



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

JHON FRANKLIN PUERRES TIPAS

MODELOS DE RUMORES EM ÁRVORES

Recife

2023

JHON FRANKLIN PUERRES TIPAS

MODELOS DE RUMORES EM ÁRVORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística.

Área de Concentração: Probabilidade

Orientador: Pablo Martin Rodríguez

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

P977m Puerres Tipas, Jhon Frankiln
Modelos de rumores em árvores / Jhon Frankiln Puerres Tipas. – 2023.
38 f.: il., fig., tab.

Orientador: Pablo Martin Rodríguez.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Estatística, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Probabilidade. 2. Ramificação. I. Martin Rodríguez, Pablo (orientador).
II. Título.

519.2 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-150

JHON FRANKLIN PUERRES TIPAS

MODELOS DE RUMORES EM ÁRVORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovado em: 04 do mês de agosto de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pablo Martín Rodriguez
Orientador, UFPE

Prof. Dr. Élcio Lebensztayn
Examinador Externo à Instituição, UNICAMP

Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior
Examinador Externo à Instituição, UFG

Este trabalho é dedicado aos meus pais Adelmo e Maria, a minha irmã July, a meu irmão Euler, aos meus sobrinhos Andres e Liat e à minha querida Yolanda.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, a minha família e a todos que de alguma forma contribuíram para esse trabalho, como os professores por minha formação e aos colegas de mestre pela troca de conhecimento e camaradagem.

Agradeço aos meu pais, em especial à minha mãe, Maria Nancy Tipas, por me incentivar, me educar e ensinar o valor do respeito a todos, independentemente de origem, crença, raça ou classe social.

Agradeço a diretora ORM “ Catalina María Rúa Alvarez ” pelo apoio e esforços feitos para que eu pudesse ingressar no mestrado em Estatística, em especial, por me apoiar de forma incondicional neste processo de formação.

Agradeço ao professor Pablo Martín Rodríguez, meu orientador, por me incentivar, apoiar e guiar com sabedoria meu foco de estudo nesta dissertação de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o modelo de boato de Maki-Thompson em árvores homogêneas infinitas e uma variante desse modelo em árvores especiais. O modelo padrão é definido supondo-se que uma população representada por um grafo seja subdividida em três classes de indivíduos: ignorantes, propagadores e neutros. Um propagador transmite informações a qualquer de seus vizinhos ignorantes mais próximos à taxa de um. Na mesma proporção, um propagador se torna neutro após entrar em contato com outros propagadores ou neutros. Neste trabalho, estudamos uma variante de este modelo, atribuindo uma probabilidade $p \in (0, 1)$ a um propagador para transmitir ou boato, isso nos permitiu estender o modelo para árvores especiais, ou seja, considerando os vértices do grafo como Hubs, que são indivíduos que têm um grande número de interações com outros indivíduos na população. O interesse em estudar esse modelo com o Hubs deve-se ao fato de que esse tipo de grafo aleatório é muito frequente em sistemas criados pelo homem e também na natureza. Definimos um parâmetro crítico p_c do modelo para determinar se o boato sobrevive com probabilidade positiva ou se extingue com probabilidade 1.

Palavras-chaves: modelo de rumor; árvore homogênea; processos de ramificação; modelo de Maki-Thompson.

ABSTRACT

In this paper, we study a variant of Maki-Thompson rumor model on infinite homogeneous trees and a variant of this model on special trees. The standard model is defined by assuming that a population represented by a graph is subdivided into three classes of individuals: ignorant, spreader, and stifler. A spreader transmits information to any of its nearest ignorant neighbors at the rate of one. At the same rate, a spreader becomes neutral after coming into contact with other spreader or stifler. In this paper, we study a variant of this model by assigning a probability $p \in (0, 1)$ to a spreader to transmit or rumor, this allowed us to extend the model to special trees, that is, considering the vertices of the graph as Hubs, which are individuals that have a large number of interactions with other individuals in the population. The interest in studying this model with Hubs is due to the fact that this type of random graph is very common in man-made systems and also in nature. We defined a critical parameter p_c of the model to determine whether the rumor survives with positive probability or extinct with probability 1.

Keywords: rumor model; homogeneous tree; branching processes; Maki-Thompson model.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Os primeiros passos de uma realização do modelo em \mathbb{T}_2 . (a) em t_0 só a raiz é propagador. (b) t_1 , vértices à distância 1 da raiz são propagadores.(c) e (d) desenvolvimento do modelo nos tempos t_2 e t_3 | 17 |
| Figura 2 – Comportamento de $p_c(d)$ | 28 |
| Figura 3 – Comportamento de p_c e \tilde{p}_c em função de d | 29 |
| Figura 4 – Dois Hubs conectados com distância h e a probabilidade α | 30 |
| Figura 5 – Comportamento de $\hat{p}_c(h)$ para $d = 1000$ e $\alpha = 0.40, 60, 80$ | 32 |
| Figura 6 – Comportamento de \hat{p}_c para $h = 3, 5, 7$ e $d = 1000$ | 33 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Valores críticos de probabilidade $p_c(d)$ | 28 |
| Tabela 3 – Valores críticos de probabilidade crítica aproximada $\tilde{p}_c(d)$ e $\tilde{p}_c - p_c$ | 29 |
| Tabela 5 – Valores de probabilidade $\hat{p}_c(h)$, $\alpha = 0.60$ e $d = 1000$ | 32 |
| Tabela 7 – Valores de probabilidade $\hat{p}_c(\alpha)$ para $h = 3$ e $d = 1000$ | 33 |
| Tabela 9 – Valores críticos de probabilidade $\hat{p}_c(h, \alpha)$, $d = 1.000$ | 33 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------------------------|---|
| \mathcal{G} | Grafo |
| \mathcal{V} | Conjunto de vértices |
| \mathcal{A} | Conjunto de arestas |
| \mathbb{T}_d | Árvore homogênea infinita de grau $d + 1$ |
| $\partial\mathbb{T}_{d,n}$ | Nível n de \mathbb{T}_d |
| $\theta(d)$ | Probabilidade de sobrevivência |
| $f(d) \sim g(d)$ | $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f(d)}{g(d)} = 1$ |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 1.1 | CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES | 12 |
| 2 | O MODELO DE MAKI-THOMPSON EM ÁRVORES HOMOGÊ- NEAS | 15 |
| 2.1 | NOTAÇÃO DE GRAFOS | 15 |
| 2.2 | DESCRIÇÃO DO MODELO | 16 |
| 2.3 | A DISTRIBUIÇÃO DO NÚMERO DE PROPAGADORES QUE UM PRO- PAGADOR GERA. | 18 |
| 2.3.1 | Processo de ramificação | 20 |
| 3 | UMA VARIANTE DO MODELO DE MAKI-THOMPSON EM ÁR- VORES | 24 |
| 3.1 | O MODELO-MT COM PROBABILIDADE p | 24 |
| 3.1.1 | Árvores especiais | 29 |
| 4 | CONCLUSÕES | 36 |
| | REFERÊNCIAS | 37 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Uma ampla gama de modelos matemáticos foi desenvolvida para ilustrar de forma natural a transmissão de informações em uma população. (DALEY; KENDALL, 1965) e (MAKI; THOMPSON, 1973), apresentam os dois modelos estocásticos de grande relevância citados com frequência até o momento. O modelo Maki-Thompson ou modelo-MT, foi sugerido como uma simplificação do modelo Daley-Kendal e é usado para estudar como um boato se espalha em uma população homogênea, misturada e fechada de $N + 1$ indivíduos. A população é dividida em três classes, aqueles que espalham ativamente o boato, aqueles que não sabem do boato e aqueles que sabem do boato mas optam por não espalhar o boato. Na literatura, estes indivíduos são referidos como propagadores, ignorantes e neutros, respectivamente.

A disseminação do boato pela população é feita pelo contato de um propagador com outro indivíduo da população. Os indivíduos interagem em pares, como segue: se um propagador tem contato com um ignorante, o último torna-se um propagador; entre propagador e propagador, o primeiro torna-se um neutro; e finalmente, a interação entre propagador e neutro faz com que o primeiro mude seu estado para neutro.

Para uma definição formal do modelo definimos as variáveis aleatórias $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$ para denotar o número de ignorantes, propagadores e neutros em um instante de tempo t , respectivamente. Inicialmente, $X(0) = N$, $Y(0) = 1$ e $Z(0) = 0$ e $X(t) + Y(t) + Z(t) = N + 1$, para todo $t \geq 0$. O modelo-MT é a cadeia de Markov a tempo contínuo $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$, com transições e taxas dadas por:

| transição | taxa | |
|-----------|--------------|-------|
| $(-1, 1)$ | YX , | (1.1) |
| $(0, -1)$ | $Y(N - X)$. | |

Então, temos que

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (i-1, j+1) \mid (X(t), Y(t)) = (i, j)) = ijh + o(h),$$

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (i, j-1) \mid (X(t), Y(t)) = (i, j)) = j(N-i)h + o(h),$$

onde $o(h)$ representa uma função tal que $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$. Isto significa que se a cadeia Markov está no estado (i, j) no momento t então as probabilidades de pular para os estados

$(i-1, j+1)$ ou $(i, j-1)$ no momento $t+h$ são, respectivamente, $ijh+o(h)$ e $j(N-i)h+o(h)$. Observe que, na cadeia de Markov $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$, o conjunto de estados é $\mathcal{S} = \{(i, j) : i, j \in \{0, 1, 2, \dots, N+1\}, 0 \leq i+j \leq N+1\}$ e os parâmetros $\{\mathcal{V}_{(i,j)}\}_{(i,j) \in \mathcal{S}}$ e $\{P_{(i,j)(k,l)}\}$ são dados por,

$$\mathcal{V}_{(i,j)} = ij + j(N-i) \quad P_{(i,j)}(i-1, j+1) = \frac{i}{N} \quad P_{(i,j)}(i, j-1) = \frac{N-i}{N}.$$

Ou seja, a quantidade de tempo que o processo gasta em cada estado visitado são variáveis aleatórias independentes e idênticas a uma distribuição exponencial de parâmetro um.

