



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JOSÉ CÍCERO ARAUJO DOS SANTOS

**MÉTODOS MULTIESCALA E MULTINÍVEL COM ADAPTAÇÃO DE NÍVEL
NÃO-UNIFORME E CONTROLE DE TERMOS NÃO FÍSICOS
PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
ALTAMENTE HETEROGÊNEOS**

Recife

2023

JOSÉ CÍCERO ARAUJO DOS SANTOS

**MÉTODOS MULTIESCALA E MULTINÍVEL COM ADAPTAÇÃO DE NÍVEL
NÃO-UNIFORME E CONTROLE DE TERMOS NÃO FÍSICOS
PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
ALTAMENTE HETEROGÊNEOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil. Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.

Coorientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

Recife

2023

Catálogo na fonte:
Bibliotecária Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

S237m

Santos, José Cícero Araujo dos.

Métodos multiescala e multinível com adaptação de nível não-uniforme e controle de termos não físicos para simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo altamente heterogêneos / José Cícero Araujo dos Santos. – 2023.

106 f.: il., fig., tab., abrev. e símb.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.

Coorientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Recife, 2023.

Inclui referências e apêndices.

1. Engenharia civil. 2. Método multinível algébrico dinâmico com níveis não uniformes (NU-ADM). 3. Adaptação de funções de base em métodos multiescala. 4. Solver algébrico multiescala adaptativo (A-AMS). 5. Simulação de reservatórios; volumes finitos. 6. Reservatórios de petróleo muito heterogêneos. 7. Simulação totalmente implícita (FIM). I. Lyra, Paulo Roberto Maciel (Orientador). II. Carvalho, Darlan Karlo Elisiário de (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2023-156

JOSÉ CÍCERO ARAUJO DOS SANTOS

**MÉTODOS MULTIESCALA E MULTINÍVEL COM ADAPTAÇÃO DE NÍVEL
NÃO-UNIFORME E CONTROLE DE TERMOS NÃO FÍSICOS
PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
ALTAMENTE HETEROGÊNEOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil. Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Aprovada em: 21/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dr. José Roberto Pereira Rodrigues (Examinador Externo)
Petrobras

Prof. Dr. Márcio Rodrigo de Souza Araújo (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

A meu pai (*in memoriam*), minha mãe e todos que contribuíram com minha trajetória acadêmica, em especial meus orientadores, colegas do grupo PADMEC, amigos e familiares.

RESUMO

Atualmente, modelos geocelulares de reservatórios de petróleo podem ter tamanhos da ordem de até 10^9 volumes de controle e, em geral, a simulação dinâmica desses modelos em escala fina é limitada em função do elevado custo computacional associado. Em geral, técnicas de *Upscaling* são usadas para definir modelos menos refinados que podem ser trabalhados com os recursos disponíveis. Essas técnicas consistem em uma espécie de homogeneização dos parâmetros da escala fina, o que implica perda de informação e leva a uma baixa acurácia (comparada à simulação direta na escala fina), principalmente para meios com elevada heterogeneidade. Nas últimas décadas, os métodos de Volumes Finitos Multiescala (MSFV) foram desenvolvidos para minimizar essas perdas. Essas técnicas utilizam malhas auxiliares, primal e dual na escala grossa, para definir operadores de transferência de escala, restrição e prolongamento, e fornecem soluções mais precisas que as obtidas com técnicas de *Upscaling* a baixos custos computacionais, em relação à solução direta na escala fina. Um grande desafio para esses métodos é modelar o fluxo em reservatórios de petróleo altamente heterogêneos. Isso ocorre devido ao uso de condições de contorno reduzidas (RBCs) para desacoplamento do problema global nas fronteiras das sub-regiões, i.e. escala grossa. Essas condições de contorno são o núcleo dos métodos Multiescala, pois permitem a obtenção dos operadores de transferência de escala. No entanto, as RBCs induzem termos não físicos, transmissibilidades negativas na matriz da escala grossa, que podem levar a soluções espúrias. Neste trabalho, no contexto da formulação do AMS (*Algebraic Multiscale Solver*), apresentamos, pela primeira vez na literatura, duas estratégias para controle desses termos: A primeira aglomera criteriosamente os volumes da malha dual de forma a eliminar as RBCs em regiões problemáticas, com grandes contrastes de permeabilidade cruzando as fronteiras dessa malha. A segunda utiliza a definição de níveis não uniformes para manter na escala fina os volumes que gerariam grandes contribuições para os termos não físicos da matriz de transmissibilidades Multinível, assim como para capturar bem a frente de saturação, resultando no que denominamos Método Multinível Algébrico Dinâmico com Níveis Não Uniformes (NU-ADM). As estratégias propostas foram aplicadas com sucesso para obtenção de soluções aproximadas de *benchmarks* reconhecidamente desafiadores entre os autores da área de métodos de transferência de escala. Utilizamos dois contextos de aplicação: No primeiro, empregamos nossas estratégias com o método *Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES), no qual utilizamos nosso método para solução aproximada da equação de pressão, após isso, resolvemos explicitamente

o campo de saturações na escala fina. No segundo, aplicamos a estratégia com níveis não uniformes ao método *Fully Implicit* (FIM), em que tanto a pressão quanto a saturação são resolvidos de forma monolítica na escala Multinível não uniforme.

Palavras-chave: método multinível algébrico dinâmico com níveis não uniformes (NU-ADM); adaptação de funções de base em métodos multiescala; solver algébrico multiescala adaptativo (A-AMS); simulação de reservatórios; volumes finitos; reservatórios de petróleo muito heterogêneos; simulação totalmente implícita (FIM).

ABSTRACT

Currently, geocellular models of petroleum reservoirs can have sizes on the order of up to 10^9 control volumes and, in general, dynamic simulation of these models at fine scales is limited in function of the associated considerable computational cost. In general, upscaling techniques are used to define less refined models that can be handled with the available resources. These techniques consist of a kind of homogenization of the fine-scale parameters, which implies a loss of information and leads to low accuracy (compared to direct simulation on the fine scale), especially for media with high heterogeneity. On the last decades, Multiscale Finite Volumes (MSFV) methods have been developed to minimize these losses. These techniques use auxiliary meshes, primal and dual on the coarse scale, to define the scale transfer operators, restriction and prolongation, and provide more accurate solutions than those obtained with upscaling techniques at low computational cost relative to the fine-scale direct solution. A major challenge for multiscale methods is modeling flow in very heterogeneous oil reservoirs. This is due to the use of reduced boundary conditions (RBCs) to decouple the global problem at the boundaries of the subregions. i.e. coarse scale. These boundary conditions are at the core of multiscale methods, as they allow the scale transfer operators definition. However, the RBCs induce non-physical terms, negative transmissibilities, at the transmissibility matrix of the coarse scale, which can lead to spurious solutions. In this work, on the context of the AMS (Algebraic Multiscale Solver), we present two strategies to control non-physical terms: the first groups the volumes of the dual mesh and eliminates RBCs in problematic regions with high permeability contrasts that cross the boundary volumes of this mesh. The second uses the definition of non-uniform levels and maintain on the fine scale the volumes that would generate large contributions to the non-physical terms to control the non-physical terms in the multilevel transmissibility matrix, as well as, well capturing the saturation front, resulting on the method we called Algebraic Dynamic Multilevel with Non Uniform Levels (NU-ADM). The proposed strategies are successfully applied to obtain approximate solutions of benchmarks that are considered challenging among authors in the field of scale transfer methods in porous media. We used two applications: In the first, we apply our strategies with the Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES) method and use our methods to get an approximate pressure solution and solve the saturation field explicitly at the fine scale. In the second, we apply the strategy with non-uniform levels and the Fully Implicit

Method (FIM), where both the pressure and saturation are solved monolithically at the non-uniform multilevel scale.

Keywords: algebraic dynamic multilevel method with non-uniform levels (NU-ADM), adaptation of basis functions in multiscale methods; adaptive algebraic multiscale solver (A-AMS); reservoir simulation; finite volumes; highly heterogeneous petroleum reservoirs; fully implicit simulation (FIM).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação do domínio bidimensional Ω , dos contornos de Dirichlet, Γ_D , e Neumann, Γ_N , e dos poços injetor, Γ_I , e produtor, Γ_P , em um reservatório bidimensional genérico.....	30
Figura 2 - Estratégia FIM.	35
Figura 3 - Face, ij , adjacente aos volumes i e j	37
Figura 4 - Estratégia IMPES.....	40
Figura 5 - Transferências de escala realizadas pelos métodos Multiescala e Multinível.	41
Figura 6 - Malhas auxiliares dos métodos Multiescala, Ω_P e Ω_D destacam volumes das malhas Primal e Dual, respectivamente.....	42
Figura 7 - Malha primal na escala grossa, linha grossa, construída com uma razão de engrossamento (3, 3) sobreposta à malha fina, linha estreita.	43
Figura 8 - Malha dual construída sobre uma discretização estruturada tridimensional.	44
Figura 9 - Malhas auxiliares: a) dual do MsFVM apresentando os volumes reais, com cores sólidas, e os <i>ghost volumes</i> , com transparência b) Malha primal, linhas azuis representam as fronteiras dos volumes de controle da malha fina, sobrepostas a essas, e as linhas pretas representam os agrupamentos da malha primal e c) Malha dual do MMVCM.	45
Figura 10 - Ilustração da aplicação do algoritmo adaptação da malha Dual: a) malha dual AMS sobreposta a um campo de permeabilidades, b) representação dos termos não físicos η_{IJ} , em vermelho estão as interfaces críticas (com $\eta_{IJ} > \eta_{lim}$) e c) malha dual do método A-AMS.....	51
Figura 11 - a) malha dual A-AMS sobreposta a um campo de permeabilidades, b) representação dos termos não físicos η_{IJ} , em vermelho estão as interfaces críticas (com $\eta_{IJ} > \eta_{lim}$) e c) malha dual do método A-AMS.....	52
Figura 12 - Malha ADM em que os volumes em azul são mantidos na escala original, enquanto os volumes em verde são mapeados para a escala grossa.....	54
Figura 13 - Transferências de escala realizadas pelo operador ADM.	55
Figura 14 - Malha NU-ADM, volumes em azul são mantidos na escala original, volumes em verde são mapeados para a escala grossa.	57
Figura 15 - (a) Malha fina, (b) malha grossa primal, (c) malha NU-ADM, (d) Ids Malha fina, (e) Ids da malha grossa primal e (f) Ids da malha NU-ADM.	57

Figura 16 - SPE 10, Camada 85: Campo de permeabilidades e locação dos poços.....	66
Figura 17 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro na pressão e percentagem de recálculo para $\eta_{lim} \in [0.1; 2.0]$	67
Figura 18 - SPE 10, Camada 85: Campo de pressão obtido com a aplicação de ADM padrão usando as funções de base de AMS, $\eta_{lim} = \infty$, (a), e A-AMS com $\eta_{lim} = 1$, (c) sobre a malha dual correspondente , e a solução em escala fina (referência), (b). 68	68
Figura 19 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro de pressão, (a) e (b), e percentual de volumes ativos (c).	69
Figura 20 - SPE 10, Camada 85: Campo de pressão obtido usando as funções de base do AMS com o ADM ($\alpha_{lim} = \beta_{lim} = \infty$), (a) e o NU-ADM com $\alpha_{lim} = 1$ e $\beta_{lim} = 3$, (c) sobre os volumes em escala fina (na cor preta), e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência), (b).	70
Figura 21 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro de pressão, (a) e (b), percentual de volumes ativos (c), razão água/óleo (c), percentagem de volumes ativos (e) e valor médio dos termos não físicos (f).....	71
Figura 22 - SPE 10, Camada 85: Campo de saturação no tempo correspondente a 25% de VPI usando funções de base AMS clássicas, (a), funções de base A-AMS, (b), e a solução de referência, (c).....	73
Figura 23 - SPE 10, Camada 85: Tempo acumulado de simulação para as diferentes estratégias (a) e erro no balanço de massa (b).	75
Figura 24 - SPE 10, Camada 37: Campo de permeabilidades e locação dos poços.....	76
Figura 25 - SPE 10, Camada 37: Normas de erro na pressão l_2 , (a), e l_∞ , (b), e percentagem de recálculo das funções de base, (c), para $\eta_{lim} \in [0.1; 2.0]$	77
Figura 26 - SPE 10, Camada 37: Campo de pressão obtido com o ADM padrão usando as funções de base de AMS, $\eta_{lim} = \infty$, (a), e A-AMS com $\eta_{lim} = 1$, (c) sobre a malha dual, e a solução na malha fina (referência), (b).	78
Figura 27 - SPE 10, Camada 37: Normas de erro de pressão, (a) e (b), e percentual de volumes ativos (c).	79
Figura 28 - SPE 10, Camada 37: Campo de pressão obtido usando as funções de base do AMS com o ADM ($\alpha_{lim} = \beta_{lim} = \infty$), (a) e o NU-ADM com $\alpha_{lim} = 1$ e $\beta_{lim} = 3$, (c) sobre os volumes em escala fina (na cor preta), e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência), (b).	80

Figura 29 - SPE 10, Camada 37: Normas de erro de pressão l_2 e l_∞ , (a) e (b), norma de erro na saturação l_1 , (c), razão água/óleo, (d), percentual de volumes ativos (e) e valor médio do parâmetro dos termos não físicos η , (f).	81
Figura 30 - SPE 10, Camada 37: Campo de saturação no tempo correspondente a 25% de VPI usando funções de base AMS clássicas, (a), funções de base A-AMS, (b), e a solução de referência, (c).	83
Figura 31 - SPE 10, Camada 37: Tempo acumulado de simulação para as diferentes estratégias (a) e erro no balanço de massa (b).	84
Figura 32 - SPE 10, Camada 1: Campo de permeabilidades e localização dos poços.	85
Figura 33 - SPE 10, Camada 1: Normas de erro na pressão, L_2 , (a) e na saturação, L_1 , (b). ..	86
Figura 34 - SPE 10, Camada 1: Razão água/óleo, (a), e percentual de volumes ativos, (b). ..	86
Figura 35 - SPE 10, Camada 1: Campos de saturação no tempo correspondente ao VPI de 45% obtidos com a estratégia FIM e simulação direta na escala fina, (a), e método NU-ADM, (b)	87
Figura 36 - SPE 10, Camada 85: Campo de permeabilidades e localização dos poços.	87
Figura 37 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro na pressão, L_2 , (a) e na saturação, L_1 , (b). ..	88
Figura 38 - SPE 10, Camada 85: Razão água/óleo, (a), e percentual de volumes ativos, (b). ..	88
Figura 39 - SPE 10, Camada 1: Campos de saturação no tempo correspondente ao VPI de 45% obtidos com a estratégia FIM e a simulação direta na escala fina, (a), o método NU-ADM, (b).	89
Figura 40 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Campo de permeabilidades e localização dos poços.	90
Figura 41 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Normas de erro na pressão, L_2 , (a) e na saturação, L_1 , (b).	90
Figura 42 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Razão água/óleo, (a), e percentual de volumes ativos, (b).	91
Figura 43 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Campos de saturação no tempo correspondente ao VPI de 48% obtidos com a estratégia FIM e a simulação direta na escala fina, (a), o método NU-ADM, (b), apenas volumes com saturação de água acima de 0.1 são mostrados.	92
Figura 44: Malha fina e localização dos poços, um poço injetor (à esquerda) e um poço produtor (à direita).	101

Figura 45: Malhas auxiliares do problema bidimensional, malha primal (a), malha dual (b) e malha ADM (c). Os números correspondem aos Ids que identificam cada volume.	101
Figura 46: Operador de restrição ADM.....	102
Figura 47: Matriz de transmissibilidade na malha fina com explicitação do tipo de volume na malha dual.....	102
Figura 48: Matriz Wirebasket ou transmissibilidade reordenada.	103
Figura 49: Explicitação das sub matrizes componentes da Wirebasket.	103
Figura 50: Operador de prolongamento Multiescala, cada coluna corresponde a uma função de base.	104
Figura 51: Operador de prolongamento ADM.	105
Figura 52: Prolongamento da solução de pressão.	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - SPE 10, Camada 85: Metodologias e seus parâmetros definidores.	66
Tabela 2 - SPE 10, Camada 85: Valores médios das normas de erro de pressão e saturação, porcentagem de volumes ativos e parâmetro η ao longo da simulação para as metodologias em discussão.	72
Tabela 3 - SPE 10, Camada 37: Valores médios das normas de erro de pressão e saturação, porcentagem de volumes ativos e parâmetro η ao longo da simulação para as metodologias em discussão.	82
Tabela 4 - Tempos de simulação para as estratégias IMPES e FIM na escala fina e na NU-ADM nas camadas 1 e 85 do CSP-SPE-10.	93

LISTA DE ABREVIATURAS

ADM	Algebraic Dynamic Multilevel
NU-ADM	Non Uniform Algebraic Dynamic Multilevel
AMS	Algebraic Multiscale Solver
A-AMS	Adaptive Algebraic Multiscale Solver
FVM	Finite Volume Method
IMPES	Implicit Pressure Explicit Saturation
FIM	Fully Implicit Method
MPFA	Multi-Point Flux Approximation
MSFV	Multiscale Finite Volume method
TPFA	Two-Point Flux Approximation

LISTA DE SÍMBOLOS

CR	Razão de engrossamento
CFL	Número de Courant-Friedrichs-Lewy
$\vec{F}_{IJ}$	Fluxo na face IJ
f_w	Fluxo fracionário de água
G	Matriz de permutação
g_D	Pressão prescrita
g_N	Fluxo normal prescrito
IJ	Face adjacente a dois volumes I e J da escala grossa
ij	Face adjacente a dois volumes i e j da escala fina
k_{rf}	Permeabilidade relativa da fase f
$\tilde{K}$	Tensor de permeabilidade absoluta da rocha
k_{rw}^0	Permeabilidade relativa associada à saturação de água irreduzível
M	Matriz <i>Wirebasket</i> modificada
N^C	Número de volumes de controle do modelo computacional da escala grossa
n^f	Número de volumes de controle do modelo computacional da escala fina
$\vec{n}_{IJ}$	Vetor unitário normal à face IJ
$\vec{N}_{IJ}$	Vetor área normal à face IJ
N_o	Coeficiente de ajuste de Brooks & Corey para a fase óleo
N_w	Coeficiente de ajuste de Brooks & Corey para a fase água
o	Fase óleo
p	Pressão
p_{IJ}	Pressão na face IJ
P_i	Pressão no volume i
p'	Pressão ADM prolongada nos volumes da malha fina
P	Operador de prolongamento
q_f	Vazão da fase f em um volume de controle
R	Operador de restrição
S_f	Saturação da fase f
S_{o0}	Saturação de óleo residual
S_{w0}	Saturação de água irreduzível

S_{wn}	Saturação de água normalizada
S_i^n	Saturação de um volume de controle i no tempo n
T	Matriz de transmissibilidades
τ_{IJ}	Transmissibilidade na face IJ
t	Tempo
TOL	Tolerância em uma norma de erro
$\hat{V}$	Volume de controle genérico
$\vec{v}$	Velocidade de Darcy
$\vec{v}_{IJ}$	Velocidade normal à face IJ
W	Matriz <i>Wirebasket</i>
w	Fase água
Γ	Contorno de domínio
Γ_D	Contorno de Dirichlet
Γ_N	Contorno de Neumann
Γ_I	Contorno interno associado a um poço injetor
Γ_P	Contorno interno associado a um poço produtor
δ_S	Máxima variação de saturação em um volume da escala grossa
δ_S^{lim}	Valor limite para variação de saturação que leva definição do nível
ρ_f	Densidade da fase f
ϕ	Porosidade da rocha
μ_f	Viscosidade da fase f
λ_f	Mobilidade da fase f
λ_{IJ}	Mobilidade na face IJ
λ	Mobilidade total
Ω	Domínio computacional
Ω_f	Domínio computacional referente à malha fina
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	MOTIVAÇÃO	20
1.2	OBJETIVOS	25
1.2.1	Objetivo geral	25
1.2.2	Objetivos específicos	25
1.3	TRABALHOS PUBLICADOS	26
1.3.1	Artigos revisados por pares em revistas científicas	26
1.3.2	Trabalhos completos revisados por pares publicados em anais de congressos internacionais	26
1.4	ORGANIZAÇÃO DA TESE	27
2	MODELO MATEMÁTICO	28
2.1	CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO	29
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	31
3.1	FORMULAÇÃO FIM	32
3.1.1	Aproximação do termo de acumulação	32
3.1.2	Aproximação do termo de fluxo	33
3.1.3	Aproximação do termo fonte/sumidouro	33
3.1.4	Algoritmo FIM	34
3.2	FORMULAÇÃO IMPES	35
3.2.1	Equação da pressão	35
3.2.2	Aproximação da saturação	38
3.2.3	Algoritmo IMPES	40
4	MÉTODOS MULTIESCALA E MULTINÍVEL	41
4.1	OPERADORES MULTIESCALA	41
4.1.1	Operadores AMS	41
4.1.1.1	Operador de Restrição	42
4.1.1.1.1	<i>Malha Primal</i>	42
4.1.1.1.2	<i>Expressão algébrica</i>	43
4.1.1.2	Operador de Prolongamento	43
4.1.1.2.1	<i>Malha Dual</i>	43
4.1.1.2.2	<i>Matriz de permutação</i>	46

4.1.1.2.3	<i>Matriz Wirebasket</i>	46
4.1.1.2.4	<i>Matriz Modificada</i>	47
4.1.1.2.5	<i>Expressão Algébrica</i>	48
4.1.2	Método A-AMS	49
4.1.2.1	Operador de restrição	49
4.1.2.2	Operador de prolongamento	49
4.1.2.2.1	<i>Malha Dual</i>	49
4.1.2.2.2	<i>Expressão algébrica</i>	51
4.2	OPERADORES MULTINÍVEL	53
4.2.1	Operadores ADM	53
4.2.1.1	Malha ADM	54
4.2.1.2	Operador de Restrição.....	54
4.2.1.3	Operador de Prolongamento	55
4.2.2	Operadores NU-ADM	56
4.2.2.1	Malha NU-ADM.....	56
4.2.2.2	Operador de Restrição.....	58
4.2.2.3	Operador de Prolongamento	58
4.3	ALGORITMOS DE SOLUÇÃO	58
4.3.1	Metodologia IMPES	58
4.3.1.1	Algoritmo AMS	59
4.3.1.2	Algoritmo A-AMS	60
4.3.1.3	Algoritmo ADM.....	61
4.3.1.4	Algoritmo NU-ADM	62
4.3.2	Metodologia FIM	63
4.3.2.1	Construção dos operadores Multiescala na metodologia FIM.....	63
4.3.2.2	Mapeamento para a escala grossa	63
4.3.2.3	Solução FIM-Multiescala/Multinível.....	64
5	APLICAÇÕES E RESULTADOS	65
5.1	APLICAÇÕES NA ESTRATÉGIA IMPES	65
5.1.1	Exemplo IMPES 1: camada 85 do CSP-SPE 10	66
5.1.1.1	Adaptação das funções de base	67
5.1.1.2	Adaptação de malha Multinível não uniforme.....	68
5.1.1.3	Problema de escoamento bifásico	70

5.1.2	Exemplo IMPES 2: camada 37 do CSP-SPE 10.....	75
5.1.2.1	Adaptação das funções de base	76
5.1.2.2	Adaptação de malha Multinível não uniforme.....	78
5.1.2.3	Problema de escoamento bifásico	80
5.2	APLICAÇÕES NA ESTRATÉGIA FIM	84
5.2.1	Exemplo FIM 1: camada 1 do CSP-SPE 10.....	85
5.2.2	Exemplo FIM 2: camada 85 do CSP-SPE 10.....	87
5.2.3	Exemplo FIM 3: Homogêneo tridimensional com barreiras	89
5.2.4	Tempos de simulação	92
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	94
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICE A - EXEMPLO DE APLICAÇÃO PRÁTICA DO MÉTODO ADM	101
	APÊNDICE B - QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO	106

1 INTRODUÇÃO

Os fenômenos físicos observados na natureza podem ser descritos, de forma aproximada, por modelos matemáticos que podem ser usados em simulações, ou seja, previsões dos resultados associados. Um dos fenômenos estudados no âmbito da simulação numérica é o escoamento de fluidos em meios porosos, uma vez que este fenômeno está intrinsecamente ligado à produção de petróleo, atividade cuja importância é fundamental para a economia mundial. A simulação deste tipo de fenômeno representa uma ferramenta muito importante para a obtenção de informações que permitam uma gestão adequada da produção, com o objetivo de minimizar os riscos ambientais e humanos, além de otimizar a produção e o retorno econômico.

Os reservatórios de interesse econômico, particularmente os do pré-sal, possuem variações muito pronunciadas nas propriedades petrofísicas (CORRÊA, 2013), tanto no contexto espacial quanto direcional, heterogeneidade e anisotropia, exigindo modelagem computacional acurada e eficiente.

1.1 MOTIVAÇÃO

Os avanços nas técnicas de caracterização e modelagem geoestatística permitem a integração de informações para criar modelos geocelulares com resoluções da ordem de 10^8 - 10^9 volumes de controle. No entanto, a simulação direta nessa escala é proibitiva, isso porque resolver esse processo exige uma grande quantidade de memória computacional e capacidade de processamento, que atualmente não está disponível nem nos mais modernos supercomputadores. Os modelos de simulação de reservatórios que podem ser tratados com os recursos atuais têm da ordem de 10^6 - 10^7 volumes de controle e a simulação só é possível através do uso de computação paralela/distribuída (PARRAMORE, 2016) (JARAMILLO, et al., 2022). Além disso, são necessárias dezenas de milhares de simulações para tratar incertezas e otimização da produção e ajuste de histórico.

Originalmente, as tentativas de resolver problemas com múltiplas escalas eram baseadas em homogeneização, com os chamados métodos *Upscaling*. Nesses métodos, os parâmetros em escalas refinadas são usados para projetar informações sobre escalas maiores (HOU, et al., 1997), reduzindo os custos computacionais. No entanto, esses métodos são menos robustos e

propensos a erros, tais como a incapacidade de capturar corretamente o transporte de massa em todas as escalas do problema.

Recentemente, tornaram-se populares os chamados métodos Multiescala, que utilizam informações da escala fina ao longo da simulação (SOUZA, et al., 2020). Nessa estratégia, o problema é resolvido na escala grossa capturando os efeitos da escala fina com o objetivo de obter resultados acurados de forma eficiente (JENNY, 2003).

O núcleo dos métodos Multiescala é a definição das funções de base, que definem os operadores que transferem informações entre as escalas. HOW & WU (1997) propuseram o método dos elementos finitos Multiescala (MsFEM) para resolver o problema elíptico da pressão e definir as funções de base para cada elemento utilizando condições de contorno para desacoplamento do problema global. Embora o problema elíptico tenha sido satisfatoriamente resolvido, o mesmo não ocorreu com o problema hiperbólico, pois o campo de velocidades obtido foi não conservativo. A garantia de conservação nesse campo é essencial para uma solução acurada do problema de transporte, segundo CHEN & HOU (2003) que usaram um método Multiescala de elementos finitos mistos para garantia de conservação do campo de velocidades na escala fina. Após isso, diversos autores desenvolveram métodos Multiescala de elementos finitos mistos para simular escoamentos bifásicos em meios porosos (HELLMAN, et al., 2015).

A primeira versão do Método dos Volumes Finitos Multiescala, MsFVM, para domínios bidimensionais e malhas estruturadas foi desenvolvido por JENNY, et al., (2003). Assim como o MsFEM, o MsFVM captura os efeitos da escala fina usando funções de base, no entanto, para que o problema seja globalmente conservativo, na escala grossa, os autores formaram uma nova malha, chamada malha dual, a partir da malha grossa primal. Os mesmos autores, em 2004, estenderam o método para problemas em domínios tridimensionais utilizando a estratégia *Implicit Pressure Explicit Saturation*, IMPES, em conjunto com o MsFVM.

A metodologia IMPES impõe limitação no passo de tempo, o que pode gerar altos custos computacionais, especialmente na simulação de meios altamente heterogêneos tridimensionais. Para reduzir esses custos, ZHOU & TCHELEPI (2008) desenvolveram uma relação, em função da mobilidade, que determina se as funções de base precisam ou não ser recalculadas em um novo passo de tempo. Desta forma, o autor foi capaz de reduzir significativamente o tempo de simulação, tanto com a eliminação da necessidade de recálculo das funções, quan-

to com o uso da variação de mobilidade para definir em quais regiões as funções de base precisam ser recalculadas.

Um algoritmo que aplica a estratégia *Sequential Fully Implicit*, SFI, em conjunto com o MsFVM foi apresentado por LUNATI & JENNY (2006) para problemas 3D com o objetivo de contornar as restrições impostas pela solução explícita do problema de transporte. Os autores trataram os problemas de transporte e fluxo de forma separada, o que os permitiu a aplicação dos métodos mais adequados para solução de cada fenômeno físico. Além disso, eles mostraram que o número de atualizações das funções de base em um esquema MsFVM baseado no SFI é menor que em um baseado no IMPES.

A construção dos operadores de transferência de escala envolve a criação de problemas locais, construídos a partir do desacoplamento do problema global. Para isso, são aplicadas as condições de localização, se destacando, em termos de acurácia, as condições de contorno reduzidas (RBC) (MAZLUMI, et al., 2021). As RBCs impõem fluxo tangencial nas fronteiras da malha dual, o que pode gerar perda de consistência nessas regiões, em modelos altamente heterogêneos (LUNATI, et al., 2011). Diante disso, (HAJIBEYGI, et al., 2008) propuseram o uso de funções de correção para reduzir o erro na solução. Nesse método, a parte do campo de pressão que não é capturada pelas funções de base é calculada e explicitamente adicionada à solução. A ideia desta técnica é calcular iterativamente as funções de correção usando um método do tipo Jacobi ou Gauss-Seidel até que a convergência, no domínio da pressão, seja alcançada dentro de uma tolerância (ZHOU & TCHELEPI, 2008).

LUNATI & LEE (2009) apresentaram uma formulação com um operador Multiescala que incorpora as funções de correção em sua definição. Esses autores definiram as matrizes de permutação, que permitem a organização dos volumes das malhas auxiliares em um esquema de partição apropriado. Algumas das dificuldades dos métodos clássicos de Multiescala iterativos, i-MsFVM, foram explicitadas por (ERMAKOV, 2010), incluindo situações que podem levar à divergência desse método. A partir disso, LUNATI et al. (2011) desenvolveram um método iterativo Multiescala que converge para a solução exata da equação discreta. Neste trabalho, os autores utilizaram métodos iterativos baseados em subespaços de Krylov para solução de sistemas de equações lineares, melhorando a qualidade da solução de pressão do MsFVM.

Como alternativa aos métodos iterativos, ZHOU & TCHELEPI (2008) modificaram o MsFVM realizando de forma algébrica todas as operações do método e definiram na forma

matricial os operadores de transferência de escala, de Prolongamento e de Restrição. A nova metodologia foi chamada de Método Multiescala Baseado em Operadores (OBMM), a compressibilidade é adicionada ao modelo e o conceito de operador passou a ser usado tanto no uso de malhas estruturadas quanto de malhas não estruturadas. Quatro anos depois os autores redefiniram a estratégia matricial para lidar com casos de escoamentos em meios heterogêneos e anisotrópicos ao criar o solver *Two Stage Algebraic Multiscale Solver*, T-AMS, com convergência para a solução numérica em escala fina (ZHOU & TCHELEPI, 2012). Nesse último trabalho é usada uma estratégia de pré-condicionamento para o problema elíptico em meios muito heterogêneos de forma a suavizar as oscilações na solução Multiescala.

