UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

DIFICULDADES PARA A COMPREENSÃO DA “REGRA DE SINAIS” POR ESTUDANTES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

WILLAMY FRANCELINO DE OLIVEIRA

Recife

2019

WILLAMY FRANCELINO DE OLIVEIRA

DIFICULDADES PARA A COMPREENSÃO DA “REGRA DE SINAIS” POR ESTUDANTES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Federal de Pernambuco como requisito básico para a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Recife

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Oliveira , Willamy Francelino de.
Dificuldades para a compreensão da regra de sinais por estudantes dos anos finais do ensino fundamental e médio. / Willamy Francelino de Oliveira . - Recife, 2019.
41 : il., tab.

Orientador(a): Verônica Gitirana Gomes Ferreira
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - LicenciaturaMatemática - Licenciatura, 2019.
Inclui referências, apêndices.

1. Números Negativos. 2. Multiplicação de Negativos. 3. Obstáculos. 4. Regra de Sinais. 5. Ensino - Aprendizagem. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

WILLAMY FRANCELINO DE OLIVEIRA

DIFICULDADES PARA A COMPREENSÃO DA “REGRA DE SINAIS” POR ESTUDANTES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Federal de Pernambuco como requisito básico para a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática. Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 16/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora e Presidente)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marco Barone (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. José Wilson Pereira (Examinador Externo)

Secretária de Educação de Pernambuco

EPÍGRAFE

“Mais beneficiado é aquele que mais serve”

Autor Desconhecido

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo descrever e analisar dificuldades para a compreensão e uso das operações com números inteiros por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. As dificuldades são comparadas, em uma abordagem histórica dessas dificuldades, mostrando que são dificuldades que permanecem até os dias atuais, denominados de obstáculos epistemológicos. São discutidos, nesta pesquisa, trabalhos feitos que abordam tais dificuldades de ensino/aprendizagem dos números negativos. Para coletar os dados foi construído e aplicado um questionário/teste contendo 6 questões envolvendo multiplicação e/ou divisão de números negativos com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino médio da Escola Senador Novaes Filho localizada no Recife. A elaboração do teste foi baseada em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental. Classificamos os erros mais recorrentes e as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução dos itens, comparamos algumas estratégias utilizadas associadas a resolução de duas questões. Os resultados mostram que os estudantes conseguem resolver as situações quando em questões de operações únicas e simples. Porém, em expressões ou resolução de equações, ou quando precisam justificar, fica claro que o uso é apenas de uma regra decorada. Por fim, espera-se que o professor consiga propor um tratamento diferente ao trabalhar o ensino dos números negativos em sala de aula. Identificando possíveis relações do ensino e as dificuldades dos estudantes.

Palavras – chave: Números Negativos. Multiplicação de negativos. Obstáculos. Regra de Sinais. Ensino-Aprendizagem.

ABSTRACT

This paper aimed to describe and analyze difficulties for the comprehension and use of integer operations by students of the final years of elementary and high school. The difficulties are compared, in a historical approach of these difficulties, showing that these difficulties remain until the present day, called epistemological obstacles. This research discusses works that address such difficulties in teaching / learning negative numbers. In order to collect the data, a questionnaire / test containing 6 questions involving multiplication and / or division of negative numbers was constructed and applied to 9th grade students and 3 rd year students from the Senador Novaes Filho School located in Recife. The elaboration of the test was based on textbooks from the 7th grade of elementary school. We classified the most recurring errors and the strategies used by students in solving the items, compared some strategies used associated with the resolution of 2 questions. Finally, it is expected that the teacher will be able to propose a different treatment when teaching negative numbers in the classroom. Identifying possible relationships between teaching and students' difficulties.

Keywords: Negative numbers. Negative multiplication. Obstacles. Sinal Rule. Teaching-Learning

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com maior participação em sala de aula, na Residência pedagógica, observei que a maioria dos estudantes do 3º ano do ensino médio de uma escola pública do Recife tinha dificuldades no uso correto das regras dos sinais da multiplicação e divisão. Dificuldades essas que, a uma primeira impressão, deveriam estar sanadas considerando o ano escolar em que estavam.

No entanto, tanto estudos da história da matemática (BOYER, 1974) como os estudos sobre obstáculos epistemológicos e didáticos (BACHELARD, 1947; BROUSSEAU, 1989) discutem o quão um conhecimento válido por muitos anos, torna-se um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os números negativos é um dos casos típicos de conhecimento que sofre barreiras advindas do conhecimento dos naturais.

Uma vez obtido tal conhecimento a dificuldade de aceitação de um novo que seja contrário ao já aprendido se torna uma barreira não só para os estudantes, segundo Glaeser, os matemáticos necessitaram de mais de um milênio e meio para chegarem de acordo sobre o negativo e a regra dos sinais (Cf. GLAESER, 1981, apud NETO, 2011, p. 4).

Nesse sentido, visamos nos aprofundar na relação entre esses obstáculos e os contextos em que se usam tais números. Como pesquisa visamos mapear e analisar as estratégias matemáticas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio e 9º ano do ensino fundamental ao se deparar com diferentes situações de multiplicação com números negativos. Esses são anos finais dos ciclos de ensino em que os números negativos assumem importante papel para entendimento de outros campos da matemática.

Este projeto se organiza em 7 capítulos, a introdução compõe o capítulo 1, segue-se o capítulo dos objetivos da pesquisa, a fundamentação teórica da pesquisa compõe o capítulo 3, dividido em fundamentação matemática, história da matemática, fundamentação de obstáculos epistemológicos e didáticos, e uma discussão dos obstáculos didáticos no tema dos números inteiros relativos, à revisão da literatura compõe o capítulo 4, o capítulo 5 é composto pelo método de pesquisa explicitando como foi escolhido/abordado a pesquisa(os sujeitos, o teste aplicado e como seria feito a análise) e, por fim, temos a análise dos resultados obtidos na pesquisa no capítulo 6 e as considerações finais no capítulo 7. Neste trabalho encontra-se também a referência bibliográfica, o teste e a foto da aplicação na sala de aula encontram-se no apêndice.

2 OBJETIVOS DA PESQUISA

2.1 OBJETIVOS GERAIS

Mapear e analisar as estratégias matemáticas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio e 9º ano do ensino fundamental ao se deparar com diferentes situações de multiplicação com números negativos.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar estratégias utilizadas com os estudantes (do 3º ano do ensino médio e 9º ano do ensino fundamental) na distinção e solução de questões que requer a multiplicação ou divisão de números negativos.
- Comparar as estratégias utilizadas nos dois diferentes níveis de ensino.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nossa fundamentação teórica terá cinco bases: a matemática relativa à operação com os números inteiros (CARAÇA, 1950), os números inteiros na história da matemática (BOYER, 1974), a noção de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1947), a noção de Obstáculos didáticos (BROUSSEAU, 1989) e obstáculos didático-epistemológicos dos números inteiros relativos IREM D´AQUITAINE (2008).

3.1 NÚMEROS NEGATIVOS

Caraça (1950) discute a importância de tomar grandezas em dois sentidos opostos, em particular, tomando como referência a contagem dos anos da história da humanidade. É essencial tomar referenciais que possam auxiliar a compreensão do estudante, por exemplo, para construir a escala do tempo o homem tomou como referência o nascimento de cristo e a partir deste começou a contar o tempo nos dois sentidos opostos. Então deu início a marcação histórica no tempo de cada acontecimento tomando como base uma origem já fixada e passou a ser descrita como por exemplo: “Sócrates morreu em 399 a.C., Galileu nasceu em 1564 d.C. referimo-nos a dois acontecimentos perfeitamente localizados no decorrer dos tempos, dois acontecimentos que distam um do outro de 1962 anos” (CARAÇA, 1950, pág.95).

O uso da reta numérica para localização de pontos é imprescindível desde que haja orientação. Se um ponto móvel está na origem e se desloca uma unidade de comprimento a cada segundo teremos que no final de 3 segundos este ponto percorrerá 3 unidades de comprimento. Porém, essa indicação não será precisa em responder onde esse móvel parou, se no ponto -3 ou no ponto 3. Caraça (1950) nos diz que se juntarmos a esse número 3 um sentido indicativo do movimento saberemos exatamente onde o móvel parou.

Figura 1: Reta Numérica.

Fonte: (Paulo, 2019)

Se o móvel sai da origem (ponto 0) mantendo sua velocidade constante de um segundo a cada unidade de comprimento percorre durante 3 segundos para o lado direito da reta, depois fica em repouso e, então, percorre por 5 segundos no sentido oposto teríamos que ao fim do percurso o móvel estaria a 2 unidades a esquerda da origem. Contudo, isso seria um problema uma vez que o subtraendo (5) é maior que o minuendo (3), então Caraça (1950) defende que para resolver problemas como esses temos que nos libertar da impossibilidade da subtração.

O conceito de número relativo para Caraça é bem definido e ele o traz em seu livro assim: sejam dois números a e b quaisquer, sua diferença $a - b$ chamaremos de número relativo, que poderá ser positivo, negativo ou nulo se respectivamente $a - b > 0, a - b < 0 \; ou \; a = b$. Se a diferença $a > b$ for positiva teremos os casos já conhecidos dentro dos naturais, mas se for negativo $a < b$ teremos de por $b - a$ precedido do sinal - (menos), por exemplo, $8 - 5 = 3$ número relativo positivo e $5 - 8 = -3$ que é negativo.