No modelo-MT foi estudado em grafos finitos e infinitos. Em grafos finitos, há muitos resultados como (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011b; LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011a; COLETTI; RODRÍGUEZ; SCHINAZI, 2012; LEBENSZTAYN, 2015; COMETS et al., 2016). Nesses estudos, os autores trabalham com diversas técnicas que possibilitam ampliar nossa compreensão do modelo-MT em uma população mais estruturada, ou seja, representada por redes e grafos aleatórios.

Em geral, os modelos de rumores têm sido estudados através de diferentes técnicas. Na literatura, encontramos que o princípio da difusão de constantes arbitrárias foi utilizado por (DALEY; KENDALL, 1965); um raciocínio usando martingais é considerado em (SUDBURY, 1985; WATSON, 1987; PITTEL, 1990; LEFEVRE; PICARD, 1994; CARNAL, 1994); os argumentos com funções geradoras são apresentados em (DALEY; GANI, 1999) e (PEARCE, 2000); a análise de versões determinísticas em (BELEN; PEARCE, 2004) e (KAWACHI, 2008) e técnicas baseadas na teoria de cadeias de Markov em (RODRIGUEZ, 2010). Entretanto, todos estes modelos mantêm a suposição de que a população se mistura de forma homogênea em grafos finitos.

No modelo-MT em grafos finitos se estuda a proporção de ignorantes no final do processo (não há propagadores na população). Entretanto, em grafos infinitos o interesse se concentra na sobrevivência do rumor, ou seja, garantir a existência de um caminho de modo que os vértices do caminho foram propagadores em algum momento.

Em (SPEROTO, 2021) e (JUNIOR; RODRIGUEZ; SPEROTO, 2020) é estudado o modelo-MT em árvores homogêneas. A pesquisa foi baseada em resultados de processo de ramificação que proporcionou uma melhor compreensão da probabilidade de propagação de rumores em uma árvore homogênea em termos da probabilidade de sobrevivência do processo de ramificação associado com o modelo-MT. Também encontraram condições sob as quais o rumor se extingue ou sobrevive com probabilidade positiva. Em (JUNIOR; RODRIGUEZ; SPEROTO, 2021) eles analisaram a existência de um valor crítico, que separa as fases em que o processo de rumor

se extingue com probabilidade 1 ou sobrevive com probabilidade positiva e também obtiveram informações sobre o alcance da propagação o modelo-MT em grafos aleatórios infinitos.

O objetivo deste trabalho é estudar o modelo-MT e uma variante do modelo-MT em árvores especiais. Em (SPEROTO, 2021), quando um indivíduo sabia do boato, ele tentava transmiti-lo aos seus vizinhos mais próximos com probabilidade 1. Agora, cada um dos indivíduos cientes do boato terá uma probabilidade $p \in (0, 1)$ de transmitir o boato. Essa variante nos permitiu ampliar o estudo do modelo-MT para árvores com dois tipos de indivíduos, o primeiro com uma grande quantidade de interações (HUBS) e os outros com uma baixa quantidade de interações. Nesse contexto fornecemos as condições sob as quais o boato se extinga ou sobreviva com probabilidade positiva.

2 O MODELO DE MAKI-THOMPSON EM ÁRVORES HOMOGÊNEAS

2.1 NOTAÇÃO DE GRAFOS

Com a intenção de fixar a notação iniciamos com conceitos da teoria de grafos e árvores, para isso encaminhamos ao leitor (SERRE, 2002). Neste trabalho, um grafo orientado $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consiste de um conjunto de vértices \mathcal{V} , um conjunto de arestas $\mathcal{A} \subset \{\{u(A), v(A)\} : u, v \in \mathcal{V}, u \neq v\}$ e dois mapeamentos $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{V}, A \mapsto \{u(A), v(A)\}$ e $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, A \mapsto \bar{A}$ que satisfazem a seguinte condição: para cada $A \in \mathcal{A}$ temos $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{A} \neq A$ e $u(A) = v(\bar{A})$. Um elemento $v \in \mathcal{V}$ é chamado vértice de \mathcal{G} ; um elemento $A \in \mathcal{A}$ é chamado aresta (orientada), e \bar{A} é chamada aresta inversa. Na aresta $\{u(A), v(A)\}$ o primeiro componente é chamado origem de A , e o segundo componente é chamado extremo de A .

Um subgrafo \mathcal{G}' de um grafo orientado \mathcal{G} é um grafo tal que $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ e $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Se $\{u(A), v(A)\} \in \mathcal{A}$ dizemos que u e v são vizinhos, e escrevemos $u \sim v$. O grau de um vértice v , denotado por $deg(v)$, é o número de seus vizinhos. Um caminho C_n num grafo orientado \mathcal{G} é uma sequência finita (v_0, v_1, \dots, v_n) de vértices distintos tais $v_i \sim v_{i+1}$ para cada $i \in 0 \leq i < n$. O limite direto $C_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ proporciona a noção de um caminho infinito. Ele é uma sequência infinita (v_0, v_1, \dots) de vértices para cada $i \geq 1$.

Dizemos que \mathcal{G} é um grafo conectado se para qualquer par u e v de vértices em \mathcal{V} existe um caminho indo de u para v em \mathcal{G} . Quando \mathcal{G} é conexo, a distância entre dois vértices é dada pelo comprimento do caminho mais curto entre eles. Utilizamos a notação $d(u, v)$ para denotar a distância entre u e v (quando $d(u, v) = 1$ dizemos que $u \sim v$). Uma árvore Γ é um grafo, acíclico e conexo, com um vértice fixado que chamaremos raiz e denotamos $\mathbf{0}$, por ser o vértice de origem. Para $u, v \in \mathcal{V}$, nós dizemos que $u \leq v$ se u é um dos vértices do caminho conectando $\mathbf{0}$ e v ; $u < v$, se $u \leq v$ e $u \neq v$. Dizemos que o vértice v é descendente do vértice u se $u \leq v$ e denotamos por $\Gamma^u = \{v \in \mathcal{V} : u \leq v\}$ o conjunto dos descendentes de u .

Quando $u \sim v$ e $u \leq v$, dizemos que v é um sucessor de u . Os vértices $v \in \Gamma$ cuja $d(\mathbf{0}, v) = n$, formam o nível n de Γ . Utilizando a notação $|v| := d(\mathbf{0}, v)$, vamos escrever o n -ésimo nível de Γ como sendo $\partial\Gamma_n = \{v \in \Gamma : |v| = n\}$. Quando todos os vértices têm o mesmo grau a árvore é dita homogênea,

Utilizaremos a notação \mathbb{T}_d para representar a árvore homogênea infinita de grau $d + 1$ e com raiz $\mathbf{0}$. Isto é, \mathbb{T}_d é tal que cada vértice possui $d + 1$ vizinhos mais próximos; sendo que a raiz, ao contrário dos demais vértices, possui todos os seus vizinhos mais próximos em um

mesmo nível da árvore. vamos destacar também o noção de raio em \mathbb{T}_d que é um caminho com infinitos vértices começando em $\mathbf{0}$. Já a noção de profundidade de um vértice é uma grandeza finita que é dada pela distância do vértice até a raiz da árvore. Em \mathbb{T}_d o conjunto dos elementos que constituem o nível n é descrito por $\partial\mathbb{T}_{d,n} = \{v \in \mathbb{T}_d : |v| = n\}$.

2.2 DESCRIÇÃO DO MODELO

As definições e os resultados desta seção foram obtidos em (JUNIOR; RODRIGUEZ; SPEROTO, 2020) e (SPEROTO, 2021), onde se estuda o modelo de rumor em árvores homogêneas. O modelo-MT pode ser definido como um processo de Markov a tempo contínuo $(\eta_t)_{t \geq 0}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, 2\}^{\mathcal{V}(\mathbb{T}_d)}$, isto é, para todo t o estado do processo é uma função $\eta_t : \mathcal{V}(\mathbb{T}_d) \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Nós assumimos que cada sítio $x \in \mathcal{V}(\mathbb{T}_d)$ representa um indivíduo, o qual é dito ignorante se $\eta_t(x) = 0$, um propagador se $\eta_t(x) = 1$ e um neutro se $\eta_t(x) = 2$, em cada instante de tempo t . Ignorantes são aqueles que não sabem do rumor; propagadores são aqueles que sabem e propagam o rumor; e neutro são aqueles que sabem do rumor, porém perderam o interesse em propagá-lo. Então, se o sistema está na configuração $\eta \in S$, o estado do sítio x muda de acordo com as seguintes taxas de transição:

