UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JÚLIO CÉSAR SILVA ALEIXO

Dinâmica de Vórtices Pontuais em uma Região Planar com Fronteira Elítica

Recife

2023

JÚLIO CÉSAR SILVA ALEIXO

Dinâmica de Vórtices Pontuais em uma Região Planar com Fronteira Elítica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho

Recife

2023

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

A366d Aleixo, Júlio César Silva
Dinâmica de vórtices pontuais em uma região planar com fronteira elíptica / Júlio César Silva Aleixo. – 2023.
75 f.: il., fig.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Vórtices. I. Castilho, César Augusto Rodrigues (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-144

JÚLIO CÉSAR SILVA ALEIXO

Dinâmica de vórtices pontuais em uma região planar com fronteira elítica

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 28/07/2023

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Dr**.** César Augusto Rodrigues Castilho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr**.** Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr**.** Hildeberto Eulalio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr**.** Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

_____
Prof. Dr. Jair Koiller (Examinador Externo)
Universidade Federal de Juiz de Fora

A Deus e mãe

AGRADECIMENTOS

Há muitas pessoas para agradecer e espero não esquecer de nenhuma delas.

Primeiramente, agradeço à minha família, em especial, à minha mãe Andréia, pois, apesar de crescer sem a figura paterna, minha mãe me deu todo o suporte dentro das possibilidades e realidade para que eu pudesse chegar até aqui; aos meus avós Alcedo e Nazareth (in memoriam), por todo apoio, incentivo e esforço enquanto ainda vivos, para que eu pudesse realizar o grande sonho de concluir o doutorado.

Aos meus amigos por todo o suporte emocional principalmente nos momentos mais críticos se faziam presentes. A Josué (um irmão que a matemática me deu), por sempre se mostrar disponível a me ouvir, dar caminhos para enfrentar os problemas (não apenas no âmbito da matemática), criticar quando se faz necessário, muito obrigado, você é incrível. A Izabelly Cristina, uma grande amiga e parceira que o doutorado me proporcionou, nunca me identifiquei tanto com alguém como me identifico com ela, tenho um grande orgulho da nossa amizade que quebrou a barreira acadêmica passando para o lado pessoal e atualmente deixamos de ser colegas de doutorado e passamos a ser colegas de trabalho, são essas peças que a vida prega que me faz ficar encantado com o universo. A João Gondim (um outro irmão que a matemática me deu), por toda paciência para encarar meu pessimismo, por sempre acreditar em mim, principalmente em situações em que eu realmente não acreditava mais; pelos seus diálogos envolvidos por grandes ideias sobre a perspectiva na vida pós doutorado, sobre como encarar os momentos de frustrações que fazem parte da vida de um pesquisador, saiba que isso me fortaleceu bastante e hoje sou um pesquisador bem mais maduro devido às suas contribuições. Também aos meus amigos que deixaram o processo menos espinhoso. Jacqueline, Mirele, Micael, Geovani, Michele Gonzaga, Serginei, Karine, Islanita. Muito obrigado.

Também não poderia deixar de agradecer ao meu professor de graduação, Vicente Neto. São muitas, as coisas para agradecer. Primeiro, pela confiança e valentia de ter apostado as fichas em mim quando sequer tinha dois semestres completos de graduação, mas você já havia enxergado algum tipo de potencial em mim que foi suficiente para a conclusão deste doutorado. Obrigado por me dar a oportunidade de ser amigo de uma pessoa tão incrível e maravilhosa que é você, obrigado por me fazer conhecer o sentimento que é de ter um pai, pois em muitos momentos (quase sempre) é assim que me sinto com relação a você. Em suma, obrigado por tudo, principalmente pelo carinho, apoio e incentivo.

A todos os professores que me mostraram através de suas aulas que eu não estava no lugar errado, pois era assim que as vezes me sentia. Vicente Neto, Mardônio Amaral, Cícero José, Tony Sousa, Diego Souza, Eduardo Leandro (principalmente na disciplina de EDO do doutorado). De certa forma, essa conquista também é de vocês.

À Universidade Católica de Pernambuco, uma das grandes figuras responsáveis por essa conquista, inicialmente ali fui aluno da graduação e atualmente sou professor da mesma. Aos colegas de trabalho que sempre quando se fez necessário estavam dispostos a ajudar.

Aos meus alunos, em muitos momentos quando não tinha mais forças para continuar, seguia, pois, claramente vocês depositavam muita esperança e sempre se mostraram na torcida pelo meu sucesso, em especial, a famosa turma de matemática do "PRIL" .

Por fim, ao meu orientador César Castilho. Começo agradecendo por toda paciência (que não foi pouca) que teve, principalmente para que eu soubesse encarar os momentos de frustrações na pesquisa. Também agradeço pela pessoa humana que é, sem ele, provavelmente minha saúde mental não teria suportado todo o processo, o qual por si só já é bastante desafiador. Obrigado por acreditar em mim e me mostrar que realmente eu consigo fazer as coisas acontecerem.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de $N-$ vórtices pontuais em alguns domínios com fronteira, a saber, o círculo cuja fronteira é a circunferência centrada na origem e de raio 1, denotado por $\mathbb{D}^1$; e a região interna de uma elipse centrada na origem com semieixo maior $a = \cosh(c)$ e semieixo menor $b = \operatorname{senh}(c)$, onde $c > 0$; denotada por $\mathbb{E}^1$. Esse estudo é feito de forma numérica. Iniciamos o estudo apresentando o Hamiltoniano para a dinâmica de $N-$ vórtices em um domínio compacto e simplesmente conexo como descrito por (NEWTON, 2001). Para o caso do círculo, utilizamos a simetria para reduzir a dimensionalidade do sistema. Em coordenadas reduzidas, determinamos a estabilidade de um anel simétrico de vórtices iguais (de mesma vorticidade) em função do seu raio. Mostramos que para $N \geq 5$ temos a instabilidade. Por fim, utilizando a conjectura de Kimura (KIMURA, 1999) destacamos as diferenças e semelhanças na dinâmica de dois vórtices sob as hipóteses da conjectura, nos domínios $\mathbb{D}^1$ e $\mathbb{E}^1$.

Palavras-chaves: anel de vórtices; dinâmica de vórtices; conjectura de Kimura.

ABSTRACT

In this work, we study the dynamics of $N-$ point vortices in some boundary domains, namely, the circle whose boundary is the circumference centered at the origin and radius 1, denoted by $\mathbb{D}^1$; and the inner region of an ellipse centered at the origin with major semi axis $a = \cosh(c)$ and minor semi axis $b = \mathrm{senh}(c)$, where $c > 0$; denoted by $\mathbb{E}^1$. This study is done numerically. We begin the study by presenting the Hamiltonian for the dynamics of $N-$ vortices in a compact and simply connected domain as described by (NEWTON, 2001). For the case of the circle, we use symmetry to reduce the dimensionality of the system. In reduced coordinates, we determine the stability of a symmetrical ring with equal vortices (of the same vorticity) as a function of its radius. We show that for $N \geq 5$ we have instability. Finally, using Kimura's conjecture (KIMURA, 1999) we highlight the differences and similarities in the dynamics of two vortices under the hypotheses of the conjecture, in the domains $\mathbb{D}^1$ and $\mathbb{E}^1$

Keywords: vortex ring; vortex dynamics; Kimura's conjecture.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Algumas curvas de nível de H. 25
Figura 2 – Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ para alguns casos 26
Figura 3 – Trajetórias associadas para as condições iniciais $x_1 = -0.1$, $y_1 = 0.4$, $x_2 = 0.1$ e $y_2 = -0.4$; $C = 0$ e $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ 28
Figura 4 – Trajetórias associadas para as condições iniciais $u_1 = -1.57$ e $v_1 = 0.25$; $C = 0.05$ e $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ 29
Figura 5 – Trajetórias associadas para as condições iniciais $u_1 = -1.57$ e $v_1 = 0.25$; $C = 0$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2$ 29
Figura 6 – Estabilidade de anéis para alguns números de vórtices. 41
Figura 7 – Estabilidade de um anel com três vórtices 42
Figura 8 – Instabilidade de um anel com três vórtices 43
Figura 9 – Estabilidade de um anel com quatro vórtices 44
Figura 10 – Instabilidade de um anel com quatro vórtices 45
Figura 11 – Dois casos de trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$. 48
Figura 12 – Pontos de interseção das retas entre as trajetórias (antes das bifurcações) e a fronteira de $\mathbb{D}^1$ em vermelho para $t = 2$ e condição inicial $x_1(0) = -0.6$, $y_1(0) = 0.61$, $x_2(0) = -0.61$ e $y_1(0) = 0.61$. 48
Figura 13 – Arco (em verde) na fronteira de $\mathbb{D}^1$ com ponto inicial em $A = (1, 0)$ (em azul) e ponto final em $P_k = (C_{1k}, C_{2k})$ (em vermelho). 49
Figura 14 – Raios (em preto) passando pelos pontos de interseção entre a reta $y_k = m_k\, x + b_k$ e a fronteira de $\mathbb{D}^1$. 50
Figura 15 – Espaço de fases $s_k \times \theta_k$ para algumas trajetórias. 51
Figura 16 – Mapeamento da função $sen(z)$ 52
Figura 17 – Fonte: Mapemamento do mapa w_1 54
Figura 18 – Função elíptica de Jacobi sn 56
Figura 19 – Função sn 60
Figura 20 – Dois casos de trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$. 68
Figura 21 – Trajetórias de dois vórtices dipolos 69
Figura 22 – Comportamento das trajetórias de vórtices dipolos em $\mathbb{E}^1$. 70
Figura 23 – Seções de Poincaré 71

Figura 24 – Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ respeitando uma família de elipses confocais a $\mathbb{E}^1$. 72

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

2 A DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS EM DOMÍNIOS SIMPLESMENTE CONEXOS NO PLANO COMPLEXO 15

2.1 CONCEITOS E FATOS PRELIMINARES 15

2.2 A DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS FECHADOS SIMPLESMENTE CONEXOS VIA MAPAS CONFORMES 18

3 A DINÂMICA DE VÓRTICES EM $\mathbb{D}^1$ 22

3.1 A INTEGRABILIDADE PARA O CASO DE DOIS VÓRTICES EM $\mathbb{D}^1$ . . . 22

3.2 A ESTABILIDADE DE UM ANEL DE VÓRTICES EM $\mathbb{D}^1$ 30

4 A DINÂMICA DE UM DIPOLO SUFICIENTEMENTE PRÓXIMO PARA OS CASOS: CIRCULAR E ELÍPTICO 46

4.1 O CASO CIRCULAR 47

4.2 O MAPA CONFORME DE $\mathbb{E}^1$ EM $\mathbb{D}^1$ 51

4.3 O CASO ELÍPTICO 65

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 74

REFERÊNCIAS 75

1 INTRODUÇÃO

O estudo da dinâmica de vórtices pontuais que conhecemos nos dias de hoje teve início em 1867, quando se publicou (HELMHOLTZ, 1867). Nesse artigo, o autor não apenas estabelece a base para a teoria como também estuda o movimento de vórtices pontuais (embora a terminologia usada seja diferente da atual). Ainda sobre o artigo, o mesmo originou uma série de estudos sobre o movimento de vórtices, onde posteriormente, a dinâmica passa a ser descrita como um sistema Hamiltoniano por Kirchhoff em 1876 (KIRCHHOFF, 1876). Em 1883, com interesse em estudar e modelar a estrutura de um átomo, Thomson apresentou um trabalho (THOMSON, 1883) sobre o problema de $N-$ vórtices pontuais de mesma vorticidade Γ localizados nos vértices de um polígono regular de N lados. Chama-se a esta configuração de *anel de vórtices*. Em seu estudo, Thomson demonstrou que para $N \leq 6$ tal configuração é estável, enquanto que para $N = 7$, conclui equivocadamente a instabilidade. Para $N \geq 8$, Thomson conjecturou a instabilidade. Quase meia década depois, em 1931, Havelock (HAVELOCK, 1931) mostrou a veracidade da conjectura de Thomson. O problema da estabilidade do anel com 7 vórtices ficou conhecido como o problema do *heptágono de Thomson*. Mais tarde, em 1985, Dritschel (DRITSCHEL, 1985) resolveu em sua tese de doutorado, o problema do heptágono de Thomson, concluindo que tal configuração é neutramente estável. Posteriormente, em 1999, Cabral e Schmidt (CABRAL; SCHMIDT, 1999) demonstraram a estabilidade não linear para configurações poligonais no plano. Eles provaram que para $N \leq 7$, o anel de vórtices é estável (no sentindo não-linear), além disso, estudaram a estabilidade de uma comnfiguração poligonal de vórtices de mesma vorticidade $\Gamma = 1$, com um vórtice no centro do anel de vorticidade arbitrária K, determinando a faixa de estabilidade em função da vorticidade K, dada por

$$\begin{cases} (N^2 - 8N + 8)/16 < K < (N-1)^2/4 & \text{se } N \text{ é par,} \\ (N^2 - 8N + 7)/16 < K < (N-1)^2/4 & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Vale salientar que o estudo da dinâmica de $N-$ vórtices pontuais tem chamado a atenção de muitos pesquisadores de diversas áreas de conhecimento, devido a suas inúmeras aplicações na meteorologia, dinâmica em oceanos e na atmosfera terrestre.

Indicamos ao leitor a referência (AREF HESSAN NEWTON; VAINCHTEIN, 2002) caso tenha interesse num material completo sobre configurações relativas de vórtices.

Em 2003, Cabral e Boatto publicaram o trabalho (CABRAL; STEFANELLA, 2003), onde fazem uma análise de estabilidade para configurações poligonais de vórtices pontuais integráveis ($N = 3$) e não-integráveis ($3 < N \leq 7$) de mesma vorticidade Γ numa esfera. Eles introduzem um método alternativo ao apresentado nas referências (CABRAL; SCHMIDT, 1999), (POLZ, 2002) e (MARSDEN; PEKARSKY, 1998). Conhecido como o *teorema de Dirichlet*, o qual possibilitou uma análise completa da estabilidade linear e não linear no caso esférico. Além disso, pode ser generalizado para uma análise de estabilidade análoga para configurações de vórtices poligonais em outras geometrias, incluindo o caso planar previamente estudado em (CABRAL; SCHMIDT, 1999). Tal método, consiste em analisar os intervalos para os quais o Hessiano do Hamiltoniano calculado no ponto de equilíbrio é positivo ou negativo definido. O capítulo 2 desta tese se apoia fortemente nesse trabalho.

Em 1999, Kimura (KIMURA, 1999) obteve as equações de movimento (para o problema de dois vórtices) em superfícies com curvatura constante (incluindo o plano hiperbólico). Ele mostrou que no limite em que a distância mútua entre os dois vórtices tende a zero, em um dipolo, o centro de vorticidade move-se ao longo de uma geodésica dessas superfícies e conjecturou que tal fato permanece válido para uma superfície qualquer. Esse trabalho nos guiou para o desenvolvimento do capítulo 3.

Nesta tese, estudamos numericamente a dinâmica de $N-$ vórtices pontuais em uma região planar com fronteira elíptica, destacando alguns comportamentos por parte das trajetórias dos vórtices pontuais nesse tipo de domínio, tratando o círculo cuja circunferência possui raio igual a 1 e está centrada na origem como um caso a parte, uma vez que a família de elipses considerada aqui possui a parametrização

$$\frac{x^2}{\cosh^2(c)} + \frac{y^2}{\operatorname{senh}^2(c)} = 1, \text{ e } c > 0.$$

O texto está estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo, utilizamos a referência (NEWTON, 2001) para apresentar a principal ferramenta que nos permitirá estudar a dinâmica de $N-$ vórtices pontuais em domínios simplesmente conexos no plano complexo, que é o Hamiltoniano

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\left(\frac{||f'(z_j)||}{1-||f(z_j)||^2}\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k \log\left(\frac{||f(z_j)-f(z_k)||}{\left|\left|1-f(z_j)\overline{f(z_k)}\right|\right|}\right)\right],$$

onde f é um mapa conforme.

No capítulo 2, apoiado na referência (CABRAL; STEFANELLA, 2003), iremos analisar numericamente a região de estabilidade de um anel com $N-$ vórtices pontuais no círculo cuja circunferência possui raio igual a 1 e está centrada na origem, obtendo assim os resultados. Notamos que a estabilidade depende do raio do anel e do número de vórtices.

Por fim, no terceiro capítulo, através da conjectura de Kimura (KIMURA, 1999), obtemos os resultados. Nesse capítulo, nos preocupamos em destacar quais comportamentos da dinâmica de dois vórtices pontuais que ocorre no círculo cuja circunferência possui raio igual a 1 e está centrada na origem são preservados ao passarmos para o caso elíptico, onde a elipse é quase a circunferência já mencionada.

2 A DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS EM DOMÍNIOS SIMPLESMENTE CONEXOS NO PLANO COMPLEXO

Neste capítulo, iremos estudar a principal ferramenta que nos permite estudar a dinâmica de N vórtices pontuais em domínios simplesmente conexos no plano complexo de uma maneira geral. Introduziremos alguns conceitos básicos, tais como: *potencial complexo*, *velocidade complexa*, entre outros. Além disso, serão abordados alguns lemas preliminares para que o Hamiltoniano que descreve a dinâmica no contexto já mencionado seja determinado. A referência (NEWTON, 2001) é utilizada para o desenvolvimento deste capítulo.

2.1 CONCEITOS E FATOS PRELIMINARES

Definição 2.1.1. *Seja A uma região simplesmente conexa no plano complexo (podendo ser todo o plano). Uma função analítica*

$$\omega(z) = \phi(z) + i\psi(z), \text{ com } z = x + iy,$$

*definida em A, é chamada de **potencial complexo** para um fluxo em A. A parte real ϕ, é dita **potencial de velocidade**, enquanto a parte imaginária ψ, é dita a **função de fluxo**.*

Quando consideramos um número N de vórtices de vorticidades Γ_j, nos pontos $z_j = (x_j, y_j)(j = 1, 2, ..., N)$ num fluido incompressível movendo-se de forma irrotacional, numa região simplesmente conexa A, o movimento do fluido é dado através da função de fluxo ψ, que produz o movimento do j-ésimo vórtice, dado pelas equações:

$$\Gamma_j \dot{x}_j = \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \text{ e } \Gamma_j \dot{y}_j = -\frac{\partial \psi}{\partial x_j}; \ \ j = 1, 2, ...N. \tag{2.1}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias dado em (2.1) é um sistema **Hamiltoniano**, onde a função ψ é dita a **função Hamiltoniana** para o sistema (2.1). De agora em diante, utilizaremos a notação $\psi(x, y) := H(x, y)$.

Definição 2.1.2. *Dado um potencial complexo para o fluxo numa região simplesmente conexa A, temos o campo de vetores associado*

$$F = \nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) := (u, v).$$

A função

$$\omega'(z) = \phi'(z) - i\,\psi'(z)$$

é chamada de ***velocidade complexa****.*

Um fato importante é que se $F = (u, v)$ é um campo incompressível e irrotacional numa região simplesmente conexa A, então existe uma função analítica ω que será um potencial complexo associado ao campo F. Para maiores detalhes, ver (NEWTON, 2001).

Considere agora uma função analítica $\zeta = f(z)$ que mapeia o $(z = x + iy)$- plano no $(\zeta = \xi + i\eta)$- plano. Iremos denotar sua inversa por $z = f^{-1}(\zeta) := F(\zeta)$.

Dado um potencial complexo $\omega(z)$ para o $z-$ plano, para obter um potencial complexo para o $\zeta-$ plano, basta compor o potencial complexo $\omega(z)$ com o mapa analítico inverso $F(\zeta)$, obtendo

$$\omega(z) = \omega(F(\zeta)) := \Omega(\zeta) = \Phi(\zeta) + i\Psi(\zeta). \tag{2.2}$$

Proposição 2.1.1. *Dado um fluxo no $z-$plano gerado por um vórtice pontual de intensidade Γ localizado em $z = z_0$, o fluxo correspondente no $\zeta-$plano é dado através do mapa conforme $F(\zeta)$, e é gerado pelo vórtice pontual imagem localizado em $\zeta = \zeta_0 = f(z_0)$, de intensidade também igual a Γ.*

Demonstração. É conhecido da literatura (ver (NEWTON, 2001)) que o potencial complexo para fluxos gerado por um vórtice pontual no $z-$ plano em $z = z_0$ é dado por

$$\omega(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z - z_0).$$

Assim, o potencial complexo transformado para o fluxo no $\zeta-$ plano via o mapa analítico $F(\zeta)$, é dado por

$$\omega\left(F(\zeta)\right) := W(\zeta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left[F(\zeta) - F(\zeta_0)\right].$$

Uma vez que F é analítico, podemos numa vizinhança de ζ_0 escrever F como sua expansão em série de Taylor, obtendo assim

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left[F(\zeta_0)+F'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)-F(\zeta_0)\right]. \\ &= -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left[F'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)\right] \\ &= -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(\zeta-\zeta_0)-\frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left[F'(\zeta_0)\right] \\ &\approx -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(\zeta-\zeta_0). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.2. ***(Regra de Routh):*** *A velocidade complexa no vórtice localizado em* $z = z_0$ *é dada por*

$$\frac{d\omega}{dz}(z_0) = \frac{dW}{d\zeta}(\zeta_0)\cdot\frac{d\zeta}{dz}(z_0) - \frac{i\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}, \tag{2.3}$$

com $\zeta_0 = f(z_0)$.

Demonstração. Seja $\omega_{z_0}(z)$ o potencial complexo no $z-$ plano, exceto para z_0 e $W_{\zeta_0}(\zeta)$ o potencial complexo correspondente no ζ-plano. Observe que

$$\begin{aligned} \omega_{z_0}(z) = \omega(z) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z-z_0) &= \omega\left(F(\zeta)\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left[F(\zeta)-F(\zeta_0)\right] \\ &= W(\zeta) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(\zeta-\zeta_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

A equação (2.4) foi obtida utilizando a proposição 2.1.1.