Os métodos MsFVM utilizam as mesmas malhas auxiliares propostas por JENNY, et al., (2003), uma malha fina, uma malha grossa primal e uma malha grossa dual. A malha dual representa a aplicação das condições de localização que permitem o desacoplamento do problema global, como resultado, são inseridos erros no campo de pressão, principalmente nas regiões próximas aos contornos dos volumes dessa malha (LUNATI, et al., 2011). De acordo com esses autores, o cálculo das funções de base é prejudicado quando zonas de baixa permeabilidade cruzam as fronteiras dos volumes da malha dual, o que pode levar a erros consideráveis na solução Multiescala. Uma correção nas condições de localização nas regiões com acentuado gradiente de permeabilidade cruzando na interface de volumes da malha dual foi proposta por FAROUGHI, et al., (2013) como forma de melhorar a qualidade da solução. Os autores utilizaram uma permeabilidade modificada nesses volumes, de forma a suavizar o gradiente de permeabilidade. CORTINOVIS & JENNY (2014) também aplicaram correções nas funções de base o que melhorou a taxa de convergência da versão iterativa do MsFVM. Ainda no contexto de modificação das funções de base, DEHKORDI & MANZARI (2013) propuseram uma mudança na malha dual definida por JENNY, et al., (2003) que faz as fronteiras externas da malha dual coincidirem com os limites do reservatório, o que levou a uma melhor solução no campo de velocidades.

Mesmo com essas modificações, os métodos Multiescala podem produzir soluções não monótonas (oscilatórias) em reservatórios altamente heterogêneos. Isso pode ser um problema sério, pois pode levar, por exemplo, à produção fictícia de gás quando a pressão cai erroneamente abaixo da pressão do ponto de bolha. Em geral, os métodos Multiescala aplicam algum processo iterativo ou de modificação nas funções de base para reduzir as oscilações na solução de pressão (WANG, et al., 2015). Ao analisar os termos da matriz de transmissibilidades da escala grossa, esses autores atribuíram as perdas de monotonicidade ao fluxo local induzi-

do pelas funções de base entre as faces dos volumes da malha grossa primal, esse fluxo gera termos não-físicos, transmissibilidades negativas, na matriz da escala grossa. A partir disso, os autores criaram o método MSFV monótono (m-MSFV) baseado em uma correção do estêncil local da escala grossa, que detecta algebricamente as interfaces críticas da malha primal e emprega uma aproximação de fluxo local por dois pontos (TPFA) nas mesmas. Alternativamente, *linear boundary conditions* (LBC) são aplicadas como condição de localização (em substituição às RBCs), nas interfaces críticas, para cálculo das funções de base de forma a reduzir o grau de não monotonicidade. Os autores do m-MSFV associaram o surgimento dos termos não-físicos à aplicação das condições de contorno reduzidas (RBCs), definidas pela malha dual, em regiões com elevado gradiente de permeabilidade. Embora a abordagem do m-MSFV possa garantir a monotonicidade das soluções de pressão, pode levar ao aumento das normas de erro na pressão.

Com base na estratégia de detecção dos termos não-físicos na escala grossa do m-MSFV, SANTOS, et al., (2020) propuseram uma estratégia AMS Adaptativa (A-AMS) em que as funções de base são adaptadas a partir da aglomeração criteriosa dos volumes da malha Dual. Essa aglomeração é feita de forma a eliminar, ou pelo menos reduzir, a aplicação das RBCs que cruzam as interfaces críticas da malha grossa primal e os correspondentes termos não físicos.

Uma outra possibilidade de melhora na qualidade da solução é o uso do método Multinível Algébrico Dinâmico (ADM) (CUSINI, et al., 2016), que mantém parte dos volumes na escala original. Essa estratégia permite o mapeamento das variáveis de simulação em malhas adaptativas definidas dinamicamente em cada passo de tempo. Esse mapeamento é realizado com o uso dos operadores de restrição e prolongamento, que são construídos com base nos do método Multiescala. Esses operadores, do método adaptativo, mantêm na escala fina as propriedades dos volumes nessa escala e projetam para a escala grossa as propriedades dos demais volumes.

O método ADM aplica o mesmo nível a cada volume da malha grossa primal. CUSINI, et al., (2016) mantinham na escala fina apenas os volumes pertencentes à frente de saturação e utilizavam um procedimento para suavização dos contrastes de permeabilidade de forma a controlar as oscilações no campo de pressão. SANTOS, et al., (2019) propuseram um procedimento de definição da escala Multinível para controlar as oscilações no campo de pressões e, simultaneamente, manter na escala fina os volumes da malha primal pertencentes à frente

de saturação. Nesse contexto, os métodos com adaptação dinâmica das malhas utilizam uma definição uniforme de nível, i.e., os volumes pertencentes a cada volume da malha primal pertencem a um mesmo nível. Essa característica impõe que volumes que não estão diretamente na frente de saturação sejam mantidos na escala fina caso algum dos volumes que pertençam ao mesmo volume da malha primal esteja.

Como alternativa aos métodos ADM com escala/nível uniforme em cada volume da malha primal, SANTOS, et al., (2022) criaram o primeiro Método Multinível Algébrico Dinâmico com nível Não Uniforme (NU-ADM). Esse método permitiu uma maior flexibilidade na geração da resolução Multinível, permitindo, por exemplo, a manutenção na escala fina apenas dos volumes diretamente na frente de saturação. Além disso, os autores do NU-ADM definiram parâmetros algébricos para controle dos termos não físicos da matriz de transmissibilidades da escala NU-ADM, baseados nos critérios propostos no m-MSFV. Durante seus testes, os autores testaram a estratégia de nível não uniforme com o uso dos operadores dos métodos AMS e A-AMS, tendo a nova estratégia sido capaz de eliminar as oscilações nos campos de pressões em ambos os casos, com número reduzido de volumes ativos, em comparação aos métodos clássicos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Esse trabalho tem como objetivo investigar e desenvolver estratégias para o controle dos termos não físicos na escala Multinível visando a eliminação das oscilações nas soluções obtidas com os métodos Multiescala em meios porosos altamente heterogêneos.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Investigar e desenvolver algoritmos para identificação das regiões críticas na geração de termos não físicos na escala grossa;
2. Adaptar a formulação AMS para lidar com malhas duais não convencionais, originadas da aglomeração criteriosa de volumes duais, A-AMS;
3. Adequar a formulação ADM para utilização de níveis não uniformes, NU-ADM;

4. Criar critérios para definição do nível a ser utilizado para mitigar ou eliminar as oscilações no campo de pressão, mantendo o máximo de volumes na escala grossa sem prejudicar a acurácia da solução;
5. Adequar as metodologias desenvolvidas para uso nos esquemas IMPES e FIM.

1.3 TRABALHOS PUBLICADOS

1.3.1 Artigos revisados por pares em revistas científicas

- Santos, J. C. A. dos; Lyra, P. R. M.; Andrade, J. P. R. De; Souza, A. C. R. de; Lira filho, R. J. M. de; Carvalho, D. K. E. de: An Algebraic Dynamic Multilevel and Multiscale Method with Non-Uniform Mesh Resolution and Adaptive Algebraic Multiscale Solver operator for the simulation of two-phase flows in highly heterogeneous petroleum reservoirs. *Journal of Computational Physics*, p. 1-24, 2022. Available on: < <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111174>>;
- Souza, A. C. R. de; Carvalho, D. K. E. De; Santos, J. C. A. dos; Willmersdorf, R. B.; Lyra, P. R. M.; Edwards, M. G.: An algebraic multiscale solver for the simulation of two-phase flow in heterogeneous and anisotropic porous media using general unstructured grids (AMS-U). *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier BV, v. 103, p. 792–823, mar 2022. Available on: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.11.017>>.

1.3.2 Trabalhos completos revisados por pares publicados em anais de congressos internacionais

- Santos, J. C. A.; Carvalho, D. K. E.; Lyra, P. R. M.: Fully Implicit Algebraic Dynamic Multilevel and Multiscale Method with Non-Uniform Resolution for the Simulation of Two-Phase Flow in Highly Heterogeneous Porous. *Proceedings of Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, pg 1-6, Foz do Iguaçu/PR, 2022. On-Line, Available on: <<https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/2022/10748.pdf>>
- Santos, J. C. A.; Andrade, J. P. R.; Souza, A. C. R.; Lira filho, R. J. M. de; Carvalho, D. K. E.; Lyra, P. R. M.: An Adaptive Algebraic Dynamic Multilevel (A-ADM) and Multiscale Method with Enriched Basis Functions for the simulation

of two-phase flows in highly heterogeneous petroleum reservoirs. Proceedings of Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, pg 1-7, Foz do Iguaçu/PR, 2020. On-Line, Available on:

< <https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/apresentacoes/177/8599.pdf> >;

- Santos, J. C. A.; Andrade, J. P. R.; Lira filho, R. J. M. de; Carvalho, D. K. E.; Lyra, P. R. M.: An algebraically dynamic multilevel (ADM) multiscale method for the simulation of single-phase flows through highly heterogeneous porous media. Proceedings of Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, pg 1-20, Natal/RN 2019. Available on: <<https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/apresentacoes/120/7124.pdf>>.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Além deste capítulo introdutório, o presente texto consiste em mais cinco capítulos. No capítulo 2, são apresentados os modelos matemáticos adotados para representar o fenômeno aqui estudado, precedido de suas hipóteses simplificadoras. No Capítulo 3, as técnicas numéricas empregadas para discretização das equações introduzidas no Capítulo 2 são brevemente descritas. Além disso, apresentamos as estratégias FIM e IMPES e as respectivas técnicas numéricas utilizadas para discretizar o domínio físico. No Capítulo 4, apresentamos os conceitos básicos para compreensão dos métodos Multiescala e Multinível. Descrevemos as malhas auxiliares utilizadas, os procedimentos necessários para obtenção dos operadores AMS e A-AMS, os métodos empregados para a definição das resoluções e operadores ADM e NU-ADM, assim como os algoritmos para aplicação das estratégias Multiescala e Multinível nos contextos FIM e IMPES. No capítulo 5, são apresentados os resultados da aplicação das estratégias Multiescala e Multinível, clássicas e propostas, para solução de problemas monofásicos e bifásicos (água – óleo). Finalmente, no capítulo seis, são sumarizadas as principais conclusões e discutidos os possíveis trabalhos futuros com potencial de dar continuidade às estratégias descritas nesta tese.

2 MODELO MATEMÁTICO

No modelo matemático, assumimos que os fluidos (óleo-água) e rocha são incompressíveis e que o escoamento é isotérmico e ocorre em um meio totalmente saturado por fluidos sem efeitos capilares. As equações básicas do movimento são obtidas da lei de conservação da massa e da equação de Darcy. A equação da conservação de massa para uma fase f ($f = o$, para óleo, $f = w$, para água), pode ser escrita na forma da Eq. (1) (ROSA, et al., 2006).

$$\phi \rho_f \frac{\partial S_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) - q_f = 0, \quad (1)$$

onde $\vec{v}_f$ e ρ_f , representam, respectivamente, a velocidade de Darcy e a massa específica da fase f , ϕ é a porosidade efetiva da rocha, i.e. a fração de vazios interconectados da rocha que pode ser ocupado por fluidos, e q_f representa a vazão específica dos termos fonte e sumidouro, i.e. poços de injeção ou produção. S_f é a saturação da fase f , ou seja, a fração do volume poroso ocupado por essa fase. Dessa definição e da hipótese de meio totalmente saturado, aplicamos a restrição das saturações, apresentada em (2).

$$S_o + S_w = 1, \quad (2)$$

onde S_f , $f = o, w$, representa as saturações de óleo e água, respectivamente.

Desprezando os efeitos capilares, podemos escrever a velocidade de Darcy (ERTEKIN, et al., 2001) na forma de (3):

$$\vec{v}_f = -\lambda_f \mathbf{K} (\vec{\nabla} p - \rho_f g \vec{\nabla} z), \quad (3)$$

onde p , $\lambda_f = k_{rf}/\mu_f$, k_{rf} e μ_f representam, respectivamente, a pressão, a mobilidade, a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase f , $\mathbf{K}$ é o tensor de permeabilidade absoluta da rocha, $\vec{\nabla}$ é o operador gradiente e g é o módulo da aceleração da gravidade. Além disso, as hipóteses simplificadoras intrínsecas à lei de Darcy são consideradas válidas nos estudos realizados (EWING, 1983).

Para determinar as permeabilidades relativas do óleo e da água, k_{ro} e k_{rw} , foi utilizado o modelo de BROOKS & COREY (1964), descrito em (4):

$$\begin{aligned} k_{ro} &= k_{ro}^0 (1 - S_{wn})^{N_o} \\ k_{rw} &= k_{rw}^0 S_{wn}^{N_w} \end{aligned} \quad (4)$$

onde, N_o e N_w são valores obtidos empiricamente para ajuste da curva de retenção. Nesse trabalho foi utilizado o valor $N_o = N_w = 2$ para ambos os parâmetros. K_{rf}^0 é o valor final da permeabilidade relativa da fase f e S_{wn} é o valor normalizado da saturação de água, na forma da Eq. (5):

$$S_{wn} = S_{wn}(S_w) = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}}, \quad (5)$$

onde S_{wi} é a saturação irreduzível de água, S_{or} é a saturação de óleo residual, *i.e.*, que não podem ser extraídas do reservatório.

2.1 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

Para que o problema descrito pelas equações mencionadas, nas duas estratégias, seja completamente determinado, é necessário que utilizemos um conjunto apropriado de condições iniciais e de contorno, que dependem das características geológicas das vizinhanças e da existência e localização de poços de injeção e/ou produção. Considere esquematicamente um reservatório em duas dimensões, sem perda de generalidade, representado pelo domínio Ω , onde o contorno é denotado por Γ , que é dado pela união disjunta dos diferentes contornos, como mostrado na Figura 1 e identificado na equação (6), a seguir:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_I \cup \Gamma_P \quad (6)$$

onde, Γ_D , Γ_N , Γ_I e Γ_P representam a porção do contorno com condição de Dirichlet (pressão prescrita), Neumann (fluxo prescrito), e contornos “internos” representando os poços injetores e poços produtores, respectivamente, nos moldes definidos por Peaceman (1977) e Ertekin, Abou-Kassem, & King (2001).

As condições de contorno podem ser escritas como:

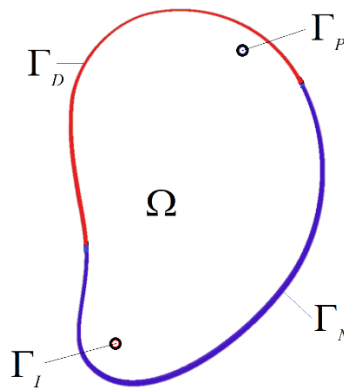
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{n} = Q_I \text{ ou } p(x, t) = p_I \text{ sobre } \Gamma_I \times [0, T] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = Q_P \text{ ou } p(x, t) = p_P \text{ sobre } \Gamma_P \times [0, T] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = g_N \text{ em } \Gamma_N \times [0, T] \\ p = g_D \text{ em } \Gamma_D \times [0, T] \\ S_w(\vec{x}, t) = \bar{S}_w \text{ em } \Gamma_I \times [0, T] \end{array} \right. , \quad (7)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor área normal, Q_I e Q_P são as vazões volumétricas dos poços injetores e produtores, respectivamente, g_N é o fluxo normal prescrito em Γ_N , g_D é a pressão prescrita em Γ_D , $\vec{v}$ é o vetor velocidade total, e, finalmente, $\bar{S}_w$ representa a saturação de água prescrita num conjunto de poços injetores. A condição inicial pode ser escrita como em (8):

$$S_w(x, 0) = \bar{S}_w^0 \text{ em } \Omega \times t^0 \quad (8)$$

onde $\bar{S}_w^0$ é a distribuição inicial ($t = t^0$) da saturação de água no reservatório, o domínio e contornos mencionados nesse parágrafo são esquematizados na Figura 1.

Figura 1 - Representação do domínio bidimensional Ω , dos contornos de Dirichlet, Γ_D , e Neumann, Γ_N , e dos poços injetor, Γ_I , e produtor, Γ_P , em um reservatório bidimensional genérico.



Fonte: Adaptado de Stewart (2009)

Para que a pressão esteja completamente definida, é necessário que $\Gamma_D \neq 0$ ou que o reservatório possua ao menos um poço com pressão prescrita.

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Nesse trabalho, aplicamos o Método dos Volumes Finitos (FVM) (FREITAS, 2021) para aproximar a solução da equação da conservação de massa, (1), no escoamento bifásico, água-óleo, em um domínio computacional com N volumes de controle. Consideramos a hipótese de meio totalmente saturado, Eq. (2) a lei de Darcy, Eq. (3) e o modelo de Brooks & Corey, Eq. (4).

A discretização da Eq. (1), com a velocidade de Darcy, Eq. (3), toma como base a integração dessa equação em um volume de controle Ω_i .

$$\int_{\Omega_i} \left\{ \phi \rho_f \frac{\partial S_{fi}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot [\rho_f \lambda_{fi} \mathbf{K}(\vec{\nabla} p_i - \rho_f g \vec{\nabla} z)] - q_{fi} \right\} d\Omega_i = 0. \quad (9)$$

Com a aplicação da Eq. (9) a um domínio computacional com N volumes de controle em um instante de tempo $t + \Delta t$, que ocorre Δt unidades de tempo após o tempo t , cujo campo de saturação é conhecido, podemos escrever uma expressão que relaciona os campos de pressão e saturação com o resíduo no balanço de massa (BM) para as fases óleo e água em cada um dos N volumes de controle do domínio computacional da seguinte forma (RODRIGUES, 2015):

$$\begin{bmatrix} p_1^{t+\Delta t} \\ S_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ p_N^{t+\Delta t} \\ S_N^{t+\Delta t} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} R_{o_1}^{t+\Delta t}(p_1^{t+\Delta t}, S_1^{t*}, \dots, p_N^{t+\Delta t}, S_N^{t*}) \\ R_{w_1}^{t+\Delta t}(p_1^{t+\Delta t}, S_1^{t*}, \dots, p_N^{t+\Delta t}, S_N^{t*}) \\ \vdots \\ R_{o_N}^{t+\Delta t}(p_1^{t+\Delta t}, S_1^{t*}, \dots, p_N^{t+\Delta t}, S_N^{t*}) \\ R_{w_N}^{t+\Delta t}(p_1^{t+\Delta t}, S_1^{t*}, \dots, p_N^{t+\Delta t}, S_N^{t*}) \end{bmatrix} \begin{matrix} BM \text{ óleo} - 1 \\ BM \text{ água} - 1 \\ \vdots \\ BM \text{ óleo} - N \\ BM \text{ água} - N \end{matrix}. \quad (10)$$

As pressões são tomadas no tempo $t + \Delta t$, enquanto as saturações são tomadas no instante t^* , esse último instante de tempo está intrinsecamente associado ao tipo de discretização temporal aplicado. Nesse trabalho aplicamos duas alternativas, sendo elas:

- Euler *Backward*, que leva a $t^* = t + \Delta t$ e à aproximação totalmente Implícita (FIM);
- Euler *Forward*, que leva a $t^* = t$ e à aproximação Implícita na Pressão e Explícita na Saturação (IMPES).

A conservação de massa é garantida quando o somatório de cada um dos termos componentes de $R_{fi}^{t+\Delta t}$ da Eq. (10) tende a zero.

Durante a discretização dos termos da equação (9), precisamos atribuir propriedades aos volumes de controle e suas interfaces. Para isso, utilizamos a média harmônica para o cálculo da permeabilidade nas faces e o método *Upwind* de primeira ordem para as variáveis dependentes da saturação (BARBOSA, 2017). Nas seções a seguir, descrevemos as considerações e expressões que descrevem as abordagens mencionadas e suas consequências.

3.1 FORMULAÇÃO FIM

A aproximação da derivada temporal da saturação pelo método de Euler *Backward* leva a $t^* = t + \Delta t$ e ao esquema totalmente implícito (FIM) (ERTEKIN, et al., 2001). Essa metodologia leva a um sistema não linear cujas variáveis independentes são as pressões e as saturações nos volumes de controle. A não linearidade do problema, sob as simplificações do presente trabalho, é atribuída à dependência quadrática da mobilidade com a saturação, no modelo de Brooks & Corey.

3.1.1 Aproximação do termo de acumulação

O termo $\int_{\Omega_i} \phi_i \rho_f \frac{\partial s_{fi}}{\partial t} \partial \Omega_i$ da equação (9) é chamado de termo de acumulação e representa a taxa de variação temporal de massa da fase f no volume i . A aproximação da derivada temporal da saturação da fase f no volume i é considerada no instante $t + \Delta t$, e determinada conforme a Eq. (11):

$$\frac{\partial s_{fi}^{t+\Delta t}}{\partial t} \approx \frac{s_{fi}^{t+\Delta t} - s_{fi}^t}{\Delta t}. \quad (11)$$

Dessa forma, podemos aproximar o termo de acumulação em um volume i , no intervalo de tempo entre os instantes t e $t + \Delta t$, na forma da Eq. (12).

$$\int_{\Omega_i} \phi \rho_f \frac{\partial s_{fi}}{\partial t} \partial \Omega_i \approx \Omega_i \phi_i \rho_f \frac{s_{fi}^{t+\Delta t} - s_{fi}^t}{\Delta t} = \frac{M_{fi}^{t+\Delta t} - M_{fi}^t}{\Delta t}, \quad (12)$$

onde M_{fi} representa a massa da fase f no volume i .

3.1.2 Aproximação do termo de fluxo

O termo $\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot [\rho_f \frac{k_{rfi}}{\mu_f} \mathbf{K}(\vec{\nabla} p_i - \rho_f g \vec{\nabla} z)] \partial \Omega_i$ da equação (9) é chamado de termo de fluxo e representa a integral dos fluxos no interior do volume de controle i . Utilizando o teorema da divergência, podemos aproximar essa integral pela integral dos fluxos através da superfície de controle, Γ_i , como na Eq. (13)

$$\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot [\rho_f \lambda_{fi} \mathbf{K}(\vec{\nabla} p_i - \rho_f g \vec{\nabla} z)] \partial \Omega_i = \int_{\Gamma_i} \rho_f \lambda_{fi} \mathbf{K}(\vec{\nabla} p - \rho_f g \vec{\nabla} z) \cdot \vec{n}_i \partial \Gamma_i, \quad (13)$$

onde, $\vec{n}_i$ é o vetor unitário normal à superfície, Γ_i , do volume de controle i .

Dada uma superfície Γ_{ij} pertencente ao volume de controle i e adjacente a um volume de controle j , podemos escrever a aproximação para o termo de fluxo através dessa superfície no instante $t + \Delta t$, como:

$$F_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} \lambda_{fi} \mathbf{K}_{ij} \vec{\nabla}(\vec{p} - \rho_f z \vec{g}) \cdot \vec{n}_{ij} \partial \Gamma_{ij} = |\Gamma_{ij}| \mathbf{K}_{ij} \lambda_{fi}^{t+\Delta t} (p_j^{t+\Delta t} - p_i^{t+\Delta t} + \rho_f g \Delta z_{ij}), \quad (14)$$

onde $\Delta z_{ij} = z_j - z_i$ representa a componente, na direção da gravidade, do vetor que liga os centroides de i e j .

Fazendo o somatório dos termos de fluxo em toda a superfície de controle, Γ_i , do volume de controle i , obtemos a aproximação do termo de fluxo, conforme Eq. (15).

$$\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot [\rho_f \lambda_{fi} \mathbf{K}(\vec{\nabla} p_i - \rho_f g \vec{\nabla} z)] \partial \Omega_i = \sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_i} F_{ij}. \quad (15)$$

3.1.3 Aproximação do termo fonte/sumidouro

O termo q_f da equação (9) representa vazão mássica que quantifica os termos fonte/sumidouro, valores de vazão prescrita num determinado volume de controle, é aplicada a seguinte aproximação:

$$\int_{\Omega_i} q_f \partial \Omega_i \approx \bar{q}_f \Omega_i. \quad (16)$$

3.1.4 Algoritmo FIM

A equação (10) com $t^* = t + \Delta t$ representa um sistema não linear de equações que, nesse trabalho, resolvemos com a aplicação do método de Newton-Raphson (Ruggiero, et al., 2014), que consiste em aplicar, recursivamente, a seguinte expressão:

$$\begin{cases} \check{J}(x^k) \Delta x^{k+1} = -r(x^k) \\ x^{k+1} = x^k + \Delta x^{k+1} \end{cases}, \quad (17)$$

até que $r(x^k) \rightarrow 0$, onde $x^k = [p, s_w]'$ representa as pressões e saturações nos volumes de controle do domínio computacional, R_{fi} refere-se ao balanço de massa da fase f no volume i , $\check{J}$ é a matriz jacobiana de $r = [R_{o_1}, R_{w_1}, \dots, R_{o_N}, R_{w_N}]'$.

Os termos da primeira linha da equação (17) podem ser explicitados da seguinte forma:

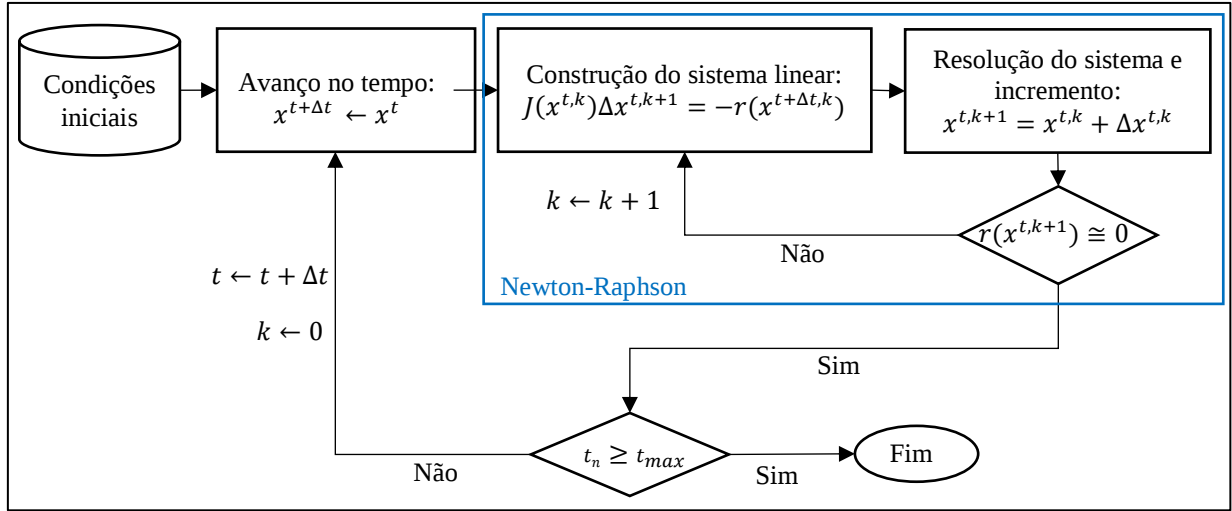
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{o_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_N^{t+\Delta t,k}} & \frac{\partial R_{o_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{o_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_N^{t+\Delta t,k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_{o_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{o_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_N^{t+\Delta t,k}} & \frac{\partial R_{o_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{o_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_N^{t+\Delta t,k}} \\ \frac{\partial R_{w_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{w_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_N^{t+\Delta t,k}} & \frac{\partial R_{w_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{w_1}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_N^{t+\Delta t,k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_{w_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{w_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial p_N^{t+\Delta t,k}} & \frac{\partial R_{w_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_1^{t+\Delta t,k}} & \dots & \frac{\partial R_{w_N}^{t+\Delta t,k}}{\partial S_N^{t+\Delta t,k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1^{t+\Delta t,k+1} \\ \vdots \\ \Delta p_N^{t+\Delta t,k+1} \\ \Delta S_1^{t+\Delta t,k+1} \\ \vdots \\ \Delta S_N^{t+\Delta t,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{o_1}^{t+\Delta t,k}(p_1^{t+\Delta t,k}, S_1^{t+\Delta t,k}, \dots, p_N^{t+\Delta t,k}, S_N^{t+\Delta t,k}) \\ \vdots \\ R_{o_N}^{t+\Delta t,k}(p_1^{t+\Delta t,k}, S_1^{t+\Delta t,k}, \dots, p_N^{t+\Delta t,k}, S_N^{t+\Delta t,k}) \\ R_{w_1}^{t+\Delta t,k}(p_1^{t+\Delta t,k}, S_1^{t+\Delta t,k}, \dots, p_N^{t+\Delta t,k}, S_N^{t+\Delta t,k}) \\ \vdots \\ R_{w_N}^{t+\Delta t,k}(p_1^{t+\Delta t,k}, S_1^{t+\Delta t,k}, \dots, p_N^{t+\Delta t,k}, S_N^{t+\Delta t,k}) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

os quais podem ser agrupados em blocos de forma a evidenciar as entradas correspondentes à conservação de massa das fases água e óleo em função das variáveis independentes, pressão e saturação de água, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} J_{op} & J_{os} \\ J_{wp} & J_{ws} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_p \\ \Delta x_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_o \\ r_w \end{bmatrix}. \quad (19)$$

O esquema geral de aplicação da metodologia FIM é mostrado na Figura 2. Começamos a simulação com a aplicação das condições iniciais do reservatório, a partir daí vamos ao primeiro passo de tempo e avançamos o tempo de simulação à medida que a solução da equação de conservação de massa converge. Observa-se que o método de Newton pode não convergir e requerer a redução do passo de tempo.

Figura 2 - Estratégia FIM.



Fonte: O Autor (2023)

3.2 FORMULAÇÃO IMPES

Nesta seção, apresentamos a formulação numérica para discretização das equações que representam o escoamento bifásico água-óleo através do procedimento IMPES, considerando as hipóteses simplificadoras descritas no Capítulo 2 e desprezando os efeitos gravitacionais. Nessa metodologia, a aproximação da derivada temporal do termo de acumulação, da Eq. (9), é realizada com o método de Euler *forward*, de forma que as variáveis dependentes da saturação são calculadas com o campo de saturação do passo de tempo anterior, t , conhecido.

Os campos de pressão e saturação são obtidos separadamente, uma vez conhecida a distribuição de saturação inicial, calculamos o campo de pressões, através da solução de um sistema linear, em seguida, obtemos o campo de velocidades através da aplicação da lei de Darcy, Eq. (3), que usamos para calcular, explicitamente, o campo de saturações.

3.2.1 Equação da pressão

Substituindo a velocidade de Darcy (3) na Lei de Conservação da massa, equação (1), após alguma adequação algébrica e considerando das hipóteses simplificadoras, obtemos a equação da pressão, na seguinte forma:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\lambda K \vec{\nabla} p) = q, \quad (20)$$

onde $\lambda = \lambda_o + \lambda_w$ e $q = q_o + q_w$ são, respectivamente, a mobilidade total e a vazão específica total e $\lambda_f = k_{rf}/\mu_f$, é a mobilidade da fase $f = o, w$.