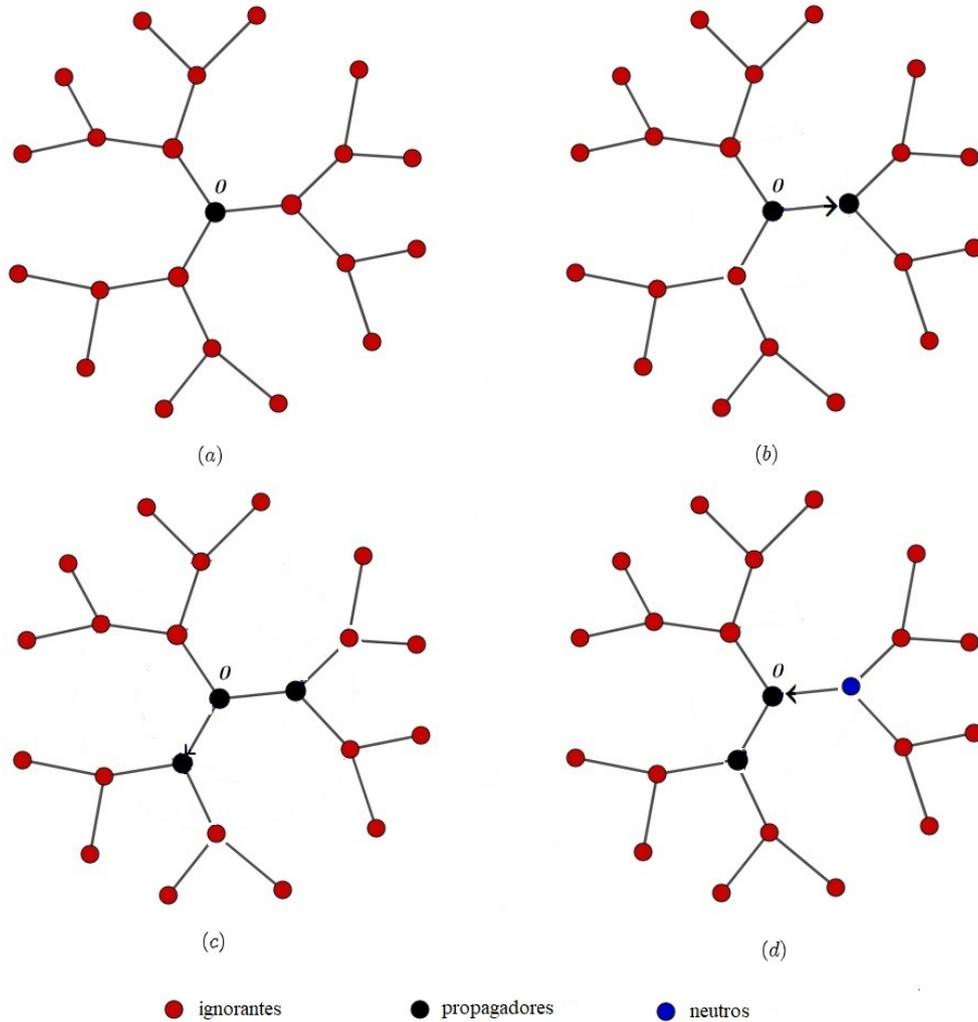
| transição | taxa | |
|--------------------|--------------------------------|-------|
| $0 \rightarrow 1,$ | $n_1(x, \eta),$ | (2.1) |
| $1 \rightarrow 2,$ | $n_1(x, \eta) + n_2(x, \eta),$ | |

onde

$$n_i(x, \eta) = \sum_{x \sim y} 1_{\{\eta(y)=i\}},$$

é o número de vizinhos mais próximos do sítio x no estado i para a configuração η , para $i \in \{1, 2\}$. Formalmente, (2.1) significa que se o sítio x está no estado 0 no tempo t então a probabilidade de que ele estará no estado 1 no tempo $t+h$, para h pequeno, é $n_1(x, \eta)h + o(h)$, e se o sítio x está no estado 1 no tempo t então a probabilidade de que ele estará no estado 2 no tempo $t+h$, para h pequeno, é $(n_1(x, \eta) + n_2(x, \eta))h + o(h)$. Então $(\eta_t)_{t \geq 0}$ é o processo de rumor de Maki-Thompson em \mathbb{T}_d .

Figura 1 – Os primeiros passos de uma realização do modelo em \mathbb{T}_2 . (a) em t_0 só a raiz é propagador. (b) t_1 , vértices à distância 1 da raiz são propagadores. (c) e (d) desenvolvimento do modelo nos tempos t_2 e t_3



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Definição 2.2.1. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT em \mathbb{T}_d com a configuração inicial η_0 tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0, \forall x \neq \mathbf{0}$. Dizemos que o processo sobrevive se $\forall t > 0$, vale que $\{x \in \mathbb{T}_d : \eta_t(x) = 1\} \neq \emptyset$. Se não existe sobrevivência, nós dizemos que o processo se extingue. Utilizamos $\theta(d)$ para denotar a probabilidade de sobrevivência.*

Note que, a definição anterior é equivalente à de (SPEROTO, 2021); isto é, que existe uma sequência $\{(v_i, t_i)\}_{i \geq 0}$, com $(v_i, t_i) \in \mathbb{T}_d \times \mathbb{R}_+$, tal que $v_0 = \mathbf{0}, t_0 = 0, v_{i+1}$ é sucessor de $v_i, t_i < t_{i+1}, \eta_{t_i}(v_i) = 1, \forall i \geq 0$.

2.3 A DISTRIBUIÇÃO DO NÚMERO DE PROPAGADORES QUE UM PROPAGADOR GERA.

A configuração inicial do modelo-MT é $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$, para todos $x \neq \mathbf{0}$, ou seja, em $t = 0$ inicialmente a raiz conhece o boato, enquanto os $d + 1$ vizinhos são ignorantes. Estamos interessados no número de propagadores que o propagador inicial gera, e denotamos esta variável aleatória por N .

Lema 2.3.1. *A variável aleatória N tem distribuição de probabilidade dada por:*

$$\mathbb{P}(N = i) = i! \binom{d+1}{i} \frac{1}{(d+1)^{i+1}}, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, d+1\}.$$

Demonstração. Observe que o propagador inicial em qualquer instante $t \geq 0$, está tentando transmitir o boato para o ignorante mais próximo. Então para encontrar a distribuição da variável aleatória N usamos uma sequência de variáveis aleatórias exponenciais idênticas e independentes Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1} , cada um com o parâmetro 1. Por outro lado, a variável aleatória $\min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1}\}$, tem uma distribuição exponencial com o parâmetro $d + 1$. Além disso, a probabilidade

$$P(\min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1}\} = Y_i) = \frac{1}{d+1}.$$

Observe que, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, d+1\}$, o evento $\{N = i\}$ ocorre se os primeiros i contatos forem com ignorantes e o $(i + 1)$ -ésimo contato for uma experiência com um propagador ou neutro. Denotamos por A_i o evento do i -ésimo contato do propagador inicial ser com um ignorante. Portanto

$$\{N = i\} = \left(\bigcap_{j=1}^i A_j \right) \cap A_{i+1}^c. \quad (2.2)$$

Por (2.2) e pelo teorema da multiplicação temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = i) &= \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{j=1}^i A_j \right) \cap A_{i+1}^c \right) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P} \left(A_{i+1}^c | \bigcap_{j=1}^i A_j \right). \end{aligned}$$

Para encontrar esta probabilidade, explicitamos um dos termos da expressão acima, assim

$$\mathbb{P} \left(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \right) = \frac{d+1 - (i-1)}{d+1}, \quad (2.3)$$

pois os $(i - 1)$ contatos iniciais ocorreram com ignorantes então a probabilidade é dado por (2.3) e a probabilidade de que o i -ésimo contato seja do mesmo tipo é dado por $\frac{i}{d+1}$. Assim, substituindo convenientemente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = i) &= \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{d+1-j}{d+1} \right) \right] \frac{i}{d+1} \\ &= \left[\prod_{j=0}^d (d+1-j) \right] \left(\frac{1}{(d+1-i)!} \right) \frac{i}{(d+1)^{i+1}} \\ &= i! \left[\frac{(d+1)!}{(d+1-i)!} \right] \frac{i}{(d+1)^{i+1}} \\ &= i! \binom{d+1}{i} \frac{i}{(d+1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

□

Definimos a variável aleatória X como o número de propagadores que um determinado propagador (diferente da raiz) gera. A variável X assume valores no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, d\}$ e as funções de probabilidade de X e N estão relacionadas e satisfazem:

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(N = i + 1), \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}. \quad (2.4)$$

Isto nos permite enunciar o seguinte lema a respeito da variável aleatória X .

Lema 2.3.2. *A variável aleatória X tem distribuição de probabilidade dada por:*

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}}, \quad (2.5)$$

para $i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$. Além disso, $\mathbb{E}(X) > 1$ se, e somente se, $d \geq 3$.

