UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE ARTES E COMUNICAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
CURSO DE LICENCIATURA EM EXPRESSÃO GRÁFICA

DAVID RAI DA SILVA GADELHA

MATERIAIS DIDÁTICOS DINÂMICOS DIGITAIS: UMA PROPOSTA INSTRUMENTAL PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Recife
2023

DAVID RAI DA SILVA GADELHA

MATERIAIS DIDÁTICOS DINÂMICOS DIGITAIS: UMA PROPOSTA INSTRUMENTAL PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Expressão Gráfica.

Orientadora: Profa. Dra. Sandra de Souza Melo

Coorientadora: Profa. Ma. Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva

Recife

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Gadelha, David Rai da Silva.
Materiais didáticos dinâmicos digitais: uma proposta instrumental para o ensino-aprendizagem de Figuras Geométricas Planas / David Rai da Silva Gadelha. - Recife, 2023.
125 p. : il., tab.

Orientador(a): Sandra de Souza Melo
Cooorientador(a): Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Artes e Comunicação, Expressão Gráfica - Licenciatura, 2023.
Inclui referências, apêndices.

1. Geometria Dinâmica. 2. Abordagem Instrumental. 3. Figuras Geométricas Planas. 4. GeoGebra. 5. Ensino Fundamental. I. Melo, Sandra de Souza. (Orientação). II. Silva, Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da. (Coorientação). III. Título.

370 CDD (22.ed.)

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Artes e Comunicação
Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica

ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Às 9:30h, do dia 15/06/2023, reuniu-se no Laboratório de Pranchetas 2, a Banca Examinadora composta pelos membros: externo, interno e orientadora, abaixo indicados para julgar o trabalho intitulado ***"Materiais didáticos dinâmicos digitais: uma proposta instrumental para o ensino-aprendizagem de Figuras Geométricas Planas"*** desenvolvido pelo aluno **David Rai da Silva Gadelha,** como requisito final para a obtenção do Grau de Licenciado em Expressão Gráfica, de acordo com as normas em vigor.

A sessão foi aberta pela **Profª Drª Sandra de Souza Melo**, orientadora do trabalho, seguindo-se a apresentação do discente aos membros da Banca Examinadora e aos demais presentes. Posteriormente, foram realizadas as colocações e a arguição dos membros examinadores, com a respectiva defesa do aluno. Ao final, a Banca Examinadora se reuniu em segredo para julgamento e composição da nota do aluno, declarando-o ______**APROVADO**______, com a nota __**10,0 (DEZ)**__. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pela coordenação da Banca Examinadora. Todos os membros presentes assinaram a Ata.

Profº Drº Bruno Leite Ferreira ____
Examinador Externo

Profª Drª Thyana Farias Galvão ____
Examinadora Interna

Profª Drª Sandra de Souza Melo ____
Orientadora

Profª Mª Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva ____
Coorientadora

David Rai da Silva Gadelha ____
Discente

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço ao meu Criador, o maior Geômetra deste universo. Aquele que me conduziu, abriu as portas, e permitiu que eu chegasse até aqui. Aquele que se mostrou presente por meio da atuação de tantas pessoas que cruzaram meu caminho. À Ele devo a minha existência. Também agradeço aos colegas e amigos que de alguma forma trouxeram leveza para minha vida durante este tempo, e à minha família, que possibilitou os meios para que eu pudesse trilhar esta jornada, e que em meio aos altos e baixos permaneceram ao meu lado. Em especial à minha mãe que se doou e se doa completamente todos os dias. E à minha irmã com quem pude partilhar os percalços e desafios da jornada universitária e quem não mediu esforços para ajudar-me na conclusão desta etapa.

Agradeço aos colegas e amigos que a universidade me presenteou, em especial à Gabriel e à Poly, meus eternos monitores. Nossa ligação foi tão forte que bastou um semestre para formarmos laços permanentes. Cada encontro com vocês foi único. E à minha digníssima Beatriz, parceira de trabalhos, projetos, quem esteve comigo em todas etapas desafiadoras, com quem pude compartilhar momentos de dissabor e de conquista, por acompanhar-me desde o início da graduação. Sua inteligência é brilhante! Agradeço a vocês pelo companheirismo, pela troca de experiências, por cada momento juntos, pelos sorrisos característicos de amizades sinceras e bem humoradas. Com certeza vocês tornaram a minha caminhada acadêmica bem mais leve e jamais os esquecerei. Sou grato à Dra. Aline que através dos seus acompanhamentos garantiu que eu tivesse saúde para concluir esta etapa da minha vida. Agradeço por seu profissionalismo, por sua empatia e por disponibilizar tempo para cuidar de mim. Agradeço também à PROAES que me concedeu subsídios que viabilizaram a minha permanência na universidade e por todo suporte oferecido.

À professora e orientadora Sandra, que com sua bagagem acadêmica me proporcionou orientações exímias na construção deste trabalho. Sua responsabilidade, profissionalismo e destreza me fascinam! As oportunidades que tivemos de trabalharmos juntos renderam bons frutos para minha experiência acadêmica. Agradeço por sua compreensão, sensibilidade e parceria. Sou grato também à professora Elizabeth, carinhosamente conhecida como Beth, e que sem sombra de dúvidas teve participação decisiva na evolução desta pesquisa, por meio do seu comprometimento, dedicação e fascínio pela educação, e seu olhar especial pelas tecnologias. Agradeço à estas que me acompanharam de perto ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, por acreditarem em mim e em minhas ideias. Muito obrigado por cada orientação, conselho e motivação.

Agradeço de forma especial à querida professora e coordenadora Thyana, que com seu profissionalismo movido pela paixão, sua sensibilidade e empatia, e seu amor pela vida – dela e de outros –, me inspira a ser um ser humano melhor e a acreditar que ainda existem pessoas admiráveis. Sua presença em minha vida foi marcante. Jamais esquecerei o que fez por mim. Você não existe! Não posso deixar de citar também o professor Bruno, que com sua expertise, mesmo sem saber, foi o maior influenciador para a escolha da temática desta pesquisa. Agradeço pela oportunidade de acompanhar suas aulas no Colégio de Aplicação da UFPE e perceber seu compromisso e dedicação na condução de suas atividades pedagógicas. Sou grato a todos que tornam a LEG um ambiente familiar e sem igual, em especial à Claudinha, com sua recepção e paixão por todos estudantes que fazem parte ou já passaram por este curso. Estendo os meus agradecimentos também a todos professores que colaboraram e foram decisivos em meu processo de formação.

Também sou grato a todos que oraram e intercederam por minha saúde em um dos momentos mais desafiadores da minha vida, e a todos que se mostraram presentes nos momentos que mais precisei. Se aqui estou é graças a sensibilidade e compaixão de cada um de vocês. Enfim, agradeço aqueles que direta ou indiretamente influenciaram e colaboraram nesta trajetória. Se cheguei até aqui é por causa da atuação destes anjos enviados por Deus.

A todos, meus sinceros agradecimentos!

Eu aprendi qual é o valor de um sonho alcançar
Eu entendi que o caminho pedras terá
Eu vi em campo aberto se erguer construção
E foi com muitas pedras, e foi com muitas mãos

Eu vi o meu limite vir diante de mim
Eu enfrentei batalhas que eu não venci
Mas o troféu não é de quem não fracassou
Eu tive muitas quedas, mas não fiquei no chão

[...]

Vejo vitórias se hoje eu olho pra trás
E a minha frente eu sei
Existem muito mais
Eu sei que minha jornada aqui só começou
Ao longo dessa estrada sozinho não estou

E ao olhar pra trás, tudo que passou
Venho agradecer quem comigo estava
Ergo minhas mãos pra reconhecer

E hoje eu sou quem eu sou
Pois Sua mão me acompanhava
Mas eu sei, não é o fim, é só o começo da jornada
Eu abro o meu coração pra minha nova história
(SÓ..., 2019).

RESUMO

A Geometria é um campo de estudo indispensável desde os anos iniciais da educação básica, diante do papel fundamental que esta assume na formação do ser humano. Entretanto, estudos e pesquisas apontam para uma defasagem no seu ensino-aprendizagem frente as problemáticas e dificuldades encontradas na condução destes processos. Os materiais didáticos assumem uma função fundamental para o contexto educacional. É um dos meios mais utilizados pelo educador na condução das suas práticas pedagógicas, por se apresentar como um agente facilitador. Porém, compreendendo que o estudo da geometria possui um forte apelo visual e que os alunos possuem dificuldades de compreender conceitos abstratos e aplicações que envolvem o seu estudo, os recursos tradicionais difundidos em sala de aula se tornam limitantes e não conseguem apresentá-la de forma eficiente e completa. Com o advento das tecnologias digitais de informação e comunicação, surgiram os *softwares* de geometria dinâmica, que sendo acessível por meio de diferentes suportes tecnológicos, podem ser compreendidos como ambientes de geometria dinâmica. Estes se apresentam como eficientes ferramentas que permitem uma abordagem eficaz da Geometria. Compreendendo o papel importante que os materiais didáticos possuem para o contexto educacional e as possibilidades advindas de um ambiente de geometria dinâmica, esta pesquisa se propôs a conjecturar as possibilidades e potencialidades da criação e utilização de materiais didáticos dinâmicos digitais por meio do GeoGebra, com o intuito de apresentar caminhos para o ensino-aprendizagem da geometria, realizando um recorte com o estudo de Figuras Geométricas Planas para os anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, nos apropriamos dos fundamentos teóricos da Abordagem Instrumental, a fim de compreender os processos que propiciam a obtenção de instrumentos por meio destes materiais dinâmicos. Apontamos que os materiais didáticos concebidos por meio do dinamismo digital se apresentam como instrumentos que o educador pode dispor, sendo capazes de contribuir na condução de suas práticas pedagógicas, por propiciarem uma abordagem do estudo da Geometria de forma dinâmica, atrativa e experimental-reflexiva.

Palavras-chave: Geometria Dinâmica; Abordagem Instrumental; Matemática; Figuras Geométricas Planas; GeoGebra; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Geometry is an indispensable field of study since the early years of basic education, given the fundamental role it assumes in the formation of the human being. However, studies and research point to a gap in their teaching-learning in view of the problems and difficulties encountered in conducting these processes. Didactic materials play a fundamental role in the educational context. It is one of the most used means by educators in conducting their pedagogical practices, as it presents itself as a facilitating agent. However, understanding that the study of Geometry has a strong visual appeal and that students have difficulties in understanding abstract concepts and applications that involve their study, the traditional resources disseminated in the classroom become limiting and cannot present it in a clear way efficient and complete. With the advent of digital information and communication technologies, dynamic geometry software emerged, which, being accessible through different technological supports, can be understood as dynamic geometry environments. These are presented as efficient tools that allow an efficient approach to geometry. Understanding the important role that didactic materials have in the educational context and the possibilities arising from a dynamic geometry environment, this research proposed to conjecture the possibilities and potentialities of creating and using digital dynamic didactic materials through GeoGebra, with the aim of in order to present paths for the teaching-learning of Geometry, making a cut with the study of Flat Geometric Figures for the final years of elementary school. For this, we appropriated the theoretical foundations of the Instrumental Approach, in order to understand the processes that propitiate the obtaining of instruments through these dynamic materials. We point out that the didactic materials conceived through digital dynamism are presented as instruments that the educator can dispose of, being able to contribute in the conduction of their pedagogical practices, by providing an approach to the study of Geometry in a dynamic, attractive and experimental-reflective way.

Keywords: Dynamic Geometry; Instrumental Approach; Mathematics; Flat Geometric Figures; GeoGebra; Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACM	A Conquista da Matemática
AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GD	Geometria Dinâmica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MD	Material Didático
MDI	Material Dinâmico
SAI	Situações de Atividades Instrumentais
TD	Tecnologias Digitais
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TSM	Teláris

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é uma área de estudo indispensável para o pleno desenvolvimento cognitivo do ser humano. Esta possibilita a formação do seu raciocínio lógico e visual, permite uma melhor compreensão de outras áreas do conhecimento e o capacita a compreender o mundo. O seu estudo permite o desenvolvimento da memória visual, da síntese gráfica, do raciocínio abstrato e espacial, o senso de proporção e escala, a viso-motricidade e a coordenação motora; habilidades que não são alcançadas comumente por meio do estudo de outras áreas (GARDNER, 1994 apud LOPES et al, 2018; LORENZATO, 1995; PIASESKI, 2010).

Entendendo que além da aprendizagem cognitiva o ensino geométrico é necessário para a plena formação humana, compreende-se a importância de sua abordagem desde os anos iniciais da educação básica. Porém, algumas problemáticas são constatadas na efetivação do estudo da geometria, como demonstrado nas avaliações (ALMOULOUD e MELLO, 2000; LORENZATO, 1995) que evidenciam a existência de um baixo desempenho dos alunos em matemática, e especificamente nos conteúdos de geometria, no qual o desempenho apresentado é ainda mais raso. Pesquisadores como Lorenzato (1995), Almouloud (2000), Peres (1991) e Pavanelo (1993), afirmam e comprovam o enjeitamento que vem sofrendo a geometria em comparação a outros eixos da matemática.

Grande parte dessas dificuldades se dá pelas lacunas presentes na formação do professor que irá ensiná-la. Lorenzato enfatiza isso ao dizer que "muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas." (LORENZATO, 1995, p. 3). Muitos a evitam por insegurança, por afirmarem falta de interesse por parte dos alunos – que dão preferência a outras partes da Matemática –, por não dar tempo e até mesmo por não saberem ensiná-la (ibid.). Como bem afirmou Lima e Mathias (2018), a geometria é um dos ramos da Matemática que possui uma grande necessidade do visual, sendo muitas vezes difícil a representação e a constatação de algumas propriedades utilizando tecnologias tradicionais, como é o caso do quadro e do piloto. Além disso, essas problemáticas derivam muitas vezes da carência de apropriação de recursos que apresentem a geometria de forma mais atrativa, dinâmica e completa.

Um dos desafios do processo de ensino e aprendizagem da Matemática é a inserção de recursos inovadores que auxiliem na prática pedagógica do professor; a apropriação da tecnologia, porém, é um dos caminhos possíveis (ABAR e ALENCAR, 2013). A ascensão das tecnologias digitais vem permitindo grandes possibilidades para o ensino/aprendizagem. Diversos estudiosos vêm se debruçando em pesquisas sobre a sua inserção na educação, reconhecendo a sua importância e suas potencialidades dentro do ambiente escolar. Salazar (2009), atesta isso quando afirma que

> [...] os ambientes computacionais no ensino podem servir de auxílio ao processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, na medida em que possibilitam trabalhar de maneira interativa, visual e dinâmica, além de permitir testar hipóteses e construir conjecturas e propiciar o uso de metodologias diferentes das tradicionais. (SALAZAR, 2009, p. 20).

Já na década de 90, Valente (1993), abordando o tema do advento do computador, enfatiza que a sua introdução na educação tem instigado uma revolução no entendimento sobre o ensino-aprendizagem. Fato verificado por meio da observação de que o computador pode ser utilizado para o ato de ensinar, proporcionando tipos diferentes de abordagens do ensino, destacando a gama de possibilidades e utilidades do seu uso; fatores que demonstram que a tecnologia pode ser uma grande aliada para o processo de ensino e aprendizagem. Um outro fator de contribuição atestado é a veracidade do computador ter provocado um repensar das práticas e métodos de ensino utilizados.

Entretanto, o que se tem visto é uma resistência por parte dos envolvidos no processo educacional no reconhecimento e adesão destas tecnologias digitais em suas práticas pedagógicas, preferindo que sua condução permaneça ocorrendo através de instrumentos e métodos ultrapassados para a atual sociedade que se encontra imersa na cultura digital (LIMA e MATHIAS, 2018; VALENTE, 2018). Por outro lado, os próprios documentos oficiais da educação brasileira, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN), já reconhecem a importância e viabilidade do uso de tecnologias digitais na educação ao serem trazidas como uma possibilidade de contribuição para o desenvolvimento das habilidades e conteúdos estabelecidos. Leis foram alteradas e revogadas com o intuito de se adaptarem às novas tendências e possibilidades de ensino a partir do advento destas tecnologias, como é o caso do Decreto n° 7.084/2010, que foi substituído pelo atual Decreto nº 9.099, de 2017[1].

A Base, nas competências voltadas para a área da matemática, por exemplo, traz a utilização de tecnologias digitais como ferramentas que devem ser empregadas na condução do seu estudo. Uma de suas afirmativas atesta que recursos didáticos, incluindo *softwares* de geometria dinâmica, possuem um papel fundamental para a cognição das noções matemáticas. Estes recursos didáticos, como certificado por pesquisadores (LORENZATO, 2021; MELO e GALVÃO, 2019; PAIS, 2000), se apresentam como ferramentas facilitadoras do processo de ensino-aprendizagem, podendo desempenhar diversas funções, sendo uma interface facilitadora da relação entre o professor, o aluno e o conhecimento.

Um dos frutos da evolução da tecnologia foi o desenvolvimento de *softwares* educacionais. Dentre eles, especificamente para o estudo da geometria, surgiram os *softwares* de Geometria Dinâmica que possibilitam a exploração de fundamentos, propriedades e conceitos geométricos a partir do dinamismo. O GeoGebra é um exemplo de *software* que, por ser acessível por diferentes suportes tecnológicos (computador, *tablet*, *smartphone* e etc.), pode ser visto como um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD).

Dentro da perspectiva de vantagens do uso de materiais didáticos no contexto educacional e das vantagens da geometria dinâmica, nossa pesquisa visa problematizar se a criação e utilização de materiais didáticos produzidos no GeoGebra, podem servir como instrumentos dinâmicos digitais facilitadores do processo de ensino e aprendizagem do estudo das Figuras Geométricas Planas. Nosso objetivo principal é identificar, por meio destes materiais, caminhos que podem propiciar ao processo que envolve o ensinar e o aprender a geometria, uma forma didática, interativa e experimental-reflexiva. Dentro dessa perspectiva, queremos frisar a importância desta área do conhecimento para a formação humana; instigar uma reflexão sobre as práticas pedagógicas do educador; proporcionar uma melhor percepção das vantagens de utilização das tecnologias digitais diante da atual cultura digital; destacar as vantagens de abordagem do estudo da geometria por meio da Geometria Dinâmica; e conjecturar a relevância da criação e utilização de materiais dinâmicos, a fim de incentivar a integralização destes no contexto educacional.

[1] O Decreto nº 9.099, de 2017 dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/decreto/d9099.htm>.

Alguns fatores pessoais tiveram influência determinante para querermos estudar sobre a temática aqui apresentada. As experiências vivenciadas durante o curso de Licenciatura em Expressão Gráfica – especificamente falando sobre o uso do GeoGebra nas disciplinas – desabrochou um olhar especial sobre o AGD, quanto as suas potencialidades e contribuições para o processo educacional, envolto no ensino da Geometria. Outro fator determinante se refere às vivências obtidas, em campo, nos estágios curriculares realizados no Colégio de Aplicação (CAp) da UFPE, com a observação da ativa apropriação do GeoGebra pelo professor/supervisor nas aulas; especificamente na sua produção de materiais didáticos, com o intuito de auxiliar nos processos em que este estava envolvido. E, para não nos prolongarmos, citamos por último as contribuições advindas de nossa participação na disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional III ofertada pelo Departamento de Expressão Gráfica, em que, por proposta da professora, elaboramos uma série de materiais de estudo desenvolvidos no GeoGebra para auxiliar no aprendizado das superfícies de revolução por parte dos alunos da disciplina em questão. Esses fatores nos levaram a uma reflexão acerca das grandes potencialidades do uso do GeoGebra na criação de materiais didáticos para o ensino da Geometria.

Acreditamos na relevância – sendo evidente a carência de recursos, a defasagem e dificuldades que existem no processo de ensino-aprendizagem da Geometria – de explorar meios que possam auxiliar nas problemáticas apresentadas, pretendendo incentivar a percepção das possibilidades e potencialidades de criação e utilização dos materiais didáticos dinâmicos digitais por parte daqueles que estão envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, os motivando a querer buscar recursos inovadores que os auxiliem nas suas práticas pedagógicas, e a buscar formas de facilitar o estudo da Geometria, o tornando mais efetivo, completo e didático para seus aprendizes.

Para o desenvolvimento dos objetivos desta pesquisa, nosso trabalho está organizado em três etapas principais. Inicialmente, para constituição de nosso referencial, realizamos uma revisão bibliográfica de estudos e pesquisas que correspondiam a problematização de nossa pesquisa e que nos permitiu identificar possibilidades para o seu enfrentamento, tendo o nosso embasamento teórico alicerçado na teoria de Rabardel (1995; 2002) sobre as relações e processos envolvidos na concepção e utilização de um instrumento. Na segunda etapa, objetivando a delimitação de nosso objeto teórico de estudo e da delimitação da etapa da educação básica, realizamos uma análise documental da Base Nacional Comum Curricular e de duas coleções de livros didáticos propostos para os anos finais do ensino fundamental. E, na etapa final, desenvolvemos uma análise de materiais dinâmicos produzidos por meio do ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra, buscando encontrar respostas para as hipóteses levantadas nesta pesquisa.

No capítulo a seguir deste trabalho, apresentamos a construção do nosso referencial teórico problematizando o ensino e a aprendizagem da Geometria; refletindo sobre a imersão da tecnologia na sociedade e sua relação com a educação; identificando possibilidades no enfrentamento das dificuldades apresentadas através da perspectiva da utilização de materiais didáticos e das vantagens de conduzir o ensino da geometria através da Geometria Dinâmica, apresentando o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra; e discutindo sobre a teoria da Abordagem Instrumental.

No terceiro capítulo, onde delimitamos o nosso objeto teórico em estudo, apresentamos a sondagem realizada sobre a BNCC, destacando sua abordagem sobre o ensino da geometria e da utilização de tecnologias digitais; e as mesmas especificidades na análise das duas coleções de livros didáticos propostos para os anos finais do ensino fundamental da educação básica. No quarto capítulo relatamos sobre os aspectos de nossa pesquisa, descrevendo a sua metodologia e os procedimentos metodológicos utilizados para o seu desenvolvimento.

No quinto capítulo, descrevemos sobre a produção e análise dos materiais didáticos dinâmicos digitais com base no referencial teórico e nas análises e apontamentos realizados nas etapas anteriores da pesquisa, a fim de identificar as vantagens e potencialidades de seu uso no contexto educacional. E concluímos nosso trabalho com as considerações finais, trazendo apontamentos sobre os objetivos alcançados em nossa pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste primeiro capítulo, buscamos apresentar o nosso referencial teórico que nos permitiu construir a base de nossa pesquisa. Sua constituição se subdividiu em três principais momentos. No primeiro, problematizamos a nossa pesquisa, relatando sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria, destacando sua importância e as dificuldades e problemáticas encontradas para sua abordagem no contexto educacional contemporâneo, e também buscamos discutir sobre as repercussões da imersão da tecnologia na sociedade e o papel da educação frente a esta realidade.

No segundo momento, objetivando a busca de possibilidades de enfrentamento das problemáticas apresentadas, nos debruçamos sobre os materiais didáticos, analisando o que estudiosos apontaram sobre sua relação com o processo educacional e sobre sua utilização em sala de aula. Diante das possibilidades que se apresentam na variedade de tipos de materiais didáticos, apresentamos a Geometria Dinâmica e os *softwares* como ferramentas capazes de propiciar a possibilidade de criar materiais didáticos com características particulares que podem atender as prerrogativas do estudo da Geometria para o aluno da era tecnológica.

A fim de mensurar a viabilidade da apropriação da geometria dinâmica por parte dos educadores em suas práticas pedagógicas na criação de materiais didáticos que sejam dinâmicos, no terceiro momento estudamos sobre a teoria da Abordagem Instrumental, buscando entender como seus processos podem dar base para a criação de instrumentos pedagógicos eficazes.

2.1 PROBLEMATIZANDO A PESQUISA

2.1.1 O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

Como falado anteriormente, nesta seção vislumbraremos, sucintamente, sobre a sua importância no contexto educacional e social do ser humano, e apresentaremos algumas problemáticas e dificuldades apontadas por estudiosos e pesquisadores no estudo deste campo. Além disso, refletiremos também sobre o papel da tecnologia e sua relação com a educação.

2.1.1.1 Sua Importância

A Geometria se apresenta como um importante campo de estudo indispensável ao ser humano. Podemos constatar isso pela perspectiva de que ela está presente na vida cotidiana da sociedade, sendo perceptível a utilização de conhecimentos geométricos nos deveres do dia a dia. Por colaborar na compreensão do mundo, por desenvolver o raciocínio lógico e proporcionar um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento na compreensão e resolução de problemas, seu estudo é imprescindível para o desenvolvimento do ser humano, diante da vasta importância que a geometria assume para o seu cotidiano (LORENZATO, 1995; PIASESKI, 2010). Além disso, podemos apontar que ela é capaz de

> desenvolver habilidades cognitivas, que não são usualmente desenvolvidas através do estudo de outras matérias. Dentre essas habilidades estão o raciocínio abstrato e espacial, a coordenação motora, a síntese gráfica, o senso de proporção e escala, a memória visual, a viso-motricidade e a criatividade (GARDNER, 1994 apud LOPES; CARNEIRO-DA-CUNHA; GUSMÃO, 2018).

Entendendo que os fatores expostos são essenciais para o pleno desenvolvimento do indivíduo de forma geral, e compreendendo que a escola é o primeiro ente formativo deste indivíduo, podemos inferir, com segurança, que o estudo da Geometria desde os anos iniciais da educação básica é algo indispensável.

Lorenzato, para justificar a necessidade da abordagem da Geometria na escola, afirma que bastaria o argumento de que sua ausência ocasiona o não desenvolvimento do pensar geométrico ou do raciocínio visual pelas pessoas; habilidades que são essenciais para a resolução de situações do cotidiano que forem geometrizadas. Ele ainda enfatiza que "sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida, e a visão da Matemática torna-se distorcida." (LORENZATO, 1995, p. 5).

A percepção espacial – desenvolvida pela aprendizagem geométrica – é uma habilidade necessária aos alunos para se ter um pleno desenvolvimento diante das situações escolares, não só na Matemática, mas também na Leitura e na Escrita. Dentro do ambiente escolar, a "Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar." (LORENZATO, 1995, p. 6); através dela é possível ter maior clareza sobre situações abstratas tornando acessível o entendimento de ideias matemáticas.

A geometria ainda é um eficaz suporte na interpretação e compreensão de outras disciplinas (ibid.).

Fainguelernt (1995, apud PIASESKI, 2010) também concorda que o estudo da geometria é essencial para o pleno desenvolvimento do pensamento espacial e para ativação do raciocínio gerado pelo exercício da visualização, os quais são conquistados por meio da intuição, percepção e representação, habilidades indispensáveis para se obter uma eficaz leitura de mundo e para evitar uma distorção da visão matemática. Ele enfatiza que a Geometria é capaz de oferecer

> [...] um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de absorção e generalização. A Geometria também ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência (FAINGUELERNT, 1995, apud PIASESKI, 2010, p. 17).

O ensino matemático e especificamente geométrico, como percebido, vai muito além da aprendizagem cognitiva, são construções necessárias para a plena formação humana. Porém, com base nas pesquisas e avaliações realizadas, há um baixo desempenho dos alunos no estudo da Matemática. E quando se avalia o estudo dos conteúdos da Geometria, há ainda uma maior defasagem, o que evidencia a existência de problemáticas no seu ensino-aprendizagem.

2.1.1.2 Dificuldades e Problemáticas

Na década de 90, Pavanello (1993) trouxe importantes reflexões sobre as causas e consequências do que ela chamou de “abandono do ensino da geometria no Brasil”, algo verificado nas últimas décadas, mas que ela afirmava ser um fenômeno mundial. Um de seus apontamentos se refere às consequências da Lei 5692/71 que foi promulgada.

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo

> para sua abordagem em sala de aula - talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p. 7).

Ela ainda faz alguns questionamentos acerca do valor que sempre foi defendido em relação ao estudo da Geometria nos séculos passados, o qual era tido como algo indispensável à formação intelectual e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio dos indivíduos. Ela questiona então, dessa perspectiva, se a ausência do seu estudo não acarretaria prejuízos à formação desse indivíduo. Em seu estudo, ela se debruça em responder ao questionamento do seu abandono, fazendo uma análise do desenvolvimento do ensino da Matemática e da Geometria no Brasil, considerando as modificações sócio-político-econômicas.

As contribuições de Pavanello inclusive são citadas por Lorenzato em seu estudo que questiona o porquê de a Geometria não ser estudada. Ele destaca dois motivos principais da sua omissão. O primeiro se refere ao fato de muitos professores não possuírem os conhecimentos geométricos que são necessários para a efetiva realização de suas práticas pedagógicas; e assim, portanto, por não conhecerem a Geometria "[...] também não [conhecem] o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la." (LORENZATO, 1995, p. 3 e 4).

O segundo motivo apontado se refere ao papel exageradamente importante que é dado ao livro didático. Ele diz que estes a apresentam "apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico." (LORENZATO, 1995, p. 4). Ele ainda enfatiza que sua abordagem sempre é apresentada na última parte desses livros – o que aumenta a probabilidade de a Geometria não vir a ser estudada – e muitas vezes é desligada de uma integração com outras áreas do conhecimento e até mesmo com a própria matemática. Assim, "[...] a Geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, têm recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula." (ibid., p. 4).

O resultado disso pode ser visto no baixo desempenho dos estudantes do Ensino Fundamental, como demonstrado nas avaliações realizadas pelo SAEB/MEC, em matemática, e principalmente nos conteúdos referentes à geometria, o que desencadeou em um dos reais problemas do sistema brasileiro de ensino. O que ocorre na prática é a falta de dedicação no ensino da geometria em comparação aos outros temas. Os próprios professores admitem, como um dos problemas de ensino-aprendizagem, a sua abordagem (ALMOULOUD e MELLO, 2000).

Almouloud e Mello destacam alguns fatores principais para o baixo desempenho em Geometria:

> - grande parte dos professores que hoje estão em atividade receberam uma formação de base muito precária em Geometria, devido à própria influência que o movimento da Matemática Moderna desempenhou em nossos currículos nas décadas de 60/70;
> - os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura – continuam não dando conta de discutir com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria;
> - também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido, igualmente, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria (ALMOULOUD e MELLO, 2000, p. 1 e 2).

Eles ainda relatam que mesmo que haja uma movimentação por meio dos novos currículos, de salientar a importância do resgate do ensino da Geometria no Ensino Fundamental, os professores não possuem clareza quanto ao que devem fazer.

Como observado, há um movimento por meio de estudiosos e pesquisadores para comprovar, discutir e identificar essas problemáticas que demonstram a preocupação de serem encontrados caminhos e alternativas para mudar a lamentável realidade do ensino geométrico no Brasil. Portanto, sabendo que “um dos problemas que favorecem o fraco desempenho de alguns alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas, é [...] a prática e as escolhas didáticas dos professores quando ensinam a geometria” (ALMOULOUD e MELLO, 2000, p. 8), é evidente a necessidade de identificar possibilidades e recursos didáticos existentes que possam contribuir para a efetiva mudança desta realidade.

