UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSUÉ VELOZO FERREIRA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE CAUSALIDADE E O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE GEROCH

Recife

2015

JOSUÉ VELOZO FERREIRA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE CAUSALIDADE E O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE GEROCH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitório

Recife

2015

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

F383i Ferreira, Josué Velozo
Uma introdução à teoria de causalidade e o teorema de decomposição de Geroch / Josué Velozo Ferreira. – 2015.
65 f.: il., fig.

Orientador: Henrique de Barros Correia Vitório.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2015.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Espaços vetoriais. I. Vitório, Henrique de Barros Correia (orientador). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-83

JOSUÉ VELOZO FERREIRA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE CAUSALIDADE E O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE GEROCH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 28/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitório (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, principalmente aos meus pais Moacir e Eliete, minha irmã Priscila, Vovó Nelci, Tia Elioneide e Vovô Velozo(*in memoriam*). Obrigado por todos os ensinamentos, pelo carinho e afeto, e principalmente pelo apoio nas horas difíceis.

Agradeço ao Professor Henrique Vitório, pela paciência e disposição durante todo o curso, me conduzindo a conclusão deste trabalho.

Ao amigo Nicolás Zúlmezu pela ajuda no Latex. Aos amigos Marcelo Pirôpo, Claudia, Rubya, Jaime, Bob, Tanaka, Gilson, Edgar, Lorena, Tiago Nash, Rafael, Willikat e Julio Cesar pelos risos, bobagens e conversas pelo DMAT.

Aos Professores Airton Castro, Henrique Araújo e Tony Sousa pela contribuição na realização deste objetivo.

Aos amigos do Fé e Alegria, pelo aprendizado e amizade sincera.

Aos amigos e amigas, Sidney Farias, Cláudia , Aninha, Serginei, Karine e Júlio César.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta dissertação tem como propósito fazer uma introdução à Teoria de Causalidade em geometria Lorentziana, culminando com as demonstrações de um teorema de S. Hawking sobre a existência de funções tempo em espaços-tempo estavelmente causais e do Teorema de decomposição de Geroch em espaços-tempo globalmente hiperbólicos. Ao longo do trabalho, introduziremos conceitos de espaços vetoriais Lorentzianos, como vetores tipo-tempo, causais, tipo-luz e cones tipo-tempo, resultando em curvas tipo-tempo, causais, tipo-luz e funções tempos em variedades Lorentzianas. Exploraremos como a existência de uma métrica Riemanniana nos permite construir uma métrica Lorentziana. Além disso, revisaremos conceitos e definições alternativas de cada nível da escada causal, com ênfase em hipóteses mínimas. Examinaremos também propriedades relevantes da escada causal, como conjuntos acronais e hipersuperfícies de Cauchy, mostrando as relações entre cada nível. O objetivo é fornecer uma compreensão abrangente e aprofundada desses temas complexos, contribuindo para o avanço do conhecimento na área de geometria Lorentziana.

Palavras-chaves: espaços vetoriais Lorentzianos; variedades Lorentzianas; causalidade; escada causal; hipersuperfície de Cauchy; função do tempo.

ABSTRACT

This dissertation aims to provide an introduction to Causality Theory in Lorentzian geometry, culminating in the demonstrations of a theorem by S. Hawking regarding the existence of time functions in stably causal spacetimes, and the Geroch Decomposition Theorem in globally hyperbolic spacetimes. Throughout the work, we will introduce concepts of Lorentzian vector spaces, such as timelike, causal, lightlike vectors, and timelike cones, resulting in timelike, causal, lightlike curves and time functions in Lorentzian manifolds. We will explore how the existence of a Riemannian metric allows us to construct a Lorentzian metric. Additionally, we will review alternative concepts and definitions of each level of the causal ladder, with an emphasis on minimal assumptions. We will also examine relevant properties of the causal ladder, such as achronal sets and Cauchy hypersurfaces, demonstrating the relationships between each level. The objective is to provide a comprehensive and in-depth understanding of these complex topics, contributing to the advancement of knowledge in the field of Lorentzian geometry.

Keywords:Lorentzian vector spaces; Lorentzian manifolds; causality; causal ladder; Cauchy hypersurface; time function.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 ESPAÇOS VETORIAIS LORENTZIANOS 11

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS COM PRODUTO ESCALAR 11

2.1.1 Formas bilineares simétricas 11

2.1.2 Produto escalar 14

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS LORENTZIANOS 16

2.2.1 Características Lorentzianas causais 16

2.2.2 Cones tipo-tempo 17

3 VARIEDADES LORENTZIANAS 20

3.1 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANNAS 20

3.1.1 Lema de Gauss 21

3.1.2 Vizinhanças convexas 22

3.2 VARIEDADES LORENTZIANAS 22

3.2.1 Orientação temporal 22

3.2.2 Curvas causais e tipo-tempo, e funções tempo 23

3.2.3 Existência de métricas Lorentzianas 24

3.2.4 Geometria Lorentziana local 26

3.2.5 Lema de deformação 27

4 CAUSALIDADE EM VARIEDADES LORENTZIANAS 30

4.1 RELAÇÕES DE CAUSALIDADE 30

4.1.1 Causalidade local *versus* global 32

4.2 CONDIÇÕES DE CAUSALIDADE 34

4.2.1 Condições globais de causalidade 34

4.2.1.1 Espaços-tempo cronológicos e causais 35

4.2.1.2 Espaços-tempo distinguidores 36

4.2.1.3 Espaços-tempo fortemente causais 38

4.2.1.4 Espaços-tempo estavelmente causais 42

4.2.1.5 Espaço-tempos causalmente contínuos 46

4.2.1.6 Espaço-tempos causalmente simples 48

4.2.1.7 Espaços-tempo globalmente hiperbólico 49

4.2.2 Conjuntos acronais e hipersuperfícies de Cauchy 50
4.2.2.1 Conjuntos acronais 50
4.2.2.2 Hipersuperfícies de Cauchy 52
5 FUNÇÃO TEMPORAL E O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO TOPOLÓGICA DE GEROCH 54
5.1 FUNÇÕES VOLUMES 54
5.1.1 Medidas admissíveis 54
5.1.2 Funções volumes e funções do tempo generalizadas 55
5.1.3 Continuidade das funções volumes 57
5.2 FUNÇÕES DO TEMPO E CAUSALIDADE ESTÁVEL 59
5.3 TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO TOPOLÓGICA DE GEROCH 61
REFERÊNCIAS 65

1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Geral parte do postulado que espaço, tempo e gravidade são aspectos de uma única entidade, o *espaço-tempo*. O espaço-tempo é modelados por uma variedade Lorentziana de dimensão n. E desta fecunda interação entre a motivação relativista e desenvolvimentos geométricos surge a *Teoria da Causalidade*. Segundo O'Neil (O'NEILL, 1983), "Por causalidade nos referimos a questão geral que é apontar em uma variedade Lorentziana quais os eventos podem ser unidos por uma curva causal, isto é, quais eventos podem influenciar (ou ser influenciados por) um determinado evento".

A causalidade é uma ferramenta específica da geometria lorentziana e a maior parte dos seus objetivos estão compreendidos na chamada *Escada Causal*, que é uma escada de espaços-tempo que partilham condições causais e há resultados específicos para cada nível. Esta escada foi criada no final da década de 70 por nomes tais como Geroch, Hawking, Penrose, Sachs, Seifert, Wu e outros.

Em 1969, Hawking em (HAWKING, 1969) sugere a existência de uma função cósmica do tempo. A função sugerida por Hawking mede o volume do conjunto passado cronológico de cada ponto do espaço-tempo. Já em 1970, Robert Geroch, em seu famoso artigo (GEROCH, 1970), utiliza-se de uma construção parecida para obter uma função do tempo. Neste artigo, afirmou que qualquer espaço-tempo M globalmente hiperbólico admite uma função do tempo de Cauchy, e portanto uma hipersuperfícies de Cauchy, além de que M é *homeomorfo* a $R \times S_0$, onde S_0 é uma hipersuperfície de Cauchy. Geroch encontrou a solução a nível topológico, e a possibilidade de suavização da solução foi buscada.

Em 1973, Hawking e Ellis em (HAWKING; ELLIS, 1973), modificando um pouco com a demonstração de Geroch, mostraram que causalidade estável implica em existência de uma função do tempo. Em 1988, Dieckman em (DIECKMANN, 1988), mostrou a existência de uma medida finita apropriada no espaço-tempo para realização das medidas dos volumes dos conjuntos passado e futuro cronológico. Mas, questões relativas a suavização ainda seguiriam abertas, até o ano de 2004, quando Bernal e Sánchez em (BERNAL; SÁNCHEZ, 2004) conseguiram uma prova definitiva.

Nesta dissertação estudaremos os níveis da Escada Causal, desde *espaços-tempo cronológico* a *espaços-tempo globalmente hiperbólico*, bem como veremos duas importantes questões da Teoria da Causalidade, são elas (1) *existência de uma função temporal em espaços-tempo*

estavelmente causais e (2) *decomposição topológica de Geroch*.

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos. No capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados básicos de álgebra linear Lorentziana. Posteriormente, no capítulo 2, fazemos um paralelo entre variedades semi-Riemannianas e Riemannianas, e por fim, vemos conceitos e resultados próprios de variedades Lorentziana. No Capítulo 3, tomamos como referência principal o artigo (MINGUZZI; SÁNCHEZ, 2008),apresentamos as relações de causalidade e estudamos alguns aspectos topológicos, em seguida, veremos as condições de causalidade globais e construiremos os oito níveis da Escada Causal desde *cronológico* a *globalmente hiperbólico*, e veremos alguns resultados de cada nível. Ainda no capítulo 3, veremos as definições bem como algumas propriedades de *conjuntos acronais* e *hipersuperfície de Cauchy*

Já no capítulo 4, cuja principal referencia foi (SÁNCHEZ, 2004), faremos a construção das funções volumes passado e futuro, e estabeleceremos as condições que um espaço-tempo deve satisfazer para que estas funções sejam contínuas. Em seguida, veremos a aplicação delas nos teoremas

Teorema 5.9. Qualquer espaço-tempo (M, g) estavelmente causal admite uma função do tempo.

Teorema 5.16. Todo espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g) é homeomorfo a um produto $R \times S$, onde S é uma hipersuperfície de Cauchy de (M, g).

2 ESPAÇOS VETORIAIS LORENTZIANOS

Neste capítulo veremos alguns resultados e definições que formam parte do alicerce sobre o qual realizaremos nosso estudo. Além de fixar a notação que será utilizada no restante do texto. Fazemos também um breve estudo sobre espaços vetoriais Lorentzianos. Todos os resultados deste capítulo podem ser encontrados em (O'NEILL, 1983) e (VICTORIA; CAJA, 2010)

Ao longo deste capítulo,$V = V(R)$ será um espaço vetorial real de dimensão finita n.

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS COM PRODUTO ESCALAR

2.1.1 Formas bilineares simétricas

Definição 2.1. *Uma forma bilinear simétrica sobre V é uma função $\beta : V \times V \to R$ tal que, dados u, v, $w \in V$ e λ e $\mu \in R$, temos que:*

1. $\beta(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\beta(u, w) + \mu\beta(v, w)$;
2. $\beta(u, \lambda v + \mu w) = \lambda\beta(u, v) + \mu\beta(u, w)$;
3. $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.

Dado um subespaço vetorial $W \subset V$, A restrição $\beta|_{W\text{x}W}$, que denotaremos por $\beta|_W$, também é uma forma bilinear simétrica sobre W.

Definição 2.2. *Seja $v \in V$ um vetor qualquer não-nulo. Então v é dito*

(1) Tipo-espaço, se $\beta(v, v) > 0$;

(2) Tipo-luz, se $\beta(v, v) = 0$;

(3) Tipo-tempo, se $\beta(v, v) < 0$;

(4) Causal, se $\beta(v, v) \leq 0$.

Teorema 2.3. *Seja β uma forma bilinear simétrica sobre V. Então, existe uma base ordenada $B = \{e_1, ..., e_n\}$ de V tal que, dado $v \in V$, com coordenadas $(v_1, ..., v_n)$ com respeito a B, então*

$$\beta(v, v) = v_1^2 + ... + v_\mu^2 - v_{\mu+1}^2 - ... - v_{\mu+\nu}^2,$$

com $\mu + \nu \leq n$. Além disso, os números ν e μ são independente da escolha da base B que possui a propriedade anterior, e são chamados de ***índice*** *e* ***co-índice*** *da forma bilinear β, respectivamente.*

Demonstração. Usaremos a notação $v = (v_1, ..., v_n)_B$ para indicar que $(v_1, ..., v_n)$ são as coordenadas de v com respeito a B. Inicialmente, vamos demonstrar que existe uma base B' de V tal que, dado $v = (y_1, ..., y_n)_{B'}$, temos que

$$\beta(v, v) = \sum_{i=1}^{\mu+\nu} d_i y_i^2.$$

Demonstraremos por indução sobre a dimensão de V que existe tal base.

Para $n = 1$, seja $v \in V$, com $v \neq 0$, então dado $w \in V$ podemos escrever $w = av$, com $a \in R$, então $\beta(w, w) = \beta(av, av) = a^2\beta(v, v) = d_1 a^2$, sendo $d_1 = \beta(v, v)$.

Suponhamos verdade, para $n - 1$.

Agora, vejamos se é verdade para n. Para isto, fixemos uma base ordenada qualquer $U = \{f_1, \ldots, f_n\}$ de V. Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)_U$ de V, podemos escrever

$$\beta(v, v) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} v_j^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} v_i v_j, \text{ onde } a_{ij} = \beta(f_i, f_j).$$

Se $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$, então $\beta(v, v) = 0$; isto é, $d_1 = \cdots = d_n = 0$. Podemos considerar que $a_{11} \neq 0$. De fato, suponha que $a_{jj} = 0$, $\forall j$ e existem i, j tais que $a_{ij} \neq 0$, com $i \neq j$. Sem perda de generalidade, considere $a_{12} \neq 0$. Além disto, por ser β simétrica, temos

$$a_{12} v_1 v_2 + a_{21} v_2 v_{1i} = 2 a_{12} v_1 v_2.$$

Realizando uma mudança de variável, $v_1 = y_1 + y_2$ e $v_2 = y_1 - y_2$, ficamos com

$$2 a_{12} v_1 v_2 = 2 a_{12} (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2 a_{12} y_1^2 - 2 a_{12} y_2^2.$$

Como o termo que multiplica y_1^2 é diferente de zero. Podemos considerar que a_{11} é diferente de zero. Então,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj} v_j^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} v_i v_j = [a_{11} v_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} v_1 v_j] + \sum_{1<i,j\leq n} a_{ij} v_i v_j.$$

Assim, temos

$$a_{11} v_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} v_1 v_j = a_{11}[v_1^2 + 2 v_1 \sum_{j=2}^{n} \tfrac{a_{1j}}{a_{11}} v_j] = a_{11}[(v_1 + \sum_{j=2}^{n} \tfrac{a1j}{a_{11}} v_j)^2 - \sum_{j=2}^{n} (\tfrac{a_{1j}}{a_{11}} v_j^2)]$$

Façamos então, $y_1 = v_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} v_j$ e , $y_j = v_j$, $j \geq 2$.

Nestas coordenadas,

$$\beta(v, v) = a_{11} y_1^2 + [\sum_{j=2}^{n} (a_{jj} - \tfrac{a_{1j}}{a_{jj}}) y_j^2 + 2 \sum_{1<i<j} a_{ij} y_i y_j].$$

Isto é, $\beta(v,v) = a_{11}y_1^2 + \beta_1((y_2,\ldots,y_n),(y_2,\ldots,y_n))$, onde β_1 é uma forma bilinear simétrica em um subespaço de dimensão $n-1$ que, por hipótese, possui uma base $\{\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ tal que $\beta_1((y_2,\ldots,y_n),(y_2,\ldots,y_n)) = \sum_{j=2}^{n} d_j y_j^2$.
Adicionando o vetor $\overline{e}_1$, temos a base $B' = \{\overline{e}_1,...,\overline{e}_n\}$ buscada.