Demonstração. A probabilidade (2.5) é deduzida da relação (2.4). A prova da segunda parte será demonstrado a partir da implicação, se $d \geq 3 \Rightarrow \mathbb{E}(X) > 1$, note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^d iP(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^d P(X = i) + \sum_{i=2}^d (i-1)P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^d P(X = i) + [P(X = 0) - P(X = 0)] + \sum_{i=2}^d (i-1)P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^d P(X = i) - P(X = 0) + \left[\sum_{i=2}^d (i-1)P(X = i) \right], \end{aligned}$$

logo,

$$\mathbb{E}(X) = 1 - P(X = 0) + \left[\sum_{i=2}^d (i-1)P(X = i) \right]. \quad (2.6)$$

Observe que $\mathbb{E}(X) > 1$, se

$$\left[\sum_{i=2}^d (i-1)P(X=i) \right] - P(X=0) > 0,$$

para isso, basta mostrar que $P(X=2) > P(X=0)$. Agora, substituindo essas probabilidades na equação (2.5), temos

$$\binom{d}{2} \frac{3!}{(d+1)^3} > \binom{d}{0} \frac{1}{(d+1)},$$

após algumas operações algébricas, obtemos $3d(d-1) > (d+1)^2$, se, e somente se, $2d^2 - 5d - 1 > 0$, e isto é satisfeito se $(d-2, 69)(d+0, 19) > 0$. Então, se $d \geq 3$, concluímos que $\mathbb{E}(X) > 1$. Para $d = 2$, e após alguns cálculos, obtemos $\mathbb{E}(X) = 8/9$, portanto a demonstração está completa. \square

2.3.1 Processo de ramificação

De maneira geral, podemos modelar o modelo-MT através de um processo de ramificação Bienaymé-Galton-Watson (BGW). De fato, note que temos propagadores que dão origem a novos propagadores de acordo com uma variável aleatória discreta com valores no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, d\}$ e função de distribuição de probabilidade dada por (2.5). Dizemos que os novos propagadores são descendentes diretos do propagador que lhes transmitiu o boato. Ou seja, cada propagador diferente da raiz gera i descendentes diretos com probabilidade de p_i . Em geral, se tivermos um certo número de propagadores no instante n , cada um deles gera novos propagadores no instante $n+1$. Em cada caso, isto é feito de acordo a uma variável aleatória independente e identicamente distribuída (i.i.d.) à variável aleatória X .

O propagador inicial no momento $n = 0$ forma a geração 0 e os propagadores que são gerados no tempo n formam a n -ésima geração do processo, $n \geq 1$. Denota-se por Z_n a variável aleatória que conta o número de propagadores da n -ésima geração. Note que $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação.

Definição 2.3.1. *Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidades dada por 2.3. Chamamos processo de ramificação de Bienaymé-Galton-Watson, ou simplesmente processo de ramificação, à cadeia de Markov $(Z_n)_{n \geq 0}$ com valores no conjunto*

$\{0, 1, 2, \dots, d\}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$p(i, j) = \begin{cases} \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \mathbb{P}(\sum_{r=1}^i X_r = j), & \text{para } i \geq 1, j \geq 0 \\ 0, & \text{para } i = 0, j > 0 \\ 1, & \text{para } i = 0, j = 0 \end{cases}$$

onde X_1, \dots, X_i são i.i.d à variável aleatória X .

Observe que este processo é completamente definido a partir das probabilidades de transição e seu estado inicial Z_0 , cuja distribuição é dada pela variável aleatória N . Já que os outros Z_n , $n \geq 1$ do processo têm como origem a distribuição da variável aleatória X .

Consideraremos o processo de ramificação subjacente ao processo-MT em árvores homogêneas infinitas. Dado $n \geq 0$, considere o n -ésimo nível de \mathbb{T}_d como sendo $\partial\mathbb{T}_{d,n} = \{v \in \mathbb{T}_d : d(\mathbf{0}, v) = n\}$. Denotamos por B_n o conjunto dos propagadores pertencentes ao $(n+1)$ -ésimo nível de \mathbb{T}_d . Isto é,

$$B_n = \{v \in \partial\mathbb{T}_{d,n+1} : \bigcup_{t>0} \{\eta_t(v) = 1\}\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim definido, B_0 é formado por cada vértice que está à distância um da raiz $\mathbf{0}$ e que se tornou propagador em algum momento; B_1 é formado por cada vértice que está à distância dois da raiz e que tornou propagador em algum momento, e assim sucessivamente. Definimos a variável aleatória $Z_n := |B_n|$. Dessa forma, Z_0 tem distribuição de probabilidade igual à de N e além disso, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i, \quad (2.7)$$

onde X_1, X_2, \dots são cópias idênticas e independentes da variável X . Assim definido, $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação tal que Z_0 tem distribuição dada por N . Em palavras, podemos dizer que Z_n é a cardinalidade dos propagadores do rumor pertencentes ao $(n+1)$ -ésima nível de \mathbb{T}_d .

Lema 2.3.3. *O modelo-MT em \mathbb{T}_d sobrevive se, e somente se, o processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$ sobrevive.*

Demonstração. Realizaremos a prova em duas partes. Primeiro, se o processo de ramificação sobrevive, então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z_n \geq 1\},$$

significa que existe um caminho finito C_n começando em $\mathbf{0}$ até o nível n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto pode ser descrito como uma sequência de vértices v_0, v_1, \dots, v_n e de tempos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, de modo que $\eta_{t_j}(u_j) = 1$ para todo $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, com $u_n = v_n$ e $v_0 = \mathbf{0}$. Logo, para cada n existe uma propagação do rumor indo de $\mathbf{0}$ até v_n , onde $v_n \in \partial\mathbb{T}_{d,n}$. Utilizando o simbolo $u \xrightarrow{T} v$ para denotar a transmissão da informação de u até v , esse evento pode ser representado por $\mathbf{0} \xrightarrow{T} \partial\mathbb{T}_{d,n}$. Como evento $\{\mathbf{0} \xrightarrow{T} \partial\mathbb{T}_{d,n}\}$ ocorre para todo n segue que

$$\bigcap_{n \geq 1} \{\mathbf{0} \xrightarrow{T} \partial\mathbb{T}_{d,n}\} \neq \emptyset$$

e conseqüentemente, o evento $\{\mathbf{0} \xrightarrow{T} \infty\}$ ocorre, ou seja, podemos afirmar que o modelo-MT sobrevive. Em segundo lugar, se o processo-MT sobrevive então, existe um caminho infinito de vértices os quais se tornaram propagadores em seus respectivos tempos. Tomando partes finitas deste caminho infinito vamos ter um caminho finito propagando de $\mathbf{0}$ até v_n pertencentes ao nível n da árvore e conseqüentemente o conjunto $B_n \neq \emptyset$, isto é $\forall n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 2.3.4. *Considere o processo-MT em \mathbb{T}_d . Então $\theta(d) > 0$ se, e somente se, $d \geq 3$. Além disso,*

$$\theta(d) = 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d}{i-1} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i,$$

quando ψ é a menor raiz não negativa da equação

$$\sum_{i=0}^d i! \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1} \right)^i \left(\frac{i+1}{d+1} \right) = s.$$

Demonstração. Conforme visto na Definição 2.2.1, utilizaremos $\theta(d)$ para denotar a probabilidade de sobrevivência. Vamos determinar $\theta(d)$ a partir da probabilidade de extinção do processo de ramificação associado, ou seja

$$\theta(d) = 1 - P(E) \tag{2.8}$$

onde o evento E representa a extinção do processo-MT. Sem perda de generalidade, podemos analisar a propagação do modelo-MT nos restringindo apenas na sobrevivência do modelo em cada uma das N subárvores (aleatório) de \mathbb{T}_d enraizadas no primeiro nível, pois inevitavelmente o boato atingirá o nível 1. Feita esta observação e utilizando a fórmula da probabilidade total, podemos escrever

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(E|N = i)\mathbb{P}(N = i), \tag{2.9}$$

lembrando que N representa o número de propagadores do nível 1. Consideremos a sequência $(Z_n)_{n \geq 0}$ definida como um processo de ramificação com distribuição de prole dada por:

$$p_i = \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)!}{d+1},$$

onde $i \in \{0, 1, \dots, d\}$. Além disso, como $\mathbb{E}(X) > 1$ para $d \geq 3$, sabemos que ψ , a probabilidade de extinção do processo de ramificação, é a menor solução positiva da equação $G(s) = s$ no intervalo $[0, 1)$, onde $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$ é a função geradora de probabilidades da distribuição de prole. Logo

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbb{E}(s^X) \\ &= \sum_{i=0}^d s^i \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^d s^i i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{i+1}{d+1} \\ &= \sum_{i=0}^d i! \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1} \right)^i \frac{i+1}{d+1}. \end{aligned}$$

Note que o evento extinção ocorre se, e somente se, todos os N processos de ramificação se extinguirem. Haja visto que todos os N processos de ramificação são independentes e idênticos, podemos afirmar que $\mathbb{P}(E|N = i) = \psi^i$. Agora fazendo a substituição de $\mathbb{P}(E|N = i)$ por ψ^i e $\mathbb{P}(N = i)$ por $i! \binom{d+1}{i} (s/(d+1))^i / (d+1)$ na Equação (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(E|N = i) \mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} \psi^i i \binom{d+1}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{i!}{d+1} \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} i \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i!}{d+1}. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de $\mathbb{P}(E)$ na Equação (2.8), segue que

$$\theta(d) = 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i!}{d+1}.$$

Para finalizar, vamos explicitar a equação $G(s) = s$. Utilizando a expressão da função geradora de probabilidade podemos concluir que

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)!}{d+1} = s.$$

□

3 UMA VARIANTE DO MODELO DE MAKI-THOMPSON EM ÁRVORES

3.1 O MODELO-MT COM PROBABILIDADE p .

Nesta seção, estudaremos uma extensão do modelo-MT em \mathbb{T}_d . No Capítulo 2, quando um indivíduo sabia do boato, ele tentava transmiti-lo aos seus vizinhos mais próximos. Agora, cada um dos indivíduos cientes do boato terá uma probabilidade de transmitir ou não o boato. Definimos p como a probabilidade de transmitir o boato e uma nova variável aleatória N' como o número de propagadores que transmitem o boato gerado pela raiz, ou seja, propagadores gerados pela raiz que transmitem o boato para seus vizinhos mais próximos com probabilidade $p \in (0, 1)$. Então $N' = \sum_{i=1}^N I_i$ onde,

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i - \text{ésimo indivíduo transmite o rumor.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$. Note que, $I_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ e dado que $N = n$, $N' \sim \text{Bin}(n, p)$, além disso $\mathbb{E}(N') = p\mathbb{E}(N)$.

