



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

NAYARA MARIA DA SILVA

**INVESTIGANDO ERROS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES ALGÉBRICAS NO
ENSINO MÉDIO**

Caruaru
2023

NAYARA MARIA DA SILVA

**INVESTIGANDO ERROS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES ALGÉBRICAS NO
ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade
Federal de Pernambuco, como requisito parcial para
a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa.

Caruaru

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Nayara Maria da.

Investigando erros na resolução de questões algébricas no Ensino Médio /
Nayara Maria da Silva. - Caruaru, 2023.
70 p. : il., tab.

Orientador(a): Edelweis José Tavares Barbosa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura,
2023.

Inclui referências, apêndices.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Álgebra - Estudo e ensino. 3. Análise
de erros. 4. ENEM. 5. FUVEST. I. Barbosa, Edelweis José Tavares.
(Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

NAYARA MARIA DA SILVA

**INVESTIGANDO ERROS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES ALGÉBRICAS NO
ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade
Federal de Pernambuco, como requisito parcial para
a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 12/05/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Simone Moura Queiroz (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho a todos que contribuíram para sua conclusão, principalmente aos meus pais, incentivadores assíduos ao longo da minha trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, Criador do Universo, alento nos momentos de angústia, pela infinitude de bênçãos concebidas ao decorrer da minha caminhada. Sem Ele, o desenvolvimento desta pesquisa não seria possível.

Aos meus pais, Maria Aparecida e Sandro Roberto, inigualáveis fontes de inspiração, relíquias em forma humana, meus maiores apreciadores, por acreditarem fielmente em minha capacidade de alcançar os objetivos traçados e pela confiança enorme depositada em todos os ciclos da minha vida. Imensa gratidão por ter figuras parentais extremamente éticas, perpetuadoras de valores e princípios indispensáveis na sociedade atual.

Aos meus irmãos, Nyanne Maria e Sandro Roberto, joias preciosas, pelos inúmeros gestos de amor e palavras de carinho, além das boas risadas arrancadas em quaisquer circunstâncias. Minha vida jamais seria a mesma sem a existência de vocês.

A todos os familiares que manifestaram apoio e incentivo durante a produção deste trabalho. Em síntese, agradeço especialmente à Luiza Santos, minha avó, exemplo de força e generosidade, sempre preocupada comigo.

Aos meus amigos, Anderson Vinícius e Rita Pascoal, pela parceria fiel ao longo do curso, porém, acima de tudo, por termos vivenciado experiências únicas e momentos os quais ficarão eternizados em minha alma. Vocês tornaram a trajetória mágica, divertida e memorável.

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Edelweis Barbosa, profissional íntegro, sempre acessível, disponível e gentil, responsável por inúmeras contribuições neste trabalho, além de tantos ensinamentos perpassados em sala de aula, estes cruciais para o engrandecimento da minha formação profissional. Ser humano admirável em muitos aspectos.

Ao Prof. Dr. Marcus Bessa e à Prof^a. Dr^a. Simone Queiroz, componentes da banca examinadora, por aceitarem participar de um momento especial da minha vida acadêmica e pelas contribuições grandiosas para o enriquecimento deste trabalho.

À Universidade Federal de Pernambuco – Campus Agreste (CAA), instituição renomada, cenário principal de uma trajetória marcada por lutas e que me possibilitou adquirir valiosos conhecimentos para a prática da profissão escolhida e amada por mim.

Por fim, expresso minha imensa satisfação e gratidão a todos os indivíduos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte dessa trajetória, emanaram energias positivas o ciclo inteiro e torceram incessantemente pela realização deste sonho.

“Suba o primeiro degrau com fé. Não é necessário que você veja toda a escada. Apenas dê o primeiro passo.” (Martin Luther King Jr., 1929 - 1968).

RESUMO

A ocorrência efetiva do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra configura-se como um enorme problema no cenário educacional. Um elevado número de pesquisadores do segmento ressalta diversos fatores que permanecem contribuindo para o declínio progressivo dos resultados obtidos pelos discentes no campo supracitado. Portanto, este trabalho objetivou investigar os erros apresentados na resolução de questões algébricas por uma turma de estudantes pertencentes ao 3º ano do Ensino Médio. Aspirando cumprir os objetivos definidos preliminarmente, aplicamos um teste com oito questões direcionadas ao campo algébrico, sendo estas extraídas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), selecionadas de acordo com as quatro concepções de Álgebra definidas por Usiskin (1995), obtendo a colaboração de 26 participantes. Os erros apresentados pelos estudantes foram classificados em consonância ao modelo de categorização de erros proposto por Radatz (1979), firmando-se como uma estratégia capaz de modificar e resultar em alterações nas práticas pedagógicas pautadas no obsoleto ensino tradicional, contribuindo para a quebra dos paradigmas unicamente negativos atribuídos ao erro no processo de ensino e aprendizagem. Constatamos inúmeras dificuldades presentes ao decorrer das resoluções desenvolvidas no instrumento de coleta de dados empregado, tornando possível a identificação das principais defasagens manifestadas pelos estudantes.

Palavras-chave: Álgebra; Avaliações; Erros; Ensino e aprendizagem; Matemática.

ABSTRACT

The effective occurrence of the Algebra teaching and learning process is a huge problem in the educational scenario. A large number of researchers in the segment highlight several factors that continue to contribute to the progressive decline of the results obtained by students in the aforementioned field. Therefore, this paper aimed to investigate the errors presented in solving algebraic questions by a class of students belonging to the 3rd year of high school. Aiming to accomplish the preliminary objectives, we applied a test with eight questions about algebraic field, extracted from the National High School Exam (ENEM) and from the University Foundation for Vestibular (FUVEST), selected according to the four conceptions of Algebra defined by Usiskin (1995), obtaining the cooperation of 26 participants. The errors presented by the students were classified according to the error categorization model proposed by Radatz (1979), establishing itself as a strategy capable of modifying and resulting in changes in pedagogical practices based on obsolete traditional teaching, contributing to break the only negative paradigms attributed to the error in the teaching and learning process. We found numerous difficulties present during the resolutions developed in the data collection instrument used, making it possible to identify the main gaps manifested by students.

Keywords: Algebra; Evaluations; Errors; Teaching and learning; Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Questão 136 da prova azul do ENEM PPL 2022 (2º dia).....	40
Figura 2 - Questão 145 da prova azul do ENEM 2021 (2º dia).....	41
Figura 3 - Questão 136 da prova azul do ENEM 2022 (2º dia).....	42
Figura 4 - Questão 175 da prova azul do ENEM PPL 2019 (2º dia).....	43
Figura 5 - Questão 4 da prova da FUVEST 2021.....	44
Figura 6 - Questão 21 da prova da FUVEST 2020.....	45
Figura 7 - Questão 5 da prova da FUVEST 2021.....	45
Figura 8 - Questão 4 da prova da FUVEST 2016.....	46
Figura 9 - Resolução apresentada pelo estudante E8.....	48
Figura 10 - Resolução apresentada pelo estudante E21.....	49
Figura 11 - Resolução apresentada pelo estudante E15.....	50
Figura 12 - Resolução apresentada pelo estudante E18.....	51
Figura 13 - Resolução apresentada pelo estudante E2.....	52
Figura 14 - Resolução apresentada pelo estudante E25.....	53
Figura 15 - Resolução apresentada pelo estudante E23.....	53
Figura 16 - Resolução apresentada pelo estudante E19.....	54
Figura 17 - Resolução apresentada pelo estudante E7.....	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição das questões por concepção.....	39
Tabela 2 – Análise do desempenho dos estudantes por questão.....	56
Tabela 3 – Análise de acertos por concepção de Álgebra em cada avaliação.....	57
Tabela 4 – Análise de erros conforme a categorização de Radatz (1979).....	57

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENADE	Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPL	Pessoas Privadas de Liberdade
PRP	Programa de Residência Pedagógica
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SAEPE	Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento do Estado de São Paulo
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	OBJETIVOS.....	18
2.1	GERAL.....	18
2.2	ESPECÍFICOS	18
3	O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA SOB À LUZ DOS DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS	19
4	AS CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA SEGUNDO USISKIN (1995)	25
5	AVALIAÇÕES EM LARGA ESCALA	28
5.1	EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)	30
5.2	FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR (FUVEST).....	31
6	RESSIGNIFICANDO O ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM.....	34
7	METODOLOGIA DA PESQUISA.....	37
8	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	39
8.1	ANÁLISE DAS QUESTÕES	39
8.2	ANÁLISE DOS ERROS.....	46
8.2.1	Erros devido a dificuldades na linguagem.....	47
8.2.2	Erros devido a dificuldades de obtenção de informação espacial	48
8.2.3	Erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos, fatos, habilidades e conceitos	52
8.2.4	Erros devido a associações incorretas ou rigidez do pensamento	52
8.2.5	Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes	54
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS.....	61
	APÊNDICE A – TESTE.....	66

1 INTRODUÇÃO

Diferentes erros são manifestados por estudantes no que concerne à resolução de questões voltadas para o campo da Matemática, sendo estes artefatos desencadeadores de herméticas discussões e análises por significativa parcela dos educadores matemáticos. Em contrapartida, o erro, apesar da recorrência nos debates sobre tal problemática, configura-se como um colossal impasse no cenário educativo, resultando em discordâncias referentes à postura mais condizente para lidar com possíveis equívocos ao transcender do processo de ensino e aprendizagem.

O desenvolvimento deste trabalho derivou-se da inquietude ao vivenciar experiências no Programa de Residência Pedagógica (PRP)¹ que explicitaram as lacunas carregadas pelos estudantes ao decorrer das aulas de Matemática do Ensino Médio, em específico, no desenvolvimento de atividades relacionadas ao campo algébrico, além de estimular reflexões mediante a visão limitada e ultrapassada atribuída ao caráter exclusivamente negativo imposto ao erro no ambiente escolar.

Apesar da Matemática ser considerada um componente curricular indispensável na construção e suporte para internalização de saberes pertinentes às demais áreas do conhecimento, fatores engrandecedores em torno da magnitude relevância desse ramo na evolução cognitiva de quaisquer indivíduos, é inegável, em suma, o histórico de repulsa alimentado pelos discentes em relação à Matemática, quiçá, em esmagadora parte dos casos, sentimento fermentado pelas "frustrações" acumuladas na disciplina, refletindo diretamente na intensificação de dificuldades ao longo da vida escolar dos discentes.

Na Matemática, especificamente, tem-se um pensamento arraigado de que a aprendizagem ocorre por meio de fórmulas, regras e algoritmos, sem espaço para interpretações ou questionamentos (D'AMBRÓSIO, 1989), estigmas que acompanham e alimentam a péssima reputação do campo supracitado. Ademais, no que refere ao ensino e a aprendizagem da Matemática, tal como, particularmente, da Álgebra, incontáveis dificuldades são manifestadas pelos estudantes, situação originária pelo alto teor de abstração atribuído ao eixo temático em pauta, concepção

¹ O Programa de Residência Pedagógica (PRP), projeto desenvolvido pelo Ministério da Educação (MEC) em parceria com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES), oportuniza a inserção de discentes dos cursos de Licenciatura em escolas da Educação Básica, contribuindo substancialmente para a formação inicial dos futuros professores, uma vez que possibilita a articulação entre a teoria e a prática docente.

análoga à defendida por Antunes (2013, p. 2), em síntese, ao levantar a discussão que “um grande número de alunos vê a Álgebra como algo inatingível e abstrato e limita-se a repetir procedimentos rotineiros – não chegando, assim, a ocorrer qualquer aprendizagem significativa”.

Entendemos que as dificuldades referentes à aprendizagem de Álgebra emergem, resumidamente, de um processo de ensino que estima pela aquisição de um conjunto de métodos operatórios que visa adquirir a resolução de questões sem nenhum presságio de contextualização, caindo no formalismo pouco compreendido pelos discentes. Conforme Lins e Gimenez (2001, p. 137), “a Álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas [...]”. Em contrapartida, caracterizando-se como um fator preponderante para o desencadeamento de dificuldades, os estudos relacionados ao campo algébrico podem se restringir ao emprego de símbolos que não apresentam significado para os estudantes, ou seja, cultivados mecanicamente pela memorização de métodos e regras que impossibilitam associar técnicas de cunho algébrico a contextos relativos ao cotidiano.

Diante da convencional maneira de ensinar e internalizar os conteúdos da área em pauta, resumindo as atividades algébricas a meras manipulações matemáticas, fomenta-se a errada e redutora perspectiva da Álgebra se enquadrar em regras de transformações de expressões, equações, etc., estritamente direcionada a encontrar o “x” da questão, depreciando outros enfoques desse ramo da Matemática (ESTEVÃO; GONÇALVES, 2021), além de, conseqüentemente, viabilizar maiores chances de erros pelos discentes, uma vez que não atribuem significado aos conteúdos.