2.1.2 A Tecnologia e a Educação

O fenômeno da tecnologia vem sendo instaurado em diversos setores constituintes da sociedade. As chamadas TIC, Tecnologias de Informação e Comunicação, estão moldando a maneira como as pessoas desenvolvem suas atividades cotidianas, e como elas se comunicam e se relacionam entre si. Acopladas a internet, sua difusão se tornou ainda mais significativa. Segundo Valente (2018, p. 21) as mídias e as tecnologias digitais estão transformando “[...] o modo como as pessoas pensam, resolvem problemas, acessam a informação e se relacionam socialmente.” Diante disso, vale nos questionarmos: será que a educação reconhece suas potencialidades e a tem instaurado em suas práticas educacionais? Valente (1999) afirma que “as mudanças que ocorrem na educação são lentas e quase que imperceptíveis" (ibid., p. 29), o que demonstra que ainda não se tem dado considerável importância aos recursos tecnológicos disponíveis, a fim de serem integrados às práticas pedagógicas.

Bittar (2006; 2010 apud BITTAR, 2011) afirma que a tecnologia pode ser integrada à prática pedagógica como uma poderosa ferramenta capaz de auxiliar na compreensão do raciocínio do aluno e de suas dificuldades, se apresentando também como um instrumento eficaz na elaboração de atividades que enriquecem a aprendizagem. Entretanto, exemplificando o que disse Valente, ela aponta que essas possibilidades não estão presentes na sala de aula, e que as aulas permanecem sendo conduzidas sem o auxílio da tecnologia. Ela ainda relata que até mesmo aqueles professores que obtiveram uma formação em cursos específicos sobre o uso de tecnologia, não a incorporam em suas práticas pedagógicas (BITTAR, 2011).

Outra questão que devemos levar em consideração é as novas características destes alunos que já nasceram imersos na era tecnológica. Sobre isso, Valente, em um de seus estudos mais recentes, enfatiza que

> [...] o aluno já não é mais o mesmo e não atua como antes. Ele não lê mais em material impresso e prefere ler nas telas. Quando solicitado a fazer uma pesquisa, provavelmente vai utilizar um sistema de busca como o Google ou os sistemas de acesso às bases de dados digitais; a biblioteca tem outra função. Tem muita facilidade para entrar em contato com as redes sociais ou com redes de especialistas e encontrar alguém que possa ajudá-lo a resolver problemas. Prefere os tutoriais online ou os vídeos no YouTube para entender como as coisas funcionam. Esse aluno certamente terá muita dificuldade para assistir a aulas expositivas por mais de 30 minutos (VALENTE, 2018, p. 17).

Ele ainda é enfático em dizer que o próprio aluno tem buscado meios alternativos – em relação aos processos de ensino – que sejam mais atrativos e lúdicos para facilitar o seu aprendizado, quando diz que

> Em geral, acessa seu *tablet* ou *smartphone* podendo, inclusive, encontrar informação que complementa o que o professor está discutindo. Sua atenção não está mais no professor, mas em algo que está relacionado com o seu

> interesse. Nesse contexto, a aula expositiva deixou de ser importante, uma vez que o aluno consegue acessar essa mesma informação de modo mais interessante e, inclusive, com mais detalhes, incluindo o uso de recursos visuais, que facilitam a sua compreensão (VALENTE, 2018, p. 17).

Ele então questiona sobre o que as instituições de ensino em plena era digital têm proporcionado aos seus estudantes. O mesmo responde que nada diferente ou inovador tem sido feito, e que ainda é oferecido uma educação tradicional, que é baseada nas informações que o professor transmite e em um currículo que foi concebido para a era do lápis e do papel. É enfatizado ainda que a questão não envolve necessariamente a alteração dos conteúdos disciplinares, mas a maneira que eles devem ser trabalhados, que a sala de aula possua uma dinâmica congruente com as nossas ações do cotidiano, que progressivamente vêm sendo mediadas pelas tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) (VALENTE, 2018).

Perrenoud (2000 apud ALENCAR, 2012) enfatiza que as transformações que ocorrem no mundo não podem ser ignoradas pela escola, especialmente às do âmbito tecnológico. Ele diz que “elas transformam de forma espetacular não somente nossa maneira de nos comunicarmos, mas também de trabalhar, decidir e pensar.” (ibid., p. 7). Visivelmente são poucas as mudanças na sala de aula, e os benefícios que a cultura digital proporciona ainda não foram usufruídos por ela. Assim, “[...] pode-se dizer que a sala de aula está completamente fora de sintonia com o resto da sociedade, especialmente em relação aos seus alunos.” (VALENTE, 2018, p. 20). Esses apontamentos feitos são valiosos para o estudo que queremos apresentar.

Um dos motivadores para a ausência de apropriação das novas tecnologias pela educação é a resistência e as dificuldades encontradas pelos profissionais da área em reconhecer as possibilidades de adesão dos recursos em suas práticas cotidianas. Este fator é explicitado por Santos et al (2018, p. 45) ao dizer que “Um indicativo dessa problemática reside no fato de ser comum encontrar professores despreparados, desmotivados e sem interesse em aprender sobre as tecnologias ou técnicas de aprendizagem para melhorar sua didática.” O que podemos observar nas instituições educacionais é

> [...] um número razoável de professores que estão experimentando estas novas metodologias [...]. O que predomina, no entanto, é uma certa acomodação, repetindo fórmulas com embalagens mais atraentes, esperando receitas, num mundo que exige criatividade e capacidade de enfrentar desafios complexos. Há também um bom número de docentes e gestores que não querem mudar, que se sentem desvalorizados com a perda

> do papel central como transmissores de informação e que pensam que as metodologias ativas deixam o professor em um plano secundário e que as tecnologias podem tomar o seu lugar (MORAN, 2015 apud SANTOS, ALVES e MAGALHÃES PORTO, 2018, p. 46).

Em contraste, o que podemos observar por parte dos alunos é sua inevitável inserção na sociedade globalizada, a qual os bombardeiam diariamente com diversas informações advindas de diferentes meios. Desta forma, o aluno sente a necessidade de relacionar o que é aprendido em sala de aula com o mundo transmitido a ele, através das TIC. Assim conseguimos entender a desmotivação deste novo alunado frente às metodologias tradicionais ainda adotadas pelas práticas educacionais. Percebemos mais uma vez a importância da inserção das tecnologias em sala de aula, como uma estratégia de aproximar o aluno da realidade. A tecnologia precisa ser entendida como um instrumento que promove diferentes possibilidades na formação de pessoas capacitadas para conviverem e comunicarem entre si em um mundo interativo; precisa ser vista como um suporte mediador entre o aluno e o mundo, pelo meio do qual ele poderá se apropriar de um saber e construir o conhecimento (SANTOS et al, 2018, p. 46).

Falando sobre a incorporação da tecnologia como instrumento para o ensino-aprendizagem, Bittar (2011) apresenta uma distinção entre ela ser inserida e ser integrada pelo professor na sua prática pedagógica. Inseri-la, denota a utilização desse instrumento sem que haja uma provocação de aprendizagem por parte dele, sendo utilizado em situações que não estão conectadas ao trabalho em sala de aula. Nesse caso, a tecnologia é utilizada como um instrumento complementar, aditivo, que não concerne com as práticas do professor.

Integrá-la, no entanto, é tê-la como um instrumento pertencente ao conjunto de mecanismos que o professor dispõe para que seus objetivos pedagógicos sejam atingidos.

> Implica em fazer uso do instrumento de forma que este contribua com o processo de aprendizagem do aluno, que lhe permita compreender, ter acesso, explorar diferentes aspectos do saber em cena. Assim como o material dourado e o ábaco permitem explorar diferentes características do sistema de numeração decimal (por isso mesmo devem ser usados simultaneamente no ensino deste conteúdo), a tecnologia deve ser usada com fins de permitir ao aluno ter acesso a propriedades ou a aspectos de um conceito; ou ainda a atividades matemáticas diferentes daquelas habitualmente tratadas no ambiente papel e lápis (BITTAR, 2011, p. 159).

Um dos instrumentos tradicionais bastante utilizado nas práticas escolares é o livro didático. Estes foram difundidos, condicionando os processos educacionais a sua utilização e até mesmo sendo conduzidos através deles. Porém, diante das inovações tecnológicas digitais emergentes, e das características do novo alunado moderno, vale nos questionarmos se eles ainda podem exercer papel fundamental e pleno nos processos que envolvem o ensinar e o aprender.

Assim como dito por outros autores, Valente afirma que “a sala de aula deve ter uma dinâmica coerente com as ações que desenvolvemos no dia-a-dia, cada vez mais mediadas pelas tecnologias digitais de informação e comunicação.” (VALENTE, 2018, p. 19). Diante do que aqui foi exposto, é evidente a necessidade de integração de práticas inovadoras no processo de ensino-aprendizagem, especificamente da Geometria.

2.2 IDENTIFICANDO CAMINHOS

2.2.1 Os Materiais Didáticos

Em conformidade com as pesquisas apontadas sobre as dificuldades que os alunos enfrentam na tentativa de compreender os conteúdos que são vistos na sala de aula, ao se referir ao estudo da Geometria, Guillen (2013) destaca que

> [...] tanto no ensino fundamental como no ensino médio, os alunos possuem dificuldades de entender os conceitos e aplicações que envolvem os conteúdos estudados. Desde as séries iniciais os professores geralmente trabalham com as figuras e objetos planos. As figuras mais conhecidas e geralmente trabalhadas em sala de aula são: o quadrado, o círculo e o triângulo, no entanto esses são conceitos abstratos para o aluno (GUILLEN, 2013 apud MELO e GALVÃO, 2019, p. 163 e 164).

Convém, portanto, que o professor busque meios e métodos de intermediar esses conceitos, objetivando a interligação entre a teoria e a prática, para que os próprios alunos, de forma individualizada, desenvolvam as suas capacidades e seus saberes, partindo de um aluno passivo para um aluno ativo (MELO e GALVÃO, 2019). Lorenzato (2021, p. 8 e 9) afirma que diversos educadores famosos “ressaltaram a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitador para a aprendizagem” destacando a importância da experiência, do se aprender fazendo, o uso de imagens para clarear verdades matemáticas, o uso de diferentes sentidos para a construção do conhecimento, demonstrando que eles reconhecem, a seu modo, que a ação do indivíduo sobre o objeto é algo essencial para a aprendizagem. Desta forma, ele salienta que durante a prática pedagógica é possível compreender “o papel fundamental que o material didático pode desempenhar na aprendizagem” (ibid.). Estes se apresentam como recursos eficientes ao serem integrados às práticas pedagógicas, tendo em vista as necessidades apontadas.

Os materiais, modelos e recursos didáticos sempre se mostraram como ferramentas facilitadoras do processo de ensino e aprendizagem. Trazendo uma definição geral, Lorenzato afirma que o material didático é “qualquer instrumento útil ao processo de ensino aprendizagem” (LORENZATO, 2021, p. 23). Ele relata que os materiais didáticos podem desempenhar diversas funções, de acordo com os seus objetivos, e para isso, o professor deve se perguntar para qual finalidade pretende utilizá-los. Em consonância, Pais (2000, p. 2) afirma que a finalidade dos materiais didáticos é “servir de interface mediadora para facilitar na relação entre professor, aluno e o conhecimento em um momento preciso da elaboração do saber.” Melo e Galvão afirmam que eles “[...] representam uma visão simplificada de uma ideia, objeto, evento, processo ou sistema que se constitua em objeto de estudo, visando favorecer o processo de aprendizagem significativa por parte dos alunos.” (MELO e GALVÃO, 2019, p. 163).

Falando sobre Material Didático (MD), Lorenzato (2021) cita uma pesquisa – das que provaram a eficácia do ensino com o uso de MD – que foi realizada em diferentes escolas de Brasília, com cerca de 180 alunos de diferentes níveis socioeconômicos, com idades que variavam entre 11 e 12 anos, e que estavam cursando a 5ª série da educação básica, os quais possuíam condições semelhantes de conhecimento matemático, como apontado pelo pré-teste realizado. A porcentagem de crianças que consideravam a matemática uma disciplina difícil de aprender, foi de 70%. Um mesmo professor lecionou para duas turmas em cada escola, uma utilizando MD e outra sem MD. E os resultados revelaram que o grupo de alunos que haviam aprendido com o uso de MD, reagiram de forma bem mais positiva, independentemente do nível de questões, do que o grupo que havia sido ensinado sem MD. Ele afirma, portanto, que há argumentos plausíveis e favoráveis para que as escolas se apropriem destes recursos como facilitadores da aprendizagem.

Porém, se faz necessário apontarmos alguns eventuais problemas que podem surgir na utilização destes recursos materiais. Segundo Pais (2000), há a tendência de acontecer o que ele chama de “inversão didática”, quando o recurso didático é utilizado inadequadamente, fugindo de sua finalidade inicial pedagógica. Ele relata que isso ocorre quando “o material passa a ser utilizado como uma finalidade em si mesmo em vez de ser visto [como] um instrumento para a aquisição de um conhecimento específico.” (ibid., p. 5). Sobre esse fenômeno, ele diz que este “ocorre quando um instrumento pedagógico, idealizado para facilitar o processo de aprendizagem, passa a ser utilizado como se fosse o próprio objeto de estudo em si mesmo.” (ibid., p. 6). Essa inversão é resultado de uma série de questões, porém, a principal causa ainda é a problemática da formação dos professores, em que é atribuído ilusoriamente aos materiais a solução para o problema básico dessa formação precária (ibid.). Lorenzato também afirma que

> Por melhor que seja, o MD nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o MD não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor (LORENZATO, 2021, p. 25).

Ele ainda enfatiza que é necessário ter “[...] em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que isto efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno.” (LORENZATO, 2021, p. 28). O professor deve ser o mediador que irá garantir a construção desta união, tendo em mente que o “MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático” (ibid.), pois a sua eficiência dependerá da forma como o professor o utilizará, no momento da mediação. Deve-se levar em consideração “[...] a relação entre estes e os conceitos que se pretende ensinar, do que simplesmente o seu uso pelo uso.” (SOUZA NETO e SILVEIRA, 2016, p. 5 e 6).

Assim, Pais (2000) defende o equilíbrio entre a experiência e a razão no uso dos materiais didáticos no ensino da Geometria. O aprendizado partindo da manipulação e experimentação por parte do aluno se faz necessário – principalmente para o ensino da Geometria; porém, deve haver a íntima relação com o conhecimento geométrico. Ele alerta que

> [...] é preciso estar duplamente vigilante para que toda informação proveniente de uma manipulação esteja em sintonia com algum pressuposto

> racional e, ao mesmo tempo, que todo argumento dedutivo esteja associado a alguma dimensão experimental. Acreditamos que este é o primeiro passo para valorizar uma interpretação dialética para o uso dos materiais didáticos (PAIS, 2000, p. 13).

Podemos perceber uma infinidade de possibilidades e variedades na criação de materiais e modelos didáticos. Podemos encontrar os que se caracterizam como MD's analógicos ou digitais, e estáticos ou manipuláveis. Sobre os que são dinâmicos, Lorenzato diz que eles permitem "transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem." (LORENZATO, 2021, p. 24).

Com a evolução da tecnologia, especificamente da computacional, surgiu a possibilidade de criação de *softwares* educacionais que poderiam dispor de ferramentas que auxiliassem o processo de ensino e aprendizagem. Dentre eles, especialmente para a abordagem do ensino da Geometria, surgiram os *softwares* de Geometria Dinâmica (GD), que permitem a exploração de propriedades e conceitos geométricos com dinamismo sem que seja perdido suas especificações construtivas; além de também permitirem que sejam atendidas as necessidades representativas, visuais e didáticas que o seu ensino requer. Podemos encontrar uma forte relação entre os softwares de GD, e os materiais didáticos que se configuram como manipuláveis e dinâmicos.

2.2.2 A Geometria Dinâmica

Das várias tecnologias disponíveis, podemos considerar o uso do computador como sendo uma das mais difundidas na sociedade contemporânea. Este permitiu uma maior rapidez nos processos de diversos setores, ampliando possibilidades e facilitando a resolução e o desenvolvimento de diferentes problemáticas. Voltando os olhos para a educação, conseguimos perceber que essa tecnologia, partindo da quantidade de programas educacionais e diferentes modalidades de seu uso, "pode ser bastante útil no processo de ensino-aprendizagem." (VALENTE, 1993, p. 4).

Valente em seus estudos sobre o uso do computador, relata que este adquiriu a função de um meio educacional, instigando uma reflexão acerca da função da escola e do papel do professor. Considerando que o dever das instâncias educacionais não deve ser a de ensinar, mas de promover o aprendizado, ele afirma que "o professor deixa de ser o repassador do conhecimento – o computador pode fazer isto e o faz muito mais eficientemente do que o professor – para ser o criador de ambientes de aprendizado", e o facilitador do processo que levará o aluno a adquirir o conhecimento. Assim, "as novas tendências de uso do computador na educação mostram que ele pode ser um importante aliado neste processo [...]" (VALENTE, 1993, p. 5).

Partindo de nossas reflexões, entendemos que assim como nos materiais didáticos, também pode haver uma disfunção quanto ao uso do computador como ferramenta educacional. Em consonância com Valente, entendemos que os educadores precisam enxergá-lo como uma ferramenta que o aluno irá desenvolver algo, fazendo com que o aprendizado aconteça por estar sendo executado uma tarefa por intermédio do computador. A problemática que pode surgir é uma supervalorização do computador, ao ponto de achar que sua inserção nas práticas pedagógicas resolverá todos os problemas da educação, ou que ele seja o instrumento que irá ensinar o educando, o que na verdade foge de sua real função que é de uma ferramenta que o educador dispõe para construção do conhecimento. Como nos MD's, isto é proveniente da formação limitada destes professores quanto ao uso das tecnologias, ora vista como dispensáveis e irrelevantes, ora vista como solucionadoras dos problemas educacionais.

Uma das áreas da Matemática que pode se apropriar do uso do computador para o seu ensino é a Geometria. Essa afirmação se apoia na justificativa

> do importante papel desempenhado pelas representações de figuras planas e espaciais e pelas novas formas de manipulação oferecidas pelos ambientes de Geometria Dinâmica, além da manipulação direta das figuras na tela, o que possibilita sua exploração, mantendo as relações geométricas da construção, isto é, suas propriedades invariantes. Essa manipulação permite melhorar a visualização, além de possibilitar diferentes pontos de vista relacionados a uma mesma figura (SALAZAR, 2009, p. 48).

Ao longo da história da Geometria, conseguimos perceber como matemáticos sempre tiveram a necessidade de demonstrar propriedades e resolver problemas geométricos por meio do dinamismo. As figuras dinâmicas eram imaginadas e muitas vezes simuladas por meio de representações estáticas ou até mesmo representadas por meio de sistemas mecânicos ou de movimentos simulados, como é o caso do uso da Régua de Nicomede, a Máquina de d'Alembert e o Pantógrafo (BELLEMAIN e CORREIA, 2004; SILVA, 2017).

Segundo Bellemain (2001, p. 1315), a partir de 1986, com a evolução da informática e das necessidades dos usuários, diante da possibilidade de "manipulação direta que permite ao usuário ter a sensação de agir diretamente e livremente sobre a representação dos objetos e controlar imediatamente os efeitos dessa ação", surgiram os primeiros *softwares* de geometria dinâmica. Tendo ênfase na contribuição do aprendizado geométrico, o *Cabri-Géomètre* e o *Sketchpad*, foram os precursores que inauguraram a geometria dinâmica em computadores. É importante destacar que o diferencial de *softwares* considerados de geometria dinâmica, é justamente a dinamicidade na construção de objetos matemáticos que outros *softwares* não dispõem. Porém, precisamos entender que a GD não é algo exclusivo de *softwares*, pois, por exemplo, a identificação de relações entre retas através do uso de dobradura, pode ser considerado geometria dinâmica (HENRIQUE e BAIRRAL, 2019).

Mariotti, partindo da reflexão de seus experimentos sobre a utilização de *softwares* em sala de aula, afirma que "[...] o computador, e particularmente os [*softwares* didáticos] nos quais é possível propor atividades significativas, oferecem modos de fazer e de experimentar a matemática absolutamente impensáveis algumas décadas atrás." (MARIOTTI, 2019, p. 181). Diferente dos meios convencionais, a geometria dinâmica por meio de softwares, proporciona a possibilidade de manipulação dos objetos em estudo representados, a fim de serem percebidas suas características e propriedades, muitas vezes difíceis de serem vistas por meio de uma "geometria estática". Bellemain enfatiza que

> A ideia de figura dinâmica permite considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar as posições relativas dos objetos. Assim, as implementações da geometria dinâmica permitiram representar as especificações geométricas das figuras de tal modo que tornou-se possível atender a um conjunto de desenhos representativos de uma mesma figura seja pela especificação de suas propriedades seja pela manipulação direta (BELLEMAIN, 2001, p. 1315).

Em consonância com o que falou Bellemain, França (s.d, p. 4) afirma que as demonstrações geométricas por meio dos *softwares* de GD, potencializam "as investigações matemáticas" ao serem analisadas "as propriedades invariantes das construções", validando assim "os argumentos, experimentalmente, que descrevem tais propriedades ao arrastar os objetos na tela do computador sem perder os vínculos preestabelecidos."

Considerando que o estudo da Geometria se apresenta muitas vezes de forma abstrata para o aluno, “a proposta do uso de *softwares* de geometria dinâmica no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica”, habilidade fundamental para o seu estudo, que pode ser desenvolvida “à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.” (NASCIMENTO, 2012, p. 112).

Além disso, o uso de *softwares* adequados – nesse caso, o uso de *softwares* de GD para a aprendizagem da Geometria –, podem enriquecer os ambientes de aprendizagem em que o aluno adquire a oportunidade de construir seu conhecimento interagindo com os objetos desse ambiente. Estes *softwares*, a medida que apresentam “mecanismos que facilitam a simulação de fenômenos, [proporcionam] ao aluno formas especiais de exercitar sua percepção, simbolizar e atuar sobre o mundo, podendo permitir níveis diferenciados de representação simbólica.” (BOLGHERONI e SILVEIRA, 2007, p. 4). Outro motivador sobre o uso de *softwares* de GD, é que eles permitem “uma melhor interação no ato de construir e analisar um objeto matemático à medida que as construções [podem] ser realizadas a partir das propriedades que as definem.” (HENRIQUE e BARRIAL, 2019, p. 5).

Diante disto, fica evidente que os *softwares* de geometria dinâmica possibilitam suprir as limitações de abstração na representação e constatação de princípios e propriedades advindas do estudo da geometria através de figuras estáticas. Seu uso proporciona a exploração e demonstração dessas propriedades por meio da experimentação, com dinamismo e interatividade, se apresentando como um recurso didático que pode ser integrado como suporte para o ensino e aprendizagem da Geometria, além de trazer para a sala de aula as tecnologias disponíveis, com as quais o aluno contemporâneo está familiarizado. Bellemain relata que “a possibilidade de explorar modelos geométricos, e matemáticos em geral, seguindo intuições e tentativas na resolução de problemas, é particularmente relevante no contexto da aprendizagem.” (BELLEMAIN, 2001, p. 1322).

Os *softwares* de GD também permitem a construção de materiais didáticos, estes caracterizados como dinâmicos digitais, que podem abordar uma infinidade de conteúdos de diferentes formas, com ludicidade e interatividade, sendo moldados a partir das experiências e necessidades de cada educador. Entendemos, portanto, que o uso desses materiais dinâmicos (MDI)

> [...] nas aulas de geometria promove o debate entre os estudantes, troca de ideias, contribui para minimizar as diversas formas de abstração existentes na concepção do aprendente, proporciona a visualização das figuras geométricas, além de tornar as aulas de matemática dinâmicas, interativas, participativas. Permitem uma aproximação da matemática teórica com o fazer na prática, contribuem para esclarecer traços muitas vezes obscuros no desenho feito na lousa pelo professor (SOUZA NETO e SILVEIRA, 2016, p. 24).

Em linhas gerais, conseguimos perceber que diante da necessidade de recursos didáticos que atendam as especificidades do ensino da geometria gráfica, das possibilidades que os *softwares* de GD oferecem e da carência de apropriação das tecnologias pelos educadores, reconhecendo as características do novo alunado, os *softwares* de GD podem suprir essas lacunas a partir da perspectiva de que eles se apresentam como uma excepcional ferramenta na construção de MDI’s que podem se caracterizar como instrumentos eficazes para o ensino e aprendizagem da Geometria.

À medida que novos elementos foram sendo aderidos à informática, revelaram-se novas possibilidades e alternativas para a geometria dinâmica. O dinamismo dessas tecnologias permite sua ampliação além do teclado e do mouse do computador, para além dos *softwares* em si. Conseguimos enxergá-la, por exemplo, online e em dispositivos com tecnologia *touchscreen*, como *tablets* e *smartphones* que estão na palma da mão do usuário. Assim, diante disso, se mostrou adequado nos apropriarmos do termo “Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD)”, nomenclatura adotada por Henrique e Bairral (2019), considerada por eles – tendo em vista o que relatamos – como sendo mais apropriada.

Para além de reconhecer a utilização desses AGD no ensino da geometria, é preciso compreender a realidade escolar brasileira, na qual o uso do computador nem sempre se torna algo possível em sala de aula, levando em consideração que muitas escolas ao menos possuem uma sala de informática, dispondo de recursos que permitem a utilização dessas tecnologias. Porém, a possibilidade de serem utilizadas outras tecnologias que são mais acessíveis e difundidas em sala de aula, como os *smartphones*, nos conduz a direcionarmos nossa pesquisa de tal maneira que possa incorporar o uso de diferentes dispositivos tecnológicos.

Isso nos remete a mais uma problemática visível em sala de aula. Como salientou Santos et al (2018, p. 56), há um estigma predominante de inadequação ao ambiente escolar sobre a utilização de *smartphones*. Ele relata que a leitura das crianças e jovens é mais sensorial-visual do que racional e abstrata; eles “leem o que podem visualizar, e precisam ver para compreender”. Estes “leem nas diversas telas que utilizam: da TV, [...] do celular, do computador, dos games”. Assim, ele relata que há a necessidade de uma nova postura daqueles que estão envolvidos com o processo educacional, reconhecendo as possibilidades destes aparelhos que podem ser integrados às práticas pedagógicas, ultrapassando assim os limites metodológicos convencionais que estão baseados apenas na transmissão do conhecimento. Ele afirma que

> Nesse contexto, há de se considerar que a TV, o vídeo e o *smartphone* são as tecnologias de maior uso cotidiano pelos alunos, seja em casa, quando se trata da TV e do vídeo, ou nas mãos deles, no que refere ao *smartphone*. [...] Notebooks, *smartphones* e demais aparelhos, como também comportamentos e conversas pautadas em discursos midiáticos, integram a escola na mesma proporção em que esta tentou, até certo tempo, ignorar o contexto comunicativo das mídias, como se fosse uma realidade paralela (SANTOS, ALVES e MAGALHÃES PORTO, 2018, p. 56).

Deste modo, ele afirma que se deve esperar que a escola se reinvente, tornando essencial que o educador se aproprie das possibilidades oferecidas pela “presença das TDIC, a fim de que estas sejam sistematizadas em suas práticas pedagógicas” (SANTOS et al, p. 57). É necessário levar em consideração as características do novo alunado, pois

> [...] os estudantes, no século XXI, não aprendem da mesma forma que aqueles do século anterior. O uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, no contexto escolar, propicia diferentes possibilidades no que diz respeito a formar pessoas capazes de conviver e se comunicar num mundo interativo, como membro de uma cultura planetária. [...] Enfatiza-se, por fim, que a tecnologia não se reduz à utilização dos meios ou dos equipamentos, mas vai além destes para se tornar um suporte mediador entre o aluno e o mundo, um mecanismo por meio do qual o aluno se apropria de um saber e constrói o conhecimento (SANTOS, ALVES e MAGALHÃES PORTO, 2018, p. 59).

Desta forma, os AGD’s se apresentam como mais uma alternativa para o ensino e aprendizagem da geometria. Estes permitem a visualização de construções e permitem o manuseio de figuras e elementos, por meio do mouse ou do toque na tela (HENRIQUE e BAIRRAL, 2019). Além disso, Henrique e Bairral, ao trazerem apontamentos de outros estudiosos da área, relatam que

> as várias experimentações proporcionadas por um AGD, além de permitir uma visão mais ampla de um mesmo objeto matemático, podem contribuir para o processo de prova de uma conjectura, por dar ao usuário a possibilidade de explicar as conjecturas, a fim de identificar suas propriedades euclidianas. [...] Bairral (2015) apresenta alguns pontos positivos dos AGD com possibilidade de contribuição para a aprendizagem. Segundo o autor, a dinamicidade na visualização e verificação de propriedades em conjunto com a viabilidade de atividades investigativas permitem a descoberta relacionada a um determinado conceito (HENRIQUE e BAIRRAL, 2019, p. 9).

Tendo em vista as possíveis contribuições da utilização de AGD’s no contexto escolar, através da manipulação direta de materiais dinâmicos para o ensino da geometria, a fim de atender às especificidades de criação destes MDI's, permitindo o seu acesso através de diferentes ferramentas tecnológicas, como *smartphones* e *tablets*, que, como virmos anteriormente, são mais acessíveis para a comunidade escolar, nos apropriamos do GeoGebra, um ambiente de geometria dinâmica multiplataforma, gratuito, que atende nossas prerrogativas.

2.2.2.1 O GeoGebra

Desenvolvido em 2001 pelo Prof. Dr. Markus Hohenwarter, e atualmente pertencente à companhia Indiana Byju’s, o GeoGebra é um ambiente de geometria dinâmica gratuito, que integra Geometria, Álgebra e Estatística. Ele dispõe de vários recursos que compõem um único ambiente. Dentre diversas outras possibilidades, podemos destacar a capacidade de representação de construções provenientes do estudo da Geometria, com a possibilidade de manipulação de seus elementos, sem perder seus princípios elementares.

Ele se apresenta como uma multiplataforma possível de ser acessada de diferentes formas. Na versão desktop, acessível por meio do uso do computador, pode ser feito o *download* de seu aplicativo gratuitamente através do site oficial do GeoGebra[2]. Outra possibilidade é seu acesso através da própria plataforma online, que dispõe de diferentes aplicativos com recursos que podem ser acessados e utilizados, inclusive por diferentes dispositivos. Um deles é denominado por “GeoGebra Geometria”, que permite a exploração de ferramentas para construção gráfica do estudo da geometria. Além disso, no site conseguimos encontrar materiais educacionais que foram desenvolvidos e compartilhados por diferentes autores,

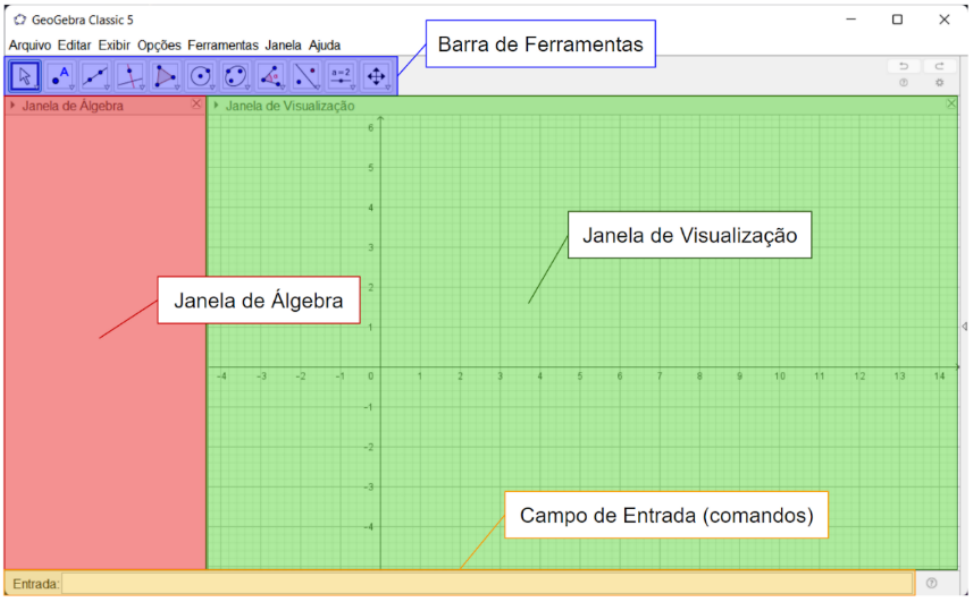
---

[2] Disponível em: <https://www.geogebra.org/>

tutoriais para a utilização dos recursos disponíveis, bem como acessar notícias sobre o AGD e interagir com diferentes pessoas através de comunidades. Também existe um aplicativo disponível especificamente para dispositivos *touchscreen*, sendo encontrado nas lojas online de aplicativos, como “GeoGebra Geometria”. A seguir, conheceremos a interface destas versões.