Para novo modelo, definimos X' como o número de propagadores que transmitem o boato que um propagador diferente da raiz gera, assim $X' = \sum_{j=0}^X I_j$ onde,

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{se o } j - \text{ésimo indivíduo transmite o rumor.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$j \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$. Note que, $I_j \sim \text{Bernoulli}(p)$ e dado que $X = x$, $X' \sim \text{Bin}(x, p)$, além disso $\mathbb{E}(X') = p\mathbb{E}(X)$.

Ao adaptar o modelo-MT com essa variação, pode-se observar que a Definição 2.2.1 é satisfeita com as mesmas condições iniciais. Entretanto, para cada indivíduo $x \in \mathbb{T}_d$ que se torna um propagador em algum instante de tempo $t > 0$, é atribuída a ele uma probabilidade $p \in (0, 1)$ de transmitir as informações. O seguinte lema nos diz que $\theta(p, d)$ é não-decrescente em função de p .

Lema 3.1.1. *Seja p_1 e $p_2 \in (0, 1)$, então a probabilidade de sobrevivência $\theta(p, d)$ é não-decrescente em função de p . Isto é, $\theta(p_1, d) \leq \theta(p_2, d)$, $\forall p_1 \leq p_2$.*

Demonstração. Considere os modelos $(\eta_t^1)_{t \geq 0}$ e $(\eta_t^2)_{t \geq 0}$, com probabilidade p_1 e p_2 , respectivamente. Para mostrar que, de fato:

$$\theta(p_1, d) \leq \theta(p_2, d), \quad (3.1)$$

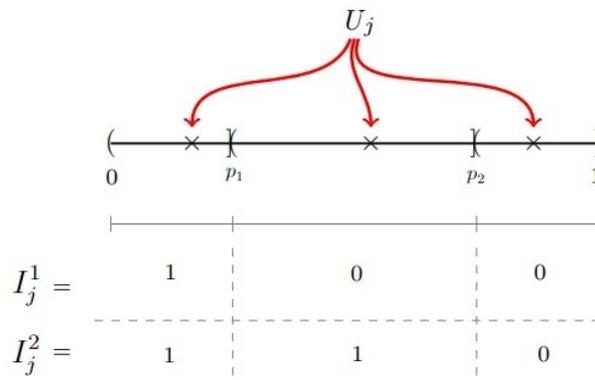
usamos o Lema 2.3.3, que nos diz que $(\eta_t^1)_{t \geq 0}$ e $(\eta_t^2)_{t \geq 0}$ sobrevive se, e somente se, o processos de ramificação $(Z_n^1)_{n \geq 0}$ e $(Z_n^2)_{n \geq 0}$ sobrevivem. Então, mostrar (3.1) é equivalente a demonstrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z_n^1 \geq 1\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z_n^2 \geq 1\}, \quad (3.2)$$

onde, Z_n^1 é o número de propagadores do modelo 1 da n -ésima geração e Z_n^2 é o número de propagadores do modelo 2 da n -ésima geração. Provaremos pelo método de indução que $Z_n^1 \leq Z_n^2$ é válida $\forall n \geq 1$. Para o caso inicial $n = 0$ sabemos que os dois processos comeam com $\eta_0^1(\mathbf{0}) = \eta_0^2(\mathbf{0}) = 1$, então $Z_0^1 = Z_0^2 = 1$. Suponha que ela é satisfeita para n , ou seja $Z_n^1 \leq Z_n^2$. Agora, para mostrar que $Z_{n+1}^1 \leq Z_{n+1}^2$ é válido, usamos um argumento de acoplamento. Então para cada indivíduo j , considere uma variável aleatória uniforme $U_j \sim \mathcal{U}(0, 1)$ e definimos

$$I_j^1 = \begin{cases} 1, & U_j \leq p_1 \\ 0, & U_j > p_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad I_j^2 = \begin{cases} 1, & U_j \leq p_2 \\ 0, & U_j > p_2, \end{cases}$$

Note que, assim definidas, $I_j^1 \sim \text{Bernoulli}(p_1)$ e $I_j^2 \sim \text{Bernoulli}(p_2)$, $\forall p_1$ e $p_2 \in (0, 1)$. Logo, construímos os dois processos de Bernoulli no mesmo espaço de probabilidade e fixando um indivíduo j , temos que



Note que em qualquer caso temos que $I_j^1 \leq I_j^2$. Podemos estender esta ideia para toda a família de v.a. envolvidas nos modelos 1 e 2 as quais serão definidas a partir de uma mesma família de v.a. i.i.d. uniformes no $(0, 1)$. De fato, $X'_{1i} = \sum_{j=1}^X I_j^1$ e $X'_{2i} = \sum_{j=1}^X I_j^2$ então $X'_{1i} \leq X'_{2i}$.

Da Observação 3.1.1 $Z_{n+1}^1 = \sum_{i=1}^{Z_n^1} X'_{1i}$ e $Z_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{Z_n^2} X'_{2i}$, portanto $Z_{n+1}^1 \leq Z_{n+1}^2$. Mostramos que $\forall n \geq 1$ é satisfeito $Z_n^1 \leq Z_n^2$, portanto $\forall n \geq 1$ é satisfeito (3.1), i.e, $\theta(p_1, d) \leq \theta(p_2, d)$.

□

Observação 3.1.1. Assim definido $(Z_n^1)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação tal que Z_0^1 tem distribuição dada por N'_1 , essa variável aleatória é o número de propagadores que gera a raiz com probabilidade p_1 . Além disso, $\forall n \in \mathbb{N} \cup 0$, temos $Z_{n+1}^1 = \sum_{i=1}^{Z_n^1} X'_{1i}$, onde X'_{11}, X'_{12}, \dots são cópias idênticas e independentes da variável X'_1 . Note que, X'_1 é a variável aleatória que representa o número de propagadores que um propagador diferente da raiz gera, com probabilidade p_1 . O processo de ramificação $(Z_n^2)_{n \geq 0}$ é definido de forma análoga.

Teorema 3.1.2. *Considere o modelo-MT com probabilidade p em \mathbb{T}_d e seja*

$$p_c(d) = \inf\{p > 0 : \theta(p, d) > 0\}.$$

Então $\forall d \geq 3$, $0 < p_c(d) < 1$. Além disso, $p_c(d) \sim \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração.

Pelo Teorema 2.3.4 e o Lema 2.3.2, sabemos que, se $d \geq 3$ então $\mathbb{E}(X') > 1$, i.e, $\mathbb{E}(X) \cdot p > 1$. Portanto,

$$p > \frac{1}{\mathbb{E}(X)},$$

note que a probabilidade de sobrevivência $\theta(p, d) > 0$, se $p > p_c(d)$. Considerando o resultado,

$$\mathbb{E}(X) = d! \sum_{i=1}^d \frac{1}{(d+1)^i (d-i)!}, \quad (3.3)$$

logo,

$$p_c(d) = \frac{1}{d! \sum_{i=1}^d \frac{1}{(d+1)^i (d-i)!}}. \quad (3.4)$$

Assim, para todo $d \geq 3$, temos que $0 < p_c(d) < 1$. Agora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= d! \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{1}{(d-i)!} \\ &= d! \sum_{i=0}^{d-1} \left(\frac{1}{d+1} \right)^{d-i} \frac{1}{i!} \\ &= d! \frac{1}{(d+1)^d} \sum_{i=0}^{d-1} \frac{(d+1)^i}{i!}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observamos que, se X for uma variável aleatória de Poisson com média d , então

$$P(X < d) = e^{-(d+1)} \sum_{i=0}^{d-1} \frac{(d+1)^i}{i!},$$

como uma variável aleatória de Poisson com média d pode ser considerada como sendo a soma de d variáveis aleatórias de Poisson independentes, cada uma com média 1, então

$$P(X < d) = P\left(\sum_{i=0}^{d-1} X_i < d\right),$$

deduzimos do teorema do limite central que, para d grande, essa variável aleatória têm aproximadamente uma distribuição normal, logo

$$\frac{\sum_{i=0}^{d-1} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{d-1} X_i\right)}{\sqrt{\text{var}\left(\sum_{i=0}^{d-1} X_i\right)}} \underset{d}{\sim} N(0, 1),$$

dessa forma,

$$P\left(\frac{\sum_{i=0}^{d-1} X_i - d}{\sqrt{d}} < \frac{d-d}{\sqrt{d}}\right) \sim P(Z < 0) = \frac{1}{2}.$$

Para d grande, $P(X < d) \sim \frac{1}{2}$, então

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{(d+1)^i}{i!} \sim \frac{e^{d+1}}{2}. \quad (3.6)$$

Usando a aproximação de Stirling, isso é

$$(d+1)^{(d+1)+\frac{1}{2}} e^{-(d+1)} \sqrt{2\pi} \sim (d+1)!, \quad (3.7)$$

e substituindo as equações (3.6) e (3.7) em (3.5),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &\sim (d+1)! \frac{1}{(d+1)^{d+1}} \frac{e^{d+1}}{2} \\ &\sim (d+1)^{d+\frac{3}{2}} e^{-(d+1)} \sqrt{2\pi} \frac{1}{(d+1)^{d+1}} \frac{e^{d+1}}{2}. \end{aligned}$$