A solução aproximada da equação de pressão, (20), a partir do Método de Volumes Finitos, é obtida a partir da integração dessa equação em cada volume de controle i , conforme Eq. (21).

$$\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot (\lambda K \vec{\nabla} p) d\Omega_i = - \int_{\Omega_i} q_i d\Omega_i. \quad (21)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss, podemos escrever a equação (21) como:

$$\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega_i = \int_{\Gamma_i} \vec{v} \cdot \vec{n}_i d\Gamma_i = \int_{\Omega_i} q_i d\Omega_i. \quad (22)$$

As duas últimas integrais da equação (22) podem ser aproximadas utilizando uma discretização, com volumes de controle poliédricos (poligonais em 2-D), e usando o Teorema do Valor Médio, tendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_i &= \sum_{ij \in \Gamma_i} \vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij} \\ \int_{\Omega_i} q_i d\Omega_i &= q_i \Omega_i \end{aligned}, \quad (23)$$

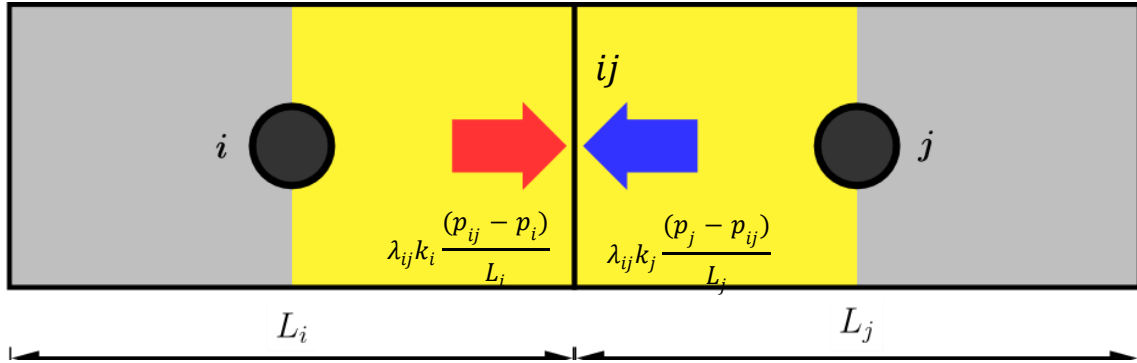
onde, $\vec{v}_{ij}$ é a velocidade aproximada na superfície de controle adjacente aos volumes de controle i e j , ij . $\vec{N}_{ij} = \Gamma_{ij} \vec{n}_i$ é o vetor área normal na direção dos centroides de i e j cujo módulo corresponde à área da superfície ij . O somatório do lado direito da primeira linha da Eq. (23) é realizado sobre todas as faces do volume i , q_i é o termo de injeção ou produção específica no volume de controle i , por fim, Ω_i representa o volume de i .

Considerando um volume de controle arbitrário, e as aproximações dadas na equação (23), podemos reescrever a equação (22), como:

$$\sum_{ij \in \Gamma_i} \vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij} = q_{Ti} \Omega_i. \quad (24)$$

Nesse trabalho, utilizamos a lei de Darcy, Eq. (3) e a aproximação de *Two Point Flux Approximation* (TPFA) (ERTEKIN, et al., 2001). De forma que o fluxo na face ij , adjacente aos volumes i e j é definido em função das permeabilidades, pressões e mobilidades desses dois volumes, conforme esquematizado na Figura 3.

Figura 3 - Face, ij , adjacente aos volumes i e j .



Fonte: Adaptado de Santos (2022).

Utilizando a definição da Eq. (23) e a Lei de Darcy, Eq. (3), e aproximando o gradiente de pressão por diferenças finitas, tem-se, após adequação algébrica:

$$\begin{cases} (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij})_i = -2\lambda_{ij}K_i \left(\frac{p_{ij}-p_i}{L_i} \right) \\ (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij})_j = -2\lambda_{ij}K_j \left(\frac{p_j-p_{ij}}{L_j} \right) \end{cases} \quad (25)$$

onde, p_i é a pressão no volume i , p_j é a pressão no volume j , L_i e L_j são os comprimentos dos volumes de controle, na direção normal a ij , $\vec{N}_{ij}$, dos blocos i e j , p_{ij} e λ_{ij} representam a pressão e a mobilidade na face ij , respectivamente, já K_i e K_j são as componentes de permeabilidade absoluta dos blocos i e j na direção normal a ij .

Com o objetivo de eliminar a dependência da pressão na face ij , p_{ij} , é imposta a condição de continuidade do fluxo em ij :

$$(\vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij})_i = -(\vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij})_j, \quad (26)$$

substituindo as equações (25) na equação (26), obtém-se a pressão em ij , após adequação algébrica:

$$p_{ij} = \left(\frac{K_i}{L_i} p_i + \frac{K_j}{L_j} p_j \right) \left(\frac{K_i}{L_i} + \frac{K_j}{L_j} \right)^{-1}, \quad (27)$$

aplicando a equação (27) nas equações (25), após adequações algébricas, obtém-se:

$$\vec{v}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij} = -\lambda_{ij} \frac{2K_i K_j}{K_i L_j + K_j L_i} (p_j - p_i), \quad (28)$$

agrupando os termos conhecidos da equação (28), define-se o termo de transmissibilidade na face ij , τ_{ij} , como em (29).

$$\tau_{ij} = \lambda_{ij} \frac{2K_i K_j}{K_i L_j + K_j L_i}. \quad (29)$$

A aplicação da equação (29) a cada um dos volumes do domínio computacional gera um sistema de equações lineares cujas entradas da matriz dos coeficientes, na linha i , coluna j , corresponde às transmissibilidades, τ_{ij} , de (29), de forma que esse sistema pode ser escrito na forma matricial como:

$$Tp = q, \quad (30)$$

onde T representa a matriz de transmissibilidades, p o vetor pressão (incógnitas) e q o vetor dos termos independentes que representa os termos de fonte/sumidouro e as condições de contorno.

3.2.2 Aproximação da saturação

Novamente, fazendo uso da lei de conservação da massa, Eq. (1), e a lei de Darcy, Eq. (3), e ainda da equação de restrição das saturações, Eq. (2), e as hipóteses assumidas, após alguma manipulação algébrica, podemos escrever a equação da saturação de água, como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) + q_w, \quad (31)$$

onde $f_w = f_w(S_w) = \lambda_w/\lambda$ é a função fluxo fracionário da água, que é uma função não linear da saturação da fase água e q_w é a vazão específica da fase água (EWING, 1983).

Integrando a equação (31) no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ num volume de controle i , temos (ROSA, et al., 2006):

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_i \partial t = -\frac{1}{\phi_i} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) \partial \Omega_i \partial t + \frac{1}{\phi_i} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} q_w \partial \Omega_i \partial t. \quad (32)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss no primeiro termo do lado direito dessa equação para um volume de controle i , podemos reescrever a Eq.(32) como:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_i \partial t = -\frac{1}{\phi_i} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Gamma_i} f_w \vec{v} \cdot \vec{n} \partial \Gamma_i \partial t + \frac{1}{\phi} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} Q_w \partial \Omega_i \partial t. \quad (33)$$

Integrando a equação (33) no intervalo de tempo em questão, usando malha discreta poliédrica, e aplicando o Teorema do Valor Médio em conjunto com a aproximação de Euler *Forward*, na derivada temporal, temos:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_i \partial t = (S_{w_i}^{t+\Delta t} - S_{w_i}^t) \Omega_i, \quad (34)$$

$$\frac{1}{\phi} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Gamma_i} f_w \vec{v} \cdot \vec{n} \partial \Gamma_i \partial t = \frac{\Delta t}{\phi} \sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_i} f_w (S_{w_{\Gamma_{ij}}}^t) \vec{v}_{\Gamma_{ij}} \cdot \vec{N}_{\Gamma_{ij}}, \quad (35)$$

$$\frac{1}{\phi_i} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_i} Q_w \partial \Omega_i \partial t = \frac{q_{w_i} \Omega_i \Delta t}{\phi_i}, \quad (36)$$

onde $S_{w_i}^{t+\Delta t}$ e $S_{w_i}^t$ são os valores da saturação de água no volume de controle i nos instantes de tempo $t + \Delta t$ e t , respectivamente, Ω_i é o volume e q_{w_i} o valor médio do termo de fonte ou sumidouro no volume de controle i , já Δt , representa o passo de tempo.

A substituição de (34), (35) e (36) na equação (33), leva à equação da saturação em sua forma discreta, (37):

$$S_{w_i}^{t+\Delta t} = S_{w_i}^t - \frac{\Delta t}{\phi_i \Omega_i} \sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_i} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{N}_{ij} + \frac{\Delta t q_{w_i}}{\phi_i \Omega_i}, \quad (37)$$

onde, $\vec{F}_{ij} = f_w (S_{w_{ij}}^t) \vec{v}_{ij}$ representa os valores do fluxo de água calculados na face do volume i adjacente ao volume j . É importante ressaltar que, na estratégia IMPES, o passo de tempo, Δt , deve atender à condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) (COURANT, et al., 1967 [1928]).

Quando se utiliza uma aproximação tipo “*upwind*” de primeira ordem (FOUM), como adotado no presente trabalho, a aproximação numérica IMPES é estável quando utilizamos valores de CFL menores que 1. Esse valor é utilizado para definição do passo de tempo, a cada face da malha computacional, ij , está associado um valor desse parâmetro. Com isso, calculamos o passo em cada uma das faces do domínio e adotamos o menor, de forma a garantir a estabilidade do método em todo o domínio. Nesse trabalho, utilizamos $CFL = 0.7$ nos exemplos em que aplicamos essa estratégia, de forma que o passo de tempo foi definido como:

$$\Delta t_{n+1} = CFL \frac{L_i + L_j}{2|\vec{v}_{ij}|\Delta f_{w_{ij}}(S_{W_{ij}}^n)/\Delta S_{W_{ij}}^n}, \quad (38)$$

onde, $\vec{v}_{ij}$ é a velocidade total na face ij e $f_{w_{ij}}$ é o fluxo fracionário de água que atravessa essa face, $S_{W_{ij}}^n$ é a saturação de água na face ij no tempo t_n , e L_i e L_j são os comprimentos dos blocos i e j na direção normal a ij , conforme esquematizado na Figura 3.2.

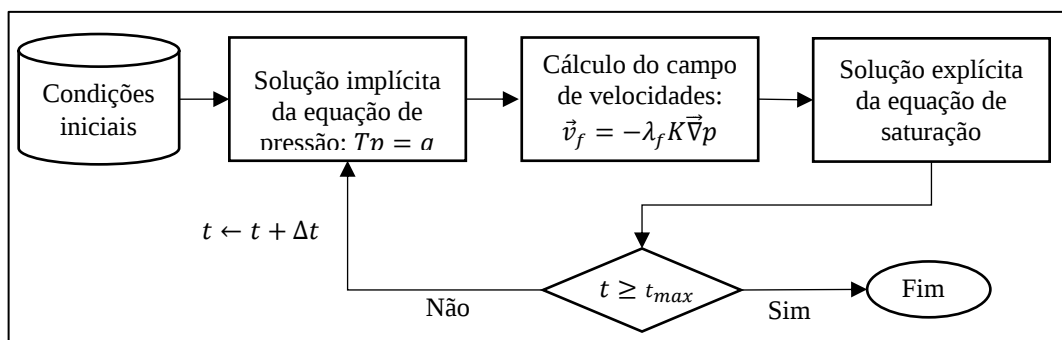
As variáveis dependentes da saturação associadas a uma face ij , adjacente aos volumes de controle i e j , são calculadas com o método de ponderação à montante *First Order Upwind Method* (FOUM) (BARBOSA, 2017) que projeta em ij a saturação associada ao volume (i ou j) com maior pressão, conforme Eq. (39).

$$\begin{cases} S_{w_{ij}} = S_{w_i}, & \text{se } p_i > p_j \\ S_{w_{ij}} = S_{w_j}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (39)$$

3.2.3 Algoritmo IMPES

Na modelagem através da estratégia *Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES), resolvemos o campo de pressão de forma explícita e determinamos o campo de velocidades através da lei de Darcy, (3). Em seguida, o campo de saturação é obtido explicitamente. Esse processo é repetido até o instante de tempo desejado, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 - Estratégia IMPES.

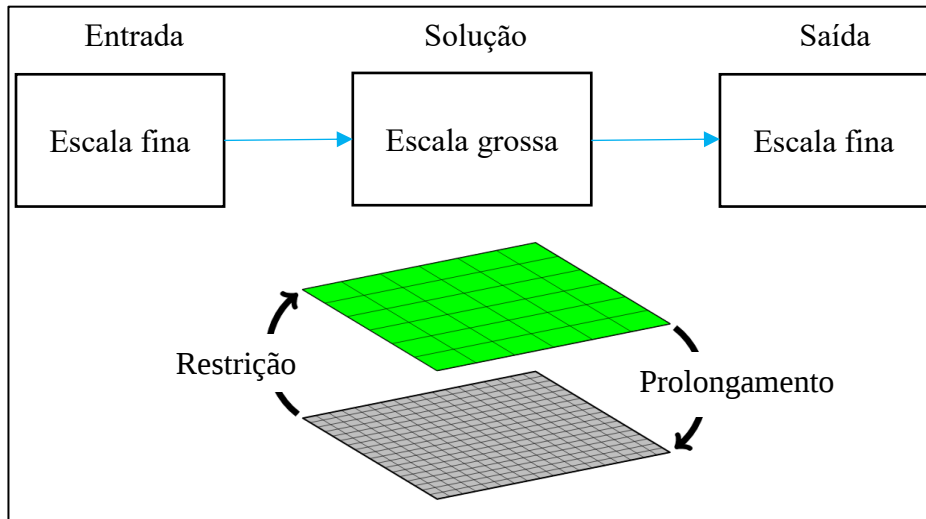


Fonte: Adaptado de Barbosa (2017).

4 MÉTODOS MULTIESCALA E MULTINÍVEL

Os métodos Multiescala e Multinível realizam transferências de escala de forma a reduzir o tamanho do sistema de equações a ser resolvido, o sistema é mapeado em um espaço com menor número de graus de liberdade e resolvido. Após isso, o método mapeia as informações para o espaço inicial. Esse mapeamento, ou transferência de informações entre as escalas, é feito com o uso de operadores, de prolongamento e restrição, o processo em questão é ilustrado na Figura 5.

Figura 5 - Transferências de escala realizadas pelos métodos Multiescala e Multinível.



Fonte: O Autor (2023)

Nesse trabalho, tomamos como base a variante do método Multiescala de Volumes Finitos (MsFVM) proposta originalmente por JENNY, et. al. (2003) em sua forma algébrica, desenvolvida por WANG, et. al. (2015), que criou o *Algebraic Multiscale Solver* (AMS) e o método *Algebraic Dynamic Multilevel* (CUSINI, et al., 2016).

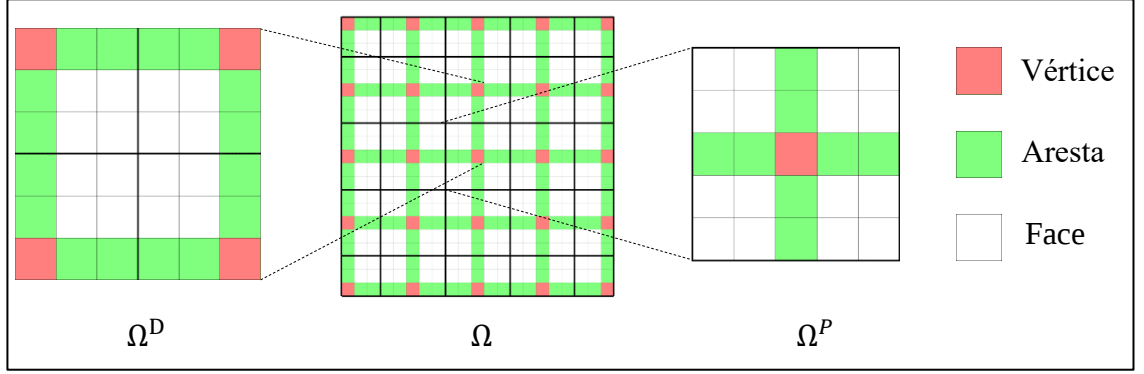
4.1 OPERADORES MULTIESCALA

4.1.1 Operadores AMS

A metodologia Multiescala demanda a definição de malhas auxiliares, primais e duais. Essas malhas são utilizadas na construção dos operadores de prolongamento e restrição. A Figura 6 ilustra um exemplo dessas malhas em 2-D, considerando-se discretização com ma-

lhas estruturadas, em duas dimensões, o domínio Ω é dividido em subdomínios Ω^P , que compõem a malha primal, e Ω^D , que compõem a malha Dual.

Figura 6 - Malhas auxiliares dos métodos Multiescala, Ω^P e Ω^D destacam volumes das malhas Primal e Dual, respectivamente.



Fonte: O Autor (2023)

4.1.1.1 Operador de Restrição

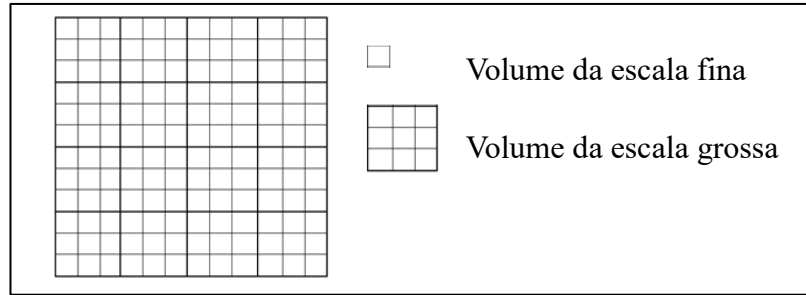
4.1.1.1.1 Malha Primal

Em um domínio com $N = N_x \times N_y \times N_z$ volumes, o método Multiescala define uma malha mais grosseira com $N^P = N_x^P \times N_y^P \times N_z^P$ volumes de controle. A partir disso, a razão de engrossamento é definida como:

$$CR = \left(\frac{N_x}{N_x^P}, \frac{N_y}{N_y^P}, \frac{N_z}{N_z^P} \right), \quad (40)$$

Os volumes da malha primal, na escala grossa, representam agrupamentos dos volumes da escala original do modelo. Esses agrupamentos representam os volumes de controle na escala grossa, onde a conservação de massa é garantida, e é a partir da malha primal que definimos o operador de restrição. A Figura 7 apresenta um exemplo com os dois níveis de malha, fina e grossa primal.

Figura 7 - Malha primal na escala grossa, linha grossa, construída com uma razão de engrossamento (3, 3) sobreposta à malha fina, linha estreita.



Fonte: Adaptado de (Santos, 2022).

4.1.1.1.2 Expressão algébrica

O operador de restrição AMS, R^{AMS} , é definido com base nos volumes da malha primal, Ω^P . Nesse trabalho, tomamos por base a definição dada por (JENNY, 2003), representada na equação (41).

$$R^{AMS}(K, i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Omega_i \in \Omega_K^P \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in (1, \dots, n^f); \forall K \in (1, \dots, N^C), \quad (41)$$

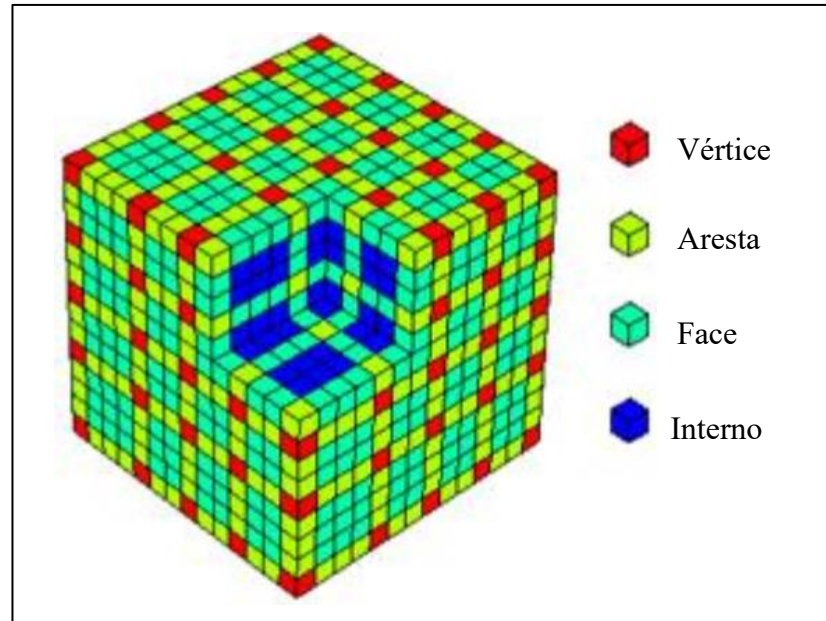
onde, n^f é o número de volumes de controle da malha fina e N^C é o número de volumes de controle da malha grossa primal.

4.1.1.2 Operador de Prolongamento

4.1.1.2.1 Malha Dual

A malha dual define os subdomínios nos quais são delimitados os problemas locais que fornecem as funções de base a partir das quais se constrói o operador de prolongamento (HAJIBEYGI, et al., 2008). Nessas malhas, os volumes da malha fina são hierarquizados de forma a definir o tipo de condição de localização a ser aplicado em cada volume de acordo com a posição nos domínios duais Ω^D . Essas condições são aplicadas para desacoplar o problema global em problemas locais e viabilizar o cálculo das funções de base. Na Figura 4.4 ilustramos uma malha dual construída sobre uma malha estruturada 3-D.

Figura 8 - Malha dual construída sobre uma discretização estruturada tridimensional.



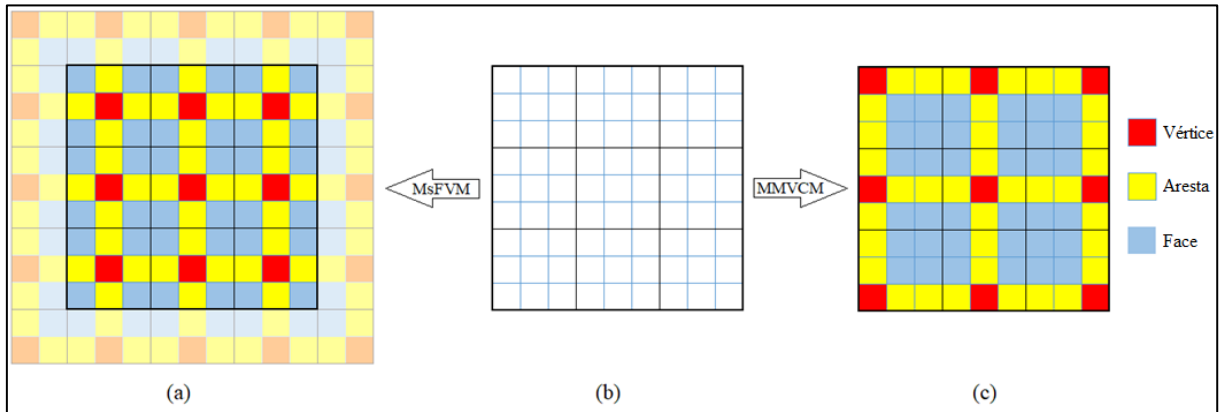
Fonte: O Autor (2023)

Os métodos de volumes finitos Multiescala (MsFVM) clássicos (JENNY, 2003) (ZHOU, 2008) (ZHOU, et al., 2012) (WANG, et al., 2014) definem os vértices dos volumes das malhas duais como sendo os volumes da escala fina que contém os centroides dos agrupamentos da malha primal, ou o que está mais próximo a este. Isso gera a necessidade de utilização de volumes fictícios (*Ghost Volumes*) nas fronteiras externas ao reservatório, o que diminui a qualidade das funções de base, visto que é necessário atribuir propriedades físicas a um meio que não existe fisicamente (BARBOSA, 2017).

Como forma de evitar esse problema, utilizamos a localização dos vértices proposta por (DEHKORDI, et al., 2013) no método Multiescala modificado para volume de controle (MMVCM). Na fronteira do reservatório, definimos os volumes do tipo *Vértice* nos volumes mais externos do domínio físico. Essa modificação aumenta a qualidade das funções de base, visto que usamos apenas informações do domínio físico real. Barbosa (2017) realizou diversos experimentos, comparando a técnica clássica do método MsFVM com o MMVCM, e, para todas as simulações realizadas, foi percebida uma maior acurácia no campo de pressão quando se utiliza o MMVCM. A Figura 9 ilustra as configurações da malha dual propostas por esses dois métodos. Cabe notar que, em reservatórios 3D, além dos tipos de volume mostrados nessa figura, também existem os volumes internos, conforme visto na Figura 9. Nesse

trabalho, em todos os experimentos numéricos, tomamos como base a malha dual do MMVCM e a formulação do AMS (Algebraic Multiscale Solver).

Figura 9 - Malhas auxiliares: a) dual do MsFVM apresentando os volumes reais, com cores sólidas, e os *ghost volumes*, com transparência b) Malha primal, linhas azuis representam as fronteiras dos volumes de controle da malha fina, sobrepostas a essas, e as linhas pretas representam os agrupamentos da malha primal e c) Malha dual do MMVCM.



Fonte: Adaptado de Barbosa (2017).

Os operadores de prolongamento são responsáveis por relacionar as pressões dos volumes de controle da escala grossa com as pressões nos volumes de controle da escala fina. Essa relação é obtida através de uma combinação linear cujos pesos são obtidos a partir da aplicação das condições de localização nos volumes da malha dual. Existe uma ampla gama de opções que podem ser utilizadas para essa finalidade, (MAZLUMI, et al., 2021) realizou um estudo comparativo de seis alternativas distintas, dentre as quais se destacaram as condições do tipo “*Reduced Boundary Condition*” (RBC), que utilizamos nesse trabalho. Essas condições vêm sendo amplamente aplicadas na literatura Multiescala, (ZHOU, et al., 2012), (KÜNZE, et al., 2013), (WANG, et al., 2014), (WANG, et al., 2015), (BARBOSA, 2017), (SOUZA, et al., 2021) e Multinível, (CUSINI, et al., 2016), (CUSINI, et al., 2017), (SANTOS, et al., 2019), (SANTOS, et al., 2022).

As RBCs representam as aproximações a serem aplicadas nos volumes de forma a criar problemas locais de fluxo. Esses problemas locais são resolvidos de forma que se obtêm as funções de base, que são os pesos da combinação linear mencionada anteriormente e as colunas do operador de prolongamento. A seguir mostramos a expressão que define a função de base associada ao volume K , da malha primal:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \mathbf{K} \nabla \Phi^K) = 0 & \text{on } \Omega^D, \\ -\nabla_{\perp} \cdot (\lambda \mathbf{K} \nabla \Phi^K)_{\perp} = 0 & \text{at } \partial\Omega^D, \\ \Phi^K = \bar{\delta}_{KL}, & \forall L \in [1, N^P], \end{cases} \quad (42)$$

onde a segunda linha representa a imposição de fluxo tangencial nos volumes da fronteira de Ω^D .

O operador de prolongamento AMS é definido algebricamente, as expressões que permitem a dedução de seus termos são descritas através de matrizes, as quais são definidas a partir da malha dual, que atribui classes aos volumes da malha fina e define o tipo de condição a ser aplicado.

Nos itens a seguir, seguimos os procedimentos de dedução das expressões descritos em (WANG, 2015), na descrição do método AMS.

4.1.1.2.2 Matriz de permutação

A matriz de permutação, G , ordena a matriz de transmissibilidades de forma a setorizar os volumes de controle nessa matriz de acordo com o tipo de volume na malha dual, de forma a evidenciar o tipo de condição de contorno a ser aplicada em cada sub matriz. Essa matriz permuta linhas e colunas da matriz de transmissibilidades de acordo com o a classe do volume na malha dual, sendo utilizada a seguinte ordem: *Internos* (i), *Faces* (f), *Arestas* (e), *Vértices* (v), ver Figura 4.4.

4.1.1.2.3 Matriz Wirebasket

Na matriz Wirebasket, W , que corresponde à matriz de transmissibilidades ordenada em função da classe dos volumes na malha dual, as influências dos diferentes tipos de volume entre si e com os demais são evidenciadas, sendo que a mesma é obtida a partir das matrizes de permutação, G , e transmissibilidades, T , como segue:

$$W = GTG', \quad (43)$$

em que, G' é a transposta de G .

No esquema TPFA a matriz *Wirebasket* tem a forma:

$$W = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & 0 \\ 0 & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

onde, T_{ab} representa a influência dos volumes da classe a nos volumes da classe b da malha dual. Sendo, i, f, e, v referentes aos volumes do tipo interno, face, aresta e vértice, respectivamente.

O sistema de equações da escala fina, equação (30), após as operações de permutação, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & 0 \\ 0 & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_f \\ p_e \\ p_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_f \\ q_e \\ q_v \end{bmatrix}. \quad (45)$$

4.1.1.2.4 Matriz Modificada

A matriz modificada, M , representa, numericamente, a aplicação das condições de contorno reduzidas e o desacoplamento do problema original, i.e., a separação do problema global em diversos problemas locais.

Desacoplamos o sistema da seguinte forma:

- Anulamos os blocos abaixo da diagonal principal:

$$T_{fi} = T_{ef} = T_{ve} = 0 \quad (46)$$

- Adicionamos esses termos nos seus correspondentes na diagonal principal. Isso feito para garantir a conservação de massa nas funções de base (WANG, 2015).

$$\begin{aligned} T_{ff}^*(k, k) &= T_{ff}(k, k) + \sum_{c=1}^{n_i} T_{fi}(k, c) \\ T_{ee}^*(k, k) &= T_{ee}(k, k) + \sum_{c=n_i+1}^{n_i+n_f} T_{ef}(k, c) \end{aligned} \quad (47)$$

onde n_i e n_f são, respectivamente, o número de internos e faces da malha dual correspondente.

Após as operações descritas nas equações (46) e (47), a matriz *Wirebasket* modificada, M , assume a forma:

$$M = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ff}^* & T_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ee}^* & T_{ev} \\ 0 & 0 & 0 & I_{vv} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

O termo I_{vv} representa a matriz identidade de ordem n_v que é equivalente à aplicação das condições de *Dirichlet* nesses volumes.

4.1.1.2.5 Expressão Algébrica

Resolvemos o sistema de blocos da Eq. (48) que relaciona as pressões dos volumes dos tipos *Interno*, *Face* e *Aresta* com as pressões nos volumes *Vértice*, que representam as pressões da escala grossa. Para isso, escrevemos o sistema modificado:

$$\begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ff}^* & T_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ee}^* & T_{ev} \\ 0 & 0 & 0 & I_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_f \\ p_e \\ p_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

Com a técnica de substituição à montante, obtemos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} p_i \\ p_f \\ p_e \\ p_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{ii}^{*-1}(T_{if}T_{ff}^{*-1}T_{fe}T_{ee}^{*-1}T_{ev}) \\ T_{ff}^{*-1}(T_{fe}T_{ee}^{*-1}T_{ev}) \\ -T_{ee}^{*-1}T_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix} p_v, \quad (50)$$

Podemos então escrever a seguinte expressão para o operador de prolongamento que ordena as expressões na forma do problema original:

$$P^{AMS} = G' \begin{bmatrix} -T_{ii}^{*-1}(T_{if}T_{ff}^{*-1}T_{fe}T_{ee}^{*-1}T_{ev}) \\ T_{ff}^{*-1}(T_{fe}T_{ee}^{*-1}T_{ev}) \\ -T_{ee}^{*-1}T_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

onde P^{AMS} é o operador de prolongamento AMS.

Cada coluna do operador de prolongamento representa uma função de base, que contém os pesos na combinação linear que determina as pressões na escala fina a partir das pressões na escala grossa de um volume do tipo vértice.

4.1.2 Método A-AMS

WANG, et al. (2015) associaram a aplicação das RBCs em regiões problemáticas do reservatório a oscilações no campo de pressão devido à indução de termos não físicos (transmissibilidades negativas) na matriz de transmissibilidades da escala grossa, a qual é definida na Eq. (52), a partir da matriz de transmissibilidades da escala fina, T , Eq. (30), do operador de restrição AMS, R^{AMS} , Eq. (41), e do operador de prolongamento AMS, P^{AMS} , Eq. (51).

$$T^{C_AMS} = R^{AMS} T P^{AMS}, \quad (52)$$

No método A-AMS, adaptamos a malha dual e, conseqüentemente, as funções de base para eliminar os termos não físicos mais relevantes e melhorar a qualidade da solução Multi-escala.