Na figura abaixo (Figura 1), podemos observar como os elementos funcionais estão dispostos na interface da versão do GeoGebra para desktop.

Figura 1 - Interface do GeoGebra Classic 5

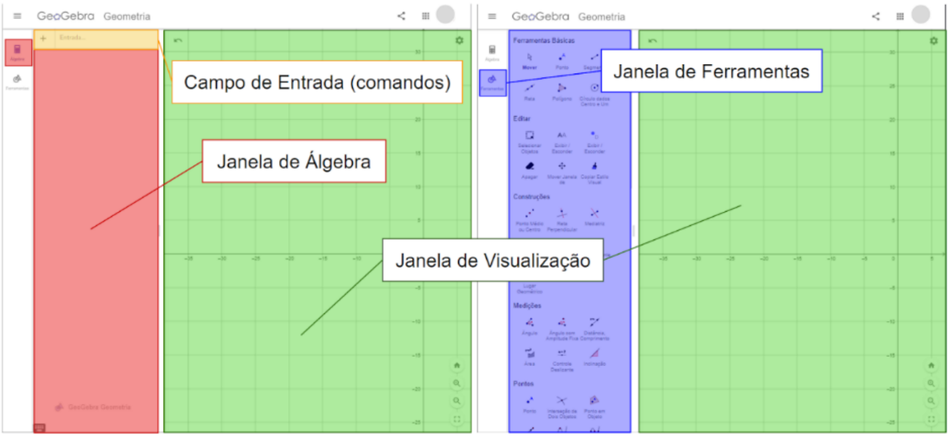


Fonte: O autor (2023).

A “Janela de Visualização” é o espaço destinado a serem realizadas as construções geométricas, onde será possível ver seus elementos e modificá-los. A “Barra de Ferramentas” é o local que agrupa as ferramentas que o AGD oferece, que permitem a realização das construções. A "Janela de Álgebra” fornece as informações algébricas dos elementos existentes da construção, e o “Campo de Entrada”, permite a realização de comandos que, ao serem devidamente executados, exibem seu resultado na janela de visualização. Encontramos estes mesmos elementos nas demais versões do AGD.

A Figura 2, apresenta duas imagens da interface do GeoGebra na versão online, possível de ser acessada não só pelo computador, mas também por outros dispositivos.

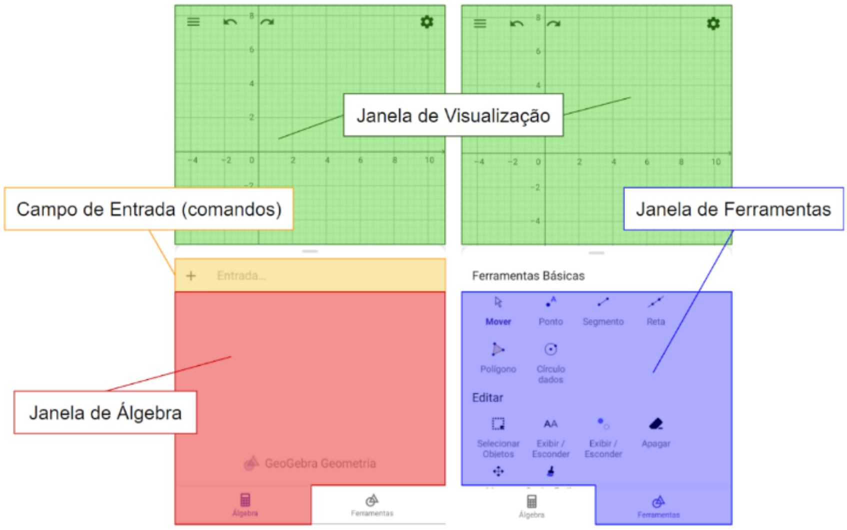
Figura 2 - Interface do GeoGebra Geometria online



Fonte: O autor (2023).

Na versão para dispositivos *touchscreen*, encontramos uma interface que, para se adaptar ao tamanho reduzido da tela, permite a exibição e o ocultamento dos elementos que a compõem, como mostra as duas imagens da Figura 3.

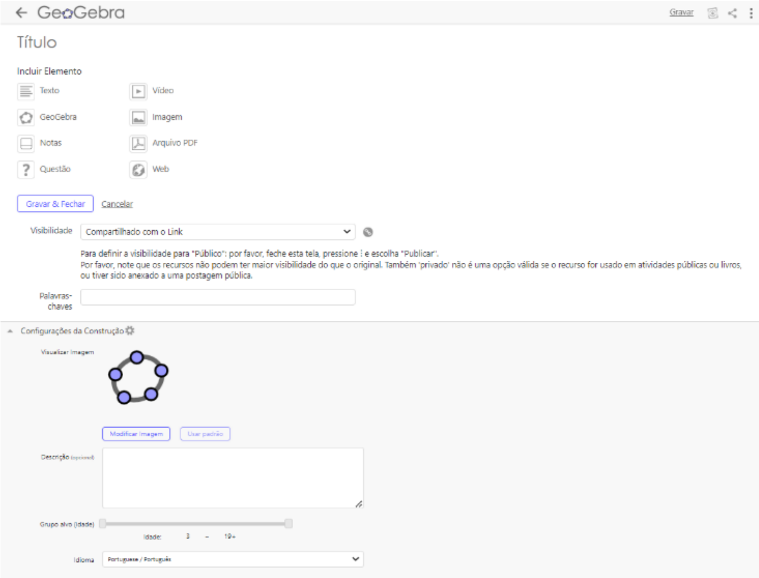
Figura 3 - Interface do GeoGebra Geometria para dispositivos *touchscreen*



Fonte: O autor (2023).

Na plataforma online do GeoGebra conseguimos encontrar a disponibilidade de criação de recursos que podem ser materiais ou atividades, sendo possível a utilização de diferentes tipos de artifícios pertinentes para o desenvolvimento de atividades para um público alvo. Dentre eles, podemos destacar a possibilidade de inserir textos, vídeos, imagens, arquivos PDF, uma página da Web, questões com alternativas ou com espaço para respostas, e também a inserção de arquivos produzidos no GeoGebra, os chamados “*applet’s*”. Estes recursos também permitem a definição do grupo alvo (idade), a sua descrição e a definição de palavras-chaves que possibilitam a busca do material produzido por outras pessoas. A Figura 4 apresenta a janela de criação destes recursos.

Figura 4 - Janela de criação de recursos no GeoGebra online



Fonte: O autor (2023).

Conseguimos perceber, portanto, que o GeoGebra se apresenta como um ambiente de geometria dinâmica bastante favorável para a criação e acesso de recursos materiais que podem ser integrados às práticas pedagógicas de educadores que estão comprometidos com o ensino-aprendizagem da Geometria.

2.2.2.2 A Produção de Materiais Didáticos no GeoGebra

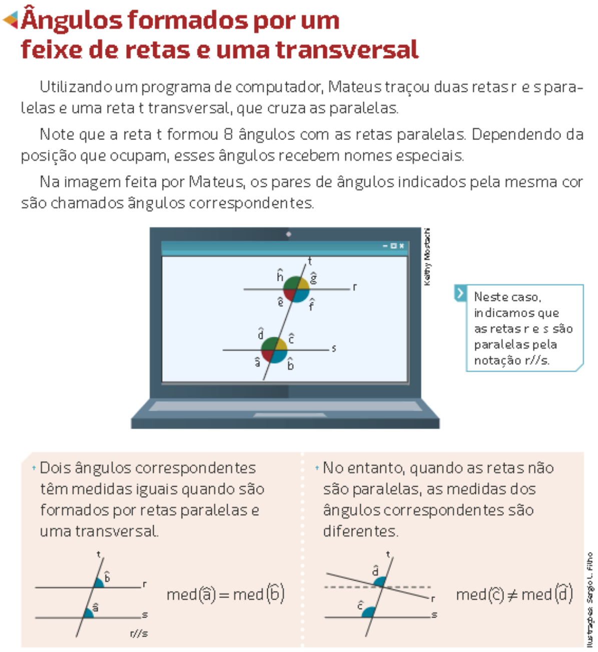
Partindo das ferramentas que o GeoGebra dispõe e de sua interface, conseguimos observar como podemos nos apropriar dele para a criação de materiais didáticos, que por serem desenvolvidos em um AGD, nos permite que eles sejam dinâmicos. Por ser uma multiplataforma acessível por diferentes dispositivos eletrônicos, os MDI’s produzidos nela possuem um acesso rápido e fácil para os alunos que estão mais familiarizados com estas ferramentas digitais.

A produção destes MDI’s pode ocorrer através de sua versão para desktop ou através de sua plataforma online, que neste caso, apesar de ser um AGD considerado leve, dispensa a necessidade de um espaço na memória do computador por não precisar ser instalado e utilizado nele. Vale ressaltar que sua interface, em ambos os casos, apresenta as mesmas ferramentas e funcionalidades; a maior diferença reside no fato de que na plataforma online – como virmos anteriormente –, o educador dispõe de diversos tipos diferentes de recursos que podem aprimorar as atividades a serem desenvolvidas, e que permitem uma maior facilidade em sua execução. Já na versão desktop, a necessidade de conectividade com a internet é dispensável.

Também destacamos que outra vantagem de utilização do AGD GeoGebra é a possibilidade de compartilhamento dos materiais didáticos produzidos pelos diferentes usuários. Através de um sistema de busca, os usuários podem utilizar palavras chaves para encontrar materiais que tenham sido criados por outras pessoas e estejam disponíveis para serem acessados. Além de serem utilizados na íntegra, esses MD's encontrados podem ser aprimorados e modificados de acordo com as necessidades de cada usuário.

Para contextualizar o que estamos querendo conduzir por meio deste estudo, trazemos um simples exemplo referente a forma de abordagem de um livro didático sobre o estudo de ângulos nos anos finais do ensino fundamental. Na Figura 5 podemos observar que é posto as relações existentes dos ângulos formados por um par de retas paralelas cortadas por uma transversal.

Figura 5 - Exemplo de abordagem de um livro didático sobre o estudo de ângulos


Ângulos formados por um feixe de retas e uma transversal

Utilizando um programa de computador, Mateus traçou duas retas r e s paralelas e uma reta t transversal, que cruza as paralelas.

Note que a reta t formou 8 ângulos com as retas paralelas. Dependendo da posição que ocupam, esses ângulos recebem nomes especiais.

Na imagem feita por Mateus, os pares de ângulos indicados pela mesma cor são chamados ângulos correspondentes.

Neste caso, indicamos que as retas r e s são paralelas pela notação r//s.

- Dois ângulos correspondentes têm medidas iguais quando são formados por retas paralelas e uma transversal.

$\text{med}(\hat{a}) = \text{med}(\hat{b})$

- No entanto, quando as retas não são paralelas, as medidas dos ângulos correspondentes são diferentes.

$\text{med}(\hat{c}) \neq \text{med}(\hat{d})$

Fonte: O autor (2023) com base em Pataro e Balestri (2019, p. 179).

Neste caso, percebemos que na contextualização inicial do estudo é referenciado o uso de um programa de computador por um sujeito. Porém, essa referência ao uso de tecnologia se limita apenas à narrativa trazida. O desenvolvimento do estudo no livro didático é desenvolvido a partir da descrição das relações existentes dos ângulos, às comprovando por meio de fórmulas algébricas e figuras estáticas. Acreditamos que seu estudo se tornaria bem mais interessante e didático se na sua forma de abordagem o aluno pudesse manipular esses elementos, a fim de perceber, entender e provar as propriedades e relações em estudo por meio da experimentação, sendo conduzido pelo professor que desenvolverá a íntima relação que deve haver com o objeto teórico em estudo.

Para enxergarmos caminhos que nos permitam compreender como o processo de apropriação do GeoGebra na produção dos materiais didáticos dinâmicos – objetivando sua utilização como instrumentos para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem – pode ocorrer de forma efetiva, nos apoiaremos nos fundamentos presentes na teoria da Abordagem Instrumental, que estuda sobre as relações e processos envolvidos na concepção e utilização de um instrumento, a fim de buscarmos relações que proporcionem fundamentos para as hipóteses levantadas nesta pesquisa.

2.3 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL

Apoiada em conceitos da psicologia, a Abordagem Instrumental, estruturada por Pierre Rabardel (1995), apresenta as relações que existem na apropriação de máquinas e ferramentas pelo homem, objetivando as atividades que ele propõe desenvolver. Assim, ele busca entender como o sujeito se relaciona com os objetos à sua volta, os modificando a partir de seus esquemas pessoais. O foco de sua abordagem é a interação entre artefato e instrumento, que acontece com base no desenvolvimento dos esquemas de utilização (ibid., apud SILVA, 2020).

O objetivo principal de sua proposta é entender como o sujeito pode se apropriar de um artefato, atribuindo a ele funções antes não concebidas, através de seus esquemas próprios de utilização, em que ele transforma este artefato em um instrumento, a fim de serem alcançados os seus objetivos. Assim, destrinchamos um pouco melhor sobre esses termos para que possamos entender o seu estudo.

Rabardel nomeia por sujeito o indivíduo que dirige a ação; é por meio dele que os processos se desenvolvem, partindo de suas particularidades e objetivos individuais. O artefato é categorizado como qualquer ferramenta que pode ser utilizada para determinados fins, sendo um objeto de características próprias que podem ser considerados como objetos materiais ou simbólicos. Exemplificando, um objeto material poderia ser um computador, um lápis ou um compasso, e um objeto simbólico uma figura, um gráfico ou um conceito matemático. Já um instrumento, se apresenta como sendo fruto do aprimoramento de funções concebidas a determinado artefato, pelo sujeito. Sua existência parte da ação do sujeito sobre ele, por meio de seus esquemas individuais, o incorporando-o às suas atividades. Assim, conseguimos perceber que o instrumento possui um caráter dinâmico, ou seja, é possível ser modificado e reestruturado, diante do sujeito que interage com ele e dos objetivos e atividades que este propõe alcançar e desenvolver (RABARDEL, 2002; SALAZAR, 2009; SILVA, 2020).

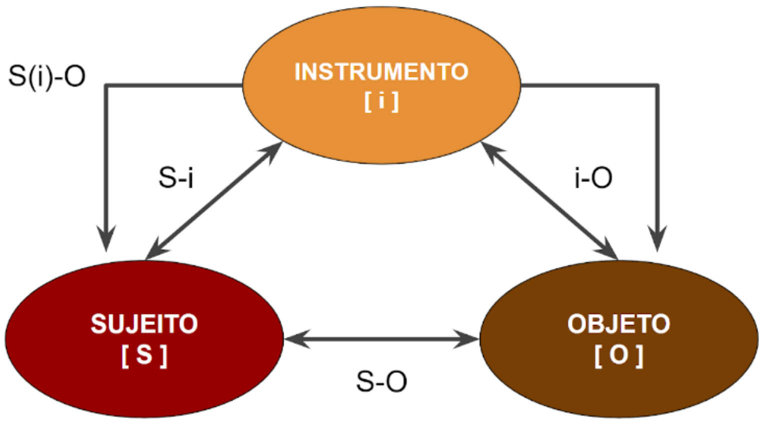
Essa transformação progressiva do artefato em instrumento, a partir dos diferentes esquemas de utilização do sujeito, é quem conduz a teoria estruturada por Rabardel. Desta forma, identificamos dois processos norteadores necessários para que isto aconteça. Rabardel os identifica por Instrumentalização e Instrumentação. Juntos, estes processos integram o que ele nomeia por Gênese Instrumental; a transformação do artefato em um instrumento.

A instrumentalização se configura como o processo no qual o sujeito se apropria de determinado artefato, conhecendo suas ferramentas, propriedades e funcionalidades. Já na instrumentação, o sujeito tendo se apropriado do artefato, partindo de suas experiências particulares e dos objetivos que ele pretende alcançar, são pensadas e desenvolvidas novas funções, novos esquemas de utilização para este artefato que passa a ser um instrumento. Há uma ressignificação daquele artefato, sendo atribuída a ele novos meios de apropriação e utilização

Dentro de sua proposta, Rabardel organiza os processos que acontecem através de elementos que estão envolvidos nessa transformação do artefato em instrumento. Para isso, ele propõe o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais), onde ele apresenta as interações entre o sujeito e o objeto mediado pelo instrumento, identificando as atividades instrumentais possíveis a partir destas relações. No modelo SAI (Figura 6) podemos identificar a interação sujeito-objeto [S-

O], sujeito-instrumento [S-i], instrumento-objeto [i-O] e a relação entre sujeito-objeto que é mediada pelo instrumento [S(i)-O].

Figura 6 - Modelo SAI



Fonte: O autor (2023) adaptado de Rabardel (1995, p. 53).

Conseguimos, portanto, analisar através do modelo SAI, os processos que integram a Gênese Instrumental: a instrumentalização, por meio das interações entre sujeito-objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O], e na instrumento-objeto [i-O]; e a instrumentação por meio da interação entre sujeito-instrumento [S-i] (SILVA, 2020). Assim, segundo Salazar (2003), pode-se utilizar este modelo como uma ferramenta capaz de examinar, de forma detalhada, o uso de instrumentos no desenvolvimento de uma determinada tarefa.

Por meio da estruturação apresentada na teoria da Abordagem Instrumental, conseguimos perceber a possibilidade de analisar também um instrumento tecnológico. Essa afirmativa dialoga com o que afirmou Mariotti (2019, p. 183) quando diz que a Abordagem Instrumental “[...] se mostra particularmente útil para uma análise cognitiva da função de um instrumento, e em particular de um instrumento tecnológico, na construção de conhecimentos". Sobre o uso de um instrumento, ela enfatiza que ele

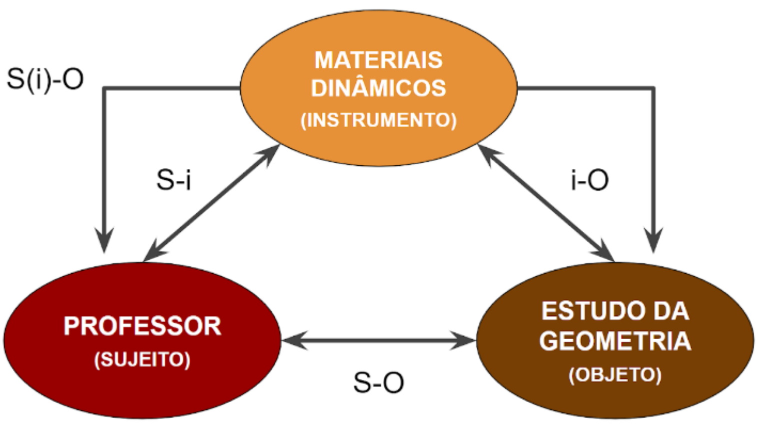
> [...] pode revelar-se de extrema utilidade no âmbito educativo; além de seu emprego na solução de problemas práticos, ele pode constituir um suporte eficaz na construção de significados – em particular significados pertinentes aos objetivos didáticos e disciplinares a que o professor se propõe (MARIOTTI, 2019, p. 183).

Assim, apresentamos a seguir como conseguimos aplicar as análises feitas por Rabardel para o contexto de nossa pesquisa, nos permitindo entender os processos necessários para a apropriação do GeoGebra, por parte do educador, para a obtenção de um instrumento capaz de ser utilizado no ensino e aprendizagem da Geometria, por meio de materiais didáticos dinâmicos digitais.

O GeoGebra é para um professor – o sujeito – um artefato, a partir do momento que ele não o conhece, não entende suas ferramentas e nem como elas funcionam. O processo de instrumentalização acontece quando este professor se apropria do ambiente de geometria dinâmica, conhecendo sua interface, as ferramentas que ele possui e seus usos, e as possibilidades que ele dispõe. A partir deste momento, ao professor se apropriar do AGD, partindo de suas experiências individuais, ele cria padrões e esquemas de sua utilização para alcançar seus objetivos pedagógicos; estamos falando da instrumentação. Focando em nosso objeto, o estudo da geometria, o professor conhecendo os aspectos positivos da utilização de materiais didáticos, e entendendo as viabilidades do uso da geometria dinâmica por meio das tecnologias no ambiente escolar, ver no GeoGebra a possibilidade de criação e utilização de materiais didáticos dinâmicos digitais, que permitirão a abordagem de conteúdos abstratos da geometria, de forma lúdica, interativa, experimental, reflexiva e dinâmica.

Adaptando o modelo SAI apresentado por Rabardel a nossa pesquisa, teríamos os elementos que o compõem sendo relacionados da seguinte forma: o sujeito é o professor; o material dinâmico o instrumento; e o estudo da Geometria o nosso objeto (Figura 7).

Figura 7 - Modelo SAI adaptado a nossa pesquisa



Fonte: O autor (2023) com base em Rabardel (1995, p. 53).

Desta forma, fica evidente que a teoria de Rabardel nos permite compreender a viabilidade das hipóteses de nossa pesquisa de maneira satisfatória, demonstrando caminhos de como o educador poderá se apropriar, não só do GeoGebra, mas das tecnologias digitais disponíveis de forma geral, na resolução de problemáticas encontradas em sala de aula na abordagem do estudo da Geometria.

3 OBJETO TEÓRICO DE ESTUDO

Como enfatizado anteriormente, nossa pesquisa busca identificar caminhos para o pleno desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da Geometria, diante das problemáticas e dificuldades apresentadas na condução do estudo desta área do conhecimento. Reconhecendo a amplitude de seu estudo, objetivando conjecturar as hipóteses levantadas nesta pesquisa, tornou-se necessário a delimitação de sua abordagem através da definição de uma etapa específica da educação básica, e da definição do estudo de um dos conteúdos propostos para este eixo do componente curricular da matemática.

Para serem definidas estas questões, nos propusemos inicialmente a analisar sucintamente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que é o documento que normatiza as aprendizagens fundamentais que devem ser desenvolvidas durante as etapas da Educação Básica, buscando entender a sua estruturação, assimilando quais as contribuições gerais e específicas para a matemática, ao compreender que nosso campo de estudo se insere como um eixo desta área do conhecimento.

Além disso, buscamos analisar também duas coleções de livros didáticos distintos para o ensino da Matemática, a fim de verificarmos quais as formas de abordagem dos conteúdos da unidade temática da Geometria em livros didáticos, fazendo comparativos aos apontamentos feitos por pesquisadores sobre a sua estruturação e sua influência no ensino da Geometria. Para as duas etapas de análise, também buscamos identificar quais as referências e orientações existentes sobre a utilização de tecnologias digitais para o ensino da matemática, e as considerações acerca da importância do estudo da Geometria. Portanto, neste capítulo, buscamos apontar e descrever os resultados destas análises.

Após a explanação destas, ao definir a etapa da educação básica e ao delimitar o conteúdo pertencente ao eixo da geometria, trazemos a sintetização de nosso objeto teórico de estudo, apresentando e definindo os conteúdos que irão nortear a condução de nossa pesquisa.

3.1 SONDANDO A BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo oficial desenvolvido por especialistas de todas as áreas do conhecimento, cujo objetivo é definir o conjunto de aprendizagens essenciais que deverão ser desenvolvidas por todos alunos no decorrer de todas as etapas e de todas modalidades da Educação Básica Brasileira, assegurando a eles os seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. O então ministro da educação, Rossieli, se refere a Base como sendo "[...] um documento completo e contemporâneo, que corresponde às demandas do estudante desta época, preparando-o para o futuro." (BRASIL, 2018, p. 5).

Além disso, a BNCC serve de referência nacional para a elaboração das propostas pedagógicas das instituições escolares e para elaboração dos currículos das estruturas e redes escolares de todos os âmbitos federativos. Visa contribuir também para a estruturação de políticas e ações para a formação de professores, a concepção de conteúdos educacionais, a avaliação, e fornecer critérios para uma adequada infraestrutura para o desenvolvimento pleno da educação (BRASIL, 2018). Porém, a própria enfatiza que ela

> [...] por si só não alterará o quadro de desigualdade ainda presente na Educação Básica do Brasil, mas é essencial para que a mudança tenha início porque, além dos currículos, influenciará a formação inicial e continuada dos educadores, a produção de materiais didáticos, as matrizes de avaliações e os exames nacionais que serão revistos à luz do texto homologado da Base. (BRASIL, 2018, p. 5).

A BNCC estabelece 10 competências gerais[3], que através das aprendizagens fundamentais definidas, visa a construção do pleno desenvolvimento de habilidades, a construção de conhecimentos e a imprescindível formação de valores propostos para as três etapas da Educação Básica, em consonância com a LDB[4] (BRASIL, 2018). A Tabela 1 apresenta estas 10 competências gerais que norteiam os pressupostos estabelecidos pela Base.

Tabela 1 - Competências gerais da BNCC

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas,

[3] Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018).

[4] LDB é a Lei nº 9.394/96, que estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996).

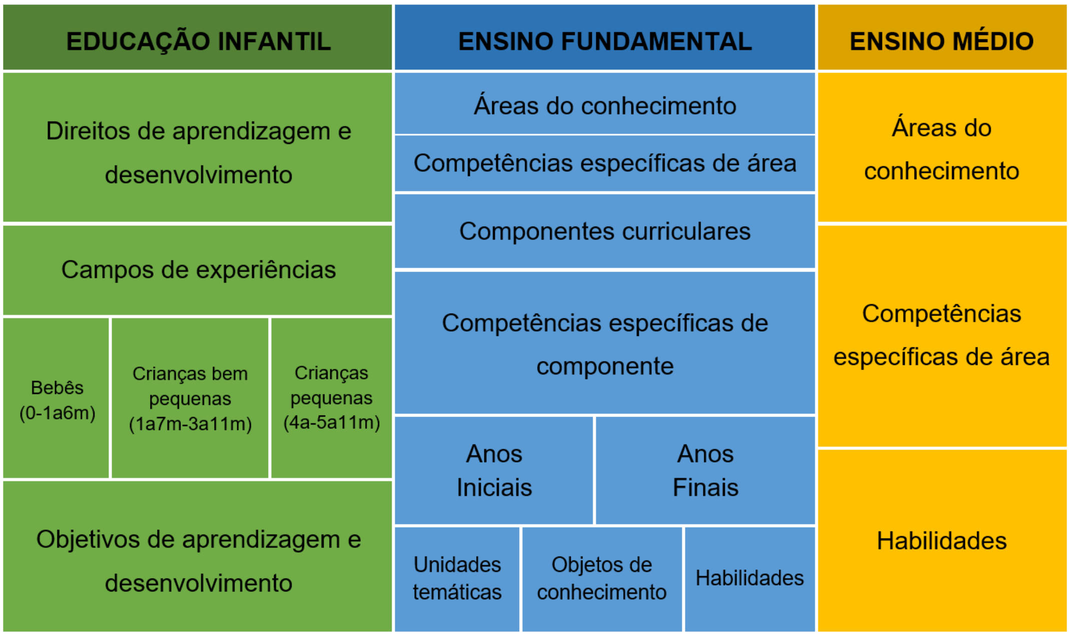
elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: O autor (2023) adaptado de Brasil (2018, p. 9 e 10).

Podemos observar que a competência 2 e 5 fazem referência a utilização de tecnologias, o que já infere a sua adesão nas práticas educacionais, objetivando serem alcançados os fundamentos para quais as competências foram estruturadas. Destas duas, destacamos a quinta competência que diz objetivar a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação e comunicação, dentre outros objetivos, na produção de conhecimento.

No quadro a seguir (Quadro 1) apresentamos a estruturação geral da BNCC, para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), que apontam sua organização em conformidade com os fundamentos pedagógicos apresentados por ela, explicitando as competências que devem ser desenvolvidas no decorrer da Educação Básica.

Quadro 1 - Estruturação da BNCC para a Educação Básica



Fonte: O autor (2023) adaptado de Brasil (2018, p. 24).

Para nossa pesquisa definimos o nosso foco para a etapa do ensino fundamental. Assim, a seguir abordaremos melhor sobre essa etapa da educação básica e quais as propostas para o ensino e a aprendizagem da matemática nela e as habilidades requeridas para o estudante desta fase.

3.1.1 O Ensino Fundamental

O Ensino Fundamental na BNCC, como mostrado no quadro anterior, está dividido em duas fases: Anos Iniciais que compreende do 1º ano ao 5º ano, e os Anos Finais, do 6º ano ao 9º ano. Ela está organizada em cinco áreas do conhecimento: I. Linguagens; II. Matemática; III. Ciências da Natureza; IV. Ciências Humanas; e V. Ensino Religioso. Essas áreas “[...] se intersectam na formação dos alunos, embora se preservem as especificidades e os saberes próprios construídos e sistematizados nos diversos componentes.” (BRASIL, 2018, p. 27). Estas desenvolvem um papel fundamental na formação dos alunos, considerando as suas características e especificidades de acordo com as demandas pedagógicas de cada fase de escolarização (ibid.). O Quadro 2 apresenta como essas áreas estão dispostas, e os componentes curriculares de cada uma delas para cada fase do Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais).

Quadro 2 - Estrutura do Ensino Fundamental

<table>
<tr><th colspan="3">ENSINO FUNDAMENTAL</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Áreas do Conhecimento</th><th colspan="2">Componentes curriculares</th></tr>
<tr><th>Anos Iniciais
(1º ao 5º ano)</th><th>Anos Finais
(6º ao 9º ano)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Linguagens</td><td colspan="2">Língua Portuguesa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Arte</td></tr>
<tr><td colspan="2">Educação Física</td></tr>
<tr><td></td><td>Língua Inglesa</td></tr>
<tr><td>Matemática</td><td colspan="2">Matemática</td></tr>
<tr><td>Ciências da Natureza</td><td colspan="2">Ciências</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ciências Humanas</td><td colspan="2">Geografia</td></tr>
<tr><td colspan="2">História</td></tr>
<tr><td>Ensino Religioso</td><td colspan="2">Ensino Religioso</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2023) adaptado de Brasil (2018, p. 27).

Com a duração de nove anos, o Ensino Fundamental é a etapa mais longa da Educação Básica. Segundo a BNCC, os estudantes desta etapa são crianças e adolescentes que estão no período que apresenta “uma série de mudanças relacionadas a aspectos físicos, cognitivos, afetivos, sociais, emocionais, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 57), o que torna desafiador a elaboração dos currículos para essa etapa da escolarização.