Depois de algumas operaes algébricas, temos que

$$\mathbb{E}(X) \sim \left[\frac{\pi(d+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Substituindo $\mathbb{E}(X)$ na Equação (3.4) obtemos, $p_c(d) \sim \left[\frac{2}{\pi(d+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$. □

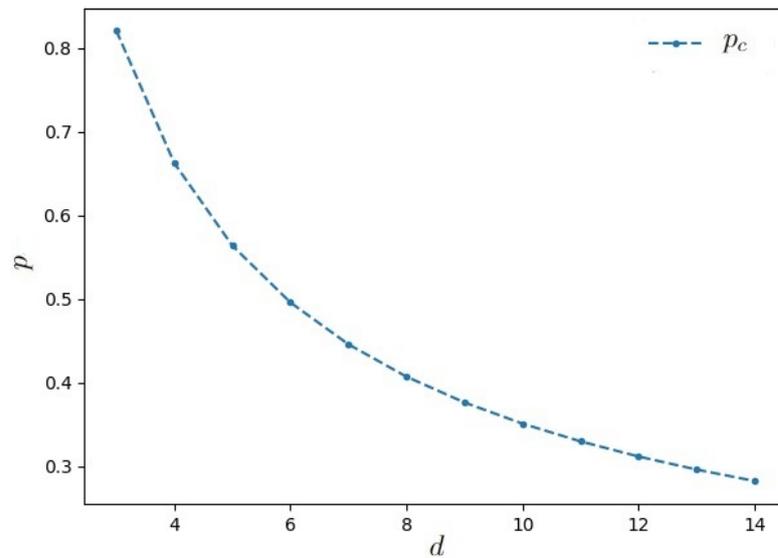
Tabela 1 – Valores críticos de probabilidade $p_c(d)$.

| d | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| p_c | 0.8205 | 0.6620 | 0.5634 | 0.4955 | 0.4454 | 0.4067 | 0.3759 | 0.3505 | 0.3293 |

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

A Tabela 1 exibe os valores de p_c neste modelo para $d = 3, \dots, 11$. Observemos que, se $d \geq 3$, $\exists p_c \in (0, 1)$. O Google Colaboratory foi usado para a geração de gráficos e tabelas devido à facilidade de uso e aos recursos interativos.

Na Figura 2 podemos ver o comportamento decrescente da probabilidade crítica p_c em função de d .

Figura 2 – Comportamento de $p_c(d)$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Denotamos a probabilidade crítica aproximada de p_c por:

$$\tilde{p}_c(d) = \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

Corolário 3.1.2.1. Vale que,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_c - \tilde{p}_c = 0.$$

Demonstração. De (3.4) e (3.9), temos

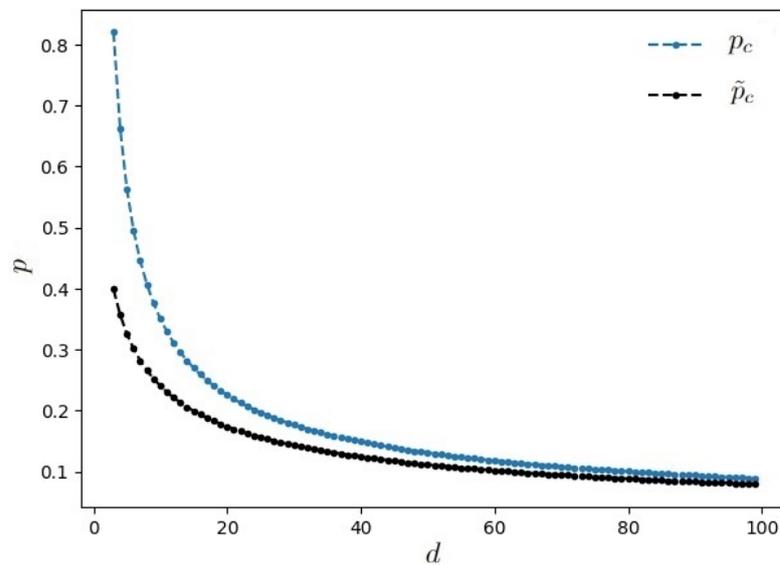
$$\lim_{d \rightarrow \infty} \left[\frac{(d+1)^{d+1}}{(d+1)! \sum_{i=0}^{d-1} \frac{(d+1)^i}{i!}} \right] - \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Tabela 3 – Valores críticos de probabilidade crítica aproximada $\tilde{p}_c(d)$ e $\tilde{p}_c - p_c$.

| d | 5 | 10 | 20 | 50 | 70 | 90 | 100 |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| \tilde{p}_c | 0.3257 | 0.2405 | 0.1741 | 0.1117 | 0.0946 | 0.0836 | 0.0793 |
| $p_c - \tilde{p}_c$ | 0.2377 | 0.1100 | 0.0515 | 0.0193 | 0.0135 | 0.0104 | 0.0093 |

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

A Tabela 3 exhibe os valores de p_c e $\tilde{p}_c - p_c$ neste modelo para $d = 3, \dots, 100$. Notemos que, os valores $\tilde{p}_c - p_c$ diminuem quando d aumenta, isso se deve ao Corolário 3.1.2.1.

Figura 3 – Comportamento de p_c e \tilde{p}_c em função de d .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Na Figura 3 ilustramos o comportamento de $p_c - \tilde{p}_c$, para $d = 3, \dots, 100$. Observe que a função \tilde{p}_c fica mais próxima para valores grandes de d .

3.1.1 Árvores especiais

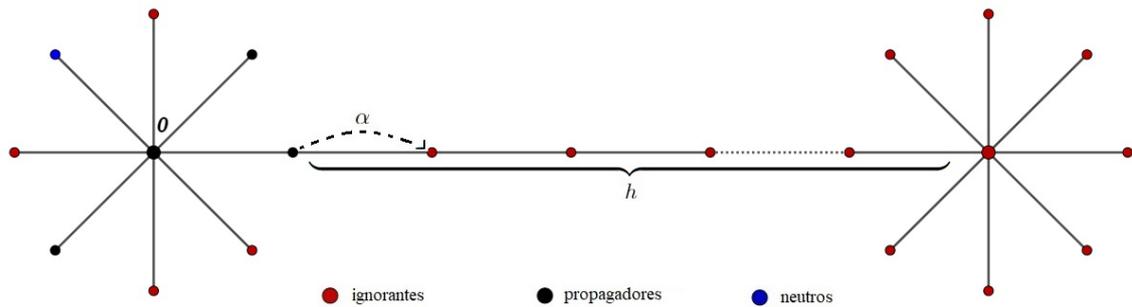
Em (BARABÁSI; ALBERT, 1999) os pesquisadores se concentraram em um projeto para mapear a World Wide Web (WWW). Eles descobriram que o modelo seguia um padrão, no qual poucas páginas eram altamente conectadas. Isso significava que toda a Web estava dividida em poucas páginas, daí o surgimento do termo HUBS. A maioria das outras páginas (mais de 80%) estava vinculada a, no máximo, quatro outras páginas. As conclusões desse projeto foram que, se 80% de seus nós menos conectados fossem desconectados, o restante

permaneceria conectado e, por outro lado, se 5 a 10% dos HUBS fossem removidos, isso seria suficiente para que o sistema desmoronasse, permitindo até mesmo que a rede rompesse sua conexão. Outros exemplos pragmáticos são: a internet, a rede mundial de computadores, as redes de relacionamento e algumas redes sociais.

Consideraremos o modelo-MT em uma população formada por HUBS. Suponha que cada HUB pode transmitir a informação para d potências indivíduos dos quais: cada um tem uma probabilidade, \hat{p} de estar conectado com outro HUB a distância h , além disso, suponha que cada indivíduo, no caminho entre dois HUBS transmite a informação na direção do segundo HUB com probabilidade α . Uma ilustração pode ser vista na Figura 4. Observe que agora a sobrevivência do boato depende do número de HUBS que são informados, portanto, estudaremos as condições sob as quais o boato sobrevive com probabilidade positiva.

Definido desta forma, adaptamos os argumentos dados em Seção 3.1, com $p = \hat{p}\alpha^h$, observe que, a Definição 2.2.1 é satisfeita nesse novo modelo, mas, nesse caso, cada vértice $x \in \mathbb{T}_d$ é um HUB.

Figura 4 – Dois Hubs conectados com distância h e a probabilidade α .



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Proposição 3.1.1. $\theta(\hat{p}, \alpha, h, d) > 0$ se, e somente se $\Omega(\hat{p}, \alpha, h, d) > 1$, em que

$$\Omega(\hat{p}, \alpha, h, d) \sim \hat{p}\alpha^h \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.3.2 o boato sobrevive com probabilidade positiva, se $\mathbb{E}(X') > 1$, além disso para essa variante sabemos que $p = \hat{p}\alpha^h$. Logo, $\hat{p}\alpha^h\mathbb{E}(X) > 1$, e com a aproximação em (3.8), temos que

$$\hat{p}\alpha^h \left[\frac{\pi(d+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} > 1,$$

portanto, $\Omega(\hat{p}, \alpha, h, d) > 1$. □

Teorema 3.1.3. *Considere o modelo-MT com probabilidade \hat{p} em \mathbb{T}_d e seja*

$$\hat{p}_c(\alpha, h, d) = \inf\{\hat{p} > 0 : \theta(\hat{p}, \alpha, h, d) > 0\}.$$

Com $\alpha \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{N}$ e d grande, segue que

$$(i) \text{ Se } \alpha \leq \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ então } \theta(\hat{p}, \alpha, h, d) = 0$$

$$(ii) \text{ Se } \alpha > \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ então } \hat{p}_c < 1 \text{ se, e somente se } h < \frac{\ln(\pi(d+1)/2)}{2 \ln(1/\alpha)}$$

Demonstração.

