos. Para isso, chamamos de **x** a quantidade de carros e de **y** a quantidade de motos.

Informação	Equação
Quantidade total de veículos	$x + y = 12$
Diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos	$x - 2y = 3$

As duas equações obtidas formam um **sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas**, que é indicado da seguinte maneira: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Para que um par ordenado seja solução desse sistema, ele tem de ser solução das duas equações simultaneamente.

Para resolver esse sistema, podemos realizar **tentativas**, atribuindo valores para **x** e para **y**.

x	y	x + y	x − 2y
11	1	$11 + 1 = 12$	$11 - 2 \cdot 1 = 9$
10	2	$10 + 2 = 12$	$10 - 2 \cdot 2 = 6$
9	3	$9 + 3 = 12$	$9 - 2 \cdot 3 = 3$

Note que os pares ordenados (11, 1) e (10, 2) são solução apenas da equação $x + y = 12$. Já o par ordenado (9, 3) é solução, simultaneamente, das duas equações, assim, é **solução do sistema**.

Portanto, há no estacionamento 9 carros e 3 motos.

118

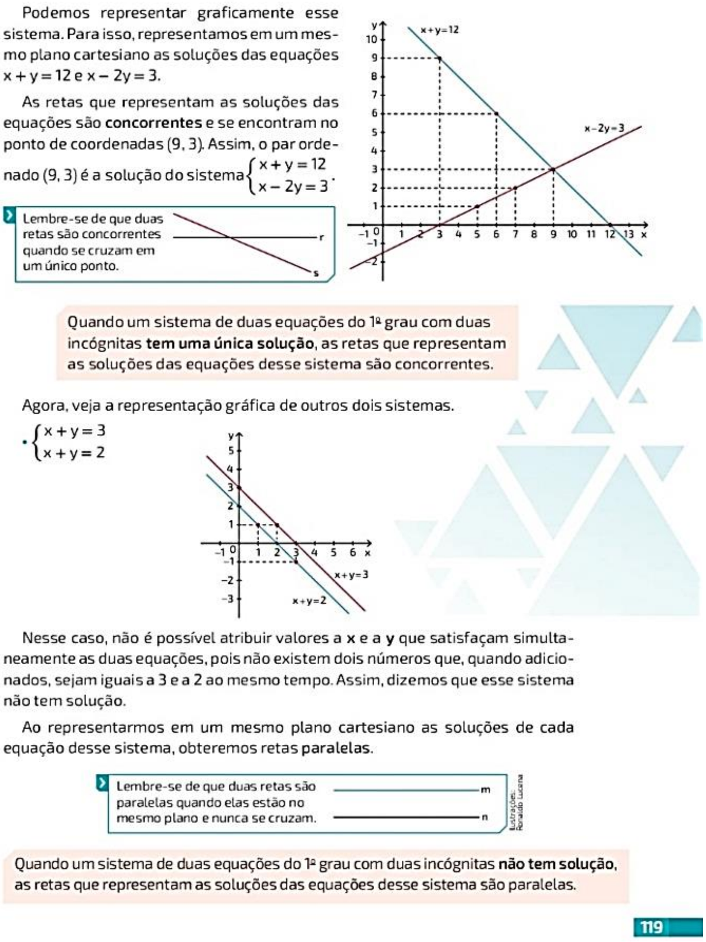
Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.118)

Como forma de buscar a solução para o problema apresentado, notamos que os autores propõem em escrever e organizar as equações do 1° grau com duas incógnitas separadamente. Neste caso, a primeira equação representa a quantidade total de veículos no estacionamento e a segunda a diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos.

Os autores reforçam que para um par ordenado ser solução do sistema, ele tem que ser solução das duas equações simultaneamente. Para resolver este tipo de sistema, inicialmente foi utilizado o método de tentativa e erro, no qual, foi atribuído valores aleatórios a “x” e a “y” e comparado se os resultados satisfazem a ambas equações.

Em seguida, foi apresentada a solução do sistema através do gráfico, onde foi mostrada que à posição das retas indicam se o sistema possui ou não soluções, ou seja, se as retas forem concorrentes, o sistema irá possuir uma única solução possível, se forem paralelas, não possuirá soluções e se coincidentes, possuirá infinitas soluções. Neste caso, a representação gráfica do exemplo do estacionamento, apresentam retas concorrentes, isto é, temos um ponto comum as duas retas, o par ordenado (9, 3). Vejamos a figura 7.

Figura 7 – Imagem da página 119 do livro didático



Podemos representar graficamente esse sistema. Para isso, representamos em um mesmo plano cartesiano as soluções das equações $x + y = 12$ e $x - 2y = 3$.

As retas que representam as soluções das equações são **concorrentes** e se encontram no ponto de coordenadas (9, 3). Assim, o par ordenado (9, 3) é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Lembre-se de que duas retas são concorrentes quando se cruzam em um único ponto.

Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **tem uma única solução**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são concorrentes.

Agora, veja a representação gráfica de outros dois sistemas.

- $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Nesse caso, não é possível atribuir valores a **x** e a **y** que satisfaçam simultaneamente as duas equações, pois não existem dois números que, quando adicionados, sejam iguais a 3 e a 2 ao mesmo tempo. Assim, dizemos que esse sistema não tem solução.

Ao representarmos em um mesmo plano cartesiano as soluções de cada equação desse sistema, obteremos retas **paralelas**.

Lembre-se de que duas retas são paralelas quando elas estão no mesmo plano e nunca se cruzam.

Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **não tem solução**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são paralelas.

119

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.119)

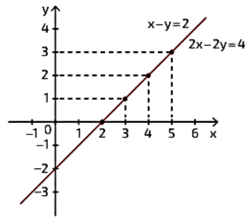
Na sequência, o livro didático apresenta mais dois exemplos, desta vez, para representar os gráficos quando existem retas paralelas e coincidentes. No segundo exemplo, os autores mostram o caso de quando as retas são paralelas, sendo assim, observamos que as retas não possuem pontos em comum e que neste caso o sistema não possui soluções.

No terceiro exemplo sobre gráfico, os autores mostram quais são as soluções de um sistema de equações quando graficamente as retas são coincidentes, ou seja, todos os pontos que pertencem a reta que representa a primeira equação do sistema pertencem a reta da segunda equação, por isto, o sistema possui infinitas soluções, vejamos a figura 8.

Figura 8 – Imagem da página 120 do livro didático

- $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

x	y	x − y	2x − 2y
2	0	$2 - 0 = 2$	$2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$
3	1	$3 - 1 = 2$	$2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$
4	2	$4 - 2 = 2$	$2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4$
5	3	$5 - 3 = 2$	$2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$



Nesse caso, diversos valores atribuídos a x e a y satisfazem simultaneamente as duas equações.

Ao representarmos em um mesmo plano cartesiano as soluções de cada equação desse sistema, obteremos retas **coincidentes**. Assim, dizemos que esse sistema tem infinitas soluções.

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **284** e **285**, veja como utilizar um *software* de geometria para visualizar as soluções de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, caso existam.

Lembre-se de que duas retas são coincidentes quando estão sobrepostas, ou seja, têm infinitos pontos comuns.

a≡b

Ilustrações: Ronaldo Lucena

Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **tem infinitas soluções**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são coincidentes.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.120)

No exemplo em destaque, os autores também mostram por meio de uma tabela que ao ser atribuídos diversos valores a “x” e a “y”, estes valores irão satisfazer a ambas as equações do sistema. Com isto, é finalizada a primeira parte do conteúdo.

Na segunda parte do conteúdo, são apresentados dois métodos de resolução de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas, o primeiro trata-se do método da substituição e o segundo, da eliminação. O exercício resolvido apresentado para introduzir o método da substituição traz a seguinte situação: “Em certa competição esportiva, participaram 515 atletas. A quantidade de homens participantes foi maior do que a de mulheres, uma diferença de 45 atletas. Quantos homens e quantas mulheres participaram dessa competição?” (PATARO E BALESTRI, 2018, p.123). Vejamos a figura 9.

Figura 9 - Imagem da página 123 do livro didático

Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da eliminação

Vamos estudar alguns métodos para resolver sistemas de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Método da substituição

Em certa competição esportiva, participaram 515 atletas. A quantidade de homens participantes foi maior do que a de mulheres, uma diferença de 45 atletas.

Quantos homens e quantas mulheres participaram dessa competição?

Alfiya Safuanova/Shutterstock.com

Atletas disputando uma maratona.

Para responder a essa questão, podemos escrever e resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Para isso, chamamos de **x** a quantidade de atletas homens e de **y** a quantidade de atletas mulheres.

Informação	Equação	Sistema
Quantidade total de atletas	$x + y = 515$	$\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}$
Diferença entre a quantidade de homens e a de mulheres	$x - y = 45$	

Para resolvermos esse sistema pelo **método da substituição**, escolhemos inicialmente uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Nesse caso, vamos escolher a equação $x + y = 515$ e isolar a incógnita **y**.

$$x + y = 515$$
$$x - x + y = 515 - x$$
$$y = 515 - x$$

123

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.123)

Para resolver este problema, é proposto que seja expressa duas equações do 1° grau, uma estabelecida pela quantidade total de atletas e outra que corresponde a diferença entre a quantidade de homens e a de mulheres. Podemos determinar de maneira o tipo de tarefa, resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método da substituição.

Na resolução deste sistema, os autores deixam claro que podemos escolher qualquer uma das equações para isolarmos uma das incógnitas, porém foi escolhido a primeira equação, $x + y = 515$, e isolado a incógnita “y". Após ser resolvido o sistema foi encontrado como solução o par ordenado (280, 235), ou seja, foram 280 atletas homens e 235 atletas mulheres.

O outro método proposto no livro didático para resolver sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas é o método da eliminação, que traz o seguinte tipo de tarefa: resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método da eliminação. Para apresentação do método foi dado o seguinte sistema: $\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=8 \end{cases}$. Após a apresentação da resolução do sistema, foi obtido como solução o par ordenado (11,3). Vejamos a figura 10.

Figura 10 - Imagem da página 124 do livro didático

Em seguida, para determinar o valor de **x**, substituímos **y** por 515 − x na outra equação e resolvemos a equação obtida, que possui apenas uma incógnita.

$$x - y = 45$$
$$x - (515 - x) = 45$$
$$x - 515 + x = 45$$
$$2x - 515 + 515 = 45 + 515$$

$$2x = 560$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{560}{2}$$
$$x = 280$$

Para determinar o valor de **y**, substituímos **x** por 280 em qualquer uma das equações do sistema. Nesse caso, vamos substituir **x** por 280 na equação x + y = 515.

$$x + y = 515$$
$$280 + y = 515$$
$$280 - 280 + y = 515 - 280$$
$$y = 235$$

Portanto, o par ordenado (280, 235) é a solução do sistema $\begin{cases} x+y=515 \\ x-y=45 \end{cases}$, ou seja, participaram da competição 280 atletas homens e 235 atletas mulheres.

Método da eliminação

Além do método da substituição, podemos resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas pelo **método da eliminação**.

Veja como podemos resolver por esse método o sistema $\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=8 \end{cases}$.

Note que as equações apresentam os termos opostos **y** e −y. Adicionando essas equações membro a membro, a incógnita **y** será eliminada.

$$\begin{array}{r} x + y = 14 \\ x - y = 8 \\ \hline 2x + 0y = 22 \end{array} \rightarrow 2x = 22$$

Ao adicionarmos duas igualdades membro a membro, obtemos outra igualdade.

Resolvendo a equação 2x = 22, obtemos o valor de **x**.

$$2x = 22$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{22}{2}$$
$$x = 11$$

Agora, substituímos **x** por 11 em qualquer uma das equações do sistema para obter o valor de **y**. Nesse caso, vamos substituir **x** por 11 na equação x + y = 14.

$$x + y = 14$$
$$11 + y = 14$$
$$11 - 11 + y = 14 - 11$$
$$y = 3$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (11, 3).

Ao resolver o sistema de equações do 1º grau proposto no tópico "Método da eliminação" usando o método da substituição, a solução obtida será a mesma? Justifique. sim; Espera-se que os alunos respondam que, como o sistema apresenta apenas uma solução, independentemente do método utilizado, ela será a mesma.

124

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.124)

Ainda sobre o método da eliminação, foram utilizados mais dois exemplos para representar sistemas que não apresentam termos opostos nas equações. O livro explica que quando ocorre estes casos, é necessário multiplicarmos uma ou as duas equações do sistema por números escolhidos convenientemente, como podemos observar na figura 11, a seguir.

Figura 11 - Imagem da página 125 do livro didático

Alguns sistemas não apresentam termos opostos nas equações. Nesses casos, multiplicamos uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente, a fim de obter termos opostos. Observe os exemplos.

- 1º exemplo: $\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$

Para resolvermos esse sistema pelo método da eliminação, podemos inicialmente multiplicar por −2 a equação $x + 3y = 22$, a fim de obter termos opostos.

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $2x$ e $-2x$.

Resolvendo o sistema obtido pelo método da eliminação, temos:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \\ \hline 0x - 7y = -21 \end{array} \longrightarrow y = 3$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 23 \\ 2x - 3 &= 23 \\ 2x - 3 + 3 &= 23 + 3 \\ 2x &= 26 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{26}{2} \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (13, 3).

- 2º exemplo: $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 37 \end{cases}$

Para obtermos nas equações termos opostos, podemos multiplicar a equação $2x - 7y = 4$ por -3 e a equação $3x + 5y = 37$ por 2.

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 3x + 5y = 37 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $-6x$ e $6x$.

Resolvendo o sistema obtido pelo método da eliminação, temos:

$$\begin{array}{r} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \\ \hline 0x + 31y = 62 \end{array} \longrightarrow y = 2$$

$$\begin{aligned} 6x + 10y &= 74 \\ 6x + 10 \cdot 2 &= 74 \\ 6x + 20 &= 74 \\ 6x + 20 - 20 &= 74 - 20 \\ 6x &= 54 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{54}{6} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (9, 2).

125

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.125)

Desta forma, observamos que a parte curso traz sete exemplos resolvidos, onde são introduzidos os métodos de resoluções de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas. Assim, verificamos que percurso metodológico apresentado no livro didático, começa na abordagem do método de tentativa e erro e os tipos de gráficos que compõem o sistema, em seguida, é mostrado o método da substituição e por fim, o método da eliminação.

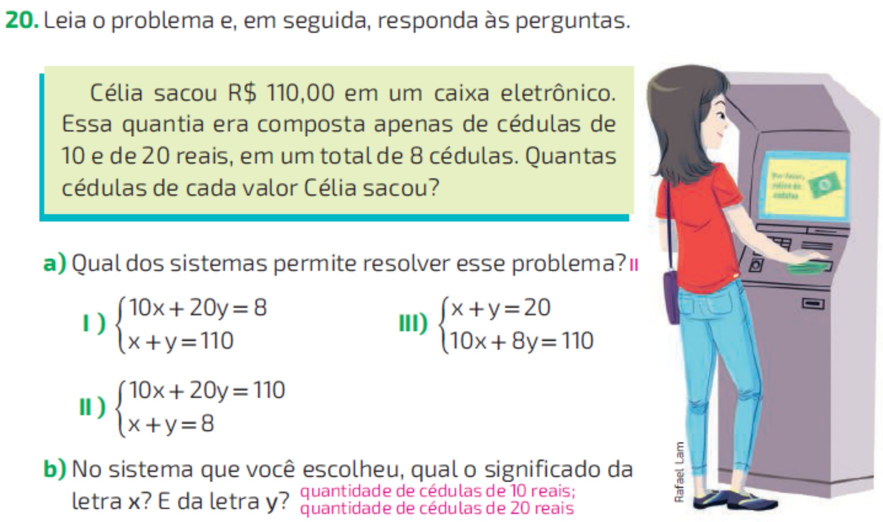
Na próxima seção, iremos mostrar a parte das atividades propostas no livro didático e com isto, buscaremos alguns tipos de tarefas e também indicativos de técnicas que poderão ser usadas para resolver as questões.

7.1.2.2 Atividades propostas

Nesta seção iremos apresentar as atividades propostas do livro didático sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, por isto, abordamos as questões, identificando os tipos de tarefas e técnicas que possam surgir no momento da resolução. Salientamos que por ser uma continuação direta do conteúdo de equações, as atividades propostas em sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas iniciam-se a partir da questão 20.