Utilizando (2.4), tem-se

$$\begin{aligned} \omega(z) &= W(\zeta) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(\zeta-\zeta_0) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z-z_0) \\ &= W(\zeta) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Lembrando que $\zeta = f(z)$, e que f mapeia o $(z = x+iy)$- plano no $(\zeta = \xi+i\eta)$- plano, para uma vizinhança de z_0, escrevemos

$$\begin{aligned} \zeta = f(z) &= f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) + O(z-z_0)^3 \\ \implies \frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0} &= f'(z_0) + \frac{1}{2}(z-z_0)f''(z_0) + O(z-z_0)^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Utilizando a equação (2.6) na equação (2.5), obtemos

$$\omega(z) = W(\zeta) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log\left[f'(z_0) + \frac{1}{2}(z-z_0)f''(z_0) + O(z-z_0)^2\right]. \tag{2.7}$$

Através de (2.7), iremos determinar a velocidade complexa no vórtice localizado em $z = z_0$, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dz}(z) &= \frac{dW}{d\zeta}(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{dz}(z) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}f''(z_0) + O(z-z_0)}{f'(z_0) + \frac{1}{2}(z-z_0)f''(z_0) + O(z-z_0)^2}\right) \\
&= \frac{dW}{d\zeta}(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{dz}(z) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}f''(z_0) + O(z-z_0)}{f'(z_0) + O(z-z_0)}\right) \\
&= \frac{dW}{d\zeta}(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{dz}(z) - \frac{i\Gamma}{4\pi}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0) + O(z-z_0)} + \frac{O(z-z_0)}{f'(z_0) + O(z-z_0)}\right) \\
&= \frac{dW}{d\zeta}(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{dz}(z) - \frac{i\Gamma}{4\pi}\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} + O(z-z_0).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Em (2.8), fazendo $z \to z_0$ e $\zeta \to \zeta_0$, obtemos o resultado desejado. □

2.2 A DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS FECHADOS SIMPLESMENTE CONEXOS VIA MAPAS CONFORMES

Perceba que através da proposição 2.1.2 tem-se

$$\omega(z_0) = W(\zeta_0) - \frac{i\Gamma}{4\pi}\log\left(f'(z_0)\right), \text{ onde } \zeta_0 = f(z_0),$$

ou ainda,

$$\omega(z_0) = W(\zeta_0) - \frac{i\Gamma}{4\pi}\left[\log||f'(z_0)|| + i\arg(z_0)\right], \text{ com } \zeta_0 = f(z_0). \tag{2.9}$$

Uma vez que estamos interessados no movimento do vórtice no $z-$ plano localizado em $z_0 = (x_0, y_0)$, e lembrando que o Hamiltoniano é a parte imaginária do potencial complexo $w(z)$, de (2.9), temos a seguinte relação entre o Hamiltoniano do $z-$ plano e o Hamiltoniano do $\zeta-$ plano:

$$H(x_0, y_0) = \mathcal{H}(\zeta_0) - \frac{\Gamma}{4\pi}\log||f'(z_0)||. \tag{2.10}$$

Sabemos do **Teorema da Aplicação de Riemann** que qualquer região fechada e simplesmente conexa do $z-$ plano pode ser mapeada conformemente no interior do círculo unitário centrado na origem (o qual denotaremos por $\mathbb{D}^1$) do ζ- plano, via um mapa conforme f.

Lema 2.2.1. *Sejam A um domínio fechado e simplesmente conexo e $f : A \longrightarrow \mathbb{D}^1$ um mapa conforme. O Hamiltoniano H_{z_0} que governa o movimento de um vórtice localizado em $z_0 = (x_0, y_0)$ dentro de A é dado por*

$$H_{z_0}(x_0, y_0) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{||f'(z_0)||}{1 - ||f(z_0)||^2} \right).$$

Demonstração. Através da equação (2.10), temos a relação entre os Hamiltonianos do domínio A e $\mathbb{D}^1$:

$$H(x_0, y_0) = \mathcal{H}(\xi_0, \eta_0) - \frac{\Gamma}{4\pi} \log ||f'(z_0)||, \tag{2.11}$$

onde $\xi_0 = \xi(x_0, y_0)$ e $\eta_0 = \eta(x_0, y_0)$.

Mas, o Hamiltoniano que governa o movimento de um vórtice em $\mathbb{D}^1$, é bastante conhecido e dado via o método das imagens (ver (NEWTON, 2001)) por:

$$\mathcal{H}(\xi_0, \eta_0) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{1}{\left|\left|\zeta_0 \overline{\zeta_0} - 1\right|\right|} \right), \tag{2.12}$$

onde $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$.

Sendo $\zeta_0 = f(z_0)$ e substituindo (2.12) em (2.11), temos

$$\begin{aligned}
H(x_0, y_0) &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{1}{\left|\left|\zeta_0 \overline{\zeta_0} - 1\right|\right|} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi} \log ||f'(z_0)|| \\
&= -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{1}{\left|\left||\zeta_0||^2 - 1\right|\right|} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi} \log ||f'(z_0)|| \\
&= -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{1}{\left|\left||f(z_0)||^2 - 1\right|\right|} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi} \log ||f'(z_0)|| \\
&= -\frac{\Gamma}{4\pi} \left[\log \left(\frac{1}{\left|\left||f(z_0)||^2 - 1\right|\right|} \right) + \log ||f'(z_0)|| \right] \\
&= -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{||f'(z_0)||}{1 - ||f(z_0)||^2} \right)
\end{aligned}$$

□

Agora, passemos à versão mais geral do último lema, ou seja, para o caso em que se queira estudar a dinâmica de N vórtices num domínio fechado e simplesmente conexo A. Isto será dado através do seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. ***(Versão generalizada)*** *Seja $\zeta = f(z)$ um mapa conforme de um domínio fechado e simplesmente conexo A no $z-$ plano para o círculo unitário centrado na origem no $\zeta-$ plano, então o Hamiltoniano que governa o movimento de N vórtices pontuais de vorticidades Γ_j é dado por*

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\left(\frac{||f'(z_j)||}{1-||f(z_j)||^2}\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k \log\left(\frac{||f(z_j)-f(z_k)||}{\left|\left|1-f(z_j)\overline{f(z_k)}\right|\right|}\right)\right].$$

Demonstração. A ideia para demonstrar o teorema, é manter a estrutura da equação (2.11) do lema 2.2.1, só que para o caso de $N-$ vórtices pontuais. O Hamiltoniano para $N-$ vórtices pontuais em $\mathbb{D}^1$ é dado por (ver (NEWTON, 2001))

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\left(1-||\zeta_j||^2\right) + \frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k \log\left(1+\frac{(1-||\zeta_j||^2)\ (1-||\zeta_k||^2)}{||\zeta_j-\zeta_k||^2}\right). \tag{2.13}$$

Uma vez que $\zeta_j = f(z_j)$, $\forall j = 1, 2, ..., N$; podemos reescrever (2.13) da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\left(1-||f(z_j)||^2\right) + \frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k \log\left(1+\frac{(1-||f(z_j)||^2)\ (1-||f(z_k)||^2)}{||f(z_j)-f(z_k)||^2}\right). \tag{2.14}$$

A equação (2.11) para o caso de $N-$ vórtices pontuais, é dada por

$$H = \mathcal{H} - \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log||f'(z_j)||. \tag{2.15}$$

Substituindo (2.14) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\left(1-||f(z_j)||^2\right) + \frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k \log\left(1+\frac{(1-||f(z_j)||^2)\ (1-||f(z_k)||^2)}{||f(z_j)-f(z_k)||^2}\right) \\ &- \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log||f'(z_j)||. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para alcançar de fato a demonstração desse resultado, iremos desenvolver o logaritmo do segundo termo do Hamiltoniano dado em (2.16).

$$\begin{aligned} F &= \log\left(1+\frac{(1-||f(z_j)||^2)\ (1-||f(z_k)||^2)}{||f(z_j)-f(z_k)||^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{||f(z_j)-f(z_k)||^2+(1-||f(z_j)||^2)\ (1-||f(z_k)||^2)}{||f(z_j)-f(z_k)||^2}\right) \\ &= \log\left(||f(z_j)-f(z_k)||^2+\left(1-||f(z_j)||^2\right)\ \left(1-||f(z_k)||^2\right)\right)-\log||f(z_j)-f(z_k)||^2. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} G &= ||f(z_j)-f(z_k)||^2+\left(1-||f(z_j)||^2\right)\ \left(1-||f(z_k)||^2\right) \\ &= (f(z_j)-f(z_k))\ \left(\overline{f(z_j)}-\overline{f(z_k)}\right)+1-f(z_k)\,\overline{f(z_k)}-f(z_j)\,\overline{f(z_j)}+||f(z_j)\,f(z_k)||^2 \\ &= 1-f(z_j)\,\overline{f(z_k)}-f(z_k)\,\overline{f(z_j)}+||f(z_j)\,f(z_k)||^2 \\ &= ||1-f(z_j)\,\overline{f(z_k)}||^2. \end{aligned}$$

Com isso, a expressão F é dada por

$$F=\log||1-f(z_j)\,\overline{f(z_k)}||^2-\log||f(z_j)-f(z_k)||^2. \tag{2.17}$$

Assim, substituindo (2.17) em (2.16), tem-se

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2\log\left(1-||f(z_j)||^2\right)+\frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k\left(\log||1-f(z_j)\,\overline{f(z_k)}||^2-\log||f(z_j)-f(z_k)||^2\right) \\ &- \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2\log||f'(z_j)||. \end{aligned} \tag{2.18}$$

A equação (2.18) ainda por sua vez, pode reescrita da seguinte forma

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2\log\left(\frac{||f'(z_j)||}{1-||f(z_j)||^2}\right)+\frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k\log(\left(\frac{||1-f(z_j)\,\overline{f(z_k)}||^2}{||f(z_j)-f(z_k)||^2}\right).$$

E com isso reescrevemos a última equação, nos dando

$$H=-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2\log\left(\frac{||f'(z_j)||}{1-||f(z_j)||^2}\right)-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k\log\left(\frac{||f(z_j)-f(z_k)||}{\left||1-f(z_j)\overline{f(z_k)}\right||}\right),$$

concluindo assim, a demonstração do teorema. □

3 A DINÂMICA DE VÓRTICES EM $\mathbb{D}^1$

Iniciaremos o capítulo verificando a integrabilidade para o caso de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$. Para isso, iremos utilizar o último teorema do capítulo 1 para reescrevermos o Hamiltoniano para o caso do domínio $\mathbb{D}^1$ de uma forma conveniente, que nos permita introduzir coordenadas polares, proporcionando uma redução na dimensionalidade do sistema das equações de movimento. Por conseguinte, iremos exibir algumas curvas de nível desse Hamiltoniano nas novas coordenadas , com o auxílio do software MATLAB.

Num segundo momento, iremos analisar numericamente a região de estabilidade para um anel com $N-$ vórtices em $\mathbb{D}^1$, onde cada vórtice possui uma mesma vorticidade Γ. Esse estudo é baseado na referência (CABRAL; STEFANELLA, 2003). A ferramenta utilizada para esta abordagem é o estudo do sinal dos autovalores associados à matriz Hessiana da função Hamiltoniana do sistema. Feito isto, utilizamos a implementação criada por (ASHBEE, 2023) (adaptada ao nosso problema) para verificar a veracidade do nosso resultado sobre a estabilidade, através de alguns exemplos.

3.1 A INTEGRABILIDADE PARA O CASO DE DOIS VÓRTICES EM $\mathbb{D}^1$

O nosso ponto de partida será o seguinte lema

Lema 3.1.1. *A dinâmica de $N-$ vórtices em $\mathbb{D}^1$ é dada através do Hamiltoniano*

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\left(\frac{1}{1-||z_j||^2}\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N}\Gamma_j\Gamma_k \log\left(\frac{||z_j - z_k||}{||1 - z_j\overline{z_k}||}\right)\right].$$

Demonstração. Lembremos que toda região fechada e simplesmente conexa pode ser mapeada em $\mathbb{D}^1$ via um mapa conforme, o que é garantido pelo Teorema da Aplicação de Riemann. Mais ainda, o mapa é único para cada região fechada e simplesmente conexa. Ora, se a região é o próprio $\mathbb{D}^1$, da unicidade do Teorema da Aplicação de Riemann, só nos resta como possibilidade para um mapa que leva $\mathbb{D}^1$ em $\mathbb{D}^1$ de maneira conforme, o mapa identidade. Com isso, levando em consideração o último mapa e aplicando o Teorema 2.2.1, obtemos o lema desejado. □

Para esta seção, iremos utilizar a versão do Hamiltoniano dado no lema anterior, para dois vórtices, nesse caso, a expressão torna-se

$$H = \frac{1}{4\pi}\left[\Gamma_1^2 \log\left(1-||z_1||^2\right) + \Gamma_2^2 \log\left(1-||z_2||^2\right) + \Gamma_1\Gamma_2 \log\left(\frac{||1-z_2\overline{z_1}||^2}{||z_1-z_2||^2}\right)\right], \quad (3.1)$$

onde $\Gamma_1 = -\Gamma_2$.

Considerando $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, com $x_1 = \sqrt{2}\, r_1\, \cos(\theta_1)$, $x_2 = \sqrt{2}\, r_2\, \cos(\theta_2)$, $y_1 = \sqrt{2}\, r_1\, sen(\theta_1)$ e $y_2 = \sqrt{2}\, r_2\, sen(\theta_2)$ onde $0 \leq r_1, r_2 < 1$ e $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$, temos que o Hamiltoniano pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi}\left[\Gamma_1^2 \log\left(1-2r_1^2\right) + \Gamma_2^2 \log\left(1-2r_2^2\right) + \Gamma_1\Gamma_2 \log\left(1-4r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+4r_1^2r_2^2\right)\right. \\ &- \left.\Gamma_1\Gamma_2 \log\left(2r_1^2+2r_2^2-4r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

A fim de reduzir a dimensionalidade do sistema de equações de movimento em que originalmente teria quatro equações, iremos introduzir uma nova mudança de coordenadas, dada por

$$\theta_1 = u_1 + u_2;\ \theta_2 = u_2 - u_1;\ \frac{r_1^2}{2} = \frac{v_1+v_2}{2\,\Gamma_1} \text{ e } \frac{r_2^2}{2} = \frac{v_1-v_2}{2\,\Gamma_2}. \quad (3.3)$$

Perceba que com a última transformação de coordenadas, a 2-forma simplética continua sendo preservada. De fato,

$$\begin{aligned} \omega &= d\left(\frac{r_1^2}{2}\right) \wedge d\theta_1 - d\left(\frac{r_2^2}{2}\right) \wedge d\theta_2 \\ &= d\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) \wedge d(u_1+u_2) - d\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right) \wedge d(u_2-u_1) \\ &= \frac{1}{2}\left[dv_1 \wedge du_1 + dv_1 \wedge du_2 + dv_2 \wedge du_1 + dv_2 \wedge du_2\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[-dv_1 \wedge du_2 + dv_1 \wedge du_1 + dv_2 \wedge du_2 - dv_2 \wedge du_1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(2dv_1 \wedge du_1 + 2dv_2 \wedge du_2\right) \\ &= dv_1 \wedge du_1 + dv_2 \wedge du_2. \end{aligned}$$

Considerando a transformação de coordenadas dada em (3.3), o Hamiltoniano dado em (3.2) é reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi}\left[\Gamma_1^2 \log\left(1-2\,\frac{v_1-v_2}{\Gamma_1}\right)+\Gamma_2^2 \log\left(1+2\,\left(\frac{-v_1+v_2}{\Gamma_2}\right)\right)\right. \\ &+ \Gamma_1\Gamma_2 \log\left(1-4\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{\Gamma_1\,\Gamma_2}}\cos(2u_1)+4\,\frac{v_1^2-v_2^2}{\Gamma_1\,\Gamma_2}\right) \\ &- \left.\Gamma_1\Gamma_2 \log\left(4v_1-4\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{\Gamma_1\,\Gamma_2}}\cos(2u_1)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Utilizando as equações de movimento nas novas coordenadas,

$$\Gamma_1\dot{v}_1=\frac{\partial H}{\partial u_1},\ \Gamma_1\dot{u}_1=-\frac{\partial H}{\partial v_1},\ \Gamma_2\dot{v}_2=\frac{\partial H}{\partial u_2},\ \text{e}\ \Gamma_2\dot{u}_2=-\frac{\partial H}{\partial v_2}.$$

Note que, o Hamiltoniano dado em (3.4), não depende da variável u_2, consequentemente, temos que

$$\Gamma_2\dot{v}_2=\frac{\partial H}{\partial u_2}=0\Rightarrow v_2=C, \tag{3.5}$$

onde C é uma constante.

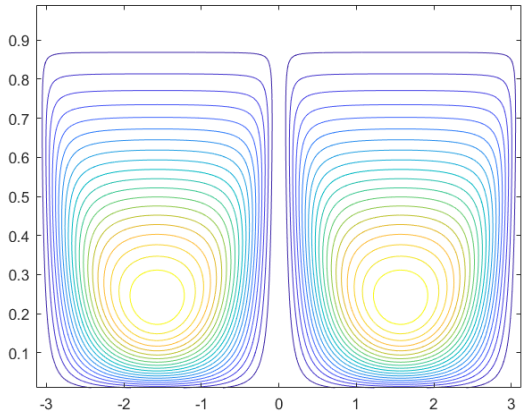
A equação (3.5) nos diz que $v_2=\dfrac{\Gamma_1\,r_1^2-\Gamma_2\,r_2^2}{2}$ é uma integral primeira, como a função H já é também uma integral primeira, temos originalmente um sistema Hamiltoniano com quatro equações e duas integrais primeiras, logo, o sistema para o caso de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ é integrável.

Com isso, temos que H depende apenas das variáveis u_1 e v_1, passando assim a termos um sistema de equações de movimento para duas dimensões

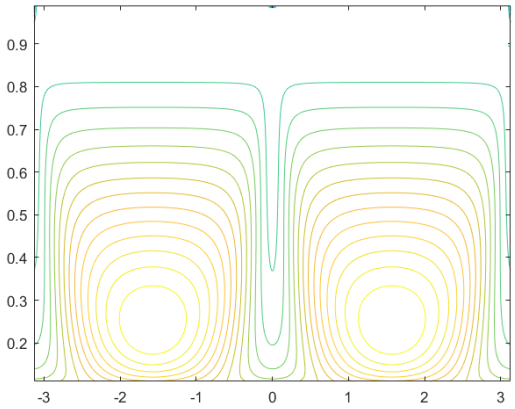
$$H\equiv H(u_1,v_1,C).$$

Considerando $\Gamma_1=\Gamma_2=1$, exibiremos a seguir, algumas curvas de nível para alguns valores de C da função dada em (3.4), a fim de entender o comportamento das trajetórias de dois vórtices no domínio $\mathbb{D}^1$.

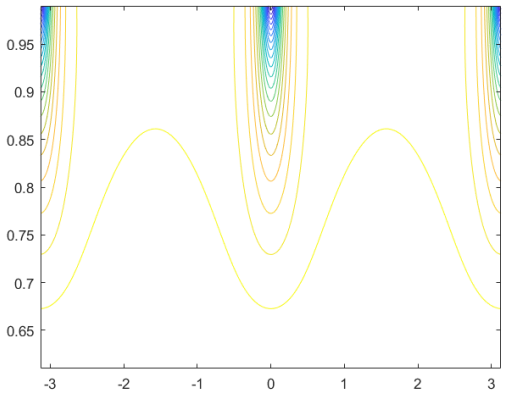
Figura 1 – Algumas curvas de nível de H.



(a) Curvas de Nível de $H(u_1, v_1, C)$ para $C = 0$.



(b) Curvas de Nível de $H(u_1, v_1, C)$ para $C = 0.1$.



(c) Curvas de Nível de $H(u_1, v_1, C)$ para $C = 0.6$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que para $C = 0$, no caso em que $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, tem-se $r_1 = r_2$, uma vez que $r_1, r_2 \geq 0$. Isto significa que os vórtices $z_1 = \sqrt{2} r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \sqrt{2} r_2 e^{i\theta_2}$ estão numa mesma circunferência centrada na origem de raio $r = r_1 = r_2$ (esse caso tem relação com o estudo que será feito na próxima seção). A fim de exibir algumas trajetórias associadas a esse caso (e também para outros em que $C \neq 0$) de curvas de nível, serão apresentadas as equações de movimento para dois vórtices pontuais em $\mathbb{D}^1$ associadas ao Hamiltoniano dado em (3.1), as quais são dadas por

$$\dot{x_1} = -\frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_1\,y_1}{1-x_1^2-y_1^2} + \Gamma_2\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,y_2 + (x_1y_2-y_1x_2)\,x_2}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} + \frac{\Gamma_2\,(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

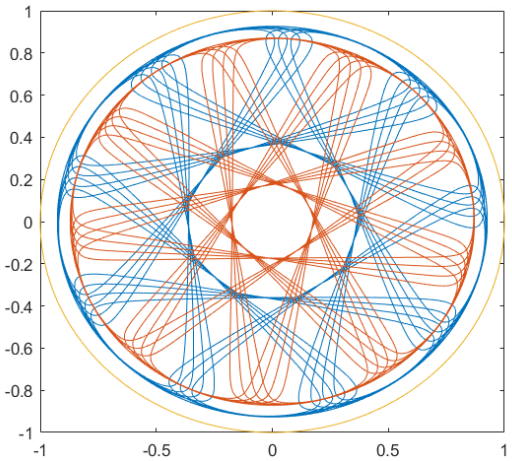
$$\dot{y_1} = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_1\,x_1}{1-x_1^2-y_1^2} + \Gamma_2\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,x_2 - (x_1y_2-y_1x_2)\,y_2}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} + \frac{\Gamma_2\,(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_2\,y_2}{1-x_2^2-y_2^2} + \Gamma_1\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,y_1 - (x_1y_2-y_1x_2)\,x_1}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} - \frac{\Gamma_1\,(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

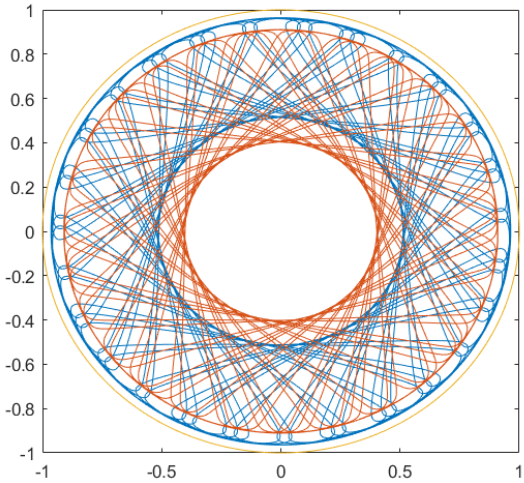
$$\dot{y_2} = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_2\,x_2}{1-x_2^2-y_2^2} + \Gamma_1\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,x_1 + (x_1y_2-y_1x_2)\,y_1}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} - \frac{\Gamma_1\,(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

Uma vez obtidas as equações de movimento, utilizamos o método de **Runge-Kutta** no software MATLAB para simular algumas trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ para o último caso descrito no último parágrafo.

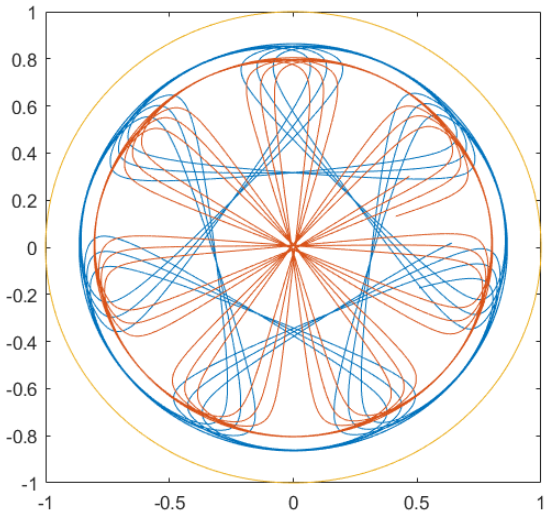
Figura 2 – Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ para alguns casos



(a) Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ associadas às curvas de nível de $H(u_1, v_1, C)$ para $C = 0.1$, com condição inicial $u_1 = -0.27$, $v_1 = 0.08$ e energia $E_0 = 0.0264795$.