Caraça (1950) mostra que no campo dos números relativos à novidade fica por conta do número negativo e reforça a ideia que a uma extensão deve ser feita a partir das necessidades que se foi construindo em outros conjuntos numéricos e com eles, as propriedades novas são estendidas respeitando-se as já herdadas.

As propriedades de qualquer conjunto têm de ser preservadas e no campo dos relativos foi definido que:

1) de dois números positivos será o maior aquele que tiver maior valor absoluto;
2) qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo;
3) de dois números negativos será o maior o que tiver menos valor absoluto.

Das definições acima nota-se que existe uma infinidade de diferenças que pode representar um mesmo número relativo, desde que não mude seu sinal e módulo. O número -5 pode ser a diferença de: $5-10, 2-7, 180-1850, 0-5\ldots$, em geral definido como $a-(a+5)$,onde a é um real qualquer.

Definições de soma e subtração nos relativos obedecem às propriedades já estudadas no campo real.

$$(p-q)+(r-s)=p-q+r-s=p+r-q-s=(p+r)-(q+s)$$

$$(p-q)-(r-s)=p-q-r+s=p+s-q-r=(p+s)-(q+r)$$

Em particular, têm-se que

$$a+(-b)=a+(0-b)=a+0-b=a-b \text{ e } a-(-b)=a-(0-b)=a+b-0=a+b$$

ou seja, “somar um número negativo equivale a subtrair um número positivo de mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar um número positivo de mesmo módulo”. Caraça (1950, p.101).

Na multiplicação temos propriedades preservadas bem como a distributividade advindas do real.

$(p-q)\times(r-s)=p\times(r-s)-q\times(r-s)$=$pr-ps-(qr-qs)=pr-ps-qr+qs=pr+qs-ps-qr=(pr+qs)-(ps+qr)$.

Em particular, têm-se:

$$(+a)\times(+b)=(a-0)\times(b-0)=ab-a\times0-0\times b\ +0\times0=ab$$

$$(+a)\times(-b)=(a-0)\times(0-b)=\ -ab$$

$$(-a)\times(+b)=(0-a)\times(b-0)=\ -ab$$

$$(-a)\times(-b)=(0-a)\times(0-b)=\ +ab$$

Essas igualdades acima são estudadas no ensino básico e leva o nome de “regra dos sinais”. As propriedades para divisão dos números relativos são semelhantes à da multiplicação tendo em vista que são operações inversas.

O desenvolvimento dos números negativos ao longo da história se deu de forma cautelosa e com algumas divergências no percurso. Boyer (1947) em seu trabalho destaca que os chineses não tiveram dificuldades e já utilizavam os números negativos para cálculos, eles trabalhavam com “barras” vermelhas para os números de coeficiente positivo e preta para os negativos. Porém, não era usado essa mesma ideia para solucionar equações. Posteriormente, foi feito o uso de soluções negativas para equações do 2º grau com o matemático indiano Brahmagupta que sistematizou o número negativo e o zero pela primeira vez.

No século XVI, Stifel em sua obra tratou de usar coeficientes negativos para reduzir multiplicidade de equações quadráticas que na época era feito de uma única forma. Com isso ele teve de explicar as “regras especiais” para o uso $+ e -$. Boyer (1947) aponta que foi Stifel foi um dos matemáticos que divulgaram os símbolos “alemães” $+ e -$ na europa. Porém, ele continuou a não aceitar que um número negativo pudesse ser solução para uma equação do segundo grau, apesar de entender bem as propriedades dos números negativos, ele os chamou de “numeri absurdi”.

O uso dos números negativos para solucionar equações foi inevitável para as cúbicas, o matemático Cardano os chamou de “numeri ficti”, porque ele foi aceito de forma plausível apenas reta numérica. Para solucionar uma equação cúbica com raízes reais e diferentes de 0 pela fórmula de Tartaglia-Cardano resultaria em raízes quadradas negativas.

3.2 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO

A noção de obstáculo epistemológico desenvolvida por Bachelard (1947), epistemólogo e poeta, para estudar as grandes revoluções do conhecimento científico, localizado por ele em momento de ruptura de paradigmas. Assim, Bachelard estudou os momentos de estagnação e das rupturas que provocaram grandes evoluções nas ciências, e verificou que conhecimentos ou paradigmas bem estabelecidos e válidos, eram obstáculos para a evolução da ciência. Brosseau (1989), por sua vez, inspirado na noção de obstáculo epistemológicos trouxe para o contexto da sala de aula a noção, introduzindo a noção de obstáculo didático.

No início de sua obra Bachelard explica de forma clara que “não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidão e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectamos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos”. Bachelard (1996, pág. 1).

Os obstáculos epistemológicos podem ser definidos/entendidos como os entraves, que faz parte do próprio conhecimento científico do indivíduo podendo estagnar seu desenvolvimento científico e social. Bachelard (1996) afirma que um obstáculo epistemológico permanece forte no conhecimento que não é questionado e que hábitos foram úteis e sadios para solucionar problemas podem, com o tempo, entravar a pesquisa e a busca por novos conhecimentos.

Considerando que o estudante não é um ser sem conhecimentos prévios, é necessário que o professor proponha alternativas a fim de transcender os obstáculos epistemológicos existentes em seu conhecimento prévio e promover a aprendizagem por meio de um processo que mude seus hábitos ao se deparar com certos problemas.

Então se o professor desconsidera os conhecimentos prévios que o estudante tem sobre a construção e operações feitas anteriormente em sala de aula com os números naturais, ele continuará por reafirma os erros já existentes e a aprendizagem dos números negativas será diretamente afetada.

3.3 OBSTÁCULO DIDÁTICO

Guy Brousseau, professor universitário e especialista no ensino da didática das ciências e considerado o “pai” da didática na matemática, introduziu a noção de obstáculos didáticos nas ciências, em especial, na matemática. Separou os obstáculos didáticos segundo sua origem: de origem epistemológica, de origem didática, de origem cultural e de origem ontogênica.

Obstáculos de origem didática tendem a ser aqueles que partem das escolhas e propósitos que o sistema educacional busca. Ele destaca que o ensino dos números decimais é usado por todo mundo devido a sua grande utilidade na prática/cotidiano e seu ensino é baseado nos sistemas de medidas. Essa prática é utilizada desde o ensino básico até a universidade e a definição é dada como sendo “os números decimais são números inteiros com uma mudança de unidades e, portanto, números naturais (com um ponto decimal)”.

O erro para Brosseau (1989) é considerado um ponto importante para o ensino-aprendizagem do estudante. O estudante que não tem dúvidas possivelmente não terá oportunidade para desencadear novos conhecimentos e irá se deparar com situações em que seu conhecimento não dará conta de solucionar gerando um obstáculo.

Brosseau (1989) discute que o obstáculo pode surgir devido aos métodos práticos e cômodos utilizados pelos estudantes para solucionar problemas de um mesmo domínio. O obstáculo vem a incomodar quando não se consegue resolver problemas mais sofisticados (apesar de ser do mesmo domínio de conteúdo), usando as mesmas ferramentas que anteriormente lhe trouxe êxito.

Um exemplo que ele traz é na solução de um sistema linear utilizando o método por substituição, que é útil quando existem apenas duas equações, mas inviável para solucionar um sistema com número suficientemente grande de equações e variáveis.

Os obstáculos surgem a partir dos erros, seja erro de uma simples solução (uso incorreto algebricamente) ou erro de fundamentação (conceitos aprendidos de forma incompleta ou que precisou ser sofisticado). Brosseau (1989) defende que o erro didático tem de ser visto/analisado como uma ferramenta para aprofundar o sistema professor-ensino-aprendizagem estudante a desenvolver mais situações/problemas/exercícios que gerem no estudante a capacidade de diferenciar e revisar situações/conceitos outrora já aprendidos dos que irão surgir com novas ferramentas a serem utilizadas.

3.4 OBSTÁCULOS PARA APRENDIZAGEM DO NÚMERO INTEIRO

IREM D´AQUITAINE (2008) começa, em sua pesquisa, explicando todo o contexto histórico de desenvolvimento/entraves/aceitação dos números relativos pelos grandes matemáticos. Em seguida, vem destacando/listando os obstáculos epistemológicos que permeiam o processo de ensino-aprendizagem dos números relativos.

O 1º obstáculo mencionado é dar sentido ao número negativo de forma isolada; 2º obstáculo é abandonar a escrita dos números a partir do zero e unificar a escrita colocando o zero entre os números negativos e positivos mostrando que a diferença está no sinal; 3º obstáculo é querer dar significado concreto/real ao número negativo e 4º obstáculo é querer unificar um modelo concreto na adição e multiplicação para o ensino do número negativo.