Por conseguinte, Souza (2014) frisa a recorrência do erro ser exclusivamente associado à ideia de fracasso, resultado insatisfatório derivado pela inaptidão do sujeito em concretizar efetivamente a aquisição do conhecimento. Visando averiguar a aprendizagem algébrica dos alunos, além de ressignificar o papel do erro no processo de ensino e aprendizagem, surge o que concerne à questão norteadora desta pesquisa: “Quais são os erros apresentados na resolução de questões algébricas por estudantes pertencentes ao 3º ano do Ensino Médio?”.

Este trabalho apresenta uma estrutura pautada em nove capítulos. O primeiro capítulo aborda o tópico introdutório, explanando as motivações que originaram a escolha do tema, seguido de uma sucinta contextualização que derivou na

problematização em torno do sentimento de aversão nutrido pelos alunos com a Matemática. Além disso, o caráter mecânico do ensino da Álgebra é citado como um fator preponderante no desencadeamento de dificuldades pelos discentes, considerando o elevado nível de abstração adquirido pela área. Por fim, busca-se expor perspectivas que contribuam para o rompimento dos estigmas exclusivamente negativos denotados aos erros no espaço escolar. Perante as problematizações percorridas, o segundo capítulo apresenta os objetivos geral e específicos desta pesquisa.

O terceiro capítulo, responsável pelo início do referencial teórico, engloba diversos aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, com realce para os documentos oficiais curriculares, enfatizando a necessidade de atribuir significado aos conteúdos algébricos quando trabalhados, assim como, simultaneamente, as dificuldades oriundas pela insistência em empregar métodos tradicionais de ensino, além da importância do desenvolvimento de estratégias inovadoras, especialmente, pelos docentes, para o ensino da Álgebra. No mesmo segmento, as concepções de Álgebra fundamentadas por Usiskin (1995) são esmiuçadas no quarto capítulo, trazendo à tona os diferentes papéis assumidos por uma variável, a depender da situação. O quinto capítulo, modificando o enfoque, trata a respeito da consolidação do sistema de avaliações em larga escala no Brasil, iniciativa revolucionária no contexto educacional do país, e, ainda, os aspectos estruturantes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST) são discutidos, processos avaliativos com elevada notoriedade, utilizados para selecionar as questões deste trabalho. Outrossim, o sexto capítulo, último tópico constituinte do referencial teórico, salienta o quão significativo é o erro e todas as suas vertentes para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática, bem como fortifica a importância da postura dos professores e alunos na realização da análise e reflexão dos erros cometidos no ambiente educacional.

O sétimo capítulo detalha o percurso metodológico utilizado para atingir os objetivos previamente estabelecidos para a nossa pesquisa. O processo de seleção das questões algébricas até a aplicação do teste são pontos detalhadamente abordados, ou seja, todo o universo da pesquisa e as etapas de realização do trabalho ficam em evidência.

No oitavo capítulo foram analisadas criticamente os itens selecionados e as resoluções dos estudantes em relação às questões algébricas inseridas no teste, selecionadas de acordo com as concepções de Álgebra definidas por Usiskin (1995), e, posteriormente, os tipos de erros identificados foram classificados em conformidade com o método de categorização de erros proposto por Radatz (1979).

Em conclusão, o nono capítulo apresenta as considerações finais acerca da pesquisa, em suma, enfatizando os principais objetivos pretendidos e os resultados obtidos na coleta de dados, tal como os entraves enfrentados para a consolidação do trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Investigar os erros apresentados na resolução de questões algébricas por estudantes pertencentes ao 3º ano do Ensino Médio.

2.2 ESPECÍFICOS

- Detectar dificuldades manifestadas no campo algébrico pelos estudantes;
- Analisar os tipos de erros apresentados pelos estudantes, classificando-os de acordo com o modelo de categorização de erros proposto por Radatz (1979).

3 O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA SOB À LUZ DOS DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS

Defronte ao cenário caótico instaurado no setor educacional, a compreensão sobre o processo de ensino necessita transgredir o obsoleto paradigma que o delimita apenas a transmissibilidade de conhecimentos, em que o professor é apontado como detentor de todo saber, designando aos estudantes o papel de meros receptores e armazenadores de informações. Por conseguinte, torna-se imprescindível visualizar o ensino como um mediador para atribuir significado aos conteúdos trabalhados, além da interatividade estabelecida entre os docentes e discentes ser um canal promissor para o êxito do processo de ensino e aprendizagem. Outrossim, tal relação deve priorizar a postura ativa dos educandos ao transcender das tarefas desempenhadas.

Perante a problemática aludida, dentre tantas outras colocadas regularmente em pauta, a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) viabilizam uma análise investigativa e reflexiva sobre o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, amplo ramo matemático, essencial na Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documentos norteadores do sistema educacional brasileiro, organizados em frente à necessidade de uniformizar a educação do país, surgiram a partir de múltiplas experiências profissionais, estudos e debates entre educadores, passível de adequação às distintas realidades que permeiam os discentes (BRASIL, 1998).

No tocante aos currículos de Matemática voltados para o Ensino Fundamental, os PCN são estruturados em blocos de conteúdos, sendo estes organizados em “ciclos”, denominação recebida para classificar o equivalente a cada dois anos do Ensino Fundamental. Vale salientar que a Álgebra não figura entre os blocos de conteúdos estabelecidos no documento curricular, a explanação das orientações pertinentes ao eixo sobredito ocorre através do bloco “Números e Operações”.

Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 50-51).

Em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais direcionados ao Ensino Médio, distinguindo-se da divisão realizada em blocos de conteúdos da fase de ensino anterior, o currículo de Matemática está introduzido na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, mas não apresenta nenhum indicativo de conteúdos os quais devem ser contemplados em cada série.

Ademais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), outro documento normativo de extrema relevância no cenário educativo nacional, “[...] define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica [...]” (BRASIL, 2017, p. 7, grifo do autor), ou seja, cuja principal característica é definir aprendizagens primordiais, incluindo todos os níveis de ensino, correlacionadas ao desencadeamento de competências e habilidades. A estrutura organizacional da BNCC destaca, além da Álgebra, outros quatro grandes campos da Matemática, designados como eixos estruturantes, sendo eles: Números; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística.

A Álgebra, conforme orientação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), deve imergir nos espaços escolares, em específico, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, cuja finalidade está voltada para o desenvolvimento de noções básicas (BRASIL, 2017), conquistando progressivo espaço ao transcender do avanço dos níveis de escolaridade.

Todavia, o campo da Álgebra, conhecido por seu formalismo característico, é uma unidade temática cujos procedimentos matemáticos são encarados com significativo pudor por esmagadora parte dos estudantes, comportamento nutrido pelo pouco significado atribuído às técnicas mecanizadas largamente difundidas pelos métodos tradicionais de ensino. A concepção errônea e ultrapassada que a Álgebra se encontra restrita entre as quatro paredes das instituições escolares, especificamente, empregada em atividades, limita a vasta presença da área supracitada no ambiente externo aos espaços educacionais, como defendido por Costa et al. (2016, p. 160):

Apesar dos conteúdos de Álgebra terem aplicação na vida cotidiana, os discentes lidam com pouca variedade de aplicações e manipulações de conceitos, pois o ensino de Matemática nas escolas se dá, principalmente, na visão destas pesquisadoras, de forma mecânica, com o uso do livro didático e de exercícios prontos.

Partindo do pressuposto acerca dos impasses envolvendo o baixo rendimento no campo da Matemática, com ênfase na Álgebra, avaliações em larga escala foram aplicadas maciçamente nos últimos anos, sendo estas ferramentas que possibilitaram averiguar, mediante os dados obtidos, o nível de domínio dos discentes na unidade temática supracitada. Ribeiro (2001) realizou, por intermédio do seu estudo, uma abrangente análise referente ao desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, pesquisa ancorada em questões extraídas da prova de Matemática do SARESP², aplicada em 1997, evidenciando dados estatísticos alarmantes de erros. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), com base no SAEB, apontam o escasso percentual de assertividade em tópicos englobando Álgebra, situação corriqueira em diversas regiões. Sob a perspectiva de Ribeiro:

[...] a média dos alunos em Álgebra ficou em torno dos 39%, um pouco acima da média da prova de Matemática como um todo, porém, ainda muito baixo se levarmos em consideração o quanto esse campo da Matemática é explorado no Ensino Fundamental. (RIBEIRO, 2001, p. 36).

A adoção de práticas de ensino pautadas em transformações algébricas e manipulações de símbolos, as quais impulsionam o caráter robótico das metodologias empregadas, não contribuem para o processo de aprendizagem dos conteúdos algébricos, visto que a tática da memorização prevalecerá em detrimento da compreensão de tais procedimentos e do desenvolvimento do raciocínio algébrico (FERREIRA; PRESTES; PIRES, 2021).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais elucidam que “o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (BRASIL, 1998, p. 115). Lins e Gimenez (2001, p. 137) afirmam que “a atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a Álgebra”, contudo, na maioria das instituições escolares, tais tarefas algébricas são direcionadas às manipulações de expressões seguindo rígidas regras, em conformidade com os métodos tradicionais de ensino, postura comprometedora para o desenvolvimento de uma aprendizagem reflexiva,

² O Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), implantado em 1996, iniciativa adotada pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, visa diagnosticar e monitorar o desempenho de estudantes paulistas pertencentes à Educação Básica.

isenta de compreensão por parte dos alunos. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 63), no ensino da Matemática:

É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

Ademais, no ensino da Álgebra, ainda mediante às considerações inseridas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, almejando o desenvolvimento de uma aprendizagem efetiva, faz-se necessário o distanciamento das práticas pedagógicas de cunho robotizado, que prezam, acima de tudo, pela formalidade algébrica (BRASIL, 1998). Convergingo com as reflexões levantadas anteriormente, Fiorentini, Miguel e Miorim (1992, p. 40) evidenciam que "[...] a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra – de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões [...]". Para consolidação satisfatória do ensino da Álgebra, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 116):

[...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica.

Para tanto, incide sobre os professores a responsabilidade do desenvolvimento de uma aprendizagem algébrica consistente e abundante em significados, capaz de desmistificar o teor operacional e técnico atribuído ao eixo temático em pauta. Perante todo o contexto que desfavorece o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa em Álgebra, a monotonicidade das maneiras de ensinar conteúdos algébricos, conforme Castro (2003), caracteriza-se como um grande impasse, visto que os caminhos pedagógicos trilhados pelos docentes sempre colidem, durante quaisquer aulas, na seguinte sucessão de passos tradicionais executados: apresentação da definição do conteúdo, exposição de exemplos e resolução de questões.

Nos livros didáticos, a abordagem da Álgebra sem contextualização, superficialmente elencada em procedimentos tecnicistas, desvinculando o campo algébrico do cotidiano vivido pelos educandos e exigindo escassa reflexão crítica, desperta pequeno interesse dos envolvidos. Outrossim, a soberania desse material didático, como principal mecanismo no que tange a educação escolar, é inquestionável, porém, em hipótese alguma, pode ser legitimado como único recurso no processo de ensino, ainda mais como um instrumento desassociado da realidade. Os PCN trazem que:

Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão. (BRASIL, 1998, p. 57).

A partir disso, transgredir as práticas de ensino que beneficiam tão somente os aspectos técnicos e operacionais da Álgebra, torna-se uma ação vital, sobretudo, objetivando a construção do pensamento algébrico. De acordo com Ponte, Branco e Matos:

[...] o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

Ao prezar pelo desenvolvimento do pensamento algébrico, a falácia que o vasto campo da Álgebra pode ser definido exclusivamente a “cálculos com letras”, não possuindo sentido e aplicabilidade, é dissolvida com veemência, a partir do momento em que a compreensão da maneira de raciocinar excede o ato mecânico das manipulações algébricas, produzindo significado para o conteúdo. Em relação ao eixo temático Álgebra, com ênfase no pensamento algébrico, a Base Nacional Comum Curricular discorre:

[...] tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. [...] Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento

de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, p. 270).

Logo, as ponderações realizadas pelos referidos autores, tal como as orientações curriculares brasileiras, acarretaram notáveis meditações em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, resumidamente, nos mais variados aspectos. Além disso, hodiernamente, o caráter mecanizado da Álgebra persiste enquanto desenvolvida nos espaços educacionais, na medida em que os procedimentos puramente algébricos, operacionais e formais permanecem sendo executados e proferidos. Em contrapartida, percebe-se a inquietude em alterar a realidade do sistema educacional, objetivando tornar a aprendizagem algébrica significativa para os discentes.