Outra questão apontada pela Base, e que se relaciona com o nosso estudo, é que deve ser considerado que a cultura digital tem proporcionado mudanças sociais expressivas na sociedade moderna, de que

> Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, *tablets* e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação

> multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. Por sua vez, essa cultura também apresenta forte apelo emocional e induz ao imediatismo de respostas e à efemeridade das informações, privilegiando análises superficiais e o uso de imagens e formas de expressão mais sintéticas, diferentes dos modos de dizer e argumentar característicos da vida escolar (BRASIL, 2018, p. 61).

Todas essas questões desencadeiam desafios à escola no cumprimento do seu papel quanto à formação do novo alunado que compõem as novas gerações. Assim,

> É importante que a instituição escolar preserve seu compromisso de estimular a reflexão e a análise aprofundada e contribua para o desenvolvimento, no estudante, de uma atitude crítica em relação ao conteúdo e à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais. Contudo, também é imprescindível que a escola compreenda e incorpore mais as novas linguagens e seus modos de funcionamento, desvendando possibilidades de comunicação (e também de manipulação), e que eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para uma participação mais consciente na cultura digital. Ao aproveitar o potencial de comunicação do universo digital, a escola pode instituir novos modos de promover a aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes (BRASIL, 2018, p. 61).

Essas colocações permitem evidenciar o reconhecimento por parte da Base da necessidade de apropriação de novos mecanismos pelas instâncias educacionais que esteja em sintonia com os alunos que estão imersos na cultura digital, a fim de que sejam incorporados às práticas pedagógicas, fazendo com que estas estejam fundamentadas nas possibilidades dispostas dos avanços tecnológicos evidentes, pensando também em conduzir os alunos a atender as novas configurações existentes da sociedade contemporânea.

Objetivando delimitar ainda mais o período da educação básica que abordamos em nossa pesquisa, entendendo que o ensino fundamental é a etapa que possui o maior número de anos, se subdividindo em duas fases, e buscando focar em nosso campo de conhecimento, adiante observamos os pressupostos trazidos pela Base para a área da matemática para o ensino fundamental, e particularmente para os seus anos finais.

3.1.1.1 A Área de Matemática

“O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (BRASIL, 2018, p. 265). Para o Ensino Fundamental, a área de Matemática apresenta a necessidade de garantir que os estudantes relacionem o estudo da matemática com fatores do mundo real, desenvolvendo a capacidade de identificar e resolver problemas utilizando-a. Para esta área, também são definidas competências específicas (Tabela 2), articuladas com as competências gerais, que visam o desenvolvimento dos alunos.

Tabela 2 - Competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: O autor (2023) adaptado de Brasil (2018, p. 267).

Mais uma vez conseguimos identificar, através da quinta competência, a importância da integralização de ferramentas tecnológicas digitais para servirem de instrumentos condutores do ensino-aprendizagem, nesse caso, especificamente para o ensino da matemática, o que condiz com os objetivos propostos para o ensino desta área, a fim de que os estudantes consigam resolver problemáticas da atual sociedade – bastante tecnológica – se apoiando nos estudos desenvolvidos; e para isso, a condução do estudo por vias tecnológicas se mostra bastante válida.

Na área de Matemática foram propostas cinco unidades temáticas correlacionadas a fim de compor o desenvolvimento das habilidades previstas para o ensino deste componente curricular. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. A partir deste momento dirigiremos o foco de nossa análise para a unidade temática da Geometria para os Anos Finais do Ensino Fundamental, objetivando a percepção da proposta de sua abordagem e as relações com a apropriação das tecnologias digitais para seu ensino.

3.1.1.1.1 A Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental

A BNCC diz que o campo da Geometria envolve um estudo abrangente de conceitos e procedimentos fundamentais para resolver problemáticas do mundo físico e de outras diferentes áreas do conhecimento. Percebemos que essa afirmação está de acordo com o que estudiosos afirmam sobre a importância do estudo da Geometria, como virmos anteriormente. Outro ponto notável a ser destacado é o reconhecimento da importância de estudar os conteúdos da geometria, como “posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais” (BRASIL, 2018, p. 271) para desenvolver nos alunos o pensamento geométrico, que “é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.” (ibid.).

A Base reconhece enfaticamente a abrangência e importância do estudo da Geometria, rejeitando, por exemplo, a ideia de que seu estudo seja reduzido a mera aplicabilidade de fórmulas para cálculo de área e volume. Ela defende a construção do conhecimento geométrico a fim de contribuir, dentre outras, na formação do raciocínio hipotético-dedutivo, tipo de raciocínio importante para a Matemática.

Sobre o uso de tecnologias digitais, ao se referir, por exemplo, sobre a introdução do estudo das simetrias no Ensino Fundamental, ela diz que deve ocorrer “por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica.” (ibid., p. 272). Além disso,

> [...] a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, **recursos didáticos** como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e ***softwares* de geometria dinâmica** têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018, p. 272, ênfase acrescentada).

Outro exemplo de reconhecimento do uso de tecnologias digitais pode ser notado na descrição de habilidades a serem atingidas na unidade temática da Geometria para os Anos Finais do Ensino Fundamental, no espaço que é apresentado as unidades temáticas com seus objetos de conhecimento e as habilidades previstas de cada ano escolar para cada componente curricular. A Tabela 3, concentra exemplos dessas habilidades que referenciam o uso de tecnologias digitais ao longo dos quatro anos que correspondem a essa etapa.

Tabela 3 - Sintetização de habilidades da BNCC que referenciam o uso de tecnologias digitais para o componente curricular da Matemática

6º ANO	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
7º ANO	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.
8º ANO	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.
9º ANO	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

Fonte: O autor (2023) com base em Brasil (2018, p. 303-319).

Fica evidente que, além de reconhecer e sugerir a utilização de tecnologias digitais de forma geral, o uso especificamente de *softwares* de geometria dinâmica é manifestado como um recurso didático capaz de auxiliar nas práticas pedagógicas envolvidas especificamente no estudo da Geometria, frisando a necessidade de objetivarem a reflexão e a sistematização e não apenas à experimentação.

3.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

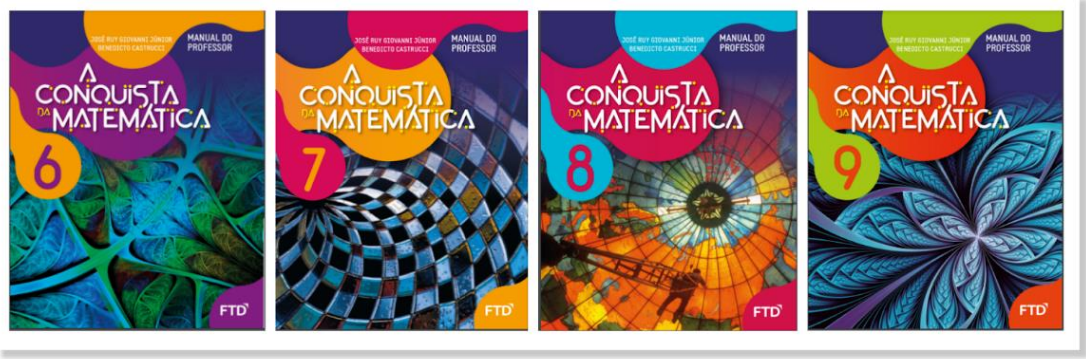
Como relatado no início deste capítulo, além da sondagem realizada na BNCC, buscamos também analisar livros didáticos propostos para o ensino da matemática. Tendo sido definida anteriormente a etapa da Educação Básica que focamos em nossa pesquisa, escolhemos duas coleções de livros, especificamente para os anos finais do Ensino Fundamental, de autores e editoras distintas. Em nossa análise, buscamos identificar questões específicas, como constatar a presença de ligações com as orientações e direcionamentos expostos pela BNCC, identificar as referências sobre o uso das tecnologias digitais, e averiguar a estruturação destes livros com base nas observações e descrições feitas por estudiosos.

Ressaltamos que para ambas as coleções trazemos a análise da versão “Manual do Professor”, onde também encontramos orientações específicas para o educador.

3.2.1 As Coleções

A primeira coleção selecionada, diz respeito a quarta edição dos livros didáticos produzidos pela editora FTD em 2018, tendo os professores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci como autores. A coleção (Figura 8) leva o título em seus livros de “A Conquista da Matemática”, tendo exemplares para cada fase dos anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 8 - Coleção “A Conquista da Matemática”



Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018).

A segunda coleção que analisamos pertence à terceira edição dos livros didáticos produzidos pela editora Ática em 2018, tendo o professor Luiz Roberto Dante como autor de seus conteúdos. Os livros que pertencem a essa coleção (Figura 9) intitulados por “Teláris”, também possuem exemplares para todas as fases dos anos finais que compõem o ensino fundamental, totalizando 4 volumes.

Figura 9 - Coleção “Teláris”

Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018).

Para uma melhor condução da explanação dos resultados de nossa análise, referenciamos as coleções como “ACM” para a primeira (A Conquista da Matemática) e “TSM” para a segunda (Teláris).

3.2.2 Resultados da Análise

Em ambas as coleções identificamos na parte inicial do manual, que é comum a todos os volumes, seções destinadas à apresentação de uma reflexão acerca das tecnologias. A coleção ACM, por exemplo, nas considerações sobre o ensino da matemática, traz um tópico sobre as potencialidades das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem, em que são realizadas algumas reflexões sobre as possíveis relações existentes entre estas tecnologias e o trabalho realizado no contexto educacional, vislumbrando um fortalecimento dessa relação. Na coleção TSM, encontramos um tópico sobre tecnologias na seção que traz informações para a formação continuada do professor; e na seção sobre recursos didáticos auxiliares, encontramos inclusive, a indicação do GeoGebra como um programa que pode auxiliar o professor nas aulas. Inicialmente já conseguimos perceber um posicionamento de reconhecimento por parte dos autores sobre os reais processos evolutivos da tecnologia e sua importante integralização nas práticas pedagógicas do professor por meio das reflexões trazidas.

Outro fator comum nas coleções é a apresentação da BNCC e de suas competências gerais e específicas para o componente curricular da matemática, sendo exposto também o quadro de habilidades da Base referentes a cada fase do ensino fundamental que os volumes são destinados, relacionando as unidades temáticas com os objetos de conhecimento e habilidades. Em cada unidade e em cada capítulo são referenciadas as habilidades correspondentes a abordagem trazida neles. Essas observações compreendem a estruturação dos livros a partir das orientações da BNCC, demonstrando que a condução do ensino dos conteúdos está baseada no desenvolvimento das aprendizagens essenciais fixadas pelo documento normativo.

A partir da estruturação dos livros, sintetizamos a organização dos capítulos que abordam os conteúdos voltados para o eixo da geometria dentro do componente curricular da matemática para cada volume das duas coleções analisadas, e que trazem as habilidades previstas para a unidade temática da Geometria pela BNCC para cada ano que contempla a etapa final do ensino fundamental. Em alguns destes capítulos, percebemos a junção de habilidades que pertenciam a mais de um eixo do componente curricular, trazendo uma abordagem com associações dos conteúdos da geometria com os conteúdos de outras unidades temáticas. Essa sintetização nos ajudou no direcionamento da escolha do objeto de conhecimento que abordamos na condução desta pesquisa.

A Tabela 4 apresenta a seleção dos capítulos da coleção ACM, e a Tabela 5 dos capítulos da coleção TSM relacionando apenas as habilidades que são previstas para o eixo da Geometria.

Tabela 4 - Capítulos da coleção ACM que abordam as habilidades da unidade de Geometria

ANO	CAPÍTULOS	HABILIDADES
6º	3 - Figuras Geométricas	EF06MA17 / EF06MA28
	7 - Ângulos e Polígonos	EF06MA16 / EF06MA18 / EF06MA19 / EF06MA20 / EF06MA21 / EF06MA22 / EF06MA23 / EF06MA25 / EF06MA26 / EF06MA27 / EF06MA32
7º	3 - Transformações Geométricas e Simetria	EF07MA19 / EF07MA20 / EF07MA21 EF07MA37
	6 - Figuras Geométricas Planas	EF07MA22 / EF07MA23 / EF07MA24 / EF07MA25 / EF07MA26 / EF07MA27 / EF07MA28 / EF07MA33
8º	3 - Ângulos e Triângulos	EF08MA14 / EF08MA15 / EF08MA16 / EF08MA17
	6 - Polígonos e Transformações no Plano	EF08MA18
9º	4 - Relações entre Ângulos	EF09MA10 / EF09MA11
	5 - Proporção e Semelhança	EF09MA07 / EF09MA08 / EF09MA12
	7 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo e na Circunferência	EF09MA13 / EF09MA14
	8 - Figuras Planas, Espaciais e Vistas	EF09MA06

Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Junior (2018).

Tabela 5 - Capítulos da coleção TSM que abordam as habilidades da unidade de Geometria

ANO	CAPÍTULOS	HABILIDADES
6º	3 - Sólidos geométricos	EF06MA17 / EF06MA22 / EF06MA23
	5 - Ângulos e polígonos	EF06MA16 / EF06MA18 / EF06MA19 / EF06MA20 / EF06MA21 / EF06MA22 / EF06MA23
	6 - Frações e porcentagem	EF06MA21
7º	3 - Números racionais	EF06MA22
	5 - Geometria: circunferência, ângulo e polígono	EF07MA22 / EF07MA23 / EF07MA24 / EF07MA25 / EF07MA26 / EF07MA27 / EF07MA28
	6 - Simetria	EF06MA19 / EF06MA20 / EF06MA21
8º	2 - Lugares geométricos e construções geométricas	EF08MA15 / EF08MA16 / EF08MA17
	4 - Triângulos e quadriláteros	EF08MA14 / EF08MA15
	8 - Transformações geométricas	EF08MA18
9º	3 - Proporcionalidade e juros	EF09MA10 / EF09MA14
	5 - Geometria: semelhança, vistas ortogonais e perspectiva	EF09MA12
	6 - Relações métricas nos triângulos retângulos	EF09MA13 / EF09MA14
	7 - Circunferência e círculos	EF09MA11

Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018).

Na sintetização destes capítulos conseguimos identificar algo interessante. Vemos que as duas coleções fogem da caracterização relatada por estudiosos sobre os livros didáticos, ao relatarem que estes apresentam os conteúdos da geometria comumente em suas últimas páginas, contribuindo para que estes não sejam estudados. Conseguimos perceber que neste aspecto, em todos os volumes dos livros de ambas as coleções, os capítulos que são trabalhados as habilidades da unidade temática da geometria estão distribuídas ao longo das obras, inclusive em seus primeiros capítulos.

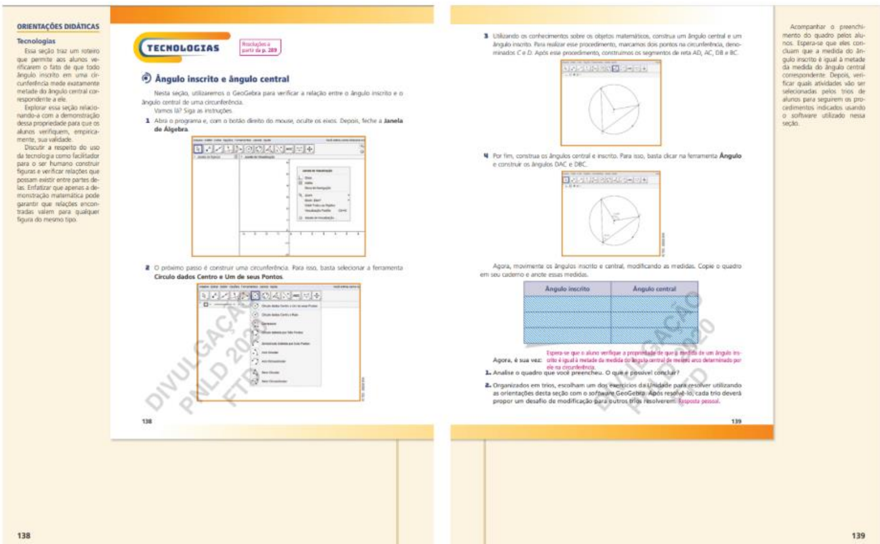
Outra questão apontada sobre as problemáticas do livro didático é o fato de que muitas vezes na abordagem da Geometria não há sua integração com outras áreas do conhecimento e até mesmo com a própria matemática. A Base (BRASIL, 2018), por exemplo, diz que na aprendizagem da matemática sobre determinado conceito ou procedimento, é essencial considerar um contexto que seja significativo para os alunos, que pode estar ligado ao seu cotidiano, a outras áreas do conhecimento ou à própria história da Matemática. Em nossa análise, na averiguação deste aspecto, percebemos que nas duas coleções, na abordagem dos conteúdos nos capítulos referentes ao ensino da Geometria, sua apresentação ocorre de forma contextualizada.

Na coleção ACM, percebemos a presença de contextualização de elementos em estudo com elementos do cotidiano, realizando associações entre eles; propostas de experimentos objetivando a constatação de pressupostos; aplicação em situações do cotidiano; associação com outras áreas do conhecimento, como da Geografia, História, Engenharia e Artes; e também a ligação com a história da matemática. Na coleção TSM também percebemos referências ao cotidiano do aluno; associações com elementos da natureza; propostas de jogos com a temática do estudo abordado; aplicações do estudo ao longo da história da humanidade; curiosidades sobre o conteúdo explanado; presenciamos também a integração com outras áreas do conhecimento, incluindo a proposta de interdisciplinaridade na condução de atividades com a disciplina de geografia e história; bem como a ligação com a história da matemática.

Como dito anteriormente, também objetivamos perceber nestes livros quais considerações são feitas sobre o uso de tecnologias digitais para o ensino e a aprendizagem da geometria. Além das referências sobre tecnologias encontradas nas orientações – como virmos inicialmente –, em ambas as coleções constatamos menções a sua utilização, incluindo o uso do GeoGebra.

Na coleção ACM, ao longo dos livros, encontramos uma seção intitulada "Tecnologias" (Figura 10) que busca esclarecer como utilizar ferramentas tecnológicas na resolução de questões ou problemas matemáticos. Dentro de alguns dos capítulos voltados para o estudo da geometria, essa seção traz o uso do GeoGebra, propondo que este seja explorado na construção e entendimento dos elementos estudados. Mas ao longo das orientações expostas para o professor, também vemos indicações para utilização do AGD, como por exemplo na abordagem de caracterização dos ângulos para o 7º ano: “A construção de ângulos usando régua e transferidor é muito importante, mas, se for possível e desejar, complementar esse trabalho usando um *software* de Geometria dinâmica.” (GIOVANNI JÚNIOR, 2018b, p. 166). Um outro exemplo encontrado está no volume que se destina ao 8º ano, onde identificamos nas orientações para o professor, indicações de utilização de simuladores disponíveis na plataforma online do GeoGebra, na compreensão sobre os elementos de triângulos.

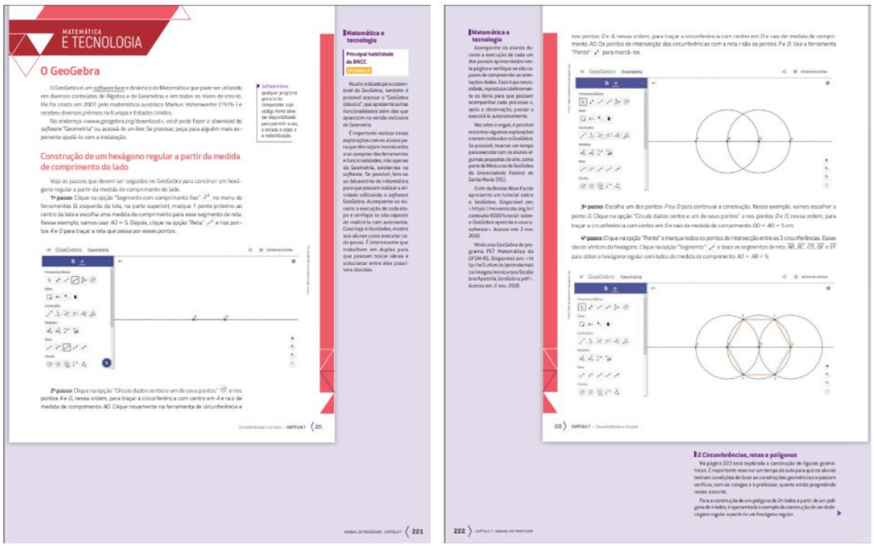
Figura 10 - Exemplo da seção "Tecnologias" da coleção ACM



Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018d).

Na coleção TSM também encontramos uma seção voltada para a exploração da tecnologia chamada “Matemática e Tecnologia” (Figura 11), que ao longo da abordagem do estudo da geometria, também fomenta a utilização do GeoGebra. Nela são dirigidas atividades que envolvem os conteúdos de geometria, sendo demonstrados o passo a passo na utilização das ferramentas do ambiente de geometria dinâmica para as construções propostas de forma detalhada, e com a condução de perguntas a serem respondidas pelos alunos ao realizarem as tarefas. Nos direcionamentos aos professores encontramos até mesmo orientações sobre a necessidade de o educador estudar e praticar sobre o GeoGebra para entendê-lo melhor, indicando a consulta de atividades disponíveis na sua plataforma online, destacando que as funções utilizadas na seção expressam muito pouco da capacidade do AGD.

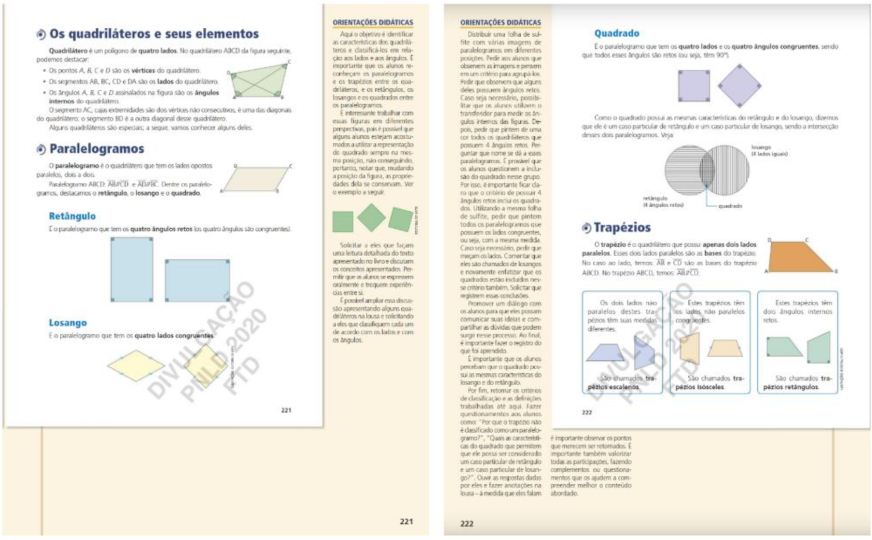
Figura 11 - Exemplo da seção "Matemática e Tecnologia" da coleção TSM



Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018d).

A partir destas análises conseguimos perceber que os livros didáticos têm reconhecido e instigado a utilização de outros recursos didáticos na condução do ensino e da aprendizagem, como constatado nas indicações de uso de tecnologias digitais, tal qual como o GeoGebra, decorrendo muitas vezes pelas limitações que os livros apresentam, como na representação de características de elementos e princípios geométricos por meio de figuras estáticas. Conseguimos exemplificar isso ao notar que na apresentação das características e classificações dos quadriláteros para o 6º ano da coleção ACM (Figura 12), são trazidas diferentes figuras com posições distintas, tendo nas orientações para os professores a afirmativa da necessidade de trabalhar com as figuras em diferentes perspectivas, falando da possibilidade de alguns alunos estarem acostumados a utilizar a representação dos quadriláteros na mesma posição, fazendo com que não percebam que ao mudá-la suas propriedades se conservam.

Figura 12 - Apresentação dos quadriláteros no livro por diferentes figuras



Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018a).

Vemos a partir dessas leituras, que os livros didáticos vêm assumindo um novo papel na forma de abordagem dos conteúdos do eixo da geometria para a matemática, levando em consideração as análises realizadas por pesquisadores sobre sua estruturação. Visualizamos fortes relações de contextualização com outras áreas do conhecimento, com a própria área da matemática e com sua história, e com situações e elementos do cotidiano do educando. Também percebemos que os capítulos destinados à abordagem da geometria, nestas coleções, não se apresentam na parte final destes livros, sendo encontrados distribuídos ao longo das obras.

Porém, mesmo que haja um novo posicionamento por parte dos livros didáticos – não descartando estes avanços e sua importância –, como exemplificado nas coleções aqui referenciadas, estes não garantem que a condução do estudo da geometria ocorra de forma satisfatória. Como falamos anteriormente, a condução do estudo da geometria por meio do uso de ferramentas analógicas como o quadro e o piloto e na sua apresentação pelo livro didático, como na representação de figuras, por exemplo, de forma estática, ocorre de forma limitada. Conseguimos perceber, portanto, como a geometria dinâmica pode ser útil na apresentação de conteúdos que ficam limitados ao serem apresentados por meio de suportes analógicos, nos direcionando a enxergarmos as possibilidades de utilização da GD, reconhecendo que esta pode possibilitar a abordagem da geometria de forma interativa, experimental, lúdica e reflexiva.

Embora consideremos de suma importância o reconhecimento e a inclusão de orientações sobre a utilização de tecnologias digitais, incluindo o uso da geometria dinâmica pelo material didático mais utilizado em sala de aula – o livro didático –, não há garantia que os professores de fato se apropriem destas como ferramentas, por não conhecerem suas potencialidades ou por não acreditarem que estas possam de fato colaborar com os processos de ensino e aprendizagem. O professor como mediador da construção do conhecimento, exerce um papel fundamental na condução do ensino e da aprendizagem, e os recursos e os meios que este utilizará determinará a efetivação ou não dos objetivos de suas práticas pedagógicas. Isto demonstra a necessidade de ajustes na formação inicial e continuada dos professores para o ensino da matemática, a fim de que estes percebam estas limitações e sejam incentivados a buscar meios alternativos que tornem o seu ensino efetivo e que atenda as prerrogativas da cultura digital presente na sociedade.

3.2.3 Definindo nosso Objeto de Estudo

Partindo das análises que realizamos, buscamos delimitar um assunto específico para a etapa que escolhemos, objetivando a possibilidade de criação e utilização de materiais dinâmicos em sua abordagem.

Após a sondagem realizada na BNCC, tendo definido a etapa da educação básica, sintetizamos as habilidades previstas da unidade temática da geometria, as dividindo por conteúdos que julgamos pertinentes para os objetivos de nossa pesquisa (Apêndice A). Ao realizar essa síntese, averiguamos a forma de abordagem desses conteúdos pelos livros didáticos que analisamos das duas coleções. A partir desses procedimentos, delimitamos que nossa pesquisa abordaria o estudo das figuras geométricas planas, percebendo fortes possibilidades de trazermos a apresentação de alguns de seus conteúdos por meio da geometria dinâmica, partindo do pressuposto da limitação de sua condução por meio de uma geometria estática.

Desta forma, delimitamos quatro conteúdos que se inserem dentro da esfera deste estudo. São eles: I - Ângulos, objetivando abordar sobre suas relações a partir de duas retas paralelas e uma transversal; II - Polígonos, com foco nos elementos dos polígonos regulares; III - Triângulos, sobre suas classificações e condição de existência; e IV - Quadriláteros, trazendo um estudo inicial sobre essas figuras planas. Compreenderemos melhor sobre as especificidades desses conteúdos em nossa próxima seção.

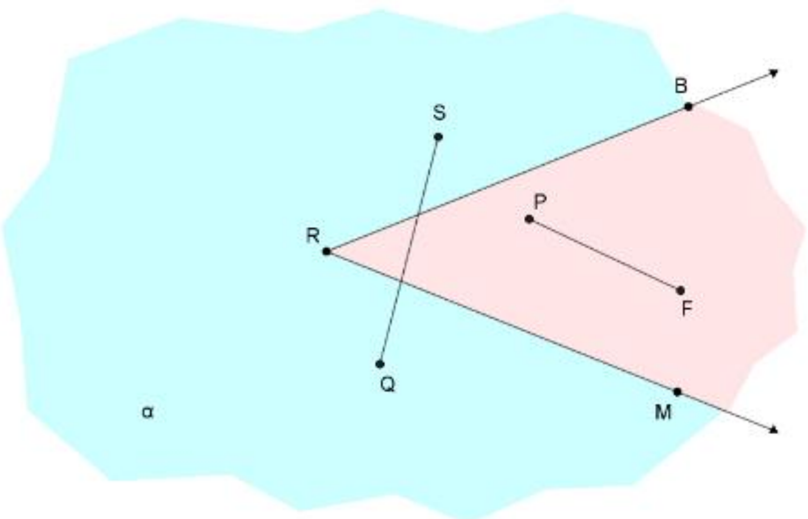
3.3 O ESTUDO DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Nesta seção, trazemos um estudo sobre os conteúdos escolhidos a partir das análises realizadas previamente, delimitando os aspectos que abordamos na produção e análise dos materiais didáticos dinâmicos digitais, a fim de darmos embasamento para o entendimento dos pressupostos trazidos na sua possibilidade de abordagem por meio da geometria dinâmica. Destacamos que nossa escrita nessa seção, de forma geral, partiu da obra dos autores referenciados nas coleções de livros analisados, objetivando a apresentação do estudo das figuras geométricas planas pela perspectiva proposta para os anos finais do ensino fundamental.

3.3.1 Definição, Classificação e Relação de Ângulos

Por definição geral, um ângulo é a figura geométrica determinada por duas semirretas que possuem a mesma origem, podendo ser a região convexa ou não do plano que é determinado por elas. Na Figura 13 abaixo, conseguimos exemplificar esta definição:

Figura 13 - Determinação de um ângulo



Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018a, p. 124); Giovanni Júnior (2018a, p. 230).

Temos o plano α que é subdividido em duas regiões pelas semirretas $\overrightarrow{RB}$ e $\overrightarrow{RM}$, que partem do mesmo ponto de origem, o vértice R. A região rosa é considerada a região convexa, pois dois pontos quaisquer determinam um segmento contido nessa região. Na região azul, podemos perceber a possibilidade de representar dois pontos que são extremidades de um segmento que não está contido nessa região de forma total. Desta forma, a chamamos de região não convexa. As semirretas definem os lados desse ângulo, que em conjunto com sua origem, indicam nominalmente este ângulo por $M\hat{R}B$, $B\hat{R}M$ ou, de forma simplificada, $\hat{R}$. A definição da medida dos ângulos é estabelecida por sua abertura, sendo o grau a unidade-padrão utilizada para sua medição. O grau é definido como uma unidade de medida de um giro correspondente a uma volta completa, dividida por 360 (DANTE, 2018a; GIOVANNI JÚNIOR, 2018a).

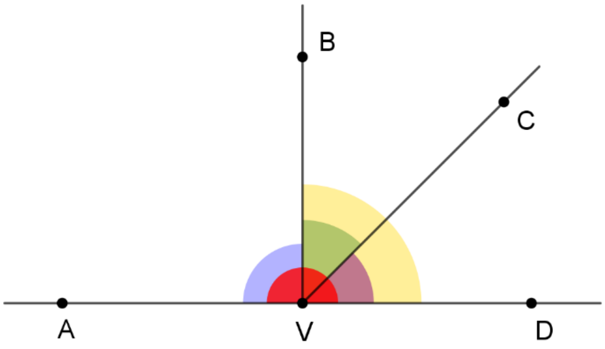
Sendo assim, os ângulos são classificados a partir de sua abertura – o valor dos graus – tendo sua definição a partir do ângulo de 90°, o ângulo reto. Assim temos três grupos: I - ângulo raso, o qual sua abertura corresponde à de 2 ângulos retos; II - ângulo agudo, que possui abertura menor do que o ângulo reto, diferindo do raso por não ter suas semirretas coincidentes; e III - ângulo obtuso, que possui uma abertura maior do que a do ângulo reto e menor que a do ângulo raso (ibid.). A Figura 14 exemplifica as classificações dos ângulos.