Agora, reordenando os termos, podemos supor que

$$d_j > 0 \quad \text{, se } 1 \leq j \leq \mu;$$

$$d_j < 0 \quad \text{, se } \mu+1 \leq j \leq \mu+\nu;$$

$$d_j = 0 \quad \text{, se } \mu+\nu < j.$$

Defina

$$x_j = \begin{cases} \sqrt{d_j}y_j & \text{, se } 1 \leq j \leq \mu; \\ \sqrt{-d_j}y_j & \text{, se } \mu+1 \leq j \leq \mu+\nu; \\ y_j & \text{, se } \mu+\nu < j; \end{cases}$$

E agora fazendo

$$e_j = \tfrac{1}{\sqrt{d_j}}\overline{e}_j \quad \text{, se } 1 \leq j \leq \mu;$$

$$e_j = \tfrac{1}{\sqrt{-d_j}}\overline{e}_j \quad \text{, se } \mu+1 \leq j \leq \mu+\nu;$$

$$e_j = \overline{e}_j \quad \text{, se } \mu+\nu < j.$$

temos uma nova base ordenada $B = \{e_1,...,e_n\}$.
Logo, nesta base B, temos que $\beta(v,v) = v_1^2 + ... + v_\mu^2 - v_{\mu+1}^2 - ... - v_{\mu+\nu}^2$
Agora vamos mostrar a invariância dos números μ e ν.
Sejam $\{e_1,\ldots,e_n\}$ e $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ bases ordenadas de V com a seguinte propriedade:

$$\beta(e_i,e_j) = 0 \text{ , se } \quad i \neq j;$$

$$\beta(e_i,e_i) = -1 \text{ , se } \quad i = \{1,\ldots,\nu\};$$

$$\beta(e_i,e_i) = +1 \text{ , se } \quad i = \{\nu+1,\ldots,n = \nu+\mu\}.$$

e

$$\beta(e'_i,e'_j) = 0 \text{ , se } \quad i \neq j;$$

$$\beta(e'_i,e'_i) = -1 \text{ , se } \quad i = \{1,\ldots,\nu'\};$$

$$\beta(e'_i,e'_i) = +1 \text{ , se } \quad i = \{\nu'+1,\ldots,n = \nu'+\mu'\}.$$

Afirmação 2.4. *O conjunto* $\{e_1,\ldots,e_\nu,e'_{\nu'+1},\ldots,e'_n\}$ *é linearmente independente.*

Demonstração. Suponha $x_1e_1 + \cdots + x_\nu e_\nu + y_{\nu'+1}e'_{\nu'+1} + y_n e'_n = 0_V$;
Isto, é $x_1e_1 + \cdots + x_\nu e_\nu = -(y_{\nu'+1}e'_{\nu'+1} + y_n e'_n)$
fazendo $\beta(x_1e_1 + \cdots + x_\nu e_\nu, x_1e_1 + \cdots + x_\nu e_\nu) = \beta(y_{\nu'+1}e'_{\nu'+1} + y_n e'_n, y_{\nu'+1}e'_{\nu'+1} + y_n e'_n)$
$x_1^2 + \cdots + x_\nu^2 = -y_{\nu'+1}^2 - \cdots - y_n^2$
portanto, $x_1 = \cdots = x_\nu = y_{\nu'+1} = \cdots = y_n = 0$ e o conjunto dado é linearmente independente. □

Demonstremos que $\nu = \nu'$. Do afirmação anterior, temos que $\{u_1, \ldots, u_\nu, u'_{\nu'+1}, \ldots, u'_n\}$ é linearmente independente, com n vetores, portanto é uma base de V, e assim, $\nu + \mu' \leq n$. E disto, $\nu + (n - \nu') \leq n \Rightarrow \nu \leq \nu'$. De forma análoga, temos também que $\nu' \leq \nu$. E temos que, $\nu = \nu'$ e $\mu' = \mu$. □

Definição 2.5. *Uma forma bilinear simétrica β em V é dita*

(1) Positiva definida (resp. negativa definida), se $\beta(v, v) > 0\,(< 0), \forall v \in V$, com $v \neq 0$;

(2) Semipositiva definida (resp. seminegativa definida), se $\beta(v, v) \geq 0\,(\leq 0), \forall v \in V$;

(3) Indefinida, se existem $u, v \in V$ tais que, $\beta(u, u) > 0$ e $\beta(v, v) < 0$;

(4) Não-degenerada, se $\beta(v, w) = 0, \forall w \in V$, implica que $v = 0$.

Não é difícil mostrar que uma forma bilinear simétrica β é não degenerada se, e somente se, $\mu + \nu = n$, onde μ e ν são os co-índice e índice de β, respectivamente.

Definição 2.6. *Seja $W \subset V$ um subespaço vetorial. Definimos o complemento β-ortogonal de W como $W^{\perp_\beta} = \{u \in V : \beta(u, v) = 0, \forall v \in W\}$. Por simplicidade, denotaremos $W^{\perp_\beta}$ por $W^\perp$, sempre que não houver a possibilidade de confusão.*

Definição 2.7. *o núcleo de uma forma bilinear simétrica β é definido por*

$$\mathcal{N}(\beta) = \{v \in V : \beta(u, v) = 0, \forall u \in V\}.$$

Isto é, $\mathcal{N}(\beta) = V^{\perp_\beta}$. Note que β é não-degenerada se, e somente se, $\mathcal{N}(\beta)$ é trivial.

2.1.2 Produto escalar

Definição 2.8. *Um produto escalar $\beta = \langle\ \rangle$ em V é uma forma bilinear simétrica não-degenerada. Um espaço vetorial V, de dimensão n, munido de um produto escalar é dito*

(i) Euclideano se o índice é 0,

(ii) Lorentziano se o índice é 1.

Referiremos ao índice do produto escalar β sobre V, simplesmente por índice de V, e denotaremos por $indV$.

Definição 2.9. *Seja (V, β) um espaço vetorial com produto escalar. Um subespaço $W \subset V$ é dito não-degenerado se $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Note que isto é equivalente a $\mathcal{N}(\beta|_W) = \{0\}$.*

Proposição 2.10. *Se $W \subset V$, então*

(1) $dimW + dimW^{\perp} = dimV$,

(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

(3) $V = W \oplus W^{\perp} \iff W$ é não-degenerado($\iff W^{\perp}$ é não-degenerado)

Demonstração. (1) Seja $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V tal que $\{e_1, \ldots, e_\rho\}$ é uma base de W. Se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, então:

$$v \in W^{\perp} \iff \beta(v, e_i) = 0, \ \forall \in \{1, \ldots, \rho\} \iff \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_j = 0 \quad \forall \in \{1, \ldots, \rho\},$$

onde $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. Como β é não-degenerada, o subespaço $W^{\perp}$ vem dado como solução do sistema linear de ρ equações independentes com n incógnitas, logo $dimW^{\perp} = n - \rho$.

(2) A inclusão $(W^{\perp})^{\perp} \subset W$ é trivial, e por (1), $dim(W^{\perp})^{\perp} = dimW$. Tem-se, portanto, a igualdade.

(3) É consequência direta de (1).

□

Proposição 2.11. *Seja $W \subset V$ subespaço vetorial não-degenerado. Então, $ind\, V = ind\, W + ind\, W^{\perp}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.10, temos que $V = W \oplus W^{\perp}$. Sejam B e C bases ordenadas de W e $W^{\perp}$, respectivamente, tais que, se $x = (x_1, ..., x_k)_B \in W$ e $y = (y_1, ..., y_{n-k})_C \in W^{\perp}$, então

$$\beta(x, x) = x_1^2 + ... + x_{\mu_1}^2 - x_{\mu_1+1}^2 - ... - x_k^2 \tag{2.1}$$

$$\beta(y, y) = y_1^2 + ... + y_{\mu_2}^2 - y_{\mu_2+1}^2 - ... - y_{n-k}^2. \tag{2.2}$$

Com respeito a base ordenada de V dada por $U = B \cup C$, se $z = x + y \in W \oplus W^{\perp}$, então $z = (x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_{n-k})_U$. Logo, como $\beta(x, y) = 0$ se $x \in W$ e $y \in W^{\perp}$, segue de (2.1) e (2.2) que

$$\beta(z, z) = x_1^2 + ... + x_{\mu_1}^2 - x_{\mu_1+1}^2 - ... - x_k^2 + y_1^2 + ... + y_{\mu_2}^2 - y_{\mu_2+1}^2 - ... - y_{n-k}^2.$$

Portanto, $ind\ V = (k - \mu_1) + (n - k - \mu_2) = ind\ W + ind\ W^{\perp}$. □

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS LORENTZIANOS

Ao longo desta seção, consideremos fixado um espaço vetorial Lorentziano $(V, g = \langle\ \rangle)$. Dado $v \in V$, a sua *norma* é definida por $|v| = \sqrt{|g(v, v)|}$.

2.2.1 Características Lorentzianas causais

Definição 2.12. *Seja W um subespaço vetorial de V. As afirmações sobre W a seguir são mutualmente excludentes:*

(1) $g|_W$ é positiva definida. Neste caso, W é dito tipo-espaço;

(2) $g|_W$ é não-degenerada com índice 1. Neste caso, W é dito tipo-tempo;

(3) $g|_W$ é degenerada. Neste caso, W é dito tipo-luz.

Lema 2.13. *Se $z \in V$ é um vetor tipo-tempo, então o subespaço $\{z\}^{\perp}$ é tipo-espaço e $V = Span[z] \oplus \{z\}^{\perp}$.*

Demonstração. O subespaço $Span[z]$ é não-degenerado com índice 1. Desta forma, pela Proposição 2.10, o subespaço $\{z\}^{\perp}$ é não-degenerado com $V = Span[z] \oplus \{z\}^{\perp}$. Disto, $ind\, V = ind\, Span[z] + ind\, \{z\}^{\perp}$, logo $ind\{z\}^{\perp} = 0$. Portanto, $\{z\}^{\perp}$ é tipo-espaço. □

Lema 2.14. *Seja W um subespaço vetorial de V, com $dim \geq 2$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) W é tipo-tempo;

(2) W contém dois vetores linearmente independentes tipo-luz;

(3) W contém um vetor tipo-tempo.

Demonstração. (1)⇒(2) Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal ordenada de W com $g(e_1, e_1) = -1$. Os vetores $u = e_1 + e_2$ e $v = e_1 - e_2$ são vetores procurado.
(2)⇒(3) Sabemos que se u, v são vetores tipo-luz, então $g(u, v) \neq 0$. E portanto, $u+v$ ou $u-v$ é tipo-tempo.
(3)⇒(1) Se z é um vetor tipo-tempo em W, então $W^\perp \subset \{z\}^\perp$ e este último é tipo-espaço. Disto, $W^\perp$ é tipo-espaço. Mas, então $W = (W^\perp)^\perp$ é tipo-tempo. □

Definição 2.15. *O **cone de luz** de V é a coleção dos vetores tipo-luz de V:*

$$\Lambda \ = \ \{v \in V \backslash \{0\} \ : \ g(v, v) = 0\}$$

Lema 2.16. *Para um subespaço W de V, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) W é tipo-luz;

(2) W contém um vetor tipo-luz, mas não um vetor tipo-tempo.

(3) $W \cap \Lambda = L\backslash\{0\}$, onde L é um subespaço unidimensional.

Demonstração. (1)⇒(2) Por W degenerado, contém um vetor tipo-luz. Pelo lema anterior, W não pode contém vetores tipo-luz.

(2)⇒(3) W contém um vetor tipo-luz, $W \cap \Lambda \neq \emptyset$. Mas, pelo lema anterior, a existência de dois vetores tipo-luz linearmente independentes deveria implicar a existência de um vetor tipo-tempo, e disto W seria tipo-tempo.

(3)⇒(1) W não pode ser tipo-espaço, e novamente pelo lema precedente não pode ser tipo-tempo. Disto, W é tipo-luz. □

2.2.2 Cones tipo-tempo

Definição 2.17. *Seja $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os vetores tipo-tempo de V. Para $u \in \mathcal{T}$, $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v\rangle < 0\}$ é dito o cone tipo-tempo de V que contém u. O cone tipo-tempo oposto é $\mathcal{C}(-u) = -\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v\rangle > 0\}$.*

Lema 2.18. *Dois vetores tipo-tempo u e v estão em um mesmo cone tipo-tempo se, e somente se, $\langle u, v\rangle < 0$.*

Demonstração. Vamos mostrar que se $v \in \mathcal{C}(u)$ e w é tipo-tempo, então $w \in \mathcal{C}(u)$ se, e somente se, $\langle w, v\rangle < 0$.
Podemos considerar u unitário, já que $\mathcal{C}(u/|u|) = \mathcal{C}(u)$. Escrevendo $v = au + \vec{v}, w = bu + \vec{w}$, onde $\vec{v}, \vec{w} \in \{u\}^{\perp}$. Temos que $|a| > |\vec{v}|$ e $|b| > |\vec{w}|$. Como $\{u\}^{\perp}$ é tipo-espaço, vale a desigualdade de Cauchy-Swarz:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle| \leq |\vec{v}|.|\vec{w}| < |ab|.$$

Sendo $v \in \mathcal{C}(u)$, então $a > 0$. Temos que $sgn\langle v, w\rangle = sgn(-ab) = -sgn(b)$, que nos fornecer o resultado necessário. □

Como consequência do Lema acima, temos que:

(a) Dados $u, v \in \mathcal{T}$, então $u \in \mathcal{C}(v) \iff v \in \mathcal{C}(u) \iff \mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$

(b) Só existem dois cones tipo-tempo: $\mathcal{T} = \mathcal{C}(u) \cup \mathcal{C}(-u)$, para todo $u \in \mathcal{T}$.

(c) Os cones tipo-tempo são convexos.

Proposição 2.19 (Desigualdade Inversa de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja u e v vetores tipo-tempo de um espaço vetorial lorentziano. Então*

(1) $|\langle u, v\rangle| \geq |u||v|$, verificando a igualdade se, e somente se, u e v são colineares.

(2) Se u e v estão no mesmo cone tipo-tempo de V existe um único número $\varphi \geq 0$, chamado de ângulo hiperbólico entre u e v, tal que $\langle u, v\rangle = -|u||v|cosh\varphi$.

Demonstração. (1) Escrevendo $v = au + \vec{v}$, com $\vec{v} \in u^{\perp}$. Como v é tipo-tempo,

$$\langle v, v\rangle = a^2\langle u, u\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle < 0.$$

Então,

$$\langle u, v\rangle^2 = a^2\langle u, u\rangle^2 = (\langle v, v\rangle - \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle)\langle u, u\rangle \geq \langle v, v\rangle\langle u, u\rangle = |u|^2|v|^2,$$

como $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \leq 0$ e $\langle u, u\rangle < 0$. Evidentemente, a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 0$, que é equivalente a $\vec{v} = 0$, isto é, $v = au$.

(2) Se u e v estão no mesmo cone tipo-tempo, então $\langle v, w\rangle < 0$. Utilizando o item anterior, temos que

$$-\langle v, w\rangle/|v||w| \geq 1,$$

e o resultado segue das propriedades do cosseno hiperbólico.

□

Corolário 2.20. *Se u e v são vetores tipo-tempo em um mesmo cone tipo-tempo então $|u+v| \geq |u| + |v|$, onde a igualdade é verificada se, e somente se, u e v são colineares.*

Demonstração. Já que u e v pertencem ao mesmo cone tipo-tempo, então $u+v$ é tipo-tempo, e $\langle v, w\rangle < 0$, e assim, temos que

$$|u+v|^2 = -\langle u+v, u+v\rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = (|u| + |v|)^2$$

E a igualdade só ocorrer se, e somente se, $|u||v| = -\langle u, v\rangle$. Isto é, se u, v são colineares. □

3 VARIEDADES LORENTZIANAS

Ao longo deste capítulo, M denotará uma variedade diferenciável[1], conexa e com dimensão finita n. Assumiremos também, que M é Hausdorff e paracompacta. Denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ ao conjunto das funções reais diferenciáveis em M, e $X(M)$ ao conjunto dos campos de vetores tangentes diferenciáveis.

3.1 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANNAS

Definição 3.1. *Uma **métrica semi-Riemanniana** g em M é um campo tensorial diferenciável de tipo (2,0) tal que, para cada $p \in M$, a forma bilinear $g_p = \langle , \rangle_p$ simétrica, não-degenerada e com índice $\nu \in \{0, 1, ..., n\}$ independente de p.*

Observação 3.2. *Como M é conexa, o fato de g_p ser não-degenerada para todo p já garante que o índice de g_p independe de p. Isto segue do fato que as funções índice e co-índice são semi-contínuas inferiores, como pode ser verificado.*

O par (M, g) é chamado de **variedade semi-Riemanniana**. Se $\nu = 0$ dizemos que (M, g) é *Riemanniana*, e se $\nu \neq 0$ que é *indefinida*. Em particular, se $\nu = 1, n \leq 2, (M, g)$ é dita *Lorentziana*. Dado $p \in M$, lembremos da definição 2.2 que podemos classificar os vetores de T_pM segundo a sua **característica causal**. Isto é, se $v \in T_pM$, com $v \neq 0$, diremos que v é

- **tipo-espaço**, se $g_p(v, v) > 0$;
- **tipo-luz**, se $g_p(v, v) = 0$;
- **tipo-tempo**, se $g_p(v, v) < 0$;
- **causal**, se $g_p(v, v) \leq 0$.

Definição 3.3. *Uma curva regular $\gamma : I \to M$ é dita **tipo-tempo, tipo-luz, tipo-espaço,** ou **causal**, conforme seja $\gamma'(t)$, para todo t, **tipo-tempo, tipo-luz, tipo-espaço**, ou **causal**, respectivamente.*

O ponto de partida para o estudo da geometria das variedades semi-Riemanniana é o seguinte resultado fundamental, cuja demonstração é idêntica a do seu análogo Riemanniano (veja (O'NEILL, 1983)):

[1] No decorrer do trabalho, sempre que nos referirmos a diferenciável, estamos querendo dizer de classe $\mathcal{C}^\infty$

Teorema 3.4. *Em uma variedade semi-Riemanniana (M, g), existe uma única conexão linear ∇, dita conexão de Levi-Civita, que é simétrica e compatível com a métrica g, isto é, tal que*

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
- $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, *para todos* $X, Y, Z \in X(M)$.

Em particular, assim como na geometria Riemanniana, temos ainda as seguintes noções de derivadas a partir da conexão de Levi-Civita ∇:

- *Derivada Covariante* $\frac{DW}{dt}$ de um campo diferenciável $W(t)$ ao longo de uma curva diferenciável.
- *Paralelismo* de um campo diferenciável $W(t)$ ao longo de uma curva diferenciável, isto é, $\frac{DW}{dt}(t) \equiv 0$
- *Geodésicas*: curvas diferenciáveis γ com aceleração $\frac{D\gamma}{dt}$ nula. Em particular, toda geodésica possui uma característica causal bem definida.
- O *mapa exponencial*: dado $p \in M$,

  $$\exp_p : W \subseteq T_pM \to M$$

  é o mapa, definido numa vizinhança aberta estrelada da origem W, definido por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, onde $\gamma_v(t)$ é a geodésica maximal satisfazendo $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. A sua derivada na origem 0,

  $$(d\exp_p)_0 : T_0(T_pM) \cong\to T_pM,$$

  é o mapa identidade, de modo que $\exp_p$ é um difeomorfismo em torno da origem 0. Uma *vizinhança normal* $\mathcal{U}$ de p é qualquer imagem difeomorfa por $\exp_p$ de uma vizinhança estrelada da origem. Coordenadas em $\mathcal{U}$, induzidas por uma escolha de coordenadas em T_pM, são ditas normais.