4.1.2.1 Operador de restrição

Na metodologia A-AMS, utilizamos a mesma malha grossa primal do AMS, dessa forma, temos que o operador de Restrição A-AMS coincide com o correspondente operador AMS, dessa forma:

$$R^{A-AMS} = R^{AMS}, \quad (53)$$

4.1.2.2 Operador de prolongamento

4.1.2.2.1 Malha Dual

A malha dual na escala grossa está, por definição, associada à aplicação de condições de contorno reduzidas (RBCs) para desacoplamento do problema global e cálculo das funções de base. Nesse trabalho, utilizamos o parâmetro definido em (WANG, et al., 2015), η_{IJ} , para quantificar os termos não físicos e realizar a adaptação da malha dual à física do modelo de forma a controlar os termos não físicos e eliminar/mitigar as oscilações no campo de pressão. Observa-se que o parâmetro η é positivo quando o termo fora da diagonal, $\tau_{IJ}^{C_AMS}$, tem o mesmo sinal que o termo correspondente na diagonal, $\tau_{II}^{C_AMS}$.

$$\eta_{IJ}^I = \frac{\tau_{IJ}^{C,AMS}}{\tau_{II}^{C,AMS}}, \quad (54)$$

aqui, η_{IJ}^I é associado à interface IJ adjacente aos volumes primais I e J em relação à contribuição do volume de controle I , e $\tau_{IJ}^{C,AMS}$ é a entrada na matriz de transmissibilidades correspondente a IJ , e $\tau_{II}^{C,AMS}$ o termo correspondente na diagonal principal. Associamos a IJ um valor único desse parâmetro:

$$\eta_{IJ} = \max(\eta_{IJ}^I, \eta_{IJ}^J). \quad (55)$$

Utilizamos o seguinte algoritmo para definição da malha dual do método A-AMS:

Algoritmo 4.1. Definição da malha Dual do método A-AMS.

- 1: Defina a malha dual AMS;
- 2: Compute as funções de base AMS Eq. (51);
- 3: Construa a matriz de transmissibilidades da escala grossa, Eq. (52);
- 4: Calcule os parâmetros η_{IJ} para cada interface da malha primal IJ , Eq. (55);
- 5: Especifique o parâmetro limite η^{lim} ;
- 6: Aglomere os volumes duais para eliminar as RBCs que cruzam as interfaces IJ em que $\eta_{IJ} > \eta^{lim}$.

Abaixo seguem algumas observações acerca dos passos do algoritmo 4.1:

Etapa 1: defina uma malha de escala grossa dual tão uniforme quanto possível de acordo com a razão de engrossamento e as dimensões do reservatório. Isso é feito atribuindo-se um *flag* para identificar cada volume do domínio computacional;

Etapa 2: calcule as funções de base aplicando a formulação AMS em cada volume da malha grossa dual (Vértices, Arestas, Faces e Internos). Isso é feito resolvendo sistemas locais de equações lineares em cada volume da malha dual;

Etapa 3: construa o sistema de escala grossa integrando/somando os fluxos Multiescala na escala grossa $T^C = R^{AMS}TP^{AMS}$;

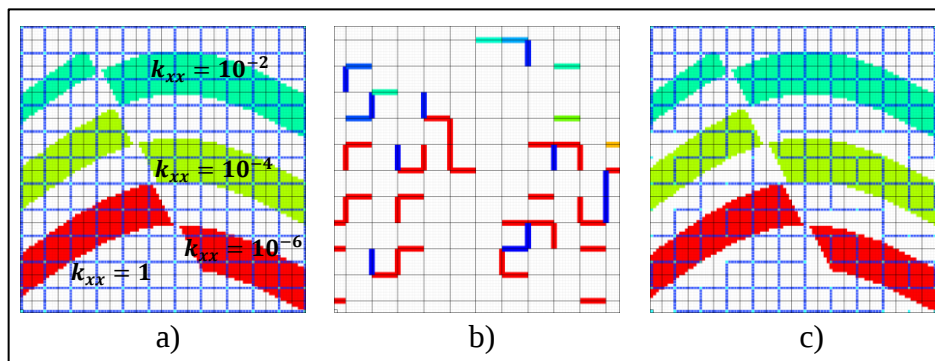
Etapa 4: calcule o parâmetro η_{IJ} para todas as faces da malha grossa primal, IJ , com a Eq. (54) e (55), esta etapa consiste em analisar as entradas da matriz de transmissibilidades da escala grossa, T^C .

Etapa 5: especifique o valor limite η^{lim} analisando os valores η_{IJ} , da etapa 4, e a porcentagem correspondente do recálculo das funções de base, nos casos testados o valor de η^{lim} foi definido no início da simulação.

Passo 6: aglomere os volumes duais de forma a eliminar as arestas críticas, com $\eta_{IJ} > \eta^{lim}$.

Para ilustrar a aplicação do algoritmo de adaptação da malha dual do método A-AMS elaboramos a Figura 10, que exemplifica a aplicação do algoritmo 4.1 para definição da malha Dual A-MAS. Em a) temos a malha dual do AMS sobreposta a um campo de permeabilidades com diferentes camadas e uma falha fina. Em b) temos uma representação dos termos não físicos η_{IJ} associados às interfaces da malha primal Eq. (3.17), em vermelho estão as interfaces críticas (com $\eta_{IJ} > \eta^{lim}$) e, por fim, em c) temos a malha dual do método A-AMS associada a η^{lim} adotado. Observa-se que o número de funções da base não é modificado, modificamos apenas a região de suporte das funções de base.

Figura 10 - Ilustração da aplicação do algoritmo adaptação da malha Dual: a) malha dual AMS sobreposta a um campo de permeabilidades, b) representação dos termos não físicos η_{IJ} , em vermelho estão as interfaces críticas (com $\eta_{IJ} > \eta^{lim}$) e c) malha dual do método A-AMS



Fonte: Adaptado de (SANTOS, et al., 2022).

4.1.2.2.2 Expressão algébrica

A aglomeração dos volumes duais AMS para criação da malha dual A-AMS leva os volumes do tipo vértice a possuírem interface com os volumes do tipo face e interno e os volu-

mes do tipo aresta a possuírem interface com os volumes do tipo interno, de forma que a matriz Wirebasket do método A-AMS passa a ter a seguinte forma (56):

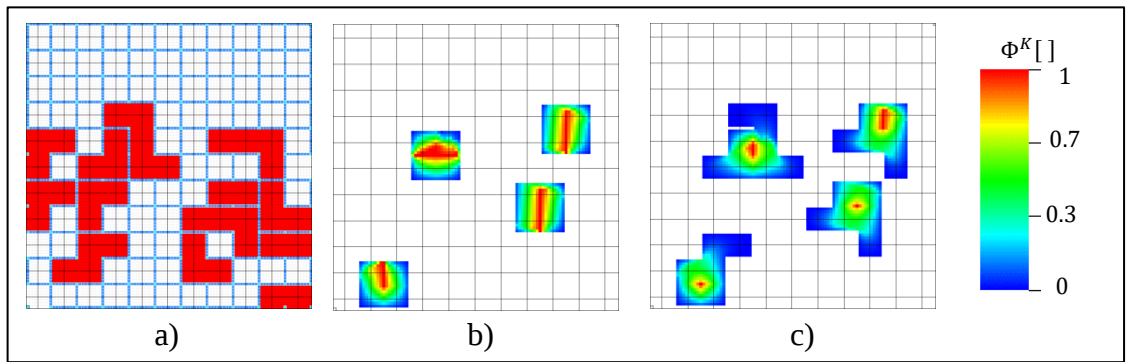
$$W^{A-AMS} = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & T_{ie} & T_{iv} \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & T_{fv} \\ T_{ei} & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ T_{vi} & T_{vf} & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

Seguindo um procedimento análogo ao descrito das equações (46) a (49), obtemos a seguinte expressão para cálculo do operador A-AMS nos volumes duais aglomerados:

$$P^{A-AMS} = G' \begin{bmatrix} -T_{ii}^{*-1}(T_{if}(T_{ff}^{*-1}(T_{fe} T_{ee}^{*-1} T_{ev} - T_{fv})) - T_{ie} T_{ee}^{*-1} T_{ev} - T_{iv})) \\ T_{ff}^{*-1}(T_{fe} T_{ee}^{*-1} T_{ev} - T_{fv}) \\ -T_{ee}^{*-1} T_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

A Figura 11 ilustra as regiões onde é realizado o recálculo das funções de base e do efeito do espalhamento das mesmas. Em a) grifamos em vermelho as regiões onde ocorre o recálculo das funções de base, em b) ilustramos as regiões de influência de quatro funções de base (colunas do operador de prolongamento) AMS e, finalmente, em c) ilustramos essas mesmas quatro funções de base com a aplicação do método A-AMS.

Figura 11 - a) malha dual A-AMS sobreposta a um campo de permeabilidades, b) representação dos termos não físicos η_{IJ} , em vermelho estão as interfaces críticas (com $\eta_{IJ} > \eta^{lim}$) e c) malha dual do método A-AMS.



Fonte: Adaptado de (SANTOS, et al., 2022).

Apesar da malha grossa dual utilizada no A-AMS ser uma modificação da malha dual do AMS, em alguns volumes da malha grossa dual, a malha grossa primal não é alterada. Como consequência, o sistema da escala grossa resultante tem a mesma ordem que o sistema gerado pelo método AMS. No entanto, a matriz de transmissibilidades de escala grossa A-

AMS é mais densa, com termos até mesmo entre volumes da malha grossa primal não adjacentes, devido ao maior espalhamento das funções de base.

Em nosso *framework*, as funções de base não são atualizadas ao longo da solução do problema de transporte, similarmente ao que foi feito por (ZHOU, et al., 2012) (CUSINI, et al., 2016), (WANG, et al., 2014) e (WANG, et al., 2015). A não atualização melhora a eficiência computacional, mas pode levar ao reaparecimento dos termos não físicos ao longo do tempo. Isso ocorre porque as mobilidades totais mudam quando o campo de saturação muda e, consequentemente, as funções de base deixam de satisfazer aos problemas localizados originais. O efeito da atualização ou não das funções de base não foi realizado no presente estudo, ficando a cargo de estudos futuros. Para isso, poder-se-ia utilizar a metodologia desenvolvida em (ZHOU, 2008).

4.2 OPERADORES MULTINÍVEL

Os métodos Multinível permitem a utilização simultânea de diferentes escalas na mesma simulação, o que gera maior flexibilidade, permitindo a aplicação de tratamento diferenciado nas regiões do reservatório com características peculiares, como na região próxima à frente de saturação e onde estão presentes os poços.

Nesse trabalho, tomamos como base o método Multinível *Algebraic Dynamic Multilevel* (ADM), cuja resolução mantém cada volume da malha primal na escala fina ou mapeia para a escala grossa, o que corresponde ao nível uniforme em cada volume da malha grossa primal. Já o método NU-ADM (SANTOS, et al., 2022), permite a utilização simultânea de um ou mais níveis em cada volume da malha grossa primal, o que corresponde ao uso de nível não uniforme em cada volume da malha grossa primal.

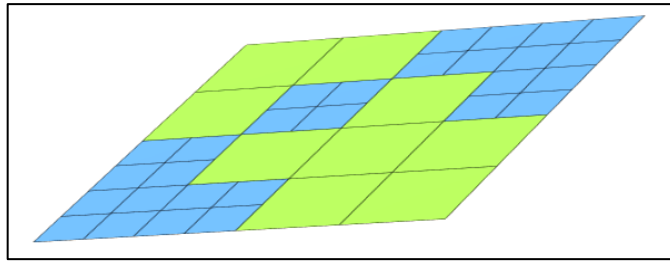
4.2.1 Operadores ADM

A definição dos ADM, R^{ADM} , proposta por CUSINI, et al. (2016), equação (58), toma como base os operadores Multiescala. Nesse trabalho, tomamos por base os operadores do *Algebraic Multiscale Solver* (AMS), R^{AMS} e P^{AMS} , propostos por (WANG, 2015).

4.2.1.1 Malha ADM

Essa malha é composta pelos volumes de controle das diferentes escalas e representa a resolução ADM, que define a escala a que pertence cada volume da malha primal. Sua definição pode levar em conta diversos fatores, como poços e campos de permeabilidade e saturação. Nesse trabalho, os volumes primais com poços são mantidos na escala fina ao longo da simulação, já a adaptação ao campo de saturação é realizada a cada passo de tempo, mantendo na escala fina os volumes da malha primal na região da frente de saturação, o critério para identificação da frente de saturação é definido adiante. A Figura 12 ilustra um exemplo dessa malha, onde os volumes em azul são mantidos na escala original, já os volumes em verde são mapeados para a escala grossa.

Figura 12 - Malha ADM em que os volumes em azul são mantidos na escala original, enquanto os volumes em verde são mapeados para a escala grossa.



Fonte: O Autor (2023)

4.2.1.2 Operador de Restrição

O operador de restrição ADM está associado à resolução ou malha ADM, que determina em que escala deve ser utilizada em cada volume da malha grossa primal.

Esse operador realiza as mesmas operações que o AMS nas regiões a serem mapeadas para a escala grossa. Já nas regiões mantidas na escala fina, esse operador apenas mapeia os Ids (números que identificam os volumes numa determinada malha) para a identificação ADM.

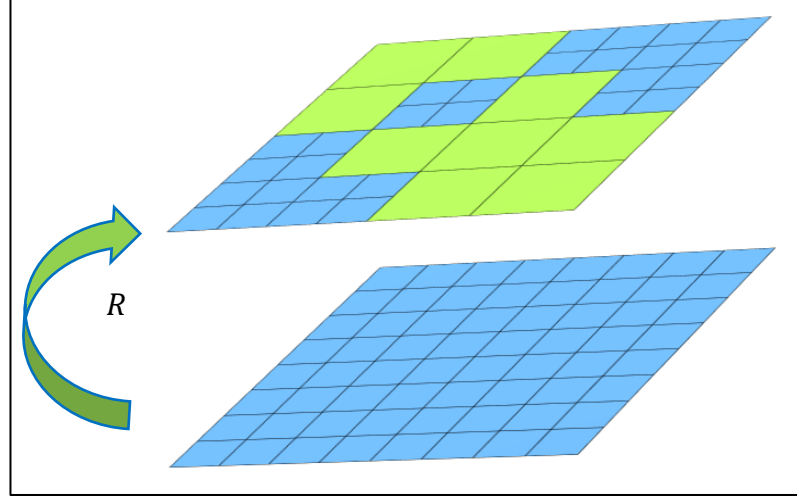
$$R(K^{ADM}, i) = \begin{cases} R^{AMS}(K, i), & \text{se } i \in \Omega_{K^{ADM}}^C \\ \delta_{K^{ADM}i}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in (1, \dots, N); \forall K^{ADM} \in (1, \dots, N^{ADM}), \quad (58)$$

onde, N^{ADM} é o número de volumes de controle da malha ADM, e $\delta_{K^{ADM}i}$ é o delta de Kronecker definido na equação (59).

$$\delta_{K^{ADM}i} = \begin{cases} 1, & \text{se } K^{ADM} \text{ e } i \text{ são Ids do mesmo volume nas malhas ADM e fina,} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (59)$$

A Figura 4.9 ilustra as transferências de escala realizadas pelo operador de restrição ADM.

Figura 13 - Transferências de escala realizadas pelo operador ADM.



Fonte: O Autor (2023).

4.2.1.3 Operador de Prolongamento

Utilizamos o operador de prolongamento AMS nos volumes a mapear para a escala grossa e mantemos na escala fina os demais, o operador ADM apenas mapeia os ids desses últimos.

$$P^{ADM}(i, K^{ADM}) = \begin{cases} P^{AMS}(i, K), & \text{se } i \in \Omega_{ADM}^C \\ \delta_{iK^{ADM}}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in [1, n^f]; K \in [1, n^c], \quad (60)$$

aqui, P^{AMS} é o operador de prolongamento AMS, equação (51), Ω_{ADM}^C é o conjunto dos volumes da malha ADM a serem mapeados no nível grosso, K é o Id. na malha primal de um volume dessa malha.

No Apêndice A, é ilustrada a aplicação prática do método ADM em um problema pequeno com explicitação dos termos que compõem os operadores.

4.2.2 Operadores NU-ADM

4.2.2.1 Malha NU-ADM

A malha NU-ADM define os níveis a que cada volume da escala fina pertence e os respectivos volumes de controle da escala NU-ADM. A definição dessa malha considera, além do campo de saturação, a influência de cada volume na geração de termos não físicos na matriz de transmissibilidades da escala grossa. Nesse trabalho, utilizamos três critérios para definição da malha NU-ADM:

Critério I - Rastreamento de frente de saturação: Os volumes i e j (adjacentes) são mantidos na escala fina se $\delta_{ij} > \delta^{lim}$, onde:

$$\delta_{ij} = abs(S_{w_i} - S_{w_j}), \quad (61)$$

aqui, S_{w_k} é a saturação de água no volume k , $k = i, j$.

Critério II - Máxima contribuição para os termos não físicos: O volume i é mantido na escala fina se $\alpha_i > \alpha^{lim}$, onde:

$$\alpha_i = \max \left(\frac{(TP)_{i,K \neq I}}{\tau_{II}^C} \right), \quad (62)$$

e T é a matriz de transmissibilidades da escala fina, P é o operador de prolongamento Multi-escala e τ_{II}^C é o termo na diagonal da matriz de transmissibilidades da escala grossa correspondente ao volume da malha primal I associado ao volume da escala fina i . O índice $i, K \neq I$ refere-se aos termos da linha i correspondentes aos volumes primais K , com $K \neq I$, na matriz TP .

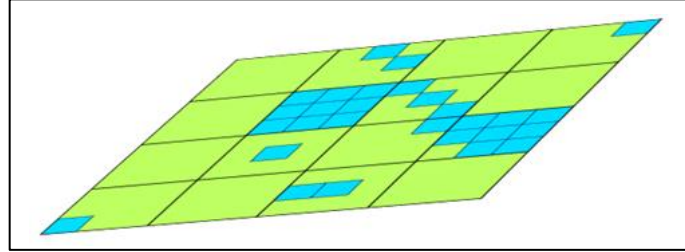
Critério III - Parâmetro de agrupamento de volumes: Impõe continuidade de níveis em volumes adjacentes com $\beta_i > \beta^{lim}$, com:

$$\beta_i = \frac{1 - \phi_{I(i)}}{\phi_{I(i)}}, \quad (63)$$

onde, $\phi_{I(i)}$ é o valor da função de base associada ao volume primal I na linha correspondente ao volume i .

Na Figura 14 ilustramos um exemplo de malha NU-ADM, em que os volumes a serem mantidos na escala original estão em cor azul, e os volumes da escala grossa em verde.

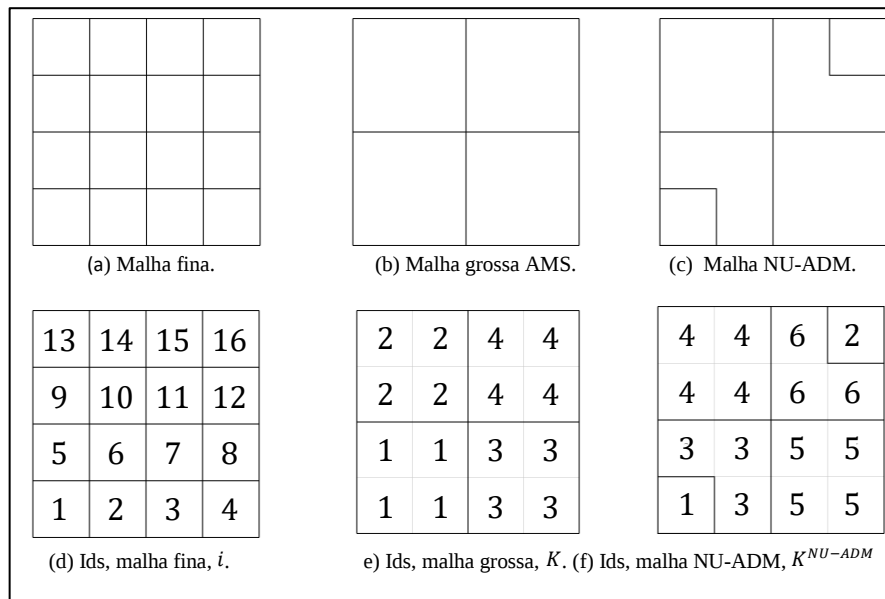
Figura 14 - Malha NU-ADM, volumes em azul são mantidos na escala original, volumes em verde são mapeados para a escala grossa.



Fonte: O Autor (2023).

Uma vez definido a que nível deve pertencer cada volume de controle do domínio computacional original, atribuímos Ids, números que identificam os volumes de controle em cada malha, aos volumes da malha NU-ADM. Na Figura 15, ilustramos os contornos dos volumes de controle das malhas fina, grossa e NU-ADM, em (a) ilustramos a malha fina (original) e os Ids de seus volumes em (d), em (b) ilustramos a malha grossa primal e os Ids de seus volumes em (e), por fim, em (c) ilustramos a malha NU-ADM e os Ids de seus volumes em (f).

Figura 15 - (a) Malha fina, (b) malha grossa primal, (c) malha NU-ADM, (d) Ids Malha fina, (e) Ids da malha grossa primal e (f) Ids da malha NU-ADM.



Fonte: O Autor (2023).

4.2.2.2 Operador de Restrição

No contexto NU-ADM, o operador de restrição é definido com base no operador AMS e na malha NU-ADM, esse operador aplica o operador de restrição ADM nos volumes a serem mapeados para a escala grossa e mantém a escala fina nos demais.

$$R(K^{NU-ADM}, i) = \begin{cases} R^{AMS}(K, i), & \text{se } i \in \Omega_{NU-ADM}^C \\ \delta_{K^{NU-ADM}, i}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in [1, n^f]; K \in [1, n^c], \quad (64)$$

onde, N^{NU-ADM} é o número de volumes na escala NU-ADM, os Ids K^{NU-ADM} e i são mostrados na Figura 15 e Ω_{NU-ADM}^C é o conjunto dos volumes de controle mapeados para a escala grossa na malha NU-ADM.

4.2.2.3 Operador de Prolongamento

Mais uma vez, tomamos como base o operador de prolongamento AMS, equação (4.12), onde seus termos são utilizados nos volumes pertencentes à escala grossa, enquanto que nos demais realizamos meramente o mapeamento dos ids.

$$P^{NU-ADM}(i, K^{NU-ADM}) = \begin{cases} P^{AMS}(i, K), & \text{se } i \in \Omega_{NU-ADM}^C \\ \delta_{i, K^{NU-ADM}}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in [1, n^f]; K \in [1, n^c], \quad (65)$$

aqui, P^{AMS} é o operador de prolongamento AMS, equação (51), Ω_{NU-ADM}^C é o conjunto dos volumes a serem mapeados no nível grosso, conforme mostrado na Figura 15 c).

4.3 ALGORITMOS DE SOLUÇÃO

Uma vez definidos os operadores de restrição e prolongamento, mapeamos o sistema da escala fina para a escala grossa.

4.3.1 Metodologia IMPES

Na metodologia IMPES o problema é mapeado para a escala grossa através da seguinte expressão:

$$RTPp' = Rq. \quad (66)$$

Os termos T , p e q são definidos conforme eq. (30) e R e P são os operadores de restrição e prolongamento correspondentes às metodologias, AMS (R^{AMS} , P^{AMS}), Eqs. (41) e (51),

A-AMS (R^{A-AMS}, P^{A-AMS}), Eqs. (53) e (57), ADM (R^{ADM}, P^{ADM}), Eqs. (58) e (60), ou NU-ADM (R^{NU-ADM}, P^{NU-ADM}), Eqs. (64) e (65).

A pressão na escala grossa obtida com a metodologia Multiescala/Multinível, p' , através da solução do sistema da Eq. (66) é então mapeada para a escala fina através da seguinte expressão:

$$p^m = Pp'. \quad (67)$$

A solução mapeada para a escala fina, p^m , garante conservação de massa em cada volume da malha grossa primal. No entanto, o mesmo não ocorre nos volumes da escala fina, o que leva à necessidade de aplicação de um procedimento para recuperação da conservação de massa nessa escala. Para isso, resolvemos o problema local da Eq. (68) em cada volume da malha grossa primal, Ω^C .

$$\begin{cases} -(\lambda \mathbf{K} \nabla p'') \cdot \vec{n} = \lambda \mathbf{K} \nabla p^m \cdot \vec{n} \text{ em } \partial \Omega^C \\ -\nabla \cdot (\lambda \mathbf{K} \nabla p'') = 0 \text{ em } \Omega^C \end{cases}. \quad (68)$$

A partir do campo de pressões conservativo no interior de cada volume da malha primal, p'' , e do campo de pressões Multiescala, p^m . De forma que utilizamos p^m em $\partial \Omega^C$ e p'' em Ω^C . Para que o problema de fluxo descrito na Eq. (68) seja bem posto, precisamos aplicar também uma condição de contorno do tipo Dirichlet, pressão prescrita, nesse trabalho aplicamos a pressão de contorno no vértice da malha Dual no interior do volume Ω^C . Note que não estamos interessados no valor da pressão p'' em si, e sim nos gradientes de pressão, de forma que podemos aplicar a condição de Dirichlet em qualquer volume no interior do domínio Ω^C .

4.3.1.1 Algoritmo AMS

No algoritmo a seguir, descrevemos as etapas básicas da metodologia AMS.

Algoritmo 4.2: Procedimento de aplicação do método AMS.

Início da simulação no tempo $t = 0$.

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha fina, com n^f volumes de controle, construa uma malha grossa primal com n^C volumes de controle, seção 4.1.1.1.1;
2. A partir da malha grossa primal, construa a malha grossa dual, seção 4.1.1.2.1;

3. Construa o operador de restrição a partir da malha primal, Eq. (41);
4. Para cada volume da malha grossa dual, construa o sistema local e calcule as funções de base e o operador de prolongamento, Eq. (51);

Enquanto $t < t^{final}$ faça:

5. Construa o sistema de equações na escala fina Eq. (30);
6. Mapeie o problema para a escala grossa, Eq. (66)
7. Resolva o problema do passo 6. e prolongue a solução para a escala fina, Eq. (67);
8. Reconstrua o fluxo na escala fina, Eq. (68);
9. Resolva o problema de saturação, Eq. (37);
10. Faça, $t = t + \Delta t$.

4.3.1.2 Algoritmo A-AMS

A seguir, apresentamos o algoritmo correspondente ao método A-AMS, em relação à metodologia AMS essa metodologia inclui as etapas 4.1 e 4.2 que se referem à adaptação da malha dual e recálculo das funções de base dos volumes duais aglomerados.

Algoritmo 4.3: Procedimento de aplicação do método A-AMS

Início da simulação no tempo $t = 0$.

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha fina, com n^f volumes de controle, construa uma malha grossa primal com n^c volumes de controle, seção 4.1.1.1.1;
2. A partir da malha grossa primal, construa a malha grossa dual, seção 4.1.1.2.1;
3. Construa o operador de restrição a partir da malha primal, Eq. (53);
3. Para cada volume da malha grossa dual, AMS ou A-AMS, construa o sistema local e calcule as funções de base e o operador de prolongamento, Eq. (57);
 - 4.1. Aplique o procedimento descrito no **Algoritmo 4.1.** para definir a malha dual A-AMS;

4.2. Calcule o operador de prolongamento nos volumes duais em que houve aglomeração e atualize esse operador.

Enquanto $t < t^{final}$ faça:

5. Construa o sistema de equações na escala fina Eq. (30);
6. Mapeie o problema para a escala grossa, Eq. (66)
7. Resolva o problema do passo 6. e prolongue a solução para a escala fina, Eq. (67);
8. Reconstrua o fluxo na escala fina, Eq. (68);
9. Resolva o problema de saturação, Eq. (37);
10. Faça, $t = t + \Delta t$.

4.3.1.3 Algoritmo ADM

Algoritmo 4.4: Procedimento de aplicação do método ADM

A seguir, apresentamos o algoritmo correspondente ao método ADM, em relação à metodologia AMS e A-AMS essa metodologia inclui as etapas 5.1 e 5.2, que se refere à definição da malha ADM e à construção dos operadores correspondentes.

Início da simulação no tempo $t = 0$.

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha fina, com n^f volumes de controle, construa uma malha grossa primal com n^c volumes de controle, seção 4.1.1.1.1;
2. A partir da malha grossa primal, construa a malha grossa dual, seção 4.1.1.2.1;
3. Construa o operador de restrição a partir da malha primal, Eq. (53);
3. Para cada volume da malha grossa dual, AMS ou A-AMS, construa o sistema local e calcule as funções de base e o operador de prolongamento, Eq. (51) ou (57);

Enquanto $t < t^{final}$ faça:

5. Construa o sistema de equações na escala fina Eq. (30);
 - 5.1. Defina a malha ADM a ser utilizada conforme seção 4.2.1.1;
 - 5.2. Construa os operadores ADM, Eqs. (58) e (60).

6. Mapeie o problema para a escala grossa, Eq. (66)
7. Resolva o problema do passo 6. e prolongue a solução para a escala fina, Eq. (67);
8. Reconstrua o fluxo na escala fina, Eq. (68);
9. Resolva o problema de saturação, Eq. (37);
10. Faça, $t = t + \Delta t$.

4.3.1.4 Algoritmo NU-ADM

A seguir, apresentamos o algoritmo correspondente ao método NU-ADM, em relação à metodologia AMS e A-AMS essa metodologia inclui as etapas 5.1 e 5.2, que se refere à definição da malha NU-ADM e à construção dos operadores correspondentes.

Algoritmo 4.4: Procedimento de aplicação do método NU-ADM

Início da simulação no tempo $t = 0$.

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha fina, com n^f volumes de controle, construa uma malha grossa primal com n^c volumes de controle, seção 4.1.1.1.1;
2. A partir da malha grossa primal, construa a malha grossa dual, seção 4.1.1.2.1;
3. Construa o operador de restrição a partir da malha primal, Eq. (53);
3. Para cada volume da malha grossa dual, AMS ou A-AMS, construa o sistema local e calcule as funções de base e o operador de prolongamento, Eq. (51) ou (57);

Enquanto $t < t^{final}$ faça:

5. Construa o sistema de equações na escala fina Eq. (30);
 - 5.1. Defina a malha NU-ADM a ser utilizada conforme seção 4.2.1.1;
 - 5.2. Construa os operadores NU-ADM, Eqs. (64) e (65).
6. Mapeie o problema para a escala grossa, Eq. (66)
7. Resolva o problema do passo 6. e prolongue a solução para a escala fina, Eq. (67);
8. Reconstrua o fluxo na escala fina, Eq. (68);

9. Resolva o problema de saturação, Eq. (37);

10. Faça, $t = t + \Delta t$.

4.3.2 Metodologia FIM

4.3.2.1 Construção dos operadores Multiescala na metodologia FIM

Os operadores de restrição e prolongamento utilizados na metodologia FIM, R_{FIM} e P_{FIM} , mapeiam as variáveis dependentes dos campos de pressão e de saturação entre as escalas, conforme a Eq. 4.27.

$$R_{FIM} = \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix}, P_{FIM} = \begin{bmatrix} P_p & 0 \\ 0 & P_s \end{bmatrix}. \quad (69)$$

onde, os operadores utilizados na metodologia FIM, R_{FIM} e P_{FIM} , são construídos com base nos mesmos operadores utilizados na metodologia IMPES, assim como no trabalho de (CUSINI, et al., 2016).

Para o operador de restrição, aplicamos $R_p = R_s = R$, onde R é o operador de restrição que seria utilizado na metodologia IMPES, podendo ser AMS ou A-AMS, ADM ou NU-ADM. No operador de prolongamento, utilizamos a aproximação constante em cada volume da escala grossa para a saturação, que equivale a $P_s = R'$, onde R' é o transposto do operador de restrição correspondente no IMPES, essa escolha representa a aplicação do operador constante para a saturação, ou seja, que a saturação é constante em cada volume de controle da escala grossa. Para a pressão, aplicamos $P_p = P$, com P sendo o operador de prolongamento correspondente no IMPES. Observa-se que na metodologia FIM resolvemos o problema da pressão e da saturação na escala grossa, de forma que não é necessária a obtenção de fluxo conservativo na escala fina, uma vez que desejamos a solução apenas na escala adaptativa.