4 AS CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA SEGUNDO USISKIN (1995)

Ao imergir no campo de estudo sobre as concepções da Educação Algébrica diversos pesquisadores são imensamente referenciados em obras pertinentes à Álgebra na Educação Básica. No presente trabalho, estimando pelos objetivos da pesquisa, adotaram-se as concepções estabelecidas por Usiskin (1995), educador norte-americano.

Partindo dos pressupostos do aludido autor, “**as finalidades da Álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da Álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis**” (USISKIN, 1995, p. 13, grifos do autor). Sob a perspectiva de Usiskin (1995), ao considerar os diferentes papéis e significados atribuídos às variáveis, quatro concepções algébricas são definidas: a Álgebra como aritmética generalizada, a Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, a Álgebra como estudo de relações entre grandezas e a Álgebra como estudo das estruturas. A seguir, almejando explanar as particularidades de cada concepção algébrica, trazemos uma abordagem minuciosa referente aos subtópicos mencionados:

- **A Álgebra como aritmética generalizada:** As variáveis exercem a missão de generalizadoras de padrões ou modelos aritméticos. Nesse caso, conforme Usiskin (1995), as variáveis podem ser empregadas como instrumentos para descrever algebricamente relações observadas entre valores numéricos. Em linhas gerais, a concepção defende que os objetos algébricos são derivados da expansão das noções da Aritmética. Usiskin (1995) destaca que **traduzir** e **generalizar** são as instruções-chave para os discentes.
- **A Álgebra como um estudo de procedimento para resolver certos tipos de problemas:** As variáveis, nesta concepção, assumem o papel de *incógnitas* ou *constantes*. Assim, convergindo com as ideias de Usiskin (1995), a finalidade dessa concepção consiste em determinar o valor, sendo este desconhecido e invariável, da incógnita, cujo procedimento, por exemplo, pode ser efetuado por meio da resolução de equações. Divergindo da concepção anterior, realizar a

generalização e mostrar domínio no artifício de traduzir para a linguagem algébrica, não é suficiente, mas, além disso, faz-se necessário apresentar destreza nas manipulações algébricas para resolver as equações, visando encontrar uma solução. Usiskin (1995) enfatiza que **simplificar** e **resolver** são as instruções-chave para os estudantes.

- **A Álgebra como estudo de relações entre grandezas:** As variáveis não assumem um único valor, apresentam variações. Nesse caso, há contraste com as concepções anteriores, uma vez que não se pretende realizar generalizações de padrões aritméticos, muito menos obter meramente o valor de uma incógnita. Nessa concepção, exclusivamente, as ideias de variáveis dependentes e independentes são levadas em consideração, buscando investigar as relações entre duas ou mais grandezas. Sendo assim, as variáveis estão suscetíveis a atuar como argumentos ou parâmetros, logo “[...] uma variável é um *argumento* (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um *parâmetro* (isto é, representa um número do qual dependem outros números)” (USISKIN, 1995, p. 16, grifos do autor). De acordo com Usiskin (1995), **relacionar** e **gráficos** são as instruções-chave para os educandos.
- **A Álgebra como estudo das estruturas:** As variáveis não apresentam um significado numérico, ou seja, nesta concepção, diferentemente das outras trabalhadas, as variáveis são classificadas apenas como símbolos abstratos, cujo objetivo é manipular e justificar, tendo como base às propriedades matemáticas, onde as operações e a fatoração de binômios podem ser tidas como exemplos. Essa concepção é trabalhada com mais veemência na abordagem dos conteúdos pertencentes ao Ensino Superior. Conforme Usiskin (1995), **manipular** e **justificar** são as instruções-chave para os alunos.

Portanto, as diferentes concepções de Álgebra definidas por Usiskin (1995), apresentadas acima, explicitam que a função atribuída à variável dependerá do contexto o qual está inserida, além das finalidades tencionadas com o seu emprego. O quadro abaixo mostra uma visão sintetizada dessas relações:

Quadro 1 – Diferentes usos das variáveis

Concepções de Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadora de modelos (Traduzir – Generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (Resolver – Simplificar)
Estudo das relações	Argumentos, parâmetros (Relacionar – Gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (Manipular – Justificar)

Fonte: Adaptado de Usiskin (1995, p. 20).

5 AVALIAÇÕES EM LARGA ESCALA

O anseio pelo desenvolvimento de um sistema educacional que preze, eminentemente, pela qualidade, eficácia e avanço da educação, em âmbito nacional, suscita num olhar diligente no tocante aos métodos avaliativos, parâmetros imprescindíveis para análise dos desdobramentos das políticas educacionais implementadas (CASTRO, 1998).

A avaliação educacional, ao longo dos últimos anos, adquire protagonismo na educação, com status de “salvadora da pátria”, digna de tons heroicos, conjectura antagônica às décadas antecedentes aos anos 90, apropriando-se, na teoria, de um papel responsável por evidenciar, orientar a tomada de decisões e fornecer subsídios para o enfrentamento dos males patenteados pelo sistema educacional.

Sob uma perspectiva histórica, a avaliação educacional, apesar de hodiernamente atuar como um aspecto importante na mediação da aprendizagem nos diversos níveis de escolarização, conquistou de maneira tardia, quando comparada a outras nações, o seu espaço nos debates críticos pertinentes ao campo educativo (GATTI, 2002), perante a descredibilidade nutrida pelos órgãos governamentais e comunidade acadêmica em relação aos seus processos.

Conforme Corrêa (2012), durante um tempo considerável, ante a ausência de um mecanismo auxiliar na verificação da real efetividade das políticas públicas educacionais implementadas, avaliar, em cunho sistematizado, tornou-se um trabalho árduo, haja vista a imprecisão em diagnosticar a qualidade dos processos de ensino no país e métodos adotados pelos docentes.

Defronte ao cenário dúbio, permeado por dilemas, a década de 90, simbólica por marcar um período de profundas transformações no sistema educacional brasileiro, além de termos, conforme Peroni (2003 apud CARNEIRO, 2012, p. 220), “[...] o Estado assumindo um caráter mais gerencial e avaliador que propriamente executor”, foi palco para o surgimento das denominadas “avaliações em larga escala”, marco importante e, até então, revolucionário no que concerne às políticas públicas educacionais do país, atuando diretamente como ferramenta essencial no monitoramento da qualidade do sistema educativo nacional. O âmago das avaliações em larga escala “[...] não é selecionar, aprovar ou reprovar os alunos, mas [...] identificar os níveis de aprendizagem de uma população ou subpopulação [...]” (FONTANIVE, 1997, p. 37).

Neste contexto, o Ministério da Educação (MEC), em 1990, com a intencionalidade de coletar informações concretas sobre as políticas educacionais, por meio de um sistema avaliativo, adota o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)³, projeto cujas propostas, mediante Locatelli, almejavam as seguintes finalidades gananciosas no campo educativo:

[...] (I) monitorar a qualidade, a equidade e a efetividade do sistema de educação básica; (II) oferecer às administrações públicas de educação, informações que lhes permitam avaliar seus projetos educacionais e formular programas de melhoria da qualidade de ensino; e (III) proporcionar aos agentes educacionais e à sociedade informes sobre os resultados dos processos de ensino e dos fatores contextuais a eles associados. (LOCATELLI, 2002, p. 9).⁴

É importante ressaltar que o ato de avaliar transcende a esfera do aspecto quantitativo, ou seja, dos resultados numéricos obtidos nas avaliações em larga escala, concepção arcaica ainda amplamente difundida, mas deve priorizar uma análise reflexiva acerca da realidade do sistema educacional. Em convergência, Vianna argumenta que:

Os resultados das avaliações não devem ser usados única e exclusivamente para traduzir um certo desempenho escolar. A sua utilização implica servir de forma positiva na definição de *novas políticas públicas, de projetos de implantação e modificação de currículos, de programas de formação continuada dos docentes* e, de maneira decisiva, na definição de elementos para a *tomada de decisões* que visem a provocar um *impacto*, ou seja, mudanças no pensar e no agir dos integrantes do sistema. (VIANNA, 2003, p. 26, grifos do autor).

Múltiplos processos avaliativos em larga escala foram implantados após a consolidação do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), designadas à contemplação de todos os estudantes. O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE)⁵, em 1992; o Exame Nacional do Ensino Médio

³ O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), primeira avaliação em larga escala implantada no Brasil, aplicada a cada dois anos, possibilita averiguar a qualidade da Educação Básica ofertada por escolas públicas e privadas do Brasil.

⁴ Citação corrigida de acordo com o novo acordo ortográfico da Língua Portuguesa.

⁵ O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) tem como finalidade avaliar a qualidade do nível educacional da referida localidade, supervisionando os conhecimentos adquiridos pelos estudantes ao transcender da Educação Básica, especificamente, nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática.

(ENEM)⁶, em 1998; o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE)⁷, em 2000; e o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE)⁸, em 2004; são exemplos de avaliações em larga escala, evidenciadas até os dias atuais, com extrema relevância, e colaboradoras do fortalecimento do modelo avaliativo em pauta.

Neste trabalho daremos ênfase ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e à Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST)⁹, dois grandes sistemas avaliativos que intermediam o acesso ao Ensino Superior, caracterizados por contemplar a classe estudantil e egressa do Ensino Médio, público-alvo desta pesquisa.

5.1 EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) surgiu no cenário educacional após a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), trazendo, especialmente, no artigo 9º, localizado no inciso VI, a necessidade da implantação de uma avaliação do desempenho nas instituições escolares em nível nacional, cujo objetivo seria, através dos levantamentos realizados, elevar a qualidade da educação no território brasileiro (BRASIL, 1996).

Sobretudo, o ENEM, renomada avaliação que atua como portal de acesso às grandes universidades públicas e proporciona a obtenção de bolsas em notórios programas ofertados pelo Governo Federal, são provas estruturadas conforme uma matriz de referência, tendo como alicerce diversas competências e habilidades. No campo da Matemática, a avaliação é estruturada em 7 competências, sendo estas dispostas em 30 habilidades. Em contrapartida, 5 habilidades correspondem à Álgebra, todas localizadas na competência de área cinco, como identificado no quadro a seguir:

⁶ Explicaremos mais adiante.

⁷ O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) realiza a supervisão da educação concebida aos alunos do Estado de Pernambuco, acompanhando o desempenho apresentado pelos envolvidos nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática ao longo da Educação Básica.

⁸ O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) apresenta como intuito avaliar o domínio dos graduandos no que concerne aos conteúdos programáticos inseridos nas diretrizes curriculares de seus respectivos cursos, tal como, em suma, o desenvolvimento de competências e habilidades indispensáveis para o exercício da profissão. De maneira geral, o objetivo da referida avaliação consiste em verificar a situação do Ensino Superior no Brasil.

⁹ Explicaremos mais adiante.

Quadro 2 - Habilidades da competência de área cinco

Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas	
Habilidade	Objetivo
19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Fonte: Adaptado da matriz de referência do ENEM [s.d.]¹⁰.

Hodiernamente, o ENEM transparece características que o assemelha à grande parte dos tradicionais vestibulares, atentando ao fato de privilegiar a inclusão de questões contextualizadas, desprezando perguntas rasas, sem qualquer resquício de atribuição de significado aos conteúdos abordados ou, então, analogia com a realidade dos discentes. Contudo, as consideráveis lacunas manifestadas pelos alunos do Ensino Médio na resolução de problemas matemáticos, com ênfase na Álgebra, mesmo perante a elaboração de questões convergentes com a mencionada matriz de referência e outros documentos curriculares, explicita o quão equivocado o ensino da Matemática permanece sendo perpetuado nos ambientes educacionais.

5.2 FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR (FUVEST)

A Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), exame responsável pela admissão de estudantes à Universidade de São Paulo (USP), instituição com imenso

¹⁰ Disponível em: Matriz_referência.pdf (inep.gov.br). Acesso em: 29 de nov. de 2022.

prestígio, reconhecida pela constância em ser avaliada como uma das melhores universidades do mundo, com absoluto destaque nacional, tem papel significativo na inserção de alunos ao Ensino Superior, sendo modelo na aplicação de avaliações para tal finalidade.

O vestibular da FUVEST é constituído por duas etapas, fator divergente do ENEM. Na primeira etapa, um conjunto de 90 questões objetivas, no formato múltipla escolha, compõe a intitulada Prova de Conhecimento Gerais, com abordagem nas tradicionais áreas presentes nos currículos da Educação Básica, sendo 10 questões pertencentes ao campo matemático. Em relação à segunda etapa, para os vestibulandos classificados, o exame é aplicado em dois dias distintos: no primeiro dia, a prova é composta pela redação e por 12 questões dissertativas referentes à Língua Portuguesa; no segundo dia, o inscrito é submetido a uma prova contendo 12 questões discursivas, convergentes com o curso almejado.