Figura 14 - Classificação dos ângulos

Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018a, p. 128).

O estudo dos ângulos também aborda as relações que podem existir entre ângulos distintos (Figura 15). Conheceremos a seguir estas relações e suas definições.

Figura 15 - Relação entre ângulos

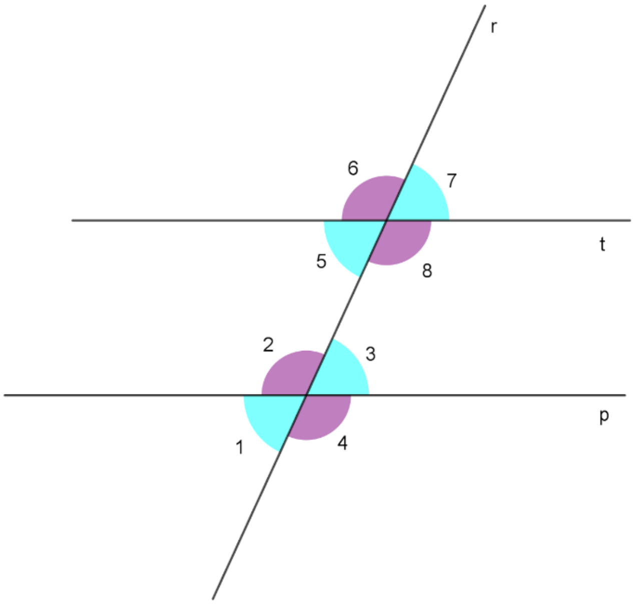


Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018b, p. 168 e 169; 2018c, p. 67 e 68).

- **Ângulos congruentes -** São os ângulos que possuem as medidas de abertura iguais. Ao serem sobrepostos os seus vértices e lados, estes são coincidentes. Assim, temos os ângulos $C\hat{V}D$ e $B\hat{V}C$ como congruentes.
- **Ângulos adjacentes -** São os ângulos que possuem um lado em comum, em que as regiões formadas por eles não possuem outros pontos - além dos pertencentes às semirretas coincidentes - em comum; $B\hat{V}C$ e $A\hat{V}B$ são adjacentes.
- **Ângulos consecutivos -** São aqueles que possuem um lado em comum, mas possuem outros pontos em comum na região que os constitui; $C\hat{V}D$ e $B\hat{V}D$ são ângulos consecutivos.
- **Ângulos complementares e suplementares -** Essa relação diz respeito à soma das medidas de abertura dos ângulos. Dois ângulos são considerados complementares quando a soma de abertura de suas medidas é igual a 90°, ou que um é complemento do outro ($B\hat{V}C$ e $C\hat{V}D$); já os ângulos suplementares, são aqueles que quando somadas as suas medidas de abertura, encontramos a medida igual a 180°, ou que um é suplemento do outro ($A\hat{V}B$ e $B\hat{V}D$).

Há ainda outras relações possíveis de serem encontradas no estudo dos ângulos. Estas podem ser abordadas através da formação de ângulos por retas paralelas cortadas por uma transversal. A Figura 16 apresenta essa construção, em que é possível analisar essas relações.

Figura 16 - Relações de ângulos por retas paralelas e uma transversal



Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018b, p. 148); Giovanni Júnior (2018b, p. 176).

Temos duas retas paralelas (t e p) que ao serem interceptadas pela reta transversal (r), geram oito regiões, as quais delimitam os ângulos, como virmos anteriormente. Além das relações anteriores, podemos também encontrar algumas outras:

- **Ângulos correspondentes -** 1 e 5; 3 e 7; 4 e 8; 1 e 5. Em que, temos: 1 = 5; 3 = 7; 4 = 8; 1 = 5.
- **Ângulos opostos pelo vértice -** 1 e 3; 2 e 4; 5 e 7; 6 e 8. Em que, temos: 1 = 3; 3 = 7; 4 = 8; 1 = 5.
- **Ângulos colaterais externos -** 1 e 6; 4 e 7. Em que, temos: 1 + 6 = 180°; 4 + 7 = 180°.
- **Ângulos colaterais internos -** 3 e 8; 2 e 5. Em que, temos: 3 + 8 = 180°; 2 + 5 = 180°.
- **Ângulos alternos externos -** 1 e 7; 4 e 6. Em que, temos: 1 = 7; 4 = 6.
- **Ângulos alternos internos -** 2 e 8; 3 e 5. Em que, temos: 2 = 8; 3 = 5.

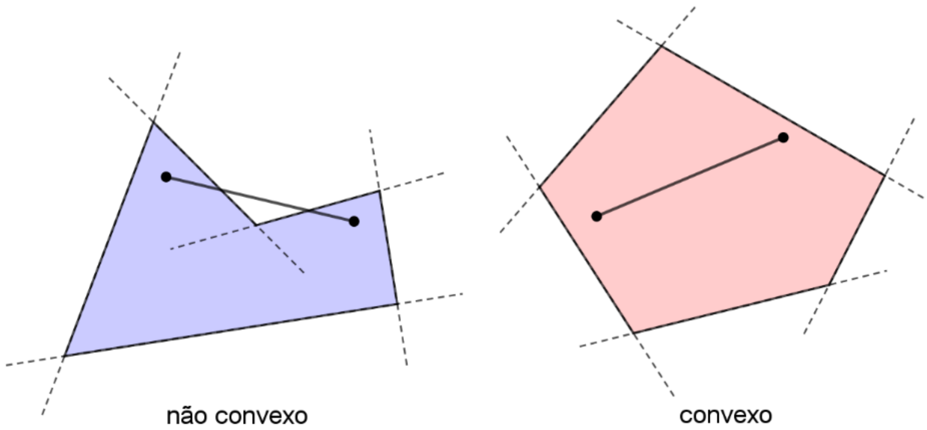
A existência dos ângulos e de suas relações nos permitem entender as propriedades que regem o estudo de outras figuras geométricas planas, como veremos a seguir.

3.3.2 Estudo dos Polígonos

Os polígonos são figuras geométricas planas que são delimitadas por linhas planas simples exclusivamente fechadas, que delimitam uma região do plano por segmentos de reta. Essa região interna é reconhecida como um polígono em que os segmentos que a delimitam são os lados do polígono, e os pontos de encontro destes são caracterizados como os seus vértices. Também podemos defini-los como um conjunto de linhas poligonais fechadas simples (DANTE, 2018b; GIOVANNI JÚNIOR, 2018a).

Os polígonos se caracterizam em dois grandes grupos: os polígonos convexos e os não convexos (Figura 17).

Figura 17 - Exemplos de polígonos convexos e não convexos



Fonte: O autor (2023) com base em Dante (2018b, p. 151); Giovanni Júnior (2018a, p. 212).

Sua identificação parte da configuração da sua região interna. Se convexa, é considerado um polígono convexo, se não possui uma região convexa, então é considerado um polígono não convexo. Em nosso estudo, focaremos nos polígonos considerados convexos.

A definição nominal dos polígonos é estabelecida a partir dos seus ângulos internos. Os lados de qualquer polígono possuem o número igual de ângulos. A Tabela 6 apresenta alguns exemplos de nomes de polígonos, a partir do número de lados ou de ângulos destes.

Tabela 6 - Nomes dos polígonos pelo número de lados ou ângulos

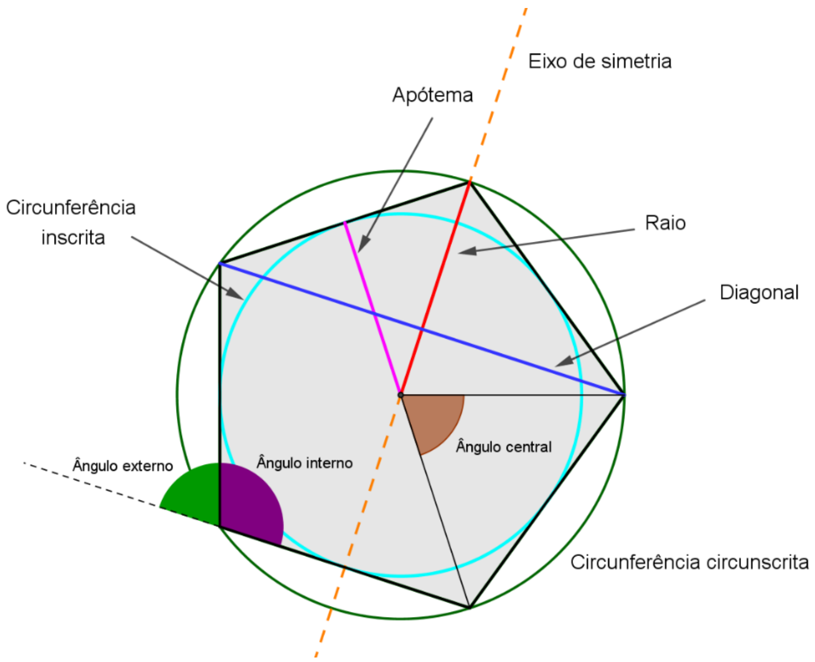
Número de lados ou de ângulos	Nome do polígono	11	undecágono
		12	dodecágono
3	triângulo	13	tridecágono
4	quadrilátero	14	tetradecágono
5	pentágono	15	pentadecágono
6	hexágono	16	hexadecágono
7	heptágono	17	heptadecágono
8	octógono	18	octodecágono
9	eneágono	19	eneadecágono
10	decágono	20	icoságono

Fonte: O autor (2023) adaptado de Giovanni Júnior (2018a, p. 213).

Ainda dentro da classificação de polígonos, temos aqueles que são considerados regulares e os não regulares. Um polígono é considerado regular quando todos os seus lados possuem a mesma medida e todos os seus ângulos internos são congruentes. Nosso estudo sobre polígonos está conduzido pela abordagem destes que são regulares.

Estes polígonos regulares possuem alguns elementos na sua composição; falaremos brevemente sobre cada um deles. A Figura 18, apresenta como estes elementos se encontram nos polígonos.

Figura 18 - Elementos de um polígono regular



Fonte: O autor (2023).

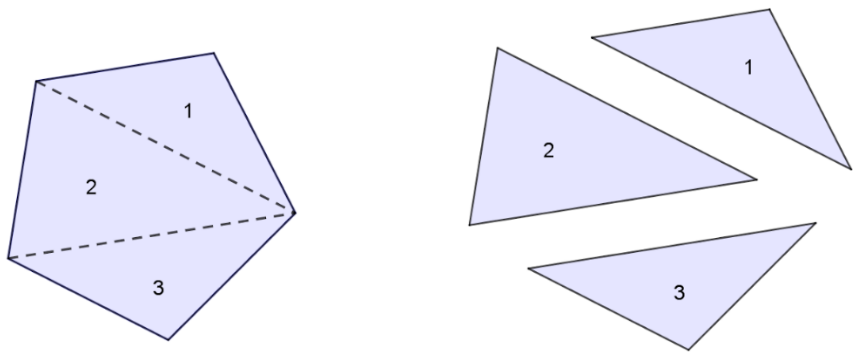
Um polígono pode ser definido por meio de uma circunferência que o circunscreve a partir de um número de pontos distintos sobre ela, ligando cordas[5] consecutivas a estes, para serem definidos os polígonos inscritos nessa circunferência. Ao ser dividida em um número de arcos congruentes, sendo sua quantidade maior que dois, as cordas consecutivas determinam um polígono regular inscrito, nessa circunferência (GIOVANNI JÚNIOR, 2018d). Partindo desse pressuposto, conseguimos encontrar alguns elementos que se integram a esses polígonos regulares inscritos:

- O **raio** de um polígono regular é o raio da circunferência em que o polígono está inscrito, sendo um segmento que parte do seu centro e tem sua extremidade em um dos vértices desse polígono inscrito.
- O **apótema** é caracterizado pelo segmento que parte do centro da circunferência até o ponto médio de um lado do polígono regular inscrito.
- O **eixo de simetria** é o elemento que divide o polígono em duas partes que são simétricas entre si.
- A **diagonal**, é o elemento que se constitui em um segmento que cruza a região poligonal tendo suas extremidades pertencentes aos vértices não consecutivos do polígono. Podemos definir o número de diagonais (n_d) que cada polígono terá a partir do seu número de lados, em que $n_d = \frac{lados\,(lados-3)}{2}$.
- O **ângulo central**, é o ângulo que seu vértice se encontra no centro da circunferência que o circunscreve, tendo seus lados passando por dois vértices consecutivos do polígono inscrito. Sua medida (a_c) é dada pela divisão de sua amplitude máxima ($360°$) pelo número de lados (n), ou seja $a_c = \frac{360°}{n}$.
- O **ângulo externo** possui a mesma medida de abertura dos ângulos centrais. Assim, sua medida pode ser encontrada também por $a_e = \frac{360°}{n}$.
- O **ângulo interno** de um polígono é o ângulo que possui seu vértice e lados coincidentes com os do polígono; tem sua medida encontrada por meio de $a = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Esses ângulos internos e externos do mesmo vértice do polígono são sempre adjacentes suplementares.

[5] "Corda de uma circunferência é todo segmento de reta cujas extremidades são partes da circunferência." (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 224).

Podemos calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, a partir do conhecimento da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer – como veremos adiante –, que é igual a 180°. Para encontrarmos a medida desta soma, podemos decompor o polígono em triângulos, levando em consideração que sabemos a soma dos ângulos internos desses triângulos. Para isso, traçamos as diagonais do polígono partindo de um único vértice (GIOVANNI JÚNIOR, 2018c). Na Figura 19 temos um exemplo de decomposição de um pentágono, que ao serem traçadas as diagonais, o dividem em três triângulos.

Figura 19 - Decomposição de um polígono em triângulos



Fonte: O autor (2023) adaptado de Giovanni Júnior (2018c, p. 186).

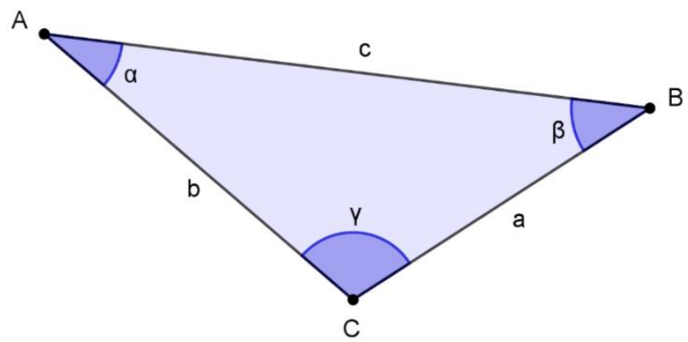
Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, a medida dos ângulos internos do polígono, neste caso o pentágono, será a soma das medidas dos três triângulos que foram gerados em sua decomposição; ou seja, multiplicamos o número de triângulos por 180°. Porém, para um polígono que possui uma maior quantidade de lados, esse processo pode ser longo. Assim, podemos encontrar um caminho que nos ajuda a obter este resultado rapidamente. A quantidade de triângulos formados na decomposição de cada polígono sempre será igual ao número de lados menos 2. Assim, para um pentágono, por exemplo, teremos $180° \cdot (5-2) = 540°$. E para sabermos o valor específico de cada ângulo interno, basta dividir essa soma pelo número total de ângulos internos, onde teremos $540° \div 5 = 108°$.

Como falado anteriormente, falaremos a seguir um pouco mais sobre os triângulos, destacando suas classificações e sua condição de existência.

3.3.3 Definição e Classificação de Triângulos

O triângulo é definido como qualquer polígono que possua três lados e, consequentemente, três ângulos internos e três vértices (DANTE, 2018a; GIOVANNI JÚNIOR, 2018a). Observando a Figura 20, identificamos os elementos básicos que compõem os triângulos. Os pontos A, B e C, são os seus vértices; os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os seus lados (c, a e b respectivamente); e os ângulos $\propto$, β, e γ são os ângulos internos do triângulo.

Figura 20 - Elementos de um triângulo



Fonte: O autor (2023).

Em sua nomenclatura, podemos utilizar o símbolo $\triangle$ para indicá-lo. Desta forma, o triângulo ABC pode ser representado por $\triangle ABC$.

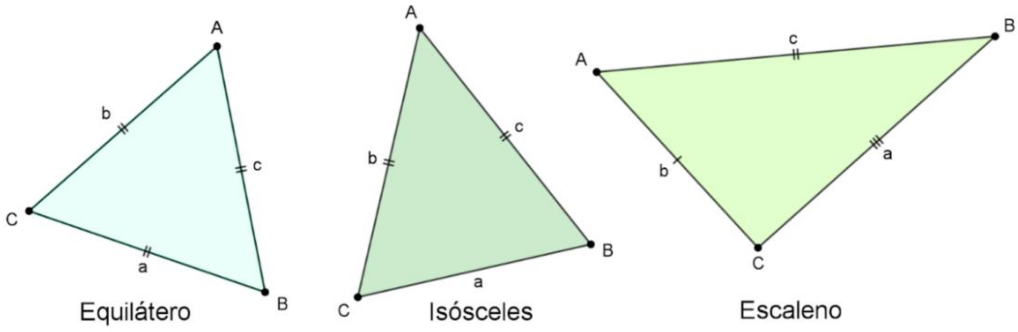
Há duas possibilidades de classificação dos triângulos: pelas medidas dos seus lados ou pelas medidas de seus ângulos. Veremos a seguir as características de cada classificação bem como a sua representação gráfica.

Classificação quanto aos lados (Figura 21):

- O **triângulo equilátero** é aquele que possui o mesmo comprimento de medida em todos os seus três lados. Desta forma, nele temos que os lados $a = b = c$;
- O **triângulo isósceles** é identificado por possuir dois lados congruentes (com mesma medida) e o terceiro lado com medida diferente destes. Assim, em nosso exemplo temos os lados $b = c \neq a$;

- O **triângulo escaleno** é a denominação dada ao triângulo que possui os seus três lados com comprimentos de medidas diferentes. Portanto, temos que $a \neq b \neq c$.

Figura 21 - Classificação de triângulos quanto os lados

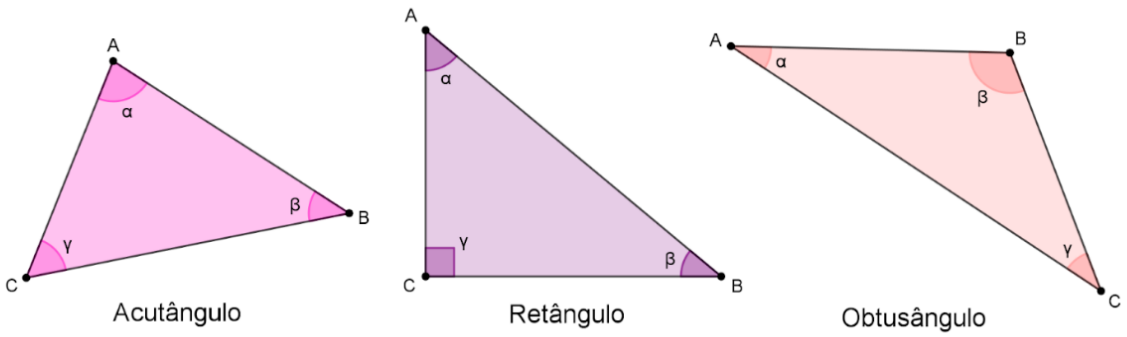


Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018a, p. 218 e 219).

Classificação quanto aos ângulos (Figura 22):

- O **triângulo acutângulo** é aquele cujos os três ângulos internos são agudos. Assim, nele temos que os ângulos $\propto < 90°$, $\beta < 90°$ e $\gamma < 90°$;
- O **triângulo retângulo** é composto por um ângulo reto e seus outros dois agudos. Desta forma, $\gamma = 90°$, $\alpha < 90°$, e $\beta < 90°$;
- O **triângulo obtusângulo** possui um de seus ângulos obtuso e seus outros dois ângulos internos agudos. Portanto, percebemos que $90° < \beta < 180°$, $\propto < 90°$, e $\gamma < 90°$.

Figura 22 - Classificação de triângulos quanto os ângulos



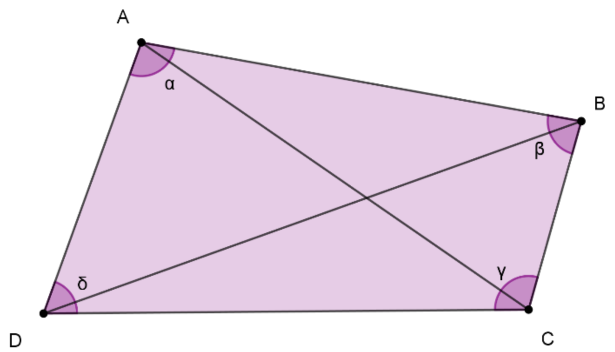
Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018a, p. 219).

É importante destacar que falando sobre ângulos, os triângulos possuem uma regra geral para todos as suas classificações: a soma dos seus ângulos internos sempre será de 180°. Desta forma, $\propto + \beta + \gamma = 180°$. Outro ponto de destaque a ser falado é sobre a condição de existência destes polígonos. Para que seja possível constituir um triângulo, a medida de um de seus lados deve ser sempre menor que a soma dos outros dois lados. Diante disso, tomando como referência o triângulo da Figura 20, podemos afirmar que: $a < b + c$, bem como $b < a + c$, e que $c < a + b$ (GIOVANNI JÚNIOR, 2018b).

3.3.4 Estudo de Quadriláteros e suas Classificações

Definimos como quadrilátero todo e qualquer polígono que possui quatro lados, bem como quatro vértices e quatro ângulos internos (DANTE, 2018a; GIOVANNI JÚNIOR, 2018a). Na Figura 23 abaixo, podemos observar os elementos básicos que compõem os quadriláteros. Os pontos A, B, C, e D são os vértices deste quadrilátero; os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os lados do quadrilátero; e os ângulos $\propto$, β, γ, e δ são os ângulos internos do quadrilátero.

Figura 23 - Elementos de um quadrilátero



Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018a, p. 221).

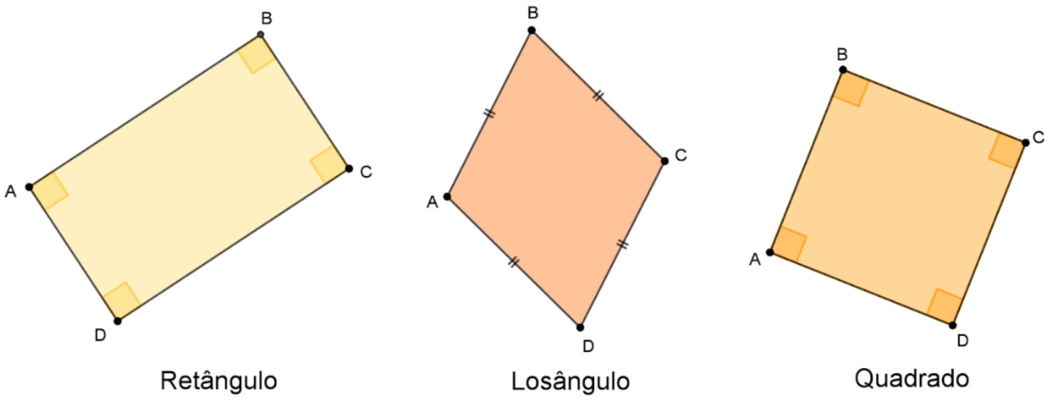
É importante destacar que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, cujas extremidades são dois vértices não consecutivos, são diagonais do quadrilátero, que são outros elementos que fazem parte de sua composição (GIOVANNI JÚNIOR, 2018a). Sobre os ângulos internos dos quadriláteros, a soma de suas medidas sempre será igual a 360°. Assim, $\propto + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Os quadriláteros possuem uma grande variedade quando falamos das características específicas que eles podem apresentar, permitindo que eles sejam agrupados em diferentes tipos. A seguir apresentamos dois principais grupos de quadriláteros e suas nomenclaturas:

Paralelogramos - São os quadriláteros que possuem dois pares de lados – que são opostos – paralelos entre si. Dentre eles, destacamos o retângulo, o losango e o quadrado (Figura 24):

- O **retângulo** é o paralelogramo que possui os quatro ângulos internos congruentes, sendo estes ângulos retos;
- O **losango** é o paralelogramo que sua constituição é composta por quatro lados congruentes;
- O **quadrado** é definido como o paralelogramo que tem os quatro lados e os quatro ângulos internos congruentes, consequentemente sendo estes ângulos retos.

Figura 24 - Paralelogramos



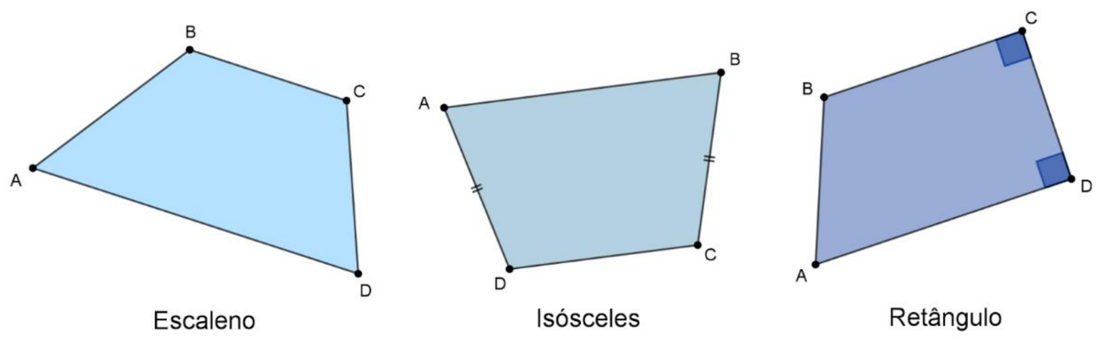
Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018a, p. 221 e 222).

Destacamos que pelo fato de o quadrado possuir as mesmas características do retângulo e do losango, ele é considerado um caso particular de retângulo e um caso particular de losango (ibid.).

Trapézios - São os quadriláteros que possuem apenas dois lados paralelos. Estes lados que são paralelos são denominados como as bases do trapézio; as chamamos de base menor e base maior. Os trapézios se subdividem em três tipos: os trapézios escalenos, os trapézios isósceles e os trapézios retângulos (Figura 25):

- O **escaleno** são os trapézios que os dois lados paralelos possuem medidas diferentes;
- O **isósceles** se configura como os trapézios que os lados não paralelos são congruentes;
- O **retângulo** se distingue dos demais tipos de trapézios por possuir dois ângulos internos retos.

Figura 25 - Trapézios



Fonte: O autor (2023) com base em Giovanni Júnior (2018a, p. 222).

Como falado anteriormente, o par de lados que são paralelos nos trapézios são considerados as suas bases. Nos exemplos acima, portanto, temos no trapézio escaleno o lado $\overline{AD}$ como sua base maior e o lado $\overline{BC}$ como sua base menor; no trapézio isósceles o lado $\overline{AB}$ é a sua base maior e o lado $\overline{DC}$ a base menor; e no trapézio retângulo sua base maior é o lado $\overline{AD}$ e a base menor o lado $\overline{BC}$.

O enfoque desta seção nos conduz a enxergar alternativas de abordar estes conteúdos, com suas especificidades, por meio de tecnologias digitais, especificamente em sua abordagem a partir de modelos didáticos dinâmicos digitais possíveis de serem criados por meio das possibilidades fornecidas pelo ambiente de geometria dinâmica em foco nesta pesquisa, o GeoGebra.

4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa tem por finalidade conjecturar as potencialidades de utilização de um ambiente de geometria dinâmica para a criação e utilização de materiais didáticos dinâmicos digitais, objetivando o ensino da geometria na educação básica, realizando uma amostragem através do ensino de figuras geométricas planas para os anos finais do ensino fundamental. Sendo assim, nossa pesquisa se configura como uma pesquisa exploratória, objetivando através dos dados analisados, averiguar se os materiais dinâmicos podem ser vistos como instrumentos eficazes na construção do conhecimento em questão, buscando, dentro desta perspectiva, analisar as informações seguindo uma abordagem qualitativa.

Diante das evidentes problemáticas apresentadas no contexto educacional sobre as complicações e limitações presentes no ensino da Geometria, o método que utilizamos em nossa pesquisa segue uma linha hipotético-dedutiva, onde apresentamos, a partir de nossas análises, caminhos que podem atenuar essas problemáticas, e possibilidades de conduzir o ensino e aprendizagem desta área do conhecimento de forma dinâmica, interativa e experimental-reflexiva.

A fim de mensurar a problemática de nossa pesquisa, realizamos uma revisão bibliográfica que se dividiu em três principais momentos. Inicialmente, procuramos estudos que apontassem as limitações e dificuldades do ensino e aprendizagem da Geometria, tendo sido apresentadas por pesquisas realizadas e por estudiosos da área; sobre a evolução das Tecnologias de Informação e Comunicação na sociedade, e como as instâncias educacionais têm se apropriado dela – ou não – na condução de suas práticas pedagógicas, e sobre sua relação com o perfil dos estudantes contemporâneos.

No segundo, nossa revisão se atentou a identificar estudos que abordassem o uso de materiais didáticos na aprendizagem, conjecturando se sua utilização pode colaborar no preenchimento das lacunas que se apresentam no estudo da Geometria, e sobre a Geometria Dinâmica, mais especificamente sobre *softwares*/ambientes de GD, a fim de entender como estes podem ser úteis na criação de materiais didáticos, sendo estes dinâmicos digitais. No terceiro momento, diante da possibilidade de conduzir nossa pesquisa por meio da teoria da Abordagem Instrumental de Rabardel, além de esquadrinhar sobre seu estudo, buscamos pesquisas que se apoiaram nesta teoria para o seu desenvolvimento, a fim de enxergar suas aplicabilidades e trazermos uma sintetização deste estudo, o contextualizando com nossa pesquisa.

Sendo uma pesquisa de cunho educacional, consideramos importante realizar uma análise documental da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o documento que normatiza as aprendizagens fundamentais que devem ser desenvolvidas por todos alunos durante as etapas da Educação Básica. Nossa análise objetivou entender sua estruturação de forma geral, e se atentou a averiguar suas orientações e direcionamentos voltados de forma específica para o ensino da Geometria e das ênfases dadas sobre o uso de tecnologias. Além desta análise, consideramos pertinente averiguarmos estas mesmas especificidades em livros didáticos propostos para a educação básica, que são os materiais didáticos mais difundidos nas práticas pedagógicas. Assim, realizamos a análise de duas coleções diferentes de livros didáticos propostos para os anos finais do ensino fundamental, buscando também constatar afirmações de teóricos sobre sua estruturação.

Também utilizamos os livros didáticos analisados como referência para a explanação de nosso objeto teórico de estudo, buscando apresentá-lo por meio das perspectivas apresentadas pelos autores destes livros. Definimos a abordagem do nosso estudo teórico em quatro conteúdos: I - Definição, classificação e relação de ângulos; II - Elementos de polígonos regulares; III - Classificação de triângulos; e IV - Classificação de quadriláteros. Destacamos que as análises da BNCC quanto a das coleções dos livros didáticos também serviram para a definição do conteúdo de estudo da geometria e da etapa da educação básica que nos debruçamos em nossa pesquisa.