Fica evidente para o IREM D´AQUITAINE (2008), ao estudar os números relativos, que o maior problema não é definir operações de soma ou subtração com esses números, pois essa situação está bem definida e o ensino é baseado no modelo metafórico concreto que estabelece ganhos/dívidas. Mas o que passará na cabeça de um estudante quando colocarmos uma dívida de R$ 10.000,00 sendo multiplicada por uma outra de R$ 5.000,00? Que ele ficará milionário e agora pode comprar cada vez mais? Então é importante o professor deixar claro para o estudante que esse modelo não pode ser levado para multiplicação pois não podemos ter $dívida \times dívida$ ou $crédito \times crédito$.

Como entender que $(-5)^2$ será maior que $(+2)^2$ se explicamos que na reta numérica o número $(+2)$ é maior sete unidades que o (-5)?

Em seu trabalho é listado uma sequência didática para introdução dos números relativos com relação a soma, exemplos como:

1) Escrever um dos números a ser operado unido de pontinhos resultando em números negativos ou positivos.

$9 + \ldots =$ 7 e para maioria dos estudantes a resposta foi que era impossível somar um número com outro e ele ser menor que o primeiro somado.

2) Em seguida o professor deixa os estudantes reescreverem as igualdades colocando $(7-9)$ e, por fim, $9+(7-9)=7$. Em seguida, explicou que os números negativos podem ser produzidos por meio de diferenças do maior pelo menor.

Outra forma encontrada foi escrever o oposto de um número para definir uma operação que resulte em negativos. “Você pode imaginar adições resultando em um número negativo”? Por exemplo, $-5+2 = -2$. Alguns estudantes responderam -8 e, em seguida, o professor justificou utilizando a noção de número oposto$-5+(5-2)=(-5+5)-2=0-2= -2$.

Para os exemplos concretos/reais, foi utilizado exercícios com temperaturas, ganhos e perdas de objetos, subidas e descidas de um elevador e o resultado com esses exemplos foram mais satisfatórios.

Por fim, estabeleceu alguns contextos/exemplos para introduzir a multiplicação dos números negativos.

1) Colocou várias somas de negativos em sequência e perguntou aos estudantes qual seria a resposta. Ex: $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + \ldots + (-3)$ (somando 9 parcelas de -3). Alguns dos estudantes perceberam que seria mais fácil contar quantas somas tinha e colocar a quantidade na frente, com isso ficaram mais familiarizados, pois, agora, tem um número positivo sendo multiplicado por um negativo:$9\, x\, (-3)$. Teve estudantes que ficaram "chocados" quando perceberam que a regra dos sinais para adição não se aplicava e o resultado era um número negativo, repetir o sinal do maior e fazer a operação já que $9 > (-3)$.

2) Outra situação foi tratar com o número oposto, pois ele teria produtos com um dos fatores sendo o zero e está bem aceito pelos estudantes que o produto de qualquer número por zero resulta em zero.

Ex: $(-5)\, x\, (3) + (-5)\, x\, (-3) = (-5)\, x\, [(3 + (-3)] = (-5)\, x\, 0 = 0$

Definir o número negativo como uma diferença por zero ajudou a reduzir o produto de número negativos ao caso de adição na regra dos sinais.

Ex: $(-5)\, x\, (-3) = -5\, x\, (0 - 3) = -5\, x\, 0 - (-5)\, x\, 3 = 0 - (-15) = 15$

3) Uma ideia que é bastante utilizada quando tratamos da regra dos sinais para multiplicação também foi utilizada e uma ideia sugerida pelo IREM D´AQUITAINE (2008) é multiplicar separadamente os "valores digitais" (números sem os sinais) e depois adicionar o sinal que se aplica a seguinte regra:

- Produto de dois negativos é **positivo**
- Produto de dois positivos é **positivo**
- Produto um negativo e um positivo resulta em um **negativo**

Uma outra dificuldade destacada é que pode gerar confusão nos estudantes é que o sinal "- "é representado de forma única, mas traz consigo três significados:

- É o sinal de subtração

- É o sinal para representar um número negativo
- É o sinal que representa um número oposto

Por fim, o autor reforça que é importante deixar claro para os estudantes que a compreensão dos números negativos são conceitos abstratos definidos para satisfazer condições dentro da matemática.

4 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo mostraremos pesquisas que tratam a abordagem dos números negativos, os desafios enfrentados por estudantes e professores no processo de ensino-aprendizagem, além das diferentes estratégias utilizadas sobre uso da regra dos sinais facilitando a introdução desse conteúdo. A escolha pelos trabalhos de Neto (2011), Rosa (2013), Alves (2011) e Hillesheim (2013) foi feita devido a relevância e proximidade com meu tema de pesquisa, bem como o processo histórico dos números negativos, estratégias para minimizar esses obstáculos epistemológicos, o processo de ensino-aprendizagem dos números negativos em diferentes níveis de ensino e aplicação de testes/questionário para coleta de dados, mapeamento das respostas e as estratégias utilizadas pelos estudantes.

A pesquisa de Alves (2011) tem como objetivo observar por meio de uma sequência de atividades o desenvolvimento das estratégias mobilizadas pelos estudantes da 3º fase da educação de jovens e adultos (EJA) e estudantes do 7º ano do ensino fundamental. É destacada na pesquisa a dificuldade que os professores têm de trabalhar os números relativos nesses níveis de ensino devido a pouca familiaridade dos estudantes e baixo nível de abstração. O autor destaca também que a aquisição do conceito dos números inteiros passa pelo domínio dos estudantes nas quatro operações, que para os estudantes obter um desempenho satisfatório têm de saber somar, subtrair, dividir e multiplicar em situações que envolvam números positivos e negativos.

Após a aplicação do teste foi feito um mapeamento das respostas e estratégias utilizadas pelos estudantes e notou-se que tanto os adultos quanto as crianças não têm dificuldades em associar o número oposto e entender que os números relativos gozam da propriedade distributiva. Porém, quanto ao uso de qual sinal (+ ou -), houve dificuldades pela maior parte dos estudantes.

A pesquisa feita trás bastante resultados significativos quanto ao uso correto da “regra dos sinais”, destacando a importância de domínio de conhecimentos prévios por partes dos estudantes como o das quatro operações. As estratégias e desempenho nos diferentes níveis de ensino é de suma importância em minha pesquisa. Segundo Borba (2009), estudantes do Ensino Médio apresentaram uma maior resistência na superação dos obstáculos identificados, quando comparados com os estudantes do Ensino Fundamental. Isso pode indicar que com o passar do tempo esses conhecimentos tornam-se mais consistentes e, portanto, apresentam maiores resistências à sua superação.

O artigo de Rosa (2013) tem como objetivo apresentar os obstáculos didáticos e epistemológicos, estratégias para o ensino e o processo de desenvolvimento/aceitação da comunidade matemática acerca dos produtos de números negativos. Segundo Bachelard (1947), a aquisição de um conhecimento novo passa, na maioria das vezes, pela aceitação de conhecimentos anteriores e se depara com certos obstáculos. Então, para o estudante aceitar que (-1) x (-1) = 1, não necessariamente passa pela falta de conhecimento antigos, e sim de saberes antigos, estáticos que dificultam à aceitação de novas concepções, podendo trazer estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento.

Na prática, trabalhar o conceito aditivo dos números negativos não é visto como um problema para os professores, em geral, tratam como crédito quando se tem um número positivo e débito para o negativo. Contudo, tendo essa mesma relação dos números negativos e positivos de dívida e crédito existe uma dificuldade para explicar que uma dívida (-) x dívida (-) resultará em um crédito (+) resposta essa que não existe na natureza do estudante. Dessa forma, o produto de dois números negativos resultando em um positivo é justificado pelas regras, abstrações e rigor existente na própria matemática sem viés algum na natureza.

Historicamente os números negativos teve um processo longo de aceitação pela comunidade matemática, os primeiros indícios de uso foram com o matemático Diofanto de Alexandria (250 d.C. - 350 d.C.) que utilizou essa nova álgebra, mas sem nomear de “número negativo”. Passado vários séculos, a aplicação dos números negativos continuava sendo feita, porém sem uma explicação conceitual pela comunidade matemática. A compreensão dos números negativos só foi formalmente estabelecida por Hankel em 1867. Ele defendia que os números devem essencialmente ser criados, imaginados e não descobertos. O artigo deixa bem claro que não existe uma “estratégia mágica” para trabalhar em sala de aula o produto envolvendo números negativos, mas mostra diversas formas didáticas que podem ser trabalhadas, de forma mais acessível, dando significado para os estudantes. São listados 13 estratégias para se trabalhar a regra de sinais do produto de números negativos são elas: “Reta numerada”, “Viagem em uma rodovia”, “Elevadores”, “Office boy", "Filmagens", "Bloquinho animado", "Reconhecimento de padrões", "Gráficos", "Circuitos elétricos", "Partículas carregas", "Propriedades distributivas" e "Processo dedutivo", essas estratégias trazem consigo explicações e motivações próprias, é esperado que os estudantes consigam a partir de alguma dela construir sua própria definição facilitando assim seu entendimento.