Na primeira questão (figura 12), podemos observar, que é apresentado um problema com pelo menos três questionamentos, primeiro temos: quantas cédulas de cada valor Célia sacou? Na letra A é mostrado ao aluno três possíveis sistemas com a seguinte pergunta: qual dos sistemas permite resolver o problema proposto? Na letra B, é indagado ao aluno o significado das incógnitas do sistema escolhido. A questão não traz indícios de quais técnicas serão utilizadas para resolver este problema. Já os tipos de tarefas destacadas são: "*identificar qual sistema permite resolver o problema proposto e determinar o significado das incógnitas.*"

Figura 12 - Questão 20 do livro didático



20. Leia o problema e, em seguida, responda às perguntas.

Célia sacou R$ 110,00 em um caixa eletrônico. Essa quantia era composta apenas de cédulas de 10 e de 20 reais, em um total de 8 cédulas. Quantas cédulas de cada valor Célia sacou?

a) Qual dos sistemas permite resolver esse problema? II

I) $\begin{cases} 10x + 20y = 8 \\ x + y = 110 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 10x + 20y = 110 \\ x + y = 8 \end{cases}$

III) $\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 8y = 110 \end{cases}$

b) No sistema que você escolheu, qual o significado da letra x? E da letra y? quantidade de cédulas de 10 reais; quantidade de cédulas de 20 reais

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.120)

Na questão 21 (figura 13), é dado um sistema que tem apenas uma solução possível para que o aluno por meio de quatro alternativa (*a, b, c* e *d*) identifique qual par ordenado satisfaz o sistema. Com isto, foi possível identificar o tipo de tarefa que consiste em “*verificar qual dos valores apresentados é solução do sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.”*

Figura 13 - Questão 21 do livro didático

21. O sistema $\begin{cases} 4x - 3y = -4 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$ tem uma única solução. Verifique em qual dos itens é apresentada a solução desse sistema. b

a) (2, 4) **b)** (5, 8) **c)** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ **d)** (−3, 7)

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.121)

Na questão 22 (figura 14), é apresentada uma situação que envolve a quantidade de CDs de duas pessoas. De acordo com o contexto é solicitado que o aluno escreva um sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas que possibilite determinar a quantidade de CDs de cada pessoa, porém na questão já se tem a informação do que significa cada uma das incógnitas. Logo, temos como tipo de tarefa, “*escrever o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas na forma algébrica”.*

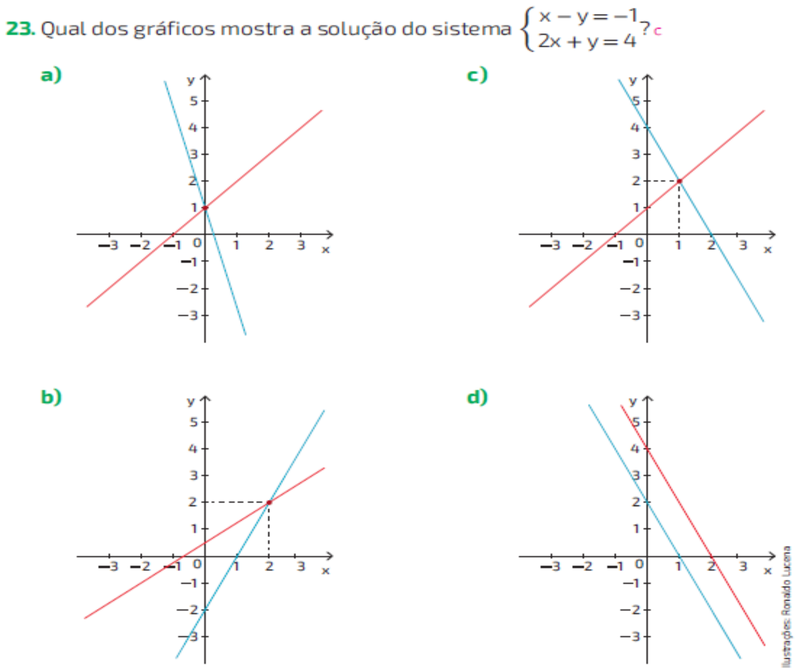
Figura 14 - Questão 22 do livro didático

22. Adriana e Felipe possuem juntos a quantidade de CDs indicada na figura, sendo que Adriana possui 4 CDs a mais que Felipe. Chamando de **x** a quantidade de CDs de Adriana e de **y** a quantidade de CDs de Felipe, escreva um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que possibilite determinar a quantidade de CDs de cada um deles. $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.121)

Na questão 23 (figura 15), é solicitado que os alunos identifiquem a solução gráfica do sistema apresentado, para isto, é dado quatro alternativas cujo os gráficos apresentam comportamentos distintos, sendo que, um deles possui retas paralelas e os outros possuem retas concorrentes. O tipo de tarefa proposto nesta atividade trata de "*identificar a solução gráfica correspondente ao sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas".*

Figura 15 - Questão 23 do livro didático



Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.121)

A questão 24 (figura 16) também é sobre gráfico, porém é dado quatro sistemas e quatro gráficos para que o aluno associe cada sistema as suas respectivas representações gráficas, uma observação que nos chamou a atenção é que os gráficos aparecem nas formas, paralelas, coincidentes e concorrentes. Temos como tipo de tarefa, "*associar cada sistema a sua representação gráfica".*

Figura 16 - Questão 24 do livro didático

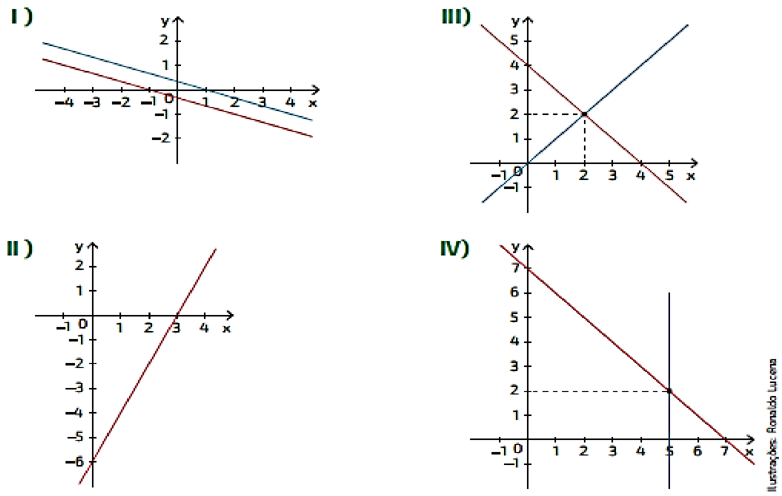
24. Associe cada sistema de equações à sua representação gráfica, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a-II; b-III; c-I; d-IV

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 0y = 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$

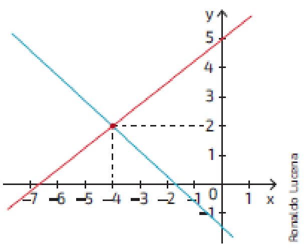


Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.122)

Na questão vinte e cinco (figura 17), o livro traz um gráfico de retas concorrentes, no qual é solicitado ao aluno que através da observação (análise) identifique qual é a solução do suposto sistema de equações representado pelo gráfico, e em seguida, é questionado se é possível, de acordo com o gráfico, o sistema ter outra solução. Neste questionamento, podemos citar dois tipos de tarefas, *"identificar a solução do sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas através do gráfico"* e *"identificar através do gráfico se o sistema possui mais de uma solução".*

Figura 17 - Questão 25 do livro didático

25. O gráfico mostra a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.



a) Qual é a solução desse sistema? (–4, 2)

b) De acordo com a representação gráfica, é possível que esse sistema possua mais de uma solução? Justifique sua resposta.
Não, pois retas concorrentes se encontram em um único ponto.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.122)

Na questão vinte e seis (figura 18), é dado um sistema e por meio deste, é solicitado que o aluno elabore um problema e dê para um colega resolver, em seguida, pede para que o aluno verifique se a resposta está correta. Podemos verificar o tipo de tarefa*, "elaborar situação problema envolvendo sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas e verificar se a resposta dada pelo colega referente a questão elaborada está correta".*

Figura 18 - Questão 26 do livro didático

26. Com base no sistema de equação abaixo, elabore um problema e, em seguida, dê para um colega resolver. Depois verifique se a resposta de seu colega está correta. Resposta pessoal.

$$\begin{cases} x - y = 2{,}2 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.122)

Na questão vinte e sete (figura 19), é solicitado ao aluno que resolva os quatros sistemas utilizando o método da substituição. Notamos nesta questão a falta de um contexto, neste sentido, entendemos que o intuito desta atividade consiste em fazer com que o aluno pratique o método de resolução estudo, neste caso, o da substituição. O tipo de tarefa que podemos destacar é: *"resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método da substituição".*

Figura 19 - Questão 27 do livro didático

27. Resolva os sistemas pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 28 \end{cases}$ (12, −8)

b) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + 5y = -19 \end{cases}$ (1, −4)

c) $\begin{cases} -2x - 3y = -9 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ (0, 3)

d) $\begin{cases} -6x + 2y = 8 \\ 9x - y = 8 \end{cases}$ (2, 10)

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na questão vinte e oito (figura 20), é apresentado um problema envolvendo a venda de ingressos. Para esta situação, é apontado o valor integral do ingresso e o valor destinado a meia entrada, o questionamento é sobre a quantidade de ingressos vendidos de cada tipo. Nesta questão não é apresentado o método de resolução para realização da tarefa. Neste caso, o tipo de tarefa consiste em “*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas”.*

Figura 20 - Questão 28 do livro didático

28. Observe os preços dos ingressos em um cinema.

Para determinada sessão, foram vendidos 216 ingressos, arrecadando um total de R$ 3 780,00. Determine quantos ingressos de cada tipo foram vendidos.
162 entradas e 54 meias-entradas

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

A questão vinte e nove (figura 21), assim como na vinte e sete, o objetivo é praticar um dos métodos ensinado, neste caso, o método exigido foi o da eliminação. Por este motivo, destacamos que o tipo de tarefa descrito consiste em “r*esolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método da eliminação”.*

Figura 21 - Questão 29 do livro didático

29. Utilizando o método da eliminação, resolva.

a) $\begin{cases} x + 7y = -2 \\ -x - 4y = -1 \end{cases}$ (5, −1)

b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -4x + y = -2 \end{cases}$ (2, 6)

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ -x + 5y = -7 \end{cases}$ (7, 0)

d) $\begin{cases} 3x - 5y = -14 \\ -2x - 8y = -2 \end{cases}$ (−3, 1)

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na questão trinta (figura 22), temos uma situação problema envolvendo uma papelaria, neste contexto é apresentado as incógnitas, valor do caderno e valor da caixa de lápis de cor, ao final é questionado ao aluno quanto custam um caderno e uma caixa de lápis de cor. Nesta questão não é solicitado o método de resolução para o sistema, porém, o manual do professor indica do método da eliminação. Assim, temos como tipo de tarefa, “*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método da eliminação”.*

Figura 22 - Questão 30 do livro didático

30. Em uma papelaria, a soma dos preços de três cadernos iguais e uma caixa de lápis de cor é R$ 65,15. O preço de um caderno é R$ 2,00 a mais do que o de duas caixas de lápis de cor. Quanto custam um caderno e uma caixa de lápis de cor?
R$ 27,35

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na trigésima primeira questão (figura 23), temos como contexto uma turma do 8° ano, no qual estudam 25 alunos, nesta situação as incógnitas são referentes a quantidade de meninos e meninas. Para resolver este problema o aluno terá que determinar o sistema que expressa a situação proposta. Neste contexto, podemos identificar o seguinte tipo de tarefa, “*transformar o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas da linguagem natural para a algébrica”.*

Figura 23 - Questão 31 do livro didático

31. Em uma turma de 8º ano estudam 25 alunos, sendo a maioria meninos. A diferença entre a quantidade de meninos e a de meninas é 7 alunos. Escreva um sistema de equações e determine a quantidade de meninos e meninas dessa turma. $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$; 16 meninos e 9 meninas

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na trigésima segunda questão (figura 24), temos uma situação onde envolve o abastecimento de um carro *flex*, as incógnitas são referentes ao preço do litro do etanol e do litro da gasolina. Para resolver o problema, são feitas as indagações a respeito do valor pago pelo litro de etanol e pelo litro da gasolina. Na questão em destaque não é solicitado o método especifico para resolver o sistema, por isto, temos o seguinte tipo de tarefa: “*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas”.*

Figura 24 - Questão 32 do livro didático

32. Daniele abasteceu seu carro *flex* com 5 L de etanol e 8 L de gasolina, pagando a quantia de R$ 54,65. No dia seguinte, ela o abasteceu com 8 L de etanol e 4 L de gasolina, pagando R$ 44,32. Sabendo que não houve alteração nos preços, qual é o valor pago por Daniele em cada litro de etanol? E de gasolina?
etanol: R$ 3,09; gasolina: R$ 4,90

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na trigésima terceira questão (figura 25), temos um problema sobre revenda de água mineral, neste contexto foi dado as informações contendo a quantidade de litros das garrafas vendidas e o preço unitário de cada garrafa. Sob estas circunstâncias foi feito o seguinte questionamento: Quantos litros de água foram vendidos nesse dia? Neste caso, a atividade apresenta o tipo de tarefa, "*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas e somar os valores das incógnitas obtidas".*

Figura 25 - Questão 33 do livro didático

33. Uma revendedora de água mineral comercializa apenas garrafas de 5 L e 1 L. Observe o preço unitário de cada garrafa.

Em certo dia foram vendidas 66 garrafas de água, arrecadando no total R$ 302,40. Quantos litros de água foram vendidos nesse dia? 266 L

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na questão trinta e quatro (figura 26), temos um problema que envolve vértices de um polígono. Para resolver esta atividade o aluno precisa lembrar do conteúdo de polígonos regulares, neste caso, as incógnitas "x" e "y" representarão os ângulos internos e os ângulos externos. Para a atividade em destaque, temos o tipo de tarefa, "d*eterminar a quantidade de vértices de um polígono regular e resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas".*

Figura 26 - Questão 34 do livro didático

34. Determine a quantidade de vértices de um polígono regular sabendo que a diferença entre a medida de um de seus ângulos internos e a de um dos ângulos externos é igual a 90°. 8 vértices

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.126)

Na questão trinta e cinco (figura 27), o livro pede para que o aluno represente graficamente a solução dos sistemas apresentados. Nesta atividade podemos observar que é solicitado a resposta por meio de uma análise gráfica, neste contexto, não será preciso resolver o sistema utilizando algum método apresentado, porém, é necessário fazer a construção gráfica, assim temos o tipo de tarefa, "*representar graficamente em um plano cartesiano a solução do sistema*".

Figura 27 - Questão 35 do livro didático

35. Represente graficamente a solução de cada sistema. Respostas nas orientações ao professor.

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$

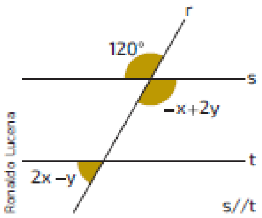
b) $\begin{cases} 4x - 6y = -12 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -6x + y = 6 \\ x + \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

Na trigésima sexta questão (figura 28), é mostrado duas retas paralelas (s e t) intersectadas por uma terceira reta (r) formando ângulos entre elas. Para resolver este problema é necessário reunir as informações contidas na imagem lembrando do conceito de ângulos opostos pelos vértices. Para esta questão temos a tipo de tarefa, "*determinar a solução do sistema a partir de duas retas paralelas cortadas por uma transversal".*

Figura 28 - Questão 36 do livro didático

36. Realize os cálculos necessários e determine os valores de **x** e **y**. $x = 80°$; $y = 100°$



Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

Na trigésima sétima questão (figura 29), temos um problema que envolve em seu contexto, tempo, quilocalorias, natação e corrida. As incógnitas apresentadas, são referentes ao tempo gasto na prática desses esportes. Este é o tipo de questão que apresenta bastante informação, o que pode fazer com que o aluno tenha dificuldade na hora de representar o sistema. Temos nesta questão o tipo de tarefa, *"resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas e converter minutos em hora".*

Figura 29 - Questão 37 do livro didático

37. Segundo especialistas, um adulto gasta, em média, 520 quilocalorias em uma hora de natação e 750 quilocalorias em uma hora de corrida. Se semanalmente certa pessoa adulta nada 30 min a menos do que corre, gastando na prática desses dois esportes 2 915 quilocalorias, quantas horas por semana ela pratica cada um desses esportes?
corrida: 2,5 h; natação: 2 h

Lembre-se de que 30 min é igual a 0,5 h

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

Na trigésima oitava questão (figura 30), o livro traz o par ordenado que representa a solução do sistema, porém é dado apenas uma equação e pede para que o aluno represente graficamente o sistema. Ao final, é solicitado para que o aluno compare com os colegas se as retas construídas estão iguais e justifique. Para esta questão, temos o tipo de tarefa, "*construir o gráfico do sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas dado a solução (par ordenado) e uma equação e comparar as retas traçadas justificando se estão iguais às de outras respostas".*

Figura 30 - Questão 38 do livro didático

38. O par ordenado $(-3, 2)$ é a única solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Sabendo que uma das equações é $2x - 3y = -12$, represente graficamente esse sistema.

Agora, compare o gráfico que você construiu com o de um colega. As retas que vocês traçaram representam as retas das mesmas equações? Justifique.
Resposta pessoal.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

Na trigésima nona questão (figura 31), o aluno deverá elaborar um problema, no qual, é apresentado uma situação sobre questões de uma prova. Após a elaboração, foi solicitado que fosse entregue a um colega para resolver o problema e que fosse verificado se ele resolveu corretamente. Este problema apresenta o tipo de tarefa, "e*laborar situação problema envolvendo sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas e verificar se a resposta dada pelo colega referente a questão elaborada está correta".*

Figura 31 - Questão 39 do livro didático

39. De acordo com as informações abaixo, elabore um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Em seguida, entregue-o para um colega resolver e verifique se ele o resolveu corretamente.

Uma prova é composta de 40 questões. A cada questão respondida corretamente são somados 3 pontos na nota, mas as que forem respondidas incorretamente ou não respondidas, descontam-se 2 pontos. Resposta pessoal.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

Na questão quarenta (figura 32), após ser apresentado uma situação problema é solicitado que seja escolhido entre dois sistemas aparentemente iguais mudando apenas o sinal em uma das equações o sistema que resolve corretamente o problema citado, em seguida, utilizar o sistema escolhido para solucionar o problema. Com isto, temos o tipo de tarefa, "*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, escolhendo entre duas alternativas qual sistema soluciona corretamente o problema proposto.*

Figura 32 - Questão 40 do livro didático

40. Leia o problema.

Em uma banca, a quantidade de revistas de culinária e de esportes totaliza 350. O dobro da quantidade de revistas de esportes menos o triplo das revistas de culinária é igual a 10. Quantas revistas de culinária e quantas de esportes há nessa banca?

Por meio de qual sistema é possível resolver esse problema? II

I) $\begin{cases} c - e = 350 \\ 2e - 3c = 10 \end{cases}$ II) $\begin{cases} c + e = 350 \\ 2e - 3c = 10 \end{cases}$

Agora, resolva o sistema escolhido e responda ao problema.
138 revistas de culinária e 212 revistas de esportes

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

A quadragésima primeira questão (figura 33), explora o conhecimento e a criatividade do aluno para elaborar uma situação problema que envolva sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas e entregar a um colega para que este o resolva, após ser resolvida, verificar se a resposta dada está correta. Nesta questão verificamos a existência do tipo de tarefa, "*elaborar situação problema envolvendo sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas e verificar se a resposta dada pelo colega referente a questão elaborada está correta."*

Figura 33 - Questão 41 do livro didático

41. Elabore um problema no qual seja necessário escrever e resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele o resolveu corretamente. Resposta pessoal.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.127)

Nesta seção, apresentamos as vinte e duas atividades propostas sobre o conteúdo de sistemas de equação do 1° grau com duas incógnitas do livro didático do professor de matemática participante desta pesquisa. Diante do que foi exposto identificamos alguns tipos de tarefas necessários para resolver os sistemas propostos, neste sentido, na próxima seção iniciaremos o processo de análise e identificação das praxeologias presente na parte curso.

7.1.3 Elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático

Nesta seção, iremos realizar a elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático, para isto, nos colocamos diante dos dados produzidos na parte curso e atividades propostas a fim de apresentar uma modelagem da organização matemática. De acordo com Bittar (2017), a modelagem da organização matemática é realizada, a partir de uma leitura, linha por linha da parte curso, uma vez que, nesta parte do livro didático um tipo de tarefa nem sempre é apresentada de forma explicita.