(b) Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ associadas às curvas de nível de $H(u_1, v_1, C)$ para $C = 0.6$, com condição inicial $u_1 = -1.61$, $v_1 = 0.88$ e energia $E_0 = 0.0093$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos fazer algumas observações sobre alguns comportamentos das trajetórias:

- Na figura 2-a), as trajetórias foram simuladas no integrador por um tempo $t = 200$ e com passo $h = 0.01$. Percebe-se que as órbitas não ultrapassam um disco de raio $r = 0.8062$ nesse período de tempo, em $\mathbb{D}^1$. Além disso, notamos a presença de uma cáustica circular de raio $\tilde{r} = 0.1655$.

- Já na figura 2-b), as trajetórias foram simuladas no integrador por um tempo $t = 250$ e com passo $h = 0.01$. Percebemos que apesar das órbitas ocuparem uma região maior em $\mathbb{D}^1$ com relação as trajetórias da figura 2-a), as mesmas não ultrapassam um disco de raio $r = 0.9560$ nesse período de tempo, em $\mathbb{D}^1$. Além disso, notamos a presença de uma cáustica circular de raio $\tilde{r} = 0.3936$.

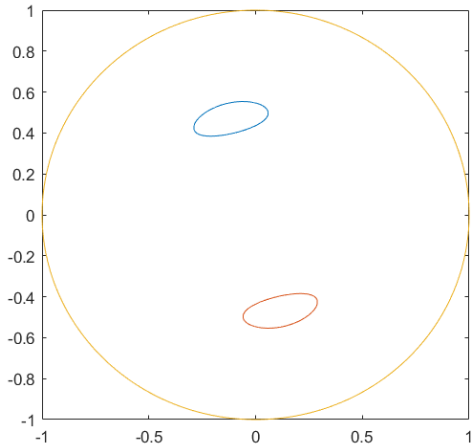
- Por último, na figura 2-c), as trajetórias foram simuladas no integrador por um tempo $t = 200$ e com passo $h = 0.01$. Percebe-se que as órbitas não ultrapassam um disco de raio $r = 0.7751$ nesse período de tempo, em $\mathbb{D}^1$. Apesar de aparentemente não termos uma cáustica, porém quase que de maneira imperceptível, existe uma cáustica circular para esse caso onde determinamos numericamente seu raio, o qual é dado por $\tilde{r} = 0.0058$.

- De uma maneira geral, percebemos mediante várias simulações que a medida que u_1 se aproxima de 0 pela esquerda o raio da cáustica circular vai diminuindo, a figura 2 ilustra

esse fato, tal comportamento não é identificado quando fazemos u_1 se aproximar de 0 pela direita.

Considerando o caso em que $C = 0$ e as vorticidades são tais que $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, temos a existência de um ponto de equilíbrio para o sistema. Nas variáveis originais, tal ponto é dado por $x_1 = -0.1$, $y_1 = 0.4$, $x_2 = 0.1$ e $y_2 = -0.4$.

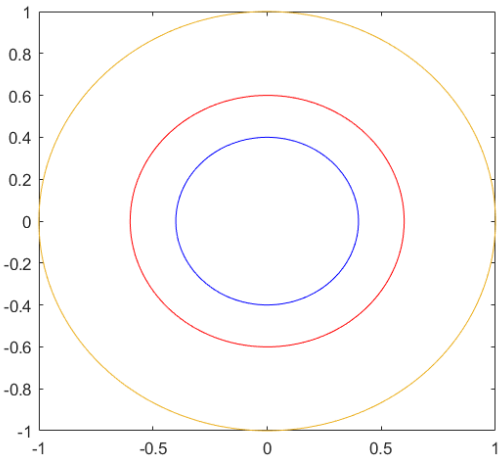
Figura 3 – Trajetórias associadas para as condições iniciais $x_1 = -0.1$, $y_1 = 0.4$, $x_2 = 0.1$ e $y_2 = -0.4$; $C = 0$ e $\Gamma_1 = -\Gamma_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $C = 0.05$, sob as condições $u_1 = -1.57$ e $v_1 = 0.25$; e de vorticidades de forma que $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, temos que as trajetórias são dadas por circunferências concêntricas de raios $r_1 = 0.4$ e $r_2 = 0.6$. Verificamos que os vórtices giram com a mesma velocidade angular, porém, com sentidos opostos, obtendo assim que os centros são pontos de equilíbrio relativo.

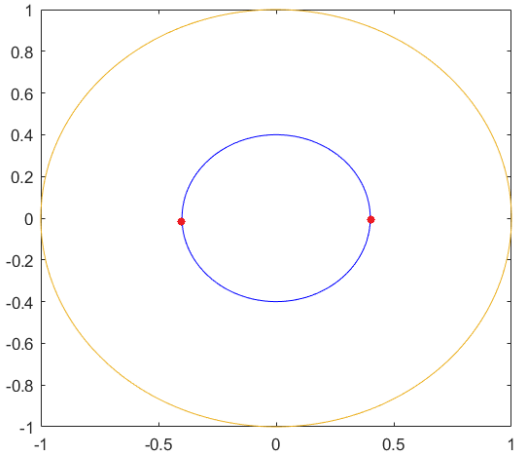
Figura 4 – Trajetórias associadas para as condições iniciais $u_1 = -1.57$ e $v_1 = 0.25$; $C = 0.05$ e $\Gamma_1 = -\Gamma_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente para o caso em que $C = 0$, temos um comportamento bastante interessante por parte das trajetórias de dois vórtices ao tomarmos $u_1 = -1.57$ e $v_1 = 0.25$. Isto nos dá o caso de uma anel com dois vórtices localizados em $z_1 = r_1 e^{i \cdot 0}$ e $z_2 = r_2 e^{i\,\pi}$, com $r_1 = r_2$. Se as vorticidades são iguais, ou seja, se $\Gamma_1 = \Gamma_2$, tem-se como solução das equações de movimento (nas variáveis originais), uma única circunferência concêntrica à $\mathbb{D}^1$ de raio $r_1 = 0.4$ (Lembre que para $C = 0$, temos $r_1 = r_2$). Isto foi a motivação para o estudo realizado na próxima seção.

Figura 5 – Trajetórias associadas para as condições iniciais $u_1 = -1.57$ e $v_1 = 0.25$; $C = 0$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 A ESTABILIDADE DE UM ANEL DE VÓRTICES EM $\mathbb{D}^1$

Como já dito no estudo feito na última parte da seção (3.1), o mesmo nos motivou a desenvolver os resultados obtidos nesta seção.

Utilizando a mudança de coordenadas $z_k = \sqrt{2} r_k\, e^{i\,\theta_k}$, onde $k = 1, 2, ..., N$, o Hamiltoniano dado em (3.2) é na sua forma geral

$$H = \frac{1}{4\,\pi}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k^2\,\log\left(1-2r_k^2\right) + \frac{1}{4\,\pi}\sum_{k<j}^{N}\Gamma_k\,\Gamma_j\,\log\left(1+\frac{(1-2r_k^2)\,(1-2r_j^2)}{2r_k^2+2r_j^2-4\,r_k\,r_j\cos(\theta_k-\theta_j)}\right), \tag{3.6}$$

e a N-forma simplética dada por

$$w = \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\,r_k\,dr_k\wedge\ d\theta_k.$$

As equações de movimento nas variáveis r_l e θ_l são dadas por

$$\dot{r_l} = \frac{1}{\Gamma_l\,r_l}\,\frac{\partial H}{\partial\theta_l}\ \text{ e }\ \dot{\theta_l} = -\frac{1}{\Gamma_l\,r_l}\,\frac{\partial H}{\partial r_l}. \tag{3.7}$$

De forma explícita,

$$\begin{aligned}\dot{r_l} &= \frac{1}{\Gamma_l\,r_l}\,\frac{\partial H}{\partial\theta_l} = \frac{1}{4\,\pi\,\Gamma_l\,r_l}\frac{\partial}{\partial\theta_l}\sum_{k<j}^{N}\Gamma_k\,\Gamma_j\,\log\left(1+\frac{(1-2r_k^2)\,(1-2r_j^2)}{2r_k^2+2r_j^2-4\,r_k\,r_j\cos(\theta_k-\theta_j)}\right)\\ &= \frac{1}{4\,\pi\,r_l}{\sum_{k}^{N}}'\,\Gamma_k\,\left(-\frac{4\,r_k\,r_l\sin(\theta_{kl})}{2r_k^2+2r_l^2+(1-2r_k^2)\,(1-2r_l^2)-4\,r_k\,r_l\cos(\theta_{kl})}\right)\\ &+ \frac{1}{4\,\pi\,\Gamma_l\,r_l}\left(\frac{4\,r_k\,r_l\sin(\theta_{kl})}{2r_k^2+2r_l^2-4\,r_k\,r_l\cos(\theta_{kl})}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

E,

$$\begin{aligned}\dot{\theta_l} = \frac{\Gamma_l}{2\,\pi}\,\frac{1}{(1-2r_l^2)} - \frac{1}{2\,\pi\,r_l}{\sum_{k}^{N}}'\,\Gamma_k\,\left(\frac{r_l-r_k\cos(\theta_k-\theta_l)-r_l\,(1-2r_k^2)}{2r_k^2+2r_l^2-4\,r_l\,r_k\cos(\theta_k-\theta_l)+(1-2r_k^2)\,(1-2r_l^2)}\right)\\ +\frac{1}{2\,\pi\,r_l}{\sum_{k}^{N}}'\,\Gamma_k\,\left(\frac{r_l-r_k\cos(\theta_k-\theta_l)}{2r_k^2+2r_l^2-2\,r_l\,r_k\cos(\theta_k-\theta_l)}\right)\end{aligned} \tag{3.9}$$

Definição 3.2.1. *Dados $N-$ vórtices pontuais $z_k = r_k\,e^{i\,\theta_k}$, onde $k = 1, 2, ..., N$, chamamos de* ***anel de vórtices****, quando para cada k, tivermos*

$$\Gamma_k = \Gamma,\ r_k(t) = \rho \ \textit{e}\ \theta_k = \Omega\, t + \frac{2\,(k-1)\,\pi}{N},\ \ \textit{com}\ 0 < \rho < 1.$$

Lema 3.2.1. *O anel de vórtices é uma solução para as equações de movimento dadas em*

Demonstração. Calculando $\dot{r_l}$ ao longo do anel de vórtices temos

$$\dot{r_l} = \frac{\rho\,\Gamma}{2\,\pi}{\sum_{k}^{N}}' \left(-\frac{sen(\theta_{kl})}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos(\theta_{kl})} + \frac{1}{2\,\rho^2}\,\frac{sen(\theta_{kl})}{(1-\cos(\theta_{kl}))} \right). \tag{3.10}$$

Considere as igualdades (para maiores detalhes ver (AREF HESSAN NEWTON; VAINCHTEIN, 2002))

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - z\, e^{\frac{2\,\pi\,i\,k}{N}}\right)^{-1} = \frac{N}{1-z^N}\ \ ,\ \ z \in \mathbb{C}\ \ ,\ \ z^n \neq 1\,. \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - e^{\frac{2\,\pi\,i\,k}{N}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\,(N-1)\,. \tag{3.12}$$

Observe que, desenvolvendo o termo do somatório em (3.11) para $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{\left(1 - z\,\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) + i\,z\,sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1+z^2-2z\,\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)},$$

cuja parte imaginária é dada por

$$\frac{z\,sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1+z^2-2z\,\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}.$$

Tomando $z = \rho^2$, a parte imaginária torna-se

$$-\rho^2 \cdot \left(\frac{-sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos(\theta_{kl})} \right).$$

Uma vez que para $z \in \mathbb{R}$ a expressão em (3.11) é um número real, segue que

$$-\rho^2 \cdot \left(\frac{-sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos(\theta_{kl})} \right) = 0.$$

Como $\rho \neq 0$, tem-se

$$\left(\frac{-sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos(\theta_{kl})} \right) = 0. \tag{3.13}$$

Agora, desenvolvendo o termo do somatório em (3.12), temos

$$\frac{\left(1-\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)+i\,sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{2-2\,\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}.$$

Cuja parte imaginária é dada por

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}\right)$$

Mas, como (3.12) é um número real, segue que

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}\right)=0.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2\,\rho^2}\cdot\left(\frac{sen\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}\right)=0 \tag{3.14}$$

Logo, de (3.13), (3.14) e (3.10), segue que $\dot{r_l}=0$, demonstrando assim o lema. □

A expressão dada em (3.9) é dita **velocidade angular** para o vórtice localizado em $z_l = r_l\,e^{i\,\theta_l}$. Por outro lado, da definição (3.2.1), temos que a velocidade angular é dada por $\dot{\theta}_l=\Omega$, obtendo assim, ao longo do anel de vórtices

$$\Omega=\frac{\gamma}{2\,\pi}\left(\frac{1}{1-\rho^2}+{\sum_{k}^{N}}'\frac{1}{\rho^2+\cos(\theta_{kl})}+\frac{N-1}{2\,\rho^2}\right).$$

Agora, iremos fazer um estudo numérico sobre a estabilidade de um anel de vórtices em $\mathbb{D}^1$. Para isso, introduzimos a seguinte transformação de coordenadas baseada fortemente na referência (CABRAL; STEFANELLA, 2003)

$$\begin{cases} \phi_1 = \theta_1 - \theta_N\,, & J_1 = r_1^2/2\,, \\ \phi_2 = \theta_2 - \theta_N\,, & J_2 = r_2^2/2\,, \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{N-1} = \theta_{N-1} - \theta_N\,, & J_{N-1} = r_{N-1}^2/2\,. \\ \phi_N = \theta_N\,, & J_N = \sum_{i=1}^{N} r_i^2/2\,, \end{cases}$$

com forma simplética

$$w = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i\, r_i\, dr_i \wedge d\theta_i = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i\, dJ_i \wedge d\phi_i.$$

Dessa maneira, temos uma redução na dimensionalidade do sistema Hamiltoniano dado em (3.7), onde ϕ_N torna-se uma variável cíclica e $J_N = K$ é uma integral primeira. Assim, o Hamiltoniano dado em (3.6), torna-se

$$H = \frac{\Gamma^2}{4\,\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \log\left(1 - 2\,J_k\right) + \frac{\Gamma^2}{4\,\pi} \sum_{k<j}^{N-1} \log\left(1 + \frac{\left(1 - 2\,J_k\right)\left(1 - 2\,J_j\right)}{2\,J_k + 2\,J_j - 4\,\sqrt{J_k\,J_j}\,\cos(\phi_k - \phi_j)}\right) + \\ + \log(1 - 2\,A) + \frac{\Gamma^2}{4\,\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \log\left(1 + \frac{\left(1 - 2\,J_k\right)\left(1 - 2\,A\right)}{2\,J_k + 2\,A - 4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}\right).$$

Que ainda pode ser reescrito como

$$H = \frac{\Gamma^2}{4\,\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \log\left(1 - 2\,J_k\right) + \frac{\Gamma^2}{4\,\pi} \sum_{k<j}^{N-1} \log\left(\frac{1 + 4\,J_k\,J_j - 4\,\sqrt{J_k\,J_j}\,\cos(\phi_k - \phi_j)}{2\,J_k + 2\,J_j - 4\,\sqrt{J_k\,J_j}\,\cos(\phi_k - \phi_j)}\right) + \\ + \log(1 - 2\,A) + \frac{\Gamma^2}{4\,\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \log\left(\frac{1 + 4\,J_k\,A - 4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}{2\,J_k + 2\,A - 4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}\right),$$

onde $A = K - J_1 - J_2 - \cdots - J_{N-1}$.

A matriz Hessiana do Hamiltoniano H no sistema reduzido é da forma

$$\mathcal{H}(H) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 H}{\partial J_k\,\partial J_i} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial J_i\,\partial \phi_k} \\ \hline \dfrac{\partial^2 H}{\partial \phi_i\,\partial J_k} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \phi_k\,\partial \phi_i} \end{array}\right), \text{ onde } i, j = 1, 2, ..., N-1.$$

Para determinarmos a matriz Hessiana de H nas variáveis ϕ_k e J_k para $k = 1, 2, ..., N-1$, precisamos determinar as derivadas parciais de segunda ordem.

Como as derivadas parciais de primeira ordem, temos

$$\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial H}{\partial J_i} = \frac{-2}{1-2\,J_i} + \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,J_k - \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}{1+4\,J_k\,J_i - 4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right) - \\ -\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2 - \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}{2\,J_k+2\,J_i - 4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right) + \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{-4\,J_k + \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,\cos(\phi_k)}{1+4\,J_k\,A - 4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}\right) - \\ -\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{-2 + \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,\cos(\phi_k)}{2\,J_k+2\,A - 4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}\right) - \left(\frac{4\,(A-J_i) - \dfrac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{J_i\,A}}\,\cos(\phi_i)}{1+4\,A\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right) + \\ +\frac{2}{1-2\,A} + \left(\frac{\dfrac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{J_i\,A}}\,\cos(\phi_i)}{2\,A+2\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right).$$

$$\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\sin(\phi_i-\phi_k)}{1+4\,J_k\,J_i - 4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}\right) - \\ -\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\sin(\phi_i-\phi_k)}{2\,J_k+2\,J_i - 4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}\right) + \\ +\left(\frac{4\,\sqrt{A\,J_i}\,\sin(\phi_i)}{1+4\,A\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right) - \\ -\left(\frac{4\,\sqrt{A\,J_i}\,\sin(\phi_i)}{2\,A+2\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right),$$

onde $A = K - J_1 - J_2 - \cdots - J_{N-1}$.

Com algumas manipulações algébricas e utilizando ferramentas como regras de derivação e a paridade da função $\cos(x)$, obtemos como derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial J_k\,\partial J_i} = -\frac{4}{(1-2\,A)^2} + \left(\frac{4-2\,\cos(\phi_k-\phi_i)\,\left(\frac{\sqrt{J_k\,J_i}-\frac{J_k\,J_i}{2\,\sqrt{J_k\,J_i}}}{J_k\,J_i}\right)}{1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right) -$$

$$-\left(\frac{\left(4\,J_k-\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)\,\left(4\,J_i-\frac{2\,J_i}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)}{\left(1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)^2}\right) +$$

$$+\left(\frac{2\,\cos(\phi_k-\phi_i)\,\left(\frac{\sqrt{J_k\,J_i}-\frac{J_k\,J_i}{2\,\sqrt{J_k\,J_i}}}{J_k\,J_i}\right)}{2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right) +$$

$$+\left(\frac{\left(2-\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)\,\left(2-\frac{2\,J_i}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)}{\left(2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)^2}\right) +$$

$$+\sum_{j\neq i,\,k}^{N-1}\left(\frac{J_j^2\,(J_j\,A)^{-3/2}\,\cos(\phi_j)\,\left(1+4\,J_j\,A-4\,\sqrt{J_j\,A}\,\cos(\phi_j)\right)-\left(-4\,J_j+\frac{2\,J_j}{\sqrt{J_j\,A}}\,\cos(\phi_j)\right)^2}{\left(1+4J_j\,A-4\sqrt{J_j\,A}\,\cos(\phi_j)\right)^2}\right) +$$

$$+\left(\frac{-4+2\,\cos(\phi_k)\,\left(\frac{\sqrt{A\,J_k}-\frac{J_k\,(A-J_k)}{2\,\sqrt{A\,J_k}}}{A\,J_k}\right)}{1+4\,A\,J_k-4\,\sqrt{A\,J_k}\,\cos(\phi_k)}\right) -$$

$$-\left(\frac{\left(-4\,J_k+\frac{2\,J_k}{\sqrt{A\,J_k}}\,\cos(\phi_k)\right)\,\left(4\,(A-J_k)-\frac{2\,(A-J_k)}{\sqrt{A\,J_k}}\,\cos(\phi_k)\right)}{\left(1+4\,A\,J_k-4\,\sqrt{A\,J_k}\,\cos(\phi_k)\right)^2}\right) +$$

$$+\left(\frac{-4-2\,\cos(\phi_i)\,\left(\frac{-\sqrt{A\,J_i}-\frac{J_i\,(A-J_i)}{2\,\sqrt{A\,J_i}}}{A\,J_i}\right)}{1+4\,A\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right) -$$

$$-\left(\frac{\left(-4\,J_i+\frac{2\,J_i}{\sqrt{A\,J_i}}\,\cos(\phi_i)\right)\,\left(4\,(A-J_i)-\frac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{A\,J_i}}\,\cos(\phi_i)\right)}{\left(1+4\,A\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2}\right) -$$