A FUVEST não apresenta como pilar uma matriz de referência, fundamentada em habilidades e competências, baseia-se nos documentos curriculares oficiais, porém, nos últimos anos, assim como o ENEM, preza pela interdisciplinaridade e contextualização, características explanadas no manual do candidato da FUVEST (2022, p. 69):

[...] espera-se que o candidato demonstre possuir domínio da linguagem básica e compreensão dos conceitos fundamentais da Matemática, tratados no Ensino Fundamental e Médio, de forma a saber aplicá-los em situações diversas e relacioná-los entre si e com outras áreas do conhecimento. [...] Será priorizada a avaliação da capacidade de raciocínio, sem dar ênfase à memorização de fórmulas, à mecanização de técnicas ou a cálculos excessivos, desvinculados de contexto significativo ou de aplicações relevantes, dentro ou fora da Matemática.

O manual do candidato da FUVEST (2022, p. 69) ainda reforça os objetivos pretendidos em ambas as etapas da avaliação em foco:

Na 1ª fase do vestibular, o objetivo é avaliar o candidato quanto ao domínio e utilização da linguagem e quanto à compreensão de conceitos e procedimentos da matemática elementar, bem como quanto à capacidade de aplicá-los na resolução de problemas.

E, ainda, continua:

Na 2ª fase, além destes aspectos, pretende-se também avaliar o candidato quanto ao domínio de conceitos, ferramentas e

procedimentos matemáticos necessários para o aprofundamento de estudos em áreas de ciências exatas, bem como quanto à capacidade de utilizá-los em situações-problema mais abstratas. (FUVEST, 2022, p. 69).

Vale ressaltar que as questões de Matemática inseridas no referido exame, a Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), caracterizam os conteúdos matemáticos elementares que necessitam ser compreendidos ao transcender ou término da Educação Básica.

6 RESSIGNIFICANDO O ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Refletir em relação à importância do erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática caracteriza-se como um fator de suma importância para o redimensionamento do ensino. Decerto, ainda pertencemos a uma cultura escolar disparatada, onde, habitualmente, o erro é associado ao fracasso e, conseqüentemente, acarreta como retorno “punições” que descredibilizam todo o processo de construção do conhecimento. Nessa perspectiva, torna-se imprescindível compreender, segundo Pavanello e Nogueira, que:

Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no aluno um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para o seu futuro pessoal. (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37).

A autora Pinto (1998) enfatiza que o erro não deve ser apontado como um “vírus” a ser contido desesperadamente, considerando sua relevância na constituição do processo do ato de acertar. Destarte, portanto, a possibilidade e a necessidade da transmutação da realidade sobredita neste trabalho, a quebra da tradição que estigmatiza o erro e inviabiliza a ascensão do processo de ensino e aprendizagem da disciplina abordada, em suma, é fulcral. Starepravo afirma que:

O *erro* é frequentemente tratado, na escola, como algo a ser evitado ou até mesmo eliminado. Esse tipo de tratamento advém de uma visão imediatista de aprendizagem: acredita-se que uma boa explicação por parte do professor, seguida da aplicação nos exercícios pode garantir a aprendizagem, sem levar em conta que esta trata-se, na realidade, de um processo de construção complexo que está sujeito a rupturas e reestruturações. (STAREPRAVO, 2010, p. 228, grifo da autora).¹¹

Por conseguinte, é possível afirmar a necessidade de reconhecer os erros como um artifício capaz de reorientar o processo de ensino e aprendizagem, desprezando a inferiorização dos estudantes pelos equívocos cometidos (CORREIA, 2005), objetivando romper condutas improdutivas no ambiente educacional. Pinto (1998, p. 7-8, grifo da autora) destaca que:

¹¹ Citação corrigida de acordo com o novo acordo ortográfico da Língua Portuguesa.

Em geral, o erro era observado pelo professor como um indicador do mau desempenho do aluno, sem jamais ser utilizado para o redimensionamento do ensino. O que permeava o ensino era uma “*pedagogia da resposta*” em que o erro era o sintoma visível do fracasso do aluno, tal como o acerto era o sinal mais evidente do seu sucesso.

Nos processos avaliativos tradicionais, como discorrido, apenas dois resultados são considerados para analisar o domínio dos conteúdos pelos estudantes: se o aluno sabe, ele acerta; caso não saiba, o erro advém. É necessário que o método avaliativo empregado não fique restrito aos acertos ou erros, mas ao processo de produção que levou o discente a eles, conforme debatido por Nogaro e Granella:

[...] a avaliação não deve ser utilizada como uma arma contra o aluno. Deve ser utilizada como um instrumento pelo qual o professor se orienta para saber até onde atingiu seu objetivo [...]. (NOGARO; GRANELLA, 2004, p. 49-50).

Torna-se imprescindível que os docentes não perpetuem o ciclo da “*pedagogia da resposta*” (PINTO, 1998), mas, especialmente, prezem pela criação de um espaço agradável de ensino, onde o erro não esteja associado à falta de inteligência, esforço ou afins, despertando a percepção que ele deve ser encarado como o caminho para consolidação do acerto. Ademais, para tanto, faz-se essencial observá-lo sob o ponto de vista construtivista.

Uma decorrência do princípio construtivista é o erro apresentar-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino, no sentido de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua cidadania. (PINTO, 1998, p. 10).

Para que o erro agregue, de alguma forma, é imprescindível que o mesmo não seja meramente identificado, porém, sobretudo, tenha sua “qualidade” reconhecida. A partir dele, o professor deve analisar os caminhos traçados para determinada resposta, além de torná-lo “observável” (LA TAILLE, 1997). Portanto, o erro é um instrumento que possibilita ao professor aprimorar suas práticas de ensino, identificando possíveis dificuldades do discente e, acima de tudo, buscando alternativas que modifiquem o cenário encontrado. Para Cury (1994, p. 132):

Os erros cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para

discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático.

Perante as discussões aludidas, a análise de erros vem adquirindo prestígio no cenário educativo, posto que, segundo Kliemann e Dullius (2017), caracteriza-se como um recurso relevante para o desenvolvimento da aprendizagem, sendo útil no direcionamento das práticas pedagógicas, agindo como mecanismo instrutor dos docentes, ambicionando, essencialmente, a superação das dificuldades. Nesta conjectura, a categorização de erros promove um estudo aprofundado acerca dos procedimentos e imprecisões reveladas pelos discentes.

Radatz (1979 p. 165-169 apud CORDEIRO, 2009, p. 49), propõe um modelo de categorização de erros matemáticos, estes cometidos pelos estudantes, mediante o processamento de informações, ancorado em cinco categorias, listadas a seguir:

- Erros devido a dificuldades na linguagem: são apresentados na utilização de conceitos, vocabulário e símbolos matemáticos, e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática;
- Erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldades obter informação a partir de representações gráficas): aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico;
- Erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiências na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos;
- Erros devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem os erros por persistência, erros de associação, de interferência e de assimilação;
- Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: são produzidas por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos.

Assim, diante do exposto, a categorização de erros apresentada por Radatz (1979), constituinte do referencial teórico deste trabalho, foi utilizada como parâmetro para investigar os erros cometidos por alunos na resolução de questões algébricas, sendo estas extraídas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), processos seletivos prestigiados em âmbito nacional, cuja intencionalidade está em analisar e compreender as motivações dos equívocos.

7 METODOLOGIA DA PESQUISA

Segundo Gil (2002) uma pesquisa caracteriza-se por ser um processo pautado na racionalidade, sendo responsável pela busca e obtenção de respostas inerentes às indagações levantadas. A metodologia, acima de tudo, pretende contribuir e facilitar no processo de desenvolvimento da pesquisa, conduzindo o pesquisador a alcançar uma resposta para a questão norteadora do trabalho e cumprir os objetivos traçados inicialmente.

Nesta pesquisa foi contemplada a abordagem qualitativa, uma vez que essa linha de investigação é fundamentada na interpretação de mundo, objetivando compreender eventos que não podem ser traduzidos mediante o uso de números. Conforme Minayo (2002, p. 21-22):

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

O presente trabalho teve como objetivo geral investigar os erros apresentados na resolução de questões algébricas. A referida pesquisa possuiu como público-alvo discentes de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, estritamente, pertencentes a uma escola pública, localizada no município de Bezerros - PE. A seleção por essa série e nível de ensino ocorreu em virtude de tais sujeitos terem, basicamente, trilhado por completo as etapas da Educação Básica, ou seja, vivenciando todos os conteúdos algébricos imputados pelos currículos, além do interesse em discernir as possíveis defasagens na Álgebra ainda carregadas pelos estudantes, em síntese, perto do encerramento de um estágio educacional vultoso.

O processo de seleção dos instrumentos que foram adotados como alicerce para a aplicabilidade desta pesquisa, em compêndio, foi respaldado por intermédio da concepção defendida por Lakatos e Marconi (2003) que enfatizam a necessidade de selecionar os recursos de coleta de dados e empregar técnicas concernentes à problemática analisada. Logo, convergindo com o pensamento supracitado, este

trabalho fez a utilização de um teste, almejando atender aos objetivos previamente estabelecidos.

Deste modo, os discentes foram submetidos a resolução de um teste, composto por oito questões relativas à Álgebra (**APÊNDICE A**), sendo estas minuciosamente selecionadas no vasto banco de dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e no acervo da FUVEST, sites que fornecem quaisquer informações relacionadas aos exames supracitados, incluindo o download de provas, mecanismo imprescindível para o levantamento de questões das avaliações em foco.

Em relação ao Exame Nacional do Ensino Médio, dentre as provas analisadas entre os anos de 2019 a 2022, incluindo a modalidade ENEM PPL¹², nesta pesquisa, com direcionamento para o campo algébrico, alvo do nosso estudo, as questões selecionadas enquadram-se nas quatro concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995). Destarte, acerca da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), cujas provas examinadas compreenderam o período de 2016 a 2022, o critério de seleção convergiu com o supradito.

No que concerne a análise dos dados, a clássica categorização de erros proposta por Radatz (1979) será utilizada como fio condutor nas reflexões alusivas às possíveis imprecisões exibidas ao transcender da resolução do teste. De acordo com Pinto (1998, p. 9):

Diferentemente das didáticas tradicionais, em que o erro servia, geralmente, de indicador do fracasso do aluno, nas novas teorias ele se apresenta como um reflexo do pensamento da criança, percebido como manifestação positiva de grande valor pedagógico.

Nessa perspectiva, a possibilidade de verificar as linhas de raciocínio traçadas pelos estudantes, configura-se como um artifício enriquecedor da análise de erros, utilizado neste trabalho, proporcionando ações pedagógicas mais satisfatórias e reflexões aprofundadas sobre os equívocos cometidos.

¹² Exame realizado por indivíduos, concluintes do Ensino Médio, que, por alguma razão, encontram-se privados de sua liberdade ou estão cumprindo medidas socioeducativas.

8 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Apresentamos, neste capítulo, uma análise minuciosa referente aos procedimentos empregados pelos 26 discentes na resolução do teste, instrumento utilizado para a coleta de dados, com ênfase na verificação dos erros. Perante os dados obtidos, o modelo de categorização de erros proposto por Radatz (1979), referência na área, fundamentou a investigação das respostas obtidas.

8.1 ANÁLISE DAS QUESTÕES

Ao examinarmos as provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aplicadas entre 2019 e 2022, e da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), compreendidas no período de 2016 a 2022, as questões designadas para compor o material de coleta de dados foram classificadas em consonância às concepções de Álgebra definidas por Usiskin (1995), elencadas a seguir:

- U1 – Aritmética generalizada;
- U2 – Estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas;
- U3 – Estudo de relações entre grandezas;
- U4 – Estudo das estruturas.

Na tabela 1, localizada abaixo, encontram-se distribuídas as questões selecionadas por avaliação e suas respectivas categorias:

Tabela 1 - Distribuição das questões por concepção

Questão	Avaliação	Concepção
1	ENEM	U1
2	ENEM	U2
3	ENEM	U3
4	ENEM	U4
5	FUVEST	U1
6	FUVEST	U2
7	FUVEST	U3
8	FUVEST	U4

Fonte: Autora (2023).

Nesta seção, propomo-nos a explorar os objetivos pretendidos por cada questão, iniciando pelas extraídas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Figura 1 - Questão 136 da prova azul do ENEM PPL 2022 (2º dia)

Uma faculdade oferece dois cursos diferentes na área de Humanas. Para um aluno ingressar nesses cursos, o vestibular contém questões objetivas e uma redação, e a nota final do candidato é a soma dessas notas, utilizando o seguinte critério de pesos:

- questões objetivas: peso 1 para o curso I e peso 1 para o curso II;
- redação: peso 2 para o curso I e peso 3 para o curso II.