Notação 3.5. *Se $\mathcal{U}$ é uma vizinhança normal de p, então, dado $q \in \mathcal{U}, q \neq p$, o único segmento de geodésica unindo p a q e contido em $\mathcal{U}$ será denotado por $\overrightarrow{pq} : [0, 1] \to \mathcal{U}$.*

3.1.1 Lema de Gauss

Em geometria Riemanniana, a propriedade de minimização local das geodésicas é consequência do *Lema de Gauss*:

Teorema 3.6. *dados $p \in M, v, w \in T_pM$, e sendo $q = \exp_p(v)$, então*

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$$

No caso semi-Riemanniano, vale o Lema de Gauss como enunciado acima, e sua demonstração é idêntica a do caso Riemanniano. Na Proposição 2.12, usaremos este resultado para provarmos uma propriedade de maximização local das geodésicas tipo-tempo em variedades Lorentzianas.

3.1.2 Vizinhanças convexas

Um aberto $\mathcal{C}$ de M é dito *convexo* se for uma vizinhança normal de cada um de seus pontos.

Teorema 3.7. *Todo ponto de M admite uma base de vizinhanças convexas. Além do mais, se $\mathcal{C}$ é um aberto convexo, o mapa*

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to TM, \quad (p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}'(0)$$

é diferenciável.

A existência de vizinhanças convexas em torno de cada ponto de M é uma propriedade de toda conexão linear, em particular da conexão de Levi-Civita de uma métrica semi-Riemanniana, e foi provada por Whitehead (WHITEHEAD, 1932).

3.2 VARIEDADES LORENTZIANAS

Nesta seção, iniciaremos o estudo das variedades Lorentzianas. Em 2.2.1 introduziremos a importante noção de orientabilidade temporal, e em 2.2.3 falaremos sobre o problema da existência de métricas Lorentzianas. Em 2.2.4 estudaremos um pouco a geometria local de tais variedades, estabelecendo, em particular, uma propriedade de maximização local das geodésicas tipo-tempo.

3.2.1 Orientação temporal

Seja (M, g) uma variedade Lorentziana. Como sabemos (veja seção 2.2.2), em cada espaço tangente (T_pM, g_p) há dois cones tipo-tempo.

Definição 3.8. *Uma **orientação temporal** em M é uma aplicação τ que a cada ponto $p \in M$ assina um cone temporal $\tau_p \subset T_pM$, que chamaremos cone tipo-tempo futuro, e que é suave no seguinte sentido: para todo $p \in M$, existe um entorno aberto U_p de p e um campo diferenciável X sobre U_p tal que*

$$X_q \in \tau_q, \qquad \forall \in U_p$$

Uma variedade Lorentziana que admite uma orientação temporal é chamada de **temporalmente orientável**. O seguinte resultado serve para caracterizar a orientabilidade temporal

Proposição 3.9. *Uma Variedade Lorentziana (M,g) é temporalmente orientável se, e somente se, admite um campo vetorial temporal diferenciável globalmente definido $X \in X(M)$.*

Demonstração. Se M admite um campo vetorial tipo-tempo diferenciável X, então $\tau(p) = C(X(p))$ (veja seção 2.2.2 do cap. 1) fornece uma orientação temporal. Suponha, por outro lado, que M é temporalmente orientável, e escolha uma orientação temporal τ qualquer. Assim, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U_p de p e um campo vetorial X_{U_p}, definido em U_p, tal que $X_{U_p}(q) \in \tau(q), \forall q \in U_p$. Tome $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_p\}_{p\in M}$. Assim, o suporte de cada função f_λ está contido em U_λ, onde $U_\lambda = U_p$, para algum p. Como $0 \leq f_\lambda \leq 1$ e $\sum_\lambda f_\lambda = 1$ e os cones temporais são convexos, o campo vetorial dado por

$$X(q) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(q) X_{U_\lambda}(q), \qquad \forall q \in M,$$

é diferenciável e tipo-tempo em todo ponto. □

3.2.2 Curvas causais e tipo-tempo, e funções tempo

Nesta seção introduziremos as classes de curvas de interesse para a Teoria de Causalidade, bem como as noções de funções tempo que serão essenciais para a demonstração do teorema de divisão de Geroch, no cap. 4.

Definição 3.10. *Uma curva tipo-tempo(respect. causal) em M é uma curva regular por partes $\gamma : I \subseteq R \to M$(isto é, γ é contínua e existe partição $t_1 < ... < t_k$ de I tal que $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ é regular) tal que:*

1. *Cada pedaço regular $\gamma|[t_{i-1}, t_i] : [t_{i-1}, t_i] \to M$ é tipo-tempo (respect. causal) segundo a Definição 3.3.*

2. *Em cada quebra, as derivadas laterais $\gamma'(t_i^-)$ e $\gamma'(t_i^+)$ pertencem ao mesmo cone causal. Como, por hipótese, $\gamma'(t_i^-)$ e $\gamma'(t_i^+)$ são ambos causais, por 2.18 esta condição equivale a $\langle \gamma'(t_i^-), \gamma'(t_i^+) \rangle < 0$.*

Além do mais, se (M, g) possui uma orientação temporal, dizemos que uma curva γ tipo-tempo (respect. causal) está orientada para o futuro (respect. para o passado) conforme os vetores $\gamma'(t)$ estejam no cone causal futuro (respect. cone causal passado).

Não é difícil ver que se (M, g) possui uma orientação temporal, então toda curva causal está necessariamente orientada para o futuro ou para o passado.

Definição 3.11. *Um **espaço-tempo** é uma variedade Lorentziana (M, g) munida de uma orientação temporal. Um ponto p de um espaço-tempo é dito um **evento**.*

Definição 3.12. *Seja (M, g) um espaço-tempo qualquer. Então, uma função $t : M \to R$ é dita*

1. ***função do tempo generalizada** se é estritamente crescente ao longo de qualquer curva causal orientada para o futuro.*

2. ***função do tempo** se é uma função do tempo generalizada contínua.*

3. ***função temporal** se é suave e seu gradiente é tipo-tempo orientado para o passado.*

Observe que uma função temporal é sempre uma função do tempo. De fato, dada qualquer curva causal orientada para o futuro γ, temos

$$\frac{d(t \circ \gamma(s))}{ds} = (dt)_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = \langle \nabla t, \dot{\gamma}(s) \rangle > 0,$$

já que ∇t e $\dot{\gamma}(s)$ estão em cones tipo-tempo distintos.

3.2.3 Existência de métricas Lorentzianas

Comecemos mostrando que a partir de uma métrica Riemanniana numa variedade M e de um campo de vetores $X \in X(M)$ sem zeros, podemos construir uma métrica Lorentziana em M.

Lema 3.13. *Suponha que $X \in X(M)$ seja um campo de vetores sem zero numa variedade Riemanniana (M, g_R) Então, $g_L = g_R - \frac{2}{g_R(X,X)} X^* \otimes X^*$ é uma métrica Lorentziana em M, onde X^* é a 1-forma em M dual métrica de X, isto é, $X^*(Y) := g_R(X, Y)$, para qualquer campo $Y \in X(M)$. Além disto, X é tipo-tempo com respeito a g_L, e portanto (M, g_L) é uma variedade Lorentziana temporalmente orientável.*

Demonstração. Fixe um ponto $p \in M$, e seja $\{u, e_2, ..., e_n\}$ uma base g_R-ortonormal em T_pM tal que $u = \frac{X(p)}{|X(p)|}$. Então, $g_L(e_i, e_j) = g_R(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, e $g_L(u, e_i) = g_R(u, e_i) = 0$, mas

$$g_L(u, u) = -1.$$

E o campo $U \in X(M)$ definido por $U(p) = \frac{X(p)}{|X(p)|}$ é um campo tipo-tempo, portanto, pelo Proposição 3.9 M é temporalmente orientável. □

Como toda variedade diferenciável (que já supomos paracompacta) admite uma métrica Riemanniana, segue do Lema acima que uma variedade diferenciável admitirá uma métrica Lorentziana temporalmente orientável caso admita um campo de vetores diferenciável, globalmente definido, e sem zeros. Na verdade, temos a seguinte caracterização

Teorema 3.14. *Seja M uma variedade diferenciável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) M admite uma métrica Lorentziana.

(2) M admite uma métrica Lorentziana temporalmente orientável.

(3) M admite um campo vetorial $X \in X(M)$ sem zeros.

(4) Ou M não é compacta, ou a sua característica de Euler $\chi(M)$ é zero.

Demonstração. (Ideia) De acordo, com o Lema 2.1, a existência de uma métrica Lorentziana temporalmente orientável é equivalente à existência de um campo $X \in X(M)$ sem zeros. Por outro lado, se M não é compacta, ou se $\chi(M) = 0$, um famoso resultado da topologia diferencial assegura que M admite um campo $X \in X(M)$ sem zeros, e reciprocamente. Para a implicação $(1) \Rightarrow (2)$, primeiro mostra-se que toda variedade Lorentziana (M, g) não temporalmente orientável admite um duplo recobrimento Lorentziano $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ tal que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ é temporalmente orientável [2]. Supondo M compacta, $\tilde{M}$ será também compacta e, pelo que já vimos, $\chi(\tilde{M}) = 0$. Logo, como π é recobrimento duplo, teremos $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = 0$ e portanto, M admitirá uma métrica Lorentziana temporalmente orientável. □

[2] esta construção é semelhante a do recobrimento duplo orientável de uma variedade não-orientável

3.2.4 Geometria Lorentziana local

Ao longo desta seção, consideremos fixada uma variedade Lorentziana (M, g).

Lema 3.15. *Seja $p \in M$. Suponha que $\beta : [0, b] \to T_pM$ é uma curva regular por partes, com $\beta(0) = 0$, tal que $\alpha := \exp \circ \beta : [0, b] \to M$ esteja definida e seja uma curva tipo-tempo. Então, $\beta((0, b])$ está contido em um único cone tipo-tempo de T_pM.*

Demonstração. Denotaremos por $P(t)$ ao campo de vetores *posição radial* ao longo de α, definido por

$$P(t) = \gamma_t'(0) \text{ ,onde } \gamma_t(s) = \exp_{\alpha(0)}((1 + s)\beta(t)), \forall t \in [0, L] \tag{3.1}$$

Consideremos primeiramente o pedaço suave $\beta|_{[0,t_1]}$. Fazendo uma expansão de Taylor à direita de 0, temos

$$\beta(h) = \beta(0) + \beta'(0)h + o(h^2) = \beta'(0)h + o(h^2)$$

Disto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta((0, \varepsilon]) \subset \mathcal{C}_p$ de T_pM, pois $\beta'(0)$ é tipo-tempo e $\mathcal{C}_p$ é aberto.
Seja, $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \in (0, L] : \beta((0, \varepsilon]) \subset \mathcal{C}_p\}$. Temos que $\varepsilon_0 > 0$, e portanto é suficiente verificar se $\beta(\varepsilon_0) \in \mathcal{C}_p$. Considere a função $f(t) = \langle \beta(t), \beta(t) \rangle_p$, $t \in [0, L]$. Sabemos que $f(t) < 0$ em $(0, \varepsilon_0)$, devemos provar que $f(\varepsilon_0) < 0$.
Derivando f e utilizando o Lema de Gauss (Teorema 3.6), em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$:

$$f'(t) = 2\langle (\beta(t), \beta'(t) \rangle_p = 2\langle (\alpha'(t), P(t) \rangle_{\alpha(t)}.$$

Agora, se $t < \varepsilon$ então $f'(t) < 0$. De fato, f varia suavemente em $[t_{i-1}, t_i]$ e não pode ser 0 (novamente, pelo lema de Gauss, $P(t)$ é tipo-tempo quando $t < \varepsilon_0$ e $\alpha'(t)$ é tipo-tempo por hipótese). $f'(t)$ deve ser negativo para $t > 0$ suficientemente pequeno, porque $\beta'(t)$ e $\beta(t)$ estão no mesmo cone tipo-tempo, e o sinal não pode mudar nas "rupturas", como o cone causal de $\alpha'(t_i^+)$ e $\alpha'(t_i^-)$ são iguais. □

Como consequência direta deste Lema, temos o seguinte

Corolário 3.16. *Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança normal de $p \in M$. Então, dado $q \in M \setminus \{p\}$, existe uma curva tipo-tempo unindo p a q e contida em $\mathcal{U}$ se, e somente se, a geodésica radial de p a q for tipo-tempo. Dito de outra forma: o conjunto dos pontos $q \in \mathcal{U}$ é igual a $\exp_p(U \cap (\tau_p \cup -\tau_p))$, onde $\tau_p, -\tau_p$ são os cones temporais de T_pM, e $U \subseteq T_pM$ é vizinhança estrelada da origem tal que $\exp_p|_U$ é difeomorfismo sobre $\mathcal{U}$.*

O comprimento de uma curva regular por partes $\gamma : [a, b] \to M$ é definido por

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t,$$

onde $a = t_0 < ... < t_k = b$ são tais que $\gamma|[t_{i-1}, t_i]$ é regular, e $|\gamma'(t)| = \sqrt{|\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle|}$.

Proposição 3.17. *Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança normal de p de M. Se existe uma curva tipo-tempo em $\mathcal{U}$ de p a q, então entre todas as curvas tipo-tempo unindo p a q e contidas em $\mathcal{U}$, o segmento de geodésica radial σ de p a q é (a menos de parametrização) a única que tem maior comprimento.*

Demonstração. Considere a curva $\alpha = \exp^{-1} \circ \gamma$ e o campo de vetores posição P em α (como definido na demonstração do Lema 2). Agora defina uma campo tipo-tempo unitário em α, $U(t) = \frac{P(t)}{r(t)}$, onde $r(t) = |P(t)|, t \in [0, L]$. Então,

$$\gamma'(t) = -\langle \gamma'(t), U(t) \rangle U(t) + N(t) \tag{3.2}$$

onde $N(t) \in T_{\gamma(t)}M$ é um campo tipo-espaço ortogonal a $U(t)$ e, então,

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{-\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} = \sqrt{\langle \gamma'(t), U(t) \rangle^2 - \langle N(t), N(t) \rangle} \leq |\langle \gamma'(t), U(t) \rangle|$$

e, pelo Lema de Gauss (Teorema 3.6),

$$r(t) = \sqrt{-\langle P(t), P(t) \rangle} = \sqrt{= \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_p},$$

e disto,

$$r'(t) = -\frac{1}{r(t)} \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle_p = -\frac{1}{r(t)} \langle P(t), \gamma(t) \rangle = -\langle U(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Pelo Lema 2, $\langle U(t), \gamma'(t) \rangle < 0$, e assim

$$L(\gamma) = \int_0^L |\gamma'(t)| \mathrm{d}t \leq L(\sigma).$$

Finalmente, $L(\gamma) = L(\sigma)$ se, e somente se, acontece a igualdade em 3.2, isto é, $N(t) = 0$ e portanto, γ é igual a σ à menos de reparametrização. □

3.2.5 Lema de deformação

Sejam (M, g) uma variedade Lorentziana, e $\gamma : [a, b] \to M$ uma curva regular por partes.

Definição 3.18. *Uma variação de γ é uma função contínua $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon)\mathrm{x}[a, b] \to M$ tal que*

1. $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ *para todo* $t \in [a, b]$.
2. *Existem* $a = t_0 < ... < t_k = b$ *tais que* $\Gamma|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\mathrm{x}[t_{i-1},t_i]}$ *é diferenciável, e cada curva parcial* $\Gamma_s(.) := \Gamma(s, .) : [a, b] \to M$ *é regular por partes.*

O campo variacional associado a variação Γ é o campo (contínuo e diferenciável por partes) ao longo de γ definido por $V(t) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\Gamma(s, t)$.

Dizemos que uma variação Γ de γ tem extremos fixos se, para todo s,

$$\Gamma(s, a) = \gamma(a) \text{ e } \Gamma(s, b) = \gamma(b).$$

O Lema a seguir será fundamental para o estudo da teoria de causalidade a ser desenvolvido no próximo capítulo.

Lema 3.19. *Sejam p a q dois pontos de M que podem ser unidos por uma curva causal γ. Então, se γ não for uma pré-geodésica (isto é, uma geodésica a menos de parametrização) tipo-luz, existe uma variação Γ de γ com extremos fixos tal que todas as curvas parciais Γ_s são curvas tipo-tempo.*

Demonstração. Primeiramente, observe que, é necessário apenas encontramos um variação Γ de γ associada a um campo de vetores V, satisfazendo que $\langle \frac{DV}{dt}(t), \gamma'(t)\rangle < 0$. De fato, pela compacidade do domínio de variação, existe $\delta > 0$ tal que $\langle \frac{DV}{dt}(s, t), \Gamma_t(s, t)\rangle < 0$, se $0 \leq s < \delta$. Então, toda curva parcial $\Gamma_s : [a, b] \to M$ com $s \in (0, \delta)$ é tipo-tempo, pois

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle \Gamma_t(s), \Gamma_t(s)\rangle = 2\langle \frac{DV}{dt}(s, t), \Gamma_t\rangle < 0.$$

Suponha que o domínio de γ seja o intervalo $[a, b]$. Assuma primeiro que $\gamma'(a)$ ou $\gamma'(b)$ é tipo-tempo. Analisaremos o caso $\gamma'(b)$ é tipo-tempo, já que o outro é análogo. Seja W o transporte paralelo de $\gamma'(b)$ ao longo de γ. Então, W e γ' estão no mesmo cone causal e W é tipo-tempo, logo $\langle W, \gamma\rangle < 0$. Por continuidade, existe um $\delta > 0$ tal que $\langle \gamma', \gamma'\rangle < -\delta$ em $[b - \delta, b]$. Seja f uma função diferenciável tal que $f(a) = f(b) = 0$ e $f' < 0$ em $[a, b - \delta]$. Tome $V = fW$. Então, $\langle \frac{DV}{dt}, \gamma'\rangle = f'\langle W, \gamma'\rangle$

Agora assuma que em cada bloco suave γ é tipo-tempo ou tipo-luz. Então, podemos considerar sem perdas de generalidade que γ é parametrizada afim em cada bloco suave. Como consequência, $\langle \gamma', \frac{D\gamma'}{dt}\rangle = 0$ (excetuando as quebras) e $\langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt}\rangle \geq 0$.

Considere primeiro o caso em que $\langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt}\rangle = 0$. Então, $\frac{D\gamma'}{dt}$ é proporcional a γ'.