Os tipos de tarefas que serão apresentados nesta análise, partem de um questionamento primário, como resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, ou seja, esta indagação remete a uma tarefa que tem um aspecto mais geral, onde traz a necessidade de explorar os tipos de tarefas oriundas deste questionamento. Já para as técnicas, classificamo-las como: principais e auxiliares. As técnicas principais são aquelas que dão início a construção da resolução do problema, sem elas, não é possível seguir para as próximas técnicas, as auxiliares, que irão permitir a conclusão do tipo de tarefa.

Sendo assim, o livro didático já inicia o conteúdo apresentando uma situação (figura 34), na qual em seguida já é feito um questionamento cuja resposta é construída através da elaboração de um sistema de equações, neste caso, para resolução do problema foi proposto um método bem simples, tentativa e erro, onde os alunos atribuem valores as incógnitas apresentadas até chegar a solução do sistema.

Figura 34 – Primeiro exemplo do livro didático

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.118)

Como podemos observar na figura 34, o primeiro exemplo apresentado no livro didático se refere a um problema sobre estacionamento de carros e motos, logo após ser contextualizada a situação hipotética, é iniciada a discursão sobre o conteúdo, com o seguinte questionamento: quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento? Neste tipo de questão não conseguimos observar explicitamente o tipo de tarefa para resolver este problema, é preciso analisar também o método que será apresentado, que trata da tentativa e erro, assim, conseguimos identificar o primeiro tipo de tarefa, "*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro* (T1)."

Desta forma, para resolver o problema proposto, é preciso realizar algumas técnicas. No contexto apresentado, observamos a necessidade de transformar a linguagem apresentada em uma linguagem acessível a resolução, isto é, em uma linguagem matemática (algébrica), por isto, podemos determinar como uma técnica principal ($\tau 1$)*, "transformar* o *sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas da linguagem natural para a algébrica"*. Após, a transformação na linguagem algébrica, o livro destaca como técnica auxiliar, "*atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente"* ($\tau 1{,}1$). Observamos nesta técnica auxiliar que apenas é dado valores para as equações do sistema de modo que a solução foi dada por valores que resolveram as equações simultaneamente.

Como justificativa para a técnicas apresentadas estão as "*propriedades da equação da reta"* ($\theta 1$). O livro didático não apresenta uma teoria para justificar a tecnologia abordada, isto ocorre, por se tratar de um livro do ensino fundamental, na qual a finalidade não é destacar a matemática de maneira mais formal e sim de uma forma mais intuitiva.

Diante do exposto na figura 34, entendemos que há uma preocupação de que os alunos consigam entender os processos de conversão da linguagem natural na algébrica e que isto faça sentido para eles, esta ideia remete ao que Chevallard (1991) denomina de saber ensinado, que por sua vez é aquele apresentado ao aluno no cotidiano da sala de aula.

Após a apresentação do tipo de tarefa e técnicas abordadas no início do conteúdo, observamos ao analisarmos as atividades propostas que alguns exercícios fazem parte deste conjunto de tipos de tarefas, como é o caso das três primeiras questões apresentadas na seção anterior, atividades propostas. Embora as questões apresentadas, não tratem apenas dos tipos de tarefas abordados nesta parte do conteúdo, as técnicas destacadas inicialmente são suficientes para resolver os problemas propostos.

No quadro 1, podemos observar como foi organizado e estruturado o tipo de tarefa T1, bem como o conjunto de praxeologias matemáticas necessárias para resolução do problema proposto. Podemos verificar que o livro apresenta poucas técnicas nesta parte introdutória do conteúdo.

Quadro 1 - Quarteto praxeológico do tipo de tarefa T1

Tipo de tarefa	**Técnica principal**	**Técnica auxiliar**	**Elementos tecnológicos**
Resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro. (T1)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica. ($\tau 1$)	Atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente. ($\tau 1,1$)	Propriedades da equação da reta ($\theta 1$)

Fonte: o autor (2023)

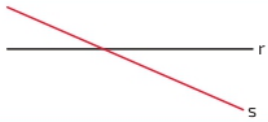
Retomando o exemplo da figura 34, o livro traz em seguida a sua representação gráfica (figura 35). Neste caso, podemos observar mais um tipo de tarefa (T2) que podemos determinar como: “*representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.”*

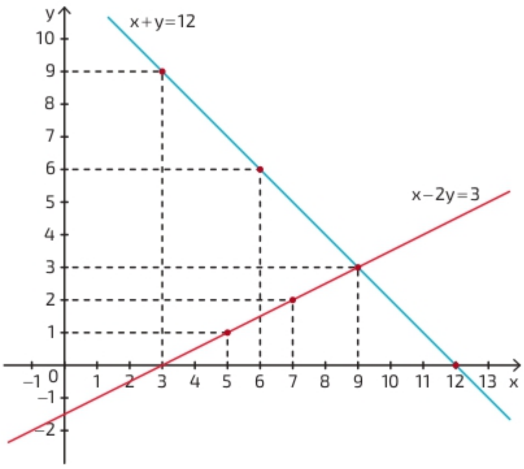
Figura 35 - Representação gráfica do primeiro exemplo do livro

Podemos representar graficamente esse sistema. Para isso, representamos em um mesmo plano cartesiano as soluções das equações $x + y = 12$ e $x - 2y = 3$.

As retas que representam as soluções das equações são **concorrentes** e se encontram no ponto de coordenadas (9, 3). Assim, o par ordenado (9, 3) é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Lembre-se de que duas retas são concorrentes quando se cruzam em um único ponto.





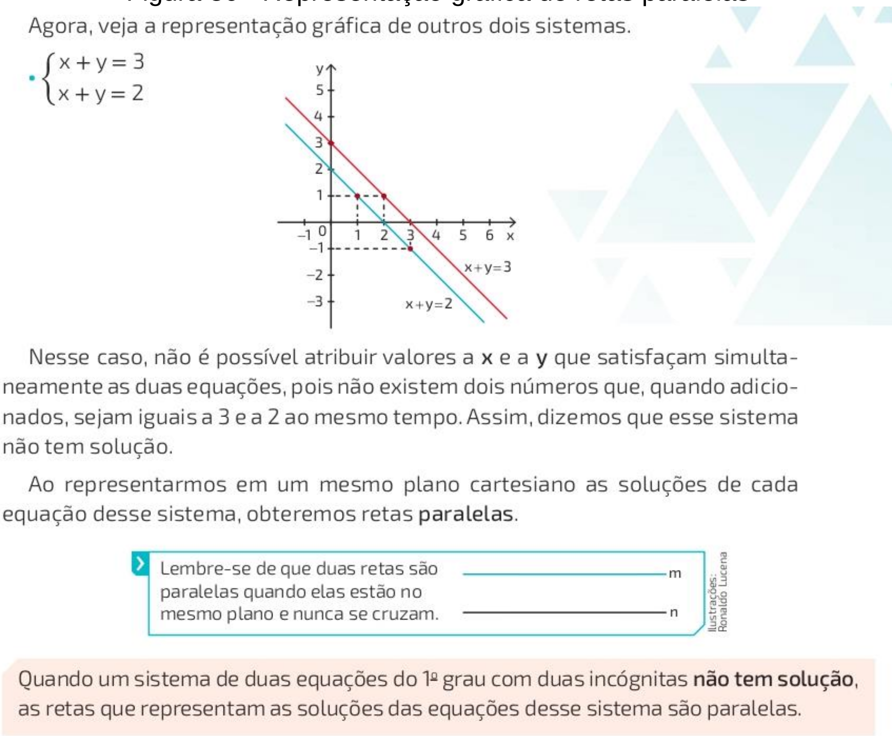
Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.119)

Por meio da representação gráfica, os alunos poderão revisar a construção de gráficos de equações do 1° grau, conteúdo presente no capitulo estudado sobre equações, com isto, compreenderão que a solução do sistema também pode ser expressa através da sua representação gráfica.

Neste caso, o livro traz como técnica principal para o tipo de tarefa T2, “*atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença”* (τ2), e como técnicas auxiliares, “*identificar os pares ordenados no plano cartesiano” (τ2,1) e “esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano”* (τ2,2).

As técnicas apresentadas também serão as mesmas utilizadas para resolver mais duas situações, quando o gráfico apresenta retas paralelas e coincidentes, ou seja, na primeira situação o sistema não terá nenhuma solução possível e na segunda infinitas soluções. Vejamos o momento em que é apresentado o gráfico de retas paralelas na figura 36.

Figura 36 - Representação gráfica de retas paralelas



Agora, veja a representação gráfica de outros dois sistemas.

- $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Nesse caso, não é possível atribuir valores a **x** e a **y** que satisfaçam simultaneamente as duas equações, pois não existem dois números que, quando adicionados, sejam iguais a 3 e a 2 ao mesmo tempo. Assim, dizemos que esse sistema não tem solução.

Ao representarmos em um mesmo plano cartesiano as soluções de cada equação desse sistema, obteremos retas **paralelas**.

Lembre-se de que duas retas são paralelas quando elas estão no mesmo plano e nunca se cruzam.

Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **não tem solução**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são paralelas.

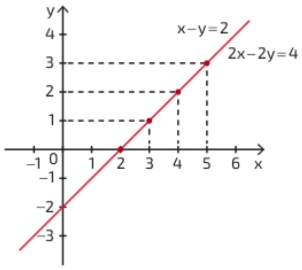
Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.119)

Como pudemos observar na figura 36, a representação gráfica do sistema abordado trata-se de retas paralelas, onde podemos destacar que não existem pontos comuns as duas retas. Ao esboçarmos o gráfico do sistema, podemos verificar mais uma técnica auxiliar, “*esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano”* $(\tau 2{,}3)$. Por outro lado, uma outra representação mostra o caso de quando as retas são coincidentes, vejamos a figura 37.

Figura 37 - Representação gráfica de retas coincidentes

- $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

x	y	x – y	2x – 2y
2	0	$2 - 0 = 2$	$2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$
3	1	$3 - 1 = 2$	$2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$
4	2	$4 - 2 = 2$	$2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4$
5	3	$5 - 3 = 2$	$2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$



Nesse caso, diversos valores atribuídos a **x** e a **y** satisfazem simultaneamente as duas equações.

Ao representarmos em um mesmo plano cartesiano as soluções de cada equação desse sistema, obteremos retas **coincidentes**. Assim, dizemos que esse sistema tem infinitas soluções.

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **284** e **285**, veja como utilizar um *software* de geometria para visualizar as soluções de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, caso existam.

Lembre-se de que duas retas são coincidentes quando estão sobrepostas, ou seja, têm infinitos pontos comuns.

a ≡ b

Ilustrações: Ronaldo Lucena

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.120)

Neste sentido, podemos verificar mais uma técnica auxiliar, "*esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano"* $(\tau 2{,}4)$. Os elementos tecnológicos que justificam as técnicas apresentadas, tratam-se das "*propriedades da posição relativa de duas retas"* $(\theta 2)$, onde dizem que: Sejam as retas r e s, retas da equação do sistema, são concorrentes ⇔ um único ponto em comum; Sejam as retas r e s, retas da equação do sistema, são paralelas e distintas ⇔ nenhum ponto comum; Sejam as retas r e s, retas da equação do sistema, são coincidentes ⇔ infinitos pontos comuns. De acordo com Chevallard (1999) a função da tecnologia também é de esclarecer a técnica, neste caso, estas propriedades irão definir quando ocorrerão as posições possíveis paras retas, ou seja, quando serão concorrentes, paralelas ou coincidentes.

Os tipos de tarefas em destaque, são exercitados nas questões 23, 24 e 25 mostrados na parte atividades propostas. Isto ocorre, devido estas questões tratar exclusivamente de gráficos. Salientamos que os autores explicam no manual do professor que a opção em trabalhar a representação gráfica das soluções das equações de um sistema, tem por finalidade fazer com que os alunos percebam visualmente quando o sistema apresenta uma, infinitas ou nenhuma solução.

O livro ainda traz a sugestão comentada no manual do professor, sobre a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática e trabalhar com a proposta de uma seção do próprio livro denominada “Explorando tecnologias”. Vejamos o quadro 2, onde tratamos do quarteto praxeológico do tipo de tarefa T2.

Quadro 2 - Quarteto praxeológico do tipo de tarefa T2

Tipo de tarefa	**Técnica principal**	**Técnica auxiliar**	**Elementos tecnológicos**
Representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas (T2)	Atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença. (τ2)	Identificar os pares ordenados no plano cartesiano. (τ2,1) Esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano. ($\tau 2,2$) Esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano. ($\tau 2,3$) Esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano. ($\tau 2,4$)	Propriedades da posição relativa de duas retas. ($\theta 2$)

Fonte: o autor (2023)

Após o livro apresentar o método de tentativa e erro e a parte gráfica, é iniciado a primeira parte das atividades propostas sobre o conteúdo estudado até aquele momento, esta parte do livro conta com um total de sete atividades que vão da questão 20 à 26, mostradas na seção anterior. Em seguida, o livro aborda a segunda parte do conteúdo, onde é apresentado ao aluno dois métodos de resoluções de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas, o da substituição e o da eliminação. O primeiro método em destaque é o da substituição, no qual o livro traz o contexto de uma corrida, vejamos a figura 38.

Figura 38 – Exercício resolvido sobre uma competição esportiva

Em certa competição esportiva, participaram 515 atletas. A quantidade de homens participantes foi maior do que a de mulheres, uma diferença de 45 atletas.

Quantos homens e quantas mulheres participaram dessa competição?

Atletas disputando uma maratona.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.119)

A princípio, a figura 38 traz o contexto de uma situação que tem como tipo de tarefa (T3), "*resolver o sistema de equações pelo método da substituição".* Nesta perspectiva, os "novos" métodos de resoluções que são apresentados, trazem como técnicas a manipulação algébrica das equações do sistema.

Assim como no tipo de tarefa T1, uma das técnicas principais consiste em "*transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica"* (τ1). Isto ocorre, devido o exemplo apresentar um contexto. Podemos observar com mais clareza este processo na figura 39.

Figura 39 – Transformação da linguagem natural para a algébrica

Informação	Equação	Sistema
Quantidade total de atletas	$x + y = 515$	$\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}$
Diferença entre a quantidade de homens e a de mulheres	$x - y = 45$	

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.119)

Em seguida, o livro sugere mais um tipo de técnica principal, *"isolar uma das incógnitas do sistema de equações"* (τ3). No exemplo estudado, foi escolhido a primeira equação, $x + y = 515$, e isolado a incógnita "y". No manual do professor é sugerido que o sistema também seja resolvido utilizando a segunda equação, $x - y = 45$, para que os alunos possam comparar e verificar que as soluções obtidas nos dois casos é a mesma. Ao ser usado a primeira equação para resolução do sistema, o livro traz a seguinte manipulação algébrica:

$$x + y = 515$$
$$x - x + y = 515 - x$$
$$y = 515 - x$$

Esta manipulação, traz o "*princípio aditivo da igualdade" (τ3,1)* como técnica secundária. Após ser isolada a incógnita y, os seus termos são substituídos na outra equação, para isto, destacamos mais uma técnica auxiliar que consiste em: *"substituir a expressão encontrada, ao isolar a incógnita, na outra expressão" (τ3,2).* Ao ser substituído a incógnita pelo valor encontrado é necessário "*eliminar parênteses através da propriedade distributiva"* (τ3,3), para continuar resolvendo a equação.

$$x - y = 45$$
$$x - (515 - x) = 45$$
$$x - 515 + x = 45$$
$$2x - 515 + 515 = 45 + 515$$
$$2x = 560$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{560}{2}$$
$$x = 280$$

Deste modo, observamos ainda que para determinar o valor da incógnita foi utilizado o "*princípio multiplicativo da igualdade" (τ3,4)* e encontrado o valor correspondente a incógnita "x", que tem como resultado $x = 280$*.* Para encontrar o valor da incógnita "y" foi substituído "x" por 280 em uma das equações do sistema, esta substituição corresponde a outra técnica auxiliar, "*substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema"* (τ3,5). O livro trouxe como escolha a primeira equação.

$$x + y = 515$$
$$280 + y = 515$$
$$280 - 280 + y = 515 - 280$$
$$y = 235$$

Com isto, foi obtido o par ordenado que corresponde a solução do sistema (280, 235), ou seja, foram 280 atletas homens e 235 atletas mulheres. O manual do professor traz a sugestão de ser verificado com os alunos que o total de atletas era dado por 280 + 235 = 515 e que a quantidade de atletas homens a mais do que atletas mulheres é dada por 280 – 235 = 45. Podemos citar como elementos tecnológicos as *"propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos"* ($\theta 3$). Vejamos a seguir no quadro 3 o quarteto praxeológico matemático do tipo de tarefa T3.

Quadro 3 - Quarteto praxeológico do tipo de tarefa T3

Tipo de tarefa	**Técnica principal**	**Técnica auxiliar**	**Elementos tecnológicos**
Resolver o sistema de equações pelo método da substituição (T5)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica, ($\tau 1$) Isolar uma das incógnitas do sistema de equações ($\tau 3$)	Utilizar o princípio aditivo da igualdade ($\tau 3{,}1$) Substituir a expressão encontrada, ao isolar a incógnita, na outra expressão. ($\tau 3{,}2$) Eliminar parênteses ($\tau 3{,}3$) Utilizar o princípio multiplicativo da igualdade ($\tau 3{,}4$) Substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema. ($\tau 3{,}5$)	Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos. ($\theta 3$)

Fonte: o autor (2023)

O outro método proposto no livro didático para resolver sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas é o método da eliminação. Para este método, temos o tipo de tarefa T6 que corresponde em "*resolver o sistema de equações pelo método da eliminação".* Com isto, foi dado o seguinte sistema, sem a apresentação de um contexto,

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Na resolução, é chamado a atenção do leitor para a incógnita “y” que apresenta temos opostos, “y” e “-y”, assim, destacamos como uma das técnicas principais, “*adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos”* (τ4), adicionando essas equações membro a membro, teremos a eliminação da incógnita “y”, isto remete a uma técnica auxiliar, *“eliminar a incógnita através da soma das equações”* (τ4,1).

$$x + y = 14$$
$$\underline{x - y = 8}$$
$$2x + 0y = 22$$
$$2x = 22$$

Quando é eliminado uma das incógnitas, podemos notar que iremos obter outra igualdade, que também podemos destacar como sendo mais uma técnica auxiliar, “*reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita”* (τ4,2), neste caso, resolvemos a nova equação que possui apenas uma incógnita. Para isto, é preciso utilizar uma técnica auxiliar já mostrada no método da substituição, “*utilizar o princípio multiplicativo da igualdade”* (τ3,4).

$$2x = 22$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{22}{2}$$
$$x = 11$$

Após obtermos o valor da incógnita “x”, foi substituído o “x” por 11 em uma das equações do sistema para obter o valor de “y”. A equação escolhida no livro didático foi $x + y = 14$, onde foi utilizado mais uma técnica auxiliar já apresentada, “*utilizar o princípio aditivo da igualdade”* (τ3,1). Assim, para determinarmos a solução do sistema é necessário substituir o valor numérico encontrado, com isto, podemos destacar mais uma técnica auxiliar, “*substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema”* (τ3,5).

$$x + y = 14$$

$$11 + y = 14$$

$$11 - 11 + y = 14 - 11$$

$$y = 3$$

Logo, foi obtido como solução para o sistema o par ordenado (11,3). Nesta mesma perspectiva, mais dois exemplos foram utilizados para representar sistemas quando não apresentam termos opostos nas equações. O livro explica que quando ocorre estes casos, é necessário "*multiplicar uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos"* (τ5), cuja finalidade é obter termos opostos. Para isto, é apresentado o sistema,

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$$

Neste caso, os autores ressaltam a possibilidade de multiplicar por -2 a segunda equação, $x + 3y = 22$, o processo de multiplicação irá dá origem a equações equivalentes, com isto teremos com técnica auxiliar, "*obter uma ou duas equações equivalentes"* (τ5,1), vejamos a figura 40.