Hillesheim (2013) teve como objetivo mostrar os entraves na aprendizagem da regra dos sinais com o uso do "modelo comercial" para explicar os números negativos, positivos e o produto de números negativos. Foi feita uma pesquisa com uso de questionário/teste em duas turmas do 7º ano do ensino fundamental. A pesquisa defende que os estudantes chegam ao 7º ano associando a ideia de número a uma grandeza. Isto pode ser percebido nos mais variados assuntos contemplados no currículo dos anos iniciais do ensino fundamental. Até o 6º ano, "operações do tipo a – b só podem ser resolvidas se a ≥ b, pois é impossível conceber, por exemplo, a ideia de se tirar 7 balas de um pacote que tinha apenas 5 balas" (HILLESHEIM, 2013, pág. 39). Porém, de acordo com Glaeser (1981), o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se em um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números. Seguindo a ideia de Glaeser do ponto de vista didático/pedagógico, muitas dificuldades ainda precisam ser ultrapassadas. Por meio do modelo "comercial metafórico", o estudante é facilmente convencido de que se ele tem cinco reais (+5) e deve três reais (–3), ao pagar a dívida lhe sobram dois reais (+2), contudo, dificilmente será convencido do mesmo em (–3) × (–2) = +6. Como uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? Ou seja, o modelo comercial metafórico é uma ferramenta importante para o professor introduzir o conceito de negativo e positivo, mas não se consegue transportar a mesma ideia para o produto destes números.

Fica evidente a dificuldade na abordagem de produto de negativos na questão 1 da pesquisa, na qual um dos estudantes justifica (-9) x (-4) = -36 porque "devia 9 vezes 4 reais então no final paguei -36 reais". Glaeser (1981, p. 344), por meio de um estudo histórico, discute que um ensino pautado somente sobre exemplos concretos pode ser nocivo. Ele se contrapõe fortemente à ideia de que o ensino da matemática deve se pautar em um ensino baseado em exemplos concretos. Outro fator que contribui para que o ensino dos números inteiros seja conduzido por meio do modelo comercial é a forma de como os livros didáticos abordam esses números. É importante destacar o uso da congruência semântica apresentada por Duval, tentando assim dar mais de um referencial interpretativo para um mesmo problema facilitando para o estudante nas suas aprendizagens matemáticas. Uma das questões do teste que teve o maior índice de erro foi com o uso da reta numérica, com marcações de pontos no eixo negativo e positivo e por fim, solicitando o estudante a posição final, devido a não congruência semântica entre os movimentos propostos pelas setas e o seu registro numérico. Por fim, para tentar compreender de forma mais clara o produto de números negativos é preciso construir o máximo de representação possível. Duval (2005) afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação.

Neto (2011), em seu artigo, aborda dois problemas didáticos que ocorrem nas aulas de matemática no Ensino Fundamental: a introdução do conceito de número negativo e a apresentação da regra dos sinais da multiplicação. Neste artigo o autor mostra que ao pesquisar em livros didáticos e dos programas oficiais das Secretarias de Educação dos Estados Brasileiros é esperado que os estudantes ao final do 6º ano consigam atender algumas competências como:

1. conhecer os inteiros positivos;
2. aprender os algoritmos das quatro operações: + (adição), - (subtração), x (multiplicação) e ÷ (divisão);
3. associarem (no mínimo) ao sinal + a idéia de juntar, ao sinal - a idéia de subtrair, ao sinal x a idéia de adição repetida e ao sinal ÷ a idéia de divisão;
4. entenderam que as operações de + e de -, bem como as de x e de ÷, são inversas uma da outra.

Exemplificando, para uma conta como 12 - 5 objetiva-se que o estudante saiba o resultado correto e, ao mesmo tempo, o que significa esse resultado em um campo de aplicações ou de metáforas qualquer.

Historicamente, os problemas em torno da regra dos sinais que preocuparam os matemáticos também estão presentes na didática da matemática. Um deles é que, quando utilizamos no cálculo aritmético/algébrico usual a regra dos sinais envolvendo a multiplicação, estamos de fato na presença de dois tipos de sinais conceitualmente bem distintos. São os sinais de números e os sinais de operação. Ao longo tempo, a regra dos sinais teve algumas demonstrações melhor vista didaticamente com alguns casos particulares, seja ela algébrica (STEVIN, 1981).

A dificuldade de dar significado para os números negativos foi descrito por Nagel (1979) da seguinte forma: “se número é entendido em primeira e última instância como uma resposta às questões Quantos são? e, no caso de grandezas extensivas, quanto mede? [...] Se matemática era a ciência das grandezas, então esses números impossíveis tem de ser quantidades; mas quantidades negativas e imaginárias eram simplesmente sem sentido, incompatíveis com todas as definições anteriores de quantidade. No ambiente escolar fica difícil entender o número negativo, pois os estudantes dos anos iniciais entendem que o menor número é o zero e agora se deparam com números que são menores que o zero. Por fim, o autor reforça a ideia de manter a interdependência entre a matemática e a aplicação da matemática. Não se deve nem as identificar nem as separar radicalmente. Exemplificando, a identificação entre o conceito matemático de subtração e a aplicação retirar a quantidade b de uma quantidade maior a privaria de desenvolvimento os dois lados.

Em síntese, historicamente os números negativos teve um processo longo de aceitação pela comunidade matemática e foi só formalmente demonstrada por Henkel, que defendia que na matemática os números deveriam ser criados e imaginados de acordo com a necessidade e não descobertos Rosa (2013). No ambiente escolar fica difícil entender o número negativo, pois os estudantes dos anos iniciais entendem que o menor número é o zero e agora se deparam com números que são menores que o zero. Para Alves (2011) a dificuldade que os professores têm de trabalhar os números relativos nesses níveis de ensino é devido a pouca familiaridade dos estudantes e baixo nível de abstração. O autor destaca também que a aquisição do conceito dos números inteiros passa pelo domínio dos estudantes nas quatro operações, que para os estudantes obter um desempenho satisfatório têm de saber somar, subtrair, dividir e multiplicar em situações que envolvam números positivos e negativos.

Para estudantes do 6º ano, “operações do tipo $a – b$ só podem ser resolvidas se $a \geq b$, pois é impossível conceber, por exemplo, a ideia de se tirar 7 balas de um pacote que tinha apenas 5 balas” (HILLESHEIM, 2013, p. 39). De acordo com Glaeser (1981), o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números e do ponto de vista didático/pedagógico, muitas dificuldades ainda precisam ser ultrapassadas. Para Hillesheim (2013) com o modelo “comercial metafórico”, o estudante consegue compreender bem e é convencido de que se ele tem cinco reais (+5) e deve três reais (–4), ao pagar a dívida lhe sobram dois reais (+1), contudo, dificilmente será convencido do mesmo em (–2) × (–2) = +4. Não dá pra convencer o estudante que uma dívida multiplicada por uma outra resulta em um crédito. Ou seja, o modelo comercial metafórico é uma ferramenta importante para o professor introduzir o conceito de negativo e positivo, mas não se consegue transportar a mesma ideia para o produto destes números. Por fim, Neto (2011) reforça a ideia de manter a interdependência entre a matemática e a aplicação da matemática. Não se deve nem as identificar nem as separar radicalmente.

5 METODOLOGIA

Nosso estudo foi realizado por meio da aplicação de um teste para dois grupos de estudantes, cada um dos dois níveis de ensino foco do estudo: foram escolhidos 5 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 10 estudantes do 3º ano do Ensino Médio 5 estudantes para cada turma de 3º Ano da escola.

A escolha desses estudantes foi baseada na sua participação e frequências nas aulas de matemática, sendo então estudantes que faltavam a maioria das aulas (entendemos que ficaria melhor para comparar com os que acompanham regularmente as aulas) e estudantes que sempre participam das aulas.

O teste foi aplicado e teve duração de uma hora-aula, com as questões impressas entregue aos estudantes e lida no grupo classe. Explicações só foram dadas as que não interferiram diretamente na resolução da questão.

5.1 OS SUJEITOS

O 9° ano do ensino fundamental foi escolhido por ser um ano escolar próximo à abordagem dos números inteiros relativos, estaremos diante do conhecimento recém estudado. Já o 3º ano, final do ensino médio, foi escolhido por já ter um conhecimento que deveria estar consolidado. Além da operação em si, os estudantes utilizam multiplicação entre negativos em problemas de diversos outros campos da matemática escolar e em outras disciplinas.

A participação dos estudantes se deu com a autorização dos responsáveis. Foi solicitada autorização aos pais dos estudantes, para que os dados do teste fossem analisados e utilizados nesta pesquisa. A identidade dos sujeitos foi preservada de qualquer possível identificação, inclusive da escola.

Após a correção e análise dos dados, foi dado um retorno aos estudantes a fim de que eles superem suas dificuldades.

5.2 O TESTE

O teste contemplará seis questões distribuídas em 12 itens (vide apêndice), questões com a utilização dos números negativos envolvendo a resolução de multiplicação e divisão simples, expressões aritméticas e equações algébricas. Em uma das questões é pedido que o estudante justifique a resposta dada.