Após a assimilação das etapas anteriores, dentro das perspectivas analisadas e compreendidas, realizamos uma busca na plataforma online do GeoGebra, a fim de encontrarmos materiais didáticos produzidos que abordassem sobre o estudo das figuras geométricas planas na perspectiva da divisão dos conteúdos realizada. Em nossa busca, identificamos dois materiais que condizem com nossa proposta. Um deles é trazido em nossa pesquisa na íntegra e o outro realizamos adaptações para atendê-la. Para englobar todos os quatro conteúdos propostos, realizamos a produção de outros dois materiais por meio do ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra, trazendo uma proposta de produção diferente para cada um deles. Na segunda etapa dessa fase, realizamos uma análise à luz do nosso referencial teórico desses materiais dinâmicos, buscando perceber possibilidades oferecidas na produção destes pelo AGD, e observando potencialidades de sua utilização pelo educador em suas práticas pedagógicas, compreendendo sua possibilidade por meio da estruturação da Abordagem Instrumental.

5 PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS MATERIAIS DIDÁTICOS DINÂMICOS DIGITAIS

Com base em nosso referencial teórico e nas análises e apontamentos realizados anteriormente, nossa pesquisa se propôs a encontrar e produzir materiais didáticos dinâmicos digitais no AGD do GeoGebra, com o propósito de serem percebidas as vantagens e potencialidades do seu uso em sala de aula como instrumentos pedagógicos, especificamente para o ensino e a aprendizagem das figuras geométricas planas para os anos finais do ensino fundamental. Portanto, este capítulo se atentará a analisar estes materiais didáticos relatando conjuntamente sobre a sua produção, dentro da perspectiva de serem utilizados no processo de ensino e aprendizagem.

Vale ressaltar que nossa pesquisa se propôs a conjecturar isso dentro do campo de estudo da geometria, restringindo a essa etapa da educação básica, mas sua apropriação por parte dos educadores pode incluir as demais áreas que compõem a educação de forma geral.

Propondo exemplificar as possibilidades de desenvolvimento e utilização do GeoGebra, dentre os materiais dinâmicos que analisamos buscamos trazer quatro possibilidades que exemplificam formas diferentes de criação e utilização destes por meio do AGD. Cada MDI aborda um dos quatro conteúdos específicos determinados em nossa pesquisa, do estudo das figuras geométricas planas. Estas especificações estão organizadas como sintetizado no Quadro 3 abaixo.

Quadro 3 - Sintetização das especificações dos materiais dinâmicos

MATERIAL DINÂMICO	CONTEÚDO ABORDADO	ESPECIFICAÇÃO DE AUTORIA	FORMA DE PRODUÇÃO NO AGD DO GEOGEBRA
MDI I	Ângulos e suas Relações	Produção própria	Versão desktop
MDI II	Polígonos Regulares e seus Elementos	Adaptação de outra autoria	Disponível na plataforma online / adaptação realizada na versão desktop
MDI III	Classificação de Triângulos	Outra autoria	Disponível na plataforma online
MDI IV	Estudo dos Quadriláteros	Produção própria	Plataforma online com base em um livro didático

Fonte: O autor (2023).

O primeiro material dinâmico apresentado diz respeito a uma produção nossa realizada por meio da versão desktop do GeoGebra, estruturada para atender a abordagem do estudo das relações entre ângulos; o segundo material analisado é uma adaptação nossa de um material didático encontrado na plataforma online do

GeoGebra, desenvolvido para o estudo dos elementos de polígonos regulares e suas classificações; no terceiro analisamos uma produção, de outra autoria, disponível também na plataforma online do AGD, que aborda a classificação dos triângulos; e, por último, apresentamos o quarto material que também é uma produção nossa, desenvolvido a partir de um dos livros didáticos analisados, que aborda o estudo dos quadriláteros.

Destacamos que, a fim de permitir uma melhor compreensão do que será exposto em nossa análise, no início da abordagem de cada um dos materiais dinâmicos disponibilizamos duas possibilidades de acesso a eles, que se encontra dentro da plataforma online do GeoGebra: a primeira por meio de link, e a segunda através de um *QR Code*, tendo sua leitura e acesso possível por meio de dispositivos móveis.

Objetivamos com estas análises a reflexão por parte do educador de como este pode se apropriar dos artefatos disponíveis – em destaque, os digitais – na obtenção de instrumentos úteis para a construção do conhecimento em sala de aula com seus educandos, destacando as possibilidades disponíveis para não só apropriação destes materiais, mas também instigá-los a produzir seus próprios materiais, partindo de suas concepções prévias e dos objetivos que pretendem alcançar na condução dos seus objetos em estudo.

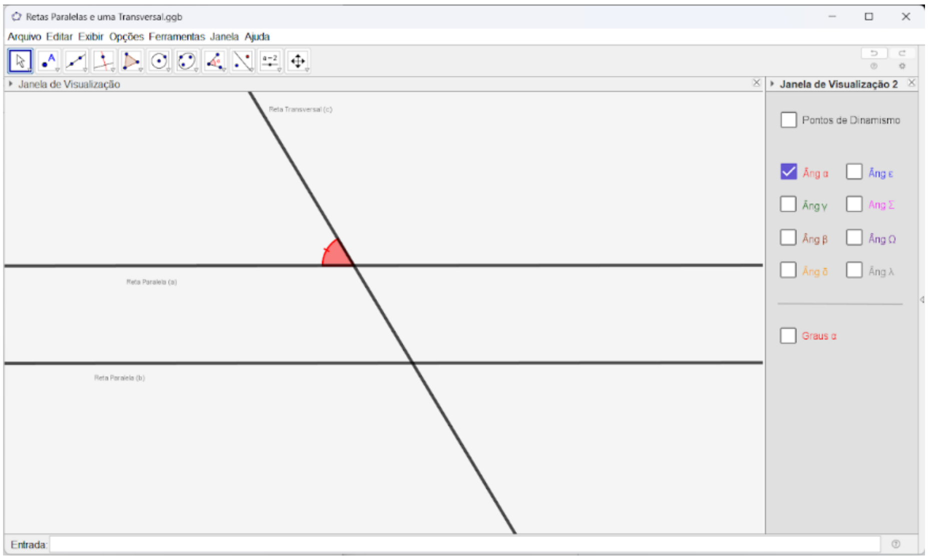
5.1 MDI I - ÂNGULOS E SUAS RELAÇÕES

Como falado anteriormente, o primeiro material dinâmico (MDI) a ser abordado é uma produção nossa pensada em atender a abordagem do estudo das relações entre ângulos, que neste caso é apresentada através de um par de retas paralelas entre si, intersectadas por uma reta transversal. Para este primeiro MDI, traremos a possibilidade de sua produção através da versão desktop do GeoGebra, que também pode ser compartilhada na plataforma online. Destacamos que a descrição detalhada da produção deste MDI pode ser encontrada no seu protocolo de construção, o qual descreve os procedimentos utilizados na construção dentro do GeoGebra (Apêndice B).

As especificações a serem abordadas neste MDI partiram das reflexões acerca da abordagem do conteúdo de relações de ângulos por retas paralelas e uma transversal, nas coleções de livros didáticos que analisamos no capítulo 2. Assim, entendendo as limitações observadas nas figuras estáticas destes livros, propomos sua abordagem de forma dinâmica, permitindo que o professor construa o conhecimento se apropriando dos benefícios que o dinamismo e a ludicidade podem trazer para a sala de aula, possibilitando que o aluno comprove, reflita e analise as prerrogativas atribuídas a este conteúdo, através da manipulação direta.

Ao acessar o MDI[6], nos deparamos com sua tela inicial (Figura 26) que apresenta duas retas paralelas entre si e uma reta transversal que as intersecta, que estão identificadas nominalmente. Ao observar uma das regiões formadas pela interseção da reta transversal “c” com a reta “a”, veremos a exibição de um ângulo possível de ser formado. No canto direito, encontramos uma barra com caixas que ao serem ativadas permitem a exibição de alguns recursos, que veremos adiante.

Figura 26 - Tela inicial MDI I na versão desktop do GeoGebra



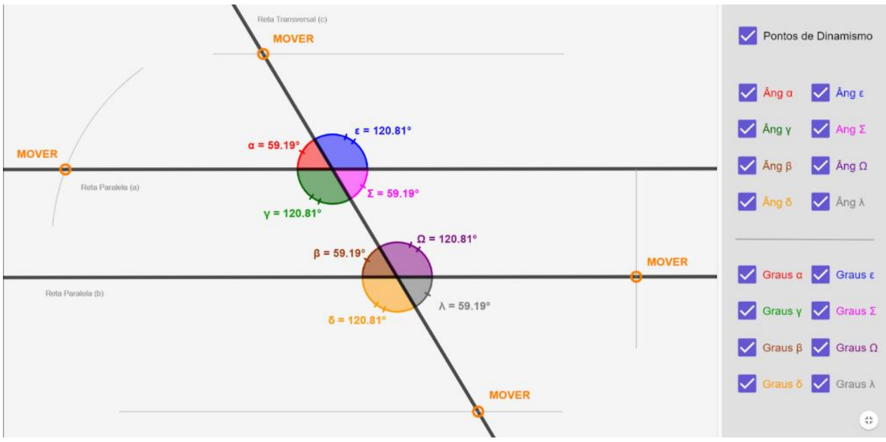
Fonte: O autor (2023).

A primeira caixa “Pontos de Dinamismo” exibida na barra lateral, ao ser selecionada, exibirá alguns controles deslizantes em destaque indicados pela descrição “mover”, distribuídos ao longo da tela (Figura 27). Estes permitem a movimentação da posição das retas paralelas e da reta transversal. Logo abaixo, há um conjunto de caixas que permitem a exibição de todos os ângulos possíveis de

[6] O MDI pode ser acessado por meio do link: <https://www.geogebra.org/m/s34vkcdw> ou pela leitura do *QR Code* ao lado.

serem enxergados na construção que compõem o MDI. No momento que o ângulo é exibido, pela ativação de sua caixa, na região abaixo surge a possibilidade de exibir a medida dos graus de sua amplitude; isto ocorrendo de forma correspondente a cada um dos ângulos.

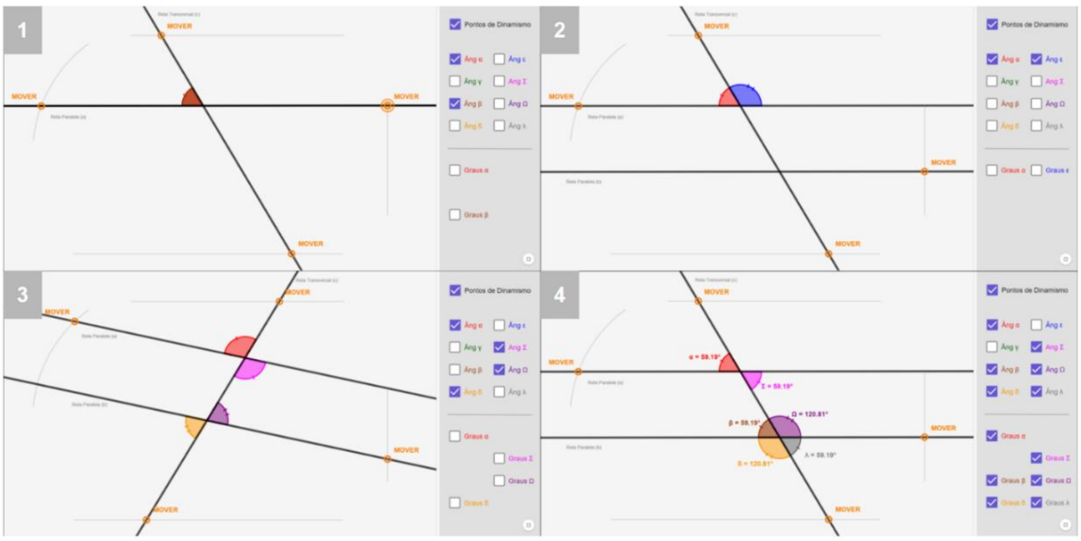
Figura 27 - Exibição de todos elementos disponíveis no MDI I



Fonte: O autor (2023).

O educador ao usar este MDI, dispõe de diferentes possibilidades de abordar o conteúdo em questão, por meio da exibição ou ocultamento dos elementos que este dispõe, e por meio da manipulação destes elementos, a fim de serem percebidas as suas configurações e propriedades. A Figura 28, apresenta quadros com algumas diferentes possibilidades de configuração gerada pela manipulação do MDI.

Figura 28 - Quadros com diferentes possibilidades de manipulação do MDI I



Fonte: O autor (2023).

No quadro 1, vemos a possibilidade de movimentação da reta paralela “b”, fazendo-a coincidir com a reta paralela “a”, a fim de perceber a correspondência entre os ângulos formados por elas com a reta transversal “c”, possibilitando a comprovação das relações entre os ângulos com estas retas. No quadro 2, é demonstrado a possibilidade de, a partir da ativação de ângulos específicos, abordar sobre ângulos suplementares. No quadro 3, vemos a possibilidade de trabalhar sobre ângulos opostos pelo vértice, além da demonstração da possibilidade de movimentação dos elementos a fim de perceber a invariância das propriedades. No quadro 4 destaca-se a possibilidade de comprovação das relações entre os ângulos, através da exibição de seus graus de amplitude.

Estas são apenas algumas das formas que o educador poderá trabalhar com este MDI. Há diversas alternativas de, com este MDI, abordar o estudo de relações entre ângulos, de acordo com os objetivos do educador. Outra questão a ser relatada é a forma lúdica apresentada através de cores e elementos do MDI, que permitem uma interação mais instigante por parte dos alunos. Os controles disponíveis induzem o indivíduo a querer movimentá-los a fim de perceber o que é gerado por meio da sua manipulação; e com as cores, eles podem fazer associações e conseguir identificar diferentes elementos presentes na construção geométrica.

Através destes recursos os alunos conseguem explorar as propriedades do estudo dos ângulos, perceber suas relações, comprová-las e fazer conjecturas acerca de seu estudo, de forma dinâmica e interativa. O educador, devidamente instruído sobre o objeto teórico em estudo, consegue estimular e desenvolver nos alunos os objetivos pré-estabelecidos e as habilidades requeridas no aprendizado das relações entre ângulos.

5.2 MDI II - POLÍGONOS REGULARES E SEUS ELEMENTOS

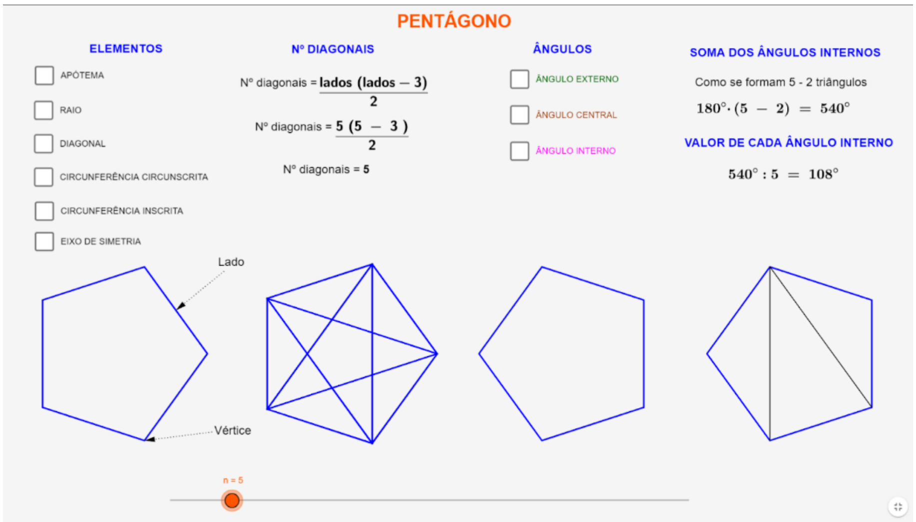
Nosso segundo MDI em análise, traz um exemplo de abordagem do estudo de polígonos regulares, em que na sua composição são destacados os elementos que podemos encontrar nestes polígonos e as suas relações. Nessa proposta, trazemos uma adaptação nossa de um material didático[7] que se encontra disponível na plataforma online do GeoGebra. Nele realizamos a sua tradução para o português, e

[7] Material didático original disponível em: <https://www.geogebra.org/m/UBtnJqY3>. Acesso em: 05 mar 2023.

modificamos a disposição dos elementos de seu *template*, bem como a alteração de suas cores, a fim de torná-lo mais atrativo para o público-alvo. A identificação das modificações realizadas neste MDI pode ser encontrada no seu protocolo (Apêndice C).

A Figura 29 a seguir, apresenta a disposição inicial deste MDI adaptado[8]. No canto inferior central, vemos o único controle deslizante que o material dispõe, que faz referência ao número de lados do polígono regular a ser exibido em sua janela, sendo sempre indicado o seu nome no canto superior central à medida que seu cursor é alterado.

Figura 29 - Tela inicial do MDI II



Fonte: O autor (2023).

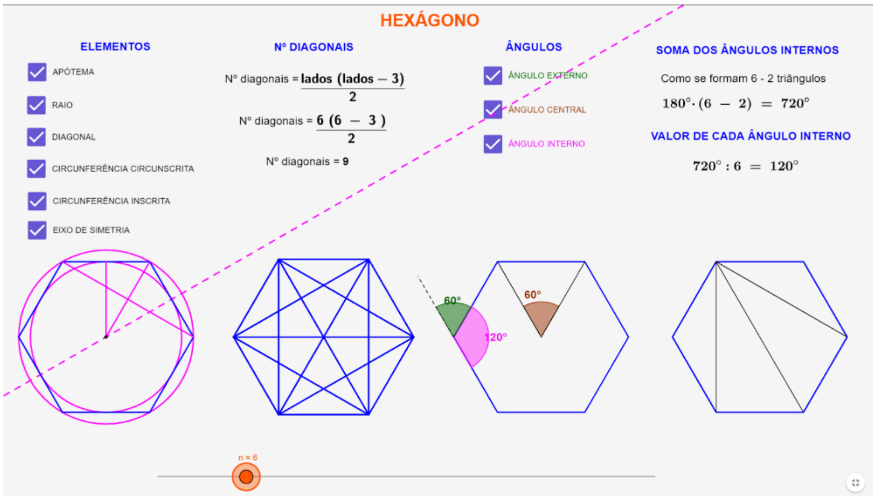
Ao centro da janela, identificamos que o *template* do MDI é dividido em quatro colunas, que trazem informações acerca do polígono regular escolhido pelo controle deslizante. A primeira coluna apresenta um grupo de caixas que permitem a exibição dos elementos que compõem o polígono: o apótema, o raio, a diagonal, a circunferência circunscrita, a circunferência inscrita e o eixo de simetria. Ao serem selecionados, sua representação gráfica e localização é exibida no exemplo posicionado logo abaixo; ao lado, na segunda parte, vemos a exibição do número total de diagonais que o polígono em questão possui, e a demonstração de como encontrar

[8] O MDI pode ser acessado por meio do link: <https://www.geogebra.org/m/yhgqawdn> ou pela leitura do *QR Code* ao lado.

este número algebricamente, a partir do seu número de lados; na terceira, vemos três caixas que permitem a exibição de um exemplo de cada um dos três ângulos possíveis de serem encontrados no polígono: o ângulo central, o ângulo interno e o ângulo externo, apresentando-os graficamente logo abaixo; e na quarta coluna, a partir da lógica de decomposição do polígono em triângulos, é demonstrado a possibilidade de encontrar o valor da soma total dos ângulos internos e o valor individual de cada um deles.

Na Figura 30 a seguir, apresentamos a exibição de todos os elementos possíveis de serem ativados no MDI, tendo como exemplo o polígono "hexágono" que é exibido ao ser escolhido o número de lados correspondente a ele.

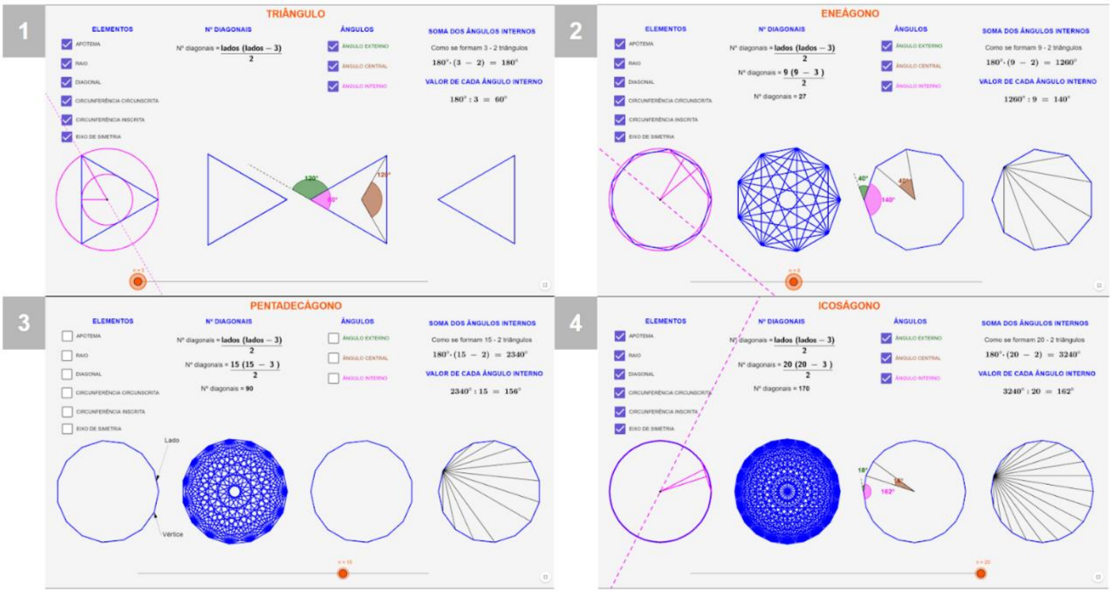
Figura 30 - Exibição de todos elementos disponíveis no MDI II



Fonte: O autor (2023).

Através das representações gráficas exibidas na janela, é possível perceber a localização dos elementos deste polígono, a fim de estudar as propriedades de cada uma delas de forma geral ou individual, ao ser ativada apenas a caixa correspondente ao que se pretende abordar. A Figura 31 apresenta algumas outras possibilidades na manipulação do MDI sobre os polígonos regulares.

Figura 31 - Quadros com diferentes possibilidades na manipulação do MDI II



Fonte: O autor (2023).

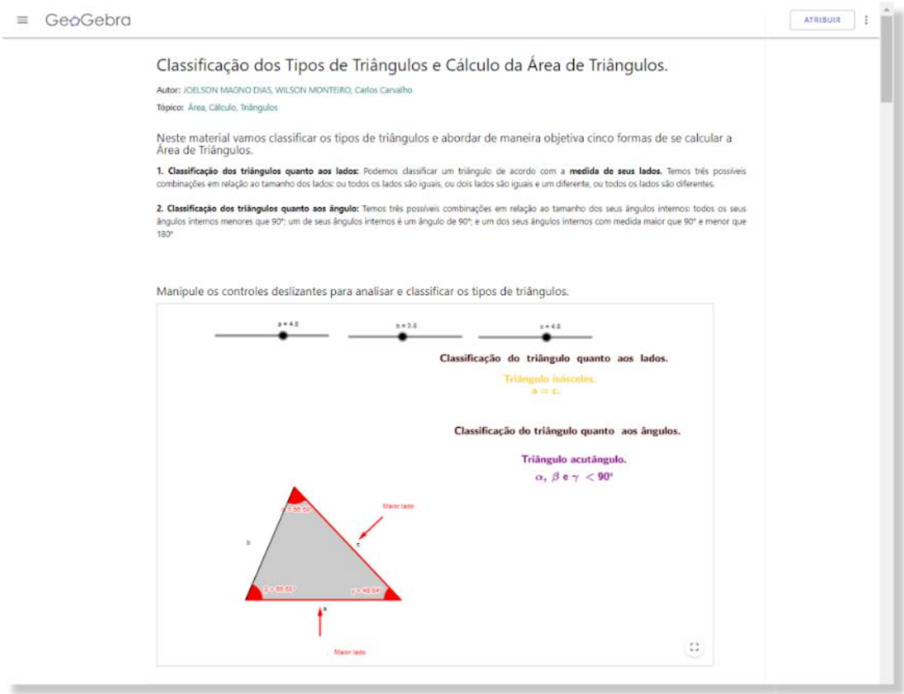
Este MDI permite o estudo de 17 polígonos regulares diferentes, possibilitando o estudo dos seus elementos, além de perceber como estes elementos estão relacionados em cada um deles, e como eles se modificam a partir da configuração do número de lados de cada polígono. O educador consegue abordar sobre o estudo dos polígonos regulares e seus elementos, de forma interativa com o educando, trazendo dinamicidade para o estudo destas figuras geométricas, permitindo que o aluno consiga explorar cada um de seus elementos, entendendo suas vinculações.

5.3 MDI III - CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Nosso terceiro MDI em análise, diz respeito ao material produzido por três autores, de forma colaborativa, que também pode ser encontrado na plataforma online do GeoGebra. Nele, são abordados a classificação dos tipos de triângulos e o cálculo da área de triângulos. Porém, nesta análise, damos destaque apenas a classificação de triângulos, atendendo as perspectivas de nossa pesquisa. Neste MDI conseguimos perceber um tipo de material didático que traz diferentes recursos que a plataforma online do GeoGebra dispõe.

Na criação deste material didático os autores exploraram não só as possibilidades de construções dinâmicas pelo AGD, mas além da janela de geometria, textos, figuras, vídeos e questionários com alternativas que possibilitam a inclusão de atividades dentro do próprio MDI. A Figura 32 apresenta como o MDI[9] está disposto inicialmente.

Figura 32 - Tela inicial do MDI III



Fonte: O autor (2023).

Podemos perceber que inicialmente os autores introduzem o MDI descrevendo sobre o conteúdo e informam qual a sua forma de abordagem através do recurso de texto disponível na plataforma. Em seguida, temos a janela que dá acesso ao *applet* desenvolvido, que aborda especificamente sobre a classificação de triângulos, a qual está encabeçada por orientações para a manipulação dos recursos presentes na janela dinâmica.

Além dessa página inicial, ao ser movimentado o seu cursor, encontramos ainda outros recursos que podem ser explorados pelo educando a fim de enriquecer o seu aprendizado: imagens, questionários de múltipla escolha e vídeos (Figura 33).

[9] O MDI pode ser acessado por meio do link: <https://www.geogebra.org/m/ave6wcxe> ou pela leitura do *QR Code* ao lado.

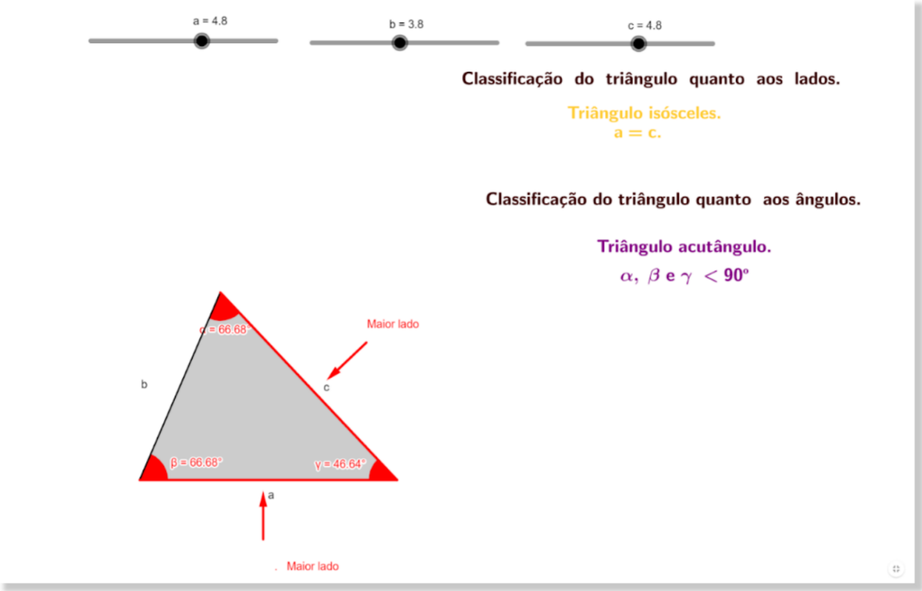
Figura 33 - Continuidade da tela do MDI III

Fonte: O autor (2023).

Todos esses recursos enriquecem o MDI e o tornam ainda mais completo, pois o educador terá uma gama de possibilidades de trabalhar com o conteúdo, partindo de suas experiências prévias e dos objetivos que ele pretende alcançar, levando em consideração o contexto dos seus estudantes.

Direcionamos agora nossa análise especificamente para o *applet* criado para compor este MDI, que é onde encontramos a utilização da geometria dinâmica através do AGD do GeoGebra. A Figura 34 apresenta a *template* inicial deste *applet*, em que podemos observar a disposição inicial dos seus elementos e recursos.

Figura 34 - *Template* inicial do *applet* que compõe o MDI III

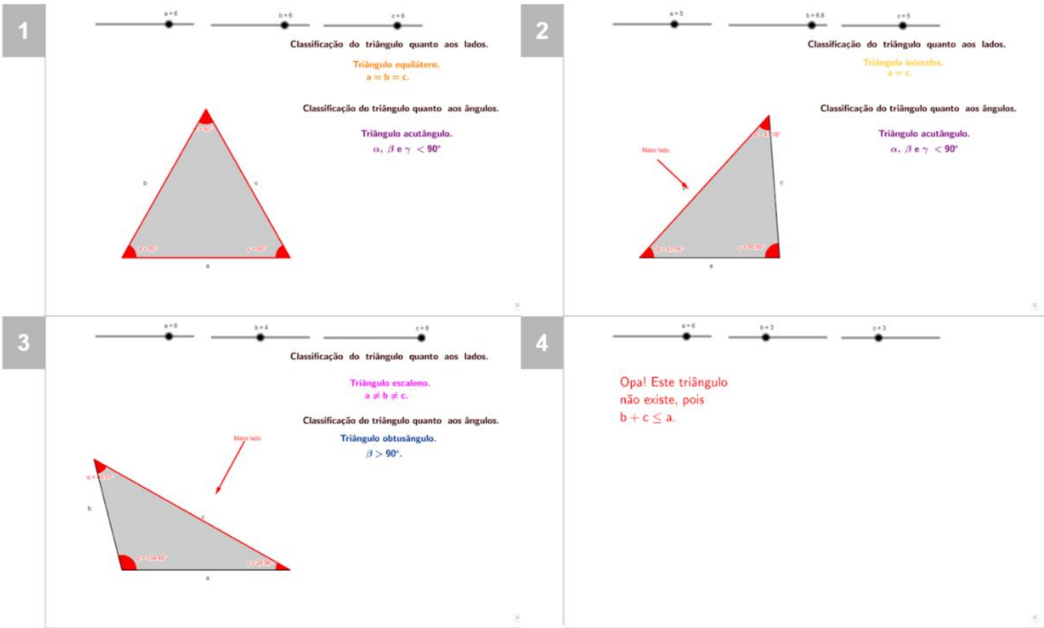


Fonte: O autor (2023).