Afirmação 3.20. *Seja $\gamma : I \subset R \to M$, se existe uma função $k : I \to R$ tal que $\frac{D\gamma'}{dt} = k(t)\gamma'(t)$, definimos a reparametrização*

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) \, , \tilde{\gamma} : J \subset R \to M, \tag{3.3}$$

onde $s : J \subset R \to I \, , s \to t(s)$ é qualquer função cujo a inversa $s(t)$ verifica $s'(t) = s'_0 e^{\int_{t_0}^{t} k}$, para algum $s_0 \in I$. Então γ é a uma pré-geodésica.

Demonstração. Por 3.2, temos $\tilde{\gamma}'(s) = \dot{t}(s)\gamma(t(s))$

$$\frac{D\tilde{\gamma}'}{ds} = \ddot{t}(s)\gamma'(t(s)) + t(s)^2 \frac{D\gamma'}{dt} = (\ddot{t}(s) + t(s)^2 k(t))\gamma'(t)$$

Portanto, $\tilde{\gamma}$ só será uma geodésica se, e somente se, a reparametrização satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{t}(s) + \dot{t}(s)^2 k(t(s)) = 0$$

□

Temos, pela afirmação anterior, que γ é uma pré-geodésica(em cada bloco). Agora, considere cada quebra $t_i, i = 1, ..., k$. Seja W_i o transporte paralelo de $\Delta\gamma'(t_i) = \gamma'(t_i^+) - \gamma'(t_i^-)$. Como estes dois vetores estão no mesmo cone causal, $\langle W_i, \gamma' \rangle < 0$ em $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ e $\langle W_i, \gamma' \rangle > 0$ em $[t_i^+, t_{i+1}^-]$. Agora, escolha uma função suave por partes f_i em $[a, b]$ tal que f_i' seja positiva em $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ e negativa em $[t_i^+, t_{i+1}^-]$. Escrevendo $V = \sum_i f_i W_i$, necessariamente $\langle \frac{DV}{dt}, \gamma' \rangle < 0$. Agora, assumindo que $\langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt} \rangle > 0$. Seja W um campo de vetores paralelo tipo-tempo ao longo de γ no mesmo cone causal de γ', portanto $\langle W, \gamma' \rangle < 0$, e $V = fW + h\frac{D\gamma'}{dt}$, onde f e h são determinada, para que tenhamos $\langle \frac{DV}{dt}, \gamma' \rangle < 0$. Como $\langle \gamma', \frac{D\gamma'}{dt} \rangle = 0$, derivando temos, $\langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt} \rangle + \langle \gamma', \frac{D^2\gamma'}{dt^2} \rangle = 0$, e daqui,

$$\langle \frac{DV}{dt}, \gamma' \rangle = f' \langle W, \gamma' \rangle - h \langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt} \rangle.$$

Fazendo $u = \langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt} \rangle / \langle W, \gamma' \rangle \leq 0$ é não nula, existe uma função real $h \geq 0$ em $[a, b]$ que é nula nos extremos e tal que

$$\int_a^b uh \mathrm{d}t = 1.$$

Seja $f(t) = \int_a^t (uh - \frac{1}{b-a}) \mathrm{d}s$. Temos que $f(a) = f(b) = 0$ e $f' = uh - \frac{1}{b-a} < uh = h \langle \frac{D\gamma'}{dt}, \frac{D\gamma'}{dt} \rangle / \langle W, \gamma' \rangle$. E portanto, $\langle \frac{DV}{dt}, \gamma' \rangle < 0$ como requerido. □

4 CAUSALIDADE EM VARIEDADES LORENTZIANAS

Este capítulo tem como referências principais (O'NEILL, 1983), (VICTORIA; CAJA, 2010) e (MINGUZZI; SÁNCHEZ, 2008).

4.1 RELAÇÕES DE CAUSALIDADE

Definição 4.1. *Sejam (M, g) um espaço-tempo e $p, q \in M$. Diremos que:*

- p ***está no passado cronológico de*** q *(resp. ou que* q ***está no futuro cronológico de*** p*), e denotamos por $p \ll q$, se existe uma curva tipo-tempo orientada no futuro que ligue p a q;*
- p ***está no passado causal estrito de*** q *(resp. ou que* q ***está no futuro causal estrito de*** p*), e denotamos por $p < q$, se existe uma curva causal orientada no futuro que ligue p a q.*
- p ***está no passado causal de*** q *(resp. ou que* q ***está no futuro causal de*** p*), e denotamos por $p \leq q$, se $p = q$ ou $p < q$.*

Evidentemente, $p \ll q$ implica $p < q$. Estas definições se estendem a de maneira natural a qualquer subconjunto $A \subseteq M$. Assim, chamamos de *futuro*(resp. *passado*) *cronológico de* A, e denotaremos por $I^+(A)$(resp. $I^-(A)$), o conjunto de eventos de M que estão no futuro (resp. passado) cronológico de algum evento de A

$$I^+(A) = \{q \in M / \exists p \in A \text{ tal que } p \ll q\}$$

$$I^-(A) = \{q \in M / \exists p \in A \text{ tal que } q \ll p\}$$

Chamaremos de *futuro*(resp. *passado*) *causal de* A, e denotaremos por $J^+(A)$(resp. $J^-(A)$), o conjunto dos eventos de M que estão no futuro (resp. passado) causal de algum evento de A

$$J^+(A) = \{q \in M / \exists\, p \in A \text{ tal que } p \leq q\}$$

$$J^-(A) = \{p \in M / \exists\, q \in A \text{ tal que } q \leq p\}$$

Segue imediatamente das definições acima que $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$.

Todo aberto $U \subseteq M$ pode ser visto como um espaço-tempo se considerarmos nele a métrica induzida por g. Desta forma, dado subconjunto $A \subseteq U$, considerando as relações $\ll$ e $\leq$ no espaço-tempo U, podemos formar os conjuntos

$$I^+(A;U),\ I^-(A;U),\ J^+(A;U),\ J^-(A;U).$$

Assim, por exemplo, $I^-(A,U)$ consiste nos eventos de U que podem ser ligados a algum evento de A por uma curva tipo-tempo orientada no futuro e contida em U.

Exemplo 4.2. *Consideremos $M = R^{n+1}$ munido com a métrica $g = -dx_0^2 + dx_1^2, ..., dx_n^2$ dado um ponto qualquer $p = (p_0, p_1, ..., p_n) \in M$ podemos calcular os conjuntos $I^+(p)$ e $J^+(p)$. De fato, observe que $q = (q_0, q_1, ..., q_n) \in I^+(p)$ se $\overrightarrow{pq}$ é tipo-tempo, isto é, $-(q_0 - p_0)^2 + (q_1 - p_1)^2 + ... + (q_n - p_n)^2 < 0$. Assim, temos*

$$I^+(p) = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in R^{n+1} : \sum_{j=1}^{n}(p_j - x_j) < (p_0 - x_0)\}.$$

De forma análoga,

$$J^+(p) = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in R^{n+1} : \sum_{j=1}^{n}(p_j - x_j) \leq (p_0 - x_0)\}$$

Este exemplo apresenta propriedades interessantes. Observe que $I^+(p)$ é aberto, $J^+(p)$ é fechado e $\overline{I^+(p)} = J^+(p)$. Em contrapartida, se consideramos $M = R^2 \setminus \{(1,1)\}$, teremos que $J^+(0,0) \neq I^+(p)$ e $J^+(0,0)$ é sequer um conjunto fechado.

Observação 4.3. *Em algumas situações, consideraremos mais de uma estrutura de espaço-tempo em M. Nestes casos, usaremos as notações $<_g$, $\ll_g$, $I_g^{\pm}$, $J_g^{\pm}$ para enfatizar qual métrica Lorentziana está sendo considerada.*

As relações $\ll$ e $\leq$ são transitivas, isto é, dados $p, q, r \in M$, se $p \ll q$ e $q \ll r \Rightarrow p \ll r$ (similarmente para $\leq$). O Lema 3.19 tem a seguinte consequência

Corolário 4.4. *Se $p \ll q$ e $q \leq r$, ou $p \leq q$ e $q \ll r$, então $p \ll r$.*

Demonstração. Faremos o caso $p \ll q$ e $q \leq r$, a demonstração outro é complemente análoga a deste. Como $p \ll q$, então existe uma curva tipo-tempo orientada para o futuro $\gamma_1 : [0,1] \to M$ com $\gamma_1(0) = p$ e $\gamma_1(1) = q$.E, como $q \leq r$, existe uma curva causal orientada para o futuro $\gamma_2 : [0,1] \to M$ com $\gamma_2(0) = q$ e $\gamma_2(1) = r$. Seja $\gamma : [0,1] \to M$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2]; \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

γ não é uma pré-geodésica tipo-luz, logo, pela lema de deformação, existe uma curva tipo-tempo orientada para o futuro de p a r, e portanto, $p \ll r$. □

4.1.1 Causalidade local *versus* global

Dentro de um aberto convexo de um espaço-tempo, as relações de causalidade possuem propriedades análogas às observadas no espaço-tempo de Minkowski R_1^{n+1}. De fato, temos o

Lema 4.5. *Seja C uma vizinha convexa de um espaço-tempo (M, g). Verifica-se então*

(a) Dados $p, q \in C$, com $p \neq q$, temos que $q \in I^+(p; C)$ (resp., $q \in J^+(p; C)$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{pq}$ é uma geodésica tipo-tempo (resp., causal) orientada no futuro.

(b) O conjunto $I^+(p; C)$ é aberto de C(e também de M).

(c) O conjunto $J^+(p; C)$ é o fecho em C de $I^+(p; C)$.

(d) A relação $\leq$ é fechada em C; Isto é, se $p, q, p_n, q_n \in C$ tais que $p_n \to p$ e $q_n \to q$ com $q_n \in J^+(p_n; C), \forall n \in N$, então $q \in J^+(p; C)$.

(e) Qualquer curva causal $\gamma : [0, L[\to C$ contida em um subconjunto compacto $K \subset C$, pode ser estendida continuamente a todo intervalo $[0, L]$.

Demonstração. (a) Como $q \neq p$, teremos que $q \in I^+(p; C)$, pelo corolário 3.16 , se, e somente se, existe uma geodésica tipo-tempo orientada para o futuro que une p a q dentro de $\mathcal{C}$. Se $q \in J^+(p; C) \setminus I^+(p; C)$, o Lema 3.19 nos garante que a curva causal em C em C que une p a q é uma pré-geodésica tipo-luz, e portanto, é curva $\overrightarrow{pq}$, a menos de reparametrização.

(b) A segunda propriedade é deduzida do fato que (veja Corolário 3.16) $I^+(p; C)$ é a imagem pela exponencial em p da intersecção do cone temporal futuro τ_p, que é aberto de T_pM, com a vizinhança aberta estrelada da origem $U \subseteq T_pM$ que é mapeada difeomorficamente sobre C por $\exp_p$. Isto é,

$$I^+(p; C) = \exp_p(\tau_p \cap U). \tag{4.1}$$

(c) Assim como em (4.1), temos que

$$J^+(p, C) = \exp_p(\overline{\tau_p} \cap U). \tag{4.2}$$

Logo, como o fecho de $\tau_p \cap U$ em U é $\overline{\tau_p} \cap U$, e $\exp_p : U \to C$ é um difeomorfismo, segue que o fecho de $I^+(p; C)$ em C é $J^+(p; C)$.

(d) Considere $p, q, p_n, q_n \in \mathcal{C}$ tais que $\{p_n\} \to p$ e $\{q_n\} \to q \in J^+(p; C)$. Como $p_n \leq q_n$, pelo primeiro item, temos que a geodésica $\overrightarrow{p_n q_n}$ é causal e dirigida para o futuro. Usando a continuidade da aplicação

$$\mathcal{C} \,\mathrm{x}\, \mathcal{C} \to TM, \quad (p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}'(0),$$

deduzimos que por ser $\{\overrightarrow{p_n q_n}'(0)\}_{n \in N}$ uma sequência de vetores causais, então o limite é $\overrightarrow{pq}'(0)$ e é causal. Aplicando o item (a) novamente, temos que $q \in J^+(p; C)$.

(e) Se γ não fosse inextensível a L, existiriam duas sequências $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ de eventos de $[0, L[$ estritamente crescentes tais que $\{t_n\} \to L$ e $\{s_n\} \to L$, e suas imagens convergem a eventos distintos

$$\{\gamma(t_n)\} \to p \text{ e } \{\gamma(s_n)\} \to q, \text{ sendo } p \neq q$$

Podemos supor que $t_n < s_n < t_{n+1}$. Assim, $\gamma(t_n) \leq \gamma(s_n) \leq \gamma(t_{n+1})$. Por (d), podemos tomar o limite para concluir que $p \leq q \leq p$. Logo, pelo item (a), $p = q$, o que contradiz que $p \neq q$. Portanto, γ tem que ser continuamente extensível a L.

□

Proposição 4.6. *Se (M, g) é um espaço-tempo, então a relação $\ll$ é aberta em M; Isto é, se $p, q \in M$ são eventos tais que $p \ll q$, então existem vizinhanças U de p e V de q, de maneira que*

$$p' \ll q', \quad \forall p' \in U, \forall q' \in V.$$

Além disto, $I^-(p)$ e $I^+(p)$ são subconjuntos abertos de M, $\forall p \in M$.

Demonstração. Como $p \ll q$, seja $\gamma : [0, 1] \to M$ uma curva qualquer tipo-tempo dirigida para o futuro e que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Sejam C_p e C_q vizinhanças convexas de p e q em M. Podemos supor que $C_p \cap C_q = \emptyset$. Tomemos eventos quaisquer

$$p_0 \in I^+(p; C_p) \cap \gamma([0, 1]) \text{ e } q_0 \in I^-(q; C_q) \cap \gamma([0, 1])$$

Pela propriedade (b) do lema anterior, os conjuntos $U = I^-(p_0; C_p)$ e $V = I^+(q_0; C_q)$ são abertos de M. Dado $p' \in U$, existe uma curva tipo-tempo dirigida para o futuro γ_1 que une p' a p_0 e, analogamente, dado $q' \in V$, existe uma curva tipo-tempo dirigida para o futuro

unindo q_0 a q_1. Assim, a justaposição das $\gamma_2 * \gamma|_{[p_0,q_0]} * \gamma_1$ é uma curva tipo-tempo regular por partes que une p' a q', e $p' \ll q'$.

Vejamos que $I^+(p)$ é aberto (de forma análoga se mostra que $I^-(p)$ também é aberto): se tomamos $q \in I^+(p)$, vimos acima que existe uma vizinhança aberta V de q satisfazendo $V \subseteq I^+(p)$, e portanto, $I^+(p)$ é um subconjunto aberto de M. □

4.2 CONDIÇÕES DE CAUSALIDADE

4.2.1 Condições globais de causalidade

Existem algumas propriedades que podemos impôr a um espaço-tempo (M, g) para que seu comportamento causal se assemelhe ao que esperamos que tenha (pelo menos localmente) o Universo real. Estas propriedades constituem a chamada **Hierarquia Causal**, ou **Escada Causal**, por satisfazerem as implicações:

Hiperbolicidade global

⇓

Causalidade simples

⇓

Causalidade contínua

⇓

Causalidade estável

⇓

Causalidade forte

⇓

Distinguidor

⇓

Causalidade

⇓

Cronologia

A seguir, definiremos cada uma dessas propriedades bem como derivaremos algumas consequências destas.

4.2.1.1 Espaços-tempo cronológicos e causais

Definição 4.7. *Se um espaço-tempo (M, g) não possui curvas tipo-tempo fechadas então é dito* ***cronológico****.*

Utilizando-nos da proposição 4.6, podemos enunciar a seguinte proposição que exclui os espaços-tempo compactos dos "fisicamente prováveis".

Proposição 4.8. *Nenhum espaço-tempo compacto pode ser cronológico.*

Demonstração. Suponhamos que o espaço-tempo (M, g) seja compacto e cronológico. Considere a cobertura por abertos $\{I^+(p) : p \in M\}$. Como M é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{I^+(p_1), ..., I^+(p_n)\}$. Se $p_i \in I^+(p_j)$, então $I^+(p_i) \subset I^+(p_j)$ podemos retirar o aberto $I^+(p_i)$. Desta forma, podemos assumir que se $i \neq j$, então $p_i \notin I^+(p_j)$. Obviamente,

$$p_1 \in M = \bigcup_{j=1}^{n} I^+(p_j) \text{ e } p_1 \notin \bigcup_{j=2}^{n} I^+(p_j)$$

Isto é, $p_1 \in I^+(p_1)$. Logo, existe uma curva tipo-tempo fechada orientada para o futuro que une p consigo mesmo, portanto, (M, g) não pode ser cronológico. □

Definição 4.9. *Um espaço-tempo (M, g) é dito* ***causal*** *se não possui curvas causais fechadas.*

Por exemplo, como consequência do lema 4.5, temos que todo convexo de um espaço-tempo é, ele próprio, um espaço-tempo causal.

Obviamente, todo espaço-tempo causal é cronológico, porém, a recíproca não é verdadeira. A seguinte proposição nos fornecer a condição necessária para construirmos um contraexemplo à recíproca.