4.3.2.2 Mapeamento para a escala grossa

A equação (17) é mapeada para a escala grossa através da Eq. (70).

$$\begin{cases} R_{FIM} \tilde{J}(x^k) P_{FIM} \Delta x^{k+1} = -R_{FIM} F(x^k) \\ x^{k+1} = x^k + P_{FIM} \Delta x^{k+1} \end{cases}. \quad (70)$$

4.3.2.3 Solução FIM-Multiescala/Multinível

A solução totalmente implícita com utilização dos métodos Multiescala/Multinível envolve a construção dos operadores de transferência de escala da equação (69) e a aplicação do algoritmo de Newton-Raphson, Eq. (70). O Algoritmo 4.5 ilustra esse procedimento.

Algoritmo 4.5: Procedimento de aplicação do AMS na metodologia FIM.

Início da simulação no tempo $t = 0$.

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha fina, com n^f volumes de controle, construa uma malha grossa primal com n^c volumes de controle, seção 4.1.1.1.1;
2. A partir da malha grossa primal, construa a malha grossa dual, seção 4.1.1.2.1 ou 4.1.2.2.1;
3. Construa o operador de restrição a partir da malha primal, Eq. (41) ou (53);
3. Para cada volume da malha grossa dual, AMS ou A-AMS, construa o sistema local e calcule as funções de base e o operador de prolongamento, Eq. (51) ou (57);

Enquanto $t < t^{final}$, faça:

Início da iteração de Newton-Raphson, $k = 0$.

Enquanto $\|r\| > tol$, faça:

5. Construa o sistema linear, Eq. (19);
6. Defina a malha ADM ou NU-ADM a partir dos critérios estabelecidos nas Eqs. (61) a (63) e construa os operadores R_{FIM} e P_{FIM} , Eq. 4.30;
7. Mapeie o problema para a escala grossa e resolva, Eq.(70).
8. Faça, $t = t + \Delta t$.

5 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos os resultados, x^{MS} , obtidos pela aplicação dos frameworks Multiescala/Multinível através de um conjunto de exemplos e comparamos com aqueles obtidos com a solução calculada diretamente na escala fina, x^{fs} . Os resultados apresentados na forma de erro na norma “ l ” para a variável x são calculados com a seguinte expressão (71):

$$\|e_x\|_l = \frac{\|x^{MS} - x^{fs}\|_l}{\|x^{fs}\|_l}. \quad (71)$$

Nos exemplos a seguir, locamos os volumes dos vértices da dual na fronteira do domínio de forma semelhante a (BARBOSA, 2017) e (DEHKORDI, et al., 2013).

Como condição inicial estabelecemos uma saturação de água constante de $S_w = 0$. O modelo de Brooks e Corey com $n = 2$ foi aplicado para o cálculo da permeabilidade relativa com saturação de água irreduzível e a saturação de óleo residual definida como $S_{iw} = S_{or} = 0$. A viscosidade de fase foi definida como $\mu_w = 0.3 \text{ cP}$ para a água e $\mu_o = 3 \text{ cP}$ para o óleo, já para as densidades, adotamos os seguintes valores, $\rho_w = 1.000 \text{ Kg/m}^3$ e $\rho_o = 800 \text{ Kg/m}^3$ e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Além disso, o fluxo nulo foi definido em todas as fronteiras externas do reservatório.

5.1 APLICAÇÕES NA ESTRATÉGIA IMPES

Para ilustrar a influência dos parâmetros inerentes à metodologia NU-ADM à estratégia IMPES, aplicamos essa metodologia às camadas 37 e 85 do *Comparative Solution Project*, CSP-SPE-10 (CHRISTIE, et al., 2001). Em ambos os casos utilizamos 216x54 volumes, com dois poços, e empregamos uma taxa fixa de engrossamento $CR = (9,9)$.

Testamos 6 metodologias para combinar as estratégias Multiescala (AMS e A-AMS) e Multinível (ADM e NU-ADM), essas combinações, bem como os parâmetros que as definem, são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 - SPE 10, Camada 85: Metodologias e seus parâmetros definidores.

	η^{lim}	β^{lim}	α^{lim}	δ^{lim}
A-AMS	1.0	-	-	-
AMS	∞	-	-	-
ADM & A-AMS	1.0	-	-	0.1
ADM & AMS	∞	-	-	0.1
NU-ADM & A-AMS	1.0	3.0	1.0	0.1
NU-ADM & AMS	∞	3.0	1.0	0.1

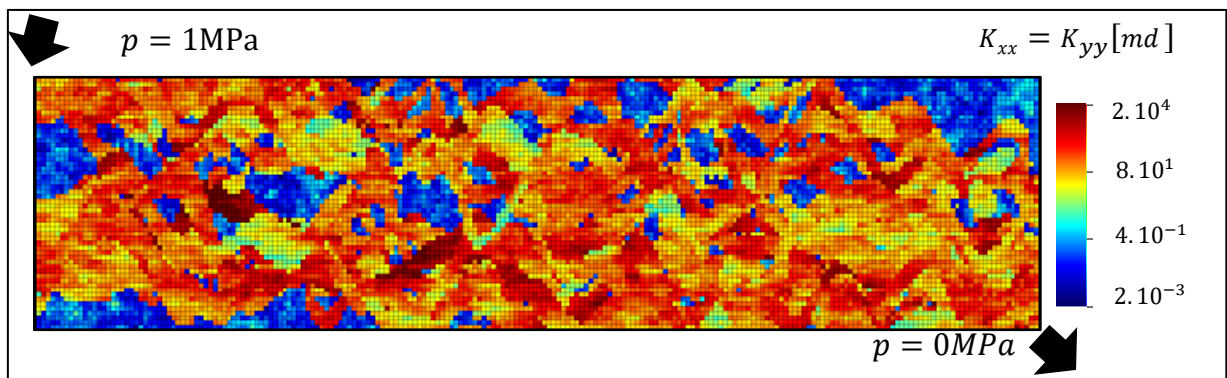
Fonte: O Autor (2023).

5.1.1 Exemplo IMPES 1: camada 85 do CSP-SPE 10.

No primeiro exemplo, consideramos um reservatório com o campo de permeabilidade da camada 85 do *Comparison Solution Project SPE 10* (CSP-SPE 10). Incluímos um poço de injeção, no canto superior esquerdo com pressão prescrita ($p = 1$), e um poço de produção, no canto inferior direito, com pressão prescrita ($p = 0$). A locação dos poços e o campo de permeabilidades, mapa de cores na escala Log_{10} , são mostrados na Figura 16 - SPE 10, Camada 85: Campo de permeabilidades e locação dos poços.

. Nesta camada existem contrastes de permeabilidade da ordem de 10^7 , os quais têm o potencial de gerar termos não físicos em função das condições de localização aplicadas durante o cálculo do operador de prolongamento.

Figura 16 - SPE 10, Camada 85: Campo de permeabilidades e locação dos poços.

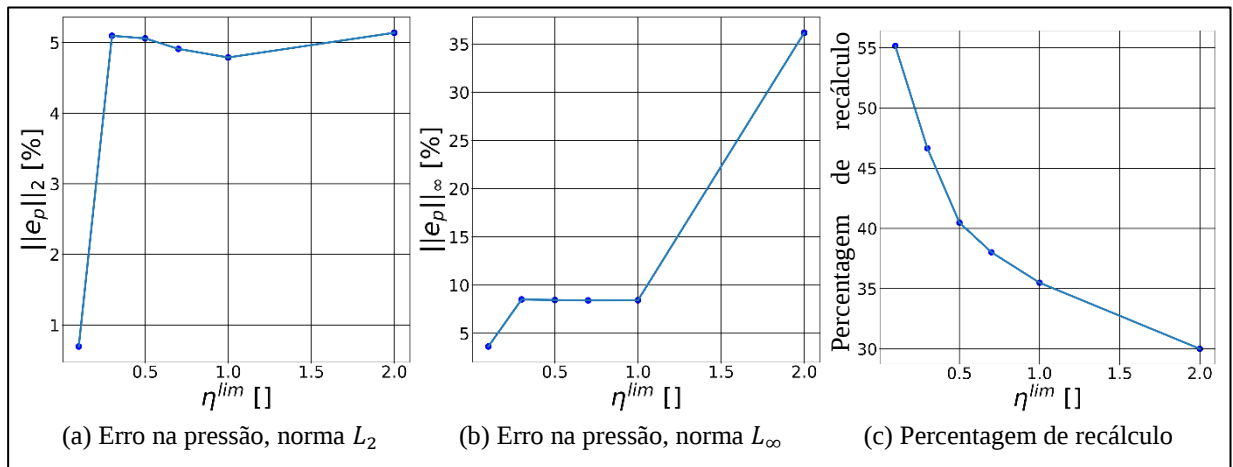


Fonte: O Autor (2023).

5.1.1.1 Adaptação das funções de base

Para investigar a influência da estratégia de adaptação das funções de base/malha dual, a simulação Multinível foi realizada em uma resolução de malha em que apenas os volumes da malha grossa primal com poços em seu interior foram mantidos na escala fina, o parâmetro de aglomeração (η^{lim}) foi testado no intervalo $[0.1; 2.0]$. normas de erro de pressão (a) L_2 e (b) L_∞ , e a porcentagem de enriquecimento, ou seja, a razão entre o número de volumes com função de base recalculada e o número total de volumes, (c). Podemos ver pela Figura 17, para o caso-teste considerado, o valor limite, $\eta^{lim} = 1$, é capaz de manter o erro de pressão na norma L_∞ abaixo de 10%. A redução deste parâmetro para valores menores, aumenta significativamente a porcentagem de recálculo das funções de base, enquanto essencialmente não reduz as normas de erro de pressão. Portanto, consideramos que $\eta^{lim} = 1$ é o melhor valor, pois mantém as normas de erro na pressão (l_2 e l_∞) baixas com uma porcentagem aceitável de recálculo das funções de base.

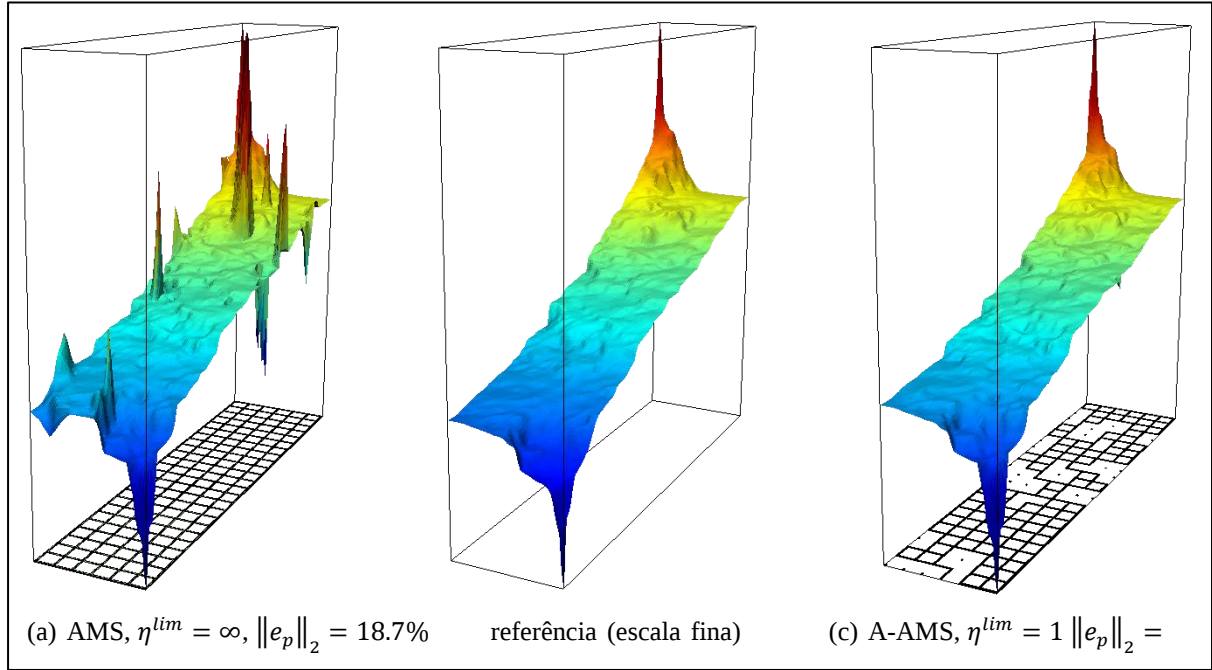
Figura 17 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro na pressão e porcentagem de recálculo para $\eta^{lim} \in [0.1; 2.0]$.



Fonte: O Autor (2023).

A Figura 5.3 mostra o mapa de cores em elevação do campo de pressão, no qual usamos ADM padrão com funções de base AMS clássicas ($\eta^{lim} = \infty$): (a) e funções de base A-AMS com ($\eta^{lim} = 1$): (c) e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência): (b). Podemos ver que o uso das funções de base A-AMS melhora significativamente a qualidade do campo de pressão, eliminando as fortes oscilações espúrias e reduz a norma de erro L_2 de 18,7% para 4,8%, recalculando as funções de base em cerca de 35% dos volumes de controle.

Figura 18 - SPE 10, Camada 85: Campo de pressão obtido com a aplicação de ADM padrão usando as funções de base de AMS, $\eta^{lim} = \infty$, (a), e A-AMS com $\eta^{lim} = 1$, (c) sobre a malha dual correspondente, e a solução em escala fina (referência), (b).

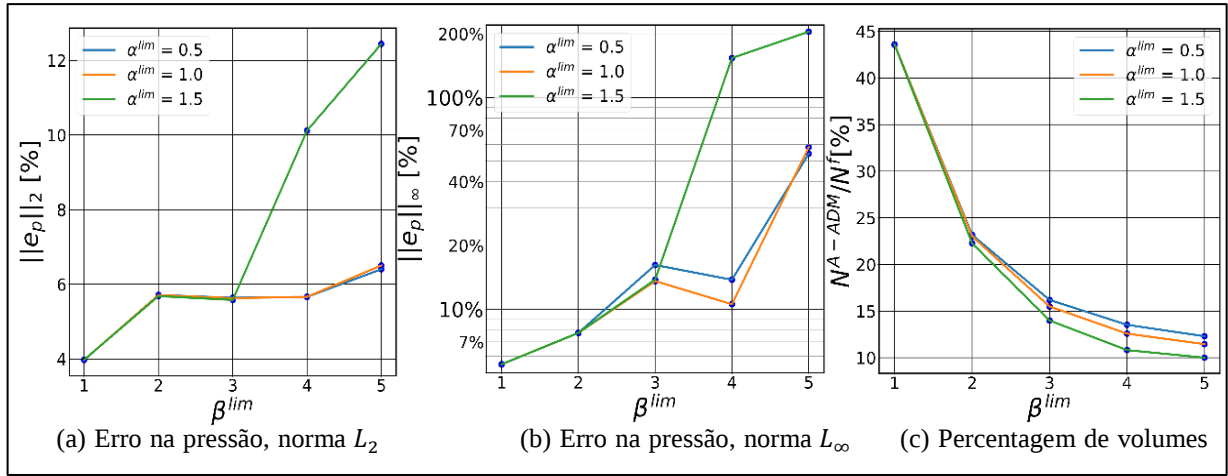


Fonte: O Autor (2023).

5.1.1.2 Adaptação de malha Multinível não uniforme

Para investigar a influência dos parâmetros de adaptação da malha Multinível, a simulação Multinível foi realizada com o uso das funções de base AMS ($\eta^{lim} = \infty$), enquanto os critérios de definição de nível (α^{lim} e β^{lim}) foram variados. A Figura 19 mostra as normas de erro de pressão L_2 , (a) e L_∞ , (b), e a porcentagem de volumes ativos, ou seja, a razão entre o número de graus de liberdade da resolução NU-ADM e resolução de escala fina, (c). Podemos ver nesta figura que, para o caso de teste considerado, o valor limite $\beta^{lim}=3$ fez com que o erro de pressão L_∞ fosse mantido abaixo de 20%. A redução deste parâmetro para valores menores aumenta significativamente a porcentagem de volumes ativos para os três parâmetros α^{lim} considerados.

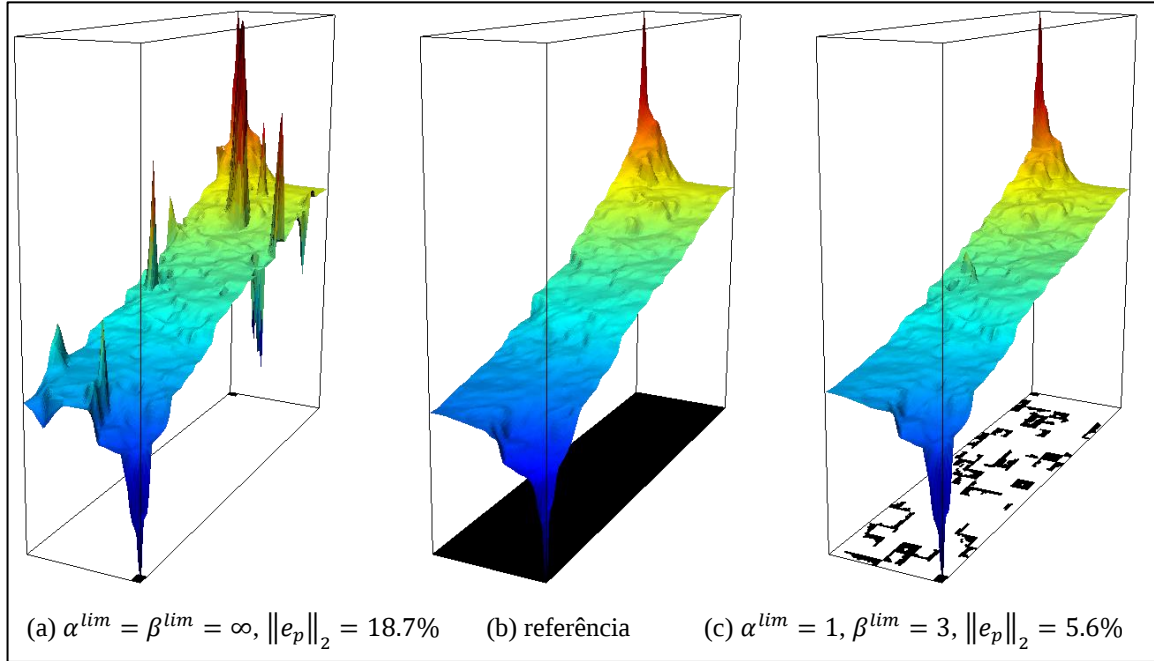
Figura 19 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro de pressão, (a) e (b), e percentual de volumes ativos (c).



Fonte: O Autor (2023).

A Figura 20 mostra o mapa de cores com elevação do campo de pressão, no qual usamos o NU-ADM com funções de base AMS clássicas ($\eta^{lim} = \infty$) com os critérios de definição de nível $\alpha^{lim} = \beta^{lim} = \infty$, equivalente ao ADM clássico, com escala fina apenas nos volumes da malha grossa primal com poços: (a) e, $\alpha^{lim} = 1$ e $\beta^{lim} = 3$: (c) e a solução de escala fina (referência): (b). Podemos ver, nesta figura, que o uso do critério de definição de nível melhora significativamente a qualidade do campo de pressão, eliminando grandes oscilações espúrias e reduzindo a norma de erro na pressão, norma L_2 , de 18,7% para 5,6%, mantendo cerca de 15% dos volumes na escala fina, destacados em preto na projeção da Figura 5.5(c). Observa-se que na simulação do ADM clássico foram mantidos na escala fina apenas os volumes da escala grossa com poços. Nos demais volumes, foi aplicada a escala grossa, uma vez que esse método não tem definida adaptação para fins de melhora no campo de pressão, a qual é feita apenas para fins de melhor representação da frente de saturação.

Figura 20 - SPE 10, Camada 85: Campo de pressão obtido usando as funções de base do AMS com o ADM ($\alpha^{lim} = \beta^{lim} = \infty$), (a) e o NU-ADM com $\alpha^{lim} = 1$ e $\beta^{lim} = 3$, (c) sobre os volumes em escala fina (na cor preta), e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência), (b).

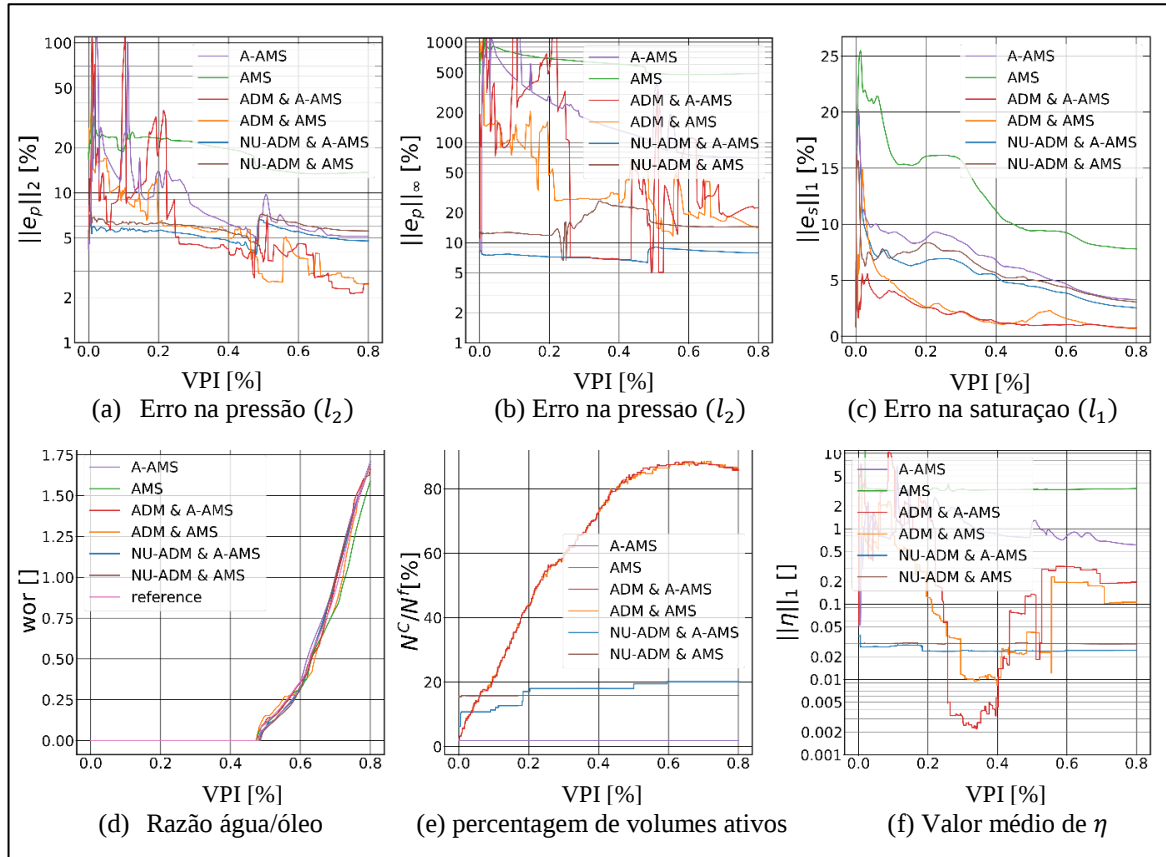


Fonte: O Autor (2023).

5.1.1.3 Problema de escoamento bifásico

Considerando o problema de escoamento bifásico transiente, testamos a influência do uso das funções de base AMS ($\eta^{lim} = \infty$) e A-AMS ($\eta^{lim} = 1$) nos critérios de definição de nível: Multiescala (com escala fina apenas nos volumes da malha primal com poços) ADM ($\delta^{lim} = 1$) e NU-ADM ($\alpha^{lim} = 1$ e $\beta^{lim} = 3$). Apresentamos resultados relacionados aos erros na solução, a porcentagem de volumes ativos e os termos não físicos ao longo da simulação. Na Figura 21, apresentamos as normas de erro L_2 , (a), e L_∞ , (b), da pressão e a norma de erro L_1 (c) da saturação, a relação água/óleo (wor) (d), a porcentagem de volumes ativos, (e), e o valor médio do parâmetro de valores não físicos, (f).

Figura 21 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro de pressão, (a) e (b), percentual de volumes ativos (c), razão água/óleo (c), percentagem de volumes ativos (e) e valor médio dos termos não físicos (f).



Fonte: O Autor (2023).

Os resultados apresentados na Figura 21 estão resumidos na Tabela 5.2 Podemos ver pelos resultados numéricos que o uso das funções de base A-AMS reduz as normas de erro de pressão e saturação ao longo da simulação. Além disso, o uso da metodologia NU-ADM manteve uma porcentagem menor de volumes ativos do que os produzidos pela metodologia ADM, a NU-ADM foi a única metodologia a manter sob controle o parâmetro não físico η (f) sob controle valor médio abaixo de 0,03% em toda a simulação e, consequentemente, as normas de erro na pressão ao longo da simulação para o problema considerado.

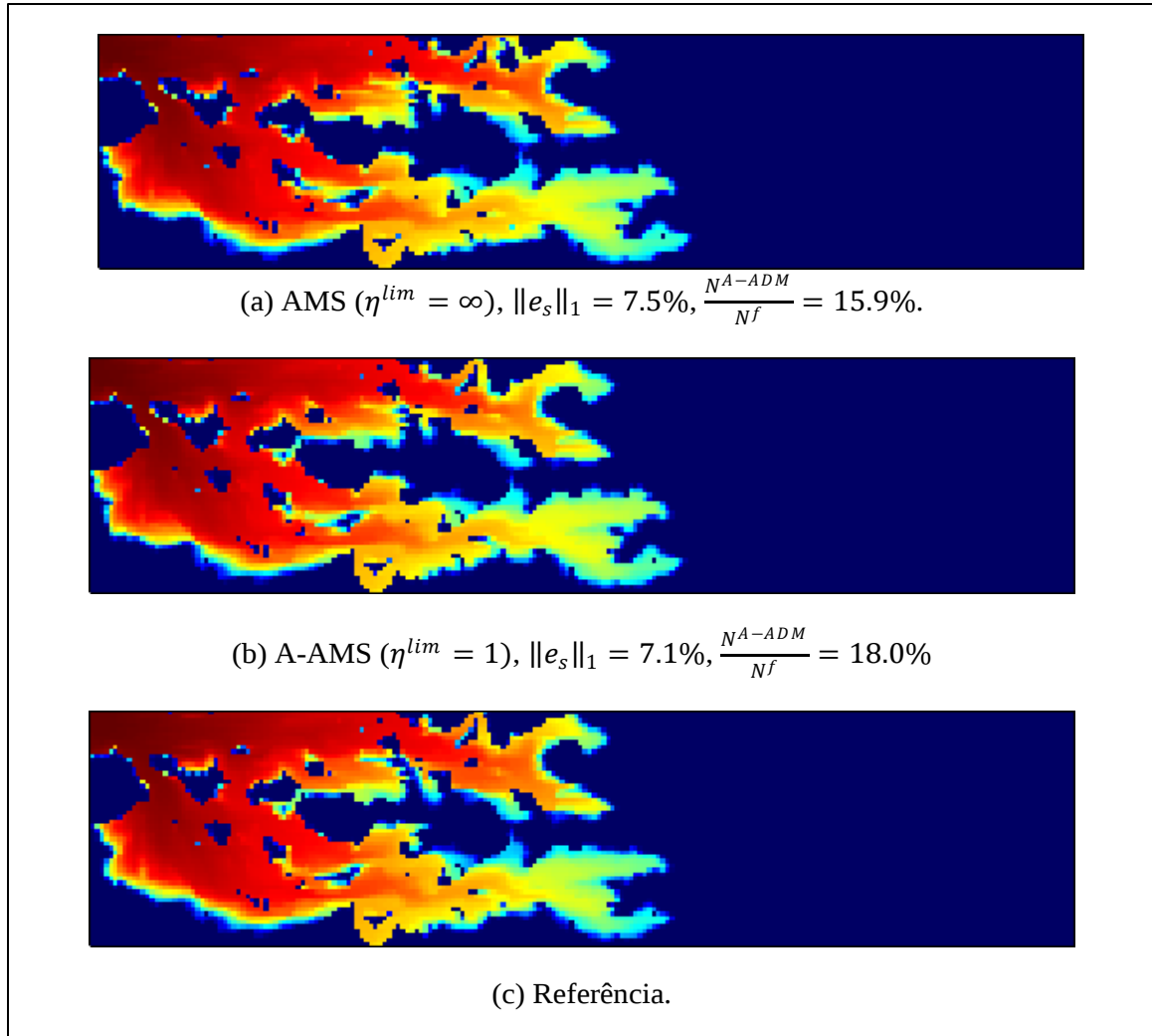
Tabela 2 - SPE 10, Camada 85: Valores médios das normas de erro de pressão e saturação, porcentagem de volumes ativos e parâmetro η ao longo da simulação para as metodologias em discussão.

	$\ e_p\ _2$ [%]	$\ e_p\ _\infty$ [%]	N^c/N^f [%]	$\ e_s\ _1$ [%]	$\ \eta\ _1$ []
A-AMS	10.19 ± 11.64	274.3 ± 532.2	1.835 ± 0.000	6.858 ± 2.695	1.076 ± 0.564
AMS	18.44 ± 4.692	604.1 ± 130.2	1.835 ± 0.000	12.63 ± 4.296	3.319 ± 0.318
ADM & A-AMS	8.435 ± 13.74	199.4 ± 515.4	63.72 ± 26.58	1.882 ± 1.201	0.778 ± 1.555
ADM & AMS	6.331 ± 7.942	58.09 ± 104.1	63.64 ± 26.41	2.513 ± 2.218	0.306 ± 0.625
NU-ADM & A-AMS	5.296 ± 0.498	7.635 ± 0.682	17.28 ± 3.293	5.437 ± 2.399	0.024 ± 0.001
NU-ADM & AMS	6.004 ± 0.508	15.73 ± 4.012	15.82 ± 0.042	5.866 ± 1.970	0.029 ± 0.000

Fonte: O Autor (2023).

Na Figura 22, apresentamos os campos de saturação no tempo correspondente a 0,25 VPI (Volume Poroso Injetado) obtido com a aplicação do NU-ADM como solucionador de pressão usando as funções de base do AMS ($\eta^{lim} = \infty$), (a) e A-AMS ($\eta^{lim} = 1$), (b), e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência), (c).

Figura 22 - SPE 10, Camada 85: Campo de saturação no tempo correspondente a 25% de VPI usando funções de base AMS clássicas, (a), funções de base A-AMS, (b), e a solução de referência, (c).



Fonte: O Autor (2023).