Da Proposição 3.1.1 observe que, $\hat{p}\alpha^h > \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$, i.e, $\hat{p} > \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^h$ e usando a aproximação em (3.9), temos

$$\hat{p} > \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^h.$$

O boato sobrevive quando $\hat{p}_c < 1$, então

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^h \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}} < 1,$$

logo,

$$h < \frac{\ln(\pi(d+1)/2)}{2 \ln(1/\alpha)}.$$

Por outro lado, $h > 1$, i.e, $\frac{\ln(\pi(d+1)/2)}{2 \ln(1/\alpha)} > 1$, de fato

$$\ln \left[\frac{\pi(d+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} > \ln \left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

assim,

$$\alpha > \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Note que, $\theta(\hat{p}, \alpha, h, d) > 0$, se $\alpha > \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$ e $h < \frac{\ln(\pi(d+1)/2)}{2 \ln(1/\alpha)}$. Caso contrário, o boato se extingue. \square

Se d é grande, temos

$$\hat{p}_c(h, \alpha) \sim \left(\frac{1}{\alpha}\right)^h \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, a sobrevivência do boato depende da distância h e da probabilidade α . Analisamos o comportamento de $\hat{p}(h)$, $\hat{p}(\alpha)$ e $\hat{p}(h, \alpha)$ fixando d , h , α de acordo com o caso correspondente.

Observamos que, a probabilidade de um HUB estar conectado, a outro, aumenta ou diminui de acordo com as variações de d , h e α .

Para $\hat{p}(h)$, fixamos $d = 1000$ e $\alpha = 0.40, 0.60, 0.80$, a relação entre essas duas variáveis é diretamente proporcional como alguns valores podem ser vistos na Tabela 5.

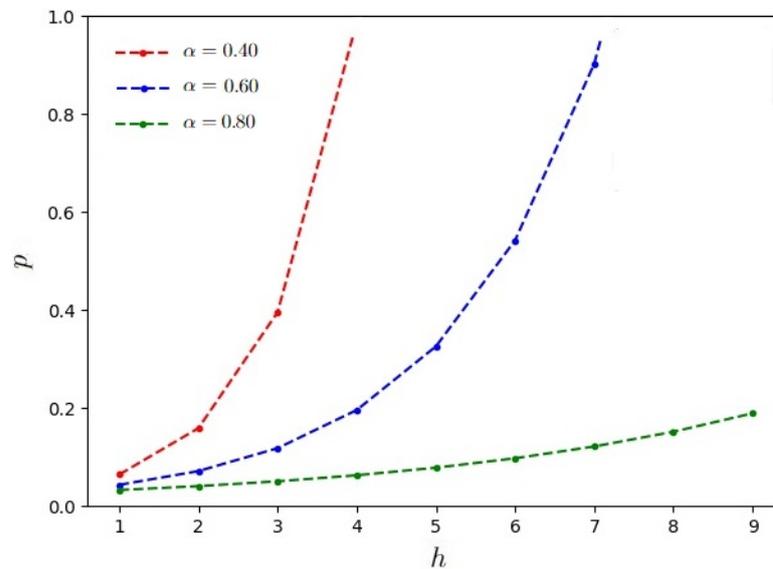
Tabela 5 – Valores de probabilidade $\hat{p}_c(h)$, $\alpha = 0.60$ e $d = 1000$.

| h | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| \hat{p}_c | 0.0420 | 0.0700 | 0.1168 | 0.1946 | 0.3244 | 0.5407 | 0.9013 |

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Na Figura 5, ilustramos o comportamento crescente de $\hat{p}_c(h)$, para $d = 1000$ e valores fixos de $\alpha = 0.40, 0.60$ e 0.80 . Além disso, se d for grande, a probabilidade crítica de um HUB, estar conectado a outro, diminui. Neste caso, o parâmetro com maior influência é α , pois uma pequena variação desse valor, produz uma mudança abrupta na probabilidade crítica.

Figura 5 – Comportamento de $\hat{p}_c(h)$ para $d = 1000$ e $\alpha = 0.40, 60, 80$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

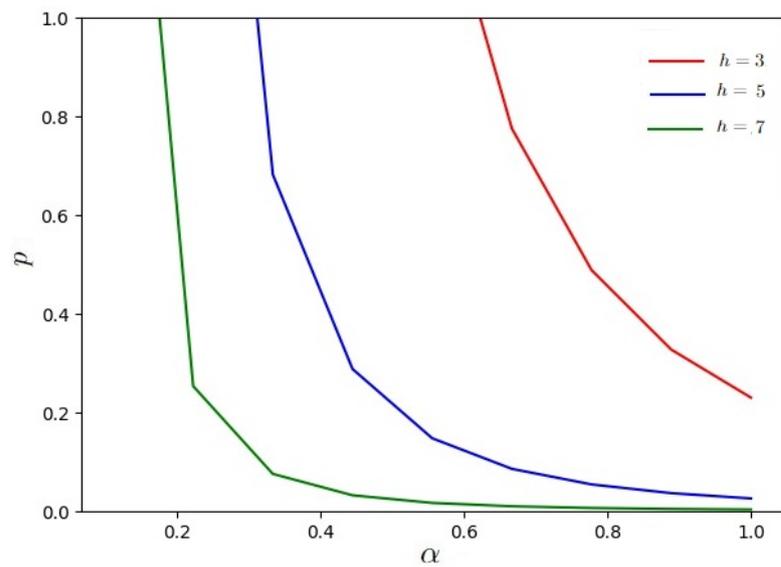
Para $\hat{p}(\alpha)$, fixamos $d = 1000$ e $h = 3, 5$ e 7 , a relação entre essas duas variáveis é inversamente proporcional. Alguns valores podem ser vistos na Tabela 7. Se d for grande, a probabilidade crítica de um HUB estar conectado a outro diminui. Neste caso, o parâmetro com maior influência é h , pois uma pequena variação desse valor produz uma mudança abrupta na probabilidade crítica.

Tabela 7 – Valores de probabilidade $\hat{p}_c(\alpha)$ para $h = 3$ e $d = 1000$.

| | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| α | 0.3333 | 0.4444 | 0.5555 | 0.6666 | 0.7777 | 0.8888 | 1 |
| \hat{p}_c | 0.6812 | 0.2874 | 0.1471 | 0.0851 | 0.0536 | 0.0359 | 0.0252 |

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Na Figura 6, ilustramos o comportamento não crescente de $\hat{p}_c(h)$, para $d = 1000$ e valores fixos de $h = 3, 5$ e 7 .

Figura 6 – Comportamento de \hat{p}_c para $h = 3, 5, 7$ e $d = 1000$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Alguns valores de $\hat{p}(h, \alpha)$ são apresentados na Tabela 9 de dupla entrada, para $d = 1.000$, $h = 1, \dots, 5$ e para alguns valores de α entre 0.55 e 0.91.

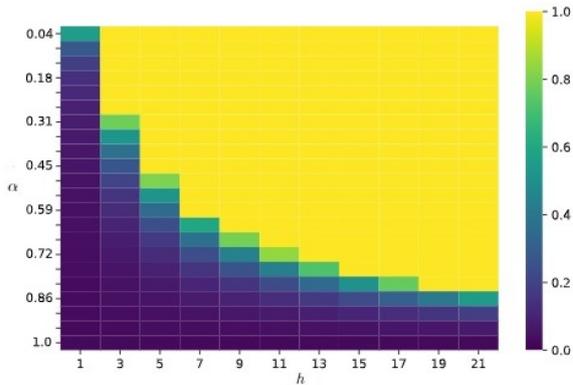
Tabela 9 – Valores críticos de probabilidade $\hat{p}_c(h, \alpha)$, $d = 1.000$.

| $\alpha \setminus h$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.55 | 0.0458 | 0.0834 | 0.1516 | 0.2757 | 0.5013 |
| 0.64 | 0.0394 | 0.0615 | 0.0962 | 0.1503 | 0.2349 |
| 0.73 | 0.0345 | 0.0473 | 0.0648 | 0.0888 | 0.1217 |
| 0.82 | 0.0307 | 0.0375 | 0.0457 | 0.0558 | 0.0680 |
| 0.91 | 0.0277 | 0.0304 | 0.0334 | 0.0367 | 0.0404 |

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

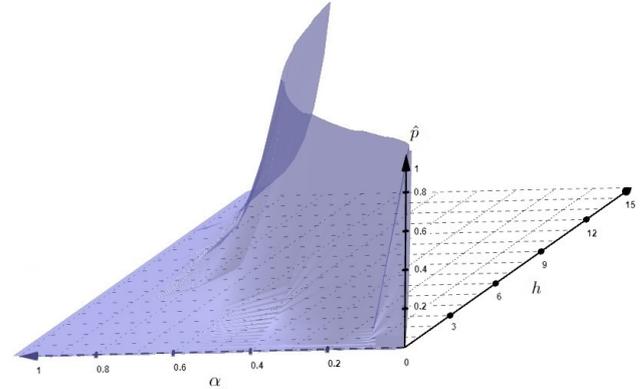
No gráfico 7a, ilustramos o diagrama de calor para \hat{p}_c , com valor fixo de $d = 1.000$. Observe que, nesse gráfico, a parte amarela corresponde à região em que o boato se extingue com probabilidade 1.