Proposição 4.10. *Um espaço-tempo cronológico que não é causal admite uma geodésica tipo-luz fechada.*

Demonstração. Seja (M, g) um espaço-tempo que cronológico e não-causal. Por não ser causal, deve existir uma curva causal diferencial por partes fechada γ. Seja p um evento desta curva. Se esta curva não for uma pré-geodésica tipo-luz, o lema 3.19 garante que podemos

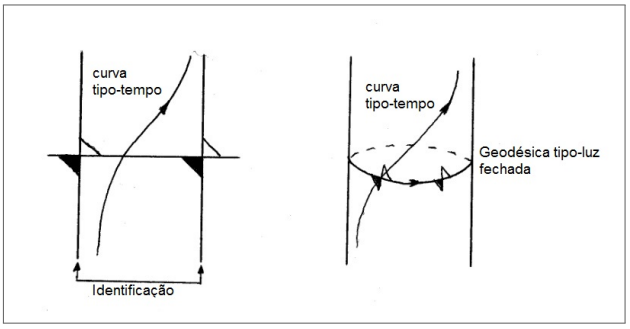
encontrar uma curva tipo-tempo orientada para o futuro que liga p consigo mesmo, mas isto é impossível pois M é cronológico. Como consequência, γ deve ser uma pré-geodésica tipo-luz. Além disto, a menos de reparametrização, deve ser fechada no sentido de que os vetores velocidades nos extremos sejam exatamente iguais ou proporcionais, pois não sendo deste modo, percorrendo duas vezes γ teríamos novamente a contradição de que exista uma curva causal fechada que não é pré-geodésica. □

Exemplo 4.11. *Podemos considerar um cilindro, vendo-o como o quociente de R^2 pelo grupo das translações G gerado por $G(x, y) = (x + 1, y)$.*

$$M = R^2/G \text{ com métrica Lorentziana } g = -2dxdy.$$

Cada curva $\gamma(t) = (x(t), y_0)$ com $y_0 = cte$ é uma pre-geodésica tipo-luz fechada, e portanto o espaço-tempo não é causal. Por outro lado, cada curva tipo-tempo deve ter derivada não nula, deste modo não pode existir uma curva tipo-tempo fechada, e disto M é cronológico.

Figura 1 – Espaço-tempo cronológico não-causal



Fonte: O autor (2015)

4.2.1.2 Espaços-tempo distinguidores

Os abertos $I^+(p)$ e $I^-(p)$ são de fundamental importância na teoria de causalidade. Assim, quando no espaço-tempo (M, g) os eventos p forem caracterizados pelos seus futuros e passados cronológicos $I^+(p)$ e $I^-(p)$, (M, g) é dito **distinguidor**. Mais precisamente,

Definição 4.12. *Um espaço-tempo (M, g) é dito **distinguidor**, quando, para todos $p, q \in M$,*

$$I^+(p) = I^+(q) \text{ ou } I^-(p) = I^-(q) \Rightarrow p = q$$

Proposição 4.13. *Um espaço-tempo (M, g) é distinguidor se, e somente se, para qualquer $p \in M$, a seguinte propriedade é satisfeita: Para qualquer vizinhança U de p, existe uma*

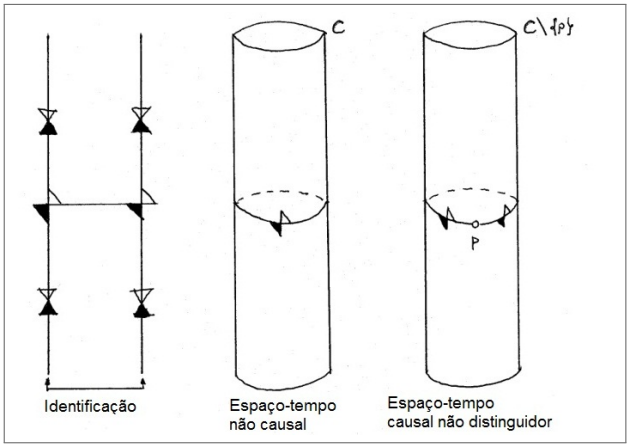
vizinhança $V \subset U$, $p \in V$ tal que qualquer curva causal que parte de p e deixa V, não entra novamente em V.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que (M, g) não seja distinguidor; Isto é, existem $p, q \in M$ com $p \neq q$ tais que $I^+(p) = I^+(q)$. Tomemos uma vizinhança U de p tal que $q \in \overline{U}$. Vamos mostrar que para qualquer vizinhança $V \subset U$ de p existe uma curva γ tipo-tempo orientada para o futuro que sai de V. Escolha um evento $p' \in I^+(p) \cap V$. Como $p' \in I^+(q)$, existe uma curva $\sigma : [0, 1] \to M$ orientada para o futuro com $\sigma(0) = q$ e $\sigma(1) = p'$. Escolhamos agora, um evento $q' = \sigma(t_0) \in \sigma([0, 1])$ com $q' \notin V$, este evento existe já que σ não está totalmente em V. Agora, observe que $q' \in I^+(p)$, logo existe uma curva $\alpha : [0, 1] \to M$ tipo-tempo orientada para o futuro com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q'$. Agora, fazendo a justaposição das curvas α e $\sigma|_{[t_0,1]}$, obtemos a curva $\gamma := \alpha * \sigma|_{[t_0,1]}$ que não está inteiramente contida em V.
($\Leftarrow$) Suponha que exista um evento $p \in M$ e uma vizinhança U de p, a qual podemos, e iremos, supor convexa, tais que para todo aberto $V \subset U$, $p \in V$, existe uma curva causal γ orientada para o futuro que parte de p, deixa V e volta a entrar em V. Escolhamos uma sequencia de vizinhanças $\{V_n\}$ com $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ e uma sequencia de curvas $\{\gamma_n\}$ que partem de p, saem de V_n e voltam a entrar. Podemos supor, ao retornarem a V_n, passam por $p_n \in V_n$. Agora, construamos uma sequencia $\{q_n\} \subset U$ tal que cada q_n é um evento sobre γ_n e $q_n \notin V_n$. Desta forma, $q_n \in J^+(p; U)$ para todo $n \in N$. Pelo item (c) do Lema 1, $J^+(p; U)$ é fechado, então podemos extrair uma subsequencia q_{n_m} convergente a um evento $q \in J^+(p, U)$. Disto, temos $p <_U q$, logo pelo Corolário 1, $I^+(q) \subset I^+(p)$. Agora, observe que a sequencia $\{p_n\}$ converge a p, e como, $q_n \in J^-(p_n; U)$, para algum n suficientemente grande, $q_n \in J^-(p; U)$, e portanto, $q <_U p$. Disto, $I^+(p) \subset I^+(q)$. □

Segue facilmente da proposição acima que todo espaço-tempo distinguidor é causal. Contudo a recíproca não é verdadeira, como podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 4.14. *Podemos modificar o exemplo 4.11, de modo que M admite apenas uma geodésica tipo-luz (Fig.2). Eliminando um evento qualquer p sobre a geodésica, o espaço-tempo M será causal. Por outro lado, pelo Corolário 4.4, todos os eventos sobre a imagem da geodésica possuem os mesmo passado e futuro cronológicos.*

Figura 2 – Espaço-tempo causal não distinguidor



Fonte: (MINGUZZI; SÁNCHEZ, 2008, p. 22)

4.2.1.3 Espaços-tempo fortemente causais

Definição 4.15. *Um aberto $V \subseteq M$ de um espaço-tempo é* ***causalmente convexo*** *se toda curva causal $\gamma : [a, b] \to M$ com extremos em V estiver inteiramente contida em V.*

Por exemplo, em qualquer espaço-tempo os abertos da forma $I^-(q) \cap I^+(p)$ são causalmente convexos, como pode ser diretamente verificado.

Definição 4.16. *Um espaço-tempo é dito* ***fortemente causal*** *se todo evento $p \in M$ possuir uma base de vizinhanças causalmente convexas.*

Proposição 4.17. *Todo espaço-tempo fortemente causal é distinguidor*

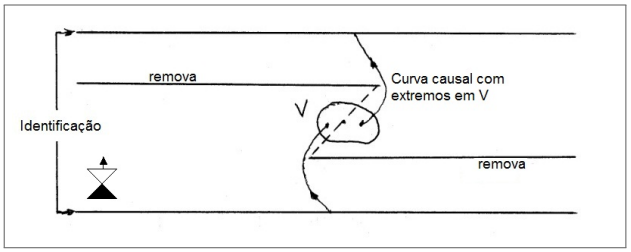
Demonstração. Pela Proposição 4.13, dados quaisquer evento $p \in M$ e vizinhança U de p, devemos encontrar uma vizinhança $V \subset U$, $p \in V$ tal que toda curva causal partindo de p que deixa V, não entra novamente em V. Suponha, por contradição, que o espaço-tempo não seja distinguidor, então não existe nenhuma vizinhança $V \subset U$ que satisfaça a Proposição 5. Sejam $W \subset U$ vizinhança convexa de p e $\gamma : [a, b] \to M$ curva causal orientada para o futuro que parte de $p = \gamma(a)$, sai de W e volta passando por $q = \gamma(b) \in W$. Isto implicaria que W não é vizinhança convexa de p, e como W foi escolhido genericamente, p não possui uma base de vizinhanças convexas, e chegamos a uma contradição, pois o espaço-tempo é fortemente causal. □

Exemplo 4.18. *Um exemplo de um espaço-tempo distinguidor que não é fortemente causal (Fig. 3). Consideremos L^2 com a métrica usual $g = dx^2 - dy^2$. Agora, seja*

$$M = (L^2, g)/G, \text{ onde } G \text{ é o grupo gerado pela translações } (x, y) \mapsto (x, y + 1)$$

Denotaremos por R o conjunto $\{(x, y) \in L^2 : 0 \leq y \leq 1\}$. Considere agora $L_1 = \{(x, \frac{1}{4}) : x \geq \frac{1}{4}\}$ e $L_2 = \{(x, \frac{3}{4}) : x \leq \frac{3}{4}\}$. Este conjuntos são fechados em M, e portanto $\tilde{M} = M \backslash \{L_1, L_2\}$ é um aberto de M, que nos permite vê-lo como um espaço-tempo por si só. A figura abaixo ilustra este espaço-tempo

Figura 3 – Espaço-tempo distinguidor não fortemente causal



Fonte: (MINGUZZI; SÁNCHEZ, 2008, p. 28)

A curva $\alpha : (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \to \tilde{M}, \alpha(t) = (t, t)$(representada na figura por linha pontilhada) é uma pré-geodésica tipo-luz. Observe que, dado qualquer vizinhança arbitrária V de p, é possível construir curvas causais com extremos em V e que saem.

Ainda que um espaço-tempo não seja fortemente causal globalmente, o seguinte lema nos garante a existência de vizinhanças nas quais vale a causalidade forte.

Lema 4.19. *Seja (M, g) um espaço-tempo qualquer. Dado $p \in M$, existe uma base de vizinhanças $\{W\}$ de p tal que cada espaço-tempo $(W, g|_W)$ é fortemente causal.*

Demonstração. Mostraremos que se $W_1 \subset W_2$ são vizinhanças convexas de p, com o fecho $\overline{W_1}$ compacto e contido em W_2, então $(W_1, g|_{W_1})$ é fortemente causal. Denotemos por $\ll_i$, $\leq_i$ (para $i = 1, 2$) as relações de cronologia e causalidade em $(W_i, g|_{W_i})$. Para a demonstração, mostraremos que dados $q \in W_1$ e vizinhança U de q em W_1, se $\{s_n\}$ e $\{r_n\}$ forem sequências de eventos de U tais que

$$s_n \to q \ , \quad r_n \to q, \quad \text{e } r_n \ll_1 q \ll_1 s_n \text{ para todo } n, \tag{4.3}$$

então para n suficientemente grande teremos

$$I^-(s_n, W_1) \cap I^+(r_n, W_1) \ \subset \ U. \tag{4.4}$$

Isto concluiria a demonstração uma vez que $I^-(s_n, W_1) \cap I^+(r_n, W_1)$ é vizinhança causalmente convexa de q em $(W_1, g|_{W_1})$ e é claro que existem sequências $\{s_n\}$ e $\{r_n\}$ satisfazendo (4.3). Suponha pois, por contradição, que para todo n existe $a_n \in I^-(s_n, W_1) \cap I^+(r_n, W_1)$ com $a_n \notin U$. Como $\overline{W_1} \subset W_2$ é compacto, podemos supor que $a_n \to a^*$, para um certo $a^* \in W_2$, com $a^* \neq q$ (pois $a^* \notin U$). Como W_2 é convexo em (M, g), por (d) do Lema 1 podemos passar ao limite $r_n \ll_2 a_n \ll_2 s_n$ e obter $q \leq_2 a^* \leq_2 q$. Como $a^* \neq q$, isto significaria que $(W_2, g|_{W_2})$ não é causal, um absurdo pois W_2 é convexo. □

A causalidade forte pode ser caracterizada em termos da *topologia de Alexandrov* do espaço-tempo. A definição desta está na seguinte proposição

Proposição 4.20. *Em qualquer espaço-tempo (M, g), a coleção de abertos $\{I^+(p) \cap I^-(q) : p, q \in M\}$ é uma base para uma topologia em M, dita* ***topologia de Alexandrov****.*

Demonstração. Primeiramente, iremos mostrar que, dado $r \in M$ existe um conjunto $I^+(p) \cap I^-(q)$ tal que $r \in I^+(p) \cap I^-(q)$. De fato, escolhendo eventos $p, q \in M$ tais que $p \in I^-(r)$ e $q \in I^+(r)$. Temos, $r \in I^+(p) \cap I^-(q)$.
Agora, mostraremos que se

$$r \in (I^+(p_1) \cap I^-(q_1)) \cap (I^+(p_2) \cap I^-(q_2)).$$

Então, existe um aberto $I^+(p) \cap I^-(q)$ tal que

$$r \in I^+(p) \cap I^-(q) \subset (I^+(p_1) \cap I^-(q_1)) \cap (I^+(p_2) \cap I^-(q_2)).$$

Disto, temos que $r \in I^-(q_1) \cap I^-(q_2)$ e $r \in I^+(p_1) \cap I^+(p_2)$. Pela Proposição 2, os conjuntos $I^-(q_1)$ e $I^-(q_2)$ são abertos de M pela topologia canônica. Do modo que existe uma vizinhança V de r tal que $V \subset I^-(q_1) \cap I^-(q_2)$. De forma análoga, existe uma vizinhança $U \subset I^+(p_1) \cap I^+(p_2)$. Agora, tomemos $q \in V \cap I^+(r)$ e $p \in U \cap I^-(r)$. Assim,

$$r \in (I^+(p) \cap I^-(q)) \subset (I^+(p_1) \cap I^-(q_1)) \cap (I^+(p_2) \cap I^-(q_2)).$$

□

Teorema 4.21. *Para qualquer espaço-tempo (M, g) equivalem as seguintes afirmações:*

(i) ser fortemente causal,

(ii) a topologia de Alexandrov em M coincide com a topologia canônica de M,

(iii) a topologia de Alexandrov em M é Hausdorff.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Pelo Proposição 4.6, já sabemos que os conjuntos da forma $I^+(p) \cap I^-(q)$ são abertos de M (topologia canônica). Isto é, a topologia canônica de M é mais fina que a topologia de Alexandrov. Agora, tome x qualquer e um aberto $U \ni x$, como (M, g) é fortemente causal, existe uma vizinhança causalmente convexa $V \subset U$. Escolhendo eventos $p, q \in V$ tais que $p \ll_V x \ll_V q$, temos que $x \in I^+(p) \cap I^-(q) \subset V$. Como queríamos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Trivial, pois a topologia canônica de M é Hausdorff, e por (ii), a topologia de Alexandrov é igual a canônica. Logo, a topologia de Alexandrov em M também é Hausdorff.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que a causalidade forte não seja verificada em $p \in M$, então a topologia de Alexandrov não é Hausdorff, isto é, p não possui uma base de vizinhanças causalmente convexa. Sejam U vizinhança p e $W \supset U$ convexo. Considere uma sequencias de vizinhanças $\{V_n\}$ convexas com $\overline{V}_{n+1} \subset V_n \subset U$ e uma sequencias de curvas $\{\gamma_n\}$ causais orientadas para o futuro unidos os eventos $p_n, p'_n \in V_n$ tais que saem de W e voltam a entrar. Seja $q_n \in \dot{U}$ sobre γ_n ao retornar a U. Assim, temos uma sequencia $\{q_n\} \subset \overline{U}$, extraindo uma subsequencia convergente $q_{n_m} \to q \in \overline{U}$. Observe que $q \leq p'_n$, pois $q_n \leq p'_n$, e pelo item (c) do Lema 4.5, o conjunto $J^-(p'_n; W)$ é fechado. Assim, para n suficientemente grande, $q \in J^-(p'_n; W)$. E disto, temos $q \leq_W p$, já que $p'_n \to p$.
Agora, recordemos que se $x \ll q \ll y$ então, $x \ll q \leq p$ e $p_n \leq q \ll y$, pelo Corolário 1, temos $x \ll p$ e $p_n \ll y$ para n grande. Disto, p é um evento de acumulação de $I^+(x) \cap I^-(y)$. E portanto, qualquer vizinhança de p dada terá intersecção não vazia com este aberto. □

A seguir mostraremos que, num espaço-tempo fortemente causal, se uma curva causal $\gamma : [a, b) \to M$ está **parcialmente presa num compacto** $K \subset M$ (em direção a b), isto é, se existe uma sequência $\{s_n\}$ em $[a, b)$ satisfazendo

$$\{s_n\} \to b \ , \quad \text{e } \gamma(s_n) \in K, \forall n \in N,$$

então γ pode ser continuamente estendida a b.

Proposição 4.22. *Num espaço-tempo fortemente causal, se $\gamma : [a, b) \to M$ é uma curva causal inextensível que parte de um compacto $K \subset M$, então eventualmente γ cruza K em algum evento e nunca retorna; Isto é, existe $s > 0$ tal que $\gamma(t) \notin K$, $\forall t \geq s$*

Demonstração. Suponha que a conclusão seja falsa. Então, γ está parcialmente presa em K. Disto, existe uma sequência $\{s_j\} \subset [a, b)$ tal que $\{s_j\} \to b$ e também, $\{\gamma(s_j)\} \subset K$; passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\{\gamma(s_j)\}$ converge para um evento $p \in K$. Mas, γ não é extensível, logo deve haver uma outra sequência $\{t_j\}$ convergindo para b tal que $\gamma(t_j)$ não converge para p. Como $\{\gamma(t_j)\}$ não converge a p, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que p possui alguma vizinhança U que não contém eventos $\gamma(t_j)$. Mas, como $\{s_j\}$ e $\{t_j\}$ convergem para b, podemos extrair subsequências de $\{s_j\}$ e $\{t_j\}$ satisfazendo $s_{i_1} < t_{i_2} < s_{i_3} < \ldots$. Disto, como $\{\gamma(s_j)\} \to p$, dada qualquer vizinhança $V \subset U$ de p, teremos que para j grande o suficiente as curvas causais $\gamma_{|[s_j, s_{j+1}]}$ têm extremos em V e eventos fora de U , contradizendo a existência de uma base de vizinhanças causalmente convexas em torno de p. □

4.2.1.4 Espaços-tempo estavelmente causais

Analisaremos agora os espaços-tempo causais que continuam causais após abrirmos um pouco seus cones temporais.