Figura 40 - Exemplo de multiplicação para obter termos opostos

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $2x$ e $-2x$.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.125)

Resolvendo este sistema utilizando as técnicas já apresentadas, teremos como a solução o par ordenado (13,3). Vejamos o passo a passo da resolução na figura 41.

Figura 41 - Resolução do exemplo da multiplicação para obter uma equação oposta

$$\begin{array}{r} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \\ \hline 0x - 7y = -21 \end{array} \longrightarrow y = 3$$

$$\begin{gathered} 2x - y = 23 \\ 2x - 3 = 23 \\ 2x - 3 + 3 = 23 + 3 \\ 2x = 26 \\ \frac{2x}{2} = \frac{26}{2} \\ x = 13 \end{gathered}$$

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.125)

Outro exemplo apresentado no livro didático mostra a situação quando o sistema precisa que as duas equações sejam multiplicadas por valores aleatórios a fim de obter termos opostos e assim, resolve-la utilizando o método da eliminação. O sistema do exemplo foi dado por:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 37 \end{cases}$$

Como resolução para este sistema, foi proposto que a primeira equação fosse multiplicada por -3 e a segunda por 2, obtendo assim equações equivalentes e com temos opostos, como podemos verificar na figura 42.

Figura 42 – Equações equivalentes obtidas a partir da multiplicação de dois números

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 3x + 5y = 37 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $-6x$ e $6x$.

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.125)

Com isto, foi obtido duas equações cujo os opostos foram -6x e 6x, ficando assim apenas com a incógnita “y” no segundo termo como podemos observar na figura 43.

Figura 43 - Resolução de sistema com multiplicação nas duas equações para obter temos opostos

$$\begin{array}{r} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \\ \hline 0x + 31y = 62 \end{array} \longrightarrow y = 2$$

$$\begin{aligned} 6x + 10y &= 74 \\ 6x + 10 \cdot 2 &= 74 \\ 6x + 20 &= 74 \\ 6x + 20 - 20 &= 74 - 20 \\ 6x &= 54 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{54}{6} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Fonte: (PATARO E BALESTRI, 2018, p.125)

A solução obtida para o sistema foi o par ordenado (9,2). No manual do professor é sugerido que os alunos construam os gráficos das equações, e desta forma ao encontrarem as soluções dos sistemas comparar com as respostas obtidas a partir dos métodos utilizados. Para trabalhar o método da eliminação, o livro traz a questão 29 das atividades propostas.

Os elementos tecnológicos que justificam as técnicas apresentadas foram as "*propriedades operatórias de termos algébricos"* ($\theta 4$), por se tratar de técnicas que se utilizam das propriedades como, a soma e multiplicação de termos algébricos. Vejamos o quadro 4, a seguir.

Quadro 4 - Quarteto praxeológico do tipo de tarefa T4

Tipo de tarefa	**Técnica principal**	**Técnica auxiliar**	**Elementos tecnológicos**
Resolver o sistema de equações pelo método da eliminação (T4)	Adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos. ($\tau 4$) Multiplicar uma ou as duas equações por número escolhido convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos. ($\tau 5$)	Eliminar a incógnita através da soma das equações ($\tau 4,1$) Reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita ($\tau 4,2$) Utilizar o princípio multiplicativo da igualdade ($\tau 3,4$) Utilizar o princípio aditivo da igualdade ($\tau 3,1$) Substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema. ($\tau 3,5$) Obter uma ou duas equações equivalentes ($\tau 5,1$)	Propriedades operatórias de termos algébricos ($\theta 4$)

Fonte: o autor (2023)

Diante do que foi exposto nesta seção, foi possível identificar quatro tipos de tarefas, cinco técnicas principais e treze auxiliares, além disso, foram apresentadas quatro tecnologias para justificar as técnicas. Com isto, entendemos que o bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber foi o que apresentou maior complexidade em determinar as praxeologias, por se tratar de um livro didático do 8° ano algumas definições formais e teoremas não são apresentadas a este nível de escolaridade, já que, o estudo da álgebra ainda é algo “novo” para estes estudantes. Neste sentido, o bloco prático-técnico ou bloco do saber-fazer foi o que mais se destacou por suas tarefas e técnicas serem apresentadas explicitamente.

Na próxima seção, iremos apresentar a elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático. Está apresentação se dará por meio dos momentos didáticos propostos por Chevallard (1991), que tem como princípio básico responder ao seguinte questionamento, “como ensinar esse conteúdo? ”

7.1.4 Elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático

Nesta seção, iremos realizar uma análise na parte curso do livro didático sobre os momentos didáticos propostos por Chevallard (1991). Destacamos que as Praxeologias Didáticas ou Organizações Didáticas (OD) ocorrem em meio a execução da prática das Organizações Matemática (OM), isto é, se refere a forma que possibilita a realização do estudo de um determinado tema. A partir de uma análise sobre as organizações didáticas chegamos a seis momentos de estudos.

O primeiro momento didático, se refere ao **primeiro encontro com o tipo de tarefa**, no livro didático este momento aparece claramente ao menos seis vezes, quando iniciado um tipo de tarefa T. De acordo com Chevallard (1999), este momento didático, pode ocorrer várias vezes durante o processo. Deste modo, no manual do professor é sugerido que sejam revisitados os métodos que já foram estudados afim de validar aqueles que estão sendo abordados.

Neste caso, os tipos de tarefas surgem a partir dos exemplos apresentados que trazem consigo um questionamento base para se iniciar o estudo do tema, como resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas? Para responder a esta questão o livro destaca alguns caminhos possíveis através dos métodos abordados que iniciarão do mais simples e menos complexo, para os mais sofisticados (método da substituição e da eliminação) que trazem em sua composição as manipulações algébricas.

O segundo momento didático, **exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica**, ocorre durante e após o primeiro encontro com o tipo de tarefa. O livro didático apresenta técnicas mais básicas relacionadas ao método proposto inicialmente, por exemplo no método de tentativa e erro algumas das técnicas em destaque foram mostradas em outra parte do livro, principalmente para resolver equações do 1° grau. O mesmo acontece quando são apresentados os métodos da eliminação e substituição, pois como já mencionados as técnicas estão vinculadas, em sua maioria, a manipulações algébricas.

Uma das técnicas que o livro faz questão de repetir é a da transformação da linguagem natural para a algébrica. É importante destacar que esta técnica é bem importante quando o problema demanda de algum contexto, por isto, a construção desta técnica segue um passo a passo mais elaborado dividindo a situação em duas partes, ou seja, busca as informações que irão desenvolver cada equação do sistema separadamente e expondo em uma tabela.

O Terceiro momento didático, **constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica**, ocorre durante os momentos didáticos anteriores, isto é, a medida em que são apresentados os tipos de tarefas tem-se a necessidade da utilização de técnicas, que por sua vez precisa ser justificada pelas tecnologias. Assim, algumas tecnologias não são destacadas no livro didático, que são o caso daquelas que surgem das técnicas relacionadas as manipulações algébricas, pois a aparição destas ocorreram em capítulos anteriores do livro.

Em contrapartida, as tecnologias que foram usadas para justificar as técnicas empregadas na parte gráfica aparecem ao final do desenvolvimento das técnicas. Por outro lado, o livro didático não traz as teorias que justificam as tecnologias abordadas, isto ocorre, por se tratar de um livro do ensino fundamental, no qual a finalidade não é destacar a matemática de maneira mais formal e sim de uma forma mais intuitiva.

O quarto momento didático, **trabalho da técnica**, ocorre com as atividades propostas, como vimos, algumas atividades trazem como tipo de tarefa as apresentadas durante a parte curso. Como exemplo, temos as atividades 27 e 29, que tem como tipos de tarefas, T5 e T6, “*resolver o sistema de equações pelo método da substituição”* e *“resolver o sistema de equações pelo método da eliminação”.*

Nas atividades propostas, especificamente nas questões 27 e 29, os tipos de tarefas não apresentam um contexto, por outro lado, grande parte das questões apresentadas trazem consigo diversos contextos, porém não é indicado o método que o aluno deva utilizar para resolver os problemas.

O quinto momento didático, **institucionalização**, ocorre durante todo o processo de apresentação dos tipos de tarefas e passo a passo das técnicas aplicadas, isto é, para cada tipo de tarefa o livro trouxe técnicas que foram trabalhadas, constituindo um parecer de validade. Este momento é bem destacado principalmente no manual do professor, pois os autores sugerem como comprovação a confrontação por meio dos resultados obtidos em cada método já estudado.

O sexto momento didático a **avaliação** é de acordo com Chevallard normalmente vinculado ao momento de institucionalização. Visto que, a todo momento o manual do professor traz sugestões para se aplicar as técnicas abordadas, ou seja, ao ser trabalhado um “novo” método é destacado a importância de resolver o tipo de tarefa proposto pelos métodos anteriores afim de avaliar como os alunos compreenderam aquela parte do conteúdo.

Neste sentido, o livro traz cada momento didático de maneira conectada entre si, isto mostra, a visão dos autores de como ensinar o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas. Destacamos ao verificarmos o material analisado, a preocupação que os autores tiveram no manual do professor em trabalhar os métodos utilizando os anteriores para valida-los.

Na próxima seção, iremos realizar a análise das organizações modeladas, será nesta seção que iremos consolidar os dados apresentados nas seções parte curso, atividades propostas, elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático e elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático.

7.1.5 Análise das organizações modeladas

Nesta seção, iremos realizar uma análise referente as organizações modeladas, em que interpretaremos as informações obtidas através das organizações matemáticas modeladas na parte curso, na parte atividades propostas e nas organizações didáticas.

Buscaremos apresentar de forma sucinta os dados obtidos por meio da análise do livro didático afim de confronta-los com os dados obtidos durante o acompanhamento da aula do professor de matemática participante da pesquisa, e desta forma, identificaremos as conformidades existentes entre as praxeologias apresentadas no livro didático sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas das praxeologias que emergiram da ação didática do professor de matemática.

Primeiramente, apresentamos na parte "escolha do material (livro) a ser analisado" um pouco sobre como os autores pensaram livro didático usado em nossa pesquisa. Constatamos que, o manual do professor foi estruturado em duas partes principais, uma contendo orientações didáticas e metodológicas da coleção pelas contribuições da BNCC, e a outra, a reprodução das páginas do livro do aluno espelhada de maneira reduzida em uma das partes laterais.

Após esta explanação, iniciamos a seção "separação da parte curso das atividades propostas". O objetivo dessa seção, foi separar a parte da explanação do conteúdo das atividades propostas. Verificamos na parte curso alguns exemplos resolvidos, entre os quais, dois apresentaram uma situação para contextualizar o problema e dá início a um método. Já na parte das atividades propostas, constatamos um total de 22 questões, em que na grande maioria apresentaram vários contextos envolvendo situações do dia a dia.

Na seção identificação/elaboração do quarteto praxeológico matemático, retomamos o que foi discutido na parte curso e atividades propostas, identificando os tipos de tarefas, técnicas e os elementos tecnológicos. Na seção identificação/elaboração do quarteto praxeológico didático, abordamos os momentos didáticos propostos por Chevallard (1991).

Em nossa análise, identificamos que os tipos de tarefas abordados surgem em decorrência de um questionamento primário, como resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas? Para solucionar este questionamento, o livro didático traz quatro métodos, tentativa e erro, análise gráfica, substituição e eliminação.

Desta forma, verificamos que o livro inicia o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas inserindo de maneira simples os métodos, dando destaque a construção de técnicas para resolução dos exemplos. Assim, foram apresentadas cinco técnicas principais desenvolvidas através dos métodos abordados. Além das técnicas principais, identificamos mais onze técnicas auxiliares que surgiram em decorrência da explanação dos exercícios resolvidos.

O livro didático também apresentou alguns elementos tecnológicos com a finalidade de justificarem as técnicas, neste caso, conseguimos identificar quatro, em que apenas um foi abordada de maneira explicita, que é o caso das propriedades ligadas a posição relativa entre duas retas, e três que surgiram das manipulações algébricas mostradas nos exemplos resolvidos.

Em contrapartida, não conseguimos identificar teorias, pois como já mencionado em outro momento, o livro didático analisado, consiste em um livro do 8° ano do ensino fundamental, neste nível de ensino o objetivo não é apresentar o uso de teoremas e outras propriedades. No quadro 5, podemos verificar de maneira resumida como ficou organizadas as praxeologias matemáticas identificadas na análise do livro didático.

Quadro 5 - Praxeologias Matemáticas do livro didático

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS PRINCIPAIS	TÉCNICAS AUXILIARES	ELEMENTOS TECNOLÓGICOS
Resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro. (T1)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica, ($\tau 1$)	t1,1: Atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente. ($\tau 1{,}1$)	Propriedade da equação da reta ($\theta 1$)
Representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas (T2)	Atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença. ($\tau 2$)	Identificar os pares ordenados no plano cartesiano. ($\tau 2{,}1$) Esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano. ($\tau 2{,}2$) Esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano. ($\tau 2{,}3$) Esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano. ($\tau 2{,}4$)	Propriedade da posição relativa entre duas retas ($\theta 2$)
Resolver o sistema de equações pelo método da substituição. (T3)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica, ($\tau 1$) Isolar uma das incógnitas do sistema de equações. ($\tau 3$)	Utilizar o princípio aditivo da igualdade. ($\tau 3{,}1$) Substituir a expressão encontrada, ao isolar a incógnita, na outra expressão. ($\tau 3{,}2$) Eliminar parênteses através da distributiva. ($\tau 3{,}3$) Utilizar o princípio multiplicativo da igualdade ($\tau 3{,}4$) Substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema. ($\tau 3{,}5$)	Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos. ($\theta 3$)
Resolver o sistema de equações pelo método da eliminação. (T4)	Adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos. ($\tau 4$) Multiplicar uma ou as duas equações por número escolhido convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos. ($\tau 5$)	Eliminar a incógnita através da soma das equações. ($\tau 4{,}1$) Reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita. ($\tau 4{,}2$) Utilizar o princípio aditivo da igualdade. ($\tau 3{,}1$) Utilizar o princípio multiplicativo da igualdade ($\tau 3{,}4$) Substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema. ($\tau 3{,}5$) Obter uma ou duas equações equivalentes. ($\tau 5{,}1$)	Propriedades operatórias de termos algébricos. ($\theta 4$)

Fonte: O autor (2023)

Após destacarmos as praxeologias matemáticas, mostramos as praxeologias didáticas através dos momentos didáticos propostos por Chevallard (1999). O primeiro momento didático, **Primeiro encontro com o tipo de tarefa**, surge sempre na apresentação de um "novo" método de resolução quando é iniciado um tipo de tarefa correspondente. Neste sentido, os autores iniciam cada parte do conteúdo apresentando um problema, ao qual, vai sendo construído uma técnica para resolução dos exemplos.

O segundo momento didático (**Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica**), ocorre também durante a apresentação dos tipos de tarefas e na explanação das técnicas. Neste momento didático é possível verificar que os autores tiveram a preocupação de trabalhar os métodos com as respectivas técnicas seguindo uma ordem considerada mais proveitosa para o processo de ensino e aprendizagem.

O terceiro momento didático (**Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica**), está presente durante a explanação das técnicas, que é o caso das manipulações algébricas, e ao final de cada representação gráfica, na propriedade relativa a posição de duas retas. É importante destacar que este momento didático se relaciona diretamente com os dois primeiros momentos, pois a escolha das técnicas requer sempre uma justificativa.

O quarto momento didático (**Trabalho com a técnica**), é encontrado nas atividades propostas, nesta parte do conteúdo o aluno se depara com algumas tarefas com a finalidade de praticar os métodos com as técnicas estudadas, como por exemplo, as atividades 27 e 29 do livro didático, que tem como tipos de tarefas, "*resolver o sistema de questões pelo método da substituição" (T3) e "resolver o sistema de questões pelo método da eliminação" (T4)*.

O quinto momento didático (**Institucionalização**), é apresentado durante todos os outros momentos. Podemos observar que o seu desenvolvimento ocorre a medida em que são apresentados novos elementos introduzindo as técnicas utilizadas, quero dizer que as técnicas auxiliares se unem as técnicas principais dando validade a cada método estudado.

O sexto momento didático a **avaliação** é de acordo com Chevallard normalmente vinculado ao momento de institucionalização. Visto que, a todo momento o manual do professor traz sugestões para se aplicar as técnicas abordadas, ou seja, ao ser trabalhado um "novo" método é destacado a importância de resolver o tipo de tarefa proposto pelos métodos anteriores afim de avaliar como os alunos compreenderam aquela parte do conteúdo. Vejamos o quadro 6 a seguir, onde trata da ocorrência dos momentos didáticos no livro didático.