Um candidato que concorre aos dois cursos obteve nota X nas questões objetivas e nota Y na redação. Para analisar sua nota para o curso I e para o curso II, o candidato representa sua nota com um produto de matrizes $A \cdot B$, em que a matriz A representa os pesos, e a matriz B contém as notas obtidas pelo candidato. A matriz resultante $A \cdot B$ é uma matriz coluna, em que, na primeira linha, tem sua nota final para o curso I e, na segunda linha, tem sua nota final para o curso II.

Nessas condições, qual representação algébrica gera o resultado final desse candidato nos dois cursos?

A $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

Fonte: ENEM (2022).

O primeiro item, localizado acima, associa a Álgebra a conhecimentos sobre o campo de Matrizes. Para resolvê-la, o estudante necessitava definir as expressões algébricas correspondentes às notas alcançadas nas questões objetivas e na redação, conforme os pesos indicados para os dois cursos. Note que o objetivo central da questão consiste em apresentar um modelo algébrico, convertido no formato $m \times n$, estrutura predominante das Matrizes, onde as letras, também denominadas como

variáveis, aspiram à generalização de um modelo, caracterizando-a na concepção de **Álgebra como aritmética generalizada (U1)**.

Dominar o conteúdo de sistemas de equações do 1º grau é ponto fundamental para a resolução da próxima questão, inserida abaixo, adjacente ao mínimo de domínio sobre Estatística.

Figura 2 - Questão 145 da prova azul do ENEM 2021 (2º dia)

Em um estudo realizado pelo IBGE em quatro estados e no Distrito Federal, com mais de 5 mil pessoas com 10 anos ou mais, observou-se que a leitura ocupa, em média, apenas seis minutos do dia de cada pessoa. Na faixa de idade de 10 a 24 anos, a média diária é de três minutos. No entanto, no grupo de idades entre 24 e 60 anos, o tempo médio diário dedicado à leitura é de 5 minutos. Entre os mais velhos, com 60 anos ou mais, a média é de 12 minutos.

A quantidade de pessoas entrevistadas de cada faixa de idade seguiu a distribuição percentual descrita no quadro.

Faixa etária	Percentual de entrevistados
De 10 a 24 anos	x
Entre 24 e 60 anos	y
A partir de 60 anos	x

Disponível em: www.oglobo.globo.com. Acesso em: 16 ago. 2013 (adaptado).

Os valores de x e y do quadro são, respectivamente, iguais a

- A** 10 e 80.
- B** 10 e 90.
- C** 20 e 60.
- D** 20 e 80.
- E** 25 e 50.

Fonte: ENEM (2021).

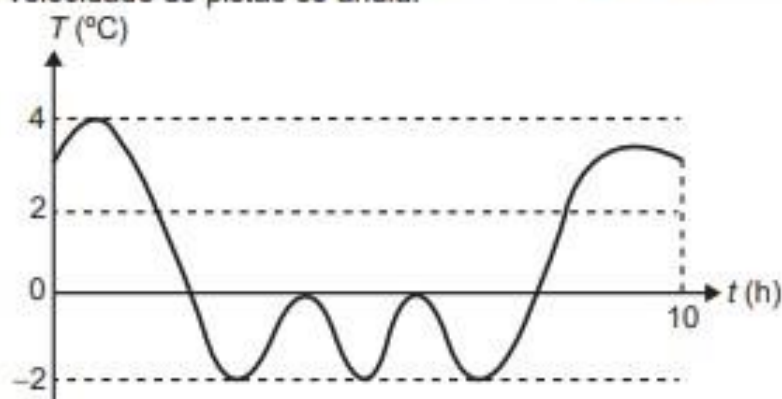
Visando a resolução correta, o discente deveria, resumidamente, montar um sistema de equações e buscar por uma solução. Assim, em uma perspectiva geral, as letras assumem o papel de incógnitas, cujos valores devem ser encontrados e adequadamente determinados, classificando a questão na concepção de **Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (U2)**.

No terceiro quesito, visto a seguir, que envolve o conteúdo de função do 1º grau, a finalidade está, sobretudo, em estabelecer relações entre as grandezas para

encontrar em quais pontos, no intervalo de tempo estabelecido, a velocidade se anula, e, posteriormente, associá-los ao gráfico. Portanto, considerando o âmago da questão, adequa-se à concepção de **Álgebra como estudo de relações entre grandezas (U3)**.

Figura 3 - Questão 136 da prova azul do ENEM 2022 (2º dia)

Uma máquina em operação tem sua temperatura T monitorada por meio de um registro gráfico, ao longo do tempo t . Essa máquina possui um pistão cuja velocidade V varia com a temperatura T da máquina, de acordo com a expressão $V = T^2 - 4$. Após a máquina funcionar durante o intervalo de tempo de 10 horas, o seu operador analisa o registro gráfico, apresentado na figura, para avaliar a necessidade de eventuais ajustes, sabendo que a máquina apresenta falhas de funcionamento quando a velocidade do pistão se anula.



Quantas vezes a velocidade do pistão se anulou durante as 10 horas de funcionamento?

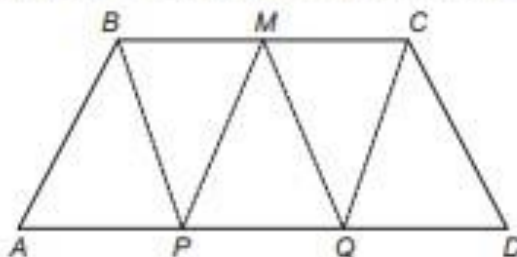
- ☐ A 1
- ☐ B 2
- ☐ C 3
- ☐ D 4
- ☐ E 5

Fonte: ENEM (2022).

Em conclusão, na última questão retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), ao englobar a concepção de **Álgebra como estudo das estruturas (U4)**, quarta concepção definida por Usiskin (1995), percebe-se o caráter abstrato adquirido pelas letras, também denominadas como variáveis, em razão delas serem manipuladas como símbolos arbitrários.

Figura 4 - Questão 175 da prova azul do ENEM PPL 2019 (2º dia)

No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, M é o ponto médio do segmento BC , e os pontos P e Q são obtidos dividindo o segmento AD em três partes iguais.



Pelos pontos B , M , C , P e Q são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura.

A razão entre $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é

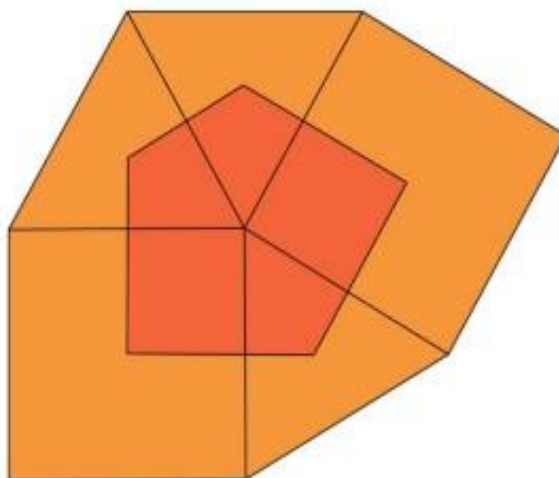
- A $\frac{1}{3}$
- B $\frac{2}{3}$
- C $\frac{2}{5}$
- D $\frac{3}{5}$
- E $\frac{5}{6}$

Fonte: ENEM (2019).

Trata-se de uma questão de cunho geométrico, porém, pela resolução, correlacionada ao campo algébrico. Nesse caso, os valores numéricos dos segmentos BC e AD tornam-se insignificantes, a considerar que, mediante à adoção de manipulações algébricas, o resultado final, ou seja, a razão, não depende de tais valores para ser estabelecida. Sendo assim, o quesito debatido apresenta a **Álgebra como estudo das estruturas (U4)**, onde as letras são isentas de qualquer significado numérico.

A seguir, damos continuidade a classificação das questões, sendo estas extraídas da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), em conformidade com as concepções percorridas anteriormente.

Figura 5 - Questão 4 da prova da FUVEST 2021



Três triângulos equiláteros e dois quadrados formam uma figura plana, como ilustrado. Seus centros são os vértices de um pentágono irregular, que está destacado na figura. Se T é a área de cada um dos triângulos e Q a área de cada um dos quadrados, a área desse pentágono é

- (A) $T + Q$.
- (B) $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}Q$.
- (C) $T + \frac{1}{2}Q$.
- (D) $\frac{1}{3}T + \frac{1}{4}Q$.
- (E) $\frac{1}{3}T + \frac{1}{2}Q$.

Fonte: FUVEST (2021).

Na questão geométrica acima, cujo processo resolutivo envolve a Álgebra, o propósito principal está direcionado a designar um modelo padrão representativo para a área do pentágono irregular, figura plana reproduzida na ilustração, onde as letras serão empregadas como generalizadoras. Logo, a concepção de **Álgebra como aritmética generalizada (U1)** é a mais próxima conforme a finalidade da questão.

No que concerne a **Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (U2)**, segunda concepção na categorização decretada por Usiskin (1995), as letras atuam como incógnitas, almejando a definição de um ou mais valores desconhecidos, situação que pode ser averiguada na questão abaixo.

Figura 6 - Questão 21 da prova da FUVEST 2020

Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

- (A) 26
- (B) 38
- (C) 42
- (D) 62
- (E) 68

Fonte: FUVEST (2020).

Assim, ante os dados inseridos no enunciado, o método empregado para conduzir à devida resposta, respalda-se na construção de um sistema de equações lineares. O foco da questão está em determinar os valores das letras, neste caso, denominadas incógnitas, até então, não conhecidas. Desse modo, a concepção de **Álgebra como estudo de procedimento para resolver certos tipos de problemas (U2)**, citada preliminarmente, faz-se predominante na segunda questão.

Figura 7 - Questão 5 da prova da FUVEST 2021

Um comerciante adotou como forma de pagamento uma máquina de cartões, cuja operadora cobra uma taxa de 6% em cada venda. Para continuar recebendo exatamente o mesmo valor por cada produto, ele resolveu aplicar um reajuste nos preços de todos os produtos da loja. Se P era o valor de uma mercadoria antes da adoção da máquina, o novo valor V deve ser calculado por

- (A) $V = P + 0,06$
- (B) $V = 0,94 \cdot 1,06 \cdot P$
- (C) $V = 1,6 \cdot P$
- (D) $V = \frac{P}{0,94}$
- (E) $V = 0,94 \cdot P$

Fonte: FUVEST (2021).

Outrossim, o terceiro quesito, situado na parte superior, abrange o conteúdo de Matemática Financeira, com respaldo da Álgebra na resolução. O cerne da questão consiste em definir um modelo que relacione as letras, tratadas como variáveis que variam. Aqui, neste caso, iremos relacionar o preço inicial de uma mercadoria (P), antes da adoção da máquina, a um novo valor (V), objetivando, mesmo com a adoção da taxa de 6% da máquina de cartões, estabelecer uma relação que possibilite ao comerciante receber o mesmo valor por cada produto, caracterizando-a na concepção de **Álgebra como estudo de relações entre grandezas (U3)**. Logo abaixo, podemos verificar a última questão constituinte do teste aplicado.

Figura 8 - Questão 4 da prova da FUVEST 2016

A igualdade correta para quaisquer a e b , números reais maiores do que zero, é

a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

b) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{b}$

c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$

d) $\frac{1}{a + b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

e) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

Fonte: FUVEST (2016).

Neste item, a averiguação da alternativa correta ocorre mediante a execução de manipulações algébricas, uma vez que não existe quaisquer atribuições numéricas referentes às letras, estas empregadas como símbolos abstratos. Desse modo, a **Álgebra como estudo das estruturas (U4)** é a concepção que designa a questão em pauta.

8.2 ANÁLISE DOS ERROS

A fim de alcançar os objetivos estabelecidos neste estudo, após a verificação das questões e suas determinadas concepções de Álgebra, com aporte teórico de

Usiskin (1995), os processos errôneos emergentes no desenvolvimento das resoluções, inicialmente, foram agrupados em consonância à categorização de erros definida por Radatz (1979, p. 165-169), estruturada conforme os pontos abaixo:

- R1 – Erros devido a dificuldades na linguagem;
- R2 – Erros devido a dificuldades de obtenção de informação espacial;
- R3 – Erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos, fatos, habilidades e conceitos;
 - ✓ R3.1 – Por preservação;
 - ✓ R3.2 – De associação;
 - ✓ R3.3 – De interferência;
 - ✓ R3.4 – De assimilação.
- R4 – Erros devido a associações incorretas ou rigidez do pensamento;
- R5 – Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes.

A seguir, analisamos alguns erros provenientes das resoluções apresentadas pelos 26 discentes submetidos ao teste. Os estudantes serão identificados de acordo com a seguinte nomenclatura: E1, E2, ..., En. Ademais, após o término das explorações, trazemos reflexões e um panorama geral em relação ao desempenho obtido pelos participantes da pesquisa.