1) Resolva as operações:

a) $\mathbf{12} \div (-\mathbf{3}) =$

b) $(-\mathbf{10}) \div (-\mathbf{2}) =$

c) $\mathbf{2} \times (-\mathbf{2}) \ =$

d) $(-\mathbf{5}) \times (-\mathbf{2}) =$

A escolha da 1º questão do teste trata com as operações de multiplicação e divisão com os números negativos e/ou positivos e têm como objetivo avaliar se os estudantes conseguem utilizar a regra dos sinais em questões que operam apenas com 2 números e consegui perceber que a regra dos sinais vale para multiplicação e divisão por serem operações inversas. Por exemplo, o item b) $(-\mathbf{10}) \div (-\mathbf{2}) =$ e o item d) $(-\mathbf{5}) \times (-\mathbf{2}) =$ que tratam de multiplicar e dividir números apenas números negativos. Uma possível resposta errada para cada item seria o estudante fazer as operações corretamente e manter o sinal negativo $(-)$ dos números resultando em $(-5)\ e\ (-10)$ respectivamente, onde a resposta certa seria $5\ e\ 10$.

2) Resolva as expressões aritméticas e/ou equações:

a) $(-\mathbf{2}) \times (-\mathbf{2}) \times (-\mathbf{2}) =$

b) $(-\mathbf{8}) \times (\mathbf{4} - \mathbf{5}) + \mathbf{3}(\mathbf{8} - \mathbf{10}) =$

c) $\boldsymbol{Qual\ valor\ de\ A\ que\ satisfaz\ a\ igualdade}?\ -(-\mathbf{3}) \times \boldsymbol{A} = \mathbf{12}$

Na 2º questão queremos destacar a regra aditiva e multiplicativa dos sinais, operar com mais de 2 números e analisar o processo feito pelos estudantes uma vez que no item a) $(-2) \times (-2) \times (-2) =$ teremos que o 1º produto será um número positivo$(+)4$e depois ele volta a ser um número negativo$(-)\ -8$.

No item b) $(-\mathbf{8}) \times (\mathbf{4} - \mathbf{5}) + \mathbf{3} \times (\mathbf{8} - \mathbf{10}) =$ é importante que o estudante consiga abstrair e deixar de lado a ideia que não se pode subtrair um número maior do minuendo e analisar a sequência dos produtos realizados após a regra aditiva dos sinais. No item c) $\boldsymbol{Qual\ valor\ de\ A\ que\ satisfaz\ a\ igualdade}?\ -(-\mathbf{3}) \times \boldsymbol{A} = \mathbf{12}$ o estudante terá que mobilizar conhecimentos da regra aditiva e multiplicativa dos sinais e, por fim, encontrar um número que satisfaça a igualdade, um possível erro seria dar um valor positivo para A por exemplo 4 como é maior que o $-(-3)$, o estudante pode pensar que o sinal do maior prevalecerá.

Nas 1º e 2º questão, poderemos observar o que Glaeser (1981) e Hillesheim (2013) discutiram sobre como o modelo “comercial metafórico” pode facilitar a compreensão das propriedades aditivas, porém se constitui como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números.

Nas 3º e 4º questões queremos analisar se os estudantes conseguem perceber que as respostas das duas questões serão iguais $(-\mathbf{3}) \times [(+\mathbf{2}) - (-\mathbf{2})] = -12$ e verificar quais foram os meios utilizados para isso respeitando o que cada questão pede para ser feito. Um possível erro é olhar para dentro dos colchetes e, apenas observar um número positivo menos esse mesmo número negativo e ter resultado zero.

Na 5º questão $quanto\ (-\mathbf{3}) \times (-\mathbf{2})$? $\boldsymbol{Por\ que}$? onde se têm um produto de 2 números negativos e resposta um número positivo (+6) queremos de fato saber qual conhecimento será mobilizado para justificar sua resposta e se tem algum modelo metafórico por trás.

Por fim, na 6º questão (Resolva as equações $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - \mathbf{3} = \mathbf{0}$ queremos analisar o uso dessas regras diante de conhecimentos mais aplicados e com uma abordagem diferente dos itens anteriores. Foi disponibilizado as fórmulas visto que nossa intenção não é saber a solução das equações em si. Nas resoluções das equações $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - \mathbf{3} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3} = \mathbf{0}$ será necessário mobilizar o conhecimento das regras aditivas e multiplicativas dos sinais bem como multiplicar e dividir números negativos e/ou positivos.

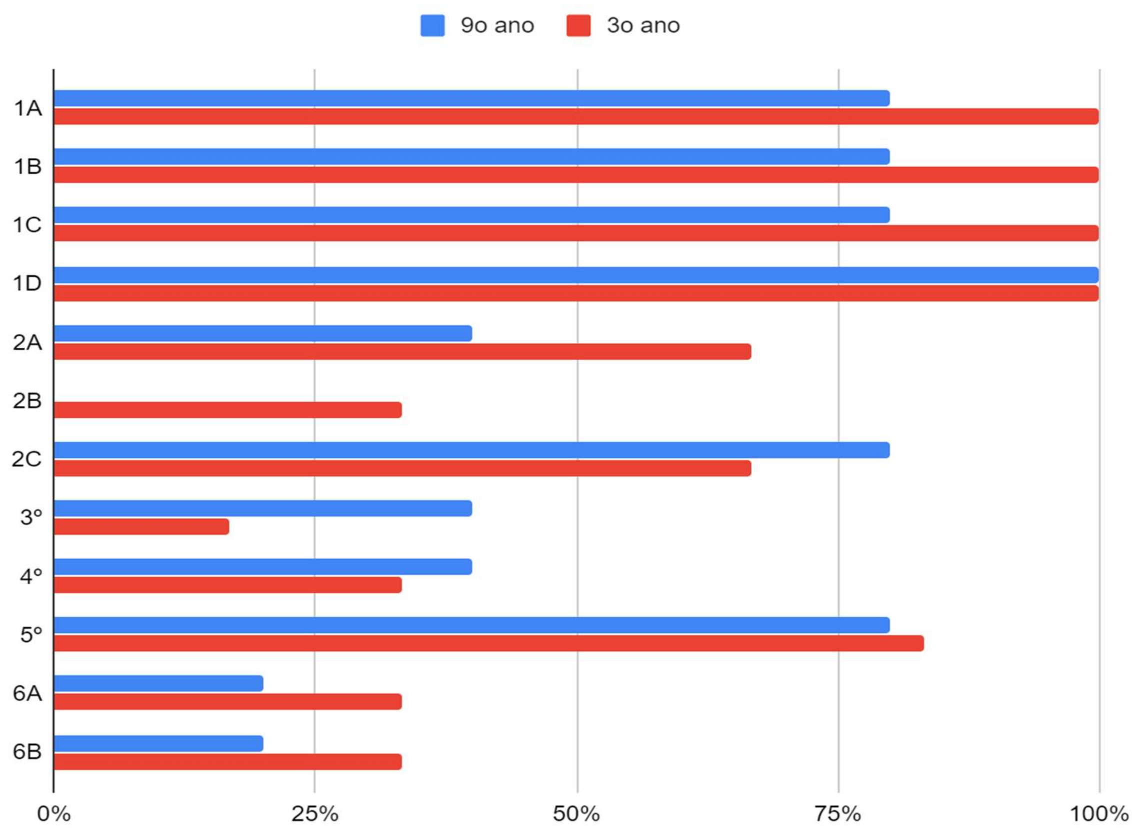
5.3 ESTRATÉGIAS DE ANÁLISE

Após a aplicação do teste, será feita uma análise buscando identificar principais estratégias e erros dos estudantes, classificando-as. Para cada grupo de protocolos que segue uma estratégia, será tomado uma amostra de estudantes, para entrevistarmos e melhor entender o pensamento deles, buscando a origem de tais estratégias. Nessa etapa iremos analisar cada resolução dos estudantes tomando como base as propriedades envolvidas ao longo de cada problema. Iremos observar a incidência de algum tipo de regra dos sinais, seja ela ao multiplicar/dividir ou somar/subtrair.

6 ANÁLISE DOS DADOS

Em termos de acerto e erro, o gráfico a seguir sintetiza os resultados obtidos.

Gráfico 1: Percentual de acertos de cada questão.

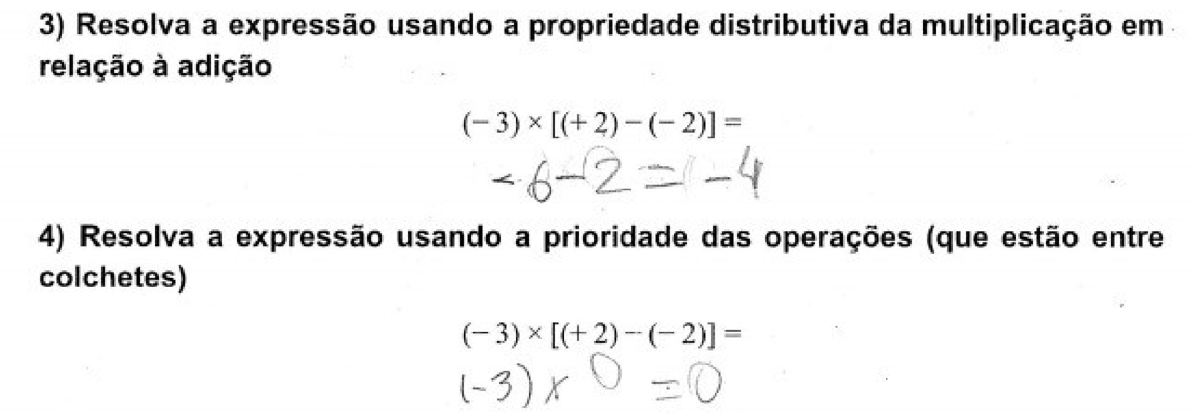


Fonte: Autoria própria (2019).