Podemos notar a presença de três controles deslizantes que permitem a modificação da medida dos lados do triângulo apresentado logo abaixo, sendo estes relacionados nominalmente. A partir da escolha dessas medidas, no canto direito são descritas as classificações do triângulo resultante das medidas escolhidas através da modificação com os controles deslizantes. Temos duas classificações: quanto aos lados e quanto aos ângulos. Na primeira é indicado a nomenclatura do triângulo a partir dos lados escolhidos: equilátero, isósceles ou escaleno, de acordo com as prerrogativas que cada classificação pressupõe; logo abaixo temos a classificação do triângulo quanto aos seus ângulos, também resultantes da movimentação dos controles deslizantes, podendo ser um triângulo acutângulo, retângulo ou obtusângulo. No MDI também são vistas setas que indicam qual o maior lado do triângulo exibido.

A Figura 35 abaixo, traz quatro exemplos de resultados obtidos partindo da manipulação por parte do indivíduo.

Figura 35 - Quadros com diferentes resultados da manipulação do MDI III



Fonte: O autor (2023).

Vemos que ao serem modificadas as medidas dos lados do triângulo pelos controles deslizantes, a descrição é atualizada de acordo com a configuração informada, com base nas medidas dos lados e dos ângulos apresentados. No quadro 1, vemos que ao ser escolhida a mesma medida para todos os lados do triângulo, a descrição informa que ele se classifica, quanto aos lados, como um triângulo equilátero, e mostra também essa relação algebricamente ($a = b = c$); e quanto aos ângulos, como um triângulo acutângulo ($\propto, \beta, \gamma < 90°$). Essas mesmas especificações são vistas nos demais quadros apresentados. O quadro 2, com o triângulo isósceles acutângulo e no quadro 3, com o triângulo escaleno e obtusângulo. No quadro 4, vemos como o *applet* se comporta caso as medidas escolhidas não permitam a formação de triângulos; nela vemos a descrição que aparece advertindo que o triângulo não existe e o porquê algebricamente ($b + c \leq a$).

Percebemos, com esse MDI, que o educador poderá trabalhar sobre a classificação de triângulos a partir da medida de deus lados e de seus ângulos, sobre a condição de existência de triângulos, e poderá também contextualizar o conteúdo a partir dos demais recursos, ao trazer questionários, vídeos, textos e imagens. Todas essas possibilidades nos permitem conjecturar que esse MDI pode ser utilizado como um recurso didático eficaz para o ensino deste conteúdo.

5.4 MDI IV - ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS

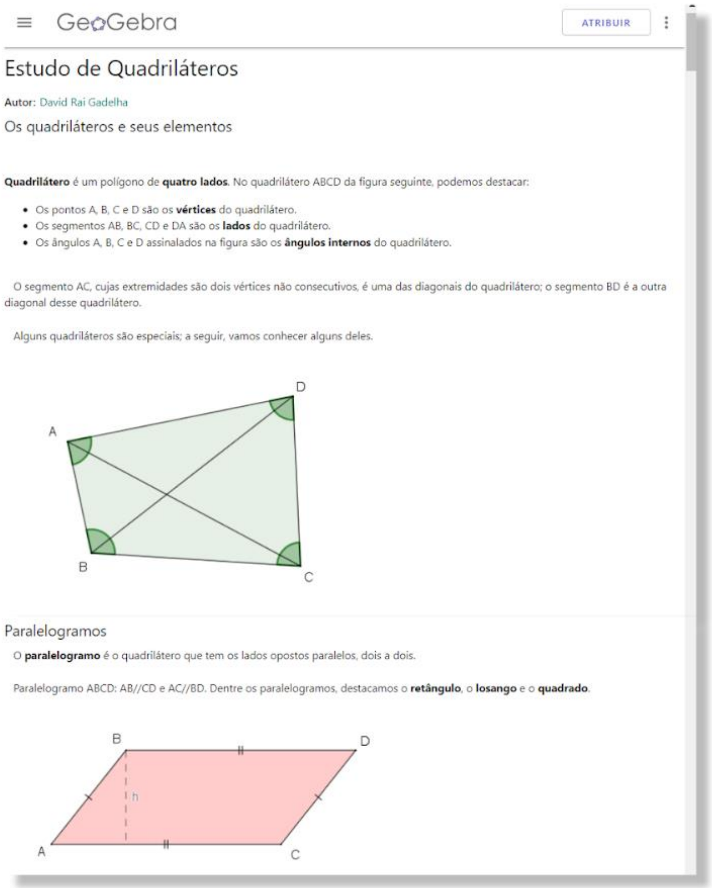
Nosso último MDI em análise traz mais uma produção nossa que aborda o estudo dos diferentes tipos de quadriláteros e como eles estão classificados. Para este, nossa proposta apresenta mais uma possibilidade de abordagem do AGD GeoGebra, em que sua produção partiu da forma de exploração deste conteúdo por um dos livros didáticos que analisamos em nossa pesquisa[10], sendo utilizado textos e propostas de atividades contidas nele.

Nossa proposta neste material didático foi trazer uma versão dinâmica da forma como o livro, através de figuras estáticas, aborda sobre o conteúdo. Assim, pensamos na possibilidade do educando, através de figuras dinâmicas, explorar de forma interativa o conteúdo teórico com dinamismo, através da exploração de seus elementos e de suas propriedades, realizando conjecturas acerca do objeto em estudo. Com este MDI, vemos a possibilidade do educador se apropriar do livro didático para a produção deste recurso, a fim de enriquecer o estudo dos quadriláteros por meio de uma abordagem dinâmica, sendo possível por meio de dispositivos tecnológicos. Os procedimentos de construção de cada *applet* deste MDI pode ser encontrado em seu protocolo de construção (Apêndice D).

A Figura 36 apresenta a tela inicial do MDI IV[11], que por meio do recurso de texto e de imagem, introduz o conteúdo sobre os quadriláteros.

[10] A escrita sobre o conteúdo trazida no MDI IV foi retirada do livro “A Conquista da Matemática: 6º ano” (GIOVANNI JÚNIOR, 2018a).
[11] O MDI pode ser acessado por meio do link: <https://www.geogebra.org/m/p2q225xh> ou pela leitura do *QR Code* ao lado.

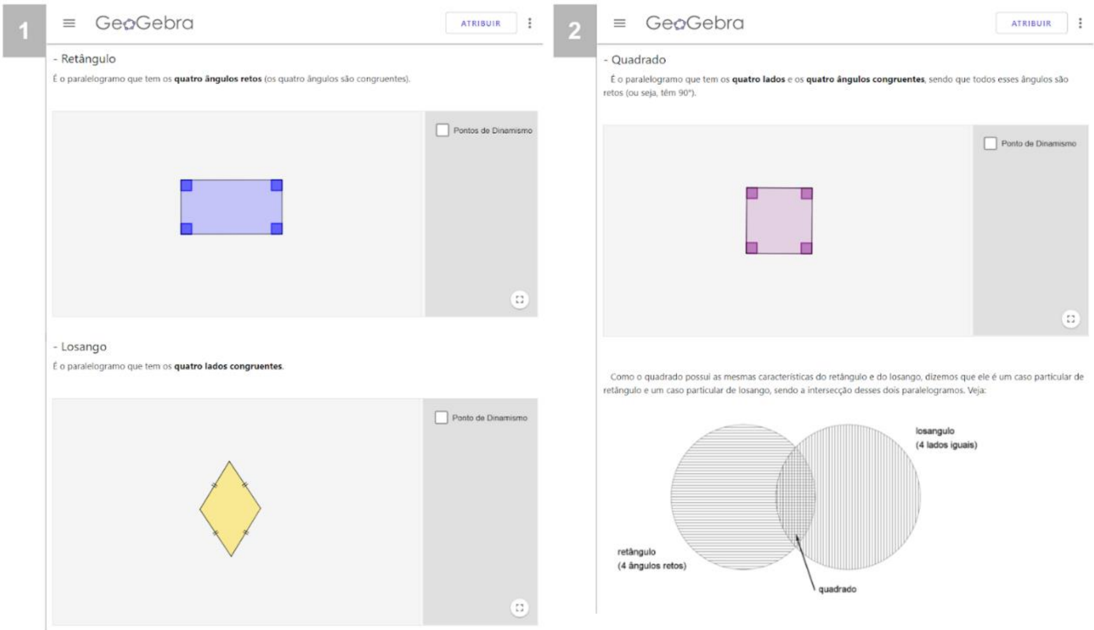
Figura 36 - Tela inicial do MDI III



Fonte: O autor (2023).

Após explanar sobre as características gerais dos quadriláteros, é abordado sobre os dois grupos nos quais estes se subdividem: os paralelogramos e os trapézios. Na continuidade do MDI, são apresentados os três exemplos de paralelogramos através de *applet’s* (Figura 37). Neles é possível manipular os quadriláteros, através da modificação de sua posição, estrutura e rotação. Essas características de movimentação são fundamentais, pois o autor do livro, nas orientações dadas aos professores, afirma a importância de serem apresentadas as figuras em diferentes posições, a fim de mostrar aos alunos que suas propriedades são mantidas. O livro inclusive traz pelo menos dois exemplos de cada figura, em posições diferentes para que o educador possa enfatizar essa questão. Porém, acreditamos que esses fatores podem ser melhor explorados através da geometria dinâmica, ao invés da tentativa de apresentá-los por meio de figuras estáticas.

Figura 37 - Quadros da parte sobre paralelogramos do MDI IV



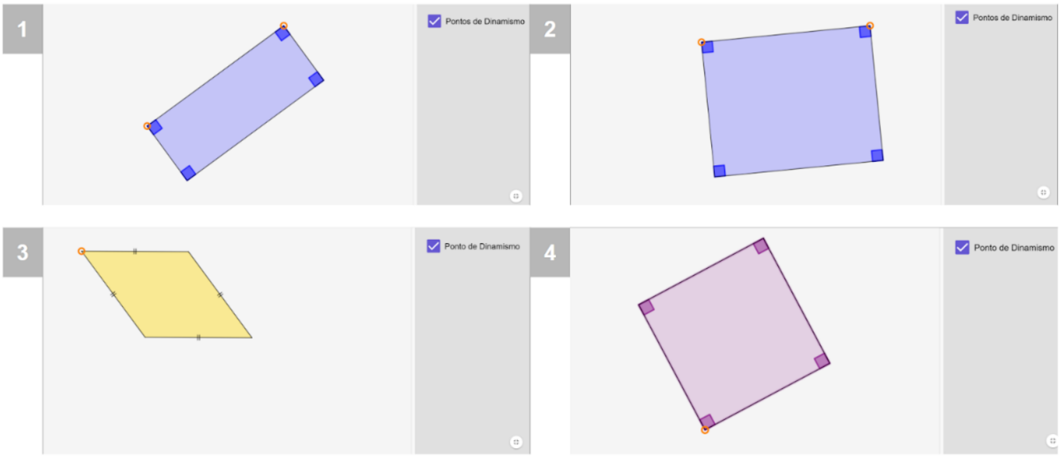
Fonte: O autor (2023).

No quadro 1, vemos os *applet's* sobre o paralelogramo retângulo e o losango, sendo encabeçados pela descrição de cada um deles; e no quadro 2 a apresentação do paralelogramo quadrado com seu *applet* e com a descrição sobre suas especificidades.

Ao ser ativada a caixa de "Pontos de Dinamismo" em cada janela, é possível manipular a estrutura das figuras a partir dos pontos em destaque. Através desses pontos, é possível alterar as dimensões dos lados, rotacionar a figura e modificar o tamanho dela, a depender do tipo de paralelogramo apresentado. Vale destacar que, as possibilidades de modificação das figuras se restringem às propriedades de cada uma delas, impedindo que suas características particulares sejam perdidas na manipulação.

A Figura 38 apresenta alguns quadros com possibilidades de modificações das estruturas apresentadas nos exemplos dos paralelogramos.

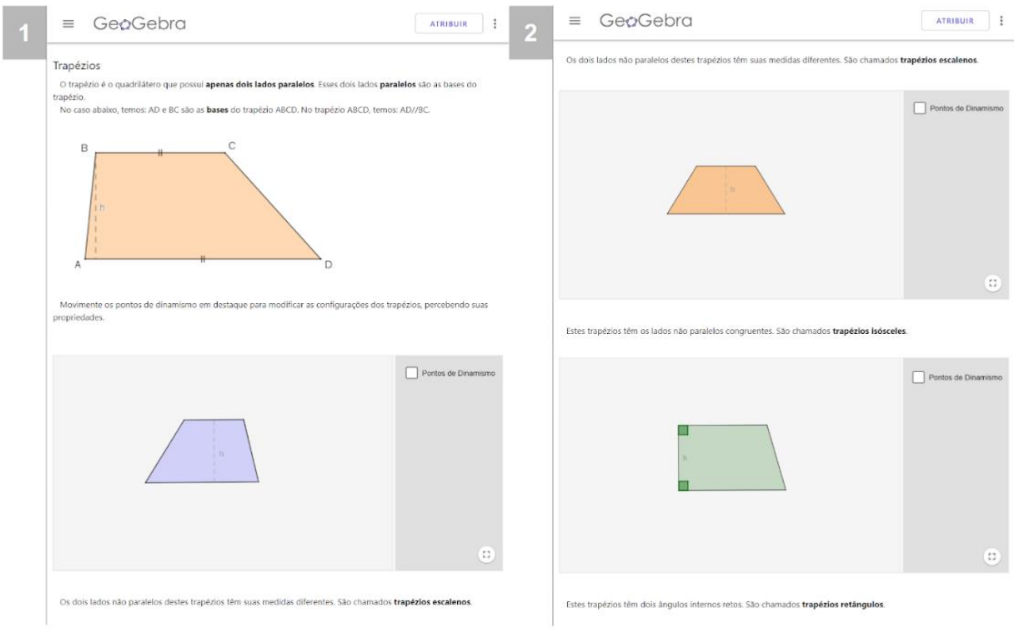
Figura 38 - Resultados da manipulação dos paralelogramos MDI IV



Fonte: O autor (2023).

Na sequência, o MDI explora sobre o outro grupo de quadriláteros: os trapézios. Após a introdução que explica as características destes quadriláteros, são apresentados três *applet's* que exemplificam os tipos de trapézios que podem ser estudados (Figura 39). Mais uma vez é possível movimentar os elementos dessas figuras dinâmicas, e comprovar suas propriedades e características que são mantidas apesar da movimentação.

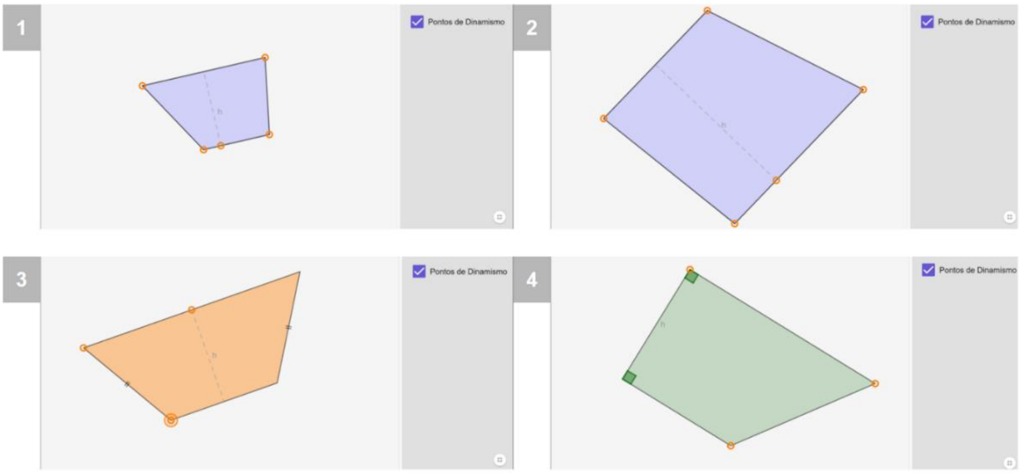
Figura 39 - Quadros da parte sobre trapézios do MDI IV



Fonte: O autor (2023).

Na Figura 40 apresentamos algumas possibilidades de modificações das figuras dinâmicas pela manipulação através dos pontos de dinamismo.

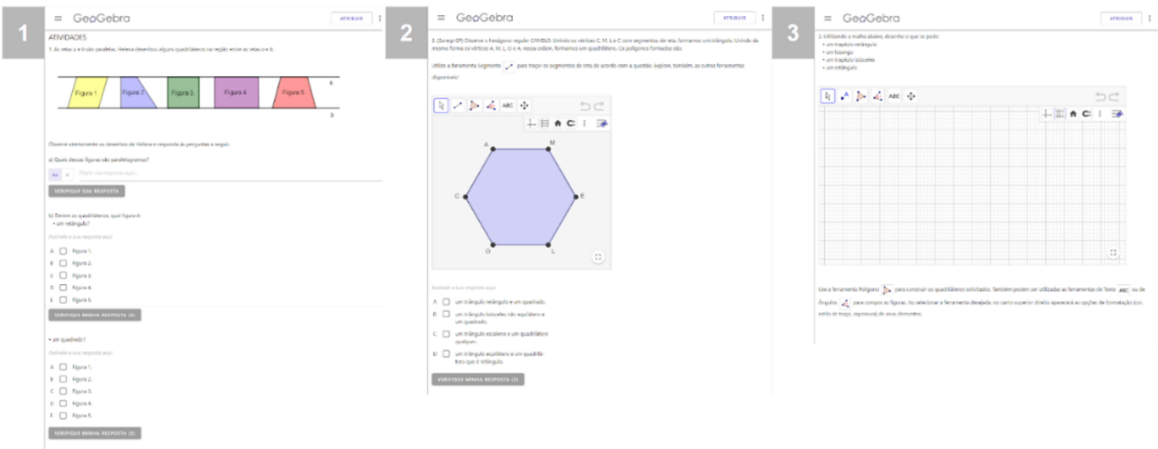
Figura 40 - Resultados da manipulação dos trapézios do MDI IV



Fonte: O autor (2023).

Neste MDI também há um espaço que, para enriquecer o estudo, foi destinado a trazer atividades interativas dinâmicas que possibilitam a fixação do conteúdo visto. A Figura 41 apresenta a sequência dessas atividades.

Figura 41 - Quadros de atividades do MDI IV



Fonte: O autor (2023).

O quadro 1 mostra a primeira atividade que consiste em questões de múltipla escolha, criadas a partir do recurso disponível no AGD do GeoGebra online, que devem ser respondidas a partir da figura trazida pelo enunciado. Vemos também que para cada questão há um botão, que pode ser incluído ou não no momento que é configurada, que revela a resposta correta da questão; o segundo quadro, apresenta a segunda questão que traz uma problemática e pede para que através da janela de geometria do GeoGebra disposta logo abaixo, sejam seguidos alguns passos, em que será necessário usar algumas ferramentas dispostas para ser possível responder o questionário abaixo dela; no quadro 3, a terceira questão pede para que a partir da janela de geometria abaixo, sejam construídos os quadriláteros solicitados pelo enunciado, utilizando as ferramentas disponibilizadas na janela. É importante destacar que ao longo das atividades foram colocadas orientações para a sua condução, através da interação disponível pelo GeoGebra.

Podemos notar que neste MDI foram exploradas diversas ferramentas e funcionalidades disponíveis no AGD do GeoGebra. Foi possível observar com uma maior riqueza as possibilidades que este AGD permite na criação de materiais dinâmicos que podem auxiliar na condução das práticas pedagógicas do educador.

5.5 EXPLORANDO RESULTADOS

Virmos que o AGD do GeoGebra nos permite enxergar uma infinidade de possibilidades na construção e utilização de materiais dinâmicos que propiciam a condução do ensino-aprendizagem dos conteúdos presentes no estudo da Geometria de forma vantajosa por meio de sua abordagem pela perspectiva da geometria dinâmica, que permite uma interação ativa do educando sobre o objeto em estudo, comprovando e percebendo as propriedades, nesse caso das figuras geométricas planas.

Outro fator importante de ser destacado é que todos estes materiais didáticos podem ser acessados por diferentes suportes tecnológicos como o computador, o *tablet* e até mesmo o *smartphone*. Isso garante que os materiais são acessíveis, tanto pela possibilidade de serem acessados por meio de recursos que são encontrados disponíveis aos educandos, como pelo fato de serem acessíveis ao educador, seja na construção destes materiais dinâmicos ou na utilização de materiais que estão disponíveis na plataforma online do AGD, pelo compartilhamento de outras pessoas.

Porém, para que o educador se aproprie positivamente das vantagens de utilizar materiais dinâmicos a fim de atender seus objetivos pedagógicos, é fundamental que ele conheça o AGD, conheça suas ferramentas, suas funcionalidades e possibilidades, para poder conjecturar esquemas para a criação e utilização destes materiais em sala de aula. Para isso, como virmos anteriormente, os processos que envolvem a Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), especificamente os processos que compõem a Gênese Instrumental, se torna o caminho que possibilitará este educador ser guiado a uma efetiva apropriação destas ferramentas tecnológicas. Falando especificamente do estudo teórico abordado nesta pesquisa, o professor de matemática, diante das perspectivas de abordar os conteúdos que envolvem o estudo das figuras geométricas planas, objetivando a construção deste conhecimento com seus alunos, pode deparar-se com obstáculos que dificultem as suas práticas pedagógicas, como exemplificamos anteriormente.

Reconhecendo as potencialidades e vantagens de utilização das tecnologias digitais, o educador pode buscar se apropriar delas para a condução do ensino-aprendizagem; e neste caso, para o estudo da geometria, um ambiente de geometria dinâmica se mostra bastante proficiente. Porém, é necessário que o educador o conheça, entenda como ele funciona, o que demonstra a importância de assimilar o processo de instrumentalização desse artefato, para que este educador identifique possibilidades de utilizá-lo como um instrumento educacional. Somente após o processo de instrumentalização deste AGD é que será possível o educador pensar e criar esquemas para sua utilização, a fim de atender seus objetivos. A criação de materiais dinâmicos é um dos caminhos de instrumentação desse AGD, que pode ocorrer de diferentes formas, partindo das bagagens e experiências particulares do educador e dos objetivos que este pretende alcançar através desta ação.

É interessante perceber que, assim como a teoria de Rabardel afirma que um instrumento possui um caráter dinâmico, os MDI’s como instrumentos possuem esta mesma característica, pois estes podem ser modificados e reestruturados, e ainda que diferentes educadores utilizem o mesmo ambiente de geometria dinâmica, e queiram abordar o mesmo conteúdo, os resultados serão distintos, pois os caminhos percorridos são resultados da particularidade de cada indivíduo, dos esquemas elaborados individualmente, dos objetivos e das atividades que estes pretendem alcançar e desenvolver.

Para que o educador consiga produzir estes materiais, além da necessidade de estar instrumentalizado em relação ao AGD, é preciso que ele entenda as propriedades e as premissas que fundamentam cada estudo a ser abordado. É essencial ter embasamento nos conhecimentos sobre construções geométricas, que inclusive são necessários para a plena realização destas construções dentro do

GeoGebra. Conseguimos pressupor que o professor ao criar estes materiais didáticos dinâmicos, além dos fatores positivos para a condução de suas práticas em sala de aula, permitirá também que, durante a sua construção, ao surgirem imprevistos e desafios, o educador seja conduzido à elaboração de raciocínios, conjecturas e soluções para as problemáticas que se apresentem. É até mesmo um exercício de repensar seu próprio arcabouço teórico na condução de elaboração destes que objetivam a construção de conhecimentos com seus educandos. Pois, assim como afirmam Henrique e Bairral (2019), pelo fato de as construções serem realizadas a partir das propriedades que as definem, há uma melhor interação no ato de construir e analisar o objeto matemático em questão.

A criação e o uso destes materiais dinâmicos inclusive atendem às orientações estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), quando esta reconhece, através de suas competências, que se deve compreender, utilizar e criar tecnologias digitais na produção de conhecimentos, e na resolução de problemas. A base afirma que os materiais didáticos, incluindo os digitais, possuem um papel essencial para a compreensão e utilização dos princípios matemáticos, pois ela reconhece os avanços das tecnologias e o crescente acesso a elas por meio dos diferentes suportes tecnológicos por parte dos estudantes que dinamicamente estão inseridos nesta cultura. Desta forma, a BNCC instiga o aproveitamento dos potenciais deste universo digital por parte das escolas, dando autonomia para que sejam instituídos novos modos de promover a aprendizagem.

Em consonância com isto, Sousa Neto e Silveira (2016, p. 3) ao abordar sobre os educadores que estão envolvidos no campo da educação matemática, e especificamente para o ensino da geometria, afirmam que estes "precisam ser instigados a desenvolver materiais didáticos que levem o estudante a superar suas dificuldades de aprendizagem". Portanto, podemos perceber que a criação e utilização de materiais didáticos dinâmicos digitais, podem dar o suporte necessário para que o educador conduza as suas práticas pedagógicas de tal modo que seja possível levar seus educandos a exploração e comprovação das propriedades e das relações do estudo das figuras geométricas planas, conduzindo a realização de proposições acerca do seu estudo, de forma dinâmica, interativa e lúdica, permitindo a concretização dos objetivos propostos e das habilidades requeridas no ensino e na aprendizagem da geometria de forma experimental e racional, atendendo as demandas destes alunos inseridos na atual cultura digital.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da constatação que a Geometria é um campo de estudo que possui um grande apelo visual, sendo muitas vezes difícil a representação e a averiguação de algumas propriedades e a compreensão de conceitos abstratos utilizando tecnologias tradicionais, é evidente a necessidade de integralização de novas práticas educacionais, novas metodologias que viabilizem a condução de seu ensino e de sua aprendizagem, atendendo às suas especificidades.

Ao considerarmos o importante papel que o material didático pode desempenhar nos processos educacionais e as contribuições das tecnologias digitais para o âmbito educacional, especialmente da Geometria Dinâmica para o estudo da Geometria, conseguimos identificar as diferentes possibilidades advindas da apropriação de um Ambiente de Geometria Dinâmica na obtenção de instrumentos eficazes para a condução das práticas pedagógicas, capazes de superar as limitações que os materiais tradicionais possuem.

Compreendemos, com base nas produções e nas análises realizadas, que os educandos podem ser conduzidos a construção do conhecimento geométrico por meio da manipulação e da experimentação; da constatação de características e propriedades, de uma forma lúdica, dinâmica e interativa, por meio dos materiais didáticos concebidos em meio dinâmico digital. Como exemplificado, a compreensão do estudo das figuras geométricas planas torna-se bem mais completa por meio do dinamismo, em contraste ao seu estudo por meio de figuras estáticas.

Entretanto, ressaltamos que embora os aspectos aqui referenciados sejam de grande importância para assimilação do estudo da geometria, não podemos esquecer que estes devem estar alicerçados na teoria do conhecimento, nos fundamentos geométricos. É necessário haver uma sintonia entre a dimensão experimental e os argumentos dedutivos e uma harmonia entre a investigação por meio da manipulação e os pressupostos racionais (PAIS, 2000). Só desta forma os métodos e as metodologias utilizadas farão sentido na construção do conhecimento.

Porém, como virmos em nossas considerações anteriores, um dos problemas da frágil condução do ensino da geometria – quando ela acontece –, reside na formação precária do professor de matemática, especificamente na abordagem do estudo dessa importante área do conhecimento. Além de não serem devidamente instruídos em sua formação inicial, também possuem uma resistência na apropriação de recursos tecnológicos digitais para sua implementação em sala de aula; ou porque não conhecem suas possibilidades ou por acreditarem que estes não sejam capazes de subsidiar o que necessitam para a condução de suas práticas pedagógicas.

Portanto, para estes, acreditamos na importância da formação continuada; pois, como virmos, embora os documentos normativos – referência obrigatória para elaboração dos currículos – sejam enfáticos sobre a utilização de tecnologias digitais para todas as etapas de ensino e especificamente para o estudo da Matemática, é perceptível que não há uma assimilação adequada por parte dos educadores em sua formação inicial; o que demonstra a importância de trabalhar esses aspectos na continuidade de sua formação, pois o conhecimento pedagógico desses professores não caminha em conformidade com as modernas tecnologias digitais, sendo evidente a necessidade de desenvolvimento de estratégias que acompanhem a velocidade que os avanços tecnológicos ocorrem. Estes artefatos tecnológicos, se devidamente instrumentalizados e instrumentados pelo professor, podem trazer resultados significativos na criação de instrumentos para o ensino e a aprendizagem. (ALENCAR, 2012; NASCIMENTO, 2012; PALIS, 2010 apud ALENCAR, 2012; PEREIRA et al, 2016).

Acreditamos que nossa pesquisa possa contribuir com o direcionamento da formação destes educadores ao demonstrar, com base nos estudos e pesquisas aqui referenciados e de nossas constatações e análises, as fragilidades do ensino e da aprendizagem da Geometria por meio de tecnologias analógicas, ao serem evidenciadas as potencialidades e possibilidades de sua condução por meio das tecnologias digitais. Consideramos contemplada em nossa pesquisa a demonstração desta afirmativa ao apresentarmos meios do educador apropriar-se destas tecnologias para a condução das suas práticas pedagógicas, proporcionando situações mais enriquecedoras diante da grande amplitude de possibilidades, os incentivando a serem agentes ativos na condução da construção do conhecimento e na concepção de instrumentos úteis para o ensino e para a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de matemática. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática [online]. 2013, v. 27, n. 46, p. 349-365. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300002>. Acesso em: 16 out. 2022.

ALENCAR, S. V. **A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra:** proposta de uma oficina para professores de Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - PUC/Sp. São Paulo, p. 134, 2012.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos. *In*: 23a REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2000, Caxambu. **Anais 23a Reunião anual da ANPED**, Caxambu, 24-28 de setembro de 2000. Rio de Janeiro: ANPED, 2000. v. 1, p. 1-18.

BELLEMAIN, F. Geometria dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. *In:* GRAPHICA, 2001, São Paulo. **Comunicação Gráfica no Século 21:** Tecnologia, Educação e Arte. São Paulo: Associação Brasileira de Expressão Gráfica, 2001.

BELLEMAIN, F.; CORREIA, A. M. Geometria dinâmica: fundamentos epistemológicos. In: 4o Congreso Nacional e 1o Encuentro Internacional de Profesores e Investigadores del Área de Expresión Gráfica, 2004, Rosario. **Actas del EGRAFIA 2004**. Rosario: EGRAFIA, 2004. v. 1.

BITTAR, M. A Abordagem Instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Terceira versão final. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 12 set. 2022.

BOLGHERONI, W.; SILVEIRA, I. F. Análise e aplicação de software livre para o estudo de construções gráficas na geometria. **Anais do Graphica**, Curitiba, 2007.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 6º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018a.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 7º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018b.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 8º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018c.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 9º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018d.

FRANÇA, J. B. A. **GeoGebra e o ensino de matemática**: atividades iniciais. Informatemática: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - Barreiras - BA, p. 10, s.d.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da Matemática**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018a.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da Matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018b.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da Matemática**: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018c.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da Matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018d.

HENRIQUE, M. P.; BAIRRAL, M. **Caderno de atividades sobre conceitos geométricos em ambientes de geometria dinâmica.** Seropédica: EDUR - UFRRJ, p. 49, 2019.

LIMA, S. P.; MATHIAS, C. V. A construção de materiais didáticos utilizando o software GeoGebra. In: 4º ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA. **Anais, 4o Encontro Nacional Pibid Matemática**, Porto Alegre: SBEM-RS, v. 4 n. 3, p. 95-100, 2018.