8.2.1 Erros devido a dificuldades na linguagem

Segundo Radatz (1979), este tipo de erro ocorre quando o estudante apresenta dificuldades na aprendizagem de símbolos, vocabulário e conceitos matemáticos, conflito similar, de acordo com o referido autor, a assimilação de uma Língua Estrangeira. À vista disso, a incompreensão do processo de transição da linguagem usual para uma linguagem matemática formal ou a má-interpretação do enunciado, acarretam em erros inseridos na categoria em foco.

É notório que, na figura 9, solução desenvolvida pelo estudante E8, na sétima questão, o tipo de erro em investigação se faz evidente, diante do impasse em realizar a transição para a linguagem adequada.

Figura 9 - Resolução apresentada pelo estudante E8

(FUVEST 2020 – 1ª fase) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

a) 26
b) 28
c) 42
d) 62
e) 68

$$\begin{array}{l}
 2 \times P \\
 2 + \frac{X}{2} = R \\
 X = L \\
 2X + 2 + \frac{X}{2} + X = 78
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Note que o estudante E8 mostrou total desconhecimento ao fazer a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, inibindo as chances da montagem adequada do sistema de equações lineares, principal método resolutivo da questão, e, conseqüentemente, descoberta dos valores das incógnitas. Infere-se que o domínio gramatical, neste caso, sem realizar a transição de informações do enunciado para a linguagem matemática, torna-se pouco significativo para o desenvolvimento dos cálculos.

8.2.2 Erros devido a dificuldades de obtenção de informação espacial

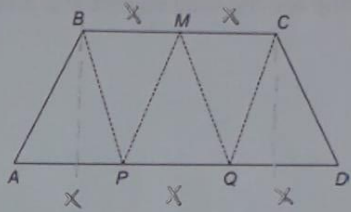
Nesta categoria, Radatz (1979) destaca os estudos prematuros acerca do subtópico, porém, em contrapartida, frisa o impasse derivado das diferenças manifestadas individualmente pelos discentes na extração de recursos espaciais ou visuais. Em outras palavras, ao representar situações matemáticas, mediante o suporte de esquemas geométricos ou representações gráficas, surgem os erros dessa natureza, reconhecidos ante as dificuldades no processamento ou análise de informações visuais.

Na resolução da quarta questão, presente a seguir, desenvolvida pelo estudante E21, podemos observar o erro em debate. Perante a resposta abaixo, conseguimos identificar dificuldades na leitura do trapézio isósceles, representação fundamental para condução da solução do problema. O estudante E21, ao tentar determinar a razão entre os segmentos BC e AD, define as bases dos triângulos pela

incógnita x , mesmo sem apresentar a linha de raciocínio, a aferição está correta, uma vez que o tamanho da base dos cinco triângulos é igual. Contudo, ao partir para a definição da razão entre BC e AD , solicitados na questão, o sujeito não considera apenas as bases da figura geométrica, todavia, muito provavelmente, todos os triângulos compreendidos entre os segmentos supracitados, resultando na equivocada razão $3/5$ e na leitura errada da imagem.

Figura 10 - Resolução apresentada pelo estudante E21

(ENEM 2019 – Reaplicação/PPL) No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, M é o ponto médio do segmento BC , e os pontos P e Q são obtidos dividindo o segmento AD em três partes iguais.



Pelos pontos B , M , C , P e Q são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura.

A razão entre BC e AD que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é:

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{2}{5}$
- ☒ d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{5}{6}$

Razão:

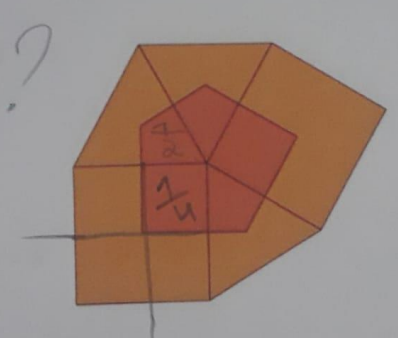
$$\frac{BC}{AD} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Erros dessa natureza também foram encontrados na quinta questão, cometidos pelo estudante E15. Inicialmente, no caso abaixo, determinar a área da região avermelhada ocupada por um dos seis triângulos e, conseqüentemente, por um dos dois quadrados, multiplicando pela quantidade de figuras constituintes do pentágono irregular menor, faz-se imprescindível. Todavia, o estudante E15, apesar de estabelecer corretamente a área da região avermelhada ocupada por um dos quadrados, não obtém o mesmo êxito ao designar a área de um triângulo ou, então, quadrilátero (existem variâncias em relação à estratégia resolutiva utilizada), leitura equivocada da representação geométrica, fator preponderante para o desencadeamento de sucessivos erros.

Figura 11 - Resolução apresentada pelo estudante E15

(FUVEST 2021 – 1ª fase):



(FUVEST 2021 – 1ª fase) Três triângulos equiláteros e dois quadrados formam uma figura plana, como ilustrado. Seus centros são os vértices de um pentágono irregular, que está destacado na figura. Se T é a área de cada um dos triângulos e Q a área de cada um dos quadrados, a área desse pentágono é:

a) $T + Q$.

b) $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}Q$.

c) $T + \frac{1}{2}Q$.

d) $\frac{1}{3}T + \frac{1}{4}Q$.

e) $\frac{1}{3}T + \frac{1}{2}Q$.

Handwritten notes:
 $\text{triângulo} = \frac{1}{2}$
 $\text{Quadrado} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2}T + \frac{1}{4}Q$
 ?

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

8.2.3 Erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos, fatos, habilidades e conceitos

De acordo com Radatz (1979), esta classe de erros engloba todas as limitações referentes aos conteúdos trabalhados, fonte para o surgimento de problemas específicos na resolução das atividades matemáticas. Ressalta-se que restrições na manipulação de algoritmos, procedimentos errôneos na aplicação de técnicas, desconhecimento sobre fatos básicos, símbolos e conceitos matemáticos originam os erros classificados no item em discussão.

Percebemos que o estudante E18, na primeira questão, cuja solução pode ser encontrada abaixo, apresenta erros dessa classificação.

Figura 12 - Resolução apresentada pelo estudante E18

(ENEM 2022 – Reaplicação/PPL) Uma faculdade oferece dois cursos diferentes na área de Humanas. Para um aluno ingressar nesses cursos, o vestibular contém questões objetivas e uma redação, e a nota final do candidato é a soma dessas notas, utilizando o seguinte critério de pesos:

- questões objetivas: peso 1 para o curso I e peso 1 para o curso II;
- redação: peso 2 para o curso I e peso 3 para o curso II.

Um candidato que concorre aos dois cursos obteve nota X nas questões objetivas e nota Y na redação. Para analisar sua nota para o curso I e para o curso II, o candidato representa sua nota com um produto de matrizes $A \cdot B$, em que a matriz A representa os pesos, e a matriz B contém as notas obtidas pelo candidato. A matriz resultante $A \cdot B$ é uma matriz coluna, em que, na primeira linha, tem sua nota final para o curso I e, na segunda linha, tem sua nota final para o curso II.

Nessas condições, qual representação algébrica gera o resultado final desse candidato nos dois cursos?

☒ A $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
☐ B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
☐ C $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
☐ D $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$
☐ E $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

Curso I = $1X + 2Y$
 Curso II = $1X + 3Y$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1X + 2Y \\ 1X + 3Y \end{bmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Observamos que o estudante E18 interpreta corretamente as informações disponibilizadas na questão, consegue formular as expressões algébricas referentes aos cursos I e II, conforme os critérios de pesos, porém não apresenta efetividade no momento da estruturação da matriz. As notas devem ser representadas pelo produto das duas matrizes: a primeira equivale aos pesos das notas; a segunda está relacionada propriamente às notas. Em suma, ao organizar os pesos na matriz “A”, o estudante E18 inverte a posição dos termos a_{12} e a_{21} , como pode ser visto na resolução acima, aparentemente demonstrando não dominar a disposição dos elementos em linhas e colunas, ausência de domínio sobre conceitos básicos do conteúdo. Adiante, problemas associados ao produto entre matrizes podem ser identificados, técnica executada incorretamente.

Na resolução da oitava questão, desenvolvida pelo estudante E2, identificamos erros básicos na manipulação de expressões algébricas, cujas regras empregadas são inexistentes.

Figura 13 - Resolução apresentada pelo estudante E2

(FUVEST 2016 – 1ª fase) A igualdade correta para quaisquer a e b , números reais maiores do que zero, é:

a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

b) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{b}$

~~c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$~~ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$

d) $\frac{1}{a + b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

e) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Ao tentar definir a alternativa que apresenta a igualdade correta, o estudante E2 demonstra não ter domínio acerca do emprego das propriedades dos produtos notáveis, apresentando dificuldades em procedimentos básicos, como pode ser visto na imagem acima. Portanto, tal erro está enquadrado nessa categoria.

8.2.4 Erros devido a associações incorretas ou rigidez do pensamento

Este tipo de erro, conforme Radatz (1979), é gerado pela rigidez do pensamento e inflexibilidade da codificação e decodificação de uma nova informação, visto que a recorrência de problemas similares anteriores, por diversas vezes, faz o estudante permanecer seguindo o mesmo raciocínio. Em linhas gerais, essa categoria engloba erros ocasionados pela insistência do emprego de estratégias iniciais, resultantes de outras experiências semelhantes, e desconsidera outros métodos resolutivos, comportamento que demonstra a dificuldade de adaptação perante novas situações.

Podemos perceber, na resolução da sétima questão, localizada abaixo, realizada pelo estudante E25, a rigidez do pensamento como causa precursora do erro.

Figura 14 - Resolução apresentada pelo estudante E25

(FUVEST 2021 – 1ª fase) Um comerciante adotou como forma de pagamento uma máquina de cartões, cuja operadora cobra uma taxa de 6% em cada venda. Para continuar recebendo exatamente o mesmo valor por cada produto, ele resolveu aplicar um reajuste nos preços de todos os produtos da loja. Se P era o valor de uma mercadoria antes da adoção da máquina, o novo valor V deve ser calculado por:

a) $V = P + 0,06$
 b) $V = 0,94 \cdot 1,06 \cdot P$
 c) $V = 1,06 \cdot P$
 d) $V = \frac{P}{0,94}$
 e) $V = 0,94 \cdot P$

$\frac{6}{100} = 0,06$

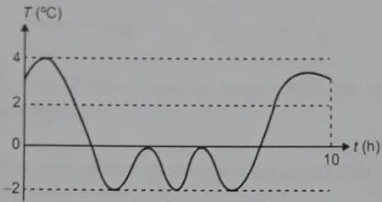
$y = ax + b$
 $V = Px + b$
 $V = P \cdot 1 + 0,06$
 $V = P + 0,06$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na situação acima, a questão solicita que relacionemos P , valor de uma mercadoria antes da adoção da máquina, e V , novo valor a ser calculado, de forma que o comerciante permaneça recebendo o mesmo valor pela unidade do produto, mesmo com a taxa de 6% cobrada pela máquina de cartões. O estudante E21, certamente, por responder outras questões idênticas à abordada, provocando a rigidez do pensamento e escassez de novas referências, busca “encaixar” os dados na fórmula de função do 1º grau, associação indevida, principalmente por definir a taxa acrescida como termo independente.

Figura 15 - Resolução apresentada pelo estudante E23

(ENEM 2022) Uma máquina em operação tem sua temperatura T monitorada por meio de um registro gráfico, ao longo do tempo t . Essa máquina possui um pistão cuja velocidade V varia com a temperatura T da máquina, de acordo com a expressão $V = T^2 - 4$. Após a máquina funcionar durante o intervalo de tempo de 10 horas, o seu operador analisa o registro gráfico, apresentado na figura, para avaliar a necessidade de eventuais ajustes, sabendo que a máquina apresenta falhas de funcionamento quando a velocidade do pistão se anula.



Quantas vezes a velocidade do pistão se anulou durante as 10 horas de funcionamento?

a) 1
 b) 2
 c) 3
 d) 4
 e) 5

$V = T^2 - 4$
 $V = 10^2 - 4$
 $V = 5 - 4$
 $V = 1$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na terceira questão, cuja resolução encontra-se acima, verificamos um erro causado por associações incorretas, cometido pelo estudante E23. Note que T , correspondente à variável temperatura, assume o valor 10, presente no enunciado, dado referente à variável tempo (t). Logo, estamos diante de um erro de assimilação acarretado quando determinada informação, em razão de percepções errôneas, não é devidamente compreendida.

8.2.5 Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes

De acordo com Radatz (1979), este tipo de erro é derivado da aplicação de estratégias ou regras incondizentes com o conteúdo abordado. Portanto, quando o estudante adota procedimentos questionáveis, sem qualquer compatibilidade com a atividade proposta, os erros identificados podem ser reconhecidos como pertencentes à categoria.