$$-\sum_{j\neq i,\,k}^{N-1}\left(\frac{J_j^2\,(J_j\,A)^{-3/2}\,\cos(\phi_j)\,\left(2\,J_j+2\,A-4\,\sqrt{J_j\,A}\,\cos(\phi_j)\right)-\left(-2+\frac{2\,J_j}{\sqrt{J_j\,A}}\,\cos(\phi_j)\right)^2}{\left(2\,J_j+2\,A-4\,\sqrt{J_j\,A}\,\cos(\phi_j)\right)^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{2\,\cos(\phi_k)\,\left(\frac{\sqrt{A\,J_k} - \frac{(A-J_k)\,J_k}{2\,\sqrt{A\,J_k}}}{A\,J_k} \right)}{2\,A + 2\,J_k - 4\,\sqrt{A\,J_k}\,\cos(\phi_k)} \right) + \\
&+ \left(\frac{\left(-2 + \frac{2\,J_k}{\sqrt{A\,J_k}}\,\cos(\phi_k)\right)\,\left(-\frac{2\,(A-J_k)}{\sqrt{A\,J_k}}\,\cos(\phi_k)\right)}{\left(2\,A + 2\,J_k - 4\,\sqrt{A\,J_k}\,\cos(\phi_k)\right)^2} \right) + \\
&+ \left(\frac{\left(\frac{-2\,(A-J_i)}{\sqrt{A\,J_i}}\,\cos(\phi_i)\right)\,\left(-2 + \frac{2\,J_i}{\sqrt{A\,J_i}}\,\cos(\phi_i)\right)}{\left(2\,A + 2\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_k - \phi_i)\right)^2} \right) + \\
&+ \left(\frac{2\,\cos(\phi_i)\,\left(\frac{-\sqrt{A\,J_i} + \frac{(A-J_i)\,J_i}{2\,\sqrt{A\,J_i}}}{A\,J_i} \right)}{2\,A + 2\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)} \right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial J_i^2} \;=\;& -\frac{4}{(1-2\,J_i)^2} - \frac{4}{(1-2\,A)^2} + \\
&+ \sum_{k\neq i}^{N-1} \left(\frac{J_k^2 (J_k\,J_i)^{-3/2}\,\cos(\phi_k - \phi_i)}{1 + 4 J_k\,J_i - 4\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k - \phi_i)} - \frac{\left(4\,J_k - \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k - \phi_i)\right)^2}{\left(1 + 4 J_k\,J_i - 4\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k - \phi_i)\right)^2} \right) - \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1} \left(\frac{J_k^2 (J_k\,J_i)^{-3/2}\,\cos(\phi_k - \phi_i)}{2\,J_k + 2\,J_i - 4\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k - \phi_i)} - \frac{\left(2 - \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k - \phi_i)\right)^2}{\left(2\,J_k + 2\,J_i - 4\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k - \phi_i)\right)^2} \right) + \\
&+ \sum_{k\neq i}^{N-1} \left(\frac{J_k^2 (J_k\,A)^{-3/2}\,\cos(\phi_k)}{1 + 4 J_k\,A - 4\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)} - \frac{\left(-4\,J_k - \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,\cos(\phi_k)\right)^2}{\left(1 + 4 J_k\,A - 4\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)\right)^2} \right) + \\
&+ \left(\frac{-8 - 2\,\cos(\phi_i)\,\left(\frac{-2\,\sqrt{A\,J_i} - \frac{(A-J_i)^2}{2\,\sqrt{A\,J_i}}}{A\,J_i} \right)}{1 + 4\,A\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)} \right) - \left(\frac{\left(4\,(A-J_i) - \frac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{A\,J_i}}\,\cos(\phi_i)\right)^2}{\left(1 + 4\,A\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2} \right) - \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1} \left(\frac{J_k^2 (J_k\,A)^{-3/2}\,\cos(\phi_k)}{2\,A + 2\,J_k - 4\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)} - \frac{\left(-2 + \frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,\cos(\phi_k)\right)^2}{\left(2\,A + 2\,J_k - 4\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)\right)^2} \right) - \\
&+ \left(\frac{2\,\cos(\phi_i)\,\left(\frac{-2\,\sqrt{A\,J_i} - \frac{(A-J_i)^2}{2\,\sqrt{A\,J_i}}}{A\,J_i} \right)}{2\,A + 2\,J_i - 4\sqrt{J_i\,A}\,\cos(\phi_i)} \right) + \left(\frac{\left(-\frac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{A\,J_i}}\,\cos(\phi_i)\right)^2}{\left(2\,A + 2\,J_i - 4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2} \right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_k\,\partial J_i} &= \left(\frac{\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,sen(\phi_k-\phi_i)}{1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right)- \\
&- \left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,sen(\phi_k-\phi_i)\,\left(4\,J_k-\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)}{\left(1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)^2}\right)- \\
&- \left(\frac{\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,sen(\phi_k-\phi_i)}{2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right)+ \\
&+ \left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,sen(\phi_k-\phi_i)\,\left(2-\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)}{\left(2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)^2}\right)- \\
&- \left(\frac{\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,sen(\phi_k)}{1+4\,J_k\,A-4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}\right)- \\
&- \left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,A}\,sen(\phi_k)\,\left(-4\,J_k+\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,\cos(\phi_k)\right)}{\left(1+4\,J_k\,A-4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)\right)^2}\right)- \\
&+ \left(\frac{\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,sen(\phi_k)}{2\,J_k+2\,A-4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)}\right)+ \\
&+ \left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,A}\,sen(\phi_k)\,\left(-2+\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,A}}\,\cos(\phi_k)\right)}{\left(2\,J_k+2\,A-4\,\sqrt{J_k\,A}\,\cos(\phi_k)\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_i\,\partial J_i} &= \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,sen(\phi_k-\phi_i)}{1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right)+ \\
&+ \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,sen(\phi_k-\phi_i)\,\left(4\,J_k-\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)}{\left(1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)^2}\right)- \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,sen(\phi_k-\phi_i)}{2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)}\right)+ \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,sen(\phi_k-\phi_i)\,\left(2-\frac{2\,J_k}{\sqrt{J_k\,J_i}}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)}{\left(2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_k-\phi_i)\right)^2}\right)+ \\
&+ \left(\frac{\frac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{A\,J_i}}sen(\phi_i)}{1+4\,A\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right)- \\
&- \left(\frac{\left[4\,(A-J_i)-\frac{2\,(A-J_i)}{\sqrt{A\,J_i}}\cos(\phi_i)\right]\,4\,\sqrt{A\,J_i}\,sen(\phi_i)}{\left(1+4\,A\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2}\right)- \\
&+ \left(\frac{2\,(A-J_i)\,sen(\phi_i)}{2\,A+2\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right)-\left(\frac{4\,\sqrt{A\,J_i}\,sen(\phi_i)\,\left(\frac{-2\,(A-J_i)}{\sqrt{J_i\,A}}\,\cos(\phi_i)\right)}{\left(2\,A+2\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_i\,\partial\phi_k} &= -\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}{1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}\right)- \\
&- \left(\frac{16\,J_k\,J_i sen^2(\phi_i-\phi_k)}{\left(1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)\right)^2}\right)+ \\
&+ \left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}{2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}\right)+ \\
&+ \left(\frac{16\,J_k\,J_i sen^2(\phi_i-\phi_k)}{\left(2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_i^2} &= \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}{1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}\right)- \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{16\,J_k\,J_i sen^2(\phi_i-\phi_k)}{\left(1+4\,J_k\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)\right)^2}\right)- \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}{2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)}\right)+ \\
&+ \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{16\,J_k\,J_i sen^2(\phi_i-\phi_k)}{\left(2\,J_k+2\,J_i-4\,\sqrt{J_k\,J_i}\,\cos(\phi_i-\phi_k)\right)^2}\right)+ \\
&+ \left(\frac{4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}{1+4\,A\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right)- \\
&- \left(\frac{16\,A\,J_i sen^2(\phi_i)}{\left(1+4\,A\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2}\right)- \\
&- \left(\frac{4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}{2\,A+2\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)}\right)+ \\
&+ \left(\frac{16\,A\,J_i sen^2(\phi_i)}{\left(2\,A+2\,J_i-4\,\sqrt{A\,J_i}\,\cos(\phi_i)\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

onde $A = K - J_1 - J_2 - \cdots - J_{N-1}$.

Tais derivadas, ao longo da solução de anel, tornam-se

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial J_k\,\partial J_i} &= -\frac{4}{\left(1-\rho^2\right)^2}+\left(\frac{4-\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)- \\
&- \left(\frac{2\,\rho^2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)^2+ \\
&+ \left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)+\left(\frac{2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)^2+ \\
&+ \sum_{j\neq i,\,k}^{N-1}\left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}\right)- \\
&- \sum_{j\neq i,\,k}^{N-1}\left(\frac{-2\rho^2+2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}\right)^2- \\
&- \sum_{j\neq i,\,k}^{N-1}\left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}\right)+ \\
&+ \sum_{j\neq i,\,k}^{N-1}\left(\frac{-2+2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(j-N)}{N}\right)}\right)^2+ \\
&+ \left(\frac{-4+\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)+\left(\frac{-4+\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}\right)- \\
&- \left(\frac{-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)-\left(\frac{-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial J_i^2} &= -\frac{8}{\left(1-\rho^2\right)^2}+\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)- \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,\rho^2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)^2- \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)+\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)^2+ \\
&+ \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)-\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{-2\,\rho^2+2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)^2+ \\
&+ \left(\frac{-8+\frac{8}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}\right)-\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{\frac{2}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)+ \\
&+ \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{-2+2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)^2-\left(\frac{\frac{8}{\rho^2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}\right).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_k\,\partial J_i} &= \left(\frac{2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)-\left(\frac{2\,\rho^2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\,\left(2\,\rho^2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)}{\left(1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)^2}\right)-\\
&-\left(\frac{2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)+\left(\frac{2\,\rho^2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\,\left(2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)}{\left(2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)^2}\right)-\\
&-\left(\frac{2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)-\\
&-\left(\frac{2\,\rho^2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)\,\left(-2\,\rho^2+2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)\right)}{\left(1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)\right)^2}\right)+\\
&+\left(\frac{2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)}\right)+\\
&+\left(\frac{2\,\rho^2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)\,\left(-2+2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)\right)}{\left(2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-N)}{N}\right)\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_i\,\partial J_i} &= \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)+\\
&+\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,\rho^2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\,\left(2\,\rho^2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)}{\left(1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)^2}\right)-\\
&-\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)}\right)-\\
&-\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,\rho^2\,sen\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\,\left(2-2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)}{\left(2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(k-i)}{N}\right)\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\phi_i\,\partial\phi_k} &= -\left(\frac{2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}\right)-\left(\frac{4\,\rho^4\,sen^2\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{\left(1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)\right)^2}\right)+\\
&+\left(\frac{2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}\right)+\left(\frac{4\,\rho^4\,sen^2\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{\left(2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

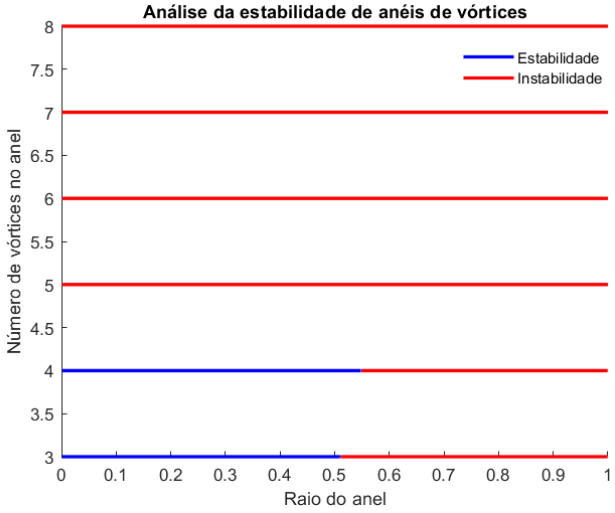
$$
\begin{aligned}
\frac{4\,\pi}{\Gamma^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \phi_i^2} &= \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}\right)-\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\rho^4\,sen^2\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{\left(1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)\right)^2}\right)- \\
&- \sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}\right)+\sum_{k\neq i}^{N-1}\left(\frac{4\,\rho^4\,sen^2\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)}{\left(2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-k)}{N}\right)\right)^2}\right)+ \\
&+ \left(\frac{2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}\right)-\left(\frac{4\,\rho^4\,sen^2\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{\left(1+\rho^4-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)\right)^2}\right)- \\
&- \left(\frac{2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}\right)+\left(\frac{4\,\rho^4\,sen^2\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)}{\left(2\,\rho^2-2\,\rho^2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(i-N)}{N}\right)\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Analisando as expressões das entradas do Hessiano $\mathcal{H}(H)$, observamos que a estabilidade do anel de vórtices depende do raio $0<\rho<1$ e do número de vórtices N.

As simulações foram feitas com a seguinte logística:

Os vórtices em questão devem ter a mesma vorticidade, nesse caso consideramos $\Gamma=1$. Lembrando que $\rho\in(0,1)$, escolhemos um valor N para o número de vórtices, com tais parâmetros temos o raio do anel onde os N- vórtices estão localizados. Em seguida, determinamos os blocos de ordem $N-1$ nas variáveis ϕ_k e J_k, os quais irão produzir a matriz Hessiana de H de ordem $2\,(N-1)$ e a partir disso analisamos a estabilidade através do sinal dos autovalores via **teorema de Dirichlet** (CABRAL; STEFANELLA, 2003). A figura a seguir representa alguns resultados dessa simulação.

Figura 6 – Estabilidade de anéis para alguns números de vórtices.



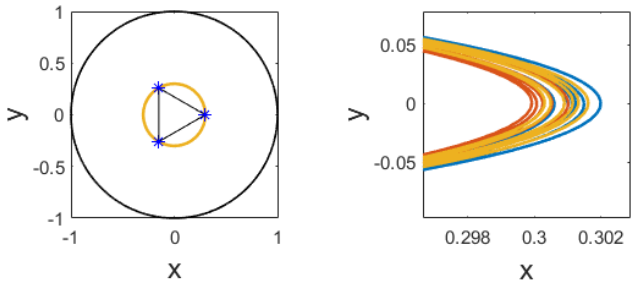
Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações numéricas nos indicaram que para $N = 3$, temos a estabilidade do anel com três vórtices (nesse caso, os vórtices são vértices de um triângulo equilátero) para um raio de até aproximadamente $\rho = 0.5106$. Para $N = 4$, tem-se a estabilidade do anel com quatro vórtices (nesse caso, os vórtices são vértices de um quadrado) para um raio de até aproximadamente $\rho = 0.5485$. Para os demais casos, conforme indicado na figura 6, temos a instabilidade.

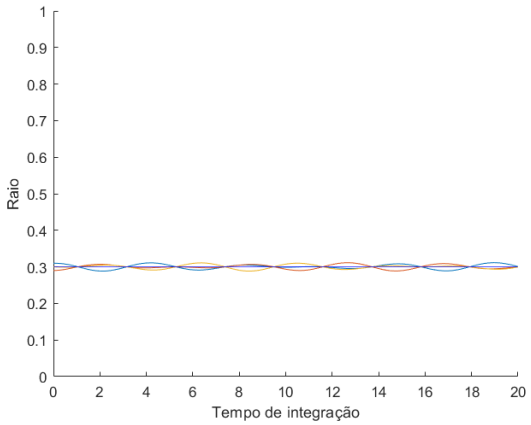
A seguir, utilizamos a simulação dada por (ASHBEE, 2023) a fim de exibir exemplos que ilustram o nosso resultado sobre a estabilidade.

No primeiro exemplo, temos três vórtices num anel de raio $\rho = 0.3$, de mesma vorticidade $\Gamma = 1$ e posicionados em $z_1 = (0.3)$, $z_2 = (0.3)\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $z_3 = (0.3)\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Pode-se ver a estabilidade para este caso numa simulação com tempo $t = 20$.

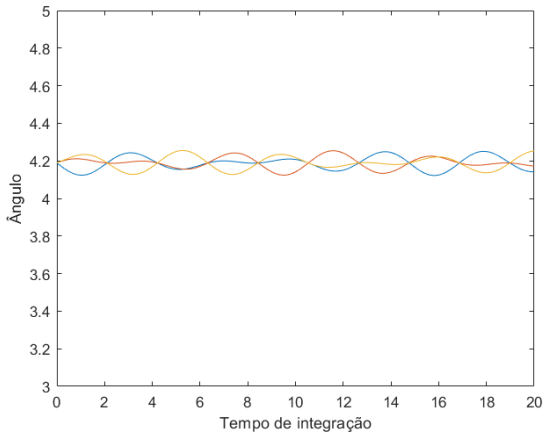
Figura 7 – Estabilidade de um anel com três vórtices



(a) Trajetória dos três vórtices



(b) Raio para $\rho = 0.3$ e o raio após perturbações



(c) Gráfico dos ângulos após as perturbações

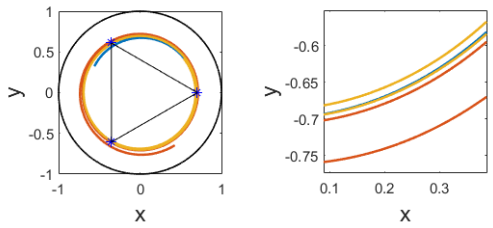
Fonte: Elaborada pelo autor.

Através da figura 7, podemos perceber um comportamento de estabilidade para esse caso. Na figura 7-a), vemos que após uma perturbação de $\epsilon_2 = 0.01$ e $\epsilon_3 = 0.02$ no raio inicial dos vórtices ($\rho = 0.3$) localizados em z_2 e z_3, respectivamente, as trajetórias após a perturbação,

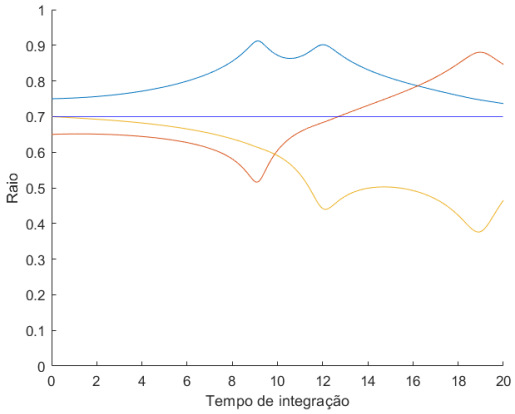
ficam muito próximas da trajetória antes da perturbação . Na figura 7-b), feita a perturbação, temos uma oscilação muito pequena dos raios com relação a $\rho = 0.3$ na trajetória. Analogamente, ainda sob a mesma perturbação, identificamos o mesmo comportamento para os ângulos (ver figura 7-c)).

Para o segundo exemplo, consideramos três vórtices num anel de raio $\rho = 0.7$, de mesma vorticidade $\Gamma = 1$ e posicionados em $z_1 = (0.7)$, $z_2 = (0.7)\, e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$ e $z_3 = (0.7)\, e^{i\,\frac{4\pi}{3}}$. Pode-se ver a instabilidade para este caso numa simulação com tempo $t = 20$.

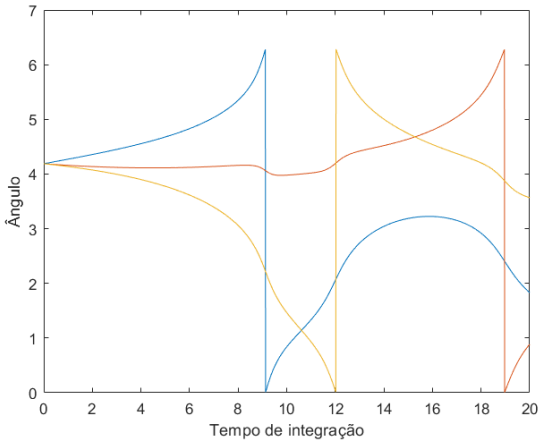
Figura 8 – Instabilidade de um anel com três vórtices



(a) Trajetória dos três vórtices



(b) Raio para $\rho = 0.7$ e o raio após perturbações



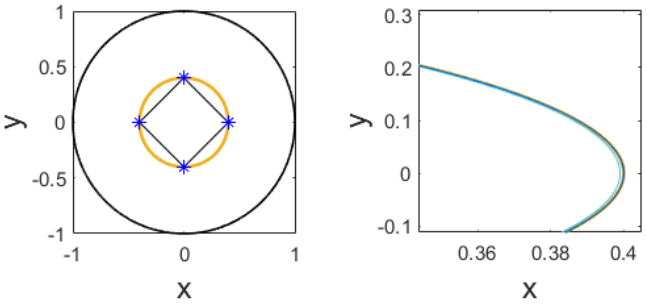
(c) Gráfico dos ângulos após as perturbações

Fonte: Elaborada pelo autor.

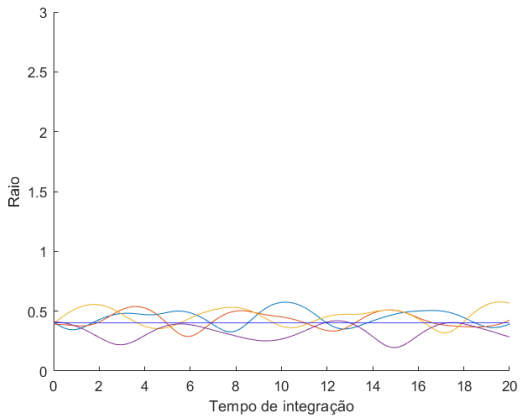
Considerando a figura 8, percebe-se um comportamento de instabilidade para esse caso. Na figura 8-a), vemos que após uma perturbação de $\epsilon_2 = 0.004$ e $\epsilon_3 = 0.005$ no raio inicial dos vórtices ($\rho = 0.7$) localizados em z_2 e z_3, respectivamente, as trajetórias após a perturbação, mudam bastante o seu aspecto, no sentido de que os vórtices diferem bastante de vértices de um triângulo equilátero. Na figura 8-b), feita a perturbação, temos uma brusca oscilação por parte dos raios com relação a $\rho = 0.7$ na trajetória. Analogamente, ainda sob a mesma perturbação, identificamos o mesmo comportamento para os ângulos (ver figura 8-c)).

No terceiro exemplo, temos quatro vórtices num anel de raio $\rho = 0.4$, de mesma vorticidade $\Gamma = 1$ e posicionados em $z_1 = (0.4)$, $z_2 = (0.4)\, e^{i\,\frac{2\pi}{4}}$, $z_3 = (0.4)\, e^{i\,\frac{4\pi}{4}}$ e $z_4 = (0.4)\, e^{i\,\frac{6\pi}{4}}$. Pode-se ver a estabilidade para este caso numa simulação com tempo $t = 20$.

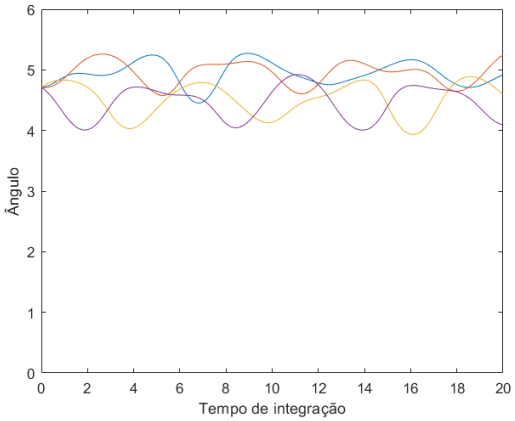
Figura 9 – Estabilidade de um anel com quatro vórtices



(a) Trajetória dos quatro vórtices



(b) Raio para $\rho = 0.4$ e o raio após perturbações



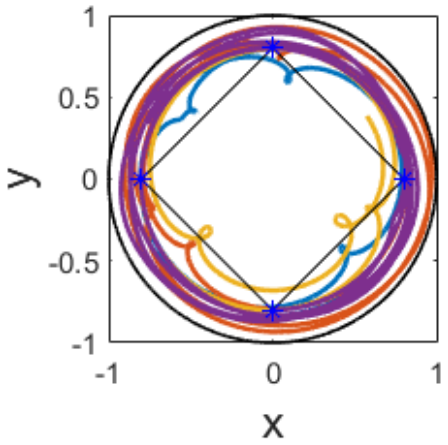
(c) Gráfico dos ângulos após as perturbações

Fonte: Elaborada pelo autor.

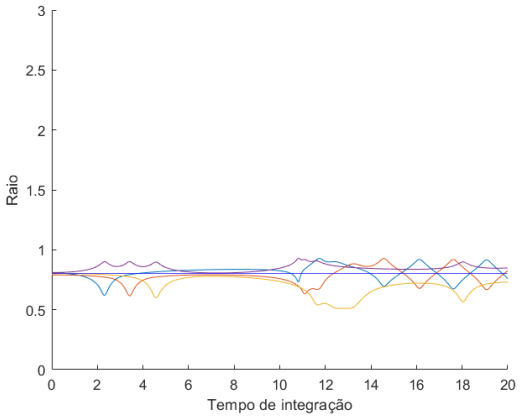
Dada a figura 9, podemos perceber um comportamento de estabilidade para esse caso. Na figura 9-a), vemos que após uma perturbação de $\epsilon_2 = 0.02$, $\epsilon_3 = 0.03$ e $\epsilon_4 = 0.04$ no raio inicial dos vórtices ($\rho = 0.4$) localizados em z_2, z_3 e z_4, respectivamente, as trajetórias após a perturbação, ficam muito próximas da trajetória antes da perturbação . Na figura 9-b), feita a perturbação, temos uma oscilação pequena dos raios com relação a $\rho = 0.4$ na trajetória (nota-se que a oscilação está dentro de uma faixa horizontal centrada em 0.4). Analogamente, ainda sob a mesma perturbação, identificamos o mesmo comportamento para os ângulos (ver figura 9-c)).