Quadro 6 - Momentos didáticos do livro analisado

MOMENTOS DIDÁTICO	QUANDO OCORRE?
1° momento - primeiro encontro com o tipo de tarefa.	Durante a apresentação dos tipos de tarefas T1, T2, T3 e T4.
2° momento - Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica.	Durante e após o primeiro momento didático, quando são apresentados os métodos de resoluções.
3° momento - Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica.	Durante o desdobramento das técnicas. É claramente visível na apresentação das propriedades gráficas.
4° momento - Trabalho da técnica	Após T2 e T4, especificamente nas atividades propostas.
5° momento – Institucionalização	Durante toda a explanação do conteúdo, principalmente durante o momento de avaliação.
6° momento – Avaliação	No manual do professor ao ser abordada sugestões de trabalhos para consolidar os métodos apresentados.

Fonte: o autor (2023)

Na próxima seção, iremos apresentar as praxeologias identificadas durante as aulas ministradas pelo o professor referente ao conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas. Desta forma, as praxeologias encontradas nesta análise serão confrontadas com as do livro didáticos tendo como finalidade alcançar o objetivo geral desta pesquisa que consiste em analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas presente no livro didático das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula.

7.2 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS AULAS DO PROFESSOR

O objetivo desta seção é analisar as praxeologias do professor de matemática durante as aulas de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas. Para uma melhor análise, indicamos que está seção está dividida em duas partes, Praxeologias matemáticas das aulas do professor e Praxeologias didáticas das aulas do professor. Assim, destacamos que as aulas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1°

grau com duas incógnitas, ocorreram entre os dias 8 a 22 de junho de 2022, com um total de 11 aulas distribuídas em sete encontros. A seguir, iremos apresentar as praxeologias matemáticas identificadas durante as aulas do professor participante desta pesquisa.

7.2.1 Praxeologias matemáticas da s aulas do professor

Nesta seção iremos abordar as praxeologias matemáticas identificadas durante as aulas do professor referente ao conteúdo analisado em nosso trabalho. Para isto, apresentaremos trechos transcritos da fala do professor durante as aulas e imagens do quadro branco, onde foi respondido os exemplos e atividades propostas utilizadas para abordar o conteúdo.

Diferentemente da sequência metodológica adotada pelo livro didático para se estudar o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas, o professor inicia primeiramente pelo método da eliminação. Em sua primeira ação didática, o professor solicita que os alunos abram o livro didático na página 123. Assim a aula é iniciada por meio de uma leitura sobre o exemplo da competição esportiva, já observado na seção anterior. Neste caso, o questionamento básico que introduziu o objeto matemático estudado foi: Como resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas?

Após a leitura do problema, é apresentado o primeiro tipo de tarefa, “*resolver o sistema de equações pelo método da substituição” (T1)*. Para isto, o problema em destaque traz um contexto em que necessita fazer a transformação da linguagem, ou seja, foi preciso iniciar a primeira técnica principal, *“transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica”* $(\tau 1)$, vejamos um trecho da fala do professor ao questionar sobre o exemplo,

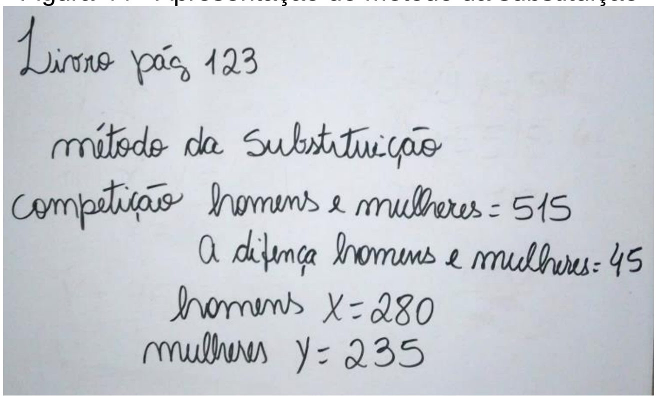
Recorte 01: aula 1

> [...] quantos homens tem pessoal? A gente não sabe a quantidade de homens, certo? Então, esta quantidade é igual a que valor? “x”. E a quantidade de mulheres vai ser quem? “y”. Quantidade de homens é “x” e a quantidade de mulheres será “y”. [...]

Fonte: O autor (2022)

Após os questionamentos, o professor apresenta no quadro branco o sistema correspondente aos dados obtidos durante a leitura do exemplo da competição. Vejamos na figura 44, como foi descrito pelo professor o problema proposto.

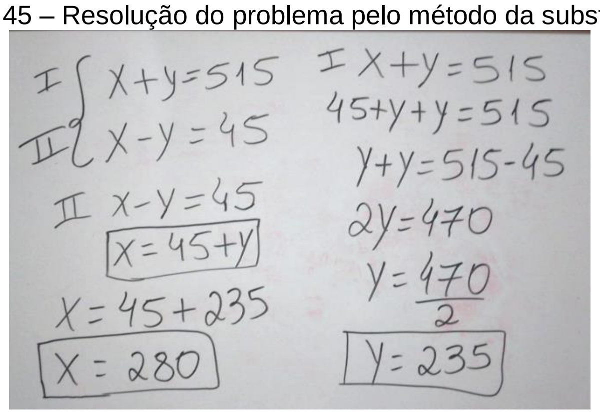
Figura 44 - Apresentação do método da substituição



Fonte: O autor (2022)

A partir da organização dos dados observados, inicia-se o processo de resolução do sistema obtido. Para isto, o professor escolhe a segunda equação para isolar a incógnita “x”, obtendo assim $x = 45 + y$, este procedimento diz respeito a mais uma técnica principal, *“isolar uma das incógnitas do sistema de equações”* $(\tau 2)$. Ao isolar a incógnita é observado mais uma técnica auxiliar, *“utilizar o princípio aditivo da igualdade”* $(\tau 2{,}1)$. Vejamos a figura 45, a resolução do problema em destaque.

Figura 45 – Resolução do problema pelo método da substituição



Fonte: O autor (2022)

Como conseguimos observar na figura 45, é substituído o valor da incógnita “x” na primeira equação, pela expressão obtida por meio do isolamento da incógnita, assim, é apresentado mais uma técnica auxiliar, *“substituir a expressão encontrada,* *ao isolar a incógnita, na outra equação”* $(\tau 2{,}2)$. É utilizado também a transposição de termos, quando é passado o 45 (ficando -45) para o outro membro, destacando assim a técnica auxiliar, *”transpor termos realizando a operação inversa no outro lado da igualdade”* $(\tau 2{,}3)$. A técnica auxiliar $(\tau 2{,}3)$ se difere da $(\tau 2{,}1)$ por não ser mencionado a adição de termos nos membros correspondentes da igualdade.

Para continuar resolvendo o problema foi realizado mais uma vez a transposição de termos, só que desta vez, com o 2 que está multiplicando a incógnita “y”, obtendo assim $y = 235$, este valor foi substituído na expressão obtida quando isolada a incógnita “x”, então temos mais uma técnica auxiliar, *“substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita”* $(\tau 2{,}4)$.

Ao ser resolvido o problema da competição o professor destaca como uma espécie de passo a passo todo percurso utilizado para resolver o sistema, como podemos observar na transcrição de sua na fala:

Recorte 02: aula 1

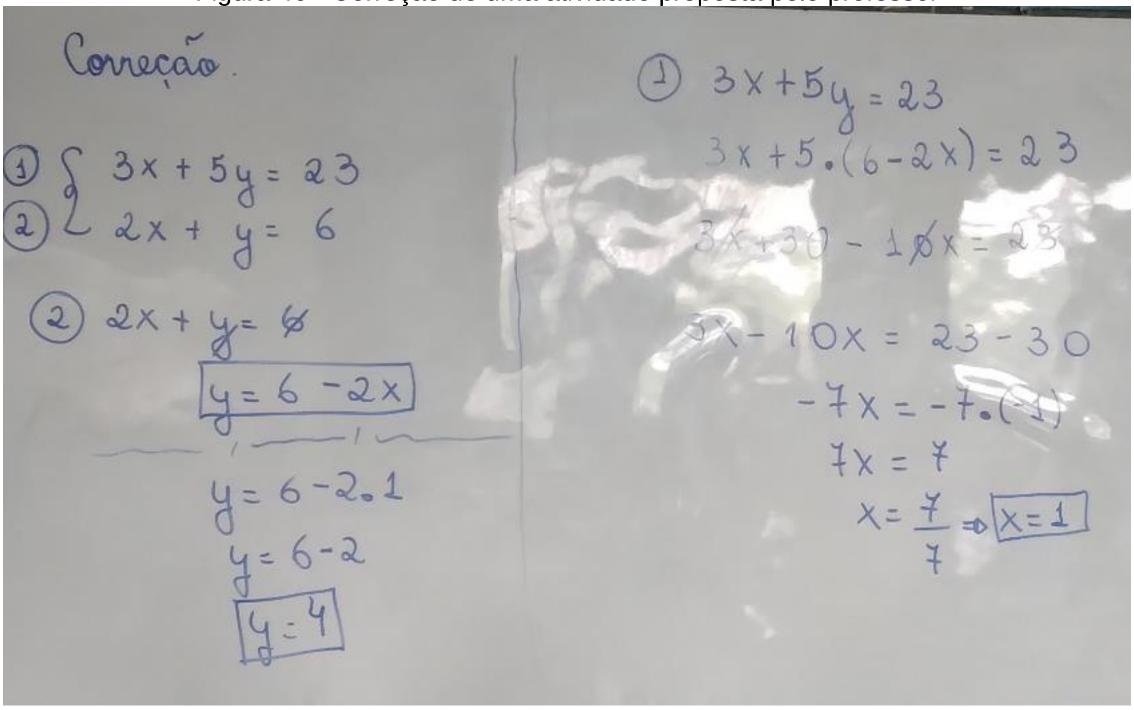
> Então como é que funciona o método de substituição, precisamos escolher uma das equações do sistema, para isolar uma das variáveis, após você isolar esta variável, você vai pegar o valor da expressão dela substituir na outra equação que você não utilizou e determinar o valor da variável, aqui, da outra variável. Note que, se eu isolo “x” eu vou calcular, aqui ó, o segundo passo a outra variável, ou seja o “y”. Se eu tivesse isolado “y” aqui, eu iria calcular quem aqui pessoal? O “x”, certo? Aí quando você achar o valor da primeira variável, você vai pegar este valor, obviamente, e substituir na expressão que você determinou no início e calcular o valor da outra variável, certo? Lembre-se que, o par ordenado sempre o primeiro valor é o “x”. A solução é o par ordenado, a gente sabe que o par ordenado, o “x” vem primeiro, 280, 235, certo? Dúvida para este método, não né pessoal?

Fonte: O autor (2022)

O elementos tecnológico que foi observado, trata-se da *“propriedade das operações inversas em IR ou leis de transposição de termos”* $(\theta 1)$. Para este elemento, o professor não traz a propriedade em sua fala, porém é possível identificá-las através das manipulações algébricas executadas durante o processo de resolução.

Ao finalizar o estudo do método da eliminação, é proposto uma atividade que tem como tipo de tarefa T1. A atividade traz o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 23 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$. Na correção o professor utiliza além das técnicas apresentadas anteriormente, a técnica auxiliar, *“eliminar parênteses através da propriedade distributiva”* $(\tau 2,5)$, isto ocorre no momento em que é substituído o valor da incógnita isolada. Vejamos a figura 46.

Figura 46 - Correção de uma atividade proposta pelo professor



Fonte: O autor (2022)

Ao finalizar a explanação do método da substituição, é solicitado aos alunos como atividade para casa que resolvam os exercícios 27 e 28 da página 126 do livro didático. Assim, como já verificado anteriormente, a questão 27 apresenta como tipo de tarefa T1, já a questão 28 não indica qual método usar para resolução, uma vez que, o problema traz um contexto, indicando a necessidade da utilização da técnica principal $(\tau 2)$. Vejamos o quadro 7 a seguir, no qual traz as praxeologias da aula do professor referente a T1.

Quadro 7 - Praxeologias da aula do professor referente a T1

Tipo de tarefa	Técnica principal	Técnica auxiliar	Elementos tecnológicos
Resolver o sistema de equações pelo	Transformar o sistema de equações da	Utilizar o princípio aditivo da igualdade $(\tau 2,1)$	Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de

método da substituição (T1)	linguagem natural para a algébrica, ($\tau 1$) Isolar uma das incógnitas do sistema de equações ($\tau 2$)	Substituir a expressão encontrada, ao isolar a incógnita, na outra equação. ($\tau 2{,}2$) Transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade ($\tau 2{,}3$) Substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita ($\tau 2{,}4$) Eliminar parênteses através da propriedade distributiva ($\tau 2{,}5$)	transposição de termos. ($\theta 1$)

Fonte: O autor (2023)

Após trazer o método da substituição, é apresentado aos alunos um outro método, o da eliminação, este método também é chamado pelo professor de método da soma. Para exemplificação, foi utilizado o mesmo exemplo do livro didático, onde no qual é dado o seguinte sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases}$. O problema proposto tem como tipo de tarefa, *"resolver o sistema de equações pelo método da eliminação"* (T2). A princípio o professor segue os mesmos passos indicados no livro, vejamos a seguir em sua fala o detalhamento da resolução:

Recorte 03: aula 3

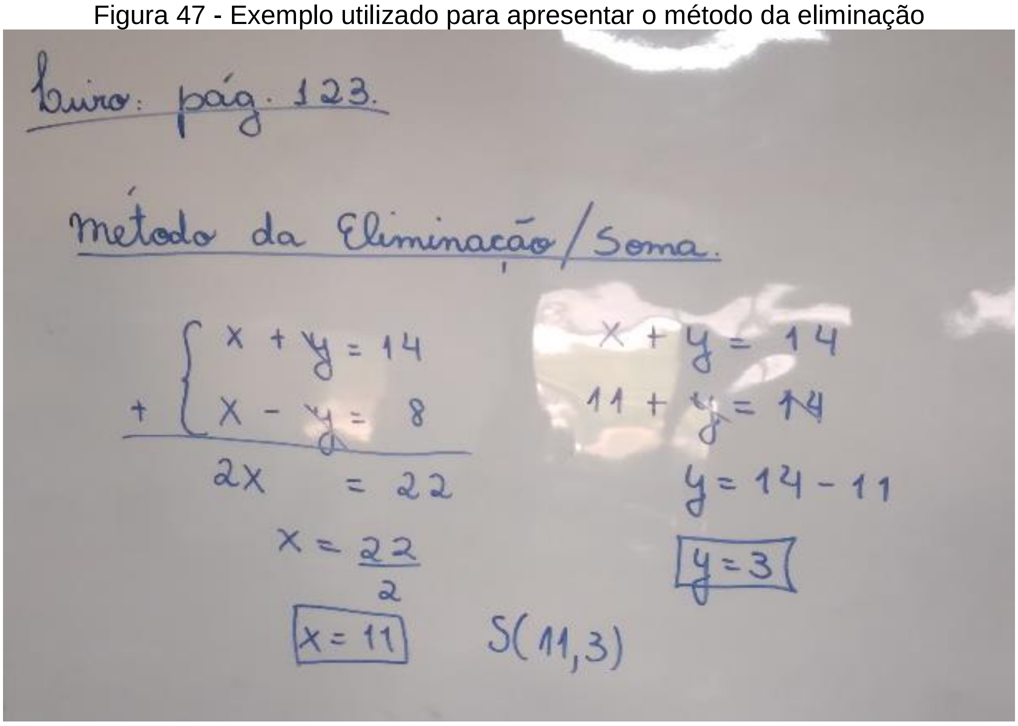
> Veja como podemos resolver por esse método o sistema x + y = 14 e x – y = 8. Note que as equações apresentam os termos opostos y e −y. Adicionando essas equações membro a membro, a incógnita y será eliminada. Observe aqui pessoal, por este método, é... quando tiver equação, você vai analisar o somatório entre as variáveis x e somatório da variável y se algum desses somatórios der nulo, ou seja, der zero, você começa a resolve-lo, certo, caso esses somatórios não der zero você precisa, certo? Efetuar um processo que é o segundo exemplo que iremos mostrar, certo? Mas neste caso desse sistema que temos no quadro, eu observo que? Esse y aqui ó irá eliminar este y porque eles são opostos, certo? Então faço o seguinte, coloco o traço. Gente esses dois números têm sinais iguais ou diferentes? (iguais) iguais né? Dá quanto aqui esta soma? (2x) 2x, o y a gente viu que se elimina um e o outro né? Ó, porque y – y vai dá quanto? (zero) zero, aí você já pode corta-lo, igual, a gente vem pra cá, estes dois números a gente vai somar ou diminuir? (somar) digam a soma (22), quando eu faço isto pessoal, eu já tô com praticamente o x determinado, concordam, só pra gente agora finalizar, bora lá. x é igual a 22, né, dividido por quanto? (por 2) por 2, esta divisão vai dá quanto queridos? (11) x é 11! O que é que a gente vai fazer agora? A gente vai pegar o valor do x e substituir em uma das equações, eu num quero descobrir o y não é? Eu oriento a vocês pra ser um método mais fácil

> e mais rápido escolha a... se você vai calcular o y, escolha a equação onde o y terá sinal positivo, tá certo? Porque não precisa você mudar o sinal dele. Então qual é a equação que tem o y positivo, a de cima ou a de baixo? (a de cima), temos aqui x + y = 14, quanto é que deu x? (11) só substituir 11 + y = 14, isolando y será igual a 14 né pessoal? Quem é que vai para o outro membro? (11) vai ficar qual sinal? (negativo) quanto? (3) A solução do sistema é 11 e 3.

Fonte: O autor (2022)

Neste sentido, destacamos que a resolução do sistema apresentado ocorreu de maneira breve, e para isto, foi adicionado as equações membro a membro, verificando a existência de termos opostos. Temos assim, uma técnica principal descrita por: *"adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos"* ($\tau 3$). Vejamos a figura 47.