Desse gráfico, queremos destacar as 3a, 4a e 5a questões do teste. Na questão 3 e 4, o resultado final deveria ser o mesmo caso o estudante tivesse feito corretamente às duas questões. O que mais nos surpreendeu foi o fato da maioria deles não perceberem que o resultado final de cada questão seria o mesmo e, por muitas vezes, respondiam certo em uma e um resultado errado em outra. Em alguns outros casos respondiam iguais nas duas questões com o resultado errado. Houve também um dos estudantes que respondeu uma das questões corretamente, mas na outra respondeu “não sei”.

Desse item destacamos dois erros bem recorrentes que classificamos como E2 e E3.1.

Figura 2: Protocolo do estudante A.



3) Resolva a expressão usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$(-3) \times [(+2) - (-2)] =$

$-6-2=-4$

4) Resolva a expressão usando a prioridade das operações (que estão entre colchetes)

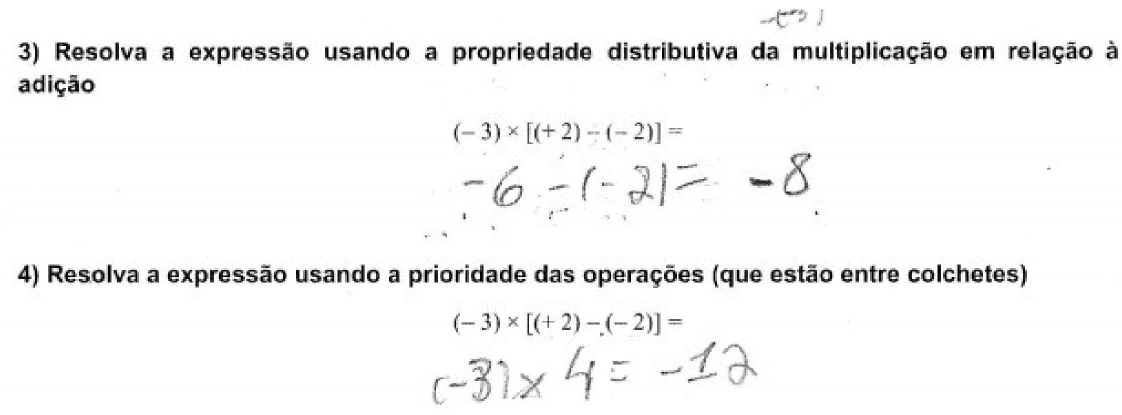
$(-3) \times [(+2) - (-2)] =$

$(-3) \times 0 = 0$

Fonte: Arquivos do Autor (2019).

E3.1 *"Considera* $(+2) - (-2) = 0$

Figura 3: Protocolo do estudante B.



3) Resolva a expressão usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$(-3) \times [(+2) - (-2)] =$

$-6-(-2)= -8$

4) Resolva a expressão usando a prioridade das operações (que estão entre colchetes)

$(-3) \times [(+2) - (-2)] =$

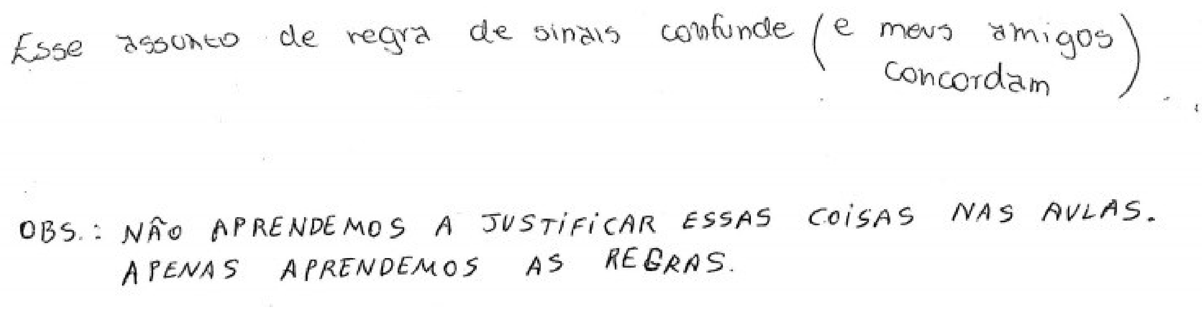
$(-3) \times 4 = -12$

Fonte: Arquivos do Autor (2019).

E2 *"Na distributiva multiplica o valor pelo primeiro termo e repete o 2º, a(b+c) = ab+c."*

Na 5º questão, na qual perguntamos *"Quanto vale* $(-3) \times (-2)$*? Por que?"* destacamos o grande índice de acertos (mais de 75%) que tivemos e percebemos que a estratégia da maioria foi: multiplicar primeiro os números esquecendo os sinais trazidos com eles e, por fim, utilizaram a regra dos sinais para justificar os sinais. Vale ressaltar também que a maioria deles não conseguiam justificar o porquê dava positivo e muito deles falavam e/ou alguns escreveram "não aprendi a explicar isso" ou "como devo justificar" ou "a professora nunca disse o porquê menos com menos dava mais" ou "explicar isso é muito difícil". Essas respostas nos levam a refletir o quão difícil é tanto para professores explicarem de forma concreta/convincente ou para estudantes entenderem a regra dos sinais da multiplicação.

Figura 4: Protocolos dos estudantes C e D.

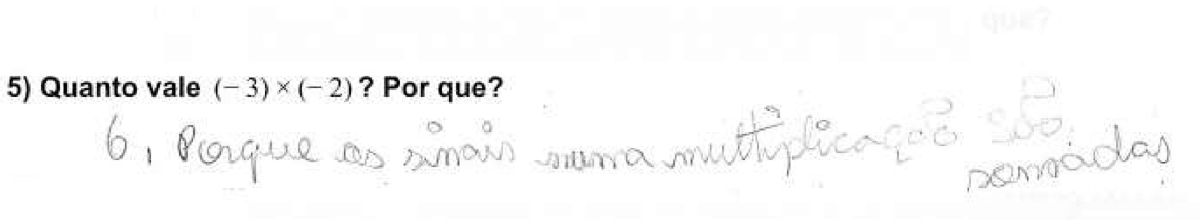

Esse assunto de regra de sinais confunde (e meus amigos concordam).

OBS.: NÃO APRENDEMOS A JUSTIFICAR ESSAS COISAS NAS AULAS. APENAS APRENDEMOS AS REGRAS.

Fonte: Arquivos do Autor (2019).

O resultado final como sendo +6 foi obtido por todos os estudantes que fizeram o teste, porém percebe-se na tabela que não temos 100% de acertos visto que dois estudantes justificaram o resultado de forma errada e classificamos esses erros como E6 e E20.

Figura 5: Protocolo do estudante E.

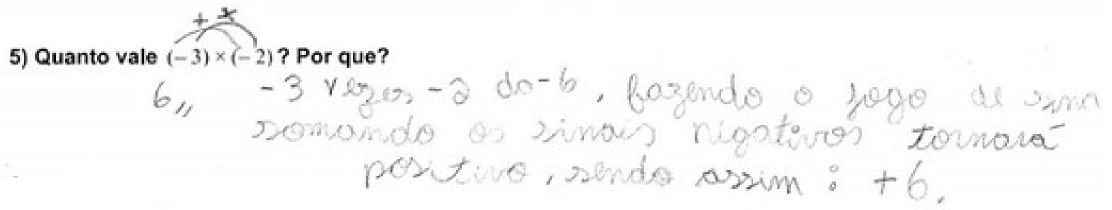

5) Quanto vale $(-3)\times(-2)$ **? Por que?**

6, Porque os sinais numa multiplicação são somados

Fonte: Arquivos do Autor (2019).

E6. *"Enuncia a regra dos sinais da multiplicação errado como sendo "os mais numa multiplicação são somados."*

Figura 6: Protocolo do estudante F.