E o último exemplo, foi feito para o caso de quatro vórtices num anel de raio $\rho = 0.8$, de mesma vorticidade $\Gamma = 1$ e posicionados em $z_1 = (0.8)$, $z_2 = (0.8)\, e^{i\frac{2\pi}{4}}$, $z_3 = (0.8)\, e^{i\frac{4\pi}{4}}$ e $z_4 = (0.8)\, e^{i\frac{6\pi}{4}}$. Pode-se ver a instabilidade para este caso numa simulação com tempo $t = 20$.

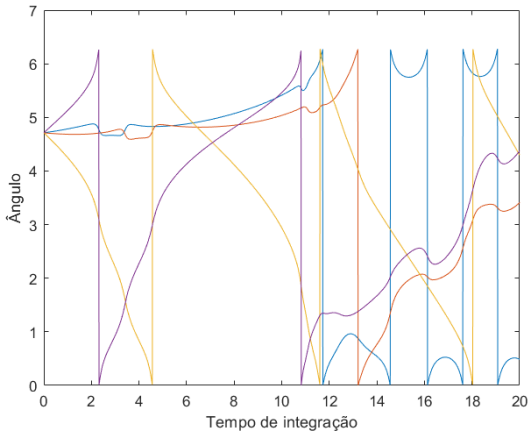
Figura 10 – Instabilidade de um anel com quatro vórtices



(a) Trajetória dos quatro vórtices



(b) Raio para $\rho = 0.8$ e o raio após perturbações



(c) Gráfico dos ângulos após as perturbações

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando a figura 10, percebe-se um comportamento de instabilidade para esse caso. Na figura 10-a), vemos que após uma perturbação de $\epsilon_2 = 0.003$ e $\epsilon_3 = 0.004$ e $\epsilon_4 = 0.005$ no raio inicial dos vórtices ($\rho = 0.8$) localizados em z_2, z_3 e z_4 respectivamente, as trajetórias após a perturbação, mudam bastante o seu aspecto, no sentido de que os vórtices diferem bastante de vértices de um quadrado. Na figura 10-b), feita a perturbação, não temos uma convergência por parte dos raios para $\rho = 0.8$. Analogamente, ainda sob a mesma perturbação, identificamos o mesmo comportamento para os ângulos (ver figura 10-c)).

4 A DINÂMICA DE UM DIPOLO SUFICIENTEMENTE PRÓXIMO PARA OS CASOS: CIRCULAR E ELÍPTICO

A conjectura de Kimura nos diz que no limite em que a distância mútua entre os dois vórtices tende a zero, em um dipolo, o centro de vorticidade move-se ao longo de uma geodésica numa superfície. No nosso caso, como trabalhamos com regiões planares, as geodésicas serão retas (considerando a métrica usual). Neste capítulo, iremos confirmar numericamente a conjectura, para dois domínios específicos no plano, são eles: o círculo $\mathbb{D}^1$ e a elipse centrada na origem cujos focos estão situados em ± 1 e o eixo maior está no eixo x; juntamente com a região interna, o último domínio, denotaremos por $\mathbb{E}^1$.

Os resultados apresentados aqui serão dados através de simulações numéricas. Inicialmente, no círculo $\mathbb{D}^1$, consideraremos algumas condições iniciais para as trajetórias de dois vórtices, de modo que a conjectura seja respeitada. Entre as trajetórias (aproximadamente no ponto médio da distância entre as curvas), implementamos a reta que passa por tal ponto. Em seguida, coletamos os pontos de interseção da reta com a fronteira de $\mathbb{D}^1$. Iremos observar no decorrer do capítulo, que para uma mesma condição inicial, teremos várias retas interceptando a fronteira de $\mathbb{D}^1$ em pontos distintos, isso ocorre porque quando as trajetórias se aproximam da fronteira, as mesmas se bifurcam, e só depois de um tempo t, elas voltam a ter o comportamento inicial, isso ficará mais claro à medida que as simulações forem sendo apresentadas no decorrer do capítulo. Feito isto, iremos determinar os comprimentos de arco, onde o ponto inicial de cada arco é o ponto $A = (1, 0)$. E o ponto final de cada arco, será o ponto em que a reta intercepta a fronteira de $\mathbb{D}^1$ pela última vez. Também serão coletados os ângulos de incidência de cada reta nos pontos de interseção com $\mathbb{D}^1$. E com esses dados, determinamos o espaço de fases nas coordenadas de **Birkhoff** *comprimento de arco* $\times$ *ângulo de incidência*.

O segundo estudo que será feito neste capítulo, é sobre alguns aspectos da dinâmica de dois vórtices para o caso elíptico, no sentido de quais comportamentos do caso circular são preservados no caso elíptico. A fim de cumprir este objetivo, é feito um estudo preliminar sobre o mapa conforme $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$.

4.1 O CASO CIRCULAR

Já vimos em (3.1) que o Hamiltoniano para dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ é dado por

$$H = \frac{1}{4\pi}\left[\Gamma_1^2 \log\left(1-||z_1||^2\right) + \Gamma_2^2 \log\left(1-||z_2||^2\right) + \Gamma_1\Gamma_2 \log\left(\frac{||1-z_2\overline{z_1}||^2}{||z_1-z_2||^2}\right)\right],$$

onde $z_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $z_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$. As equações de movimento (em coordenadas reais) são dadas por

$$\dot{x_1} = -\frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_1\, y_1}{1-x_1^2-y_1^2} + \Gamma_2\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,y_2 + (x_1y_2-y_1x_2)\,x_2}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} + \frac{\Gamma_2\,(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

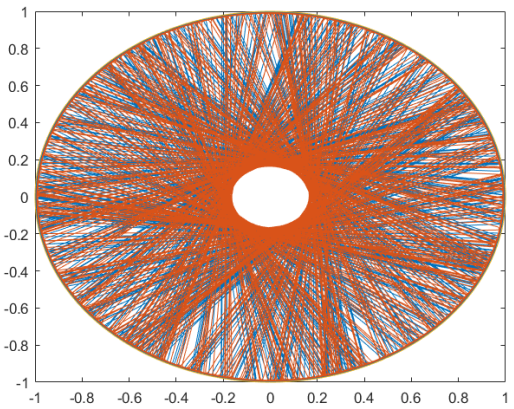
$$\dot{y_1} = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_1\, x_1}{1-x_1^2-y_1^2} + \Gamma_2\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,x_2 - (x_1y_2-y_1x_2)\,y_2}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} + \frac{\Gamma_2\,(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_2\, y_2}{1-x_2^2-y_2^2} + \Gamma_1\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,y_1 - (x_1y_2-y_1x_2)\,x_1}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} - \frac{\Gamma_1\,(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

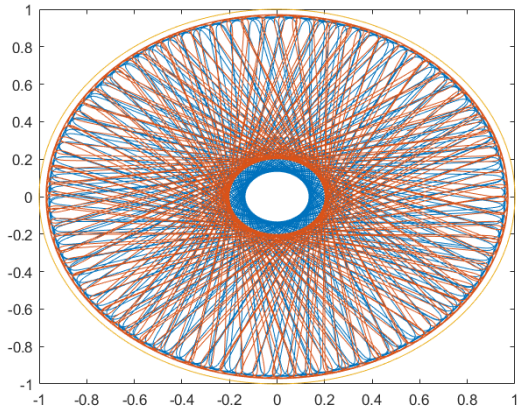
$$\dot{y_2} = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\Gamma_2\, x_2}{1-x_2^2-y_2^2} + \Gamma_1\,\frac{(1-x_1x_2-y_1y_2)\,x_1 + (x_1y_2-y_1x_2)\,y_1}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2} - \frac{\Gamma_1\,(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right);$$

Utilizamos o método de **Runge-Kutta** para simular as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ por um tempo suficientemente grande, a fim de obter a maior consistência possível para o resultado. Na figura a seguir, temos as trajetórias de dois vórtices em dois casos: no primeiro, com condição inicial $x_1(0) = -0.6$, $y_1(0) = 0.61$, $x_2(0) = -0.61$ e $y_2(0) = 0.61$, e no segundo, com condição inicial $x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = -0.4$, $x_2(0) = 0.47$ e $y_2(0) = -0.46$.

Figura 11 – Dois casos de trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$.



(a) Trajetória de dois vórtices no tempo $t = 200$ e com condição inicial $x_1(0) = -0.6$, $y_1(0) = 0.61$, $x_2(0) = -0.61$ e $y_1(0) = 0.61$

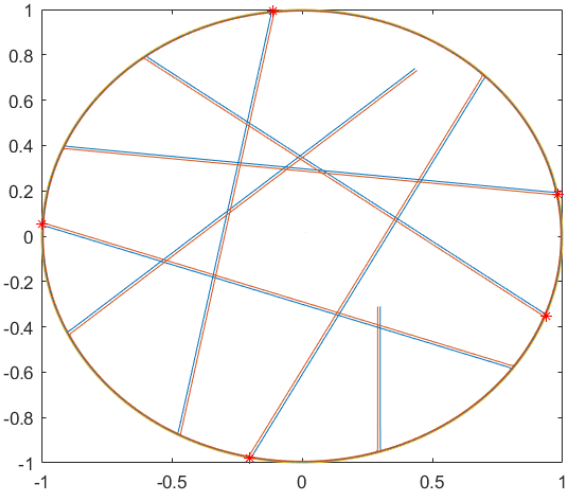


(b) Trajetória de dois vórtices no tempo $t = 300$ e com condição inicial $x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = -0.4$, $x_2(0) = 0.47$ e $y_2(0) = -0.46$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Feito isto, implementa-se a reta que passa aproximadamente no ponto médio da distância entre as trajetórias. Na simulação (ver figura a seguir), percebe-se que próximo da fronteira, há uma bifurcação por parte das trajetórias, gerando assim várias retas para a mesma condição inicial. Com isto, obtemos os pontos de interseção dessas retas com a fronteira de $\mathbb{D}^1$. Aqui, escolhemos coletar apenas o ponto de interseção da reta com a fronteira de $\mathbb{D}^1$, antes de alguma bifurcação das trajetórias.

Figura 12 – Pontos de interseção das retas entre as trajetórias (antes das bifurcações) e a fronteira de $\mathbb{D}^1$ em vermelho para $t = 2$ e condição inicial $x_1(0) = -0.6$, $y_1(0) = 0.61$, $x_2(0) = -0.61$ e $y_1(0) = 0.61$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar os pontos de interseção destacados na figura anterior, consideramos as equações das retas entre as trajetórias dadas por $y_k = m_k\, x + b_k$, onde k é uma função que depende do tempo que simulamos as trajetórias no integrador, isto é, $k = k(t)$. Para cada reta, substituindo sua equação, na equação da fronteira de $\mathbb{D}^1$, a qual é dada por $x^2 + y^2 = 1$, obtemos a equação

$$c_{2k}\, x^2 + c_{1k}\, x + c_{0k} = 0, \tag{4.1}$$

onde $c_{2k} = 1 + m_k^2$, $c_{1k} = 2\, m_k\, b_k$ e $c_{0k} = b_k^2 - 1$.

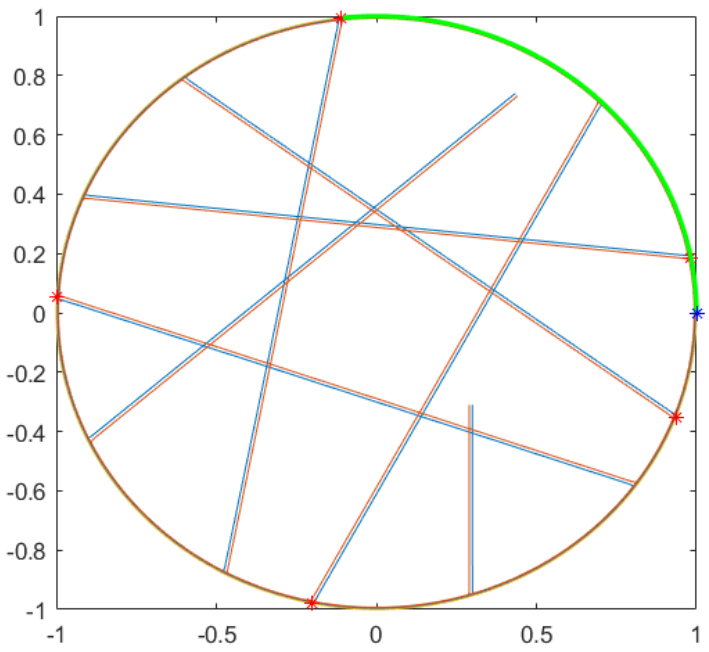
Com isso, as coordenadas dos pontos em destaque na figura anterior são dadas por

$$P_k = (C_{1k}, C_{2k}), \tag{4.2}$$

onde $C_{1k} = \dfrac{-c_{1k} \pm \sqrt{c_{1k}^2 - 4\, c_{2k}\, c_{0k}}}{2\, c_{2k}}$ e $C_{2k} = m_k\, C_{1k} + b_k$.

Determinados os pontos como em (4.2), calcula-se os comprimentos de cada arco cujos pontos inicial e final são dados respectivamente por $A = (1, 0)$ e $P_k = (C_{1k}, C_{2k})$.

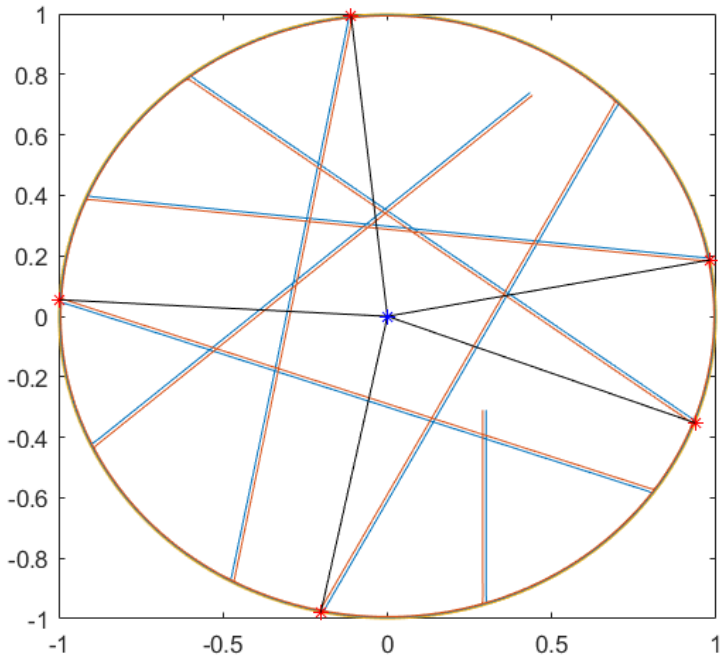
Figura 13 – Arco (em verde) na fronteira de $\mathbb{D}^1$ com ponto inicial em $A = (1, 0)$ (em azul) e ponto final em $P_k = (C_{1k}, C_{2k})$ (em vermelho).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Também é calculado o ângulo de incidência em cada ponto de interseção entre a reta $y_k = m_k\, x + b_k$ e a fronteira de $\mathbb{D}^1$.

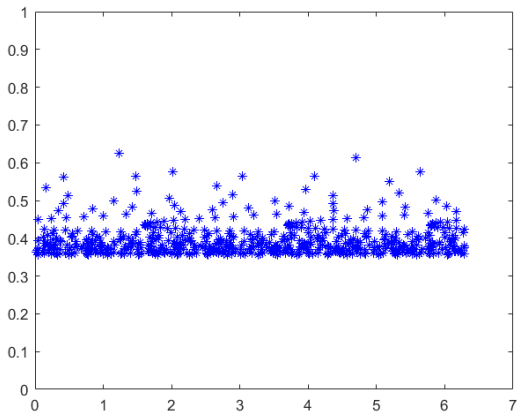
Figura 14 – Raios (em preto) passando pelos pontos de interseção entre a reta $y_k = m_k\, x + b_k$ e a fronteira de $\mathbb{D}^1$.



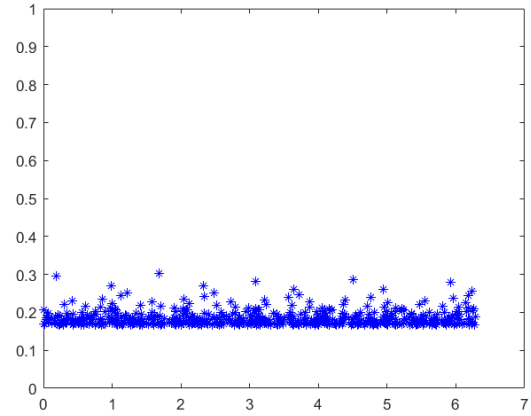
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em cada ponto P_k como dado em (4.2), denotemos por s_k e θ_k o comprimento de arco (com ponto final em P_k) e o ângulo de incidência, respectivamente, para assim, podermos gerar o espaço de fases $s_k \times \theta_k$. Percebe-se que, quanto mais distante da origem $(0, 0)$ as trajetórias se mantiverem, mais "próximo" de uma reta é o espaço de fases (s_k, θ_k). Isso significa que quanto mais longe as trajetórias dos dois vórtices se mantiverem da origem, mais próximo de um comportamento de bilhar circular terá uma partícula que tenha as retas que passam aproximadamente pelo ponto médio entre as traj.etórias dos vórtices como sua trajetória. Isso é mostrado nas figuras abaixo:

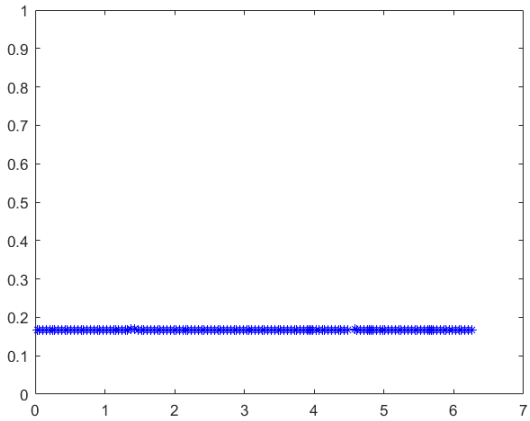
Figura 15 – Espaço de fases $s_k \times \theta_k$ para algumas trajetórias.



(a) Espaço de fases num tempo $t = 300$, as trajetórias se mantêm a uma distância $d = 0.43$ de $(0, 0)$.



(b) Espaço de fases num tempo $t = 300$, as trajetórias se mantêm a uma distância $d = 0.137$ de $(0, 0)$.



(c) Espaço de fases num tempo $t = 300$, as trajetórias se mantêm a uma distância $d = 0.951$ de $(0, 0)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

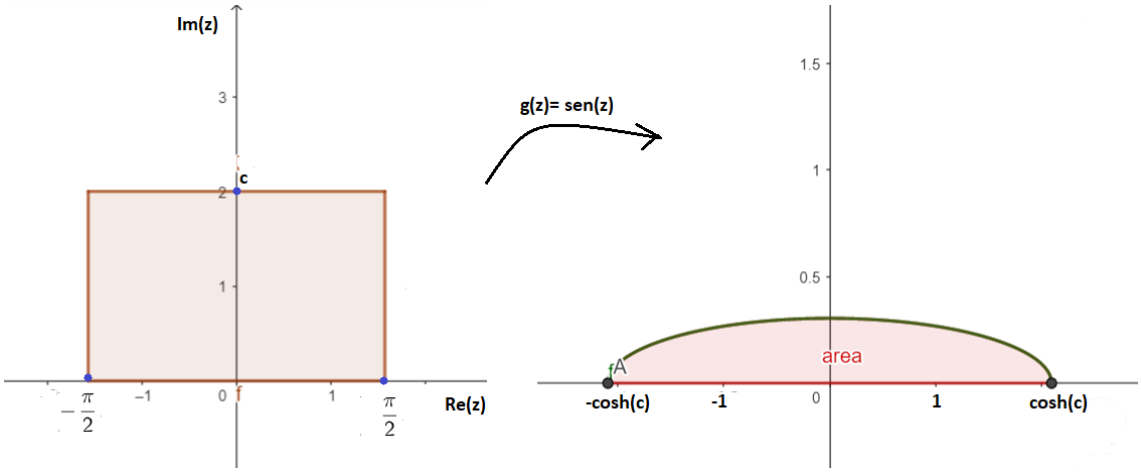
4.2 O MAPA CONFORME DE $\mathbb{E}^1$ EM $\mathbb{D}^1$

Como vimos no capítulo 1, a fim de se estudar a dinâmica de vórtices num domínio simplesmente conexo fechado (que é conforme a $\mathbb{D}^1$ pelo Teorema da aplicação de Riemann), devemos determinar explicitamente o mapa conforme.

A partir de agora, estaremos interessados na dinâmica de vórtices na região interna da elipse centrada na origem, de focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$, com semi-eixos $a = \cosh(c)$ e $b = senh(c)$, onde $c > 0$; tal domínio será denotado por $\mathbb{E}^1$. Nesta seção, apoiado fortemente pela referência (NEHARI, 1952), faremos a construção desse mapa conforme.

Proposição 4.2.1. *A função complexa* $g(z) = sen(z)$*, mapeia o retângulo* $-\frac{\pi}{2} < Re(z) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(z) < c$ *sobre a metade superior da Elipse* $\mathbb{E}^1$.

Figura 16 – Mapeamento da função $sen(z)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Cada ponto da imagem da função pode ser escrito como

$$u + i\,v = g(z) = sen(x)\,\cosh(y) + i\,cos(x)\,senh(y), \text{ onde } z = x + i\,y. \tag{4.3}$$

Com isso, temos

$$\frac{u^2}{\cosh^2(y)} + \frac{v^2}{senh^2(y)} = sen^2(x) + \cos^2(x) = 1. \tag{4.4}$$

Ou seja, as partes real e imaginária dos elementos da imagem da função $g(z) = sen(z)$ satisfazem a equação da elipse centrada na origem de semi eixos $a = \cosh(y)$ e $b = senh(y)$.

Fazendo $y = c$, a equação (4.4) nos mostra que a reta $y = c$ é transformada numa elipse de semi eixos $a = \cosh(c)$ e $b = senh(c)$.

Uma vez que

$$\cosh^2(y) - senh^2(y) = \cos^2(i\,y) + sen^2(i\,y) = 1,$$

segue que os focos da elipse estão em ± 1.