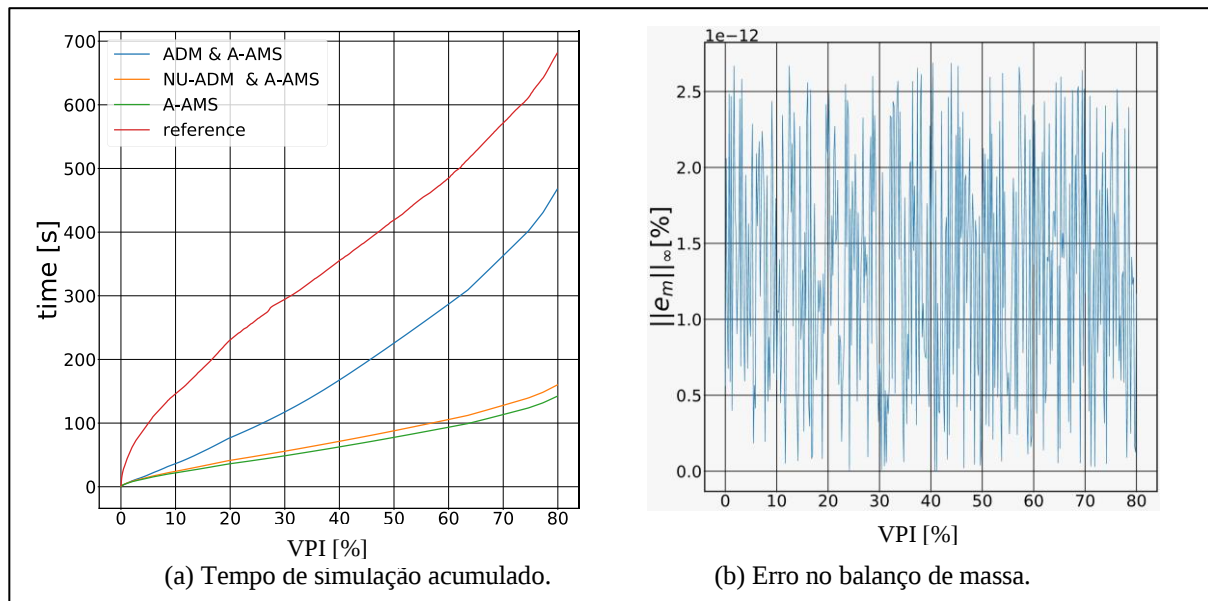
Pudemos ver pelos resultados apresentados nas Figura 21 (c) e Figura 22 que a utilização das funções de base A-AMS (ao invés das funções de base AMS) não implica significativamente em grande redução de erros no campo de saturação, ao passo que aumenta a porcentagem de volumes ativos (quando $VPI > \sim 19\%$). No entanto, o uso de A-AMS melhora significativamente a norma de erro de pressão L_∞ , como podemos ver na Figura 21 e na Tabela 2, que mostra as normas de erro de pressão, L_2 e L_∞ (colunas 1 e 2), a porcentagem de volumes ativos (coluna 3), a norma de erro de saturação L_1 (coluna 4) e termos não físicos (coluna 5), i.e. um parâmetro adimensional que mensura os termos não físicos na matriz da escala grossa. Portanto, se estivermos interessados em melhorar os resultados do campo de pressão, é recomendado o uso das funções de base A-AMS ao longo da simulação, caso contrário po-

deríamos usar funções de base AMS que gera sistemas de equações menores (quando $PVI < \sim 19\%$) e funções de base AMS depois disso, para otimizar a eficiência.

O tempo computacional acumulado na simulação até atingirmos $VPI = 80\%$ é mostrado na Figura 23 (a). Podemos ver uma diferença considerável no tempo de solução entre as estratégias ADM e NU-ADM, pois, como podemos ver na Figura 21, (e), a estratégia NU-ADM usa, consideravelmente, menos volumes na escala fina, gerando sistemas lineares menores. Por outro lado, a diferença no tempo computacional é menor quando comparamos nossa estratégia com a alternativa sem adaptação de nível, A-AMS. Isso é atribuído ao fato de que quando usamos esses métodos, que geram sistemas menores na escala grossa, as outras etapas, que não estão relacionadas à resolução de sistemas lineares, vide algoritmos da seção 4.2.1, têm mais importância. Esta última diferença de tempo tende a ser maior no caso de utilização de programação paralela nas etapas distribuíveis. Nesse caso, apenas o tempo da etapa de solução do sistema linear da escala grossa é mantido, os demais são reduzidos.

Na Figura 23, mostramos o tempo de simulação acumulado em função do VPI, em (a), e o erro máximo no balanço de massa $\|e_m\|_\infty = 100\% * \max(abs(e_m))/q_{well}$ (após o procedimento de reconstrução da velocidade é mantido com valores da ordem de 10^{-12} ao longo da simulação, (b)). Esse erro é definido como o máximo em todos os volumes de controle para os três métodos Multiescala/Multinível, da fig. 5.8 (a), e q_{well} é a vazão no poço produtor.

Figura 23 - SPE 10, Camada 85: Tempo acumulado de simulação para as diferentes estratégias (a) e erro no balanço de massa (b).

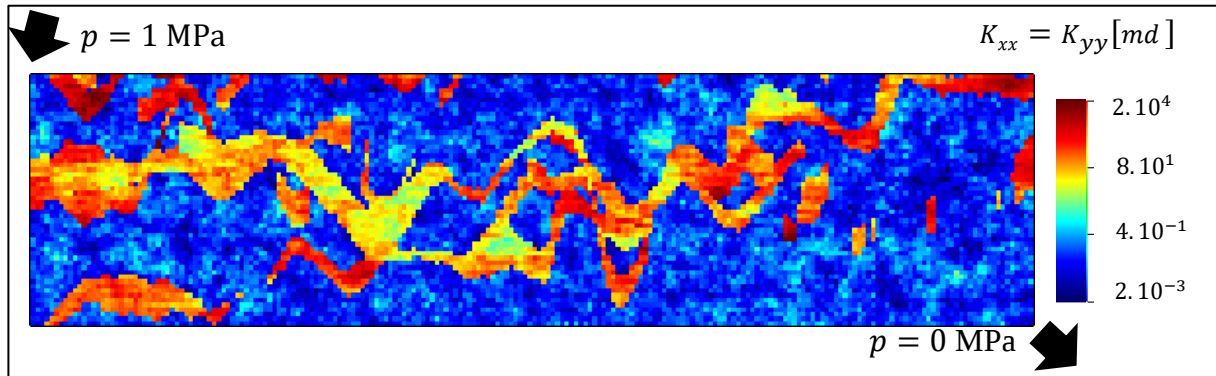


Fonte: O Autor (2023).

5.1.2 Exemplo IMPES 2: camada 37 do CSP-SPE 10

No segundo exemplo, consideramos um reservatório com o campo de permeabilidades da camada 37 do *Comparison Solution Project SPE 10* (CSP-SPE 10). Incluímos um poço de injeção, no canto superior esquerdo com pressão prescrita ($p = 1$), e um poço de produção, no canto inferior direito, com pressão prescrita ($p = 0$). A locação dos poços e o campo de permeabilidades, mapa de cores na escala Log_{10} , são mostrados na Figura 9. Nesta camada existem contrastes de permeabilidade da ordem de 10^7 , os quais têm o potencial de gerar termos não físicos em função das condições de localização aplicadas durante para cálculo do operador de prolongamento. Nesta camada existem verdadeiros canais.

Figura 24 - SPE 10, Camada 37: Campo de permeabilidades e locação dos poços.

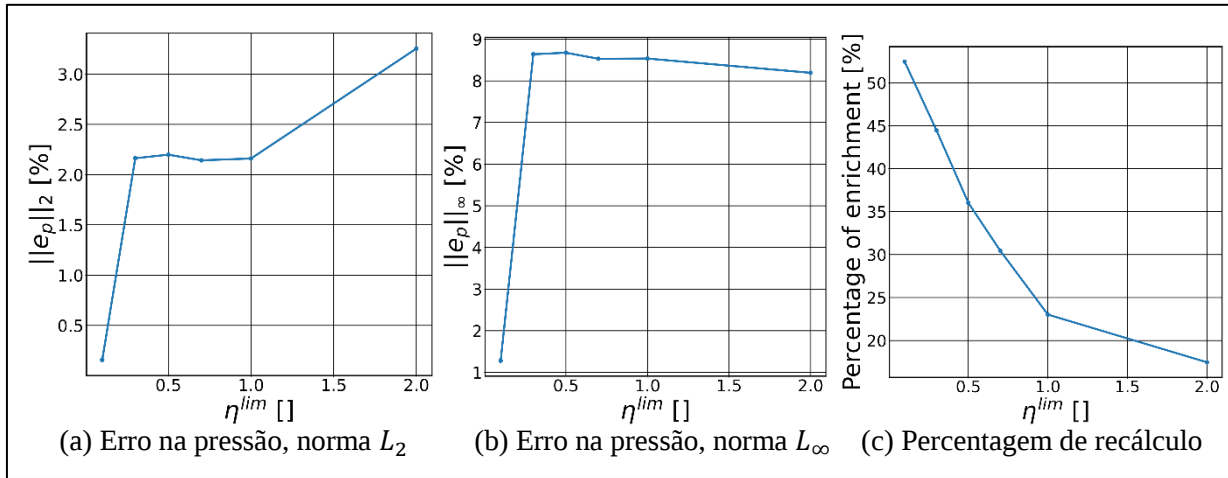


Fonte: O Autor (2023).

5.1.2.1 Adaptação das funções de base

Novamente, para investigar a influência da estratégia de adaptação das funções de base/malha dual, a simulação Multinível foi realizada em uma resolução de malha em que apenas os volumes da malha grossa primal com poços em seu interior foram mantidos na escala fina, o parâmetro de aglomeração (η^{lim}) foi testado no intervalo [0.1; 2.0]. A Figura 25 mostra as normas de erro de pressão (a) L_2 e (b) L_∞ , e a porcentagem de enriquecimento, ou seja, a razão entre o número de volumes com função de base recalculada e o número total de volumes, (c). Podemos ver pela Fig. 5.10, para o caso teste considerado, o valor limite, $\eta^{lim} = 1$, é capaz de manter o erro de pressão na norma L_2 abaixo de 3%. A redução deste parâmetro para valores menores, aumenta significativamente a porcentagem de recálculo das funções de base, enquanto essencialmente não reduz as normas de erro de pressão. Portanto, consideramos novamente que $\eta^{lim} = 1$ é o melhor valor, pois mantém as normas de erro na pressão (L_2 e L_∞) baixas com uma porcentagem razoável de recálculo das funções de base.

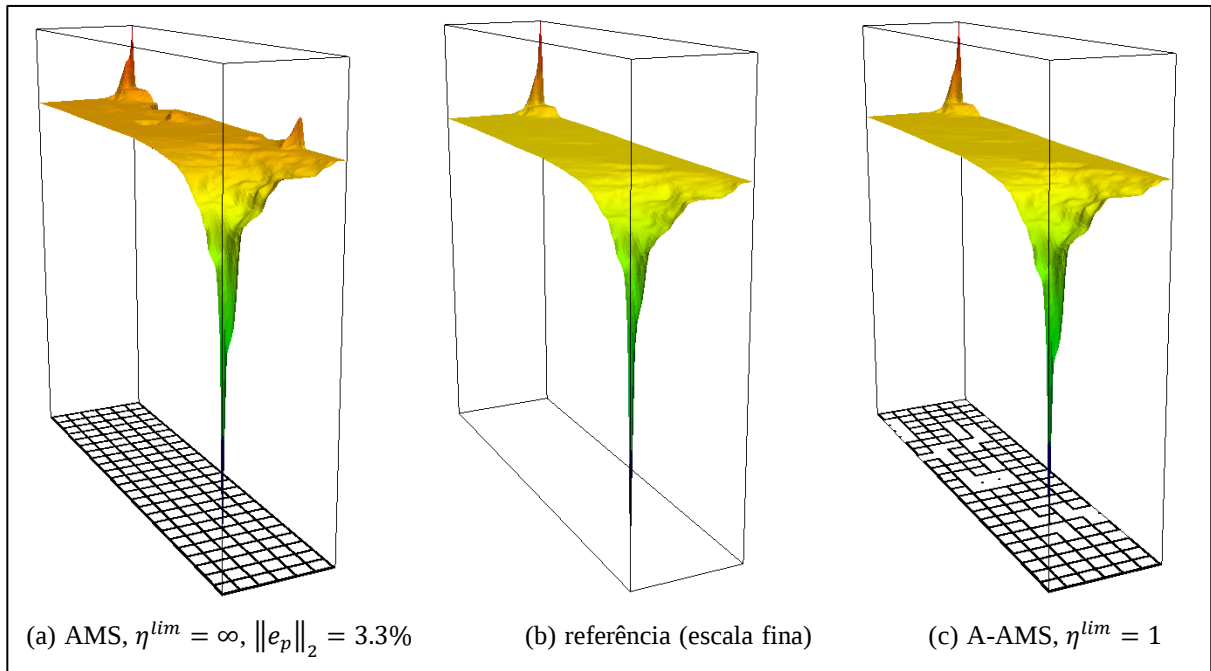
Figura 25 - SPE 10, Camada 37: Normas de erro na pressão l_2 , (a), e l_∞ , (b), e percentagem de recálculo das funções de base, (c), para $\eta^{lim} \in [0.1; 2.0]$.



Fonte: O Autor (2023).

A Figura 26 mostra o mapa de cores em elevação do campo de pressão, no qual usamos ADM padrão com funções de base AMS clássicas ($\eta^{lim} = \infty$): (a) e funções de base A-AMS com ($\eta^{lim} = 1$): (c) e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência): (b). Podemos ver que o uso das funções de base A-AMS melhora significativamente a qualidade do campo de pressão, eliminando as fortes oscilações espúrias e reduz a norma de erro L_2 de 3.3% para 2.2%, recalculando as funções de base em cerca de 23% dos volumes de controle.

Figura 26 - SPE 10, Camada 37: Campo de pressão obtido com o ADM padrão usando as funções de base de AMS, $\eta^{lim} = \infty$, (a), e A-AMS com $\eta^{lim} = 1$, (c) sobre a malha dual, e a solução na malha fina (referência), (b).

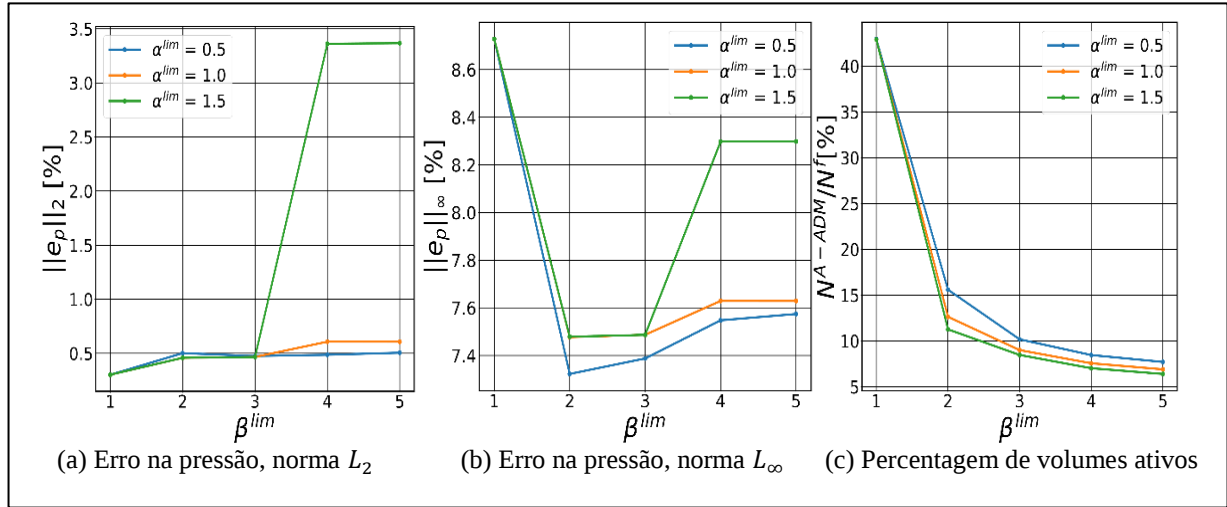


Fonte: O Autor (2023).

5.1.2.2 Adaptação de malha Multinível não uniforme

Para investigar a influência dos parâmetros de adaptação da malha Multinível, a simulação Multinível foi realizada com o uso das funções de base AMS ($\eta^{lim} = \infty$), enquanto os critérios de definição de nível (α^{lim} e β^{lim}) foram variados. A Figura 27 mostra as normas de erro de pressão L_2 , (a) e L_∞ , (b), e a porcentagem de volumes ativos, ou seja, a razão entre o número de graus de liberdade da resolução NU-ADM e resolução de escala fina, (c). Podemos ver nesta figura que, para o caso de teste considerado, o valor limite $\beta^{lim} = 3$ fez com que o erro de pressão L_∞ fosse mantido abaixo de 8% e L_2 abaixo de 0,5% mantendo um percentual de menos de 10% de volumes ativos, para os 3 alfas testados, a norma de erro na pressão L_2 fosse mantido abaixo de 1%. A redução deste parâmetro para valores menores aumenta significativamente a porcentagem de volumes ativos para os três parâmetros α^{lim} considerados.

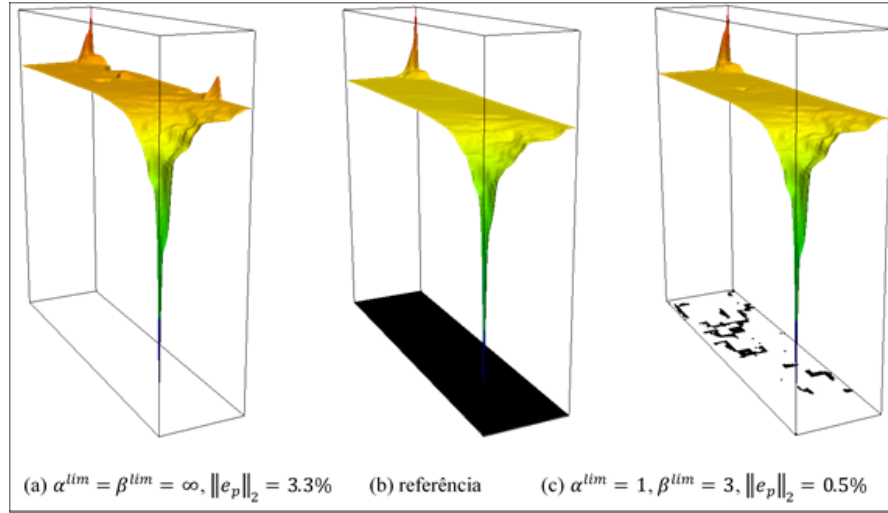
Figura 27 - SPE 10, Camada 37: Normas de erro de pressão, (a) e (b), e percentual de volumes ativos (c).



Fonte: O Autor (2023).

A Figura 5.12 mostra o mapa de cores com elevação do campo de pressão, no qual usamos o NU-ADM com funções de base AMS clássicas ($\eta^{lim} = \infty$) com os critérios de definição de nível $\alpha^{lim} = \beta^{lim} = \infty$, equivalente ao ADM clássico, com escala fina apenas nos volumes da malha grossa primal com poços: (a) e, $\alpha^{lim} = 1$ e $\beta^{lim} = 3$ (sobre volumes na escala fina): (c) e a solução de escala fina (referência): (b). Podemos ver, nesta figura, que o uso do critério de definição de nível melhora significativamente a qualidade do campo de pressão, eliminando as oscilações espúrias e reduzindo a norma de erro na pressão, norma L_2 , de 3,3% para 0,5%, mantendo cerca de 9.2% dos volumes na escala fina.

Figura 28 - SPE 10, Camada 37: Campo de pressão obtido usando as funções de base do AMS com o ADM ($\alpha^{lim} = \beta^{lim} = \infty$), (a) e o NU-ADM com $\alpha^{lim} = 1$ e $\beta^{lim} = 3$, (c) sobre os volumes em escala fina (na cor preta), e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência), (b).

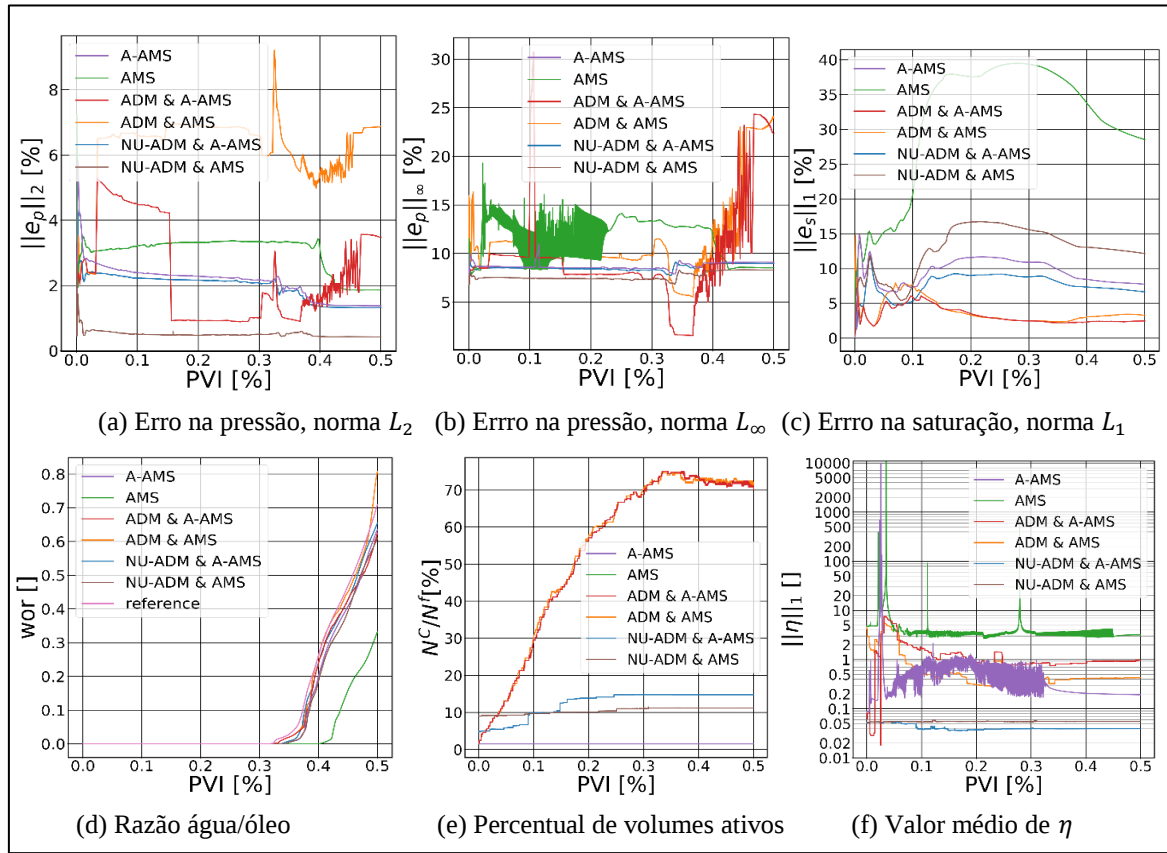


Fonte: O Autor (2023).

5.1.2.3 Problema de escoamento bifásico

Considerando o problema de escoamento bifásico transiente, testamos a influência do uso das funções de base AMS ($\eta^{lim} = \infty$) e A-AMS ($\eta^{lim} = 1$) nos critérios de definição de nível: Multiescala (com escala fina apenas nos volumes da malha primal com poços) ADM ($\delta^{lim} = 1$) e NU-ADM ($\alpha^{lim} = 1$ e $\beta^{lim} = 3$). Apresentamos resultados relacionados aos erros na solução, a percentagem de volumes ativos e os termos não físicos ao longo da simulação. Na Figura 29, apresentamos as normas de erro L_2 , (a), e L_∞ , (b), da pressão e a norma de erro L_1 da saturação, (c), a relação água/óleo (wor) (d), a porcentagem de volumes ativos, (e), e o valor médio do parâmetro de termos não físicos, (f).

Figura 29 - SPE 10, Camada 37: Normas de erro de pressão l_2 e l_∞ , (a) e (b), norma de erro na saturação l_1 , (c), razão água/óleo, (d), percentual de volumes ativos (e) e valor médio do parâmetro dos termos não físicos η , (f).



Fonte: O Autor (2023).

Os resultados apresentados na Figura 29 estão resumidos na Tabela 3. Podemos ver pelos resultados numéricos que o uso das funções de base A-AMS reduz as normas de erro de pressão e saturação ao longo da simulação. Além disso, o uso da metodologia NU-ADM manteve uma porcentagem menor de volumes ativos do que os produzidos pela metodologia ADM, a NU-ADM foi a única metodologia a manter sob controle o parâmetro não físico η e as normas de erro na pressão ao longo da simulação para o problema considerado.

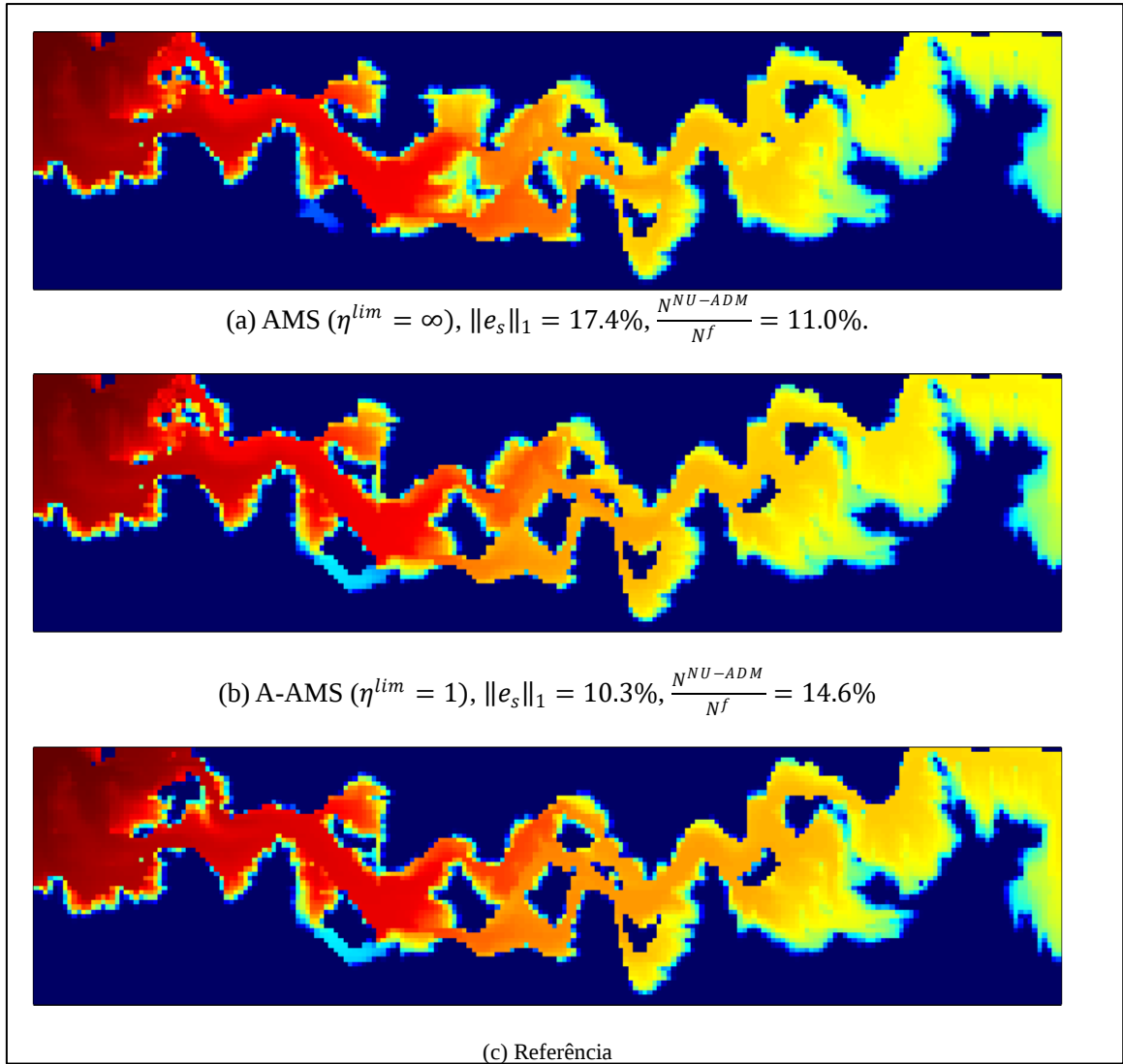
Tabela 3 - SPE 10, Camada 37: Valores médios das normas de erro de pressão e saturação, porcentagem de volumes ativos e parâmetro η ao longo da simulação para as metodologias em discussão.

	$\ e_p\ _2$ [%]	$\ e_p\ _\infty$ [%]	N^c/N^f [%]	$\ e_s\ _1$ [%]	$\ \eta\ _1$ []
A-AMS	2.190 ± 0.493	8.698 ± 0.305	1.835 ± 0.000	9.486 ± 1.817	2.085 ± 106.4
AMS	3.069 ± 0.466	11.56 ± 2.050	1.835 ± 0.000	31.25 ± 9.045	10.03 ± 472.5
ADM & A-AMS	2.366 ± 1.589	9.963 ± 7.231	53.70 ± 22.87	3.213 ± 1.170	1.323 ± 1.206
ADM & AMS	6.226 ± 1.172	11.73 ± 5.661	54.05 ± 22.73	3.785 ± 1.701	0.795 ± 1.035
NU-ADM & A-AMS	2.018 ± 0.384	8.537 ± 0.251	11.75 ± 3.690	7.676 ± 1.543	0.042 ± 0.005
NU-ADM & AMS	0.515 ± 0.101	7.613 ± 0.350	10.27 ± 0.798	12.89 ± 3.290	0.055 ± 0.000

Fonte: O Autor (2023).

Na Figura 30, apresentamos os campos de saturação no tempo correspondente a 0.25 VPI (Volume Poroso Injetado) obtido com a aplicação do NU-ADM como solucionador de pressão usando as funções de base do AMS ($\eta^{lim} = \infty$), (a) e A-AMS ($\eta^{lim} = 1$), (b), e a solução obtida com a simulação na escala fina (referência), (c).

Figura 30 - SPE 10, Camada 37: Campo de saturação no tempo correspondente a 25% de VPI usando funções de base AMS clássicas, (a), funções de base A-AMS, (b), e a solução de referência, (c).



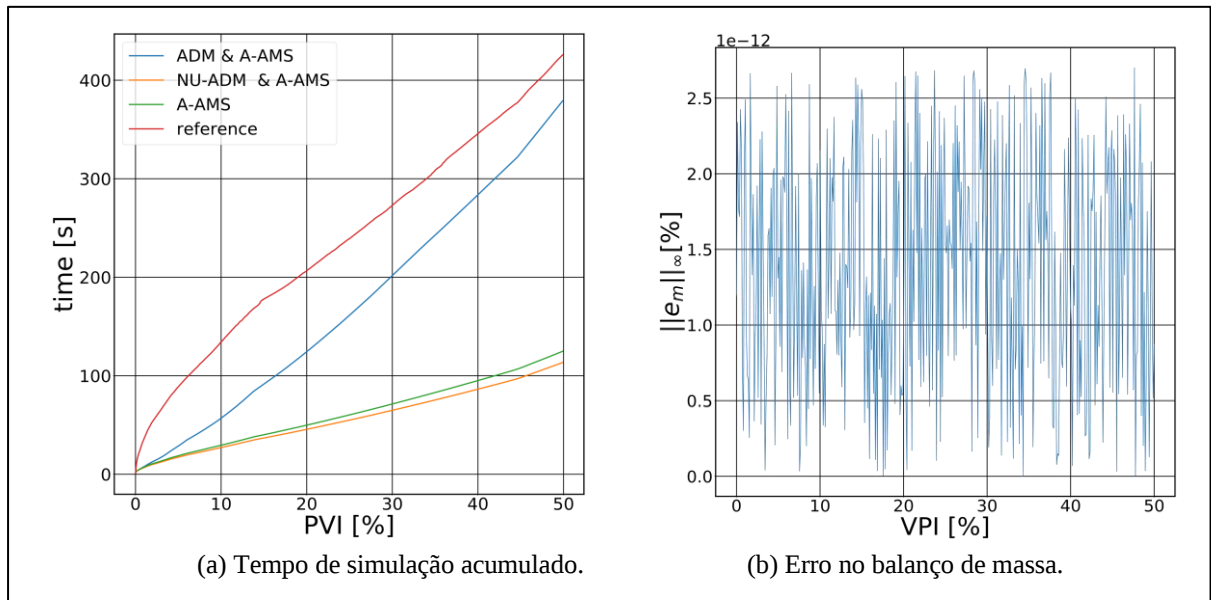
Fonte: O Autor (2023).

Pudemos ver nos resultados apresentados nas Figura 29 e Figura 30 que o uso de funções de base A-AMS (em vez de funções de base AMS) leva a uma redução significativa de erros no campo de saturação, reduzindo a norma L_1 do erro na saturação de 17.4% para 10.3%. Ele também fornece a melhor captura do fluxo de fluido no canal e, conseqüentemente, uma melhor aproximação dos resultados da produção Figura 29 (d).