Seja $Lor_+(M)$ o espaço das métricas Lorentzianas temporalmente orientadas em M. Podemos estabelecer uma relação $<$ em $Lor_+(M)$ de modo natural: Dadas duas métricas $g, g' \in Lor_+(M)$, diremos que $g < g'$ se, e somente se, todo vetor causal futuro para a métrica g é tipo-tempo futuro para a métrica g'. Isto é, denotando por τ_p e τ'_p os respectivos cones temporais futuros em $p \in M$, então

$$\overline{\tau_p} \backslash \{0\} \subset \tau'_p, \quad \text{para todo } p \in M.$$

É claro que se $p <_g q$, então $p \ll_{g'} q$.

Exemplo 4.23. *Dados reais $0 < \lambda < \mu$, as métricas Lorentzianas planas em R^{n+1},*

$$g = -\lambda dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \ , \quad g' = -\mu dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2,$$

ambas com orientação temporal determinada pelo campo $\partial/\partial x_0$, claramente satisfazem $g < g'$.

Observação 4.24. *Dadas $g, g' \in Lor_+(M)$, note que se $g < g'$ então $g_\lambda = g + \lambda(g' - g)$ é uma métrica Lorentziana para todo $\lambda \in [0, 1]$, e $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ implica $g_{\lambda_1} < g_{\lambda_2}$. Pois,*

dado v causal com respeito à métrica g, isto é, $g(v,v) \leq 0$, e por ser $g < g'$, temos v é vetor tipo-tempo com relação a métrica g' ($g'(v,v) < 0$), daí,

$$g_\lambda(v,v) = g(v,v) + \lambda(g'(v,v) - g(v,v)) < 0$$

Além disto, por ser $\lambda_1 \leq \lambda_2$ temos $\lambda_1(g' - g) \leq \lambda_2(g' - g)$, e segue que $g_{\lambda_1} < g_{\lambda_2}$.

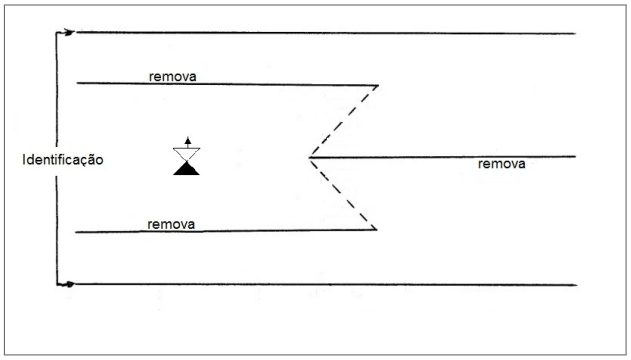
Definição 4.25. *Um espaço-tempo (M, g) é dito estavelmente causal se existe uma métrica causal $g' \in Lor_+(M)$ tal que $g < g'$.*

Exemplo 4.26. *Igual ao exemplo 4.14, consideremos*

$$M = (L^2, g)/G, \text{ onde } G \text{ é o grupo gerado pela translações } (x,y) \mapsto (x, y+1).$$

Denotaremos por R o conjunto $\{(x,y) \in L^2 : 0 \leq y \leq 1\}$. Considere agora $L_1 = \{(x, \frac{1}{4}) : x \leq \frac{2}{3}\}$, $L_2 = \{(x, \frac{1}{2}) : x \geq \frac{1}{3}\}$ e $L_3 = \{(x, \frac{3}{4}) : x \leq \frac{2}{3}\}$. Este conjuntos são fechados em M, e portanto $\tilde{M} = M \setminus \{L_1, L_2, L_3\}$ é um aberto de M, que nos permite vê-lo como um espaço-tempo por si só.

Figura 4 – Espaço-tempo fortemente causal não estavelmente



Fonte: (MINGUZZI; SÁNCHEZ, 2008, p. 39)

As curvas $\alpha : [0, 1/2] \to M,\ \alpha(t) = (\frac{2-t}{3}, \frac{1+2t}{4})$ e $\beta : [1/2, 1] \to M,\ \beta(t) = (\frac{2t}{3}, \frac{2t+1}{4})$ (representadas na figura por linhas pontilhadas) são pré-geodésicas tipo-luz.Este espaço-tempo é fortemente causal. Se abrimos um pouco os cones causais aparecerão curvas causais fechadas, e portanto, o espaço não é estavelmente causal.

A existência de uma função temporal (veja definição 3.12) num espaço-tempo garante a sua causalidade estável:

Proposição 4.27. *Se um espaço-tempo (M, g) admite uma função temporal $t : M \to R$, então ele é estavelmente causal.*

Demonstração. Seja t uma função temporal globalmente definida em (M, g). Podemos supor, e suporemos, que $g(\nabla t, \nabla t) = -1$. Agora, podemos escrever a métrica g como

$$g = -dt^2 + h$$

onde h é tal que $h(\nabla t, \nabla t) = 0$ e $h|_{[\nabla t]^\perp} = g|_{[\nabla t]^\perp}$. Então, podemos considerar a família de métricas (claramente Lorentzianas) a um parâmetro

$$g_\lambda = -\lambda dt^2 + h, \quad \lambda > 0. \tag{4.5}$$

É claro que $g < g_\lambda$ se $\lambda > 1$. A seguinte afirmação conclui a demonstração uma vez que a existência de uma função tempo claramente implica a causalidade da métrica.

Afirmação 4.28. *t é uma função temporal para cada g_λ.*

Demonstração. Inicialmente, note que $h(\nabla t, v) = 0$, para todo v. E de (4.5), temos que

$$g_\lambda(\cdot, \cdot) = -\lambda dt \otimes dt(\cdot, \cdot) + h(\cdot, \cdot).$$

Então,

$$g_\lambda(\nabla t, \cdot) = -\lambda dt \otimes dt(\nabla t, \cdot) + h(\nabla t, \cdot) = -\lambda dt(\nabla t) dt(\cdot).$$

Mas, sabemos que $dt(\nabla t) = g(\nabla t, \nabla t) = -1$. Logo,

$$\lambda dt(\cdot) = g_\lambda(\nabla t, \cdot) \quad \Rightarrow \quad \lambda dt(\cdot) = g_\lambda(\frac{1}{\lambda}\nabla t, \cdot).$$

Assim, pela unicidade do gradiente,

$$\nabla_\lambda t = \frac{1}{\lambda}\nabla t.$$

Como ∇t é tipo-tempo orientado para o passado com relação à métrica g, então também será com relação à métrica g_λ. E portanto, t é uma função temporal para g_λ. □

□

Antes de considerarmos a implicação *causalidade estável* $\Rightarrow$ *causalidade forte*, estabeleceremos dois lemas válidos para qualquer espaço-tempo e que serão importantes também em 4.49 e 5.9.

Lema 4.29. *Sejam $g, h \in Lor_+(M)$, com $g < h$. Então, dado $p \in M$, existem um sistema de coordenadas $(U, (x_j))$ em torno de p, e reais $0 < \lambda < \mu$, tais que as métricas planas em U dadas por $g' = -\lambda dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ e $h' = -\mu dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$, satisfazem*

$$g < g' < h' < h.$$

Demonstração. Seja $B = \{e_0, e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM com relação g_p. Deste modo, defina

$$g'(p) = -\lambda(e_0)^2 + (e_1)^2 + ... + (e_n)^2 \quad \text{e} \quad h'(p) = -\lambda(e_0)^2 + (e_1)^2 + ... + (e_n)^2,$$

com $1 < \lambda < \mu$ de modo que $h' < h$ em p.

Escolha um sistema de coordenadas $(U, (x_j))$ centrado em p tal que

$$\partial_0(p) = e_0, \ ..., \ \partial_n(p) = e_n.$$

Agora, por continuidade, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ com $p \in V$, tal que as métricas

$$g' = -\lambda dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \text{ e } h' = -\mu dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$$

verificam o lema. □

Lema 4.30. *Sejam $g, h \in Lor_+(M)$, com $g < h$. Então, dados $p \in M$ e vizinhança W de p, existe aberto $V \subset W$ com $p \in V$ tal que*

$$I_g^{\pm}(V; \overline{W}) \cap \partial W \ \subseteq \ I_h^{\pm}(p; \overline{W}) \cap \partial W. \tag{4.6}$$

Demonstração. Comecemos observando que

1. Se V satisfaz (4.6) com W' no lugar de W, para alguma vizinhança $W' \subseteq W$ de p, então V satisfaz (4.6).

2. Se V satisfaz (4.6) com g' no lugar de g e h' no lugar de h, para certas $g', h' \in Lor_+(M)$ tais que $g < g' < h' < h$, então V satisfaz (4.6).

Estas duas observações, mais o lema anterior, reduzem o problema ao caso em que

$$M = R^{n+1}, \ \ p = 0, \ \ g = -\lambda dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2, \ \ h = -\mu dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2,$$

e $W = B(0; R) =$ bola Euclideana de raio R e centro na origem 0. Sendo $\tau_\lambda \subset \tau_\mu \subset R^{n+1}$ os cones temporais futuro de g e h em 0, então, para toda vizinhança V de $p = 0$,

$$\begin{aligned} I_g^+(V; \overline{W}) \cap \partial W &= \Big(\bigcup_{q \in V} (q + \tau_\lambda) \Big) \cap \partial B(0, R) \\ I_h^+(p, \overline{W}) \cap \partial W &= \tau_\mu \cap \partial B(0, R). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\overline{\tau_\lambda} \subset \tau_\mu \backslash \{0\}$, não é difícil ver que, para V suficientemente pequena, tem-se

$$\Big(\bigcup_{q \in V} (q + \tau_\lambda) \Big) \cap \partial B(0, R) \subset \tau_\mu \cap \partial B(0, R).$$

□

Proposição 4.31. *Todo espaço-tempo (M, g) estavelmente causal é fortemente causal.*

Demonstração. Escolha $g' \in Lor_+(M)$ tal que g' é causal e $g < g'$. Dados $p \in M$ e vizinhança U de p, mostremos que existe vizinhança $V \subset U$ de p que é causalmente convexa. Pelo lema 4.19, existe vizinhança W de p tal que $\overline{W} \subset U$ e $(W, g|_W)$ é fortemente causal. Pelo lema 4.30, existe vizinhança $V \subset W$ de p, tal que

$$I_g^{\pm}(V; \overline{W}) \cap \partial W \subseteq I_{g'}^{\pm}(p; \overline{W}) \cap \partial W. \tag{4.7}$$

Como $(W, g|_W)$ é fortemente causal, diminuindo V se necessário, podemos e iremos supor que V é causalmente convexo no espaço-tempo $(W, g|_W)$. Assim sendo, afirmamos que V é causalmente convexo em (M, g). Para tal, seja α um segmento de curva causal em M, direcionada para o futuro, com extremos em V. Como V é causalmente convexo em $(W, g|_W)$, temos que α não deixará V caso não deixe W. Mostremos, pois, que α não deixa W. Se α deixasse W, α interceptaria ∂W em pontos q_1 e q_2 (podendo ser $q_1 = q_2$), com $q_1 \ll_g q_2$. Mas, por (4.7), devemos ter $p \ll_{g'} q_1$ e $q_2 \ll_{g'} p$. Portanto, teríamos $p \ll_{g'} p$, contradizendo a causalidade de (M, g'). □

4.2.1.5 Espaço-tempos causalmente contínuos

Consideraremos aqui a questão da continuidade dos mapas

$$\begin{aligned} I^{\pm}(\cdot) : M &\longrightarrow \mathcal{P}(M) \\ p &\longmapsto I^{\pm}(p), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}(M)$ denota o conjunto das partes de M. Comecemos com a seguinte definição de topologia geral.

Definição 4.32. *Seja X um espaço topológico e denotemos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Uma função $\theta : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita:*

1. ***Contínua interior em** $x \in X$, se para todo compacto $K \subset \theta(x)$ existe uma vizinhança U de x tal que $K \subset \theta(y)$ para todo $y \in U$. θ é dita contínua interior em X, se for contínua interior em todos os eventos de X*

2. ***Contínua exterior em** $x \in X$, se para todo compacto $K \subset M \setminus \overline{\theta(x)}$ existe uma vizinhança V de x tal que $K \subset M \setminus \overline{\theta(y)}$ para todo $y \in V$. θ é dita contínua exterior em X, se for contínua exterior em todos os eventos de X*

Se θ for contínua interior e contínua exterior, diremos que θ é contínua.

Proposição 4.33. *As funções $I^{\pm}$ são sempre contínuas interior.*

Demonstração. Iremos mostra que I^- é contínua interior, a demonstração para I^+ é feita de forma análoga.
De fato, escolha um $p \in M$, dado $K \subset I^-(p)$. Então, para todo evento $q \in K$ temos que $q \ll p$, e por ser $\ll$ uma relação aberta em M, existem vizinhanças $U_q \ni p$ e $V_q \ni q$ tais que $\forall q' \in V_q$ e $\forall p' \in U_q$ temos que $q' \ll p'$. Então, temos cobertura $K \subset \bigcup\limits_{q \in K} \{V_q\}$, mas K é compacto, logo podemos extrair uma subcobertura finita $\{V_{q_1}, ..., V_{q_n}\}$. Tomando $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{q_i}$, temos a vizinhança de p buscada. □

Definição 4.34. *Um espaço-tempo é dito* ***causalmente contínuo*** *se for distinguidor e se as funções $I^{\pm}(\cdot)$ forem contínuas; pela proposição acima, esta última condição equivale à continuidade exterior das funções $I^{\pm}(\cdot)$.*

Definição 4.35. *Seja (M, g) um espaço-tempo qualquer. Dizemos que (M, g) é*

i. ***reflexivo passado em*** *$q \in M$ se para todo $p \in M$ tal que $q \in \overline{I^+(p)}$ temos que $p \in \overline{I^-(q)}$, para todo $p \in M$.*

ii. ***reflexivo futuro em*** *$q \in M$ se para todo $p \in M$ tal que $q \in \overline{I^-(p)}$ temos que $p \in \overline{I^+(q)}$, para todo $p \in M$.*

Dizemos que (M, g) é ***reflexivo*** *se é reflexivo passado e reflexivo futuro em todo evento $q \in M$.*

Lema 4.36. *As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) I^-(resp. I^+) é contínua exterior.

(b) (M, g) é reflexivo passado (resp. reflexivo futuro).

Demonstração. Demonstraremos apenas para o caso o espaço-tempo é reflexivo passado em $p \Leftrightarrow I^-$ é contínua exterior em p.

$(a) \Rightarrow (b)$ Seja I^- contínua exterior. Assuma, por contradição, que existem eventos $p, q \in M$ tais que $q \in \overline{I^+(p)}$ mas $p \in \overline{I-(q)}$. Pela continuidade exterior de I^-, existe uma vizinhança $V \ni q$ tal que para todo $q' \in V$ temos $p \notin \overline{I^-(q')}$, mas $q \in \overline{I^+(p)}$, isto

é, para toda vizinhança $U \ni q$, existem eventos $q' \in U$ tais que $q' \in I^-(p)$. E portanto, $p \in I^+(q') \subset \overline{I^+(q')}$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seja M reflexivo. Assuma, por contradição, que I^- não é contínua exterior em $p \in M$, então existem um compacto $K \subset M$ com $K \cap I^-(p) = \emptyset$ e uma sequencia $\{p_n\} \to p$ com $K \cap I^-(p_n) \neq \emptyset$. Tomando $r_n \in K \cap I^-(p_n)$, temos uma nova sequencia que podemos assumir, e assumiremos, convergente $r_n \to r \in K$. Escolhendo um $s \in I^-(r)$ temos que, para n suficientemente grande, $p_n \in I^+(s)$. E disto, $p \in \overline{I^+(s)}$. Pela reflexividade, temos que $s \in \overline{I^-(p)}$. Agora fazendo $s \to r$, temos que $r \in I^-(p)$, o que é uma contradição. □

Proposição 4.37. *(M, g) é causalmente contínuo se, e somente se, é reflexivo e distinguidor*

Demonstração. Pela Definição 4.34, temos que o espaço-tempo é distinguidor em ambos os casos. Além disto, a Proposição 4.33 nos afirma que os mapas $I^\pm$ são sempre contínuas interior. Pelo Lema 4.36, vimos a equivalência entre reflexividade e a continuidade exterior dos mapas $I^\pm$ são contínuos exterior. □

Nos referimos ao artigo (HAWKING; SACHS, 1974) de Hawking e Sachs para a demonstração do seguinte resultado

Proposição 4.38. *Todo espaço-tempo causalmente contínuo é causalmente estável.*

4.2.1.6 Espaço-tempos causalmente simples

Já sabemos que os conjuntos $I^+(p)$ e $I^-(p)$ são abertos para todo $p \in M$. Poderíamos esperar que $J^+(p)$ e $J^-(p)$ sejam fechados, mas nem sempre este fato é verdadeiro. Os espaços-tempo nos quais os conjuntos $J^-(p)$ e $J^+(p)$ são fechados para todo $p \in M$ são os **causalmente simples**.