A elipse $\mathbb{E}^1$ é percorrida infinitas vezes quando z percorre toda a reta $y = c$, pois, a mesma é dada pela representação paramétrica $u = sen(x)\,\cosh(c)$, $v = \cos(x)\,senh(c)$ (que

são funções periódicas de período 2π). Assim, qualquer segmento de comprimento $2\,\pi$ na reta $y = c$ corresponde ao perímetro completo de $\mathbb{E}^1$.

Através de (4.3), mostra-se que a reta $y = 0$ via a função $g(z) = sen(z)$, é transformada no segmento de reta que liga -1 a 1.

Se considerarmos a semirreta $z = \dfrac{\pi}{2} + i\,y;\ y \geq 0$, temos

$$sen\left(\frac{\pi}{2} + i\,y\right) = \cos(i\,y) = \cosh(y) \geq 1.$$

E para a reta semirreta $z = -\dfrac{\pi}{2} + i\,y;\ y \geq 0$, tem-se

$$sen\left(-\frac{\pi}{2} + i\,y\right) = -\cosh(y) \leq -1.$$

Uma vez que $w = g(z) = sen(z)$ é contínua, temos que a imagem do conjunto convexo dada pela semi-faixa $-\frac{\pi}{2} < Re(z) < \frac{\pi}{2}$, $Im(z) > 0$ é um conjunto convexo cuja fronteira é o eixo real $Re(w)$.

Como a orientação é positiva, segue que a imagem da semi-faixa $-\frac{\pi}{2} < Re(z) < \frac{\pi}{2}$, $Im(z) > 0$ é o semiplano superior $Im(w) > 0$, e disto concluímos a demonstração. □

Queremos determinar explicitamente o mapa conforme $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$. Da proposição 4.2.1, tem-se que o mapa $w := f \circ sen$ mapeia o retângulo $-\frac{\pi}{2} < Re(z) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(z) < c$ no semicírculo unitário $||w|| < 1$.

Com isso, temos a seguinte afirmação:

Proposição 4.2.2. *O mapa* $w_1 = f_1(w) = \dfrac{2\,w}{1+w^2}$ *transforma o semicírculo unitário* $||w|| < 1$, $Im(w) > 0$, *no semiplano superior* $Im(w_1) > 0$.

Demonstração. O mapa f_1 é injetivo. De fato, sejam w_1 e w_2 elementos tais que $||w_1|| < 1$ e $||w_2|| < 1$, com $Im(w_1),\ Im(w_2) > 0$. Temos que

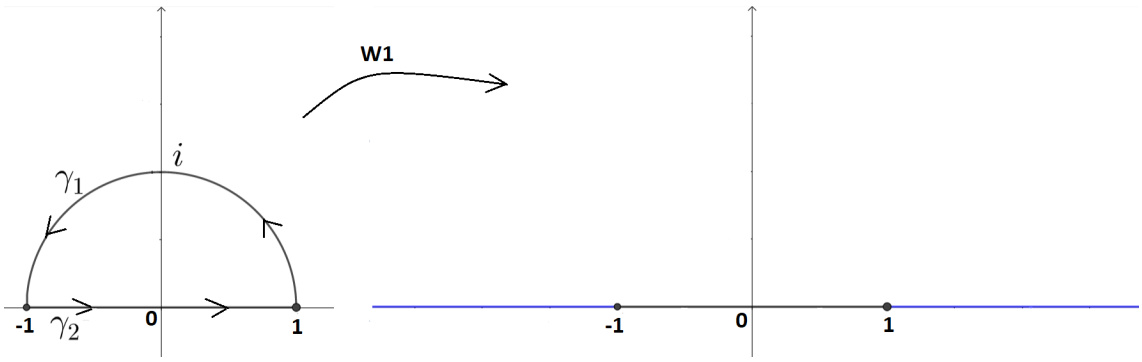
$$\begin{aligned} f_1(w_1) = f_1(w_2) &\implies \frac{2\,w_1}{1+w_1^2} = \frac{2\,w_2}{1+w_2^2} \\ &\implies 2\,w_1\left(1+w_2^2\right) = 2\,w_2\left(1+w_1^2\right) \\ &\implies (w_1 - w_2) = w_2\,w_1(w_1 - w_2) \\ &\implies w_1 = \frac{1}{w_2}\ (\text{Se } w_1 - w_2 \neq 0). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Mas, (4.5) é um absurdo, pois w_1 e w_2 são tais que $Im(w_1)$,$Im(w_2) > 0$. Portanto, devemos ter $w_1 = w_2$.

Assim, temos que f_1 é bijetiva sobre a sua imagem. Logo, devemos mostrar que a imagem de f_1 é de fato o semiplano superior.

Mostremos inicialmente que f_1 mapeia a fronteira do semicírculo superior $||w_1|| < 1$ na união $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ do w_1-plano.

Figura 17 – Fonte: Mapemamento do mapa w_1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $w = u + i\,v \in \gamma_1$ temos $||w|| = 1$, ou seja, $u^2 + v^2 = 1$ (isto é equivalente a $1 - u^2 - v^2 = 0$). Assim, sendo $w = u + i\,v$, tal que $||w|| < 1$ e $v > 0$; temos

$$Re(w_1) = \frac{2\,u + 2\,u^3 + 2\,u\,v^2}{(1 + u^2 - v^2)^2 + 4\,u^2\,v^2} = \frac{1}{u},$$

$$Im(w_1) = \frac{2\,v(1 - v^2 - u^2)}{(1 + u^2 - v^2)^2 + 4\,u^2\,v^2} = 0.$$

Logo, f_1 mapeia γ_1 nas semirretas $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Temos que a restrição de f_1 a γ_2 é a função real

$$g(x) = \frac{2\,x}{1 + x^2},\ x \in [-1, 1].$$

Pode-se ver que g_1 é contínua e crescente em γ_2; e γ_2 é conexo, disto segue que $g_1(\gamma_2)$ é conexo no eixo real, e o maior e o menor valor assumido por g_1 em γ_2 é $g_1(1) = 1$ e $g_1(-1) = -1$ respectivamente. Portanto, $g_1(\gamma_2) = [-1, 1]$.

Com isso, provamos que

- f_1 é bijetiva sobre sua imagem. (I)
- f_1 mapeia a fronteira de $||w|| < 1$ em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. (II)

- A imagem de $Re(w_1)$ por f_1 é a fronteira da imagem do semicírculo superior por f_1. (III)

Note que, se $||w|| < 1$, então $1 - u^2 - v^2 > 0$, logo, $Im(f_1(w)) > 0$, em outras palavras, tínhamos a princípio que a imagem do semicírculo superior por f_1 é um subconjunto do semiplano superior. Portanto, desse último fato e de (I), (II) e (III), segue o resultado. □

Das proposições (4.2.1) e (4.2.2), temos o corolário:

Corolário 4.2.1. *Seja* $g(\zeta) = \dfrac{2\,f(sen(\zeta))}{1 + f^2(sen(\zeta))}$, *onde* $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$*; então,* g *mapeia o retângulo* $-\frac{\pi}{2} < Re(\zeta) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(\zeta) < c$ *sobre o semiplano superior.*

Proposição 4.2.3. *Sejam as funções* $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$ *e* g *como no corolário anterior. Se* $f(1) = \alpha$ *então* $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\,\alpha}{1+\alpha^2}$, $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2\,\alpha}{1+\alpha^2}$, $g\left(\dfrac{\pi}{2} + i\,c\right) = 1$ *e* $g\left(-\dfrac{\pi}{2} + i\,c\right) = -1$, *onde* $0 < \alpha < 1$ *e* $c > 0$.

Demonstração. Para demonstrar a proposição, iremos demonstrar o seguinte fato:

FATO: Se $f(1) = \alpha$ então $f(-1) = -\alpha$.

O teorema de **Osgood-Caratheodory** afirma que qualquer mapa conforme do disco unitário $\mathbb{D}^1$ para algum domínio delimitado por uma curva de Jordan no plano complexo, se estende de forma contínua para um homeomorfismo da fronteira de $\mathbb{D}^1$ para a curva de Jordan. Com isso, temos que f admite uma extensão contínua e bijetiva entre a metade superior de $\mathbb{E}^1$ e a parte superior de $\mathbb{D}^1$. Uma vez que f já era bijetiva entre os interiores da semielipse e semicírculo, a extensão $\tilde{f}$ mapeia a fronteira de $\mathbb{E}^1$ na fronteira de $\mathbb{D}^1$ de forma bijetiva. Olhando para $\mathbb{E}^1$, ainda vale o Teorema de Osgood-Caratheodory.

Assim, podemos supor que a imagem da fronteira superior de $\mathbb{E}^1$ é mandada na parte superior da fronteira de $\mathbb{D}^1$ de forma bijetiva, caso contrário, basta compor com uma rotação.

Denotemos por A_1 a parte superior de $\mathbb{E}^1$ e por B_1 a parte superior de $\mathbb{D}^1$. Sendo assim, sejam $\gamma_1 = A_1 \cup [-\cosh(c), \cosh(c)]$ e $\gamma_2 = A_1 \cup [-1, 1]$. Uma vez que $[-\cosh(c), \cosh(c)]$ está no interior de $\mathbb{E}^1$, segue que $[-\cosh(c), \cosh(c)]$ é mapeado por f em $[-1, 1]$ de maneira bijetiva.

Note que, como $0 \in [-\cosh(c), \cosh(c)]$, $f'(0) > 0$ e juntamente do fato de f ser um mapa conforme, segue $f'(x) > 0, \forall x \in [-\cosh(c), \cosh(c)]$. Logo, f é crescente no intervalo $[-\cosh(c), \cosh(c)]$; uma vez que f mapeia bijetivamente $[-\cosh(c), \cosh(c)]$ em $[-1, 1]$, segue que $f(\cosh(c)) = 1$ e $f(-\cosh(c)) = -1$.

Analogamente, se restringirmos o intervalo $[-\cosh(c), \cosh(c)]$ para o intervalo $[-1, 1]$, a imagem se restringe a um intervalo $[-\alpha, \alpha]$, onde $0 < \alpha < 1$ (pois f é bijetiva). Utilizando o mesmo argumento, conclui-se que $f(-1) = \alpha$, demonstrando assim o fato.

Aplicando a função g nos valores especificados na proposição, através do fato demonstrado, concluímos a demonstração da proposição. □

Definição 4.2.1. *A função **elíptica de Jacobi** $w = \mathrm{sn}(z)$ é uma função analítica tal que $sn'(0) = 1$ e que mapeia o interior retângulo 34-a) sobre o semiplano superior 34-b) (da figura abaixo), tal que* $\mathrm{sn}\left(-K + i\,\tilde{K}\right) = -\frac{1}{k}$, $\mathrm{sn}\left(K + i\,\tilde{K}\right) = \frac{1}{k}$, $\mathrm{sn}(-K) = -1$ *e* $\mathrm{sn}(K) = 1$, *onde* K *e* $\tilde{K} > 0$.

Figura 18 – Função elíptica de Jacobi sn

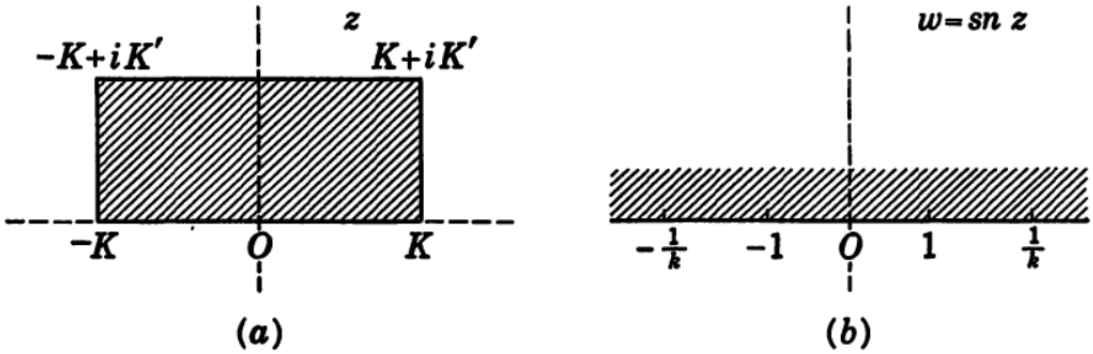


FIG. 34.

Fonte: (NEHARI, 1952).

Definição 4.2.2. *Dizemos que o parâmetro k é o **módulo** da função elíptica* $\mathrm{sn}(z; q)$, *onde*

$$k^2 = 16\,q \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + q^{2\,n}}{1 + q^{2\,n-1}} \right)^8 ,$$

com $0 < q < 1$ *(ver referência (NEHARI, 1952)).*

Proposição 4.2.4. *Seja* $g(\zeta) = \dfrac{2\,f(sen(\zeta))}{1 + f^2(sen(\zeta))}$, *vale a seguinte igualdade*

$$g(\zeta) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}\ \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi} \cdot \zeta \right),$$

onde as constantes K e $\tilde{K}$ associadas à função sn, *satisfazem* $\pi\,\tilde{K} = 2cK$, *com* $c > 0$ *e* $0 < \alpha < 1$.

Demonstração. Para demonstrar esta proposição, iremos demonstrar algumas afirmações.

Afirmação 1: A função $g(\zeta) = \dfrac{2\,f(sen(\zeta))}{1+f^2(sen(\zeta))}$ é bijetiva.

De fato, da proposição (4.2.2) temos que a função $w_1(w) = \dfrac{2\,w}{1+w^2}$ é bijetiva e mapeia a parte superior de $\mathbb{D}^1$ no semiplano superior. Temos também pelo teorema da aplicação de Riemann que $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$ é bijetiva. Com isso, resta mostrar que $f_1(\zeta) = sen(\zeta)$ é bijetiva.

Temos que

- $f_1 : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ é uma bijeção.
- f_1 restrita ao segmento de extremidades $-\dfrac{\pi}{2} + i\,c$ e $\dfrac{\pi}{2} + i\,c$ que tem como imagem a semielipse que vai de $-\cosh(c)$ a $\cosh(c)$ também é uma bijeção de acordo com a proposição (4.2.1).

Agora vamos mostrar que f_1 restrita ao segmento de extremidades $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2} + i\,c$ que tem como imagem o intervalo $[1, \cosh(c)]$ é uma bijeção. O mesmo argumento será utilizado para mostrar que f_1 restrita ao segmento de extremidades $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2} + i\,c$ que tem como imagem o intervalo $[-\cosh(c), -1]$ também é uma bijeção.

Lembremos que $sen\left(\dfrac{\pi}{2} + i\,y\right) = \cosh(y)$, para $0 \leq y \leq c$. Uma vez que $h(y) = \cosh(y)$ é crescente para $y \geq 0$, segue que h é injetiva. Além disso, para $0 \leq y \leq c$ tem-se $1 \leq \cosh(y) \leq \cosh(c)$, logo, $h : [0, c] \to [1, \cosh(c)]$ é bijetiva.

Sabemos que $f_1(\zeta) = sen(\zeta)$ na faixa infinita $-\frac{\pi}{2} < Re(\zeta) < \frac{\pi}{2}$ é injetiva, em particular, f_1 é injetiva no retângulo $-\frac{\pi}{2} < Re(\zeta) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(\zeta) < c$. Utilizando a continuidade de f_1, segue a sobrejetividade. Portanto, f_1 é bijetivo. Com isso, concluímos a demonstração da afirmação 1.

Afirmação 2: A função $g(\zeta) = \dfrac{2\,f(sen(\zeta))}{1+f^2(sen(\zeta))}$ é um mapa conforme.

De fato, as funções $f_1(z) = sen(z)$ e $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$ são mapas conformes (o último, pelo teorema da aplicação de Riemann). Assim, resta mostrar que a função $w_1(w) = \dfrac{2\,w}{1+w^2}$ é também um mapa conforme. Temos como derivada para a função w_1, a expressão

$$(w_1)' = \frac{2(1-w^2)}{(1+w^2)^2}.$$

Disto, segue que w_1 é conforme no interior de $\mathbb{D}^1$.

Afirmação 3: A função $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta\right)$, com $0 < \alpha < 1$; mapeia o retângulo $-\frac{\pi}{2} < Re(\zeta) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(\zeta) < c$ sobre o semiplano superior.

De fato, de acordo com a figura 9, percebemos que para a função $h_1(\zeta) = \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta\right)$, o retângulo $-K < Re(\zeta) < K$, $0 < Im(\zeta) < \tilde{K}$ não é suficiente para ser mapeado no semiplano superior. Sendo assim, considere então o retângulo $-\frac{\pi}{2} < Re(\zeta) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(\zeta) < c$, tem-se

- $\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + i\,c\right)\right) = \mathrm{sn}(-K + i\,\tilde{K}) = -\frac{1}{k}$.
- $\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + i\,c\right)\right) = \mathrm{sn}(K + i\,\tilde{K}) = \frac{1}{k}$.
- $\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{sn}(-K) = -1$.
- $\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{sn}(K) = 1$.

Logo, $h_1(\zeta) = \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta\right)$ mapeia o retângulo $-\frac{\pi}{2} < Re(\zeta) < \frac{\pi}{2}$, $0 < Im(\zeta) < c$, sobre o semiplano superior. Para concluírmos a demonstração da afirmação 3, precisamos demonstrar a seguinte afirmação

Afirmação 4: Se $\alpha \in (0,1)$ então $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \in (0,1)$.

De fato, como

$$0 < (1-\alpha)^2 = 1 + \alpha^2 - 2\,\alpha,$$

tem-se

$$2\,\alpha < 1 + \alpha^2.$$

O que nos dá (uma vez que $\alpha > 0$)

$$0 < \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} < 1.$$

Com isso, podemos fazer $k = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, e com isso obter

- $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + i\,c\right)\right) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}(-K + i\,\tilde{K}) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\left(-\frac{1}{k}\right)$
  $= -\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\left(\frac{1+\alpha^2}{2\,\alpha}\right) = -1.$
- $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + i\,c\right)\right) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}(K + i\,\tilde{K}) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1}{k}$
  $= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\left(\frac{1+\alpha^2}{2\,\alpha}\right) = 1.$

- $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{2\,K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}(K) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$
- $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{2\,K}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}(-K) = -\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}.$

Portanto, está demonstrada a afirmação 3.

Veja que, h_1 é bijetiva e conforme. Também, perceba que

- $h_1(0) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{2\,K}{\pi}\cdot 0\right) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cdot \mathrm{sn}(0) = 0$ (I)
- $g(0) = \dfrac{2\,f(sen(0))}{1+f^2(sen(0))} = \dfrac{2\,f(0)}{1+f^2(0)} = 0$ (II)

De (I) e (II), tem-se $h_1(0) = g(0)$. Também, temos que

$$\begin{aligned} h_1'(0) &= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,\mathrm{sn}'\,(0)\cdot\frac{2\,K}{\pi} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{2\,K}{\pi} > 0 \\ &\Longrightarrow \arg\left(h_1'(0)\right) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{2\,f'(0)}{1+f^2(0)} > 0 \\ &\Longrightarrow \arg\left(g'(0)\right) = 0. \end{aligned}$$

Observação: Quando escrevemos $g(0) = 0$ ou que $g'(0) > 0$, estamos nos referindo a restrição da função g (consequentemente da sua derivada g') ao eixo real, obtendo assim, uma função real.

Portando, utilizando esses fatos, juntamente com o teorema da aplicação de Riemann, segue a demonstração da proposição (4.2.4). □

Para demonstrar as proposições a seguir. iremos recorrer frequentemente a figura abaixo

Figura 19 – Função sn

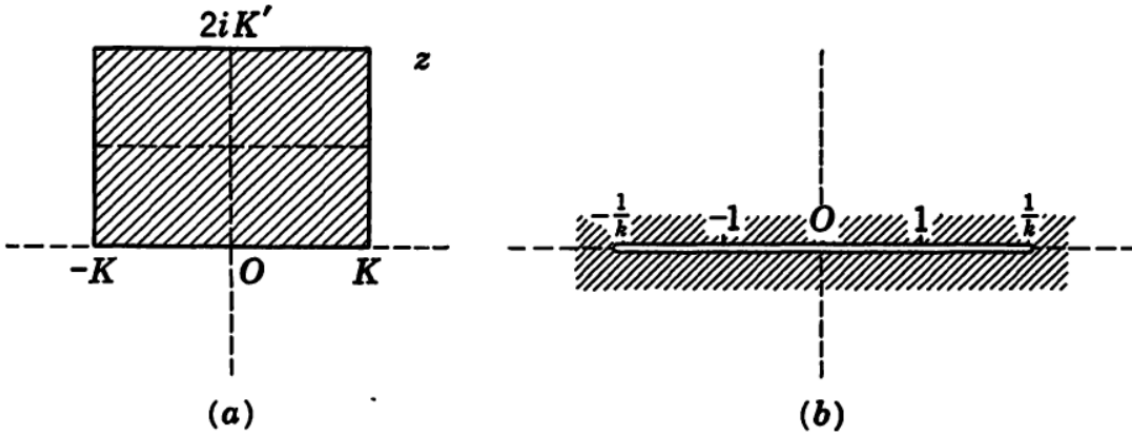


FIG. 36.

Fonte: (NEHARI, 1952).

Proposição 4.2.5. *Sejam $\beta > 0$ e $\alpha \in (0,1)$, temos a igualdade*

$$\mathrm{sn}(z;q) = \frac{2}{k} \cdot \frac{\beta \ \mathrm{sn}\,(\alpha\, z; q^2)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\,(\alpha\, z; q^2)}.$$

Demonstração. A função $\mathrm{sn}\,(\alpha\, z; q^2)$ mapeia o retângulo 19-a) sobre o semiplano superior (ver referência (NEHARI, 1952)).

Agora, precisaremos demonstrar a seguinte afirmação

Afirmação: A função $w(w_1) = \dfrac{2}{k} \cdot \dfrac{\beta\, w_1}{\beta^2 + w_1^2}$ com $\beta > 0$, mapeia o semiplano superior $Im(w_1) > 0$ sobre 19-b).

Com efeito, em (NEHARI, 1952),

$$\begin{aligned} w(w_1) = \frac{2}{k} \cdot \frac{\beta\, w_1}{\beta^2 + w_1^2} &\implies w\,\left(\beta^2 + w_1^2\right) = \frac{2}{k} \cdot \beta\, w_1 \\ &\implies w\,\beta^2 + w\, w_1^2 = \beta\, w_1 \\ &\implies k\, w\,\beta^2 + k\, w\, w_1^2 = 2\,\beta\, w_1 \\ &\implies k\, w\,\beta^2 + k\, w\, w_1^2 - 2\,\beta\, w_1 = 0 \\ &\implies k\,\overline{w}\, w\,\beta^2 + k\, w\,\overline{w}\, w_1^2 - 2\,\beta\, w_1\,\overline{w} = 0. \end{aligned}$$

O que nos dá

$$w_1 = \frac{\beta}{k \cdot ||w||^2} \cdot \left(\overline{w} + \sqrt{\overline{w}^2 - k^2 ||w||^4}\right). \tag{4.6}$$

Veja que o número complexo $z = \overline{w}^2 - k^2||w||^4$ tem duas raízes quadradas, a saber, z e $-z$. A fim de que w_1 esteja de fato em $Im(w_1) > 0$, devemos escolher a raiz que possui parte imaginária positiva. Isto é equivalente a escolher a raiz que tenha o argumento θ no intervalo $(0, \pi)$.