O tempo computacional acumulado na simulação até atingirmos $VPI = 50\%$ é mostrado na Figura 31 (a). Podemos ver uma diferença considerável no tempo de solução entre as estratégias ADM e NU-ADM, pois, como podemos ver na Figura 29, (e), a estratégia NU-ADM usa, consideravelmente, menos volumes na escala fina, gerando sistemas lineares me-

nores. Por outro lado, a diferença no tempo computacional é menor quando comparamos nossa estratégia com a alternativa sem adaptação de nível, A-AMS. Isso é atribuído ao fato de que quando usamos esses métodos, que geram sistemas menores na escala grossa, as outras etapas, que não estão relacionadas à resolução de sistemas lineares, vide algoritmos da seção 4.2.1, têm mais importância. Esta última diferença de tempo tende a ser maior no caso de utilização de programação paralela nas etapas distribuíveis. Nesse caso, apenas o tempo da etapa de solução do sistema linear da escala grossa é mantido, os demais são reduzidos.

Figura 31 - SPE 10, Camada 37: Tempo acumulado de simulação para as diferentes estratégias (a) e erro no balanço de massa (b).



Fonte: O autor (2023).

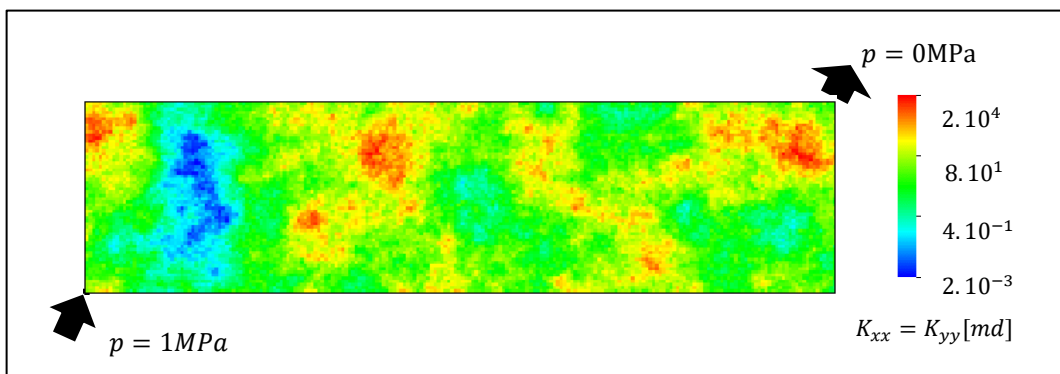
5.2 APLICAÇÕES NA ESTRATÉGIA FIM

Para ilustrar a influência dos parâmetros inerentes à metodologia NU-ADM à estratégia FIM, aplicamos essa metodologia às camadas 1 e 85 do *Comparative Solution Project*, CSP-SPE-10 (CHRISTIE, et al., 2001), em ambos os casos utilizamos um modelo computacional com 220x60 volumes, com dois poços, empregamos uma taxa fixa de engrossamento $CR = (5,5)$. Nos exemplos de aplicação da estratégia FIM, adaptamos a malha NU-ADM ao campo de saturação de modo a manter na escala fina os volumes próximos à frente de saturação, pois nessa estratégia, o campo de saturações é definido nessa malha.

5.2.1 Exemplo FIM 1: camada 1 do CSP-SPE 10

No primeiro exemplo de aplicação do NU-ADM à estratégia FIM, consideramos um reservatório com o campo de permeabilidades da camada 1 do *Comparison Solution Project SPE 10* (CSP-SPE 10). Incluímos um poço de injeção, no canto inferior esquerdo com pressão prescrita ($p = 1$), e um poço de produção, no canto superior direito, com pressão prescrita ($p = 0$). A localização dos poços e o campo de permeabilidades, mapa de cores na escala Log_{10} , são mostrados na Figura 32.

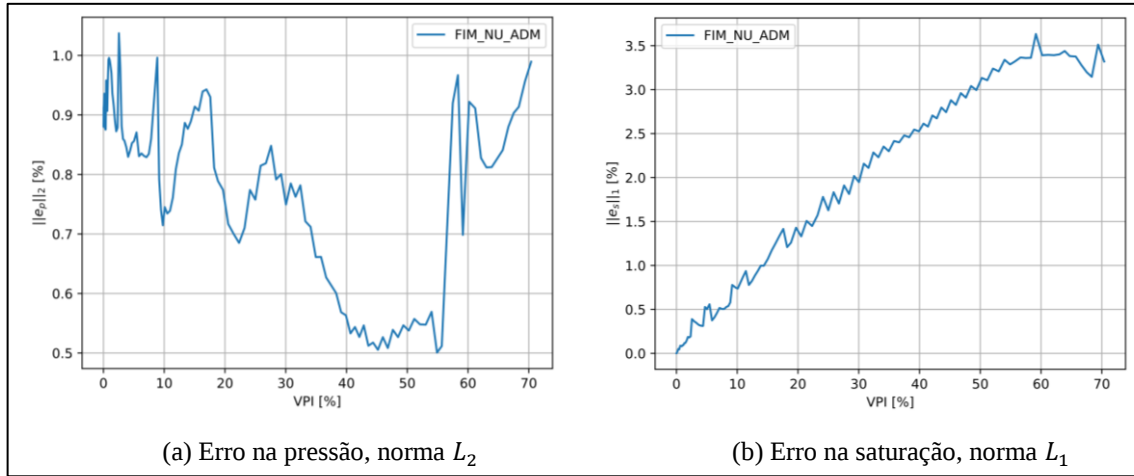
Figura 32 - SPE 10, Camada 1: Campo de permeabilidades e localização dos poços.



Fonte: O Autor (2023).

A simulação foi realizada até que foi atingido o volume poroso injetado (VPI) de 70%, e as normas de erro de pressão e saturação são apresentadas na Figura 5.18, observa-se que no momento de irrupção de água no poço produtor, ocorre um pico localizado nas normas de erro.

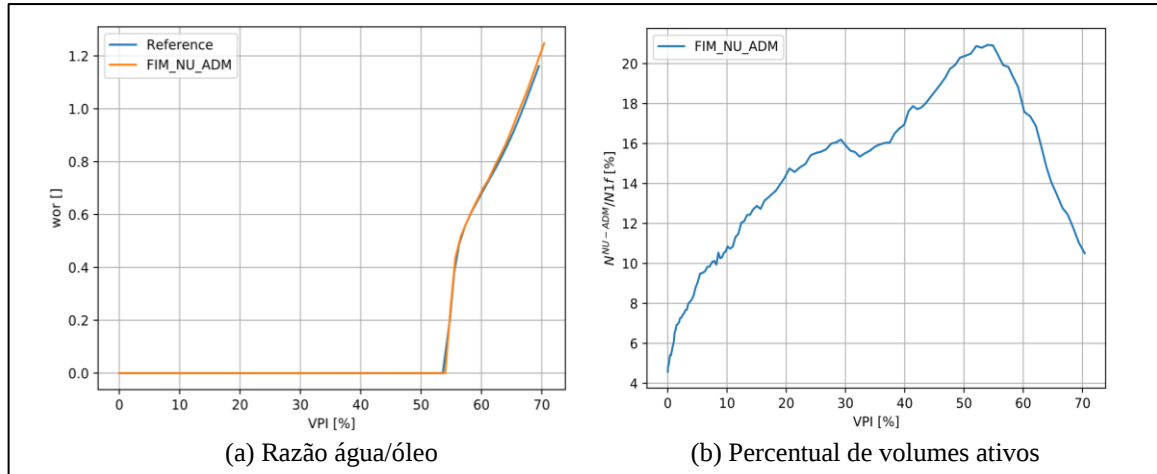
Figura 33 - SPE 10, Camada 1: Normas de erro na pressão, L_2 , (a) e na saturação, L_1 , (b).



Fonte: O Autor (2023).

A curva de produção e a porcentagem de volumes ativos são apresentadas na Figura 34 onde podemos ver que nossa metodologia foi capaz de reproduzir com boa acurácia a curva de produção usando uma fração de volumes na escala fina.

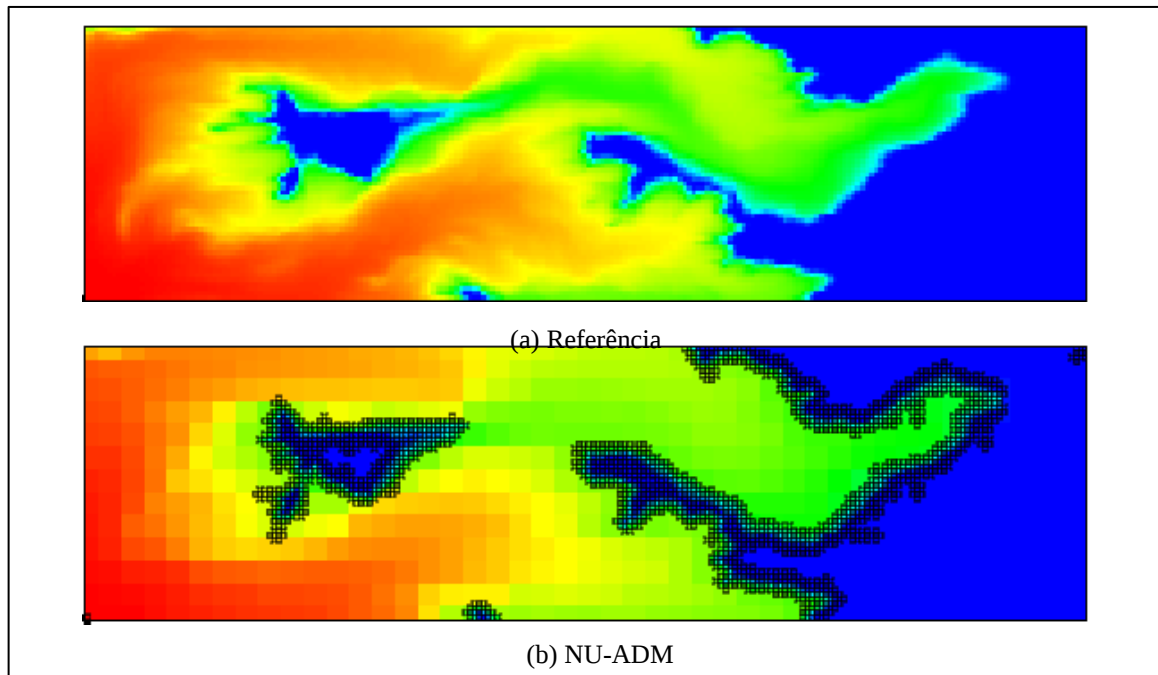
Figura 34 - SPE 10, Camada 1: Razão água/óleo, (a), e percentual de volumes ativos, (b).



Fonte: O Autor (2023).

O campo de saturação no tempo correspondente a 45% do volume poroso injetado é mostrado na Figura 5.20, onde podemos ver a solução de referência obtida com a simulação direta em escala fina e a solução obtida com a estratégia FIM-NU-ADM com os volumes na escala fina apresentados na figura inferior.

Figura 35 - SPE 10, Camada 1: Campos de saturação no tempo correspondente ao VPI de 45% obtidos com a estratégia FIM e simulação direta na escala fina, (a), e método NU-ADM, (b)

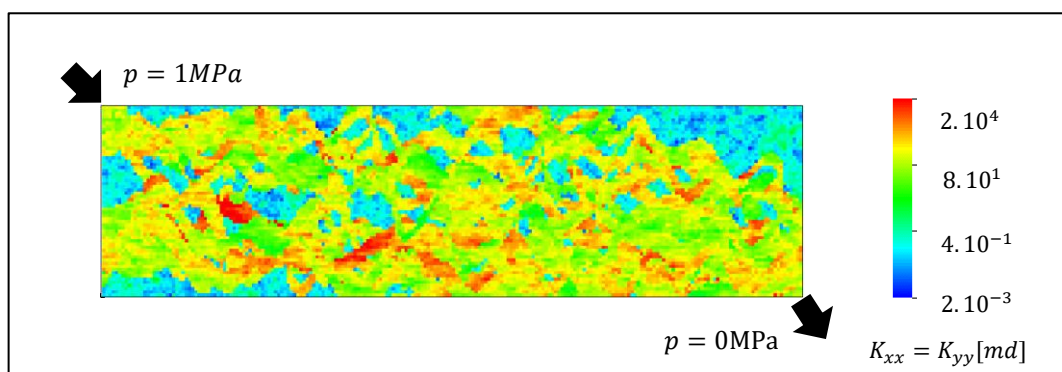


Fonte: O Autor (2023).

5.2.2 Exemplo FIM 2: camada 85 do CSP-SPE 10

O mapa de cores do campo de permeabilidades na escala logarítmica e a localização dos poços são mostrados na Figura 36.

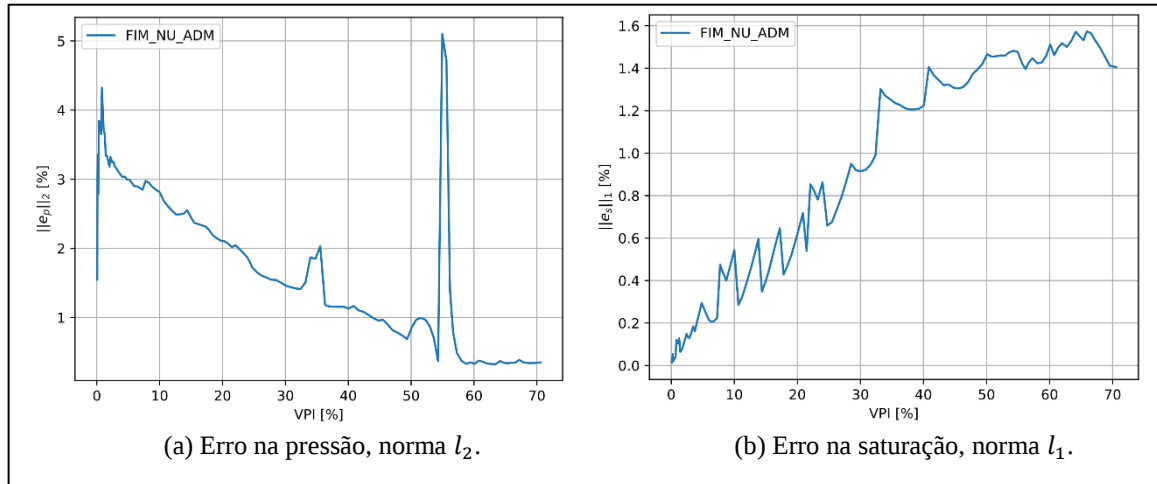
Figura 36 - SPE 10, Camada 85: Campo de permeabilidades e localização dos poços.



Fonte: O Autor (2023).

A simulação foi realizada até que foi atingido o volume poroso injetado (VPI) de 70%, e as normas de erro de pressão e saturação são apresentadas na Figura 38, observa-se que ocorre um pico na norma de erro na pressão no momento de irrupção de água no poço produtor.

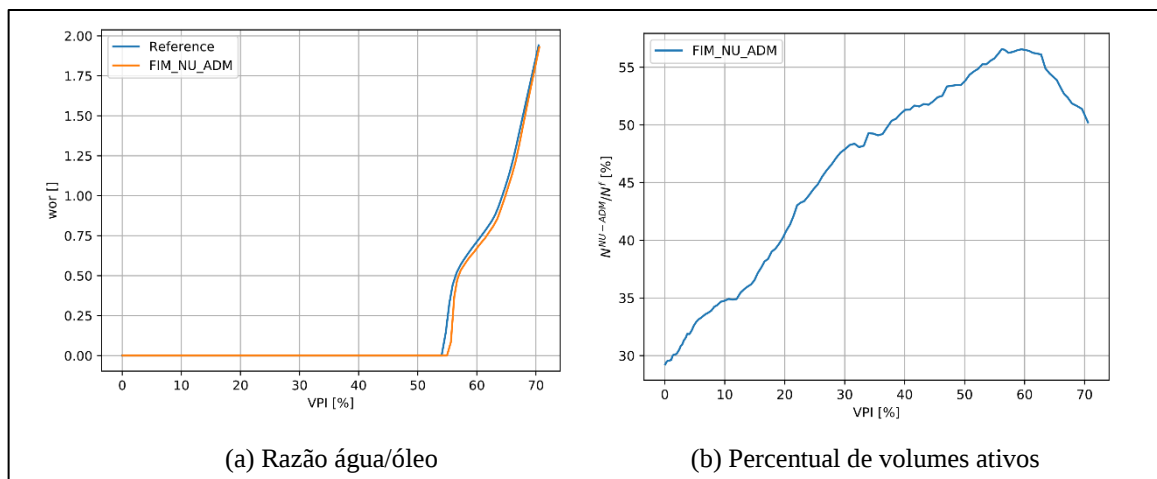
Figura 37 - SPE 10, Camada 85: Normas de erro na pressão, L_2 , (a) e na saturação, L_1 , (b).



Fonte: O Autor (2023).

A curva de produção e a porcentagem de volumes ativos são mostradas na Fig. 4 onde podemos ver que nossa metodologia foi capaz de reproduzir com razoável acurácia a curva de produção usando uma fração de volumes na escala fina.

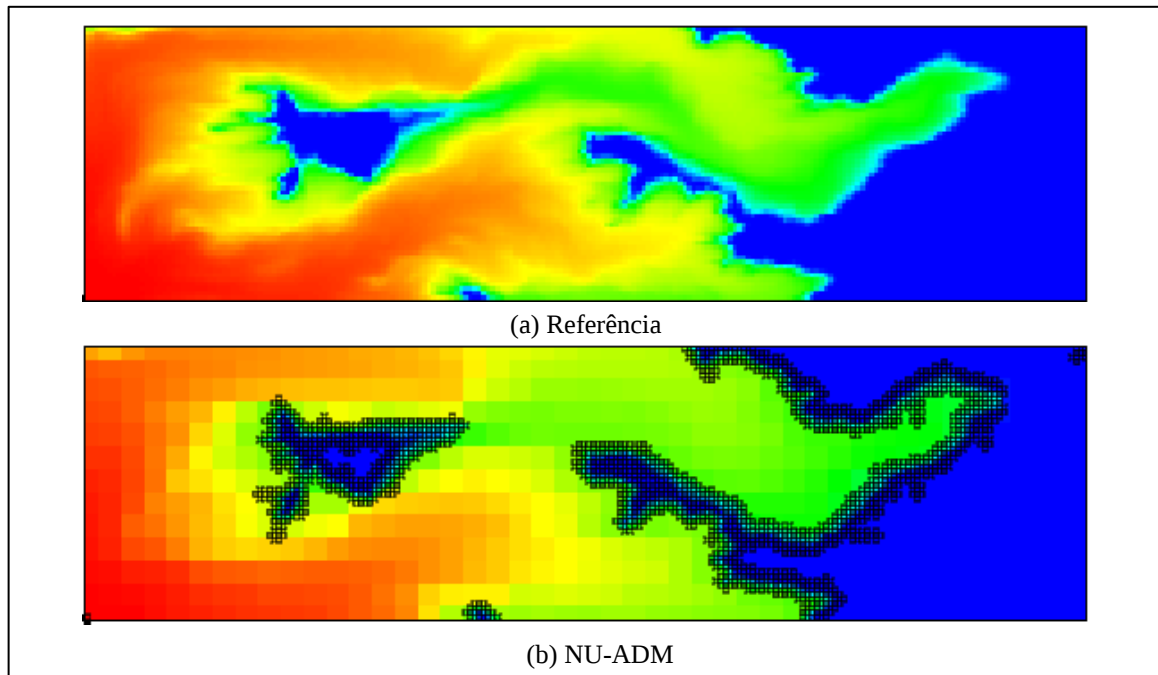
Figura 38 - SPE 10, Camada 85: Razão água/óleo, (a), e percentual de volumes ativos, (b).



Fonte: O Autor (2023).

O campo de saturação no tempo correspondente a 45% do volume poroso injetado é mostrado na Fig. 5, onde podemos ver a solução de referência obtida com a simulação direta em escala fina e a solução obtida com a estratégia FIM-NU-ADM com os volumes na escala fina apresentados na figura inferior.

Figura 39 - SPE 10, Camada 1: Campos de saturação no tempo correspondente ao VPI de 45% obtidos com a estratégia FIM e a simulação direta na escala fina, (a), o método NU-ADM, (b).

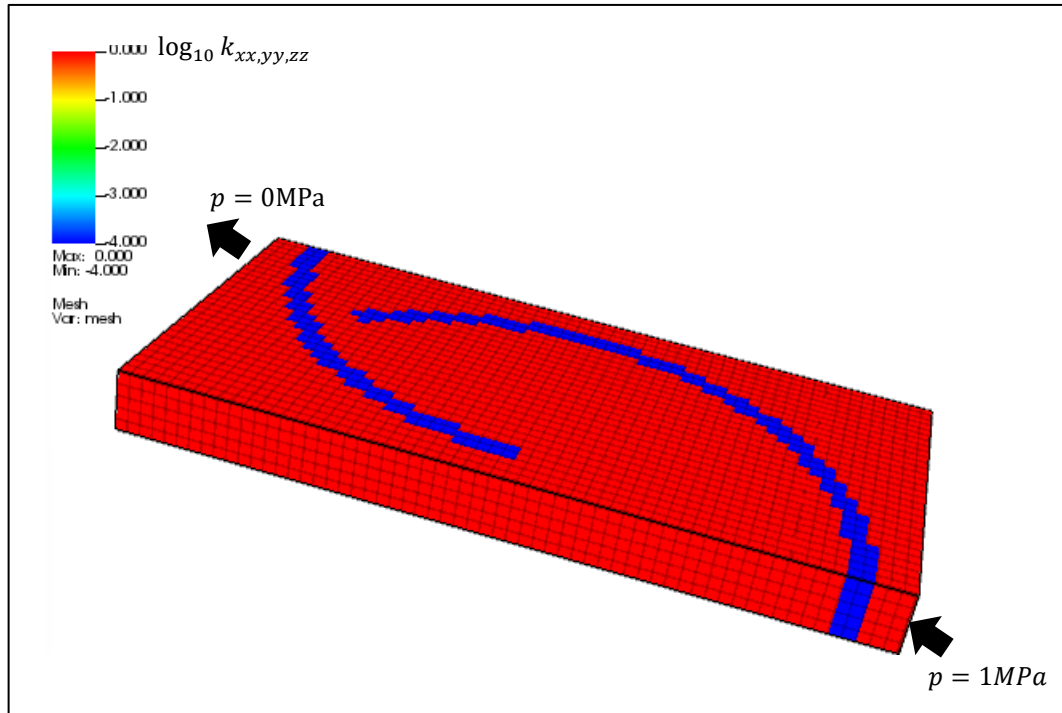


Fonte: O Autor (2023).

5.2.3 Exemplo FIM 3: Homogêneo tridimensional com barreiras

O mapa de cores do campo de permeabilidades, na escala logarítmica, e a locação dos poços são mostrados na Figura 5.25.

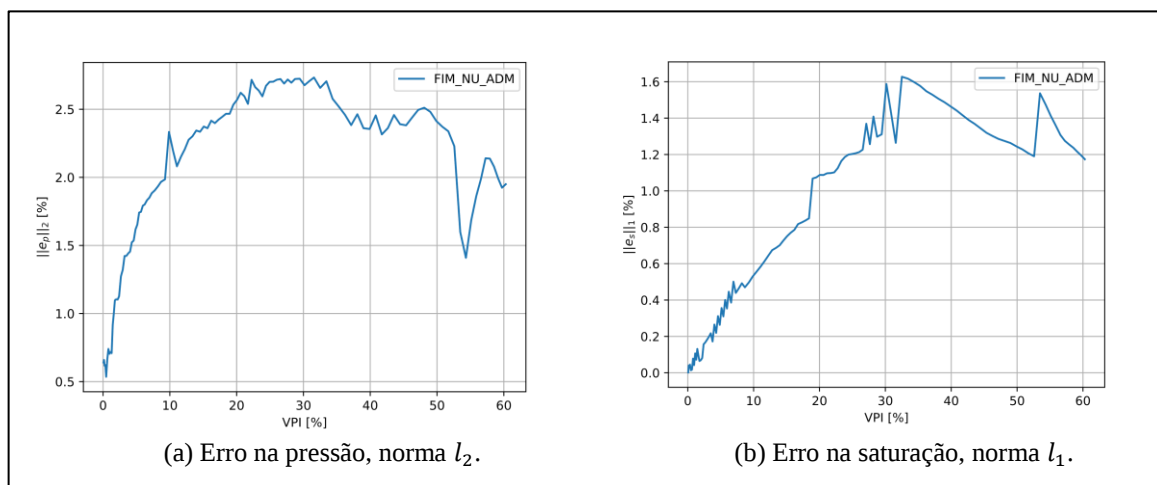
Figura 40 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Campo de permeabilidades e localização dos poços.



Fonte: O Autor (2023).

A simulação foi realizada até que foi atingido o volume poroso injetado (VPI) de 60%, e as normas de erro de pressão e saturação são apresentadas na Figura 5.26Figura 38, observa-se que ocorre um pico na norma de erro na saturação no momento de irrupção de água no poço produtor, no VPI de aproximadamente 53%.

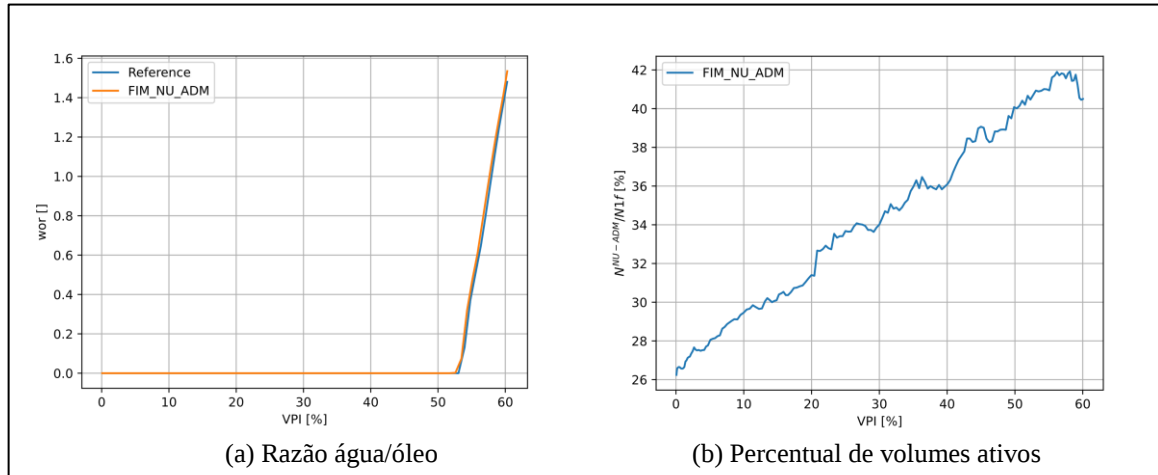
Figura 41 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Normas de erro na pressão, L_2 , (a) e na saturação, L_1 , (b).



Fonte: O Autor (2023).

A curva de produção e a porcentagem de volumes ativos são mostradas na Figura 5.27 onde podemos ver que nossa metodologia foi capaz de reproduzir com razoável acurácia a curva de produção usando uma fração de volumes na escala fina.

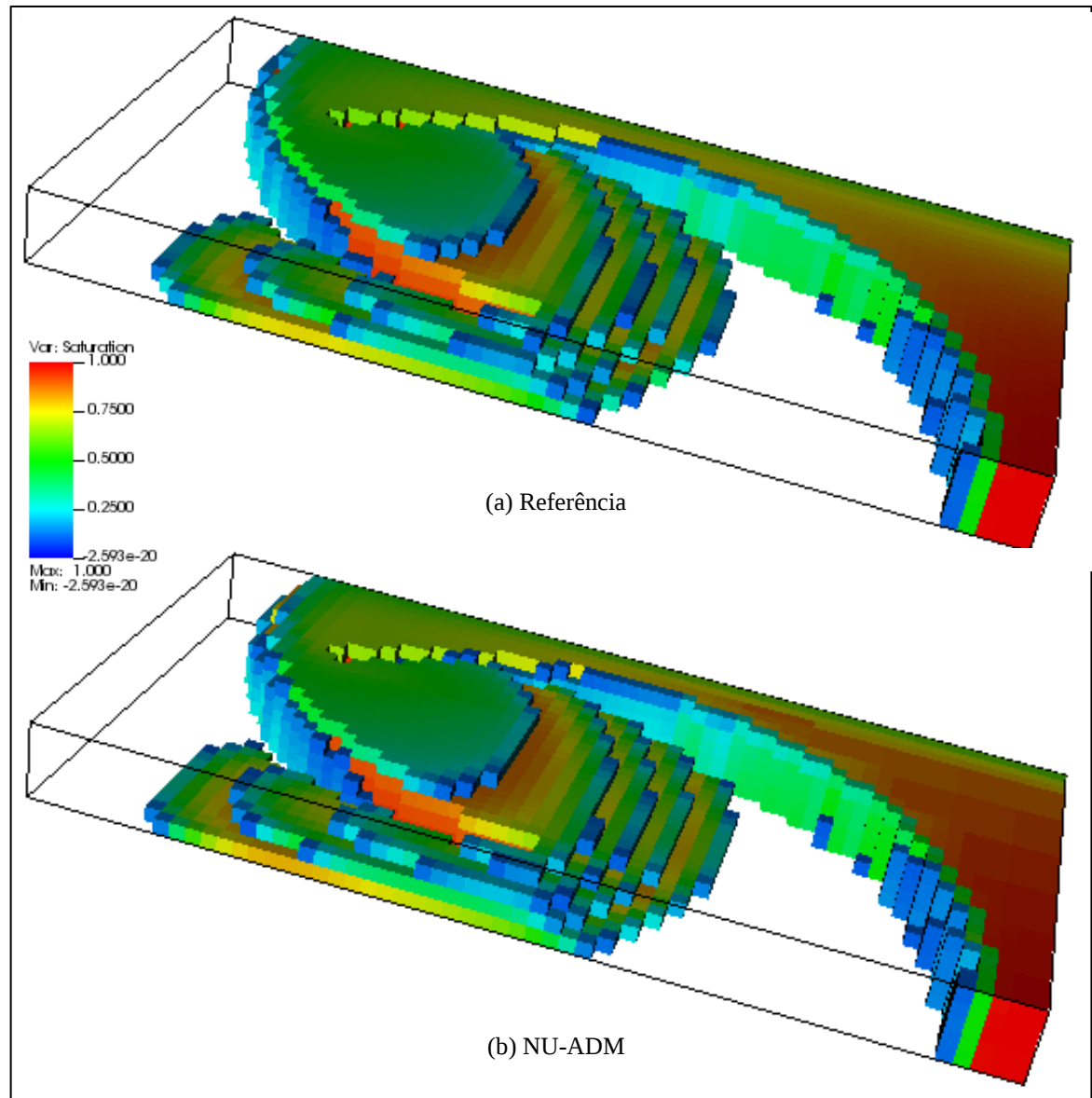
Figura 42 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Razão água/óleo, (a), e percentual de volumes ativos, (b).



Fonte: O Autor (2023).

O campo de saturação no tempo correspondente a 48% do volume poroso injetado é mostrado na Figura 5.28, onde podemos ver a solução de referência obtida com a simulação direta em escala fina e a solução obtida com a estratégia FIM-NU-ADM com 38,7% de volumes ativos.

Figura 43 - Exemplo homogêneo com barreiras 3D: Campos de saturação no tempo correspondente ao VPI de 48% obtidos com a estratégia FIM e a simulação direta na escala fina, (a), o método NU-ADM, (b), apenas volumes com saturação de água acima de 0.1 são mostrados.



Fonte: O Autor (2023).