Figura 47 - Exemplo utilizado para apresentar o método da eliminação



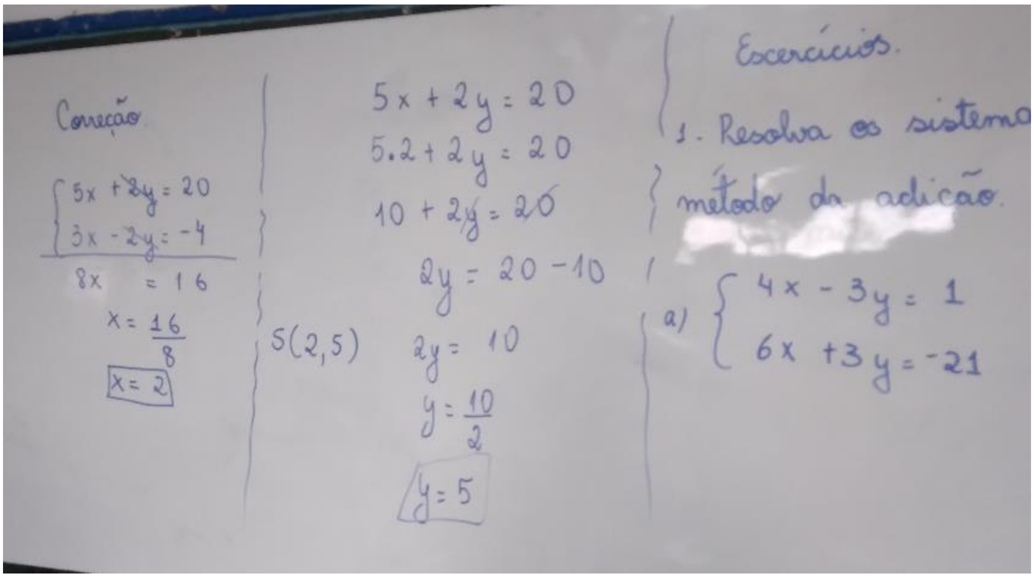
Fonte: O autor (2022)

Após ser adicionada as equações, verificamos que foi utilizado quatro técnicas auxiliares. A primeira consiste em *"eliminar uma incógnita através da soma das equações"* ($\tau 3,1$), isto acontece quando é eliminado uma das incógnitas ao realizar o processo de soma dos termos. Este processo ainda reduz a equação de duas incógnitas, dando origem a uma equação com uma incógnita, sendo esta a técnica auxiliar, *“reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita”* $(\tau3{,}2)$.

Ainda no processo de resolução, foi utilizado a terceira técnica auxiliar, *“transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade”* $(\tau2{,}3)$. Pra finalizar foi substituído o valor encontrado em uma das incógnitas do sistema, o que corresponde em *“substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita”* $(\tau2{,}4)$. Assim, foi encontrado o valor $x = 11$, no qual, foi substituído na primeira equação do sistema, no qual mais uma vez foi utilizado a transposição de termos para determinar a solução do sistema.

Para se trabalhar o método apresentado, o professor passou alguns exercícios com o tipo de tarefa T2. Ao verificarmos a correção dos exercícios, observamos que as técnicas apresentadas durante a explanação do método foram suficientes para resolver os problemas propostos. Vejamos a figura 48 a seguir.

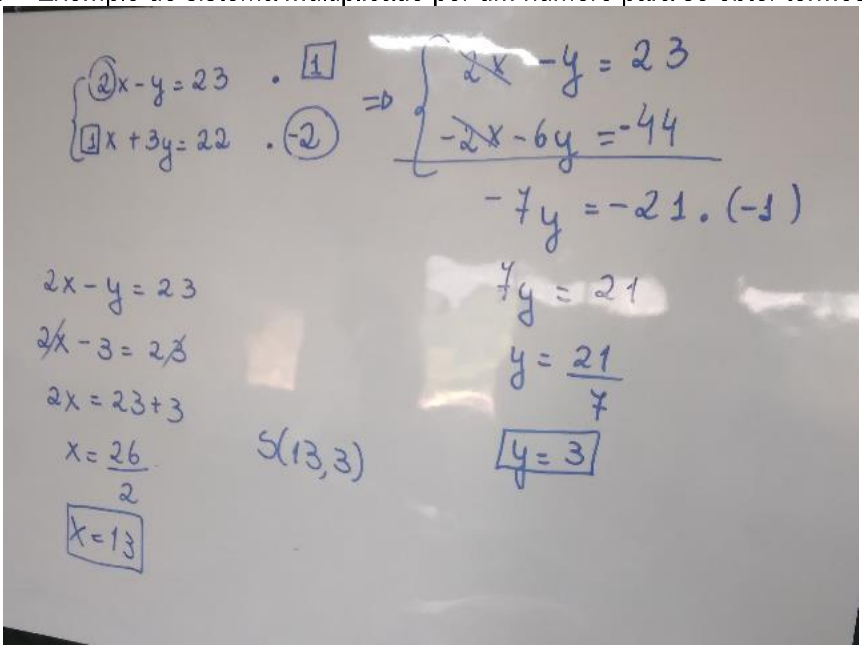
Figura 48 - Sistema utilizado para avaliar o conhecimento dos alunos



Fonte: O autor (2022)

Após a explicação do método com equações que possuem termos opostos, foi resolvido mais um exemplo (figura 49), onde desta vez, as equações precisaram ser multiplicadas por algum número para obter termos opostos, neste caso, podemos observar que o professor utilizou mais uma técnica principal, *“multiplicar uma ou as* *duas equações por números escolhidos convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos”* $(\tau 4)$.

Figura 49 – Exemplo de sistema multiplicado por um número para se obter termos opostos



Fonte: O autor (2022)

Ao ser realizado o processo de multiplicação foi obtido duas equações equivalentes as primeiras equações, assim temos a técnica auxiliar, *“obter uma ou duas equações equivalentes”* $(\tau 4{,}1)$. Na resolução deste exemplo foi utilizado os passos já descritos no exemplo anterior, onde o sistema apresentou termos opostos. Por se tratar de manipulações que utilizam termos algébricos, indicamos que o elemento tecnológico referente as técnicas principais $(\tau 3)$ e $(\tau 4)$, trata-se das *“propriedades operatórias de termos algébricos”* $(\theta 2)$. Como atividade para casa, foi solicitado que os alunos resolvessem os exercícios 29 e 31 da página 126 do livro didático. Vejamos o quadro 8, onde tratamos das praxeologias da aula do professor referente a T2.

Quadro 8 - Praxeologias da aula do professor referente a T2

Tipo de tarefa	Técnica principal	Técnica auxiliar	Elementos tecnológicos
Resolver o sistema de equações pelo método da substituição (T2)	Adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos. $(\tau 3)$ Multiplicar uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos. $(\tau 4)$	Eliminar a incógnita através da soma das equações $(\tau 3{,}1)$ Reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita $(\tau 3{,}2)$ Transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade $(\tau 2{,}3)$ Substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita $(\tau 2{,}4)$ Obter uma ou duas equações equivalentes $(\tau 4{,}1)$	Propriedades operatórias de termos algébricos. $(\theta 2)$

Fonte: O autor (2023)

Na segunda parte do conteúdo, o professor introduz o método de tentativa e erro, cujo o tipo de tarefa, consiste em *“resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro”* (T3). Para isto foi utilizado o mesmo exemplo do livro didático, como observado anteriormente, o contexto trata de um estacionamento de carros e motos. Vejamos a seguir, trechos da fala do professor ao introduzir o método.

Recorte 04: aula 5

> [...] Temos o seguinte, que a quantidade de veículo e a quantidade de motos da 12. Então, eu estou representando a quantidade de veículos por x e de moto y e este somatório da 12. Certo, na primeira informação me diz que o somatório de carros e de motos dá 12. X + Y = 12. Na outra parte da frase me diz: A diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos é igual a 3. A diferença de carros, carros é o que pessoal? X menos o dobro da quantidade de moto é igual a 3. Esta criado o sistema, certo? Podemos resolver essa questão escrevendo duas equações uma para representar a quantidade total de veículos no estacionamento, que é esta, e outra para representar a diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos, que é esta. Para isso, chamamos de x a quantidade de carros e de y a quantidade de motos. Dá este sistema aqui e está aqui no livro também, certo? As duas equações obtidas formam um sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas, que é indicado da seguinte maneira, do jeito que está no quadro, certo? [...]

Fonte: O autor (2022)

Para resolver o problema em destaque, observamos que foi utilizado novamente a técnica principal, *“Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica”* $(\tau1)$. A partir desta técnica, foi encontrado o sistema, $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$. Assim, para resolver o sistema encontrado, foi atribuído valores, até chegar a solução dada pelo par ordenado (9,3), este processo, consiste na técnica auxiliar, *“atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente”* $(\tau1{,}1)$. Vejamos como o professor desenvolveu esta solução através de trechos da fala do professor,

Recorte 05: aula 5

> [...] Para resolver esse sistema, podemos realizar tentativas, atribuindo valores para x e para y. Note que, os pares ordenados (11,1) e (10,2) são solução apenas da equação x + y = 12. Já o par ordenado (9,3) é solução, simultaneamente, das duas equações, assim, é solução do sistema. Vê só, quando ele fala de tentativa. Ele atribui valores para x e valores para y, certo? Ele pega estes valores e substitui tanto na primeira equação como na segunda. Por exemplo, ele sugeriu x 10 e y 1, quando eu venho para a primeira equação, aliás 11 e 1. Isso é verdadeiro, pessoal? Então 11 e 1 é solução para a primeira equação, porém tem que ser para as duas, certo? Então quando vai para a segunda, qual é o valor de x? (11) Qual é o valor de y, pessoal? (1). Dois vez um, gente? (2) 11 – 2? (9), nove é igual a três? (não), Logo o para ordenado 11 e 1 não é solução para o sistema, certo? Então por tentativa, a solução é 9 e 3, certo? [...]

Fonte: O autor (2022)

O elemento tecnológico referente a técnica $(\tau1)$, diz respeito as *“propriedades da equação da reta”* $(\theta3)$. A tecnologia apresentada surge em decorrência das equações que fazem parte do sistema, que são equações do 1° grau. Vejamos no quadro 9 a seguir as praxeologias matemáticas provenientes de T3.

Quadro 9 - Praxeologias da aula do professor referente a T3

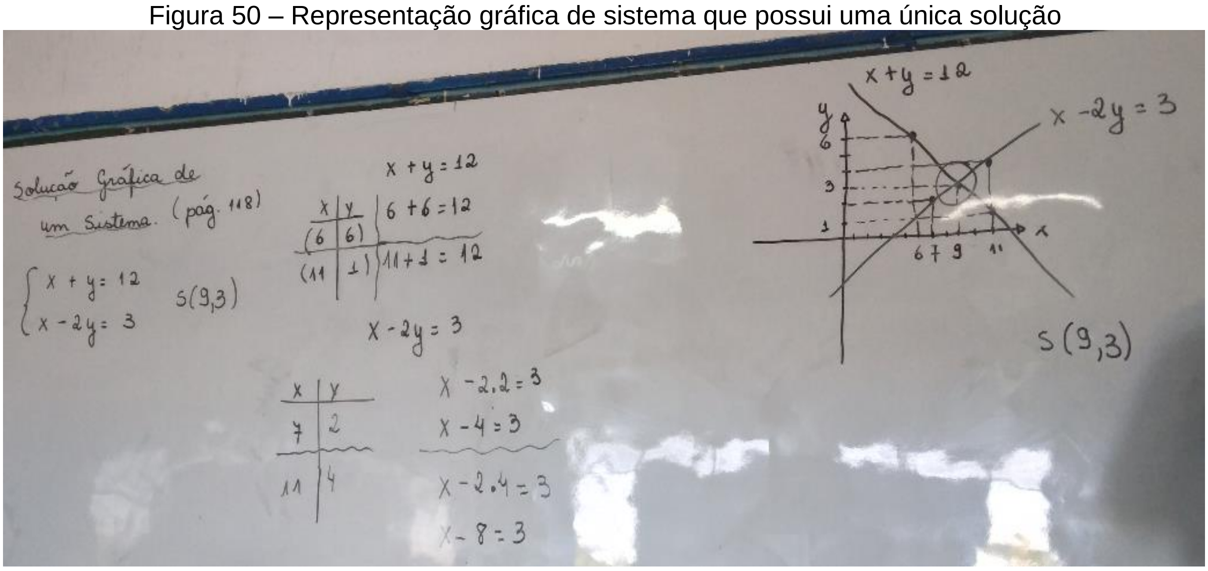
Tipo de tarefa	**Técnica principal**	**Técnica auxiliar**	**Elementos tecnológicos**
Resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro. (T3)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica, $\begin{cases} a1x + b1y = c1 \\ a2x + b2y = c2 \end{cases}$ $(\tau1)$	Atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente. $(\tau1{,}1)$	Propriedades da equação da reta $(\theta3)$

Fonte: O autor (2023)

Após resolver o problema pelo método de tentativa e erro, o professor inicia a representação gráfica do sistema. Para isto, foi utilizado como exemplo o sistema abordado no método anterior, $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$. Ao ser apontada representação gráfica do sistema, constatamos mais um tipo de tarefa, que consiste em *"representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas"* (T4).

O tipo de tarefa em destaque, traz na construção a técnica principal, *"atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença"* *(*$\tau5$). Nesta técnica o professor, com o auxílio de uma tabela, atribui valores que possam satisfazer as equações separadamente, identificando aquela que é solução do sistema, o par ordenado que satisfaz as equações simultaneamente. Na figura 50, podemos verificar a forma como o professor desenvolveu a construção do gráfico de retas concorrentes.

Figura 50 – Representação gráfica de sistema que possui uma única solução



Fonte: O autor (2022)

Após atribuir valores as equações separadamente, o professor utiliza estes dados para construir o gráfico que tem a posição relativa de suas retas como concorrentes. Para isto, foi identificado os pares ordenados que satisfaz cada equação, o que nos mostra uma técnica auxiliar, *"identificar os pares ordenados no plano cartesiano"* *(*$\tau5{,}1$). Em seguida, os pares ordenados serviram para construir o par de retas concorrentes do sistema no plano cartesiano, este processo diz respeito a técnica auxiliar, *"esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano"* ($\tau 5,2$). A construção gráfica de uma equação, já mostrada aos alunos em outro momento, vejamos em um trecho da fala do professor,

Recorte 06: aula 6

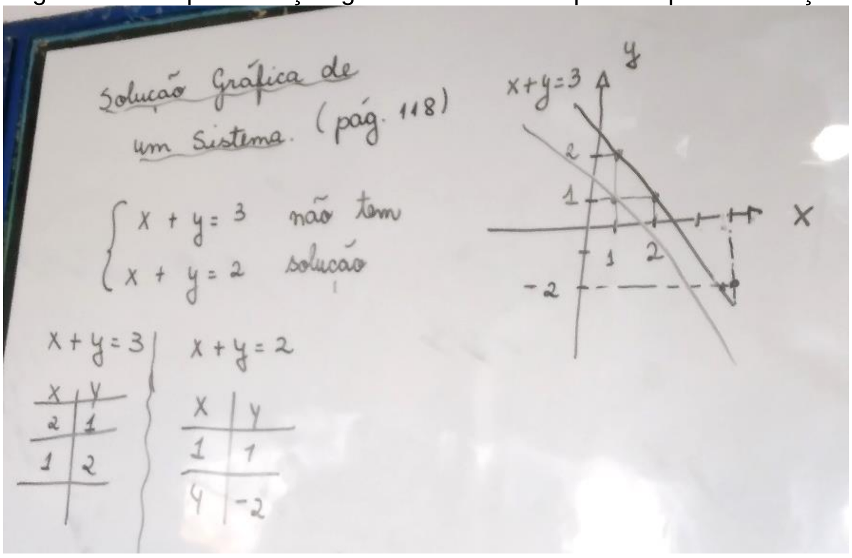
> [...] Agora vamos para a solução gráfica, certo? Solução gráfica, lembram do plano cartesiano? Esse eixo aqui, que eixo é? Y ou x? (x), esse eixo aqui é qual? (y) certo. Aqui a gente tem valores para x, né isso? E valores para y, né? Qual é o primeiro valor para x lá? (11) onze. Aqui eu tenho 11 né? E aqui eu tenho 9, concordam? (sim) Foram os dois valores de x, né? Qual é os outros valores para y? (1 e 3) pra cima né? [...]

Fonte: O autor (2022)

Como elemento tecnológico, podemos citar as *"propriedades da posição relativa entre duas retas"* ($\theta 4$). Esta propriedade diz que, sejam as retas r e s, retas das equações, são concorrentes ⇔ tiverem um único ponto em comum.

Após ser apresentada a representação/solução gráfica de um sistema de retas concorrentes, é mostrado mais um exemplo do livro, na qual a representação gráfica consiste em um par de retas paralelas. O exemplo em destaque, apresenta o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$. Na construção gráfica foram utilizadas as mesmas técnicas utilizadas para esboçar o gráfico de retas concorrentes, esta construção remete a técnica auxiliar, *"esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano"* ($\tau 5,3$). Vejamos na figura 51, como o professor construiu o gráfico de retas paralelas.

Figura 51 – Representação gráfica de sistema que não possui solução



Fonte: O autor (2022)

Na representação gráfica da figura 51, o professor destaca que após ser traçada as retas deve-se observar o comportamento delas, ou seja, é partir da posição relativa de duas retas que podemos determinar se o sistema tem ou não solução. Vejamos a fala do professor transcrita.

Recorte 07: aula 7

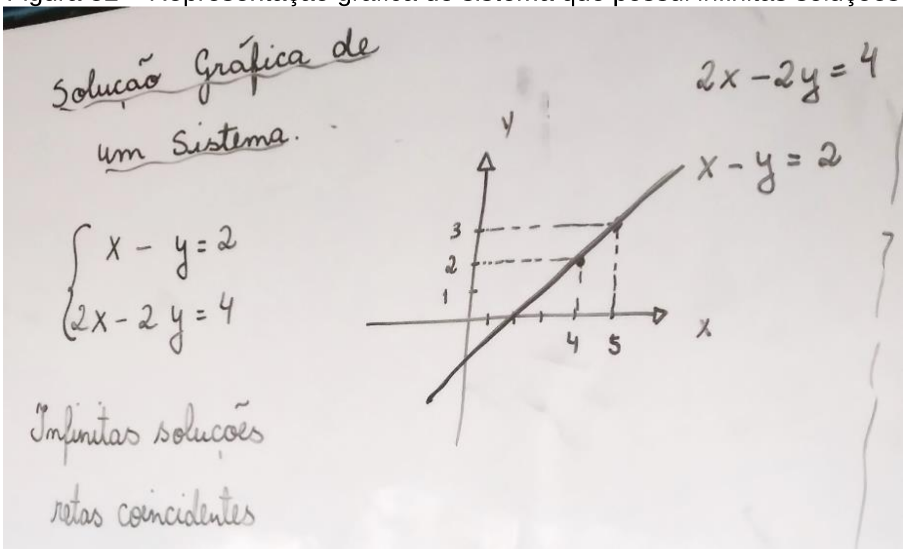
> [...] O que é que a gente vai fazer agora? Cria o nosso plano cartesiano, traça as retas e vê o comportamento dessas retas, certo? Desses aqui quais foram os valores para x que a gente escolheu? (dois e um) Qual o valor para y pessoal? Bora lá, x é dois y é quanto? X é um e y vai ser quanto? (2) [...]