LOPES, A. V.; CARNEIRO-DA-CUNHA, M.; GUSMÃO, M. B. R. Quem somos? Uma abordagem epistemológica sobre a Geometria Gráfica e suas práticas. **Revista Geometria Gráfica**, Recife, v. 2, n. 1, p. 5-24, 11 out. 2018. Semestral. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/geometriagrafica/index>. Acesso em: 23 maio 2023.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 4. p. 3-13. 1º sem. 1995.

LORENZATO, S. **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** LORENZATO, S. (Org.). 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2021.

MARIOTTI, M. A. **A geometria em sala de aula:** reflexões sobre ensino e aprendizagem. Recife: Editora UFPE, 2019. Tradução: Sandra de Souza Melo. ISBN 9788541506915.

MELO, S. S.; GALVÃO, T. F. Criando modelos didáticos com responsabilidade socioambiental. *In:* OLIVEIRA, M. B. M. et al (Org.). **Gestão ambiental** [recurso eletrônico]: diálogos em sustentabilidade. Recife: Ed. UFPE, 2019, p. 158-176.

NASCIMENTO, E. G. A. do. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. **XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN**, v. 8457, p. 1808, 2012.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. **Reunião da ANPED**, v. 23, p. 24, 2000.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. **Matemática essencial.** 1. ed. São Paulo: Scipione, 2019.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, UNICAMP, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREIRA, J. W; SILVA, A. D. P. R.; SANTANA, W. M. G. A Abordagem Instrumental e a apropriação do artefato tecnológico Apprenti Géomètre 2 em uma situação proposta. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática.** ISSN 2178-034X. São Paulo - SP, p. 12, 2016.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares.** Tese de doutorado – Faculdade de Educação – UNICAMP, p. 348, 1991.

PIASESKI, C. M. **A Geometria no Ensino Fundamental.** Monografia, curso de licenciatura em Matemática - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI, Erechim, p. 33, 2010.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contem-porains.** Armand Colin, p. 239, 1995.

RABARDEL, P. **People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments.** université paris 8, p. 188, 2002.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese Instrumental na interação com *Cabri 3D*:** um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tese de doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. São Paulo, p. 317, 2009.

SANTOS, F. M. F.; ALVES, A. L.; MAGALHÃES PORTO, C. Educação e tecnologias: Potencialidades e implicações contemporâneas na aprendizagem. **Revista Rios**, v. 12, n. 17, p. 44-61, 2018.

SILVA, E. C. R. T. **A aprendizagem colaborativa e os esquemas de atividades coletivas instrumentadas:** explorando artefatos simbólicos na Geometria do Táxi. Dissertação (Mestre em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 169, 2020.

SILVA, E. C. R. T. **Concepção de uma sequência didática para o estudo de projeções cônicas com auxílio de um software de geometria dinâmica.** TCC (Licenciatura em Expressão Gráfica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 87, 2017.

SÓ o começo. Intérprete: Vocal Livre. Compositor: Pedro Valença. *In:* Só o começo - single. Intérprete: Vocal Livre. São Paulo: Ventania, 2019. Single, faixa única (5 min).

SOUSA NETO, P. R.; SILVEIRA, M. R. A. Materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da geometria. **Revista BOEM**, Joinville, v. 4, n. 6, p. 1-27, jan./jul. 2016.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. **Em Aberto**, Brasília, ano 12, n. 57, p. 3-16, jan./mar. 1993.

VALENTE, J. A. Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais. *In:* VALENTE, J. A et al (Org.). **Tecnologia e educação:** passado, presente e o que está por vir. Campinas, SP: NIED/UNICAMP, 2018, p. 17-41.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

APÊNDICE A – SINTESE DAS HABILIDADES DA BNCC POR CONTEÚDOS

ANOS FINAIS (6º ao 9º ano)

POLÍGONOS				
Matemática	6º	Geometria	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
Matemática	6º	Geometria	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
Matemática	6º	Geometria	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
Matemática	7º	Geometria	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
Matemática	7º	Geometria	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
Matemática	9º	Geometria	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS				
Matemática	6º	Geometria	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Matemática	7º	Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
Matemática	7º	Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

Matemática	7º	Geometria	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
Matemática	8º	Geometria	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.
Matemática	8º	Geometria	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

TRIÂNGULOS				
Matemática	7º	Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
Matemática	7º	Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
Matemática	7º	Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Matemática	8º	Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
Matemática	9º	Geometria	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Matemática	9º	Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
Matemática	9º	Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

ÂNGULOS				
Matemática	7º	Geometria	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.
Matemática	9º	Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
Matemática	9º	Geometria	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

APÊNDICE B – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO MDI I

N.	Nome	Íc...	Descrição	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto H_2				H_2 = (1.8, 4.06)	
2	Ponto F_2				F_2 = (-1, -9)	
3	Ponto G_2				G_2 = (20, -9)	
4	Reta i		Reta F_2, G_2	Reta(F_2, G_2)	i: y = -9	
5	Reta j		Reta passando porH_2 e paralela a i	Reta(H_2, i)	j: y = 4.06	
6	Ponto T		Ponto sobre j	Ponto(j)	T = (19.36, 4.06)	
7	Ponto S		Ponto sobre j	Ponto(j)	S = (6.64, 4.06)	
8	Segment...		Segmento S, T	Segmento(S, T)	n = 12.72	
9	Ponto R		Ponto sobre i	Ponto(i)	R = (19.32, -9)	
10	Ponto Q		Ponto sobre i	Ponto(i)	Q = (3.23, -9)	
11	Segment...		Segmento Q, R	Segmento(Q, R)	m = 16.08	
12	Ponto B_2				B_2 = (17.36, -0.14)	
13	Ponto I				I = (8.8, -2.96)	
14	Ponto J				J = (12.26, -10.22)	
15	Círculo c		Círculo por J com centro I	Círculo(I, J)	c: (x - 8.8)² + (y + 2....	
16	Ponto K		Ponto sobre c	Ponto(c)	K = (4.08, 3.55)	
17	Ponto L		Ponto sobre c	Ponto(c)	L = (0.79, -2.22)	
18	Arco d		ArcoCircular(I, K, L)	ArcoCircular(I, K, L)	d = 6.84	
19	Ponto A_2		Ponto sobre d	Ponto(d)	A_2 = (1.26, -0.16)	
20	Reta f		Reta A_2, B_2	Reta(A_2, B_2)	f: -0.02x + 16.1y = -...	
21	Ponto M				M = (22, 4)	
22	Ponto N				N = (22, -6)	

23	Reta k		Reta M, N	Reta(M, N)	k: x = 22	
24	Ponto P		Ponto sobre k	Ponto(k)	P = (22, -6.68)	
25	Ponto O		Interseção de k, f	Interseção(k, f)	O = (22, -0.13)	
26	Segment...		Segmento O, P	Segmento(O, P)	l = 6.55	
27	Ponto C_2		Ponto sobre l	Ponto(l)	C_2 = (22, -4.08)	
28	Reta g		Reta passando porC_2 e paralela a f	Reta(C_2, f)	g: -0.02x + 16.1y = ...	
29	Ponto D_2		Ponto sobre m	Ponto(m)	D_2 = (16.26, -9)	
30	Ponto E_2		Ponto sobre n	Ponto(n)	E_2 = (8.45, 4.06)	
31	Reta h		Reta D_2, E_2	Reta(D_2, E_2)	h: -13.06x - 7.81y =...	
32	Ponto U		Interseção de f, h	Interseção(f, h)	U = (10.96, -0.15)	
33	Ponto V		Interseção de g, h	Interseção(g, h)	V = (13.32, -4.09)	
34	Ponto W		Ponto sobre g	Ponto(g)	W = (0.18, -4.1)	
35	Ponto Z		Ponto sobre h	Ponto(h)	Z = (17.74, -11.49)	
36	Ângulo D		Ângulo entre W, V, Z	Ângulo(W, V, Z)	D = 120.81°	
37	Ponto A_1		Ponto sobre f	Ponto(f)	A_1 = (-0.77, -0.16)	
38	Ângulo C		Ângulo entre A_1, U, Z	Ângulo(A_1, U, Z)	C = 120.81°	
39	Ponto B_1		Ponto sobre h	Ponto(h)	B_1 = (7.59, 5.49)	
40	Ângulo A		Ângulo entre B_1, U, A_1	Ângulo(B_1, U, A_1)	A = 59.19°	
41	Ângulo B		Ângulo entre B_1, V, W	Ângulo(B_1, V, W)	B = 59.19°	
42	Ponto C_1		Ponto sobre f	Ponto(f)	C_1 = (24.56, -0.13)	
43	Ponto D_1		Ponto sobre g	Ponto(g)	D_1 = (25.54, -4.07)	
44	Ângulo E_3		Ângulo entre C_1, U, B_1	Ângulo(C_1, U, B_1)	E_3 = 120.81°	
45	Ângulo F		Ângulo entre D_1, V, B_1	Ângulo(D_1, V, B_1)	F = 120.81°	

46	Ângulo H		Ângulo entre Z, V,D_1	Ângulo(Z, V, D_1)	H = 59.19°	
47	Ângulo G		Ângulo entre Z, U,C_1	Ângulo(Z, U, C_1)	G = 59.19°	
48	Valor Bo...				a = true	Âng γ
49	Valor Bo...				b = true	Âng ε
50	Valor Bo...				e = true	Ang Σ
51	Texto tex..				"MOVER"	
52	Valor Bo...				o = true	Âng α
53	Valor Bo...				r = true	Âng β
54	Valor Bo...				s = true	Âng δ
55	Valor Bo...				u = true	Âng Ω
56	Valor Bo...				v = true	Âng λ
57	Ponto E		Ponto médio de QR	PontoMédio(Q, R)	E = (11.28, -9)	
58	Ponto R_1		Ponto médio de PO	PontoMédio(P, O)	R_1 = (22, -3.41)	
59	Texto tex..				" ↑mover ↓"	
60	Ponto S_1		Ponto médio de ST	PontoMédio(S, T)	S_1 = (13, 4.06)	
61	Ponto T_1		Ponto sobre g	Ponto(g)	T_1 = (1.4, -4.1)	
62	Ponto U_1		Ponto sobre f	Ponto(f)	U_1 = (2.55, -0.16)	
63	Texto tex..				"Reta Paralela (b)"	
64	Texto tex..				"Reta Paralela (a)"	
65	Ponto V_1		Ponto sobre h	Ponto(h)	V_1 = (7.85, 5.05)	
66	Texto tex..				"Reta Transversal(...	
67	Texto tex..		"α = " + A + ""	"α = " + A + ""	"α = 59.19°"	
68	Texto tex..		"β = " + B + ""	"β = " + B + ""	"β = 59.19°"	
69	Texto tex..		"γ = " + C + ""	"γ = " + C + ""	"γ = 120.81°"	
70	Texto tex..		"δ = " + D + ""	"δ = " + D + ""	"δ = 120.81°"	

71	Texto tex..	ABC	"ε = " + D + ""	"ε = " + D + ""	"ε = 120.81°"	
72	Texto tex..	ABC	"Σ = " + G + ""	"Σ = " + G + ""	"Σ = 59.19°"	
73	Texto tex..	ABC	"Ω = " + F + ""	"Ω = " + F + ""	"Ω = 120.81°"	
74	Texto tex..	ABC	"λ = " + G + " "	"λ = " + G + " "	"λ = 59.19° "	
75	Valor Bo...				w = false	Graus de Angulação
76	Texto tex..	ABC			"MOVER"	
77	Texto tex..	ABC			"MOVER"	
78	Texto tex..	ABC			"MOVER"	
79	Texto tex..	ABC	"α = " + A + ""	"α = " + A + ""	"α = 59.19°"	
80	Círculo p		Círculo com centroU e raio 1.2	Círculo(U, 1.2)	p: (x - 10.96)² + (y ...	
81	Ponto E_1		Ponto sobre p	Ponto(p)	E_1 = (9.93, 0.46)	
82	Valor Bo...				t = true	Graus α
83	Ponto F_1		Ponto sobre p	Ponto(p)	F_1 = (11.59, 0.88)	
84	Ponto G_1		Ponto sobre p	Ponto(p)	G_1 = (10.33, -1.17)	
85	Ponto H_1		Ponto sobre p	Ponto(p)	H_1 = (11.99, -0.76)	
86	Círculo q		Círculo com centroV e raio 1.2	Círculo(V, 1.2)	q: (x - 13.32)² + (y ...	
87	Ponto I_1		Ponto sobre q	Ponto(q)	I_1 = (12.26, -3.51)	
88	Ponto J_1		Ponto sobre q	Ponto(q)	J_1 = (13.93, -3.05)	
89	Ponto K_1		Ponto sobre q	Ponto(q)	K_1 = (12.73, -5.13)	
90	Ponto L_1		Ponto sobre q	Ponto(q)	L_1 = (14.35, -4.69)	
91	Texto tex..	ABC	"γ = " + C + ""	"γ = " + C + ""	"γ = 120.81°"	
92	Texto tex..	ABC	"ε = " + E_3 + ""	"ε = " + E_3 + ""	"ε = 120.81°"	
93	Texto tex..	ABC	"Σ = " + G + ""	"Σ = " + G + ""	"Σ = 59.19°"	
94	Texto tex..	ABC	"β = " + B + ""	"β = " + B + ""	"β = 59.19°"	

95	Texto tex..		"δ = " + D + ""	"δ = " + D + ""	"δ = 120.81°"	
96	Texto tex..		"λ = " + H + ""	"λ = " + H + ""	"λ = 59.19°"	
97	Texto tex..		"Ω = " + F + ""	"Ω = " + F + ""	"Ω = 120.81°"	
98	Valor Booleano				a_1 = true	Graus β
99	Valor Booleano				b_1 = true	Graus γ
100	Valor Booleano				c_1 = true	Graus δ
101	Valor Booleano				d_1 = true	Graus Ω
102	Valor Booleano				e_1 = true	Graus ε
103	Valor Booleano				g_1 = true	Graus λ
104	Valor Booleano				f_1 = true	Graus Σ
105	Valor Booleano				h_1 = true	Pontos de Dinamismo
106	Ponto M_1				M_1 = (1.93, -0.99)	
107	Ponto N_1				N_1 = (9.37, -1.03)	
108	Segmento i_1		Segmento M_1, N_1	Segmento(M_1, N_1)	i_1 = 7.44	

APÊNDICE C – PROTOCOLO DE MODIFICAÇÕES DO MDI II

N.	Nome	Ícone...	Descrição	Valor	Legenda
1	Número n	a = 2		n = 5	
6	Lista lista1		Sequência(Girar(A + (radio, 0), s * 2π / n, A), s, 0, n - 1)	lista1 = {(16.82, 0), (12.94, ...	
7	Lista lista2		Sequência(Sequência(Segme s), Elemento(lista1, t)), t, 1, r	lista2 = {{0, 6.6, 10.68, 10.6...	
8	Texto texto1	ABC		"Nº diagonais = "	
9	Texto texto2	ABC		" \frac{ lados\ (lados-3) }{2 ...	
10	Número a		n (n - 3) / 2	a = 5	
11	Valor Boolean...		$a \stackrel{?}{=} n (n - 3) / 2$	b = true	
12	Texto texto4	ABC		"Nº diagonais ="	
15	Texto texto10	ABC		"Nº diagonais ="	
17	Número a_1		n (n - 3) / 2	$a_1 = 5$	
18	Texto $texto5_1$	ABC	n + ""	"5"	
19	Texto $texto6_1$	ABC	n + ""	"5"	
20	Número a_2		n (n - 3) / 2	$a_2 = 5$	
21	Texto $texto5_2$	ABC	n + ""	"5"	
22	Texto $texto6_2$	ABC	n + ""	"5"	
23	Número a_3		n (n - 3) / 2	$a_3 = 5$	
24	Texto $texto5_3$	ABC	n + ""	"5"	
25	Texto $texto6_3$	ABC	n + ""	"5"	
27	Círculo d		Círculo com centro D e raio 4.5	d: $x^2 + y^2 = 20.25$	
30	Polígono polí...		Polígono(E, F, n)	polígono1 = 48.15	
30	Segmento e		Segmento E, F	e = 5.29	
30	Segmento f		Segmento F, G	f = 5.29	
31	Texto texto12	ABC		"ELEMENTOS"	
32	Texto texto13	ABC		"NºDIAGONAIS"	

33	Texto texto14	ABC		"ÂNGULOS"	
34	Texto texto15	ABC		"SOMA DOS ÂNGULOS IN...	
42	Texto texto16	ABC		"TRIÂNGULO"	
43	Texto texto16$_{1}$	ABC		"QUADRADO"	
44	Texto texto16$_{2}$	ABC		"PENTÁGONO"	
45	Texto texto16$_{3}$	ABC		"HEXÁGONO"	
46	Texto texto16$_{4}$	ABC		"HEPTÁGONO"	
47	Texto texto16$_{5}$	ABC		"OCTÓGONO"	
48	Texto texto16$_{6}$	ABC		"ENEÁGONO"	
49	Texto texto16$_{7}$	ABC		"DECÁGONO"	
50	Texto texto16$_{8}$	ABC		"ENDECÁGONO"	
51	Texto texto16$_{9}$	ABC		"DODECÁGONO"	
52	Texto texto16$_{10}$	ABC		"TRIDECÁGONO"	
53	Texto texto16$_{11}$	ABC		"TETRADECÁGONO"	
54	Texto texto16$_{12}$	ABC		"PENTADECÁGONO"	
55	Texto texto16$_{13}$	ABC		"HEXADECÁGONO"	
56	Texto texto16$_{14}$	ABC		"HEPTADECÁGONO"	
57	Texto texto16$_{15}$	ABC		"OCTODECÁGONO"	
58	Texto texto16$_{16}$	ABC		"ENEADECÁGONO"	
59	Texto texto16$_{17}$	ABC		"ICOSÁGONO"	
64	Valor Boolean...			o = false	APÓTEMA
65	Valor Boolean...			u = false	RAIO
76	Valor Boolean...			v = false	DIAGONAL
77	Valor Boolean...			w = false	CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

78	Valor Booleano o_1			o_1 = false	CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA
81	Valor Booleano u_1			u_1 = false	EIXODESIMETRIA
82	Valor Booleano v_1			v_1 = false	ÂNGULO INTERNO
83	Valor Booleano w_1			w_1 = false	ÂNGULO EXTERNO
84	Valor Booleano h_2			h_2 = false	ÂNGULO CENTRAL
94	Ângulo β		Ângulo entre C_2, V_1, W_1	β = 107.68°	
99	Ângulo δ		Ângulo entre Z_1, D, M_1	δ = 72°	
111	Texto texto18	ABC	"" + η + ""	"108°"	
119	Texto texto19	ABC	"" + ω + ""	"72°"	
176	Texto texto15_1	ABC		"VALOR DE CADA ÂNGUL...	
191	Ângulo ι		Ângulo entre G', D', W_1	ι = 72°	
194	Texto texto21	ABC	"Como se formam " + n + " - 2 triângulos"	"Como se formam 5 - 2 triâ...	

APÊNDICE D – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DOS *APPLET'S* DO MDI IV

RETÂNGULO						
N.	Nome	Íc...	Descrição	Valor	Definição	Legenda
1	Ponto A			A = (1.78,...		
2	Ponto B			B = (6.64,...		
3	Semir...		Semirretacom	f:-0.01x+...	Semirreta(AB)	
4	Reta g		Reta passando	g: -4.86x-...	Perpendiculf)	
5	Círcul...		Círculo com centro	c: (x - 1.7...	Círculo(A,5)	
6	Ponto C		Interseçãode c, g	C = (1.78,...	Interseção(cg, 2)	
7	Segm...		SegmentoC, A	h = 5	Segmento(CA)	
8	Reta i		Reta passando	i: -4.86x - ...	Perpendiculf)	
9	Ponto D		Ponto sobre h	D = (1.78,...	Ponto(h)	
10	Reta j		Reta passando	j:-0.01x+...	Reta(D, f)	
11	Ponto E		Interseçãode i, j	E = (6.64,...	Interseção(ij)	
12	Quadr...		Polígono D, A, B, E	q1 = 12.69	Polígono(D,A, B, E)	
12	Segm...		SegmentoE, D	e = 4.86	Segmento(ED, q1)	
13	Ângul...		Ângulo entre A, D,	α = 90°	Ângulo(A,D, E)	
14	Ângul...		Ângulo entre D, E,	β = 90°	Ângulo(D,E, B)	
15	Ângul...		Ângulo entre E, B,	γ = 90°	Ângulo(E,B, A)	
16	Ângul...		Ângulo entre B, A,	δ = 90°	Ângulo(B,A, D)	
17	Valor ...			k = true		Pontos de Dinamismo

LOSANGO						
N.	Nome	Íc...	Descrição	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A				A = (-3.16, -1.76)	
2	Ponto C				C = (9.86, 0.09)	
3	Ponto E				E = (12.41, 0.14)	
4	Reta g		Reta C, E	Reta(C, E)	g: -0.05x + 2.55...	
5	Semirre...		Semirreta comorigem C	Semirreta(C, E)	h: -0.05x + 2.55y...	
6	Ponto F		Ponto sobre h	Ponto(h)	F = (12.41, 0.14)	
7	Reta i		Mediatriz de CF	Mediatriz(C, F)	i: -2.55x - 0.05y ...	
8	Ponto G		Interseção de i, h	Interseção(i, h)	G = (11.14, 0.12)	
9	Círculo c		Círculo com centro G e raio 2	Círculo(G, 2)	c: (x - 11.14)² + (...	
10	Ponto H		Interseção de c, i	Interseção(c, i, 2)	H = (11.1, 2.12)	
11	Ponto I		Interseção de c, i	Interseção(c, i, 1)	I = (11.18, -1.88)	
12	Quadrilá..		Polígono F, H, C, I	Polígono(F, H, C,I)	q1 = 5.1	
12	Segmento f_1		Segmento F, H	Segmento(F, H, q1)	f_1 = 2.37	
12	Segmento h_2		Segmento H, C	Segmento(H, C, q1)	h_2 = 2.37	
12	Segmento c_1		Segmento C, I	Segmento(C, I, q1)	c_1 = 2.37	
12	Segmento i_2		Segmento I, F	Segmento(I, F, q1)	i_2 = 2.37	
13	Valor B...				a = true	Ponto de Dinamismo

QUADRADO						
N.	Nome	Íc...	Descrição	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A				A = (5.56,...	

2	Ponto B				B = (8.96,...	
3	Semir...		Semirretacom	Semirreta(AB)	f: 0.02x + ...	
4	Polígo...		Polígono(A,B, 4)	Polígono(A,B, 4	pol1 = 11....	
4	Segm...		SegmentoA, B	Segmento(B, pol1)	g = 3.4	
4	Segm...		SegmentoB, C	Segmento(C, pol1)	h = 3.4	
4	Ponto C		Polígono(A,B, 4)	Polígono(A,B, 4	C = (8.98,...	
4	Ponto D		Polígono(A,B, 4)	Polígono(A,B, 4	D = (5.58,...	
4	Segm...		SegmentoC, D	Segmento(D, pol1)	i = 3.4	
4	Segm...		SegmentoD, A	Segmento(A, pol1)	j = 3.4	
5	Ângul...		Ângulo entre D, C,	Ângulo(D,C, B)	α = 90°	
6	Ângul...		Ângulo entre C, B,	Ângulo(C,B, A)	β = 90°	
7	Ângul...		Ângulo entre B, A,	Ângulo(B,A, D)	γ = 90°	
8	Ângul...		Ângulo entre A, D,	Ângulo(A,D, C)	δ = 90°	
9	Valor ...				a = true	Ponto de Dinamismo

TRAPÉZIO ESCALENO						
N.	Nome	Íc...	Descri...	Definiç...	Valor	Legenda
1	Pont...				B = (6....	
2	Pont...				A = (9....	
3	Reta i		Mediatrizde AB	MediatrizB)	i:2.56x...	

4	Semi...		Semirretacom	SemirretaB)	f:0.02x...	
5	Pont...		Ponto sobre i	Ponto(i)	C = (8....	
6	Reta g		Reta passando	Reta(C,f)	g: 0.02...	
7	Pont...		Ponto sobre g	Ponto(g)	D = (10...	
8	Círcul...		Círculocom	Círculo(D0.4)	c: (x - 1...	
9	Pont...		Interseçãde c, g	Interseçãg, 2)	E = (9....	
10	Pont...		Ponto sobre g	Ponto(g)	F = (-8....	
11	Segme h_1		SegmentE, F	SegmentF)	h_1 = 18.65	
12	Pont...		Ponto sobre h_1	Ponto(h_1)	G = (5....	
13	Pont...		Interseçãde i, f	Interseçãf)	H=(8....	
14	Círcul...		Círculocom	Círculo(H0.4)	d: (x - 8...	
15	Quad...		PolígonoD, A, B,	Polígono(A, B, G	q1 = 9....	
15	Segme d_1		SegmentD, A	SegmentA, q1)	d_1 = 2.76	
15	Seg...		SegmentA, B	SegmentB, q1)	a = 2.56	
15	Seg...		SegmentB, G	SegmentG, q1)	b = 3.17	
15	Segme g_1		SegmentG, D	SegmentD, q1)	g_1 = 4.86	
16	Seg...		SegmentC, H	SegmentH)	h = 2.69	
17	Ponto I		Pontomédio	PontoMéH)	I=(8.1...	
18	Texto...	ABC			"h"	
19	Valor...				e = false	Pontos de Dinamism

TRAPÉZIO ISÓSCELES						
N.	Nome	Íc...	Descrição	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto B				B = (1.84, -...	
2	Valor ...				e = true	Pontos de Dinamismo
3	Ponto A				A = (6.86, -...	
4	Semirr...		Semirreta com origem	Semirreta(B, A)	f: y = -8.68	
5	Reta g		Mediatriz deBA	Mediatriz(B,A)	g: x = 4.35	
6	Ponto C		Ponto sobreg	Ponto(g)	C = (4.35, -...	
7	Reta h		Reta passando	Reta(C, f)	h: y = -6.64	
8	Ponto D		Interseçãode g, f	Interseção(g, f)	D = (4.35, -...	
9	Segm...		SegmentoC, D	Segmento(C, D)	i = 2.04	
10	Círculo c		Círculo com centro C e	Círculo(C, 0.4)	c: (x - 4.35)²...	
11	Ponto F		Ponto sobreh	Ponto(h)	F = (-9.71, -...	
12	Ponto E		Interseçãode c, h	Interseção(c, h, 1)	E = (3.95, -...	
13	Segm...		Segmento F,E	Segmento(F, E)	j = 13.66	
14	Ponto G		Ponto sobre j	Ponto(j)	G = (3.09, -...	
15	Ponto G'		Reflexão (ou Inversão) de	Reflexão(G, i)	G' = (5.61, -...	
16	Quadri...		Polígono G,B, A, G'	Polígono(G, B, A, G')	q1 = 7.7	
16	Segmentg$_1$		SegmentoG, B	Segmento(G,B, q1)	g_1 = 2.4	
16	Segm...		Segmento B,A	Segmento(B, A, q1)	b = 5.02	
16	Segm...		Segmento A,G'	Segmento(A, G',	a = 2.4	

				q1)		
16	Segm...		SegmentoG', G	Segmento(G' G, q1)	g' = 2.51	
17	Ponto H		Ponto médiode CD	PontoMédio(D)	H = (4.35, -...	
18	Texto t...	ABC			"h"	

TRAPÉZIO RETÂNGULO						
N.	Nome	Íc...	Descrição	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto B				B = (-1.56, -10.3)	
2	Valor Bo...				e = false	Pontos de Dinamismo
3	Ponto G				G = (3.02, -10.28)	
4	Semirret...		Semirreta com origem B	Semirreta(B, G)	k: -0.02x + 4.58y =...	
5	Reta l		Reta passando porB e perpendicular a	Perpendicular(B, k)	l: -4.58x - 0.02y = ...	
6	Ponto I		Ponto sobre l	Ponto(l)	I = (-1.57, -7.51)	
7	Reta m		Reta passando porI e paralela a k	Reta(I, k)	m: -0.02x + 4.58y ...	
8	Círculo d		Círculo com centro I e raio 0.4	Círculo(I, 0.4)	d: (x + 1.57)² + (y +...	
9	Círculo p		Círculocom centroB e raio 0.4	Círculo(B, 0.4)	p: (x + 1.56)² + (y +...	
10	Ponto J		Interseção de p, k	Interseção(p, k, 1)	J = (-1.16, -10.3)	
11	Ponto K		Interseção de d, m	Interseção(d, m, 2)	K = (-1.17, -7.51)	
12	Ponto M		Ponto sobre m	Ponto(m)	M = (70.61, -7.19)	
13	Segment...		Segmento K, M	Segmento(K, M)	q = 71.79	
14	Ponto N		Ponto sobre q	Ponto(q)	N = (2.22, -7.49)	
15	Segment...		Segmento I, B	Segmento(I, B)	r = 2.79	
16	Ponto P		Ponto médio de IB	PontoMédio(I, B)	P = (-1.57, -8.9)	
17	Texto tex..	ABC			"h"	

18	Quadrilát..		Polígono I, B, G, N	Polígono(I, B, G, N)	q1 = 11.68	
18	Segment...		Segmento I, B	Segmento(I, B, q1)	i = 2.79	
18	Segment...		Segmento B, G	Segmento(B, G, q1)	b = 4.58	
18	Segmento g_1		Segmento G, N	Segmento(G, N, q1	g_1 = 2.9	
18	Segmento n_1		Segmento N, I	Segmento(N, I, q1)	n_1 = 3.79	
19	Reta f		Reta passando porJ e paralela a r	Reta(J, r)	f: 2.79x + 0.01y = -...	
20	Ponto A		Interseção de d, r	Interseção(d, r, 1)	A = (-1.57, -7.91)	
21	Ponto C		Interseção de p, r	Interseção(p, r, 1)	C = (-1.56, -9.9)	
22	Reta g		Reta passando porA e paralela a m	Reta(A, m)	g: -0.02x + 4.58y =...	
23	Reta h		Reta passando porC e paralela a g	Reta(C, g)	h: -0.02x + 4.58y =...	
24	Ponto D		Interseção de f, g	Interseção(f, g)	D = (-1.17, -7.91)	
25	Quadrilát..		Polígono I, A, D, K	Polígono(I, A, D, K)	q2 = 0.16	
25	Segment...		Segmento A, D	Segmento(A, D, q2)	a = 0.4	
25	Segmento d_1		Segmento D, K	Segmento(D, K, q2)	d_1 = 0.4	
25	Segmentok_1		Segmento K, I	Segmento(K, I, q2)	k_1 = 0.4	
26	Ponto E		Interseção de k, r	Interseção(k, r)	E = (-1.56, -10.3)	
27	Ponto F		Interseção de f, h	Interseção(f, h)	F = (-1.16, -9.9)	
28	Quadrilát..		Polígono C, E, J, F	Polígono(C, E, J, F)	q3 = 0.16	
28	Segment...		Segmento C, E	Segmento(C, E, q3)	c = 0.4	
28	Segmento e_1		Segmento E, J	Segmento(E, J, q3)	e_1 = 0.4	
28	Segment...		Segmento J, F	Segmento(J, F, q3)	j = 0.4	
28	Segmentof_1		Segmento F, C	Segmento(F, C, q3)	f_1 = 0.4	