5.2.4 Tempos de simulação

Para análise do tempo necessário para simulação requerido pelas estratégias FIM e IMPES, realizamos simulações considerando os exemplos das seções 5.2.1 e 5.2.2 em um notebook pessoal com processador Intel Core i5 11ª geração com 8GB de memória RAM. Utilizamos $CFL = 0.9$ nas simulações IMPES e $CFL = 10$ nas simulações FIM, os demais dados foram os mesmos das seções 5.2.1 e 5.2.2.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela **Erro! Fonte de referência não encontrada.4**, observamos que, apesar de a metodologia FIM demandar algumas iterações em cada passo de tempo, o tempo computacional é menor em cada simulação em relação à simulação com o esquema IMPES, isso foi atribuído ao fato de que podemos utilizar passos de tempo maiores em cada passo. Além disso, notamos que o uso da metodologia NU-ADM levou a menores tempos em ambas estratégias nos dois casos, camada 1 e camada 85, especialmente nos exemplos com o modelo FIM, uma vez que a saturação é resolvida na escala Multinível, ao passo que, quando utilizamos o modelo IMPES o campo de saturações foi resolvido na escala fina.

Tabela 4 - Tempos de simulação para as estratégias IMPES e FIM na escala fina e na NU-ADM nas camadas 1 e 85 do CSP-SPE-10.

Tempo de Simulação [min]			
Problema	Tipo de simulação	FIM	IMPES
Camada 85	Escala fina	19,3	56,2
	NU-ADM	11,4	35,7
Camada 1	Escala fina	13,7	41,0
	NU-ADM	6,2	22,9

Fonte: O Autor (2023).

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, implementamos métodos Multiescala e Multinível, a partir de métodos clássicos, como o Multiescala AMS e o Multinível ADM, desenvolvemos estratégias para adaptação das funções de base, A-AMS, e da resolução Multinível NU-ADM.

No contexto da adaptação das funções de base, utilizamos o parâmetro de (WANG, et al., 2015) adaptação da malha dual, consequentemente das funções de base, para desenvolver a metodologia A-AMS, o que levou a uma melhora significativa na qualidade do campo de pressão obtido no exemplo IMPES da camada 85 do CSP-SPE-10, eliminando as fortes oscilações espúrias, reduzindo a norma de erro L_2 de 18,7% para 4,8% e a norma l_∞ de 203,9% para 7,5%, recalculando as funções de base em cerca de 35% dos volumes.

No contexto de adaptação da malha Multinível, desenvolvemos o primeiro método Multinível com resolução não uniforme, NU-ADM. Além disso, definimos parâmetros algébricos para adaptação da malha com vistas à eliminação das oscilações espúrias no campo de pressões. Verificamos que o uso do NU-ADM com os critérios de adaptação melhoraram significativamente a qualidade do campo de pressão no exemplo IMPES da camada 85 do CSP-SPE-10, reduzindo a norma de erro na pressão, norma l_2 , de 18,7% para 5,6%, e a norma l_∞ 203,9% para 6,4% ao manter, criteriosamente, cerca de 15% dos volumes na escala fina.

A estratégia NU-ADM foi inicialmente implementada no contexto IMPES, em que o campo de saturações é calculado explicitamente na escala fina, após uma etapa de reconstrução do campo de velocidades. Posteriormente, estendemos o NU-ADM para lidar com o contexto totalmente implícito (FIM), no qual passamos a tratar a saturação, assim como a pressão, na resolução Multinível. Observamos que, apesar de a metodologia FIM demandar algumas iterações em cada passo de tempo, por se tratar de um problema não linear, o tempo de simulação foi menor em cada simulação, em relação à simulação IMPES. Isso foi atribuído ao fato de que podemos utilizar passos de tempo maiores em cada passo. Além disso, notamos que, no esquema FIM, o uso da metodologia NU-ADM, demandou menos tempo de processamento que o NU-ADM na metodologia IMPES nos dois casos testados, camada 1 e camada 85 do CSP-SPE-10.

Podemos mencionar as seguintes sugestões para trabalhos futuros, com potencial de continuidade dessa tese:

1. Extensão das metodologias desenvolvidas, A-AMS e NU-ADM para modelos computacionais com malhas não estruturadas;
2. Extensão das metodologias para lidar com mais de um nível na escala grossa;
3. Extensão das metodologias para métodos adaptativos implícitos (AIM);
4. Incorporar modelos com física mais complexa, como modelos composicionais;
5. Incorporar modelos com tratamento diferenciados para reservatórios fraturados;
6. Incorporar o modelo assumindo o fluxo de Stokes-Brinkman.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA LORENA MONTEIRO CAVALCANTI **Formulações multiescala localmente conservativas para a simulação de reservatórios de petróleo muito heterogêneos e anisotrópicos** /Tese de doutorado, 163p [Livro]. - Recife : [s.n.], 2017.
- BOLDRINI J. L. ET AL. [et al.] **Álgebra Linear. 3. ed.** [Livro]. - São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.
- BROOKS R. H. e COREY A. T. **Hydraulic properties of porous media** [Livro]. - Fort Collins, Colorado : Colorado State university, 1964.
- CARVALHO D. K. E **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-estruturadas com Estrutura de Dados por Arestas para a Solução de Escoamentos em Meios Porosos. Tese de doutorado.** - [s.l.] : Universidade Federal de Pernambuco, 2005.
- CHEN ZHIMING e HOU THOMAS Y. **A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients** [Periódico] // Mathematics of Computation, <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01441-2>. - 2003. - 242 : Vol. 72. - pp. 541-576.
- CHRISTIE MICHAEL e BLUNT M.J. **Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques** [Periódico] // SPE Reservoir Evaluation & Engineering 4. - 2001. - pp. 308-317.
- CORRÊA ANTONIO CLÁUDIO DE FRANÇA **A Extração do petróleo da camada pré-Sal brasileira: desafios e oportunidades** [Periódico] // Advir. - 2013. - pp. 21-27.
- CORTINOVIS D. e JENNY P. **Iterative Galerkin-enriched multiscale finite-volume method.** [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 2014. - pp. 248-267.
- Cortinovis D. e Jenny P. **Zonal Multiscale Finite-Volume framework,** [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 2017. - pp. 84-97.
- COURANT R., FRIEDRICHS K. e LEWY H. **On the partial difference equations of mathematical physics** [Periódico] // IBM Journal of Research and Development. - 1967 [1928]. - pp. 215-234.
- CUSINI M., VAN KRUIJSDIJK C. e HAJIBEYGI H. **Algebraic Dynamic Multilevel (ADM) method for fully implicit simulations of multiphase flow in porous media** [Periódico] // Journal of Computational Physics. - [s.l.] : Journal of Computational Physics, 2016. - pp. 60-79.

Cusini M., Van Kruijsdijk C. e Hajibeygi H. **Algebraic Dynamic Multilevel (ADM) method for fully implicit simulations of multiphase flow in porous media**, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.007> [Periódico] // Journal of Computational Physics. - [s.l.] : Journal of Computational Physics, 2016. - pp. 60-79.

CUSINI M., VAN KRUIJSDIJK C. e HAJIBEYGI H. **Algebraic Dynamic Multilevel (ADM) method for fully implicit simulations of multiphase flow in porous media**, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.007> [Periódico] // Journal of Computational Physics. - [s.l.] : Journal of Computational Physics, 2016. - pp. 60-79.

CUSINI MATTEO [et al.] **Algebraic dynamic multilevel method for compositional flow in heterogeneous porous media** [Periódico] // Journal of Computational Physics, 354. - [s.l.] : Journal of computational physics, 2017. - p. 10.1016/j.jcp.2017.10.052.

DEHKORDI M. M. e MANZARI M.T. **Effects of using altered coarse grids on the implementation and computational cost of the multiscale finite volume method**. [Periódico] // Adv. Water Resources. - 2013. - pp. 221-237.

DEHKORDI M. M. e MANZARI M.T., **Effects of using altered coarse grids on the** [Periódico] // Adv Water Resour. - 2013. - pp. 221-237.

ERMAKOV K. **On the Multiscale Finite Volume Method for the flow in porous media**. MSc Dissertation. TU Kaiserslautern [Livro]. - 2010.

ERTEKIN T., ABOU-KASSEM J. H. e KING G. R. **Basic Applied Reservoir simulation** [Livro]. - Richardson, TX : Society of Petroleum Engineers (SPE), 2001.

EWING R. E. **The Mathematics of Reservoir Simulation**. Philadelphia, SIAM, [Periódico] // Communications in applied numerical methods. - 1983. - pp. 261-261.

FAROUGHI S. A., FAROUGHI S. e MCADAMS J. **A prompt sequential method for subsurface flow modeling using the modified multi-scale finite volume and streamline methods**. [Periódico] // Int. J. Numer. Anal. Model. - 2013. - pp. 129-150.

FREITAS ALUÍZIO DE **Método dos Volumes Finitos Aplicado à Condução de Calor, uma abordagem com Python** [Livro]. - [s.l.] : Clube dos Autores, 2021.

GIELISSE R.A.M. **Dynamic Local Grid Refinement for Incomplete Mixing in Reservoir Simulation** [Livro]. - Delft : Delft University of technology, 2015.

HAJIBEYGI H. [et al.] **Iterative multiscale finite-volume method**, [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 2008. - pp. 8604-8621.

HELLMAN FREDRICK, HENNING PATRIC e MALQVIST AXEL **Multiscale mixed finite elements** [Periódico] // Discrete and Continuous Dynamical Systems. - 2015. - pp. 1-29.

HOU THOMAS Y. e WU XIAO-HUI **A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media** [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 1997. - pp. 169-189.

JARAMILLO ALFREDO e RAFAEL T. GUIRALDELLO STEVENS PAZ, ROBERTO F. AUSAS, FABRICIO S. SOUSA, FELIPE PEREIRA & GUSTAVO C. BUSCAGLIA **Towards HPC simulations of billion-cell reservoirs by multiscale mixed methods** [Artigo] // Computational Geosciences. - [s.l.] : Springer, 2022.

JENNY P., LEE, S., TCHELEPII, H **Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation**. [Periódico] // Journal of Computational Physics., v. 187.. - 2003. - pp. 47–67.

KÜNZE ROUVEN, LUNATI IVAN e LEE SEONG H. **A Multilevel Multiscale Finite-Volume Method** [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 2013. - pp. 502-520.

Lunati I. e Jenny P. **Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media** [Periódico] // J. Comput. Phys.. - 2006. - 216 : Vol. 2. - pp. 616-636.

LUNATI I. e LEE S. H. **An operator formulation of the Multiscale Finite-Volume Method with correction function**. [Periódico] // Multiscale Modeling & Simulation, v. 8.. - 2009. - pp. 96-109.

LUNATI L., TYAGI M. e LEE S.H. **An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution**. [Periódico] // J. Comp. Phys. v. 230. - 2011. - pp. 1849–1864.

MAZLUMI F., MOSHARAF-DEHKORDI M. e DEJAM M. **Simulation of two-phase incompressible fluid flow in highly heterogeneous porous media by considering localization assumption in multiscale finite volume method**, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125649> [Periódico] // Applied Mathematics and Computation. - 2021. - pp. 1-22.

PARRAMORE E., EDWARDS, M. G., PAL, M. AND LAMINE, S. **Multiscale Finite-Volume CVD-MPFA Formulations on Structured and Unstructured Grids** [Periódico] // Multiscale Modeling & Simulation 14.2. - 2016. - pp. 559-594.

Peaceman D. W **Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation** [Livro]. - Amsterdam : Elsevier, 1977.

Qi Dasheng e Hesketh Tim **Quantitative Evaluation of Information Loss in Reservoir Upscaling** [Periódico] // PETROLEUM SCIENCE AND TECHNOLOGY Vol. 22. - 2004. - pp. 1625-1640.

RODRIGUES JOSÉ ROBERTO P. **Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos** [Periódico] // Programa de Verão LNCC. - 2015.

ROSA A. J., CARVALHO R. S. e XAVIER J. A. D. **Engenharia de reservatórios de petróleo** [Livro]. - Rio de Janeiro : Interciência, 2006.

Ruggiero Márcia A Gomes e Lopes Vera Lúcia da Rocha **Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacionais** [Livro]. - São Paulo : Pearson, 2014.

SANTOS J. C. A. [et al.] **An algebraic dynamic multilevel and multiscale method with non-uniform mesh resolution and adaptive algebraic multiscale solver operator for the simulation of two-phase flows in highly heterogeneous petroleum reservoirs** [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 2022. - pp. 1-24.

SANTOS J. C. A. [et al.] **An algebraically dynamic multilevel (ADM) multiscale method for the simulation of single-phase flows through highly heterogeneous porous media** [Periódico] // Proceedings of the XI CILAMCE. - 2019. - pp. 1-20.

SANTOS J. C. A. DOS [et al.] **An Adaptive Algebraic Dynamic Multilevel (A-ADM) and Multiscale Method with Enriched Basis Functions for the Simulation of Two-Phase Flows in Highly Heterogeneous Petroleum Reservoirs** [Periódico] // Proceedings of the XLI CILAMCE. - 2020. - pp. 1-7.

SOUZA ARTUR CASTIEL REIS DE [et al.] **A Multiscale Control Volume framework using the Multiscale Restriction Smooth Basis and a non-orthodox Multi-Point Flux Approximation for the simulation of two-phase flows on truly unstructured grids,** <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106851> [Periódico] // Journal of Petroleum Science and Engineering. - 2020. - 188.

SOUZA ARTUR CASTIEL REIS DE [et al.] **An algebraic multiscale solver for the simulation of two-phase flow in heterogeneous and anisotropic porous media using general unstructured grids (AMS-U)** [Periódico] // Applied Mathematical Modelling. - 2021. - pp. 1-32.

SOUZA M. R. A. **Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem.** [Livro]. - Recife : Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

WANG YIXUAN **An Algebraic Multiscale Solver for flow problems in heterogeneous porous media**, PhD thesis [Relatório]. - Palo alto : Stanford, 2015.

WANG YIXUAN, HAJIBEYGI HADI e TCHELEPI HAMDI A. **Monotone multiscale finite volume method** [Periódico] // Comput Geosci. - 2015. - pp. DOI 10.1007/s10596-015-9506-7.

WANG YIXUAN, HAJIBEYGI HADI e TCHELEPI HAMDI **Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media** [Periódico] // Journal of Computational Physics, 259. - 2014. - pp. 284-303.

ZHOU H. e TCHELEPI H.A. **Two-Stage Algebraic Multiscale**, <http://dx.doi.org/10.2118/141473-MS> [Periódico] // SPE journal. - 2012. - pp. 523-539.

ZHOU H., TCHELEPI, H. A. **Operator-based Multi-scale Method for Compressible Flow** [Periódico] // Society of Petroleum Engineering Journal, v. 13. - 2008. - pp. 267-273.

APÊNDICE A - EXEMPLO DE APLICAÇÃO PRÁTICA DO MÉTODO ADM

Com o objetivo de ilustrar a aplicação do método ADM de forma direta (com explicitação dos termos das matrizes) foi elaborado um problema bidimensional. Com condições de contorno de fluxo nulo em todas as fronteiras, permeabilidade e dimensões unitárias. A configuração de poços e a malha fina são mostrados na Figura 44.

Figura 44: Malha fina e localização dos poços, um poço injetor (à esquerda) e um poço produtor (à direita).

Vazão	2								1	Pressão
	2								1	
	2								1	

Fonte: O Autor.

Ao se utilizar uma razão de engrossamento $CR = (3, 3)$ definimos as malhas auxiliares mostradas na Figura 45.

Figura 45: Malhas auxiliares do problema bidimensional, malha primal (a), malha dual (b) e malha ADM (c). Os números correspondem aos Ids que identificam cada volume.

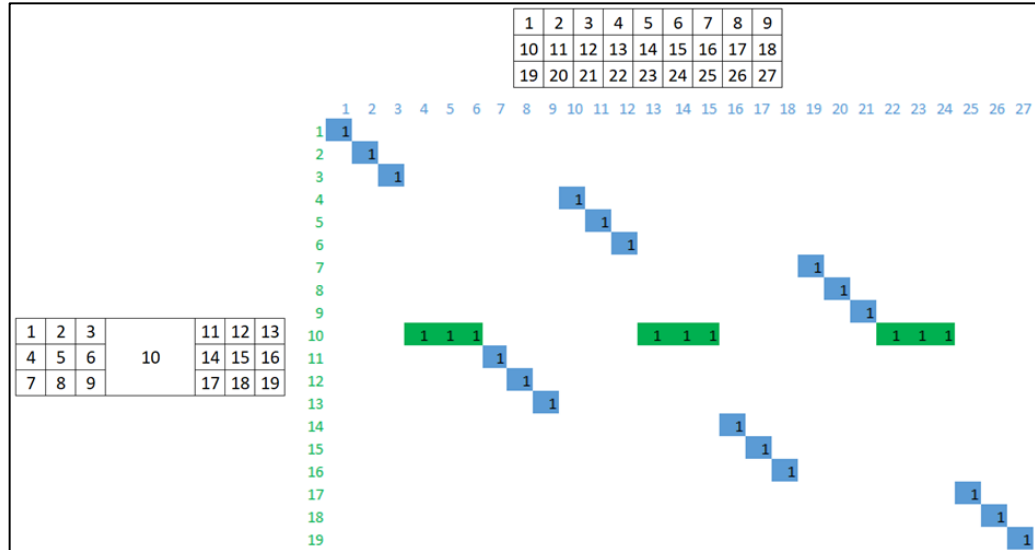
a)	1			2			3		
b)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25	26	27
c)	1	2	3	10			11	12	13
	4	5	6				14	15	16
	7	8	9				17	18	19

Fonte: O Autor

A partir da malha ADM, podemos definir o operador de prolongamento ADM mostrado na Figura 46. Nessa figura, observa-se que no volume no nível grosso da malha ADM (Id 10)

recebe a linha correspondente no operador Multiescala, enquanto que nos volumes no nível fino, ocorre apenas o mapeamento de Ids do nível fino para Ids ADM.

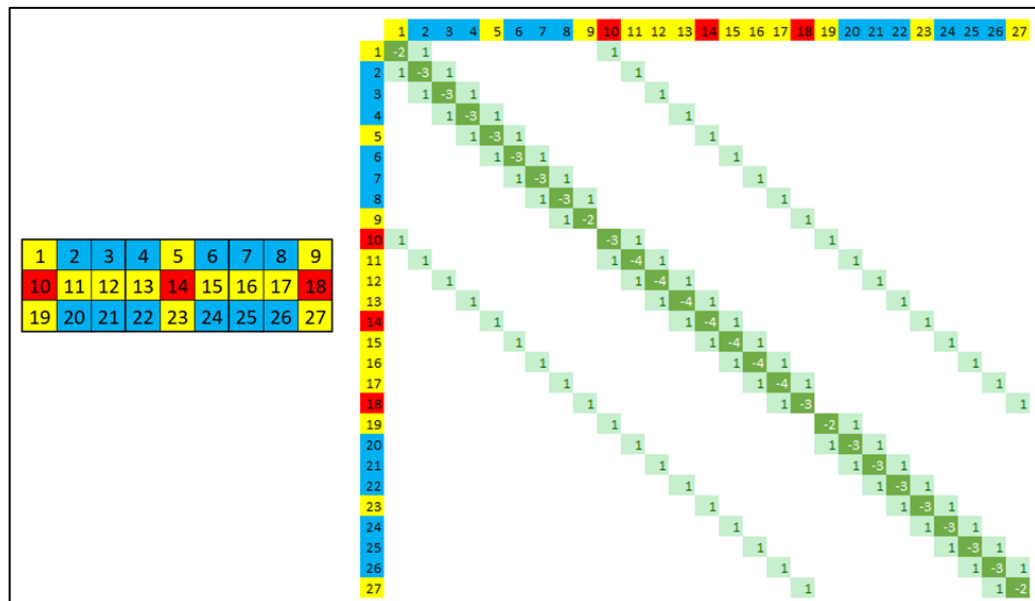
Figura 46: Operador de restrição ADM.



Fonte: O Autor.

Para a obtenção do operador de prolongamento é necessária a definição da transmissibilidade na malha fina, cabe notar que, para a definição desse operador, não são inseridas as condições de contorno de Dirichlet nessa matriz. A Figura 47, mostra a matriz correspondente ao exemplo em questão com explicitação do tipo de volume na malha dual.

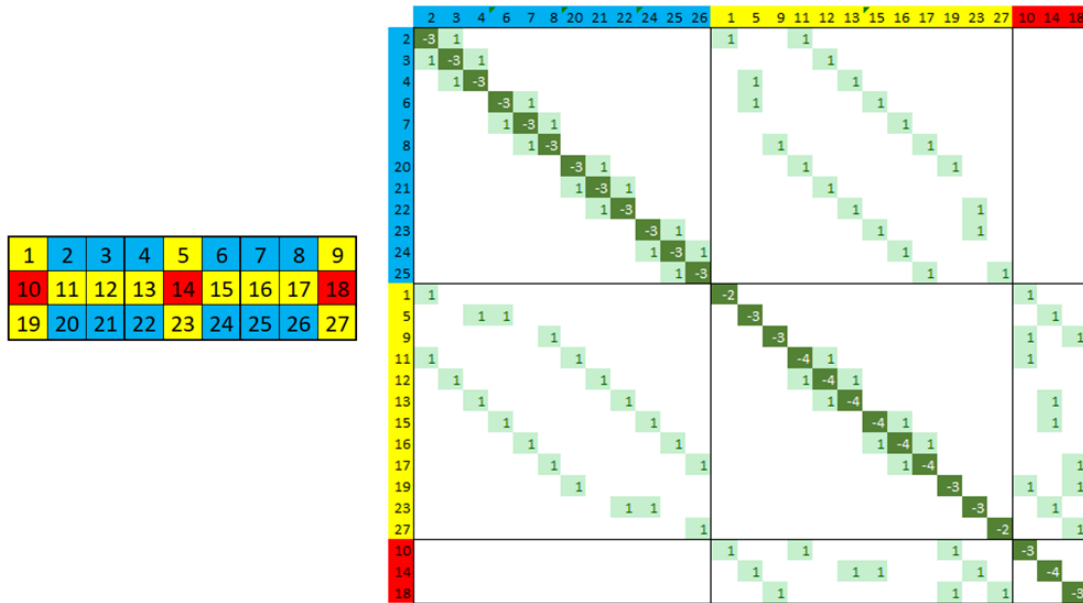
Figura 47: Matriz de transmissibilidade na malha fina com explicitação do tipo de volume na malha dual.



Fonte: O Autor.

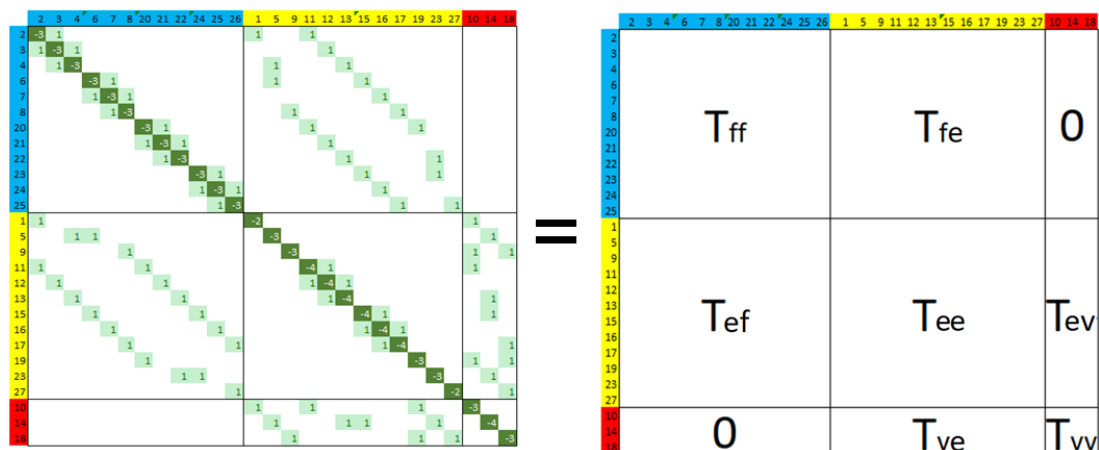
Uma vez obtida a matriz de transmissibilidades na escala fina é realizada a permutação das linhas e colunas para definição da matriz Wirebasket, essa matriz é mostrada na Figura 48 e as sub matrizes são nomeadas na Figura 49.

Figura 48: Matriz Wirebasket ou transmissibilidade reordenada.



Fonte: O Autor.

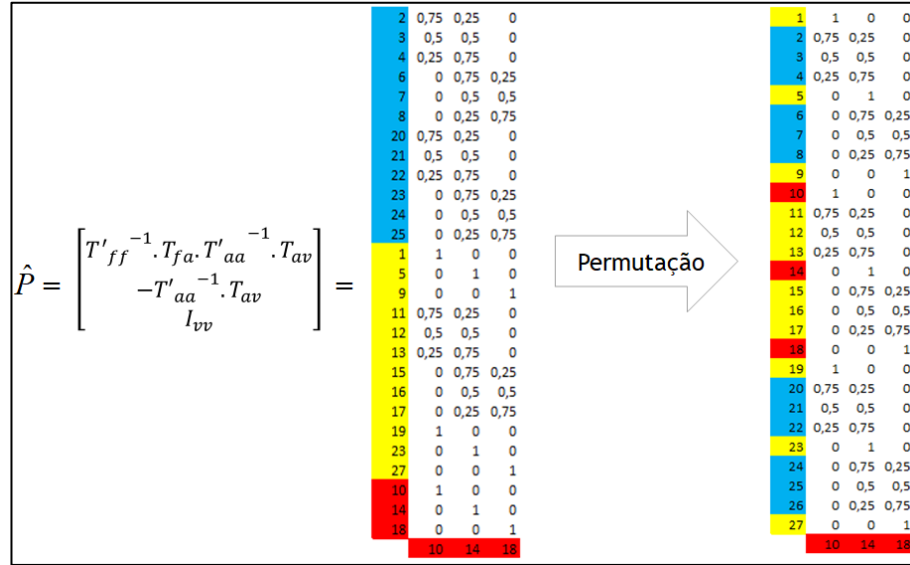
Figura 49: Explicitação das sub matrizes componentes da Wirebasket.



Fonte: O Autor.

A aplicação da formulação para cálculo do operador Multiescala nas componentes da matriz Wirebasket fornece o operador de prolongamento Multiescala, $\hat{P}$, esse operador é mostrado na Figura 50.

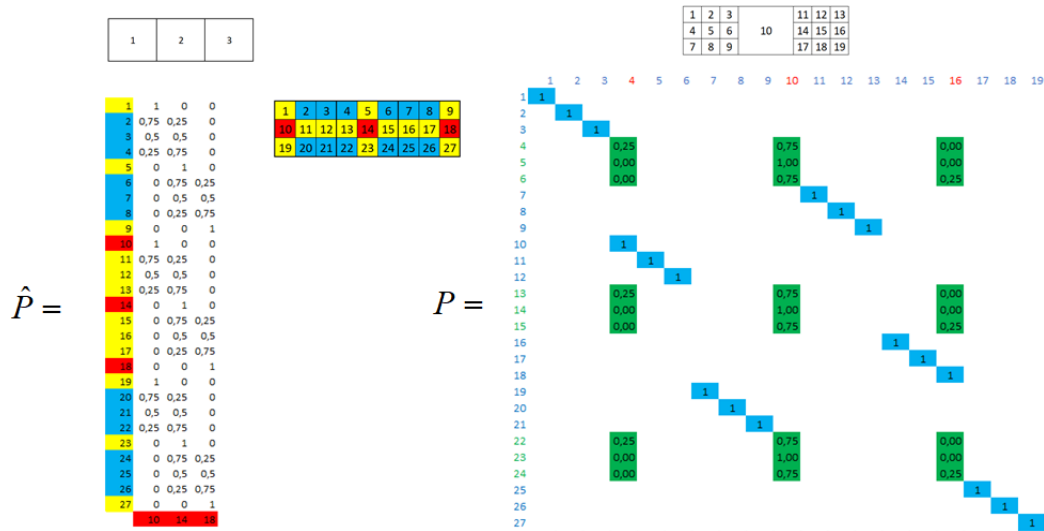
Figura 50: Operador de prolongamento Multiescala, cada coluna corresponde a uma função de base.



Fonte: O Autor.

A consideração da malha ADM e desse operador, fornece o operador de prolongamento ADM, P , esse operador é mostrado na Figura 51, onde se verifica que nos volumes que pertencem ao nível grosso recebem o prolongamento Multiescala, enquanto que nos volumes mantidos na malha fina a ocorre o simples mapeamento de Ids entre o a malha fina e a malha ADM.

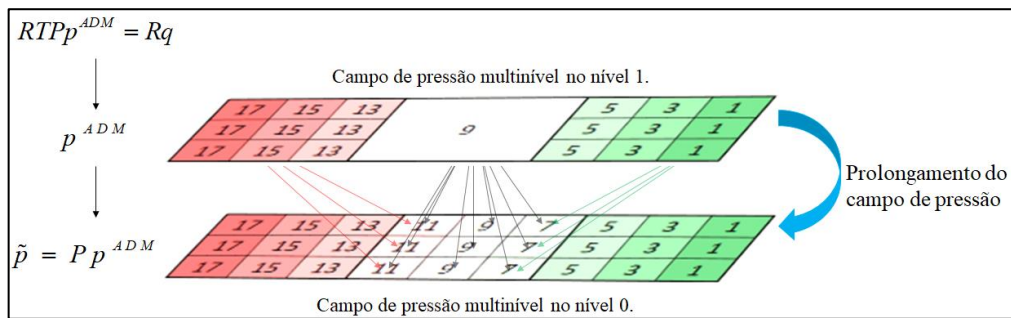
Figura 51: Operador de prolongamento ADM.



Fonte: O Autor (2023).

Com os operadores ADM e a transmissibilidade na malha fina, resolvemos o problema ADM, e prolongamos a solução para obter a solução na escala fina. A Figura 52 ilustra esse processo. Observa-se ainda que a solução obtida com o prolongamento é linear exata.

Figura 52: Prolongamento da solução de pressão.



Fonte: O Autor (2023).

APÊNDICE B - QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

Os códigos desenvolvidos para esse trabalho foram escritos na linguagem Python, criamos dois projetos, que estão hospedados no GitHub e são públicos. O primeiro deles no contexto IMPES, https://github.com/CiceroAraujo/NU_ADM e o segundo no contexto FIM https://github.com/CiceroAraujo/FIM_NU_ADM.

No repositório IMPES, estão implementados os códigos do A-AMS e NU-ADM, assim como os métodos tomados como base, AMS e ADM, e a solução de referência na escala fina. Já no repositório FIM, estão implementadas as metodologias NU-ADM e ADM, assim como a solução de referência na escala fina.

Utilizamos a biblioteca NumPy, que é uma das bibliotecas mais utilizadas em Python, para armazenar e trabalhar com vetores densos, como as informações da malha, como adjacências, e do meio poroso, como os campos de permeabilidade, pressão e saturação, esses dados são armazenados na forma de vetores, unidimensionais e bidimensionais. Os mapeamentos simples também são feitos utilizando *arrays* com os Ids (números que identificam os volumes) nas diferentes escalas.

Já o SciPy é utilizado para armazenar e operar com as matrizes (esparsas), como as matrizes de transmissibilidade (IMPES) e Jacobianas (FIM). Além disso, utilizamos o módulo “cgraph” do SciPy que trata as matrizes esparsas como grafos e permite a determinação rápida dos aglomerados gerados pelo parâmetro “beta”. Além disso, realiza a criação rápida da *flag* que define a malha NU-ADM.

O SymPy é utilizado na aplicação do contexto FIM, esse módulo trabalha com expressões simbólicas (analíticas). Usamo-lo para *lambdificar* as expressões numéricas, isto é, criar funções em Python que aceitam vetores como entrada, o que permite vetorizar o *assembly* do sistema de equações da escala fina. Além disso, utilizamos esse módulo para fazer as operações de cálculo diferencial e derivar o modelo numérico a partir do analítico, minimizando erros de implementação.

Além dos módulos principais, utilizamos outros como acessórios. Podemos citar o *Matplotlib*, que utilizamos para traçar os gráficos, o *PyVista* para gerar os arquivos “.vtk” com a representação das grandezas de campo, e o *Multiprocessing* para implementar as partes do código em paralelo.