Note que a função $G(z) = \sqrt{z}$ está definida para números complexos cujo argumento varia no intervalo $(0, 2\,\pi)$, ou seja o domínio de $G(z) = \sqrt{z}$ é o conjunto $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}; z \in Re(z) \text{ e } z \leq 0\}$. Vejamos a condição para o que está dentro da raiz em (4.6) seja um número real positivo.

Primeiramente, w deve ser real, logo, $w = \overline{w}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{w}^2 - k^2||w||^4 > 0 &\implies w^2 - k^2 w^4 > 0 \\
&\implies w^2 > k^2 w^4 \\
&\implies k^2 w^2 < 1 \\
&\implies |w|^2 < \frac{1}{k^2} \\
&\implies |w| < \frac{1}{k} \\
&\implies -\frac{1}{k} < w < \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que o domínio de $z = \sqrt{\overline{w}^2 - k^2||w||^4}$ é a figura 19-b). Logo, a fim de que a imagem de w_1 seja o semiplano superior, o domínio de w_1 deve ser a figura 36-b). Uma vez que w_1 é a função inversa da função w dada na afirmação, segue a demonstração da mesma.

Perceba que da última afirmação, temos que w é sobrejetiva e mapeia o semiplano superior em 19-b). Sem muitas dificuldades, pode-se mostrar que w é injetiva, nos dando o fato de que w na verdade é uma bijeção do semiplano superior na figura 19-b).

Da última afirmação, segue que a função $g(z) = \dfrac{2}{k} \cdot \dfrac{\beta \ \mathrm{sn}\,(\alpha\, z; q^2)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\,(\alpha\, z; q^2)}$ mapeia o retângulo 19-a) na figura 19-b). Vimos anteriormente que a função $\mathrm{sn}(z; q)$ faz o mesmo mapeamento.

Para concluirmos a demonstração desta proposição, iremos utilizar o seguinte teorema de variáveis complexas, o qual não iremos demonstrar (para maiores detalhes ver referência (NEHARI, 1952)).

Teorema 4.2.1. *Sejam f e g duas funções analíticas em um domínio simplesmente conexo; se tais funções coincidem em três pontos da fronteira desse domínio, então $f = g$.*

Iremos utilizar o teorema (4.2.1) para as funções g e sn. Uma vez que por definição $\mathrm{sn}(0) = 0$, tem-se

$$g(0) = \frac{2}{k} \cdot \frac{\beta \, \mathrm{sn}\,(0; q^2)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\,(0; q^2)} = \frac{2}{k} \cdot 0 \Longrightarrow \mathrm{sn}(0) = g(0).$$

Seja β tal que $\dfrac{2\,\beta}{1+\beta^2} = k$, então

$$g(\pm K) = \frac{2}{k} \cdot \frac{\beta \, \mathrm{sn}\,(\pm\alpha K; q^2)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\,(\pm\alpha K; q^2)} = \pm\frac{2}{k} \cdot \frac{\beta}{1+\beta^2} = \pm 1.$$

Já tínhamos também que $\mathrm{sn}(\pm K; q) = \pm 1$. Portanto, segue da afirmação juntamente com o teorema (4.2.1) a demonstração para a proposição (4.2.5). □

Proposição 4.2.6. *Seja $k(q)$ o módulo da função elíptica $\mathrm{sn}(z; q)$, então*

$$k(q) = \frac{2\sqrt{k(q^2)}}{1 + k(q^2)} \;\; \textit{e} \;\; \mathrm{sn}(z; q) = \frac{[1 + k(q^2)]\,\mathrm{sn}\,(\alpha\, z; q^2)}{1 + k(q^2)\,(\alpha\, z; q^2)},$$

onde $\alpha = \dfrac{1}{1 + k(q^2)}$.

Demonstração. De fato,

$\mathrm{sn}\left(\alpha\left(K + 2\tilde{K}i\right); q^2\right) = \dfrac{1}{k(q^2)}$ e $\mathrm{sn}\left(K + 2\tilde{K}i; q\right) = \mathrm{sn}(K; q) = 1.$

Para a primeira parte, iremos utilizar a proposição (4.2.5). e obter

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}(z; q) &= \frac{2}{k} \cdot \frac{\beta \, \mathrm{sn}\,(\alpha\, z; q^2)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\,(\alpha\, z; q^2)} \\ &\iff k(q) = \frac{2}{\mathrm{sn}(z; q)} \cdot \frac{\beta \, \mathrm{sn}\,(\alpha\, z; q^2)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\,(\alpha\, z; q^2)}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} k(q) &= \frac{2}{\mathrm{sn}\left((K + 2\tilde{K}i; q\right)} \cdot \beta \cdot \frac{\mathrm{sn}\left(\alpha\left(K + 2\tilde{K}i\right); q^2\right)}{\beta^2 + \mathrm{sn}^2\left(\alpha\left(K + 2\tilde{K}i\right); q^2\right)} \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{k(q^2)}}{\beta^2 + \frac{1}{k^2(q^2)}} \\ &= \frac{2\,\beta k(q^2)}{1 + \beta^2 k^2(q^2)}. \end{aligned}$$

Lembremos que por um lado, temos $k = \dfrac{2\,\beta}{1+\beta^2}$, por outro lado,

$$K(q) = \frac{2\,\beta k(q^2)}{1 + \beta^2 k^2(q^2)}. \tag{4.7}$$

Logo,

$$\frac{2\,\beta}{1+\beta^2} = \frac{2\,\beta k(q^2)}{1+\beta^2 k^2(q^2)}.$$

De (4.7), segue que $2\,\beta = 2\,\beta\,k(q^2)$ ou $\beta\,(\beta k(q^2)) = 1$, ou seja, $\beta\,k(q^2) = \beta$ ou $\beta^2\,k(q^2) = 1$. Mas, a primeira possibilidade é impossível, pois $k(q^2) \in (0,1)$. Portanto, resta apenas a solução $\beta^2\,k(q^2) = 1$. Nos dando,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{k(q^2)}}. \tag{4.8}$$

Substituindo β encontrado em (4.8) na expressão $k = \dfrac{2\,\beta}{1+\beta^2}$, obtemos

$$k(q) = \frac{\frac{2}{\sqrt{k(q^2)}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{k(q^2)}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{k(q^2)}} \cdot \frac{k(q^2)}{1+k(q^2)} = \frac{2\sqrt{k(q^2)}}{1+k(q^2)}.$$

Para demonstrar a segunda parte, novamente iremos utilizar a proposição (4.2.5). Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(z;q) &= \frac{2}{k} \cdot \frac{\beta\,\operatorname{sn}(\alpha\,z;q^2)}{\beta^2+\operatorname{sn}^2(\alpha\,z;q^2)} \\
&= \frac{2}{\left(\dfrac{2\sqrt{k(q^2)}}{1+k(q^2)}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{k(q^2)}} \cdot \operatorname{sn}(\alpha\,z;q^2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{k(q^2)}}\right)^2+\operatorname{sn}^2(\alpha\,z;q^2)} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1+k(q^2)}{2\sqrt{k(q^2)}}\right) \cdot \frac{\frac{\operatorname{sn}\left(\alpha\,z;q^2\right)}{\sqrt{k(q^2)}}}{\frac{1}{k(q^2)}+\operatorname{sn}^2(\alpha\,z;q^2)} \\
&= \frac{1+k(q^2)}{2\sqrt{k(q^2)}} \cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha\,z;q^2)}{\sqrt{k(q^2)}} \cdot \frac{k(q^2)}{1+k^2(q^2)\,\operatorname{sn}^2(\alpha\,z;q^2)} \\
\Longrightarrow\ \operatorname{sn}(z;q) &= \frac{[1+k(q^2)]\,\operatorname{sn}(\alpha\,z;q^2)}{1+k(q^2)\operatorname{sn}^2(\alpha\,z;q^2)}.
\end{aligned}$$

□

Uma vez que $k = \dfrac{2\,\alpha}{1+\alpha^2}$, onde $\alpha \in (0,1)$, para $q = e^{-2\,c}$, com $c > 0$; temos

$$k\left(e^{-2\,c}\right) = \frac{2\,\alpha}{1+\alpha^2}. \tag{4.9}$$

Segue da proposição (4.2.6) e da equação (4.9) que $\alpha = \sqrt{k(q^2)}$. Uma vez que $q = e^{-2\,c}$ tem-se $q^2 = e^{-4\,c}$, logo, $\alpha = \sqrt{k\left(e^{-4\,c}\right)}$.

Proposição 4.2.7. *Dado o mapa conforme $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{D}^1$, tem-se a igualdade*

$$f\left(sen(\zeta)\right) = \sqrt{k\left(e^{-4\,c}\right)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\zeta; e^{-4\,c}\right),\ \ K = K\left(e^{-4\,c}\right).$$

Demonstração. Das últimas proposições, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(q)} \cdot \frac{2\,f\left(sen(\zeta)\right)}{1+f^2\left(sen(\zeta)\right)} &= \frac{\left[1+k(q^2)\right]\ \mathrm{sn}\left(\alpha\,\frac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta; q^2\right)}{1+k(q^2)\,\mathrm{sn}^2\left(\alpha\,\frac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta; q^2\right)} \\
&\Longrightarrow\ \frac{2\,f\left(sen(\zeta)\right)}{k(q)} \cdot \frac{1}{1+f^2\left(sen(\zeta)\right)} \\
&= \frac{\left[1+k(q^2)\right]\ \mathrm{sn}\left(\alpha\,\frac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta; q^2\right)}{1+k(q^2)\,\mathrm{sn}^2\left(\alpha\,\frac{2\,K}{\pi}\cdot\zeta; q^2\right)}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Note que, se $f\left(sen(\zeta)\right) = \sqrt{k\left(e^{-4\,c}\right)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha\cdot 2\,K}{\pi}\,\zeta; q^2\right)$, com $K = K\left(e^{-4\,c}\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot K$, então

$$\begin{aligned}
\frac{2\,f\left(sen(\zeta)\right)}{k(q)} &= \frac{2\sqrt{k\left(e^{-4\,c}\right)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha\cdot 2\,K}{\pi}\,\zeta; q^2\right)}{\left(\frac{2\sqrt{k(e^{-4\,c})}}{1+k(e^{-4\,c})}\right)} \\
&\Longrightarrow\ \frac{2\,f\left(sen(\zeta)\right)}{k\left(e^{-c}\right)} = \left[1+k\left(e^{-4\,c}\right)\right]\ \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha\cdot 2\,K}{\pi}\,\zeta; e^{-4\,c}\right) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

De (4.10) e (4.11) , tem-se

$$\begin{aligned}
1+f^2\left(sen(\zeta)\right) &= 1+k(q^2)\ \mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha\cdot 2\,K}{\pi}\,\zeta; q^2\right) \\
&\Longrightarrow\ f\left(sen(\zeta)\right) = \sqrt{k\left(e^{-4\,c}\right)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha\cdot 2\,K}{\pi}\,\zeta; e^{-4\,c}\right),\ \text{onde } K = K\left(e^{-4\,c}\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot K \\
&\Longrightarrow\ f\left(sen(\zeta)\right) = \sqrt{k\left(e^{-4\,c}\right)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\zeta; e^{-4\,c}\right).
\end{aligned}$$

Com isto, concluímos a demonstração desta proposição. □

Lembrando que os semieixos da fronteira de $\mathbb{E}^1$ são $a = \cosh(c)$ e $b = \mathrm{senh}(c)$, com $c > 0$. Fazendo $z = sen(\zeta)$ e utilizando a proposição (4.2.7), obtemos o mapa conforme que estávamos buscando no decorrer desta seção, que é dado por

$$f(z) = \sqrt{k(\rho)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\ \mathrm{arcsen}(z); \rho\right),\ \text{onde } \rho = e^{-4\,c}. \qquad (4.12)$$

Temos ainda que os focos da fronteira de $\mathbb{E}^1$ correspondem aos pontos

$$w = f(\pm 1) = \pm\sqrt{k(\rho)}.$$

4.3 O CASO ELÍPTICO

Na seção anterior, vimos que o mapa conforme de $\mathbb{E}^1$ em $\mathbb{D}^1$ é dado pela função elíptica

$$f(w) = \sqrt{k(\rho)}\ \mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\ \mathrm{arcsen}(w); \rho\right),\ \text{ onde }\ \rho = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,\ a = \cosh(c), b = \mathrm{senh}(c), c > 0, \tag{4.13}$$

onde $w = u + i\,v$.

Lembremos que a fronteira de $\mathbb{E}^1$ possui a seguinte equação

$$\frac{x^2}{\cosh^2(c)} + \frac{y^2}{\mathrm{senh}^2(c)} = 1,\ \text{ e } c > 0.$$

Nesse caso, não teremos uma circunferência como um membro da família de elipses dada na última equação.

Consequentemente, através do teorema 2.21, temos o Hamiltoniano que descreve a dinâmica de vórtices em $\mathbb{E}^1$, onde f é dado em (4.5), cujas equações de movimento são dadas por

$$\Gamma_j\,\overline{\dot{w}_j} = 2\,i\,\frac{\partial H}{\partial w_j},\ j = 1, 2, ..., N,$$

com $w_j = u_j + i\,v_j$.

Para o caso de dois vórtices, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_1\,\overline{\dot{w}_1}}{2\,i} = &- \frac{f'(w_1)\,\overline{f(w_1)}}{1 - ||f(w_1)||^2} - \frac{f''(w_1)\,\overline{f'(w_1)}}{2\,||f'(w_1)||^2} + f'(w_1)\left(\frac{\overline{f(w_1) - f(w_2)}}{||f(w_1) - f(w_2)||^2}\right)\\ &+ f'(w_1)\,\overline{f(w_2)}\left(\frac{1 - \overline{f(w_1)}\,f(w_2)}{||1 - f(w_1)\,\overline{f(w_2)}||^2}\right),\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_2\,\overline{\dot{w}_2}}{2\,i} = &- \frac{f'(w_2)\,\overline{f(w_2)}}{1 - ||f(w_2)||^2} - \frac{f''(w_2)\,\overline{f'(w_2)}}{2\,||f'(w_2)||^2} - f'(w_2)\left(\frac{\overline{f(w_1) - f(w_2)}}{||f(w_1) - f(w_2)||^2}\right)\\ &+ f'(w_2)\,\overline{f(w_1)}\left(\frac{1 - \overline{f(w_2)}\,f(w_1)}{||1 - f(w_1)\,\overline{f(w_2)}||^2}\right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para obtermos o resultado numérico, precisamos escrever o Hamiltoniano em coordenadas reais, assim como as respectivas equações de movimento para dois vórtices. Antes disso, precisamos de maneira explícita, das derivadas de primeira e segunda ordem do mapa conforme dado em (4.5), as quais são dadas respectivamente por

$$f'(w) = \left(\frac{2\,K\,\sqrt{k(\rho)}}{\pi\,\sqrt{1-w^2}}\right)\,\mathrm{cn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)\,\mathrm{dn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)$$

$$\begin{aligned} f''(w) &= \left(\frac{2\,K\,\sqrt{k(\rho)}}{\pi}\right)\left(\frac{w}{\sqrt{(1-w^2)^3}}\,\mathrm{cn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)\,\mathrm{dn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)\right) \\ &- \left(\frac{4\,K^2\,\sqrt{k(\rho)}}{\pi^2}\right)\left(\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)}{1-w^2}\right)\left(\mathrm{dn}^2\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)\right) \\ &- \left(\frac{4\,K^2\,\sqrt{k(\rho)}}{\pi^2}\right)\left(\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)}{1-w^2}\right)\left(k^2(\rho)\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\mathrm{arcsen}(w);\rho\right)\right). \end{aligned}$$

Uma vez que apresentadas tais derivadas do mapa conforme f dado em (4.5), sejam $x_j = Re\,(f(w_j))$, $y_j = Im\,(f(w_j))$ e $\dfrac{\partial\,x_j}{\partial\,u_j} = Re\,(f'(w_j))$, $\dfrac{\partial\,y_j}{\partial\,u_j} = Im\,(f'(w_j))$ $j = 1, 2$. O Hamiltoniano que governa a dinâmica de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ em coordenadas reais é dado por

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{4\,\pi}\left[\Gamma_1^2\,\log\left(\sqrt{\left(\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)^2}\right)-\Gamma_1^2\,\log\left(1-x_1^2-y_1^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{4\,\pi}\left[\Gamma_2^2\,\log\left(\sqrt{\left(\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}\right)^2}\right)-\Gamma_2^2\,\log\left(1-x_2^2-y_2^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{4\,\pi}\left[\Gamma_1\,\Gamma_2\,\log\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{4\,\pi}\left[\Gamma_1\,\Gamma_2\,\log\left((1-x_1\,x_2-y_1\,y_2)^2+(x_1\,y_2-x_2\,y_1)^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Nas equações de movimento, são usadas as equações de Cauchy-Riemann para as seguintes derivadas parciais

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\,x_j}{\partial\,u_j} = \dfrac{\partial\,y_j}{\partial\,v_j} \\ \dfrac{\partial\,x_j}{\partial\,v_j} = -\dfrac{\partial\,y_j}{\partial\,u_j} \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\,x_j}{\partial\,u_j^2} = \dfrac{\partial^2\,y_j}{\partial\,v_j\,\partial\,u_j} \\ \dfrac{\partial^2\,x_j}{\partial\,v_j\,\partial\,u_j} = -\dfrac{\partial^2\,y_j}{\partial\,u_j^2} \end{array}\right. \quad \text{onde } j = 1, 2.$$

Com isso, temos as equações de movimento

$$
\begin{aligned}
\dot{u_1} &= -\frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{\Gamma_1}{\left(\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)^2}\left(-\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\cdot\frac{\partial^2\,y_1}{\partial\,u_1^2}+\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\cdot\frac{\partial^2\,x_1}{\partial\,u_1^2}\right)\right]\\
&- \frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{2\,\Gamma_1}{1-x_1^2-y_1^2}\left(-x_1\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}+y_1\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)\right]\\
&- \frac{\Gamma_2}{4\,\pi}\left[\frac{2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\left(-(x_1-x_2)\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}+(y_1-y_2)\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)\right]\\
&+ \frac{\Gamma_2}{4\,\pi}\left[\frac{2\,(1-x_1x_2-y_1y_2)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(x_2\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}-y_2\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)\right]\\
&+ \frac{\Gamma_2}{4\,\pi}\left[\frac{2\,(x_1y_2-y_1x_2)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(-y_2\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}-x_2\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)\right],
\end{aligned}
$$

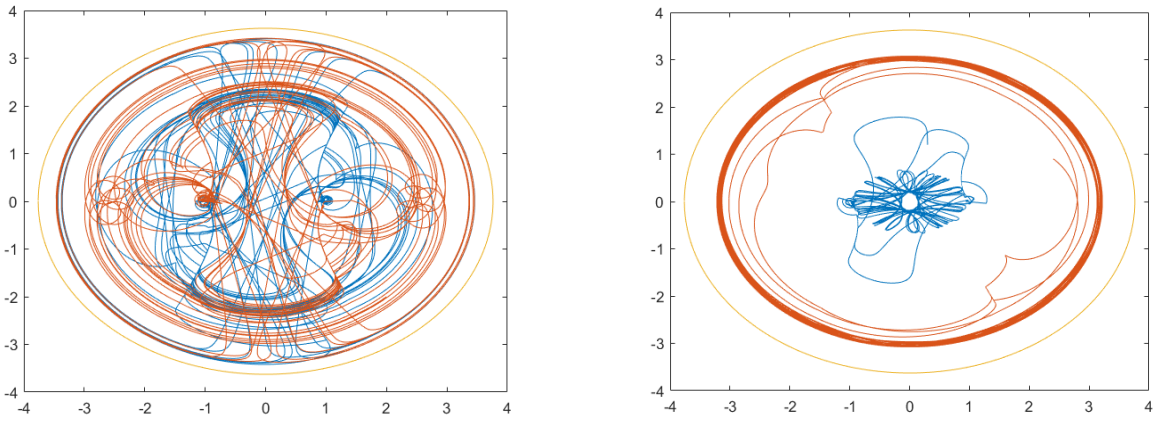
$$
\begin{aligned}
\dot{v_1} &= +\frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{\Gamma_1}{\left(\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)^2}\left(\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}\cdot\frac{\partial^2\,x_1}{\partial\,u_1^2}+\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\cdot\frac{\partial^2\,y_1}{\partial\,u_1^2}\right)\right]\\
&+ \frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{2\,\Gamma_1}{1-x_1^2-y_1^2}\left(x_1\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}+y_1\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)\right]\\
&+ \frac{\Gamma_2}{4\,\pi}\left[\frac{2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\left((x_1-x_2)\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}+(y_1-y_2)\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)\right]\\
&- \frac{\Gamma_2}{4\,\pi}\left[\frac{2\,(1-x_1x_2-y_1y_2)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(-x_2\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}-y_2\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)\right]\\
&- \frac{\Gamma_2}{4\,\pi}\left[\frac{2\,(x_1y_2-y_1x_2)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(y_2\cdot\frac{\partial\,x_1}{\partial\,u_1}-x_2\cdot\frac{\partial\,y_1}{\partial\,u_1}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{u_2} &= -\frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{\Gamma_2}{\left(\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}\right)^2}\left(-\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}\cdot\frac{\partial^2\,y_2}{\partial\,u_2^2}+\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}\cdot\frac{\partial^2\,x_2}{\partial\,u_2^2}\right)\right]\\
&- \frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{2\,\Gamma_2}{1-x_2^2-y_2^2}\left(-x_2\cdot\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}+y_2\cdot\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}\right)\right]\\
&- \frac{\Gamma_1}{4\,\pi}\left[\frac{2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\left((x_1-x_2)\cdot\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}-(y_1-y_2)\cdot\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}\right)\right]\\
&+ \frac{\Gamma_1}{4\,\pi}\left[\frac{2\,(1-x_1x_2-y_1y_2)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(x_1\cdot\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}-y_1\cdot\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}\right)\right]\\
&+ \frac{\Gamma_1}{4\,\pi}\left[\frac{2\,(x_1y_2-y_1x_2)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(x_1\cdot\frac{\partial\,x_2}{\partial\,u_2}+y_1\cdot\frac{\partial\,y_2}{\partial\,u_2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{v_2} &= +\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\Gamma_2}{\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right)^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial u_2^2}+\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial u_2^2}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2\Gamma_2}{1-x_2^2-y_2^2}\left(x_2\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u_2}+y_2\cdot\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right)\right] \\
&+ \frac{\Gamma_1}{4\pi}\left[\frac{2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\left(-(x_1-x_2)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u_2}-(y_1-y_2)\cdot\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right)\right] \\
&- \frac{\Gamma_1}{4\pi}\left[\frac{2\left(1-x_1x_2-y_1y_2\right)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(-x_1\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u_2}-y_1\cdot\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right)\right] \\
&- \frac{\Gamma_1}{4\pi}\left[\frac{2\left(x_1y_2-y_1x_2\right)}{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}\left(x_1\cdot\frac{\partial y_2}{\partial u_2}-y_1\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Para o caso elíptico, também utilizamos o método de **Runge-Kutta** para simular as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ por um tempo suficiente grande, a fim de obter a maior consistência possível para o resultado. Estaremos considerando o caso em que o parâmetro c dado na equação (4.13) é $c = 2.9932$ e com isso, temos como excentricidade da elipse $e = 0.1$, ou seja, iremos estudar a dinâmica de vórtices num interior de uma elipse que é muito próxima de $\mathbb{D}^1$. Na figura a seguir, temos as trajetórias de dois vórtices com duas condições iniciais

Figura 20 – Dois casos de trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$.