Fonte: O autor (2022)

O elemento tecnológico também está representado pela propriedade da posição relativa de duas retas, no qual diz que, Sejam as retas r e s, retas da equação do sistema, são paralelas e distintas ⇔ não possuírem nenhum ponto comum.

Após a abordagem gráfica de retas paralelas, o professor aborda mais um exemplo, desta vez, a representação gráfica consiste em um par de retas coincidentes, ou seja, o sistema irá apresentar infinitas soluções. O sistema que foi utilizado como exemplo foi dado por: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$. Vejamos a figura 52.

Figura 52 – Representação gráfica de sistema que possui infinitas soluções



Fonte: O autor (2022)

A representação gráfica aborda na figura 52, traz como técnica auxiliar, *"esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano"* ($\tau5,3$). De acordo com o professor, o caso representado possui solução, embora sejam infinitas, vejamos mais uma transcrição da fala do professor a seguir.

Recorte 08: aula 8

> [...] Como vai ficar o gráfico pessoal? Uma reta coincidindo com a outra, ou seja, as duas retas elas se unem e formam apenas uma reta. Veja como ficará a representação gráfica. Eu tenho x – y... neste caso pela tabela todos os pontos são coincidentes aí o que acontece com o gráfico. ou seja, vejam quando x é 4 y dá 2 lá, quando x é 5, y é 3, certo? Pra dá dois e aqui em baixo quando x é 4, aqui ó y é 2 pra dá 4 e quando o y for 5, x for 5 o y aqui tem que ser 3 pra dá 4 também, então nesse caso... as duas retas são coincidentes, certo? Então esta é a terceira situação, esse sistema tem resposta? Tem! Quantas respostas ele tem, infinitas repostas. [...]

Fonte: O autor (2022)

Esta representação assim como as anteriores, traz como elemento tecnológicos as propriedades da posição relativa entre duas retas, no qual diz que: Sejam as retas r e s, retas da equação do sistema, são coincidentes $\Leftrightarrow$ tiverem infinitos pontos comuns. Vejamos o quadro 10 a seguir onde tratamos das praxeologias referente ao tipo de tarefa T4.

Quadro 10 - Praxeologias da aula do professor referente a T4

Tipo de tarefa	**Técnica principal**	**Técnica auxiliar**	**Elementos tecnológicos**
Representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas (T4)	Atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença. $(\tau 5)$	Identificar os pares ordenados no plano cartesiano. $(\tau 5{,}1)$ Esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano. $(\tau 5{,}2)$ Esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano. $(\tau 5{,}3)$ Esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano. $(\tau 5{,}4)$	Propriedade da posição relativa entre duas retas $(\theta 4)$

Fonte: O autor (2023)

Na conclusão das representações gráficas, o professor resume que cada representação diz respeito a solução do sistema de equações. Vamos observar a seguir trechos da transcrição de áudios do professor.

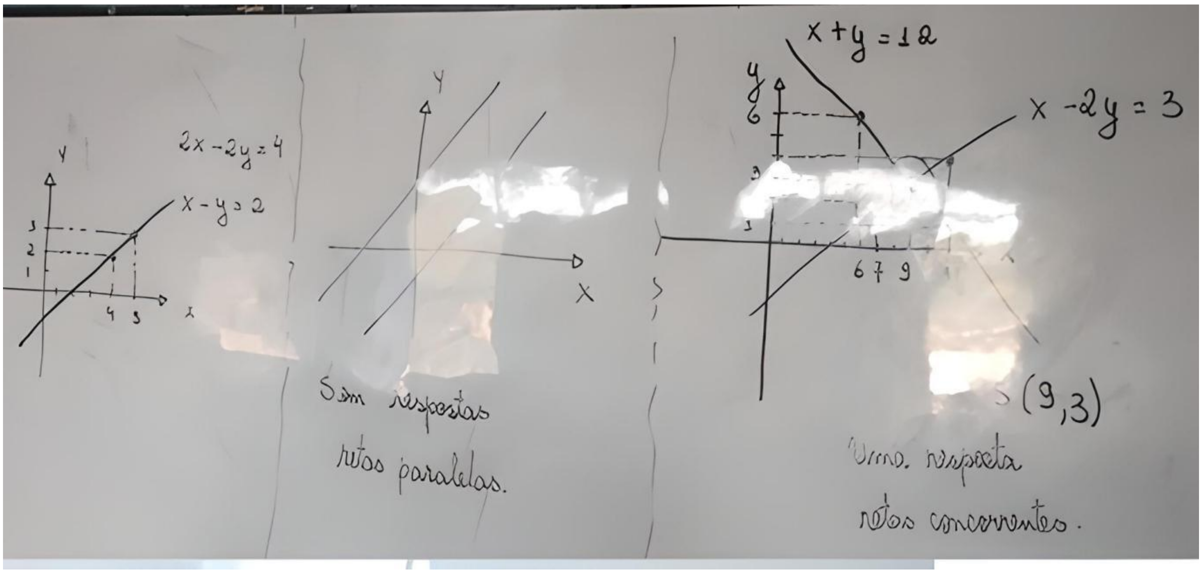
Recorte 09: aula 9

> [...] ok pessoal alguma dúvida aí? (não) lembrem sistema com solução uma resposta as retas serão concorrentes, sistema sem soluções as retas elas são paralelas e se elas tiverem infinitas repostas as retas serão coincidentes, tornam-se uma única reta, beleza? [...]

Fonte: O autor (2022)

Além de falar como a representação gráfica está ligada a solução do sistema, o professor esboça no quadro branco, as três formas de representações gráficas possíveis de um sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas. Vejamos a figura 53, a seguir.

Figura 53 – Representações gráficas de um sistema de equações 1° grau com duas incógnitas



Fonte: O autor (2022)

Desta forma, observamos que as praxeologias apresentadas durante a ação didática do professor, culminaram na utilização de tarefas e técnicas que tiveram os objetivos de resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, tanto em sua forma algébrica quanto gráfica, apresentando primeiramente os métodos de resoluções, substituição, eliminação e tentativa e erro, até a parte gráfica. Vejamos o quadro 11, no qual organizamos as praxeologias matemáticas identificadas durante as aulas do professor.

Quadro 11 - Praxeologias Matemáticas identificadas na ação didática do professor

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICA PRINCIPAL	TÉCNICAS AUXILIARES	ELEMENTOS TECNOLÓGICOS
Resolver o sistema de equações pelo método da substituição (T1)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica. ($\tau 1$) Isolar uma das incógnitas do sistema de equações. ($\tau 2$)	Utilizar o princípio aditivo da igualdade ($\tau 2{,}1$) Substituir a expressão encontrada, ao isolar a incógnita, na outra equação. ($\tau 2{,}2$) Transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade ($\tau 2{,}3$) Substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita ($\tau 2{,}4$) Eliminar parênteses através da propriedade distributiva ($\tau 2{,}5$)	Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos. ($\theta 1$)

Resolver o sistema de equações pelo método da eliminação (T2)	Adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos. $(\tau 3)$ Multiplicar uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos. $(\tau 4)$	Eliminar a incógnita através da soma das equações $(\tau 3{,}1)$ Reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita $(\tau 3{,}2)$ Transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade $(\tau 2{,}3)$ Substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita $(\tau 2{,}4)$ Obter uma ou duas equações equivalentes $(\tau 4{,}1)$	Propriedades operatórias de termos algébricos. $(\theta 2)$
Resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro. (T3)	Transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica, $(\tau 1)$	Atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente. $(\tau 1{,}1)$	Propriedades da equação da reta. $(\theta 3)$
Representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas (T4)	Atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença. $(\tau 5)$	Identificar os pares ordenados no plano cartesiano. $(\tau 5{,}1)$ Esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano. $(\tau 5{,}2)$ Esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano. $(\tau 5{,}3)$ Esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano. $(\tau 5{,}4)$	Propriedade da posição relativa entre duas retas $(\theta 4)$

Fonte: O autor (2022)

Desta forma, destacamos que ao analisar as aulas do professor, foi possível identificarmos quatro tipos de tarefas, cinco técnicas principais, treze técnicas segundarias e quatro elementos tecnológicos.

Na próxima seção, daremos continuidade com a análise das praxeologias das aulas do professor sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, porém, apresentaremos as praxeologias didáticas através dos momentos didáticos proposto por Chevallard (1999).

7.2.2 Praxeologias Didáticas das aulas do professor

Nesta seção, iremos apresentar as praxeologias didáticas identificadas durante as aulas do professor. Como já mencionado, estas praxeologias respondem ao questionamento, como ensinar o conteúdo? Para isto, destaca-se os momentos didáticos que estão relacionados com as praxeologias matemáticas, ou seja, esta relação envolve os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Durante as aulas observadas, identificamos que primeiro momento didático, **primeiro encontro com o tipo de tarefa**, ocorreu durante a apresentação de cada método de resolução abordado. Como já observado, os tipos de tarefas surgiram de um questionamento básico, como resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas? Assim, identificamos que dois tipos de tarefas, T1 e T3, são apresentadas a partir de um contexto. Os exemplos ilustrados mostram a importância de se estudar o conteúdo de sistemas de equações, pois as situações que envolvem este tema aparecem com bastante frequência no cotidiano.

O segundo momento didático, **Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica**, ocorreu durante o primeiro momento didático, quando são apresentados os tipos de tarefas, e no desenvolvimento dos métodos, isto é, na explanação das técnicas principais e auxiliares que foram utilizadas para resolver os exemplos abordados.

O terceiro momento didático, **constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo a técnica**, ocorreu durante a explanação das técnicas trabalhadas, isto é o caso das tecnologias voltadas para as manipulações algébricas ($\theta 1, \theta 2 \text{ e } \theta 4$). Já os elementos tecnológicos ($\theta 3$) referentes as representações gráficas, ocorreram ao final da abordagem das técnicas, ou seja, quando foram anunciadas pelo professor as propriedades da posição relativas das retas, explicando que o par de retas concorrentes determina que o sistema possui uma única solução possível, e que por sua vez, o par de retas paralelas determina que o sistema não possui solução possível e o par de retas coincidentes determinam que o sistema possui infinitas soluções.

O quarto momento didático, **trabalho da técnica**, apareceu ao final da explicação de cada método. Para isto, o professor solicitou que os alunos resolvessem algumas atividades propostas do livro didático e trouxe algumas questões de outras fontes. Estas atividades tiveram como tipos de tarefas os mesmos abordados durante o estudo dos métodos de resoluções. Desta forma, observamos que parte das questões que se trabalhou as técnicas foram passadas como exercícios para casa, como foram os casos das questões 27, 28 e 29 do livro didático.

O quinto momento didático, **Institucionalização**, ocorreu durante todos os outros momentos, principalmente durante o quarto e o sexto momento didático, pois as técnicas estudadas foram colocadas a prova, isto é, verificadas através da aplicação delas nas situações propostas pelo professor. Este momento didático acompanhou todos os outros, a medida em que os tipos de tarefas e técnicas foram consolidando-se como métodos de resoluções do sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

O sexto momento didático, **Avaliação**, também ocorreu durante o quarto momento, pois a medida em que se trabalhou as técnicas estudadas por meio das atividades propostas, o professor avaliou os alunos quanto ao entendimento do conteúdo apresentado. O momento de avaliação também ocorreu logo após o estudo de cada método, pois como já observamos, foi proposto aos alunos exercícios de fontes complementares ao livro didático. Apesar do livro trazer sugestões como a resolução dos exemplos utilizando os outros métodos estudados, vimos que o professor não acatou as sugestões. Vejamos no quadro (12) a seguir, quando ocorreram os momentos didáticos durante as aulas do professor.

Quadro 12 - Momentos didáticos das aulas do professor

MOMENTOS DIDÁTICO	**QUANDO OCORRE?**
1° momento - primeiro encontro com o tipo de tarefa.	Durante a apresentação dos tipos de tarefas T1, T2, T3 e T4.
2° momento - Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica.	Durante e após o primeiro momento didático, quando são apresentados os métodos de resoluções.
3° momento - Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica.	Durante o desdobramento das técnicas e quando foram anunciadas as propriedades da posição relativa de duas retas.
4° momento - Trabalho da técnica	Durante as atividades propostas (27, 28 e 29) do livro didático e nos exercícios de outras fontes secundárias.
5° momento – Institucionalização	Durante toda a explanação do conteúdo, principalmente durante o quarto e o sexto momento didático.
6° momento – Avaliação	Durante o quarto momento e nos exercícios de outras fontes secundárias.

Fonte: o autor (2023)

Sendo assim, enfatizamos que a próxima seção se destina a alcançar o objetivo de analisar as conformidades entre as praxeologias presentes no livro didático das apresentadas durante as aulas do professor. Deste modo, abordaremos os pontos que nos indicam as conformidades das praxeologias matemáticas e didáticos entre o livro didático e as aulas do professor participante desta pesquisa.

7.3 ANÁLISE DAS CONFORMIDADES ENTRE AS PRAXEOLOGIAS DO LIVRO DIDÁTICO E DAS AULAS DO PROFESSOR

Esta seção tem por objetivo, analisar as conformidades entre as praxeologias presentes no livro didático das apresentadas durante as aulas do professor. A seguir, iremos confrontar os dados apresentados na análise do livro didático, com aqueles mostrados na análise das aulas do professor. Para isto, iremos comparar as praxeologias presentes relacionadas aos tipos de tarefas, técnicas (principais e secundárias) e elementos tecnológicos, além dos momentos didáticos destacados em cada análise.

Neste sentido, com relação as Praxeologias Matemáticas, constatamos que o tipo de tarefa, *"resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro"*, foi apresentada no livro didático como o primeiro tipo tarefa, em contrapartida, o professor trouxe este como o terceiro tipo de tarefa. Esta divergência, ocorre quando o professor decide optar em trazer primeiramente os métodos mais utilizados para resolver sistemas de equações (substituição e eliminação), já o livro didático, trouxe aquele em que os autores consideraram mais simples e adequado para o momento por apresentar elementos que leve ao aluno pensar intuitivamente.

Neste contexto, entendemos que existe um descompasso entre a ação didática do professor e a sequência apresentada no livro didático, assim, o professor se encontra em conformidade com a utilização do tipo de tarefa, embora existe, sob o ponto de vista da temporalidade, uma desconformidade.

No que diz respeito a utilização do tipo de tarefa, "*resolver o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas pelo método de tentativa e erro"*, tanto no livro didático como na ação didática do professor verificamos como técnica principal, *"transformar o sistema de equações da linguagem natural para a algébrica"*, além de utilizarem a técnica auxiliar, *"atribuir valores as incógnitas de modo que satisfaçam as duas equações do sistema simultaneamente".* Assim, verificamos que os elementos tecnológicos que justificaram as técnicas empregadas consistiram nas *propriedades da equação da reta.* Estas praxeologias apontam para uma conformidade.

Com relação ao tipo de tarefa, *"representar graficamente o sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas"*, foi apresentado no livro didático como o segundo tipo de tarefa e nas aulas do professor como o terceiro tipo de tarefa. Como verificamos, tanto o livro didático quanto o professor, trouxeram como técnica principal para este tipo de tarefa, *"atribuir valores as incógnitas de cada equação separadamente satisfazendo cada sentença"*. Estes valores atribuídos as equações representaram pares ordenados do plano cartesiano, a isto, foi designado como técnica auxiliar, *"identificar os pares ordenados no plano cartesiano"*.

Ao observarmos a "*propriedade da posição relativa entre duas retas"*, elemento tecnológico abordado pelo livro didático e pelo professor, verificamos três posições possíveis para as retas. A primeira ocorre quando as retas são concorrentes, tendo como técnica auxiliar, *"esboçar o par de retas concorrentes no plano cartesiano"*, logo o ponto de intersecção das retas é a solução do sistema. A segunda, quando as retas são paralelas não apresentam solução possível ao sistema, a técnica auxiliar para esta situação trata-se em *"esboçar o par de retas paralelas no plano cartesiano"*. A terceira e última situação é quando as retas são coincidentes, e por este motivo, apresentam infinitas soluções, a técnica auxiliar destacada consiste em *"esboçar o par de retas coincidentes no plano cartesiano".* Quanto a isto, queremos dizer, que existe uma conformidade com o trabalho do tipo de tarefa em questão. Por outro lado, apontamos uma desconformidade temporal na apresentação do tipo de tarefa.

Para o tipo de tarefa, *"resolver o sistema de equações pelo método da substituição"*, o professor trouxe o mesmo exemplo abordado no livro didático no qual apresenta um contexto envolvendo uma corrida com atletas homens e mulheres. Quanto a isto, foi utilizado mais uma vez a transformação do sistema de equações da linguagem natural para a algébrica, porém foi apresentado mais uma técnica principal, no qual destacamos em *"isolar uma das incógnitas do sistema de equações"*. Com o isolamento da incógnita inicia-se o processo de manipulações algébricas.

Assim, estas manipulações algébricas deram origem as técnicas auxiliares, que por sua vez, o livro didático e o professor abordam ao somar a equação em ambos os lados da igualdade a *"utilização do princípio aditivo da igualdade"*, além de fazer esta manipulação foi preciso *"substituir a expressão encontrada ao isolar a incógnita, na* *outra equação”.* Referente a este tipo de tarefa e suas praxeologias destacamos que houve uma conformidade, pois até este momento foi apresentado durante a resolução do exemplo os mesmos caminhos metodológicos.

Na sequência o livro didático utilizou a técnica auxiliar, *“eliminar parênteses através da propriedade distributiva”*, já o professor, *“transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade”*. Logo após, observamos no livro didático mais uma técnica auxiliar, *“utilizar o princípio multiplicativo da igualdade”*, porém o professor, *“substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita”.* Por fim, o livro utilizou o seguinte passo, *“substituir o valor numérico encontrado da incógnita em uma das equações para determinar a solução do sistema”,* já o professor, *“eliminar parênteses através da propriedade distributiva”*. O elemento tecnológico observado no livro didático e na aula do professor para o tipo de tarefa em destaque foi a utilização das *“propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos”*. Nesta parte da resolução, apontamos que houve uma desconformidade em relação as técnicas destacadas, uma vez que, a sequência de resolução utilizada pelo professor foi diferente da apresentada no livro didático.