Definição 4.39. *Um espaço-tempo é dito* ***causalmente simples*** *se for causal e se os conjuntos $J^-(p)$ e $J^+(p)$ forem fechados para todo $p \in M$*

Proposição 4.40. *Se $J^+(q)$ (resp. $J^-(q)$) é fechado para todo $q \in M$ então I^-(resp. I^+) é contínua exterior. Em particular, todo espaço-tempo causalmente simples é causalmente contínuo.*

Demonstração. Suponhamos que existam um ponto $p \in M$ e um compacto $K \subset M \setminus \overline{I^-(p)}$ tal que I^- não seja contínua exterior. Então, existe uma sequência $\{p_n\} \to p$ tal que $K \cap \overline{I^-(p_n)} \neq \emptyset$, escolha pontos $r_n \in K \cap \overline{I^-(p_n)}$. Assim, temos uma sequência $\{r_n\} \subset K$, então possui uma subsequência convergente para um ponto r. Suponhamos que seja $\{r_n\}$ já seja convergente. Escolhamos um ponto $s \in I^-(r) \cap M \setminus \overline{I^-(p)}$. Para n suficientemente grande, temos que $r_n \in I^-(s)$. Como, cada $r_n \in \overline{I^-(p_n)}$, isto significa que qualquer vizinhança de r_n possui pontos de $I^-(p_n)$. Em particular, $I^+(s)$ possui pontos de $I^-(p_n)$, e deste modo, $p_n \in I^+(s) \subset J^+(s)$, para n grande. Por ser,$J^+(s)$ fechado, então $p \in J^+(s)$. E assim, $s \in J^-(p) \subset \overline{I^-(p)}$, uma contradição.

Agora, necessitamos apenas mostrar que o espaço-tempo é distinguidor. Antes iremos provar a seguinte afirmação

Afirmação 4.41. *Em qualquer espaço-tempo (M, g) é verificada a seguinte igualdade $\overline{I^{\pm}}(p) = \overline{J^{\pm}}(p)$, para todo $p \in M$.*

Demonstração. Iremos mostrar o caso $\overline{I^+}(p) = \overline{J^+}(p)$.
Dado $p \in M$, sabemos que $I^+(p) \subset J^+(p) \Rightarrow \overline{I^+}(p) \subset \overline{J^+}(p)$. Provaremos que $\overline{J^+}(p) \subset \overline{I^+}(p)$. Seja $q \in \overline{J^+}(p)$ então, para toda vizinhança arbitrária U de q existe um evento $q' \in U$ tal que $q' \in J^+(p)$. Observe que $U \cap I^+(q') \neq \emptyset$, já que $q' \in \overline{I^+}(q')$. Tome $p' \in U \cap I^+(q')$, então, pelo Corolário 1, $p' \in I^+(p)$, e como a vizinhança U foi escolhida de forma arbitrária, temos que $q \in \overline{I^+}(p)$. □

Suponha que o espaço-tempo não seja distinguidor, então existem eventos $p, q \in M$ com $p \neq q$ tais que $I^+(p) = I^+(q)$. Tome uma sequencia qualquer $\{q_n\} \to q$ com $q \ll q_n$, então $q_n \in I^+(p)$, para todo $n \in N$. Desta forma, temos que $q \in \overline{I^+}(p) = \overline{J^+}(p) = J^+(p)$, isto é, $p < q$. De forma análoga, temos que $q < p$. E disto, o espaço-tempo não pode ser causal, já que admite uma curva causal fechada orientada para o futuro. Uma contradição.

□

4.2.1.7 Espaços-tempo globalmente hiperbólico

Definição 4.42. *Um espaço-tempo é dito* ***globalmente hiperbólico*** *se é causal e cada diamante $J^+(p) \cap J^-(p)\,, \forall p, q \in M$ é um subconjunto compacto de M.*

A seguinte proposição nos garante que os espaços-tempos globalmente hiperbólico são também causalmente simples.

Proposição 4.43. *Se (M,g) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico então $J^-(p)$ e $J^+(p)$ são fechados para todo $p \in M$. Portanto, (M, g) é causalmente simples.*

Demonstração. Seja $p \in M$. Assumamos que $J^+(p)$ não seja fechado. Escolhendo $r \in \overline{J^+(p)} \setminus J^+(p)$, tome um $q \in I^+(r)$. Escolhendo uma sequência $\{r_n\}_{n\in N} \subset J^+(p)$ tal que $r_n \to r$, temos que para um $n_0 \in N$, $\{r_n\} \subset J^-(q)$, já que r está no aberto $I^-(q) \subset J^-(q)$. Logo, para $n > n_0$ temos que $\{r_n\} \subset J^+(p) \cap J^-(q)$ que é compacto. Assim, temos uma sequencia $\{r_n\}$ no compacto $J^+(p) \cap J^-(q)$ que converge para $r \notin J^+(p) \cap J^-(q)$, o que é absurdo. □

4.2.2 Conjuntos acronais e hipersuperfícies de Cauchy

Nesta seção (M^{n+1}, g) denotará um espaço-tempo qualquer.

4.2.2.1 Conjuntos acronais

Definição 4.44. *Um conjunto $A \subset M$ é dito acronal desde que a relação $p \ll q$ nunca seja satisfeita para $p, q \in A$, isto é, nenhuma curva tipo-tempo toca A mais de uma vez. De maneira equivalente, A é acronal se*

$$A \cap I^{\pm}(A) = \emptyset.$$

De forma análoga, podemos definir um conjunto **acausal**.

Exemplo 4.45. *Consideremos R^2 com a métrica $g = dx^2 - dy^2$. Seja $A = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, y = 0\}$. Este conjunto é acronal, já que dado eventos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, temos que o vetor $v = (x_2 - x_1, 0)$ é tipo-espaço.*

Observe que qualquer aberto U de um espaço-tempo arbitrário não é acronal, pois basta tomar uma curva $\gamma : [0, b) \to M$ tipo-tempo orientada para o futuro com $\gamma(0) \in U$, por continuidade, existirá um $\delta > 0$ tal que $\gamma(\delta) \in U$, e portanto, $\gamma(\delta) \in I^+(\gamma(0))$.

Definição 4.46. *Dado um conjunto acronal A, chamamos de $\boldsymbol{edge(A)}$ ao conjuntos de todos os eventos $p \in \overline{A}$ tal que para toda vizinhança U de p, existe uma curva tipo-tempo partindo de $I^-(p, U)$ e chegando em $I^+(p, U)$ que não cruza A.*

Exemplo 4.47. *No exemplo anterior, temos que* ***edge****(A) é formado pelos eventos* $(0,0)$ *e* $(1,0)$.

Definição 4.48. *Um subconjunto* $T \subset M$ *é uma* ***hipersuperfície Lipschitziana*** *se for localmente o gráfico de uma função Lipschitz: dado* $p \in T$*, existe uma carta* (V,ϕ) *de* M *em torno de* p *tal que* $\phi(V \cap T)$ *é o gráfico de uma função Lipschitz* $h : U \subset R^n \to R$*, onde* U *é aberto.*

Proposição 4.49. *Seja* $A \subset M^{n+1}$ *acronal com* $A \cap edge(A) = \emptyset$*. Então,* A *é uma hipersuperfície Lipschitziana.*

Demonstração. Seja $p \in A$. Como $p \notin edge(A)$, então existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que para toda curva γ tipo-tempo orientada para o futuro de $I^-(p,V)$ para $I^+(p,V)$ intersepta A. Diminuindo V se necessário, podemos supor que existe em V um sistema de coordenadas ϕ tal que $\partial/\partial x^0$ seja tipo-tempo orientado para o futuro. Podemos escolher uma vizinhança W de p, com $W \subset V$ tal que

(i) $\phi(W) = (a-\delta, b+\delta)\,\mathrm{x}\,U \subset R^1\,\mathrm{x}\,R^n$, onde $0 < \delta$ e $U \subseteq R^n$ aberto.

(ii) Todos eventos com coordenada $x_0 = a$ estejam em $I^-(p,V)$ e eventos com coordenada $x_0 = b$ estejam em $I^+(p,V)$.

Das hipóteses em V e W, e por ser A acronal, segue que para todo $y \in U$, a curva coordenada $x_0 : [a,b] \to M$ dada por

$$t \mapsto x_0(t) := \phi^{-1}(t,y)$$

cruza A em um único evento $p_y \in A$. Logo, definindo a função $h : U \to (a,b)$ por $h(y) = x_0(p_y)$, temos que

$$\phi(W \cap A) \;=\; graf(h).$$

Mostraremos que a função h é Lipschitz. Como A é acronal, então $\phi(V \cap A)$ também o é em $(\phi(V), \phi_* g)$. Diminuindo V se necessário, podemos supor que a métrica em $\phi(V \cap A)$ dada por

$$\tilde{g} = -a\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + ... + \mathrm{d}x_n^2, \qquad \text{, onde } a > 0,$$

satisfaz $\tilde{g} < \phi_* g$ (veja lema 4.29). Como $\phi(V \cap A)$ é acronal com relação a $\phi_* g$, também será com relação a $\tilde{g}$. Agora, sejam $q, r \in A \cap V$ tais que $\phi(q) = (x_0, x_1, ..., x_n)$ e $\phi(r) =$

$(y_0, y_1, ..., y_n)$. Então, por ser $\phi(A \cap V)$ acronal com respeito a $\tilde{g}$, o vetor $(y_0 - x_0, ..., y_n - x_n)$ é tipo-espaço, isto é,

$$\tilde{g}\Big((y_0 - x_0, ..., y_n - x_n), (y_0 - x_0, ..., y_n - x_n)\Big) > 0$$

Disto,

$$-a(y_0 - x_0)^2 + (y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2 > 0$$

$$(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2 > a(y_0 - x_0)^2$$

$$||(y_1, ..., y_n) - (x_1, ..., x_n)|| > \sqrt{a}|y_0 - x_0|$$

□

Corolário 4.50. *Os conjuntos $\partial I^-(p)$ e $\partial I^+(p)$ são hipersuperfícies Lipschitzianas para todo $p \in M$.*

Demonstração. Iremos mostrar apenas para o conjunto $\partial I^+(p)$. Devemos verificar que $\partial I^+(p)$ é acronal e $\partial I^+(p) \cap edge(\partial I^+(p)) = \emptyset$.

Suponha que conjunto $\partial I^+(p)$ não seja acronal, então existem $q, r \in \partial I^+(p)$ tais que $r \in I^+(q) \Rightarrow q \in I^-(r)$. Disto, existe uma vizinhança $U \ni q$ com $U \subset I^-(r)$. Mas, como $q \in \partial I^+(p)$ então existe $p' \in U$ tal que $p' \in I^+(p)$, e disto, $p \ll p' \ll r \Rightarrow r \in I^+(p)$. Porém, como o conjunto $I^+(p)$ é aberto, temos que $\partial I^+(p) \cap I^+(p) = \emptyset$. Logo, temos uma contradição. Agora, vejamos que $edge(\partial I^+(p)) = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $\partial I^+(p)$ não seja acronal, então existe um evento $q \in \partial I^+(p)$ e uma vizinhança $U \ni q$ com uma curva γ tipo-tempo que parte de um evento $q_- \in I^-(p; U)$ a um evento $q_+ \in I^+(p; U)$ sem cruza $\partial I^+(p)$. Como $q_+ \in I^+(q; U) \subset I^+(q) \Rightarrow q \in I^-(q_+)$ então existe uma vizinhança $V \ni q$ tal que $V \subset I^-(q_+)$. Disto, $V \cap I^+(p) \neq \emptyset$, já que $q \in \partial I^+(p)$. Então, $q_+ \in I^+(V \cap I^+(p)) \subset I^+(p)$, e portanto, $I^+(q) \subset I^+(p)$. De maneira análoga, temos que $I^-(q) \subset M \setminus I^-(p)$. Então, temos que $q_+ \in I^+(p)$ e $q_- \in M \setminus I^-(p)$, já que γ é contínua e uni q_- a q_+, e portanto, pelo teorema da fronteira, existe um $\overline{q} \in \partial I^+(p)$. □

4.2.2.2 Hipersuperfícies de Cauchy

Apresentaremos a noção de hipersuperfície de Cauchy. Conforme veremos, no capítulo 4, os espaço-tempo globalmente hiperbólicos admitem hipersuperfícies de Cauchy.

Definição 4.51. *Uma hipersuperfície de Cauchy S em um espaço-tempo (M, g) é um subconjunto $S \subset M$ que verifica a seguinte propriedade: Cada curva tipo-tempo inextensível corta a S em um único evento.*

Exemplo 4.52. *Em R_1^{n+1}, os hiperplanos $\Pi_k := \{(k, x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \in R^n\}$, para cada k real fixo, são hipersuperfícies de Cauchy.*

Proposição 4.53. *Qualquer hipersuperfície de Cauchy $S \subseteq M$ é um hipersuperfície Lipschitziana.*

Demonstração. Pela Proposição 4.49, precisamos verificar apenas que S é acronal e $S \cap edge(S) = \emptyset$. Mostremos que S é acronal, sejam $p, q \in S$, suponha que exista uma curva $\gamma : [0, 1] \to M$ tipo-tempo orientada para o futuro tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Seja $\delta : [1, b) \to M$ com $\delta(1) = q$ uma curva tipo-tempo inextensível orientada para o futuro, fazendo a justaposição $\delta * \gamma$ temos uma curva tipo-tempo inextensível orientada para o futuro que cruza S duas vezes, o que é absurdo, portanto S deve ser acronal.Agora, provemos que $S \cap edge(S) = \emptyset$. Sejam $p \in \overline{S}$ e U uma vizinhança de p. Tomemos $p_\pm \in I^\pm(p, U)$ e γ uma curva tipo-tempo orientada para o futuro em U de p_- até p_+. Sejam α_+ uma curva tipo-tempo orientada para o futuro começando em p_+ e α_- uma curva tipo-tempo orientada para o futuro chegando em p_-. A curva $\alpha_+ * \gamma * \alpha_-$ é uma curva tipo-tempo inextensível orientada para o futuro, portanto deve intersectar S. Assim, $p \notin edge(S)$, e por ser p qualquer, temos $edge(S) = \emptyset$. E é óbvio que $S \cap edge(S) = \emptyset$. □

5 FUNÇÃO TEMPORAL E O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO TOPOLÓGICA DE GEROCH

Neste capítulo, apresentaremos as demonstrações de Hawking sobre existência de função do tempo em espaços-tempo estavelmente causais, e de Geroch sobre existência de decomposição topológica do tipo $R \times S$, onde S é uma hipersuperfície de Cauchy, em espaços-tempo globalmente hiperbólicos. Estas demonstrações fazem uso das chamadas funções volume passado e futuro. Começaremos construindo tais funções. Tomamos como principal referência para este capítulo o artigo (SÁNCHEZ, 2004).

5.1 FUNÇÕES VOLUMES

A construção das funções volumes é feita através da escolha de uma medida de Borel em M, isto é, uma medida definida na σ-álgebra gerada pelos abertos de M, que satisfaz certas propriedades.

5.1.1 Medidas admissíveis

Definição 5.1. *Uma medida de Borel m em M é dita **admissível** se satisfaz:*

1. *Finitude: $m(M) < \infty$.*
2. *Para qualquer conjunto $U \subseteq M$ aberto não vazio temos $0 < m(U)$.*
3. *Os conjuntos $\partial I^+(p)$ e $\partial I^-(p)$ possuem medida nula.*
4. *Dados aberto $U \subseteq M$ e uma exaustão de U por compactos, isto é, uma sequência de compactos $\{K_n\}$, com*

$$K_n \subset K_{n+1} \subset U, \quad \forall n, \quad U = \cup_n K_n,$$

então $m(U) = \lim_n m(K_n)$.

Observe que da propriedade 3 e das relações $\overline{I^{\pm}(p)} = \overline{J^{\pm}(p)}$ (veja demonstração da proposição 4.40), toda medida admissível deve satisfazer

$$m(I^{\pm}(p)) = m(\overline{I^{\pm}(p)}) = m(J^{\pm}(p)).$$

Observação 5.2. *Na verdade, a propriedade 4 é uma consequência direta da propriedade 1 e da definição de medida. Apenas a incluímos na definição para destacar as propriedades da medida que serão necessárias para o que segue.*

Proposição 5.3. *Todo espaço-tempo pode ser equipado com uma medida admissível.*

Demonstração. É bem conhecido que toda variedade diferenciável paracompacta M pode ser equipada com uma métrica Riemanniana g_R tal que (M, g_R) tem volume finito. Via o Teorema de Representação de Riesz, o funcional linear

$$\Lambda \ : \ C_c(M) \to R, \quad \Lambda(f) = \int_M f \ dvol_{g_R},$$

onde $C_c(M)$ denota o espaço das funções contínuas $f : M \to R$ com suporte compacto, pode ser representado por alguma medida de Borel regular m:

$$\Lambda(f) \ = \ \int_M f(x) \ dm(x) \ , \quad \forall f \in C_c(M). \tag{5.1}$$

De (5.1) e de $\int_M 1 \ dvol_{g_R} < \infty$, segue que $m(M) < \infty$ e $m(U) > 0$, se U é aberto. A propriedade 3 é consequência de serem $\partial I^{\pm}(p)$ hipersuperfícies Lipschitzianas de M (corolário 4.50) e do fato bem conhecido de que gráficos de funções Lipschitz $h : U \subseteq R^n \to R$ têm medida de Lebesgue nula. □

5.1.2 Funções volumes e funções do tempo generalizadas

Até o final deste capítulo, consideraremos fixada uma medida admissível m em M, a qual suporemos normalizada, isto é, $m(M) = 1$.

Consideremos agora as funções volume futuro t^+ e volume passado t^- associadas à medida m, definidas por

$$t^-(p) = m(I^-(p)) \ \text{ e } \ t^+(p) = -m(I^+(p)), \quad \forall p \in M.$$

Observe que

$$p < q \ \Rightarrow \ t^{\pm}(p) \leq t^{\pm}(q) \tag{5.2}$$

já que sendo $p < q$, então $I^+(q) \subset I^+(p)$ e $I^-(p) \subset I^-(q)$, e disto $t^{\pm}(p) \leq t^{\pm}(q)$.

Estas funções não são necessariamente contínuas. Veremos na próxima seção sob quais condições valem suas continuidades. A seguinte proposição no fornece algumas propriedades destas funções.

Proposição 5.4. *Um espaço-tempo (M, g) é:*

(a) Cronológico se, e somente se, t^- (resp. t^+) é estritamente crescente em qualquer curva tipo-tempo orientada no futuro.