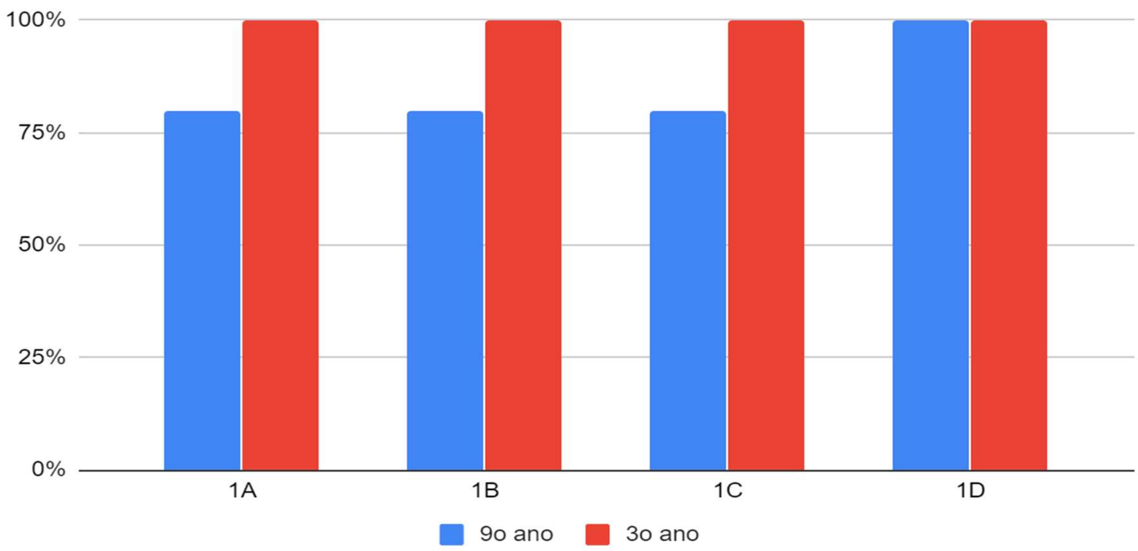

5) Quanto vale $(-3)\times(-2)$ **? Por que?**

6,, -3 vezes -2 da -6, fazendo o jogo de sinal somando os sinais negativos tornará positivo, sendo assim: +6.

Fonte: Arquivos do Autor (2019).

E20 *“fazendo o jogo de sinais, somando os sinais negativos tornará positivo, sendo assim:* $-3\,x\ -2 = +6.$*”.*

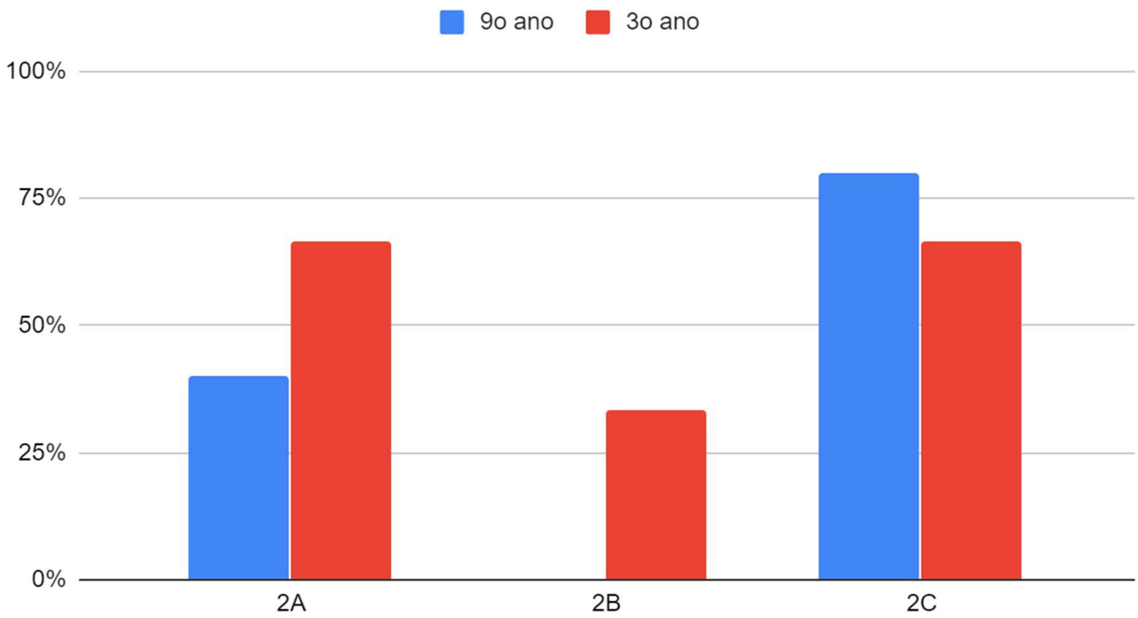
Gráfico 2: Percentual de acertos nos itens da 1ª questão.



Fonte: Autoria própria (2019).

Após a análise dos protocolos dos estudantes do 3º ano do ensino médio e 9º ano do ensino fundamental e dos gráficos de acerto das 1º e 2º questões pudemos verificar que existe uma compreensão dos estudantes quando se trata de uma operação “simples” com os números negativos como: $15 \div (-3)$. Nota-se por meio do gráfico que houve 100% de acerto desses itens por estudantes do 3º ano do ensino médio e, mais de 75% de acerto, pelos estudantes do 9º ano do ensino fundamental.

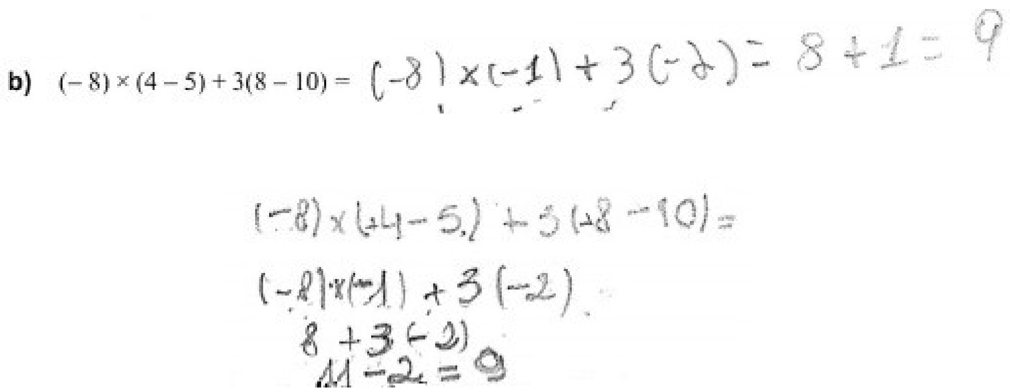
Gráfico 3: Percentual de acertos nos itens da 2ª questão.



Fonte: Autoria própria (2019).

Quando se trata do item b) da 2º questão pudemos observar que houve um baixíssimo índice de acerto por parte dos estudantes do 3º ano do ensino médio e não tivemos acerto algum por parte dos estudantes do 9º ano. Neste item, pensamos que os índices de erro foi elevado devido a “composição” dessas operações onde foi pedido para resolver: $(\mathbf{-8}) \times (\mathbf{4-5}) + \mathbf{3}(\mathbf{8-10}) =$, diferentemente de como era abordado na 1º questão onde resolvem uma divisão ou multiplicação apenas.

Figura 7: Protocolos dos estudantes G e H.



Fonte: Arquivos do Autor (2019).

Um dos erros mais recorrentes no item b) da 2 º questão foi o que classificamos como E16 e E19 que tratam respectivamente de *“Faz as operações linearmente sem* *importar as propriedades." e "Usa a regra distributiva corretamente na 1º parte, mas na 2º parte resolve o que tem dentro dos parênteses e soma o número que estava multiplicando."*

Após a análise dos protocolos dos estudantes ao responderem os testes verificamos alguns erros e estratégias classificadas da seguinte maneira:

Quadro 1: Classificação das estratégias de resolução das questões

Cód.	Sub	Descrição da estratégia
A		Acertou
B		Deixou em branco
NS		Responde que não sabe e deixa em branco
E1		Responde a divisão mantendo o sinal do maior
	E1.1	Faz a subtração e põe o sinal do maior
E2		Na distributiva multiplica o valor pelo primeiro termo e repete o 2º, a(b+c)= ab+c.
E3		Considera $(2)-(-2)=2--2=-0$apesar de considerar $-(-3)=3$na 2c)
	E3.1	Considera $(+2)-(-2)=0$
E4		Desconsidera a multiplicação indicada por parênteses a$(8-10)$ =a+(-2)
E5		Erro no tratamento algébrico $-(-3)\ x\ A=12 \Rightarrow\ -A=12+3$
E6		Enuncia a regra dos sinais da multiplicação errado como sendo "os mais numa multiplicação são somados" e faz a operação corretamente
E7		Soma os números e repete o sinal
E8		Na subtração, subtrai o menor do maior $3-5=2$
E9		Multiplica $(-)\ x\ (+)$ e mantém o sinal positivo
E10		Distração por trocar o sinal de "–" pelo de "="
E11		Percebe que é a mesma operação e repete o resultado da 3º
E12		Faz a distributiva corretamente e ao trocar o "$-(-)$" por "+" esquece de multiplica pelo novo sinal.
E13		Soma os números e usa a regra dos sinais da multiplicação não importando os sinais "–"
E14		Faz somente a 1º parte da expressão e erra a multiplicação de $(-)$x $(-)$

E15	Multiplica corretamente, mas usa a regra que sinais iguais é positivo não se importando com a quantidade de termos
E16	Faz as operações linearmente sem importar as propriedades
E17	Desconsidera os sinais e inclui as variáveis como coeficientes
E18	Utiliza corretamente a regra dos sinais para adição, mas no final erra a multiplicação $(-3)\ x\ 4 = 12$
E19	Usa a regra distributiva corretamente na 1º parte, mas na 2º parte resolve o que tem dentro dos parênteses e soma o número que estava multiplicando.
E20	Responde corretamente, mas justifica errado "fazendo o jogo de sinais, somando os sinais negativos tornará positivo, sendo assim: $-3\ x\ -2 = +6$"
E21	Desconsidera a multiplicação/distributividade e soma de forma linear os números usando corretamente a regra dos sinais para adição
E22	Acertou o resultado, mas a conta está errada $(\mathbf{-3}) \times [(+\mathbf{2}) - (-\mathbf{2})] = \mathbf{-3x2} = \mathbf{-6}$ e $-3\ x - 3 = +6$ por fim, $-6 - (+6) = -12$
E23	Desconsidera o sinal dos coeficientes e erra a questão, mas utilizou a regra da adição corretamente.
E24	Tentou resolver isolando os termos como equação do 1º grau

Fonte: Autoria própria (2019).