(a) Diagrama de calor \hat{p}_c para $d = 1000$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

(b) O comportamento \hat{p}_c para $d = 1000$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

No gráfico 7b mostramos que o boato sobrevive com probabilidade positiva para valores que estão na superfície; caso contrário, o boato se extingue.

Uma extensão desse modelo é atribuir a cada vértice entre dois HUBS um número de vizinhos. Se d for o grau de um HUB, então os vértices entre dois HUBS terão grau $\alpha(k)$, e suponha que $k < d$. Seja $\alpha(k)$ a probabilidade de passar informações para um HUB.

Lema 3.1.4. *Vale que*

$$\alpha(k) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} k^{-\frac{1}{2}}$$

$$k \in \{1, 2, \dots, \}$$

Demonstração.

Observe que $\alpha(k)$,

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \left(\frac{1}{k}\right) + \left[\left(\frac{k-2}{k}\right) \frac{1}{k}\right] + \left[\left(\frac{k-3}{k}\right) \left(\frac{k-2}{k}\right) \frac{1}{k}\right] + \dots + \left[\prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{k-j}{k}\right)\right] \\ &= \left[(k-2)! \left(\frac{1}{k}\right)^{k-1}\right] + \dots + \left[\frac{(k-2)!}{(k-4)!} \left(\frac{1}{k}\right)^3\right] + \left[\frac{(k-2)!}{(k-3)!} \left(\frac{1}{k}\right)^2\right] + \frac{(k-2)!}{(k-2)!} \left(\frac{1}{k}\right) \\ &= k(k-2)! \left[\frac{1}{0!} \left(\frac{1}{k}\right)^k + \dots + \frac{1}{(k-4)!} \left(\frac{1}{k}\right)^4 + \frac{1}{(k-3)!} \left(\frac{1}{k}\right)^3 + \frac{1}{(k-2)!} \left(\frac{1}{k}\right)^2\right] \\ &= k(k-2)! \left[\sum_{i=2}^k \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{1}{k}\right)^i\right] \\ &= \frac{k!}{k^k(k-1)} \left[\sum_{i=0}^{k-2} \frac{k^i}{i!}\right] \end{aligned}$$

Para k grande, usamos

$$\sum_{i=0}^{k-2} \frac{k^i}{i!} \sim \frac{e^k}{2},$$

e empregamos uma aproximação devido a Stirling que diz

$$k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi} \sim k!,$$

depois de algumas operações algébricas, temos que $\alpha \sim \left[\frac{\pi}{2} \frac{k^{\frac{1}{2}}}{(k-1)} \right]$, i.e.,

$$\alpha(k) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} k^{-\frac{1}{2}}.$$

□

Proposição 3.1.2. Consideremos $k = \log(d)$ então $\alpha(k) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\log(d))^{-\frac{1}{2}}$. Além disso, $\hat{p}_c < 1$, se, e somente se $h < \frac{\log(d)}{\ln(\log(d))}$.

Demonstração. Substituindo $k = \ln(d)$, no resultado do Lema 3.1.4, obtemos $\alpha(k) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\ln(d))^{-\frac{1}{2}}$. Agora, pelo Teorema 3.1.3, temos que

(i) Substituindo $\alpha(k)$, temos que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\ln(d))^{-\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{2}{\pi(d+1)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

de fato, $\frac{1}{(\ln(d))^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{(d+1)^{\frac{1}{2}}}$, logo $d+1 \leq \ln(d)$. Portanto, esse caso não é cumprido.

(ii) Observe que, se $\hat{p}_c < 1$, então

$$h < \frac{\ln(\pi(d+1)/2)}{2 \ln \left(\frac{2 \ln(d)}{\pi} \right)^{1/2}},$$

logo, $h < \frac{\ln(d+1) + \ln(\pi/2)}{\ln \ln(d) - \ln(\pi/2)}$ e para d grande, temos que $h < \frac{\ln(d)}{\ln(\ln(d))}$. □

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, estudamos o modelo-MT em \mathbb{T}_d e uma variação do modelo de rumor de Maki-Thompson em árvores especiais. O modelo Maki-Thompson em árvores homogêneas é formulado como uma cadeia de Markov de tempo contínuo e usando técnicas de processo de ramificação é possível determinar as condições suficientes para que o rumor se extinga ou sobreviva com probabilidade positiva. Adaptamos essas técnicas para estudar uma variação do modelo-MT em \mathbb{T}_d , atribuindo uma probabilidade p a um propagador para transmitir o boato. Definimos um parâmetro crítico $p_c(d)$ em torno do qual o boato se extingue ou sobrevive com probabilidade positiva. Além disso, fornecemos uma aproximação para esse valor crítico.

Essa variação nos permitiu estender o modelo para árvores especiais. Consideramos os Hubs, que são indivíduos que têm um grande número de interações com outros indivíduos na população. O interesse em estudar esse modelo com o HUBS deve-se ao fato de que esse tipo de grafo aleatório é muito frequente em sistemas criados pelo homem e também na natureza. Exemplos desses sistemas são a Internet, a rede mundial de computadores, as redes de relacionamento e algumas redes sociais. Nesse contexto, nossos parâmetros de interesse são: h , α e \hat{p}_c , que representam, a distância entre dois HUBS, a probabilidade de transmissão de informações na direção de um Hub e a probabilidade de um Hub estar conectado a outro Hub, respectivamente. Definimos um parâmetro crítico do modelo como o valor crítico em torno do qual o boato se extingue ou sobrevive com probabilidade positiva. Por outro lado, fornecemos uma aproximação para esse valor crítico. Finalmente, apresentamos uma aplicação considerando $\alpha(k)$, em que $k = \log(d)$ é uma função que depende de d ; nesse caso, observamos que o boato sobrevive, sob uma condição em h . Também fornecemos uma aproximação para $\alpha(k)$.

Para trabalhos futuros, propõe-se o estudo de outros tipos de árvores, como as geradas pelo modelo Barabási-Albert. Neste estudo, observamos que há uma relação interessante na forma como esses tipos de árvores são gerados, pois também há poucos indivíduos com um grande número de conexões, enquanto a maioria dos indivíduos tem poucas conexões.

REFERÊNCIAS

- BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999.
- BELEN, S.; PEARCE, C. Rumours with general initial conditions. *The ANZIAM Journal*, Cambridge University Press, v. 45, n. 3, p. 393–400, 2004.
- CARNAL, H. Calcul des probabilités et modélisation. *Elemente der Mathematik*, v. 49, p. 166–173, 1994.
- COLETTI, C. F.; RODRÍGUEZ, P. M.; SCHINAZI, R. B. A spatial stochastic model for rumor transmission. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 147, p. 375–381, 2012.
- COMETS, F.; GALLESKO, C.; POPOV, S.; VACHKOVSKAIA, M. *Constrained information transmission on Erdős-Rényi graphs*. 2016.
- DALEY, D. J.; GANI, J. *Epidemic Modelling: An Introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Mathematical Biology).
- DALEY, D. J.; KENDALL, D. G. Stochastic rumours. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Oxford University Press, v. 1, n. 1, p. 42–55, 1965.
- JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M.; SPEROTO, A. The maki-thompson rumor model on infinite cayley trees. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 181, p. 1204–1217, 2020.
- JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M.; SPEROTO, A. Stochastic rumors on random trees. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2021, n. 12, p. 123403, 2021.
- KAWACHI, K. Deterministic models for rumor transmission. *Nonlinear analysis: Real world applications*, Elsevier, v. 9, n. 5, p. 1989–2028, 2008.
- LEBENSZTAYN, E. A large deviations principle for the maki-thompson rumour model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 432, n. 1, p. 142–155, 2015.
- LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F. P.; RODRÍGUEZ, P. M. Limit theorems for a general stochastic rumour model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 71, n. 4, p. 1476–1486, 2011.
- LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F. P.; RODRÍGUEZ, P. M. On the behaviour of a rumour process with random stifling. *Environmental Modelling & Software*, Elsevier, v. 26, n. 4, p. 517–522, 2011.
- LEFEVRE, C.; PICARD, P. Distribution of the final extent of a rumour process. *Journal of Applied Probability*, Cambridge University Press, v. 31, n. 1, p. 244–249, 1994.
- MAKI, D. P.; THOMPSON, M. *Mathematical models and applications* prentice-hall. *Englewood Cliffs (NJ)*, 1973.
- PEARCE, C. E. The exact solution of the general stochastic rumour. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 31, n. 10-12, p. 289–298, 2000.

PITTEL, B. On a daley-kendall model of random rumours. *Journal of Applied Probability*, Cambridge University Press, v. 27, n. 1, p. 14–27, 1990.

RODRIGUEZ, P. M. *Generalizações e teoremas limites para modelos estocásticos de rumores*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010.

SERRE, J.-P. *Trees*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.

SPEROTO, A. Resultados para o modelo de rumor de maki-thompson em árvores. Universidade Federal de São Carlos, 2021.

SUDBURY, A. The proportion of the population never hearing a rumour. *Journal of applied probability*, Cambridge University Press, v. 22, n. 2, p. 443–446, 1985.

WATSON, R. On the size of a rumour. *Stochastic Processes and their Applications*, v. 27, p. 141–149, 1987. ISSN 0304-4149.