Com relação ao tipo de tarefa, *“resolver o sistema de equações pelo método da eliminação”,* tanto o professor quanto o livro didático abordaram as mesmas técnicas principais, isto é, *“adicionar as equações membro a membro, quando apresentarem termos opostos”* e “*multiplicar uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente quando as equações não apresentam termos opostos”.*

As técnicas principais em destaque, deram origem as seguintes técnicas auxiliares: *“eliminar a incógnita através da soma das equações”*; *“reduzir as equações de duas incógnitas para uma equação de uma incógnita”*; *“utilizar o princípio aditivo da igualdade (livro didático)” e “transpor termos utilizando a operação inversa no outro lado da igualdade (professor)”; “substituir o valor numérico encontrado da incógnita na expressão obtida ao isolar a primeira incógnita”; “obter uma ou duas equações equivalentes”.* Como relação a grande ao tipo de tarefa aponta-se uma conformidade entre as praxeologias.

Assim também, verificamos uma diferença com relação as técnicas auxiliares, pois o livro didático trouxe o princípio aditivo durante as manipulações algébricas, já o professor optou por utilizar a transposição de termos, indicando uma desconformidade. Já com relação aos elementos tecnológicos, observamos que ao utilizar as manipulações algébricas (durante as técnicas auxiliares), tanto o livro quanto o professor usou as *“propriedades operatórias de termos algébricos”,* indicando uma conformidade.

Em paralelo as praxeologias matemáticas, observamos também as praxeologias didáticas, divididas em seis momentos. Esta praxeologia destaca-se na forma de como ensinar o conteúdo. Assim, indicamos que os momentos didáticos não estão sujeitos a uma sequência, isto é, pode aparecer durante a execução de outros momentos didáticos e em ordem diferente da utilizada nesta pesquisa.

O momento do **primeiro encontro com o tipo de tarefa**, ocorreu ao iniciar cada método apresentando os tipos de tarefas. Como mencionado anteriormente, o professor optou por um caminho metodológico diferente do adotado no livro didático para apresentar o primeiro método e consequentemente houve uma mudança na ordem dos tipos de tarefas analisados, indicando assim, uma desconformidade com relação a este momento didático.

O momento de **exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica**, ocorreu durante e após o primeiro encontro com o tipo de tarefa, isto é, o professor em sua ação didática sobre o conteúdo, apresentou os métodos de resoluções em convergência com o livro didático, adotando as mesmas metodologias empregadas para solucionar os problemas propostos, isto indica uma conformidade relacionada a este momento didático.

O momento de **constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo a técnica**, foi observado no livro didático e na aula do professor durante todos os desdobramentos das técnicas que envolveram manipulações algébricas, já no caso das representações gráficas foram observadas as propriedades da posição relativa de duas retas. A respeito deste momento didático, indicamos uma conformidade.

O momento do **trabalho da técnica**, foi observado no livro didático em duas partes das atividades propostas, após a abordagem do método de tentativa e erro e das representações gráficas, e ao final da explanação dos métodos de substituição e eliminação. Em contrapartida, o professor expõe este momento ao trazer algumas atividades extras (de outras fontes) e algumas atividades do livro didático relacionados aos tipos de tarefas estudados. Acerca disto, apontamos uma desconformidade quanto a forma de se trabalhar as técnicas abordadas no livro didático e durante as aulas do professor.

O momento de **institucionalização**, ocorreu durante todo o processo de explanação do conteúdo e consolidou-se no momento de avaliação, tanto por parte do professor quanto do livro didático. Assim, este momento didático caracterizou-se pela consolidação dos métodos apresentados, validando as técnicas estudadas durante as resoluções dos tipos de tarefas. A respeito deste momento didático, apontamos uma conformidade quanto a forma de institucionalização das técnicas abordadas durante o estudo dos conteúdos.

O momento de **Avaliação**, no livro didático ocorre sempre durante a explanação do conteúdo, ou seja, os autores trazem como sugestão no manual do professor situações propostas com a finalidade de avaliar o que foi apresentado até aquele instante, em algumas situações, é proposto que seja utilizado métodos abordados anteriormente. Já durante a aula do professor, este momento é observado ao final de cada método estudado, onde foram propostos exercícios de fontes secundárias e algumas atividades propostas pelo próprio livro didático. Com relação a este último momento didático, destacamos uma desconformidade quanto aos métodos avaliativos mostrados no livro didático dos que foram utilizados pelo professor.

Neste sentido, verificamos ao analisar as praxeologias matemáticas e didáticas utilizadas no livro didático e na ação didática do professor que algumas técnicas auxiliares apresentaram diferenças, ou seja, uma desconformidade entre elas, isto ocorreu devido as escolhas metodologias do professor ao desenvolver e apresentar os métodos estudados.

Em contrapartida, destacamos que o professor também atuou como um agente regulador da conformidade satisfazendo a relação R(X, O), isto é, as praxeologias abordadas foram representadas conforme a instituição, apresentando-se como um sujeito adequado a esta. Assim também, observamos que o professor a todo momento procurou está em conformidade com o livro didático, a medida em que foram utilizados os mesmos exemplos, apesar da divergência no percurso didático adotado por ambos, houve uma adequação e utilização das praxeologias em destaque, isto porque, para Chevallard (1999), o agente controlador das conformidades pode moldar o interesse no objeto O.

De acordo com KASPARY (2019, p.229), “duas instituições noosféricas estão em conformidade quando elas compartilham do mesmo ponto de vista sobre o ensino e aprendizagem de um objeto em um ambiente escolar”. Deste modo, observamos que grande parte das praxeologias analisadas apontaram uma conformidade, visto que, o professor utilizou o livro didático como referência ao trazer os mesmos exemplos abordados, isto é, compartilhou em vários momentos do mesmo ponto de vista dos autores.

Portanto, em nossa análise constatamos que houve tanto os momentos de conformidades quanto de desconformidades entre as praxeologias apresentadas pelo livro didático e pela ação didática do professor em sala de aula. Apesar de algumas praxeologias mostradas por ambos apresentarem divergências, destacamos que estas não foram suficientes para alterar de maneira significativa a estrutura e os caminhos metodológicos referentes as resoluções dos exemplos analisados, uma vez que, o professor trouxe na abordagem do conteúdo os mesmos exemplos utilizados no livro, o que favoreceu na utilização das mesmas praxeologias adotadas pelo livro didático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo geral analisar as conformidades entre as praxeologias encontradas sobre o conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas presente no livro didático das praxeologias utilizadas pelo professor em sala de aula. Este objetivo, surgiu mediante a algumas indagações que ao nosso ponto de vista, foram problemáticas a serem averiguadas, sendo assim, um dos questionamentos que nos levou a busca por resposta foi: quais as aproximações, distanciamentos e conformidades entre as praxeologias que encontramos no livro didático das utilizadas pelo professor em sala de aula sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas?

Neste sentido, para que pudéssemos alcançar os objetivos propostos, utilizamos como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático proposta por Chevallard (1991, 1999) e colaboradores, uma vez que, nosso estudo se desenvolveu a partir da análise das praxeologias encontradas tanto no livro didático quanto na ação didática do professor de matemática em sala de aula sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.

Desta forma, antes de introduzirmos a TAD, discutimos acerca dos elementos iniciais da teoria da Transposição Didática, já que, a TAD é considerada uma extensão desta teoria. Para Chevallard (1991), a Transposição Didática é definida como o trabalho ou o conjunto de transformações adaptativas que o saber a ensinar sofre, tornando-o apto a transformar-se em saber ensinado. Apesar das contribuições que esta teoria trouxe para o meio cientifico, apresentou limitações ao distinguir os objetos matemáticos, por isto, houve a necessidade de ampliação, o que levou Chevallard e colaboradores a desenvolverem a TAD (Teoria Antropológica do Didático).

Nesta perspectiva, a TAD permite uma análise sobre o objeto do saber de uma determinada instituição e do nível de conformidade existente entre as relações pessoais e institucionais. Para tanto, a teoria apresenta a noção de praxeologias que está relacionada a didática, que por sua vez se dedica ao ato de estudar as condições e restrições das praxeologias.

Diante disto, a TAD nos possibilitou a analisar e identificar as praxeologias presentes no livro didático e na ação didática do professor em sala de aula. Estas praxeologias foram organizadas em duas partes, matemáticas e didáticas. As praxeologias matemáticas foram observadas a partir de elementos que as compõem que são: os tipos de tarefas, técnicas; tecnologias e teorias.

Com relação as praxeologias matemáticas durante a análise do livro didático e das aulas do professor referentes ao conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, identificamos quatro tipos de tarefas. Assim, estas praxeologias indicaram uma conformidade, entretanto, observamos uma desconformidade sob o ponto de vista da temporalidade, pois como verificamos o professor optou em iniciar o conteúdo mostrando primeiramente os métodos da substituição e da eliminação, enquanto o livro didático iniciou-se com o método de tentativa e erro e a representação gráfica do sistema.

Com base nas técnicas principais observadas, verificamos a ocorrência de conformidade, pois o professor utilizou as mesmas técnicas apresentadas no livro didático. Além disso, ao verificamos as técnicas auxiliares observamos que o professor em sua abordagem do método de tentativa e erro e na representação gráfica dos sistemas apresentou uma conformidade com as técnicas abordadas no livro didático, em contrapartida, foi verificado também uma desconformidade com relação a utilização de algumas técnicas auxiliares dos métodos de substituição e eliminação.

Assim também, ao analisarmos os elementos tecnológicos verificamos que houve conformidade, pois foram apresentadas quatro tecnologias que justificaram as técnicas estudadas. Deste modo, como foi apresentado na análise alguns elementos tecnológicos não foram mostrados de maneira explicita, isto é, foi necessário identificar as propriedades através das manipulações destacadas durante a aplicação das técnicas principais e auxiliares.

De forma análoga, apresentamos também as praxeologias didáticas que foram analisadas a partir dos seis momentos de estudos propostos por Chevallard (1999). Deste modo, identificamos uma conformidade com relação aos momentos do primeiro encontro com o tipo de tarefa, exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica, constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica e na institucionalização. Em contrapartida, identificamos uma desconformidade nos momentos de trabalho da técnica e da avaliação, pois foram nestes momentos didáticos que o professor dispôs de exercícios de outras fontes para complementação do conteúdo.

Nesta perspectiva, o conjunto de praxeologias matemáticas identificadas e analisadas no livro didático e durante as aulas do professor apontaram que o professor atuou como um agente regulador da conformidade, apesar de observarmos uma desconformidade em relação a algumas praxeologias, destacamos que estas não foram suficientes para mudar a estrutura e a forma como o livro didático apresentou a resolução dos exercícios resolvidos, já que as demais praxeologias analisadas mostram a tentativa do professor em estar adequado a instituição livro didático. Desta forma, mesmo o professor tendo optado por seguir uma sequência diferente dos métodos de resoluções mostrados no livro didático, não houve alteração quanto as praxeologias matemáticas e didáticas apresentadas.

Neste sentido, acreditamos que é preciso mais estudos sobre o funcionamento das praxeologias tanto abordadas no livro didático quanto na ação didática do professor em sala. Em relação ao livro didático, os autores podem fazer escolhas diferentes na forma como é abordado o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas. Assim também, o professor como agente regulador da conformidade pode optar por não seguir as expectativas da instituição livro didático, podendo significar uma desconformidade entre as praxeologias.

No entanto, ao alcançarmos os objetivos propostos neste trabalho alguns questionamentos acabaram surgindo, assim deixamos estas indagações como sugestões para futuras pesquisas relacionadas ao tema analisado, são elas: quais as implicações na abordagem do conteúdo de sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas podem ocorrer em sala de aula caso o professor opte por não estar em conformidade com as praxeologias do livro didático?; quanto a escolha do professor em está ou não em conformidade com as praxeologias do livro didático, quais as influências em relação aos métodos de resoluções escolhidos pelos alunos para resolver sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas?; caso o professor em suas aulas opte em trabalhar com outros materiais que não seja o livro didático escolhido pela instituição de ensino, quais seriam as conformidades entres as praxeologias apresentadas nestes materiais e nas aulas do professor sobre o conteúdo de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas?

REFERÊNCIAS

A BÍBLIA. **A confissão de Jó**. Tradução de João Ferreira Almeida. Barueri - SP: sociedade Bíblica do Brasil, 1664p, 2008.

ALMEIDA, Cecília Manoella Carvalho; FARIAS, Luiz Márcio Santos. Uma Análise do conceito de Probabilidade nos Livros didáticos do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático. **SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA**, v. 1, p. 164-187, 2016.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - UFRPE, Recife, 2016.

DA COSTA, Amanda Silva et al. Investigando as dificuldades apresentadas em álgebra por alunos do oitavo ano do ensino fundamental. **Revista Destaques Acadêmicos**, v. 8, n. 4, 2016.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. 2009. 290f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), São Paulo, v. 10, n. 2, 2008.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: CONFERÊNCIA plenária no encontro de investigação em educação matemática. **Anais …** Caminha, Portugal, 2005.

BARBOSA. J. T. B.. **Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Dissertação de mestrado, UFPB, 2011.

BESSA DE MENEZES, M.. **Praxeologia do Professor e do Aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau**. Tese de Doutorado, UFPE, 2010.

BITTAR, Marilena. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Zetetike, v. 25, n. 3, p. 364-387, 2017.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **25 años de trasposición didáctica.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoria antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et.al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007b.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. EUA, v. 36, n. 5. 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

______. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1998. 174 p.

BRIZUELA, Bárbara M. Young children's notations for fractions. **Educational studies in Mathematics**, v. 62, p. 281-305, 2006.

BOYER, M. Christine. **CyberCities: visual perception in the age of electronic communication**. Princeton Architectural Press, 1996.

CASTRO, M. R. Educação algébrica e resolução de problemas. **Boletim Salto para o Futuro**, TV Escola. Brasília, 2003.

CAVALCANTE, J. L. **A dimensão cognitiva na teoria antropológica do didático**: reflexão teórico-crítica no ensino de probabilidade na licenciatura em matemática. 2018. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In : L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p.91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

_____________. **Conceitos Fundamentais da Didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.

_____________. Didactique et formation des enseignants. **Journées d'études INRP-GÉDIAPS Vingt ans de recherche en didactique de l'Éducation Physique et Sportive à l'INRP (1983-2003)**, 2003.

_____________. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19, nº 2, 1999.

_____________. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Aique Grupo Editor S.A., 1991.

_____________. Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique. 1997.

_____________. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. 2007.

.DE BAIRRO, Catiane Colaço. Livro didático: um olhar nas entrelinhas da sua história. 2009.

DA COSTA, André Pereira; DOS SANTOS, Marilene Rosa. **O estudo de quadriláteros notáveis no livro didático de Matemática: um olhar para a organização matemática. Revemop**, v. 1, n. 2, p. 229-247, 2019

DEIXA, Geraldo Vernijo; CHICOTE, Rosalino Subtil; SOBRA, Laurindo. Análise crítica dos livros didáticos de matemática de Moçambique à luz da Teoria Antropológico do Didático. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 15, n. 33, p. 88-100, 2019.

DO LAGO MENDES, Herman. NÚMEROS BINÁRIOS EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA. **Encontro Internacional de Formação de Professores e Fórum Permanente de Inovação Educacional**, v. 11, n. 1, 2018.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. Campinas, v. 4, n. 1[10], 1993.

FONSECA, J. J. S. Metodologia da pesquisa científica. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

FRISON, Marli Dallagnol et al. Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. **Encontro Nacional de Pesquisa em educação em ciências**, v. 7, p. 1-13, 2009.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Plageder, 2009.

GIL, Katia Henn et al. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra.** 2008.

GIL, Katia Henn; FELICETTI, Vera Lucia. Reflexões sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem da álgebra por estudantes da 7ª série. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 19-35, 2016.

GOMES, Orleylson Cunha; DA ROCHA GOMES, Salatiel; TERÁN, Augusto Fachín. A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA EM QUESTÃO: DIÁLOGOS NO ENSINO DE CIÊNCIAS EM UMA ESCOLA DE MANAUS/AM.

GUELLI, Augusto; ZUCCHI, Paola. A influência do espaço físico na recuperação dos pacientes e os sistemas e instrumentos de avaliação. **Rev Adm Saúde**, v. 7, n. 27, p. 43-50, 2005.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

KASPARY, Danielly. Noosfera e assujeitamento, duas noções da teoria antropológica do didático para problematizar o currículo e mudanças curriculares. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 8, n. 17, p. 229-247, 2019.

LOPES, Suzany Rocha Teles et al. **O ensino da álgebra na educação básica sob um olhar de professores da rede estadual de Goiás**. 2021.

MIRANDA, Sonia Regina; LUCA, Tania Regina de. O livro didático de história hoje: um panorama a partir do PNLD. **Revista Brasileira de História**, v. 24, p. 123-144, 2004.

PACHÊCO, Franklin Fernando Ferreira; SILVA, A. S. Atividades sobre comparação de áreas presentes em uma coleção de livros didáticos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental: um olhar sob os aspectos numéricos e geométricos. Anais. In: **VI Congresso Nacional de Educação (VI CONEDU)**. 2019.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 8º ano.** 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. Álgebra no ensino básico. 2009.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. **Educação e Matemática**, Lisboa, Portugal, 2008.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Lyon, França, 2009.

ROJO, Roxane; BATISTA, Augusto Gomes. Apresentação: cultura da escrita e livro escolar: propostas para o letramento das camadas populares no Brasil. **Livro didático de língua portuguesa, letramento e cultura da escrita. Campinas: Mercado das Letras**, 2003.

SANTANA, Aveilson José de. **Análise das praxeologias matemáticas em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio: o caso da função afim**. 2016. Tese de Doutorado. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências)– Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife.

SILVA, Kleyfton Soares da et al. Proposta de Análise Praxeológica de Noções de Química em Documentos Oficiais e Livros Didáticos. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 26, 2020.

SOARES, Magda. Novas práticas de leitura e escrita: letramento na cibercultura. **Educação & Sociedade**, v. 23, p. 143-160, 2002.

TRINDADE, Lilian Brazile; FERREIRA, VDT. A educação financeira nos anos finais do ensino fundamental: um olhar para o livro didático. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Anais Eletrônicos [...]. São Paulo**, 2016.