(a) Trajetória de dois vórtices no tempo $t = 800$ e com condição inicial $u_1(0) = 1$, $v_1(0) = 2$, $u_2(0) = 2$ e $v_2(0) = 2$.

(b) Trajetória de dois vórtices no tempo $t = 800$ e com condição inicial $u_1(0) = 0.3$, $v_1(0) = 1.2$, $u_2(0) = 2.4$ e $v_2(0) = 0.9$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

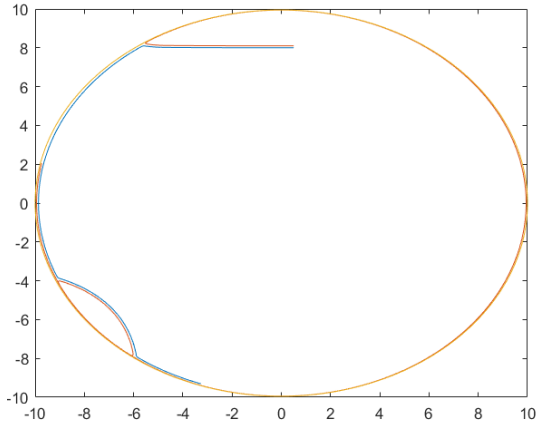
Como já mencionado no início desta seção, os resultados obtidos para o caso elíptico, foram considerando a fronteira de $\mathbb{E}^1$ com excentricidade muito pequena, o que significa

termos $\mathbb{E}^1$ muito "próximo" de $\mathbb{D}^1$, e com isso, considerando as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ no sentido da conjectura de Kimura, apontamos quais comportamentos das trajetórias são preservados quando passamos de $\mathbb{D}^1$ para $\mathbb{E}^1$ (com excentricidade muito pequena) e quais comportamentos não são preservados.

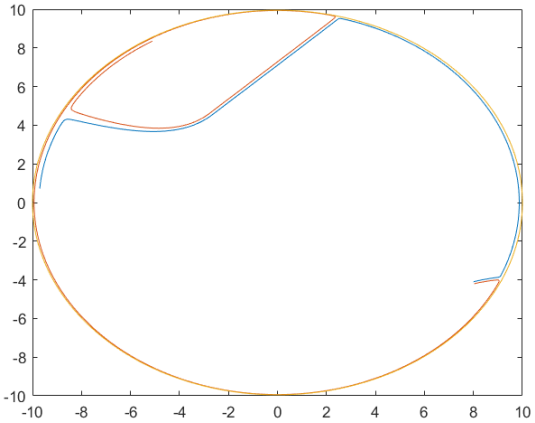
Lembrando que a fronteira de $\mathbb{E}^1$ é a elipse centrada na origem cujos focos estão situados em ± 1, semieixo maior $a = \cosh(c)$ e semieixo menor $b = \operatorname{senh}(c)$. Estaremos considerando $c = 2.9932$, o que nos dá como valores para os semieixos $a = 9.9998$, $b = 9.9496$ e como excentricidade da fronteira de $\mathbb{E}^1$, o valor $e = 0.1$.

A primeira análise feita após várias simulações, é que sob as hipóteses da conjectura de Kimura, as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ não se comportam como esperado por um longo tempo, no sentido das trajetórias não serem retas. São apresentadas nas figuras abaixo, dois casos em que isso acontece, na figura a), consideramos dois vórtices dipolos com condições iniciais $u_1(0) = 0.5$, $v_1(0) = 8.0$, $u_2(0) = 0.5$ e $v_2(0) = 8.1$ no período de tempo $t = 3$. Na figura b), obtemos o mesmo resultado para dois vórtices dipolos com condições iniciais $u_1(0) = 8.0$, $v_1(0) = -4.1$, $u_2(0) = 8.03$ e $v_2(0) = -4.2$ no período de tempo $t = 5$.

Figura 21 – Trajetórias de dois vórtices dipolos



(a) Trajetória de dois vórtices dipolos em $\mathbb{E}^1$ com tempo $t = 3$ e com condição inicial $u_1(0) = 0.5$, $v_1(0) = 8.0$, $u_2(0) = 0.5$ e $v_2(0) = 8.1$.



(b) Trajetória de dois vórtices dipolos em $\mathbb{E}^1$ com tempo $t = 5$ e com condição inicial $u_1(0) = 8.0$, $v_1(0) = -4.1$, $u_2(0) = 8.03$ e $v_2(0) = -4.2$.

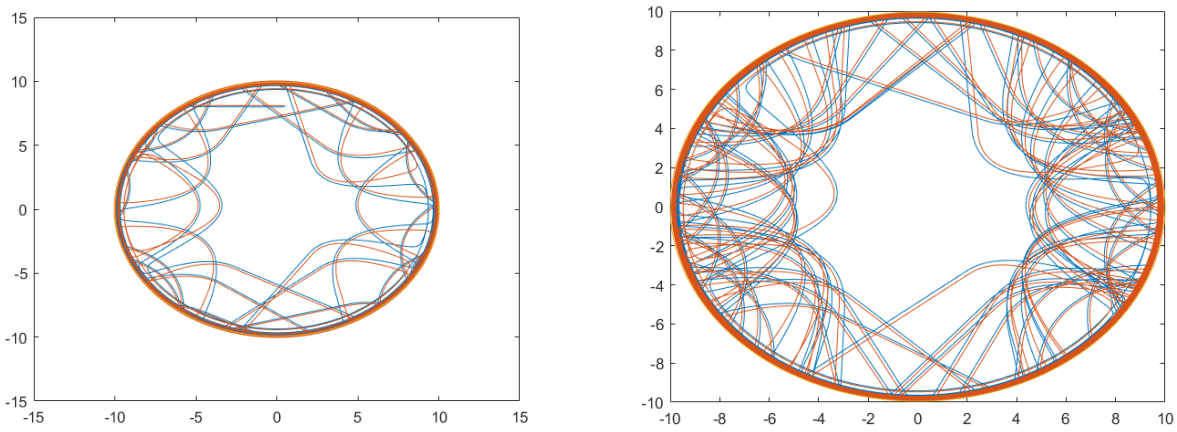
Fonte: Elaborada pelo autor.

Sabemos que o sistema Hamiltoniano que nos fornece a dinâmica de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ é **completamente integrável**, no início do capítulo 2, é apresentada a segunda integral primeira para o sistema. Uma vez que para o caso elíptico, estamos com uma excentricidade muito pequena, era esperado que as trajetórias para dois vórtices em $\mathbb{E}^1$, representassem

soluções advindas de um sistema Hamiltoniano completamente integrável, mas as simulações numéricas nos mostraram o contrário.

Nas simulações, usamos o critério do erro relativo, para se ter uma boa qualidade e dados consistentes para os resultados, o que acaba influenciando muitas vezes no tempo do integrador numérico para as trajetórias. Percebemos na maioria das vezes, que ao simularmos as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ cujas condições iniciais estão longe dos focos (isso se faz necessário pois os focos representam singularidades para as funções f' e f'', onde tais funções são utilizadas na construção das equações de movimento para este caso), as trajetórias inicialmente comportam-se como soluções de um sistema integrável.

Figura 22 – Comportamento das trajetórias de vórtices dipolos em $\mathbb{E}^1$.



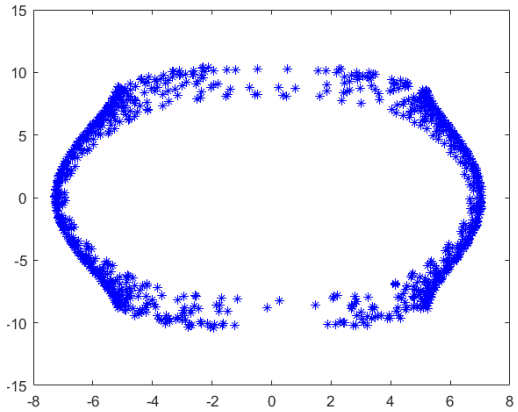
(a) Trajetória de dois vórtices dipolos em $\mathbb{E}^1$ com tempo $t = 500$ e com condição inicial $u_1(0) = 0.5$, $v_1(0) = 8.0$, $u_2(0) = 0.5$ e $v_2(0) = 8.1$.

(b) Trajetória de dois vórtices dipolos em $\mathbb{E}^1$ com tempo $t = 800$ e com condição inicial $u_1(0) = 8.0$, $v_1(0) = -4.1$, $u_2(0) = 8.03$ e $v_2(0) = -4.2$.

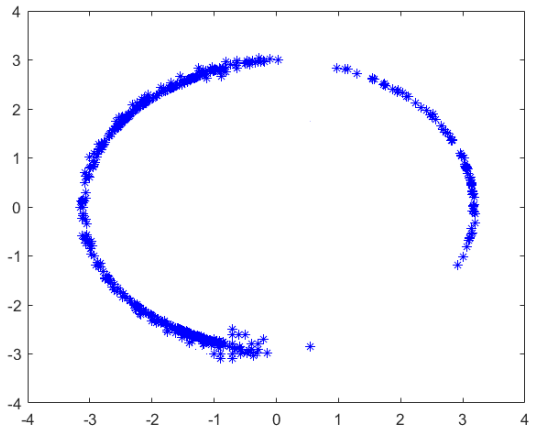
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para uma investigação mais a fundo sobre o comportamento de tais trajetórias (no sentido de integrabilidade ou caos), utilizamos um método numérico bastante conhecido, dado através da **seção de Poincaré**. O qual consiste em analisar se a trajetória é regular ao interceptar a seção em infinitos pontos, isso se dá quando a trajetória forma uma curva fechada na seção, nesse caso temos a integrabilidade, caso contrário, temos um sistema **caótico**. Mostraremos agora, as seções de Poincaré, para as trajetórias dadas na figura 22.

Figura 23 – Seções de Poincaré



(a) Seção de Poincaré para 22-a) com 1000 pontos e energia $E_0 = -36.65346$



(b) Seção de Poincaré para 22-b) com 500 pontos e energia $E_0 = -35.9875$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 23-a), percebemos indícios de caoticidade nos intervalos (aproximadamente) $I_1 = (-5.6, -1)$ e $I_2 = (1.4, 6.2)$. Já na figura 23-b), de forma bem sutil, percebemos indícios de caos no intervalo $I_3 = (-1, 0)$.

Dados os vórtices $w_1 = u_1 + v_1$ e $w_2 = u_2 + v_2$ em $\mathbb{E}^1$, as seções de Poincaré, foram calculadas da seguinte maneira:

Fixada a seção fazendo $v_1 = 0$, e dada a energia

$$E_0 = H(u_1, 0, u_2, v_2) \text{ para } u_2 \text{ e } v_2 \text{ dados,} \tag{4.17}$$

encontramos u_1 que satisfaz a equação (4.17), isto é, determinar uma raiz para a função real

$$F(u_1) := H(u_1, 0, u_2, v_2) - E0, \tag{4.18}$$

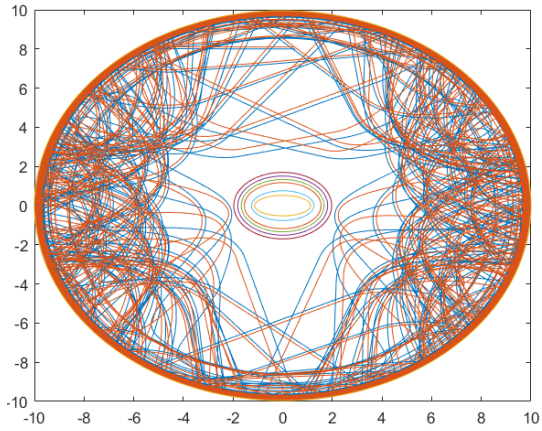
com u_2 e v_2 inicialmente dados.

Uma vez que a função F dada em (4.18) é uma função real e diferenciável, aplicamos o método de **Newton-Raphson** para encontrar a raiz, após isso calculamos os pontos onde a trajetória fura a seção partindo do ponto $(u_1, 0, u_2, v_2)$.

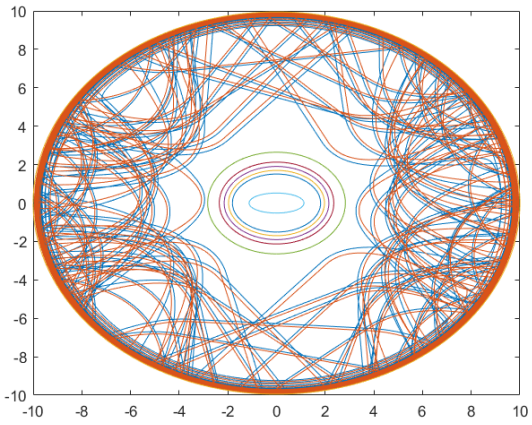
Com isso, temos que na figura 23-a) foram dados $u_2(0) = 0.5$, $v_2(0) = 8.1$ e energia $E_0 = -36.65346$, e aplicando o método de Newton-Raphson, determinamos a raiz da função dada em (4.10), e assim determinamos a seção de Poincaré associada a tal energia, o mesmo foi feito para termos a figura 23-b), onde $u_2(0) = 8.03$, $v_2(0) = -4.2$ e energia $E_0 = -35.9875$.

No caso do bilhar circular, as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{D}^1$ no sentido da conjectura de Kimura, respeitam uma cáustica circular (ver figura 11), o que não acontece ao considerar as trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ (também no sentido da conjectura), nesse caso as trajetórias em $\mathbb{E}^1$ respeitam uma família de elipses confocais a $\mathbb{E}^1$, desde que as trajetórias tenham condições iniciais longe dos focos. Vejamos algumas das várias simulações feitas que reforçam esse fato.

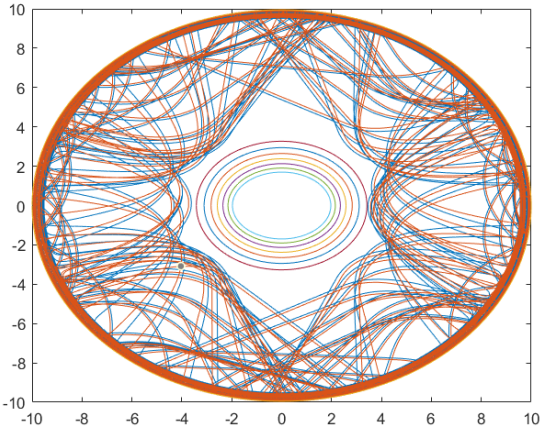
Figura 24 – Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ respeitando uma família de elipses confocais a $\mathbb{E}^1$.



(a) Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ com condições iniciais $u_1(0) = 0.45$, $v_1(0) = 8.0$, $u_2(0) = 0.46$ e $v_2(0) = 8.0$ num tempo $t = 1500$.



(b) Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ com condições iniciais $u_1(0) = 8.0$, $v_1(0) = -4.1$, $u_2(0) = 8.03$ e $v_2(0) = -4.12$ num tempo $t = 800$.



(c) Trajetórias de dois vórtices em $\mathbb{E}^1$ com condições iniciais $u_1(0) = -4.0$, $v_1(0) = 0.51$, $u_2(0) = -4.1$ e $v_2(0) = 0.51$ num tempo $t = 800$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados para o comportamento das trajetórias foram:

- Na figura 24-a), consideramos duas trajetórias em $\mathbb{E}^1$ com condições iniciais $u_1(0) = 0.45$, $v_1(0) = 8.0$, $u_2(0) = 0.46$ e $v_2(0) = 8.0$ num tempo $t = 1500$. Podemos perceber que as trajetórias respeitam uma família de elipses confocais a $\mathbb{E}^1$, e foi verificado numericamente que a família de elipses é dada para $c \leq 1.9$, ainda para este caso temos que as distâncias de $w_1(0) = u_1(0) + i\, v_1(0)$ aos focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ são dadas respectivamente por $d_1 = 8.13$ e $d_2 = 8.01$; e as distâncias de $w_2(0) = u_2(0) + i\, v_2(0)$ aos focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ são dadas de maneira respectiva por $d_3 = 8.23$ e $d_4 = 8.11$ reforçando a afirmação feita no parágrafo anterior.

- Já na figura 24-b), considera-se duas trajetórias em $\mathbb{E}^1$ com condições iniciais $u_1(0) = 8.0$, $v_1(0) = -4.1$, $u_2(0) = 8.03$ e $v_2(0) = -4.12$ num tempo $t = 800$. Percebe-se que as trajetórias respeitam uma família de elipses confocais a $\mathbb{E}^1$, e foi verificado numericamente que a família de elipses é dada para $c \leq 2.0$, ainda para este caso temos que as distâncias de $w_1(0) = u_1(0) + i\, v_1(0)$ aos focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ são dadas respectivamente por $d_1 = 9.88$ e $d_2 = 8.11$; e as distâncias de $w_2(0) = u_2(0) + i\, v_2(0)$ aos focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ são dadas de forma respectiva por $d_3 = 9.95$ e $d_4 = 8.18$.

- E por fim, na figura 24-c), considera-se duas trajetórias em $\mathbb{E}^1$ com condições iniciais $u_1(0) = -4.0$, $v_1(0) = 0.51$, $u_2(0) = -4.1$ e $v_2(0) = 0.51$ num tempo $t = 800$. Percebe-se que as trajetórias respeitam uma família de elipses confocais a $\mathbb{E}^1$, e foi verificado numericamente que a família de elipses é dada para $c \leq 2.1$, ainda para este caso temos que as distâncias de $w_1(0) = u_1(0) + i\, v_1(0)$ aos focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ são dadas respectivamente por $d_1 = 3.04$ e $d_2 = 5.02$; e as distâncias de $w_2(0) = u_2(0) + i\, v_2(0)$ aos focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ são dadas de forma respectiva por $d_3 = 3.14$ e $d_4 = 5.12$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese de doutorado teve como objetivo apresentar um estudo da dinâmica de $N-$ vórtices pontuais em domínios planares com fronteira elíptica, onde como um caso a parte, tem-se o domínio $\mathbb{D}^1$. A fim de cumprir com o objetivo, a mesma, apoiou-se fortemente na teoria de mapas conformes, a qual fornece o Hamiltoniano que nos permite de uma maneira geral, realizar o estudo sobre a dinâmica de vórtices pontuais em domínios fechados e simplesmente conexos.

Após a construção do Hamiltoniano, a tese preocupa-se em estudar a estabilidade de um anel com $N-$ vórtices pontuais, onde após usado a transformação de coordenadas baseada em (CABRAL; STEFANELLA, 2003), tivemos que lidar com a matriz Hessiana do Hamiltoniano, subdividindo em blocos de ordem $N-1$, foi possível realizar um estudo numérico sobre a estabilidade do anel com $N-$ vórtices pontuais.

Um segundo estudo feito, motivado pela conjectura de Kimura, foi o de estudar a dinâmica de $N-$ vórtices pontuais na região interna de uma elipse. São destacados os comportamentos da dinâmica que são preservados ao sair de $\mathbb{D}^1$ e ir para um domínio cuja fronteira é uma elipse muito próxima de ser $\mathbb{D}^1$.

A maior dificuldade encontrada foi a elaboração do integrador para a dinâmica de $N-$ vórtices pontuais para o caso elíptico, uma vez que o mapa conforme de $\mathbb{E}^1$ em $\mathbb{D}^1$, assim como as suas derivadas de primeira e segunda ordem envolvem funções elípticas, a saber, funções elípticas de Jacobi. Acredita-se que isso se deu pela qualidade do integrador para trabalhar com funções elípticas, dificultando a realização do estudo sobre alguns aspectos como integrabilidade ou caos, nos restringindo assim a casos bem específicos. Um outro fator de dificuldade também se deu pelo fato dos focos da elipse (que estão situados em ± 1) do problema, serem singularidades para as derivadas de primeira e segunda ordem do mapa conforme $\mathbb{E}^1$ em $\mathbb{D}^1$. Porém, esse integrador foi suficiente para atender ao problema proposto na tese. Isso nos faz pensar na dificuldade de trabalhar com funções elípticas ou problemas que envolvam essa classe de funções do ponto de vista numérico. Como projeto futuro, pensamos em fazer melhorias no integrador para o caso elíptico, a fim de explorar outros aspectos relacionados à dinâmica de $N-$ vórtices pontuais nesse domínio.

REFERÊNCIAS

AREF HESSAN NEWTON, P. K. S. M. A. T. T.; VAINCHTEIN, D. L. Vortex crystals. *Adv. Appl. Math*, v. 39, n. 3, p. 1–79, 2002.

ASHBEE, T. Point vortex dynamics simulation. 2023.

CABRAL, H.; SCHMIDT, D. Stability of relative equilibria in the problem of n + 1 vortices. *SIAM J. Math. Anal*, n. 31, 1999.

CABRAL, H. E.; STEFANELLA, B. Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere. *SIAM J. APPL. MATH*, v. 64, n. 1, p. 216–230, 2003.

DRITSCHEL, D. The stability and energetics of co-rotating uniform vortices. *J. Fluid Mech*, n. 157, p. 95–134, 1985.

HAVELOCK, T. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation. *Mag.S*, v. 7, n. 11, p. 617–633, 1931.

HELMHOLTZ, H. On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 33, n. 226, p. 485–512, 1867.

KIMURA, Y. Vortex motion on surfaces with constant curvature. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 455, n. 1981, p. 245–259, 1999.

KIRCHHOFF, G. *Vorlesungen Über Mathematische Physik: Mechanik.* [S.l.]: BG Teubner, 1876.

MARSDEN, J.; PEKARSKY, S. Point vortices on a sphere: Stability of relative equilibria. *J. Math. Phys*, n. 39, p. 5894–5907, 1998.

NEHARI, Z. *Conformal Mapping*. [S.l.]: Dover Publications, INC, 1952.

NEWTON, P. K. *The $N-$ Vortex Problem*. [S.l.]: Springer, 2001. v. 145.

POLZ, F. Point vorticies on the sphere: A case with opposite vorticites. *Nonlinearity*, n. 15, p. 143–171, 2002.

THOMSON, J. *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*. [S.l.]: White Press, 1883.