Na resolução abaixo, o estudante E19 faz uso de métodos destoantes do foco principal da segunda questão.

Figura 16 - Resolução apresentada pelo estudante E19

(ENEM 2021) Em um estudo realizado pelo IBGE em quatro estados e no Distrito Federal, com mais de 5 mil pessoas com 10 anos ou mais, observou-se que a leitura ocupa, em média, apenas seis minutos do dia de cada pessoa. Na faixa de idade de 10 a 24 anos, a média diária é de três minutos. No entanto, no grupo de idades entre 24 e 60 anos, o tempo médio diário dedicado à leitura é de 5 minutos. Entre os mais velhos, com 60 anos ou mais, a média é de 12 minutos.

A quantidade de pessoas entrevistadas de cada faixa de idade seguiu a distribuição percentual descrita no quadro.

Faixa etária	Percentual de entrevistados
De 10 a 24 anos	x
Entre 24 e 60 anos	y
A partir de 60 anos	x

Disponível em: www.globo.globo.com. Acesso em: 16 ago. 2013 (adaptado).

Os valores de x e y do quadro são, respectivamente, iguais a:

a) 10 e 80
 b) 10 e 90
 c) 20 e 60
 d) 20 e 80
 e) 25 e 50

Handwritten calculations and notes:

- 60 = 12 minutos
- 24 a 60 = 5 minutos
- 10 a 24 = 3 minutos
- Pessoas entrevistadas = 5 mil
- 100% = 5 mil
- 6 minutos = 1 pessoa
- 100 = 5 mil
- 6 minutos = 1 pessoa
- 5013
- 30
- 3 = 5000%
- 5000 = 100%
- 3 · 100% = 5000%
- 300 = 5000%
- 300 = 5000%
- 300 = 5000%
- 3 = 5000%
- 3 = 5000%
- 3 = 5000%

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O item, sobretudo, necessita que o sujeito organize as informações disponibilizadas no enunciado e construa um sistema linear passível de se obter os valores de x e y . No caso, o estudante E19 adota a regra de três simples como estratégia resolutiva, procedimento antagônico à finalidade almejada pela questão.

No sexto quesito, presente a seguir, o emprego de técnicas irrelevantes também foi detectado, desta vez pelo estudante E7.

Figura 17 - Resolução apresentada pelo estudante E7

(FUVest 2020 – 1ª fase) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

a) 26
b) 28
c) 42
d) 62
e) 68

Handwritten work by student E7:

$$P = 78$$

$$D = 3$$

$$78 \div 3 = 26$$

$$26 \times 2 = 52$$

$$78 - 52 = 26$$

$$26 + 26 = 52$$

$$52 + 16 = 68$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Assim como na questão analisada anteriormente, montar um sistema de equações lineares seria o método recomendável, tendo como intuito descobrir a quantidade de passagens vendidas para cada destino. Contudo, operações aritméticas avulsas foram realizadas pelo estudante E7, estratégia irrelevante de acordo com o objetivo pretendido pela questão.

Neste trabalho, a análise de erros opera como metodologia de pesquisa, capaz de propiciar materiais investigativos no que concerne à Matemática. O erro, conforme Radatz (1980), atua como ferramenta essencial na detecção de déficits na aprendizagem do campo em pauta. Ainda sob a perspectiva do referido autor, “os erros dos alunos na Educação Matemática não são simplesmente resultado de ignorância e acidentes situacionais” (RADATZ, 1980, p. 16, tradução nossa)¹³.

Os tipos de erros apresentados ao decorrer dos processos resolutivos expuseram as diversas estratégias aderidas pelos discentes, tal como, em suma, forneceram subsídios para explorar as razões intrínsecas relativas aos equívocos

¹³ “Student's errors in mathematics education are not simply a result of ignorance and situational accidents.”

manifestados, reflexões ancoradas pelo método de categorização adotado. Nesta pesquisa, a produção escrita assume papel relevante na identificação e compreensão acerca do domínio dos conteúdos aplicados, além de, especialmente, possibilitar a avaliação da efetividade das práticas de ensino. Silva e Buriasco (2005, p. 504), defendem que:

Analisar a produção escrita de alunos em questões de Matemática contribui, entre outras coisas, para que o professor busque entender as respostas dadas e o porquê das estratégias escolhidas. Com essa atitude investigativa, o professor pode (re)conhecer que conhecimentos os alunos já possuem e quais ainda estão em construção.

É crucial compreender que os erros necessitam ser encarados pelos docentes como um método de aprendizagem, ou seja, como uma espécie de fio condutor para a consolidação do conhecimento, onde o resultado final assume importância secundária, uma vez que, em sua totalidade, o procedimento resolutivo deve ser priorizado, aspirando reforçar a visão construtiva sobre o erro (RAMOS, 2015).

Ademais, em seguida à investigação das concepções de Álgebra pertinentes às questões do teste, conforme a classificação definida por Usiskin (1995), e da explanação de resoluções que revelam erros concernentes à categorização proposta por Radatz (1979), apresentamos, logo abaixo, defronte uma análise estatística, uma perspectiva geral dos resultados obtidos pelos estudantes:

Tabela 2 - Análise do desempenho dos estudantes por questão

Questão	Prova	Acertos (%)	Erros (%)	Em branco (%)	Alternativa assinalada sem cálculos realizados (%)
1	ENEM	38	58	4	27
2	ENEM	35	54	11	38
3	ENEM	11	85	4	38
4	ENEM	54	38	8	31
5	FUVEST	11	85	4	23
6	FUVEST	31	58	11	15
7	FUVEST	4	96	0	27
8	FUVEST	15	77	8	50

Fonte: Autora (2023).

Os dados da tabela mostram o baixo desempenho atingido pelos estudantes no teste aplicado, com percentuais de erros alarmantes em todos os quesitos. Ao observarmos as estatísticas, constatamos que apenas a quarta questão, extraída do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), apresentou índices de acertos superiores aos de erros. Atentamos à relativa alta porcentagem de questões cujas alternativas foram meramente assinaladas, fator, quiçá, ocasionado pelo desconhecimento dos conteúdos exigidos ou pela tentativa de obter êxito “chutando”. Em relação aos números apresentados pelas avaliações (ENEM e FUVEST), fazendo analogia entre as questões que apresentaram a mesma concepção de Álgebra, concluímos a superioridade do ENEM em número de acertos em todas as categorias. Na tabela abaixo, onde U1, U2, U3 e U4 indicam as concepções de Álgebra definidas por Usiskin (1995), evidenciamos a afirmação realizada anteriormente, ao compararmos, por questão, a quantidade de acertos nas avaliações supracitadas, como podemos verificar:

Tabela 3 - Análise de acertos por concepção de Álgebra em cada avaliação

Avaliação	U1	U2	U3	U4
ENEM	10	9	3	14
FUVEST	3	8	1	4

Fonte: Autora (2023).

Ao expandirmos a discussão para o campo da categorização de erros proposta por Radatz (1979), aporte teórico desta pesquisa, identificamos equívocos nos processos resolutivos pertinentes às cinco categorias constituintes do modelo adotado, dados destacados na tabela a seguir:

Tabela 4 - Análise de erros conforme a categorização de Radatz (1979)

Classificação dos erros	Erros identificados	% do total de erros
R1	43	40,2
R2	23	21,5
R3	19	17,8
R4	12	11,2
R5	10	9,3

Fonte: Autora (2023).

No geral, os resultados apontam números preocupantes em todas as categorias listadas, em especial a R1, erros ocasionados devido a dificuldades na linguagem, relacionados à incompreensão do processo de transição da linguagem usual para uma linguagem matemática ou derivados por uma má-interpretação do enunciado, correspondem a 40,2% do total dos erros presentes no material aplicado. Segundo Gil:

Tendo a Matemática uma linguagem própria, com uma grande variedade de símbolos, podemos fazer uma codificação desta simbologia para a tradução de um problema na linguagem escrita para a linguagem matemática e observo que uma das barreiras enfrentadas pelos alunos no estudo da Álgebra está na hora de fazer a passagem de uma situação-problema na linguagem corrente para a linguagem algébrica. (GIL, 2008, p. 34).

As categorias R2 e R3, respectivamente, erros relacionados às dificuldades de obtenção de informação espacial e ao domínio deficiente de pré-requisitos, fatos, habilidades e conceitos, particularmente, também apresentam dados precários. Vale ressaltar que dentre os 156 erros cometidos na resolução do teste, 107 (74,8%) receberam classificação, uma vez que outros 36 (25,2%), perante a ausência da produção escrita, cuja alternativa incorreta foi meramente assinalada, não possibilitaram análise.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo damos ênfase aos principais aspectos da pesquisa. De maneira geral, o marco teórico deste trabalho destacou os impasses envolvendo o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra na Educação Básica, simultaneamente ao que certificam os documentos curriculares nacionais; as concepções de Álgebra estabelecidas por Usiskin (1995); o processo de consolidação das avaliações em larga escala em território brasileiro; e a necessidade de ressignificar o papel do erro no ambiente educacional.

Esta pesquisa teve como objetivo analisar e classificar possíveis dificuldades apresentadas pelos discentes no campo algébrico, por meio da resolução de um teste, classificando-as conforme o modelo de categorização de erros proposto por Radatz (1979). As questões foram, especificamente, selecionadas de acordo com as quatro concepções de Álgebra definidas por Usiskin (1995), extraídas mediante uma exploração minuciosa em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), duas avaliações renomadas no país.

Os resultados advindos do teste, instrumento aderido para a coleta de dados desta pesquisa, evidenciaram as grandes dificuldades manifestadas pelos estudantes em Álgebra. Identificamos erros em todas as classificações propostas por Radatz (1979), desde a incompreensão do procedimento de tradução da linguagem usual para a linguagem matemática ou a má-interpretação do enunciado, categoria com os maiores índices de erros, até a aplicação de regras ou estratégias irrelevantes em questões algébricas.

Os erros, na perspectiva adotada pelo nosso estudo, atuam como recursos fundamentais para compreender o nível de aprendizagem dos discentes, oportunizando o diagnóstico de dificuldades e, além disso, melhorias significativas no processo de ensino e aprendizagem, desmistificando o caráter exclusivamente nocivo atribuído ao ato de errar. Diante disso, para os professores, a investigação acerca da origem e desenvolvimento dos erros, possibilita o aperfeiçoamento de sua prática pedagógica.

Ressaltamos a relevância deste trabalho para fomentar discussões e reflexões relacionadas à Álgebra, ramo essencial da Matemática, e a análise de erros,

ferramenta compreendida como indispensável no progresso do cenário educacional. Esperamos que este trabalho auxilie em outros estudos desenvolvidos na área da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Ana Cláudia Morgado. **A resolução de tarefas envolvendo equações do 2º grau: um estudo no 8º ano**. Orientadora: Profª. Drª. Ana Cláudia Correia Batalha Henriques. 2013. 197 p. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade de Lisboa - Instituto de Educação, Lisboa, 2013.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei nº 9.394 - Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília - DF, 20 dez. 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 12 ago. 2022.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2022.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2022.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Parte I (Bases Legais)**. Brasília, MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2022.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Parte III (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias)**. Brasília, MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2022.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf. Acesso em: 27 mar. 2022.

CARNEIRO, Verônica Lima. As avaliações standardizadas e o papel do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) na etapa final da Educação Básica. **Revista EXITUS**, v. 2, n. 1, p. 217-230, jan./jun. 2012. Disponível em: <http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/84>. Acesso em: 14 out. 2022.

CASTRO, Maria Helena Guimarães. Avaliação do sistema educacional brasileiro: tendências e perspectivas. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Rio de Janeiro, v. 6, ed. 20, p. 303-364, jul./set. 1998. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40361998000300002&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 26 out. 2022.

CASTRO, Mônica Rabello. Educação algébrica e a resolução de problemas: a Proposta de Interatividade do Salto Para o Futuro. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 42,

2003. Disponível em: <https://periodicos.ufrjr.br/index.php/gepem/article/view/422>. Acesso em: 05 mai. 2022.

CORDEIRO, Clailton Costa. **Análise e classificação de erros de questões de Geometria Plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas**. 2009. 170 p. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio Professor José de Souza Herdy (UNIGRANRIO), Duque de Caxias, 2009.

CORRÊA, Tânia Regina dos Santos Godoy. **Os reflexos do SAEB/Prova Brasil nas práticas pedagógicas de Língua Portuguesa nas escolas municipais de Costa Rica - MS**. Orientadora: Prof^a. Dr^a. Leny Rodrigues Martins Teixeira. 2012. 128 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Católica Dom Bosco (UCDB), Campo Grande - MS, 2012.