Quadro 2: Estudantes x Itens

Nome	**Ano**	**1A**	**1B**	**1C**	**1D**	**2A**	**2B**	**2C**	**3º**	**4º**	**5º**	**6A**	**6B**
Armeu	9º	E1	E1	A	A	A	E10	A	E2-10	E3	A	NS	NS
Paraolo	9º	A	A	A	A	A	E4	E5	E2	E3.1	E6	E17	E17
Heike	9º	A	A	A	A	E7	E8	A	A	A	A	E8	E8
Rento	9º	A	A	E9	A	E13	E14	A	E12	E11	A	A	A
Jomos	9º	A	A	A	A	E15	E16	A	A	A	A	NS	NS
Pereu	3ª	A	A	A	A	E15	E19	A	E18	E11	A	A	A
Clautin	3ª	A	A	A	A	A	E19	A	E2	A	A	A	A
Ingord	3ª	A	A	A	A	E15	A	B	A	NS	E20	NS	NS
Miclos	3ª	A	A	A	A	A	E21	A	E21	E9	A	E17	E17
Rayas	3ª	A	A	A	A	A	A	B	E22	A	A	E23	E23
Aylon	3ª	A	A	A	A	A	E1.1-9	A	E16	E3.1	A	E24	E24

Fonte: Autoria própria (2019).

A tabela mostra claramente que as estratégias de erro se concentram essencialmente, em situações mais complexas que envolve a regra dos sinais ao longo da solução. Em alguns casos é possível observar também que alguns estudantes têm dificuldades em mais de uma estratégia, propiciando mais erros ao longo da resolução.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados mostram que os estudantes conseguem resolver as situações quando em questões de operações únicas e simples. Porém, em expressões e quando precisam justificar, fica claro que o uso é apenas de uma regra decorada. Não conseguem articular o conhecimento das propriedades utilizadas na regra dos sinais em situações práticas, onde exigem uma certa interpretação do problema (seja ele sobre equação do 2º grau ou não).

Diante do exposto neste trabalho pudemos observar e analisar as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem dos números negativos, tendo em vista seu longo processo de aceitação durante o desenvolvimento da matemática e os obstáculos epistemológicos e didáticos observados e trabalhados em sala de aula. É de suma importância para o professor um tratamento diferenciado com esse tema, exemplificando de várias formas e dando recursos/significações distintas do seu uso tanto na regra aditiva (no qual pode ser feito uso de vários modelos metafóricos) quanto na multiplicativa (no qual não podemos utilizar elementos de natureza extra matemática para explicar).

Por fim, o professor tem de trabalhar alguns conceitos matemáticos e fazer com que seja compreendido por parte dos estudantes que a matemática tem seus aspectos e tratamentos exclusivos dentro do seu campo abstrato respeitando suas propriedades e que nem sempre podemos justificá-los com elementos da vida real.

REFERÊNCIAS

ALVES, Evanilson Landim. Multiplicação e Divisão de Números Inteiros: ensino-aprendizagem na EJA. **Anais do XIII CIAEM - Congresso Interamericano de Educação Matemática**. Recife, 11 p., 2011.

BACHELARD, Gaston. **La formation de l'esprit scientifiqu**e. Paris: J. Vrin, 1947. Tradução por Estela dos Santos Abreu. A formação do espírito científico. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática;** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. BEDNARZ; C. GARNIER (Eds.), **Construction des savoirs , Obstacles et Conflits** (pp. 41-63). Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc, 1989.

CARAÇA, Bento Jesus**. Fundamentos da Matemática Elementar**, Lisboa, 1950.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática**. 2. ed. p. 11-33. São Paulo: Papirus, 2005.

GLAESER, Georges. Epistémologie des nombres relatifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n.3, p. 303-346, 1981.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. O modelo comercial: um entrave persistente à aprendizagem da regra de sinais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, n. 2, p. 37-56, 2013.

NAGEL, Ernest. Impossible numbers: a chapter in the history of modern logic. In: NAGEL, Ernest. **Teleology revisited and other essays in the philosophy and history of science**, New York: Columbia University Press, 1979a.

NETO, Fernando Raul. Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de número negativo. **Revista Em Teia,** v.2, n.1, p. 1-22, 2011.

ROSA, Carlos Eurico Galvão. **Produto de Números Negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico**. 2013.

IREM D´AQUITAINE, Groupe Didactique des Mathématiques, **Enseigner es nombres relatifs au college.** N.73, p. 59-72, 2008.

APÊNDICE A – TESTE/QUESTIONÁRIO ELABORADO

2) Resolva as operações:

e) $\mathbf{12 \div (-3) =}$

f) $\mathbf{(-10) \div (-2) =}$

g) $\mathbf{2 \times (-2) \ =}$

h) $\mathbf{(-5) \times (-2) =}$

2) Resolva as expressões aritméticas e/ou equações:

d) $\mathbf{(-2) \times (-2) \times (-2) =}$

e) $\mathbf{(-8) \times (4-5) + 3(8-10) =}$

f) $\boldsymbol{Qual\ valor\ de\ A\ que\ satisfaz\ a\ igualdade?\ -(-3) \times A = 12}$

3) Resolva a expressão usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$\mathbf{(-3) \times [(+2) - (-2)] =}$$

4) Resolva a expressão usando a prioridade das operações (que estão entre colchetes)

$$\mathbf{(-3) \times [(+2) - (-2)] =}$$

5) Quanto vale $(-3) \times (-2)$**? Por que?**

6) Resolva as equações abaixo:

a) $x^2 - x - 3 = 0$ b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

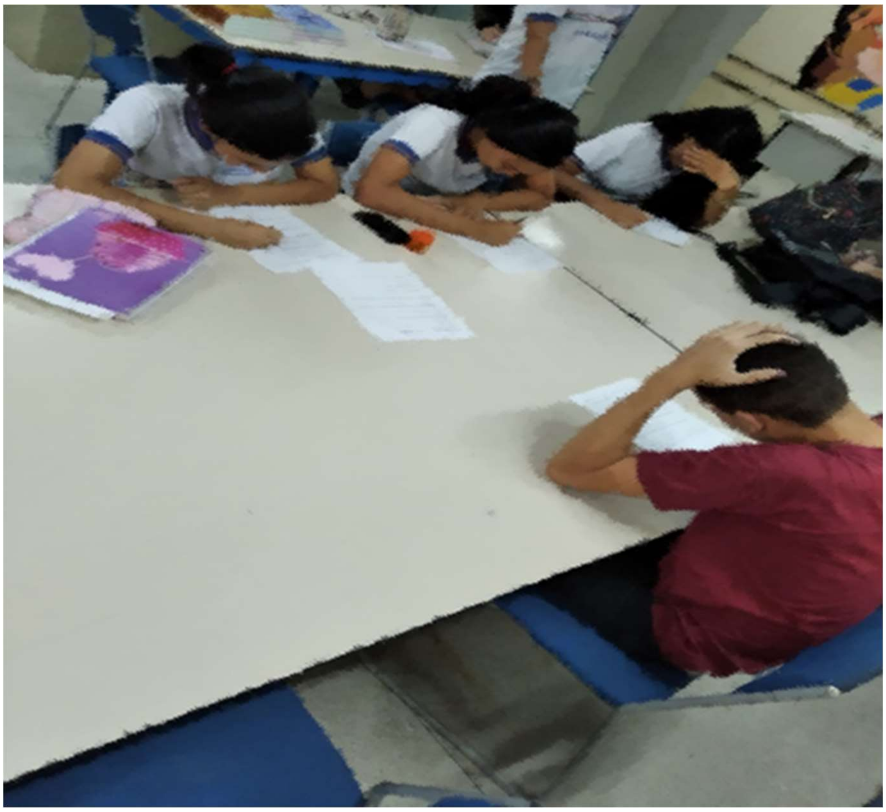
Fórmulas: $\boldsymbol{\frac{x'' = (-b - \sqrt{\Delta})}{2a}}$ $\boldsymbol{\frac{x' = (-b + \sqrt{\Delta})}{2a}}$ $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4 \times a \times c}$

APÊNDICE B – IMAGENS DOS ESTUDANTES RESOLVENDO O TESTE

Figura 8: Aplicação no 3º Ano do Ensino Médio.

Fonte: Arquivos do Autor (2019)

Figura 9: Aplicação no 9º Ano do Ensino Fundamental.



Fonte: Arquivos do Autor (2019)