CORREIA, Carlos Eduardo Félix. Aprender com os erros. **EDUC@ção - Revista Pedagogia - UNIPINHAL**, Espírito Santo do Pinhal - SP, v. 1, n. 3, p. 13-19, jan./dez. 2005.

COSTA, Amanda Silva da *et al.* Investigando dificuldades apresentadas em Álgebra por alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. **Destaques Acadêmicos**, Lajeado - RS, v. 8, n. 4, p. 159-176, 12 jun. 2023. DOI <http://dx.doi.org/10.22410/issn.2176-3070.v8i4a2016.1224>. Disponível em: <http://univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/1224>. Acesso em: 26 abr. 2022.

CURY, Helena Noronha. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva. Como ensinar Matemática hoje? **Temas e Debates. SBEM.**, [s. l.], ano II, ed. 2, p. 15-19, 1989. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf. Acesso em: 15 fev. 2022.

ENEM. **Matriz de Referência do ENEM**. Ministério da Educação – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, [s.d.]. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 29 nov. 2022.

ESTEVÃO, Eduardo José de Oliveira; GONÇALVES, Tânia Maria Nunes. Uma proposta de atividades para minimizar as dificuldades na aprendizagem de Álgebra. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v. 7, n. 1, p. 10849-10863, jan. 2021. DOI <https://doi.org/10.34117/bjdv7n1-741>. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/23928>. Acesso em: 25 fev. 2022.

FERREIRA, Adriane Gaspari; PRESTES, Diego Barboza; PIRES, Magna Natália Marin. Early Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: manifestações do pensamento algébrico. **Revista Contexto & Educação**, Londrina - PR, ano 36, n. 113,

ed. 36, p. 105-115, jan./abr. 2021. DOI 10.21527/2179-1309.2021.113.105-115. Disponível em: <https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/10591>. Acesso em: 20 jun. 2022.

FONTANIVE, Nilma Santos. Avaliação em larga escala e padrões curriculares: as escalas de proficiência em Matemática e leitura no Brasil: Escalas de proficiência em Matemática e Língua Portuguesa (leitura) no Brasil – Saeb (95). In: BOMENY, Helena. **Avaliação e determinação de padrões na educação Latino-Americana: realidades e desafios**. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1997. p. 31-40.

FUVEST. **Manual do candidato**. Fundação Universitária para o Vestibular, 2022. Disponível em: [fuvest2022_manual_20210804.pdf](#). Acesso em: 19 dez. 2022.

GATTI, Bernardete A. Avaliação educacional no Brasil. **EccoS – Revista Científica**, UNINOVE, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 17-41, jun. 2002. Disponível em: <https://periodicos.uninove.br/eccos/article/view/291>. Acesso em: 30 set. 2022.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 176 p. ISBN 85-224-3169-8.

GIL, Kátia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Orientadora: Dr^a. Ruth Portanova. 2008. 118 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

KLIEMANN, Geovanna Luiza; DULLIUS, Maria Madalena. Análise de erros na resolução de problemas matemáticos. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Belém, v. 13, n. 28, p. 166-180, jul./dez. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/4197>. Acesso em: 11 jan. 2023.

LA TAILLE, Yves de. O erro na perspectiva piagetiana - O conhecimento como construção. In: AQUINO, Júlio Groppa. **Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas**. 5. ed. São Paulo (SP): Summus editorial, 1997. cap. 2, p. 25-44. ISBN 978-85-323-0609-8.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas - SP: Papirus, 2001. 176 p. ISBN 85-308-0450-3.

LOCATELLI, Iza. Construção de instrumentos para a avaliação de larga escala e indicadores de rendimento: o modelo SAEB. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 25, p. 3-21, 2002. Disponível em: <https://publicacoes.fcc.org.br/eae/article/view/2189>. Acesso em: 18 nov. 2022.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. 310 p. ISBN 85-224-3397-6.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas (SP), v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424>. Acesso em: 10 jul. 2022.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social: A pesquisa qualitativa. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.); DESLANDES, Suely Ferreira; NETO, Otávio Cruz; GOMES, Romeu. **Pesquisa social: Teoria, método e criatividade**. 21. ed. Petrópolis - RJ: Vozes, 2002. cap. 1, p. 21-25. ISBN 85.326.1453-1.

NOGARO, Arnaldo; GRANELLA, Eliane. O erro no processo e ensino e aprendizagem. **Revista de Ciências Humanas**, [s. l.], v. 5, n. 5, p. 1-26, 2004. Disponível em: <http://revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/view/244>. Acesso em: 18 fev. 2023.

PAVANELLO, Regina Maria; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 17, n. 33, p. 29-42, jan./abr. 2006. DOI <https://doi.org/10.18222/eae173320062125>. Disponível em: <https://publicacoes.fcc.org.br/eae/article/view/2125>. Acesso em: 08 jan. 2023.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática no ensino da Matemática Elementar**. 1998. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 1998.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, setembro 2009. 181 p. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf. Acesso em: 03 abr. 2022.

RADATZ, Hendrik. Error analysis in Mathematics Education. **Journal for research in Mathematics Education**, v. 10, n. 3, p. 163-172, 1979.

RADATZ, Hendrik. Students' errors in the Mathematical learning process: a survey. **For the learning of Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 16-20, 1980.

RAMOS, Maria Luísa Perdigão Diz. A importância da análise didática dos erros matemáticos como estratégia de revelação das dificuldades dos alunos. **REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 10, n. 1, p. 132-149, 2015. DOI <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n1p132>. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p132>. Acesso em: 28 jan. 2023.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Analisando o desempenho dos alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. 145 p. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo (SP), 2001.

SILVA, Márcia Cristina Nagy; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita em Matemática: algumas considerações. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 499-512, 2005. DOI <https://doi.org/10.1590/S1516-73132005000300012>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/SSwNXzPbR4HvsmLhrmRCPDn/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 08 abr. 2023.

SOUZA, Relen Marques de. **Erro: uma abordagem do ponto de vista da avaliação na perspectiva do professor e dos alunos do Ensino Fundamental I**. 2014. 74 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Psicopedagogia) - Universidade Cândido Mendes / AVM - Faculdade Integrada, Niterói - RJ, 2014.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino**. 2010. Tese de Doutorado (Doutora em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

USISKIN, Zalman. **Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. In COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, cap. 2, p. 9-22.

VIANNA, Heraldo Marelím. Fundamentos de um programa de avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo - SP, n. 28, p. 23-38, jul./dez. 2003. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/pdf/eae/n28/n28a02.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2022.

APÊNDICE A – TESTE



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO (UFPE)
 CAMPUS ACADÊMICO DO AGRESTE (CAA)
 MATEMÁTICA – LICENCIATURA
 NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE (NFD)



Nome: _____

TESTE

(ENEM 2022 – Reaplicação/PPL) Uma faculdade oferece dois cursos diferentes na área de Humanas. Para um aluno ingressar nesses cursos, o vestibular contém questões objetivas e uma redação, e a nota final do candidato é a soma dessas notas, utilizando o seguinte critério de pesos:

- Questões objetivas: Peso 1 para o curso I e peso 1 para o curso II;
- Redação: Peso 2 para o curso I e peso 3 para o curso II.

Um candidato que concorre aos dois cursos obteve nota X nas questões objetivas e nota Y na redação. Para analisar sua nota para o curso I e para o curso II, o candidato representa sua nota com um produto de matrizes $A \cdot B$, em que a matriz A representa os pesos, e a matriz B contém as notas obtidas pelo candidato. A matriz resultante $A \cdot B$ é uma matriz coluna, em que, na primeira linha, tem sua nota final para o curso I e, na segunda linha, tem sua nota final para o curso II.

Nessas condições, qual representação algébrica gera o resultado final desse candidato nos dois cursos?

A $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

(ENEM 2021) Em um estudo realizado pelo IBGE em quatro estados e no Distrito Federal, com mais de 5 mil pessoas com 10 anos ou mais, observou-se que a leitura ocupa, em média, apenas seis minutos do dia de cada pessoa. Na faixa de idade de 10 a 24 anos, a média diária é de três minutos. No entanto, no grupo de idades entre 24 e 60 anos, o tempo médio diário dedicado à leitura é de 5 minutos. Entre os mais velhos, com 60 anos ou mais, a média é de 12 minutos.

A quantidade de pessoas entrevistadas de cada faixa de idade seguiu a distribuição percentual descrita no quadro.

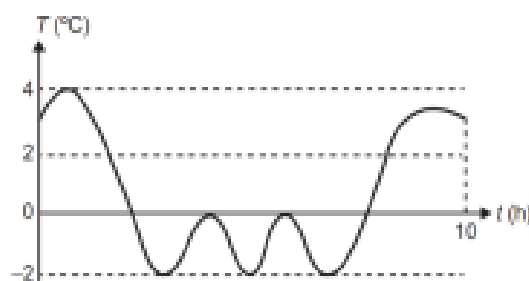
Faixa etária	Percentual de entrevistados
De 10 a 24 anos	x
Entre 24 e 60 anos	y
A partir de 60 anos	x

Disponível em: www.globo.globo.com. Acesso em: 16 ago. 2013 (adaptado).

Os valores de x e y do quadro são, respectivamente, iguais a:

- a) 10 e 80
- b) 10 e 90
- c) 20 e 60
- d) 20 e 80
- e) 25 e 50

(ENEM 2022) Uma máquina em operação tem sua temperatura T monitorada por meio de um registro gráfico, ao longo do tempo t . Essa máquina possui um pistão cuja velocidade V varia com a temperatura T da máquina, de acordo com a expressão $V = T^2 - 4$. Após a máquina funcionar durante o intervalo de tempo de 10 horas, o seu operador analisa o registro gráfico, apresentado na figura, para avaliar a necessidade de eventuais ajustes, sabendo que a máquina apresenta falhas de funcionamento quando a velocidade do pistão se anula.

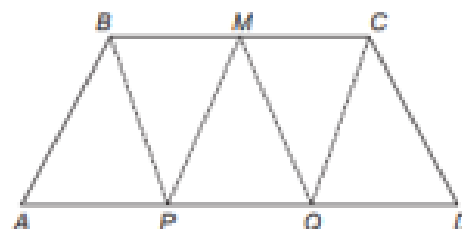


Quantas vezes a velocidade do pistão se anulou durante as 10 horas de funcionamento?

- a) 1
- b) 2

- c) 3
- d) 4
- e) 5

(ENEM 2019 – Reaplicação/PPL) No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, M é o ponto médio do segmento BC , e os pontos P e Q são obtidos dividindo o segmento AD em três partes iguais.

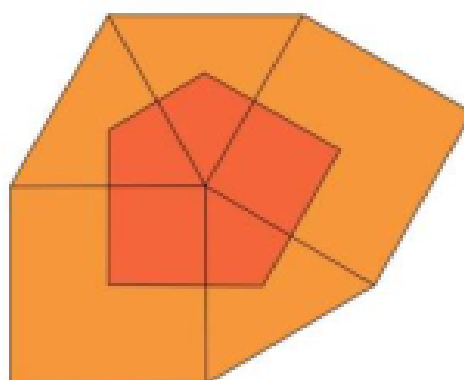


Pelos pontos B , M , C , P e Q são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura.

A razão entre BC e AD que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é:

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{5}{6}$

(FUVEST 2021 – 1ª fase):



(FUVEST 2021 – 1ª fase) Três triângulos equiláteros e dois quadrados formam uma figura plana, como ilustrado. Seus centros são os vértices de um pentágono irregular, que está destacado na figura. Se T a área de cada um dos triângulos e Q a área de cada um dos quadrados, a área desse pentágono é:

- a) $T + Q$.
- b) $\frac{1}{2} T + \frac{1}{2} Q$.
- c) $T + \frac{1}{2} Q$.
- d) $\frac{1}{3} T + \frac{1}{4} Q$.
- e) $\frac{1}{3} T + \frac{1}{2} Q$.

(FUVEST 2020 – 1ª fase) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

- a) 26
- b) 28
- c) 42
- d) 62
- e) 68

(FUVEST 2021 – 1ª fase) Um comerciante adotou como forma de pagamento uma máquina de cartões, cuja operadora cobra uma taxa de 6% em cada venda. Para continuar recebendo exatamente o mesmo valor por cada produto, ele resolveu aplicar um reajuste nos preços de todos os produtos da loja. Se P era o valor de uma mercadoria antes da adoção da máquina, o novo valor V deve ser calculado por:

- a) $V = P + 0,06$
- b) $V = 0,94 \cdot 1,06 \cdot P$
- c) $V = 1,06 \cdot P$
- d) $V = \frac{P}{0,94}$
- e) $V = 0,94 \cdot P$

(FUVEST 2016 – 1ª fase) A igualdade correta para quaisquer a e b , números reais maiores do que zero, é:

a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

b) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{b}$

c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$

d) $\frac{1}{a + b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

e) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$