(b) Passado (resp. futuro) distinguidor se, e somente se, t^- (resp. t^+) é estritamente crescente em qualquer curva causal orientada no futuro.

Demonstração. (a) ($\Rightarrow$) Se $p \ll q$ mas $t^-(p) = t^-(q)$, necessariamente, temos $I^-(p) = I^-(q)$ a menos de um conjunto de medida nula. Desta forma, o aberto $I^+(p) \cap I^-(q) \subset I^-(p)$, e portanto,

$$(I^+(p) \cap I^-(q)) \cap I^-(p) \neq \emptyset$$

Escolhendo um ponto r qualquer nesta intersecção, temos que $p \ll r \ll p$. Logo, r é cruzado por uma curva tipo-tempo fechada.

($\Leftarrow$) Suponha, por contradição, M não seja cronológico e que t^- seja estritamente crescente, então existem $p \in M$ e uma curva $\gamma : [0, 1] \to M$ tipo-tempo fechada orientada para o futuro com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Assim, deveríamos ter $t^-(\gamma(0)) = t^-(p) < t^-(\gamma(1)) = t^-(p)$. Chegamos a uma contradição.

(b) ($\Rightarrow$) Assuma que o espaço-tempo seja passado distinguidor e existam dois pontos $p, q \in M$ tais que $p \leq q$ com $p \neq q$ e $t^-(p) = t^-(q)$. Então, quase todos os pontos de $I^-(q)$ estão em $I^-(p)$. Escolha uma sequência $\{q_n\} \in I^-(p) \cap I^-(q)$ convergindo para q. Observe que, necessariamente $I^-(q_n) \subset I^-(p), \forall n$ e $I^-(q) = \cup_n I^-(q_n)$. Mas, isto implica que $I^-(q) \subset I^-(p)$. E como, $I^-(p) \subset I^-(q)$, temos que $I^-(p) = I^-(q)$, e portanto, o espaço-tempo não é passado distinguidor.

($\Leftarrow$) Veja ((SÁNCHEZ, 2004), Proposição 3.3)

□

Observação 5.5. *i. Observe que, por (5.2), se o espaço-tempo (M, g) não for causal, então ao longo de qualquer curva causal fechada $t^{\pm}$ são constantes.*

ii. Se o espaço-tempo (M, g) é distinguidor então as funções $t^{\pm}$ são funções do tempo generalizadas (Ver definição 3.12).

5.1.3 Continuidade das funções volumes

Agora veremos que a continuidade das funções volume passado t^- e volume futuro t^+ é equivalente a continuidade dos mapas $I^{\pm}$ (ver seção 4.2.1.5, Capítulo 3), para isto, será de grande utilidade lembrarmos a seguinte definição da topologia geral:

Definição 5.6. *Sejam X um espaço topológico e $f : X \to R$ uma função definida neste espaço.*

1. *f é dita semicontínua inferior em $x_0 \in X$ se para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$, para todo $x \in U$.*

2. *f é dita semicontínua superior em x_0 se para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$, para todo $x \in V$.*

É claro que f é contínua em X se , e somente se, é semicontínua inferior e semicontínua superior em todo ponto $x \in X$.

Lema 5.7. *(a) A continuidade interior de I^- (resp. I^+) é equivalente a semicontinuidade inferior (resp. superior) de t^-(resp. t^+).*

(b) A continuidade exterior de I^-(resp. I^+) é equivalente a semicontinuidade superior(resp. inferior) de t^-(resp. t^+).

Demonstração. Iremos demonstrar apenas os casos passado, já que para os casos futuros as demonstrações são análogas.

(a) ($\Leftarrow$) Não há nada a ser provado já que pela Proposição 4.33, temos que os mapas $I^{\pm}$ são sempre interiormente contínuos.

($\Rightarrow$) Seja $\{p_n\} \to p$ e fixe um $\epsilon > 0$. Como todo aberto de M admite uma exaustão por compactos, segue da propriedade 4 da medida m (veja def. ??) que existe um compacto $K \subset I^-(p)$ tal que $m(I^-(p)) - m(K) < \epsilon$, isto é,

$$m(K) > m(I^-(p)) - \epsilon = t^-(p) - \epsilon.$$

Por ser I^- contínua interior, e por $\{p_n\} \to p$, teremos que $K \subset I^-(p_n)$, a partir de um certo $n_o \in N$. Disto,

$$m(K) < m(I^-(p_n)) = t^-(p_n) \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

Assim, se $n \geq n_0$, $t^-(p_n) > m(K) > t^-(p) - \epsilon$ e, portanto, $t^-(p_n) > t^-(p) - \epsilon$.

(b) ($\Rightarrow$) Seja $\{p_n\} \to p$ e fixe $\epsilon > 0$. Vamos mostrar que $t^-(p_n) < t^-(p) + \epsilon$ para n a partir de um certo n_0. Tome um conjunto compacto $K \subset M \setminus \overline{I^-(p)}$ tal que

$$m(K) > m(M \setminus \overline{I^-(p)}) - \epsilon \Rightarrow m(M) - m(K) < m(I^-(p)) + \epsilon.$$

Como I^- é contínua exterior, e $\{p_n\} \to p$, temos que $K \subset M \setminus \overline{I^-(p_n)}$, para n grande, e assim,

$$m(K) < m(M \setminus \overline{I^-(p_n)}) = m(M) - m(I^-(p_n)), \text{ isto é, } m(I^-(p_n)) < m(M) - m(K).$$

Portanto, para n suficientemente grande,

$$t^-(p_n) \leq m(M) - m(K) < t^-(p) + \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Se I^- não é contínua exterior em $p \in M$ então, existe um compacto $K \subset M \setminus \overline{I^-(p)}$ e uma sequência $\{p_n\} \to p$ tal que cada $\overline{I^-(p_n)} \cap K \neq \emptyset$, isto é, existem $r_n \in \overline{I^-(p_n)} \cap K$. Disto, como $\{r_n\} \subset K$, podemos extrair uma subsequência convergente $\{r_{n_m}\} \to r \in K$. Escolha um $s \in M \setminus \overline{I^-(p)}$ tal que $s \ll r$. Como a relação cronológica é aberta , existem vizinhanças $U, V \subset M \setminus \overline{I^-(p)}$ de s, r, respectivamente, tais que

$$U \subset \bigcap_{p' \in V} I^-(p') \quad \text{e} \quad U \subset I^-(p_n) \text{ ,para } n \text{ grande.}$$

Agora, escolha uma sequência $\{q_j\} \to p$ satisfazendo

$$p \ll q_j \ll q_{j-1}, \quad \forall j.$$

Então, $U \subset I^-(q_j), \forall j$. Tomando $\varepsilon = m(U) > 0$:

$$t^-(q_j) = m(I^-(q_j)) \leq m(I^-(q)) + m(U) = t^-(q) + \varepsilon.$$

Como queríamos mostrar.

□

Do lema anterior e da definição 5.6, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 5.8. *Um espaço-tempo (M, g) é causalmente contínuo se, e somente se, as funções t^-, t^+ são funções do tempo.*

Assim, já sabemos em quais condições causais as funções volume são contínuas.

5.2 FUNÇÕES DO TEMPO E CAUSALIDADE ESTÁVEL

Apresentaremos agora a demonstração do seguinte teorema devido a Hawking(HAWKING; ELLIS, 1973):

Teorema 5.9. *Qualquer espaço-tempo (M, g) estavelmente causal admite uma função do tempo.*

Demonstração. Por ser (M, g) estavelmente causal, pela observação 4.24, existe uma família a um parâmetro de métricas g_λ, com $\lambda \in [0, 2]$ que satisfaz:

i. $g_0 = g$;

ii. g_λ é causal, para todo $\lambda \in [0, 2]$;

iii. $\lambda < \lambda' \Rightarrow g_\lambda < g_{\lambda'}$.

Denotaremos por t^-_λ a função volume passado com respeito a g_λ. Como a medida m é normalizada, isto é, $m(M) = 1$, temos que

$$0 < t^-_\lambda(p) < 1, \quad \forall p \in M.$$

Defina a função $t(\cdot) : M \to R$ dada por

$$t(p) = \int_0^1 t^-_\lambda(p) \mathrm{d}\lambda.$$

Primeiramente, note que a integral existe, pois fixado $p \in M$ e dados $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$, temos que $I^-_{\lambda_1}(p) \subset I^-_{\lambda_2}(p)$, e disto $t^-_{\lambda_1}(p) = m(I^-_{\lambda_1}(p)) \ \leq \ m(I^-_{\lambda_2}(p)) = t^-_{\lambda_2}(p)$. Logo, para cada p, a função $\lambda \mapsto t^-_\lambda(p)$ é não-decrescente no intervalo $[0, 1]$ e, portanto, integrável.

Como g_λ é causal para cada $\lambda \in [0,2]$, então g_λ é estavelmente causal e, em particular (Prop. 4.17 e 4.31 do Cap. 3), distinguidor, se $\lambda \in [0,1]$. Logo, pela Prop. 5.4, t_λ^- é uma função do tempo generalizada para cada $\lambda \in [0,1]$.

Observe que, dados $p, q \in M$ com $p < q$, temos

$$t(p) = \int_0^1 t_\lambda^-(p) < \int_0^1 t_\lambda^-(q) = t(q).$$

Isto é, a função t é uma função generalizada do tempo

Agora, vejamos que a função t é contínua. Para isso, mostraremos inicialmente que t é semicontínua superior. Fixe $p \in M$ e $\varepsilon \in (0,1)$. Escolha uma vizinhança U de p tal que $m(U) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Afirmação 5.10. *Existe uma vizinhança V de p tal que, para todo $\lambda \in [0,1]$,*

$$I_\lambda^-(V, \overline{U}) \cap \partial U \ \subset \ I_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}^-(p, \overline{U}) \cap \partial U. \tag{5.3}$$

Demonstração. Dados $\lambda_1 < \lambda_2$, pelo Lema 4.30 existe uma vizinhança $V[\lambda_1, \lambda_2]$ de p tal que

$$I_{\lambda_1}^-(V[\lambda_1, \lambda_2], \overline{U}) \ \cap \ \partial U \subset I_{\lambda_2}^-(p, \overline{U}) \cap \partial U. \tag{5.4}$$

Supondo cada $V[\lambda_1, \lambda_2]$ maximal com respeito à propriedade acima, temos que, dados $\lambda_1 < \lambda_1' < \lambda_2' < \lambda_2$, como $g_{\lambda_1} < g_{\lambda_1'} < g_{\lambda_2'} < g_{\lambda_2}$, então

$$V[\lambda_1', \lambda_2'] \ \subset \ V[\lambda_1, \lambda_2] \tag{5.5}$$

(veja demonstração do Lema 4.30). Seja $n \geq 2/\varepsilon$ e defina

$$V := \cap_{i=0}^{2n} V\big[\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}\big].$$

Então V é uma vizinhança de p. Dado $\lambda \in [0,1]$, por ser $n \geq 2/\varepsilon$, existe i tal que $[i/2n, (i + 1/2n)] \subset [\lambda, \lambda + \varepsilon/2]$ e assim, por (5.5), teremos $V[i/2n, (i+1)/2n] \subset V[\lambda, \lambda + \varepsilon/2]$. Em particular,

$$V \ \subset \ V[\lambda, \lambda + \varepsilon/2], \ \ \forall \lambda \in [0,1],$$

e portanto V satisfaz (5.3) para todo $\lambda \in [0,1]$. □

Pela afirmação acima,

$$I_\lambda^-(q; M) \setminus \overline{U} \subset I_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}^-(p; M) \setminus \overline{U}, \ \ \forall q \in V, \ \lambda \in [0,1]$$

e disto,

$$t^-_\lambda(q) \leq t^-_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}(p) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall q \in V.$$

Assim, realizando integração no intervalo $[0,1]$,

$$\begin{aligned} t(q) &\leq \int_0^1 \Big(t^-_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}(p) + \frac{\varepsilon}{2}\Big)d\lambda = \int_0^1 t^-_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}(p)d\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= t(p) - \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} t^-_\lambda(p)d\lambda + \int_1^{1+\frac{\varepsilon}{2}} t^-_\lambda(p)d\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< t(p) + \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $q \in V$. Portanto, t é semicontínua superior.

A semicontinuidade inferior é obtida de forma semelhante, utilizando o fato que existe uma vizinhança V tal que

$$I^-_\lambda(p;\overline{U}) \cap \partial U \subset I^-_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}(q;\overline{U}) \cap \partial U, \quad \forall q \in U,\ \lambda \in [0,1],$$

disto

$$I^-_\lambda(p;M) \setminus \overline{U} \subset I^-_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}(q;M) \setminus \overline{U}, \quad \forall q \in U,\ \lambda \in [0,1].$$

Assim, como no caso anterior,

$$t(q) \geq t(p) - \varepsilon.$$

□

5.3 TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO TOPOLÓGICA DE GEROCH

Nesta seção consideraremos o espaço-tempo (M,g) globalmente hiperbólico.

Definição 5.11. *Defina a função $T : M \to R$ dada por*

$$T(p) = \log\left(-\frac{t^-(p)}{t^+(p)}\right) = \log\left(\frac{m(I^-(p))}{m(I^+(p))}\right). \tag{5.6}$$

Proposição 5.12. *A função T defina anteriormente(5.6), é contínua e estritamente crescente ao longo de qualquer curva tipo-tempo orientada para o futuro. Em particular, T é uma função do tempo.*

Demonstração. Como o espaço-tempo (M,g) é globalmente hiperbólico, pela proposição 4.40 e o teorema 5.8, então (M,g) é causalmente contínuo, e portanto, as funções t^- e t^+ são contínuas. Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma curva tipo-tempo orientada para o futuro, tomemos

$a \leq t_1 < t_2 \leq b$ tais que $\gamma(t_1) = p$ e $\gamma(t_2) = q$, então $p \ll q$, e portanto, temos que $I^-(p) \subset I^-(q)$ e $I^+(q) \subset I^+(p)$, disto

$$t^-(p) = m(I^-(p)) < m(I^-(q)) = t^-(q) \quad \text{e} \quad -t^+(q) = m(I^+(q)) < m(I^+(p)) = -t^+(p).$$

E disto, temos que

$$\frac{-t^-(p)}{t^+(p)} < \frac{-t^-(q)}{t^+(q)}.$$

E como a função logarítmica é crescente, temos que

$$T(p) = \log\left(-\frac{t^-(p)}{t^+(p)}\right) < \log\left(-\frac{t^-(q)}{t^+(q)}\right) = T(q).$$

□

Lema 5.13. *A função T satisfaz:*

$$\lim_{s\to a} T(\gamma(s)) = -\infty, \qquad \lim_{s\to b} T(\gamma(s)) = \infty \tag{5.7}$$

para qualquer curva causal orientada no futuro e inextensível $\gamma : (a, b) \to M$.

Demonstração. Necessitamos checar apenas que:

$$\lim_{s\to a} t^-(\gamma(s)) = 0 \text{ e } \lim_{s\to b} t^+(\gamma(s)) = 0$$

Para isto, iremos demonstrar inicialmente a seguinte afirmação,

Afirmação 5.14. *Dado qualquer compacto $K \subset M$ então, $K \cap I^-(\gamma(s_0)) = \emptyset$, para algum $s_0 \in (a, b)$ (e assim, para qualquer $s < s_0$).*

Demonstração. Escolha um ponto qualquer da curva $q = \gamma(c)$ com $c \in (a, b)$. Assuma, por contradição, a existência de uma sequência $p_j = \gamma(s_j)$ com $\{s_j\} \to a$, $s_j \in (a, c)$ com uma sequência associada $r_j \in K \cap I^-(p_j)$ que admite uma subsequência convergente, suponha que $\{r_j\} \to r$, e escolha $p \ll r$. Então, $p \ll p_j \ll q$ e $\gamma|_{(a,c]}$ está contida no compacto $J^+(p) \cap J^-(q)$. E pela proposição 4.22, contradiz a causalidade forte de M. □

Agora, dado $s^* \in (a, b)$, considere uma sequência de compactos $\{K_n\}$ com

$$K_n \subset K_{n+1} \subset I^-(\gamma(s^*)) \text{ e } \cup K_n = I^-(\gamma(s^*)).$$

Pela propriedade 4 da medida admissível, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{n}$, temos que

$$0 \leq m(I^-(\gamma(s^*))) - m(K_n) < \frac{1}{n} \tag{5.8}$$

Escolha um $N \in N$, como $K_1 \subset ... \subset K_N$, implica que $\cup_{i=1}^{N} K_i = K_N$, que é compacto, mas pela afirmação anterior, existe um $s_0 \in (a, s^*)$ tal que $I^-(\gamma(s_0) \cap K_N = \emptyset$, e como $I^-(\gamma(s^*)) \subset I^-(\gamma(s_0))$ e $I^-(\gamma(s^*)) \subset K_N$, temos que

$$m(I^-(\gamma(s^*))) \geq m(I^-(\gamma(s_0))) + m(K_N)$$

E com a desigualdade (5.8), temos

$$m(I^-(\gamma(s_0))) = m(I^-(\gamma(s_0))) + m(K_N) - m(K_N) \leq m(I^-(\gamma(s^*))) - m(K_N) < \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow m(I^-(\gamma(s_0))) < \frac{1}{N}.$$

Fazendo $N \to \infty$, ficamos com $s \to a$ e $t^-(\gamma(s)) = m(I^-(\gamma(s))) \to 0$, como queríamos mostrar. □

Lema 5.15. *Existe um campo $X \in X(M)$ tipo-tempo completo.*

Demonstração. Como M é orientável no tempo, existe um campo $X \in X(M)$ que é tipo-tempo. Escolha uma métrica Riemanniana completa g_R em M. Por ser X tipo-tempo, X nunca se anula e assim podemos defir $\tilde{X} \in X(M)$ por $\tilde{X} = X/|X|_R$, onde a norma $||_R$ é com respeito a g_R. Como $\tilde{X}$ é um campo limitado com respeito a g_R, segue do Teorema de Hopf-Rinow que $\tilde{X}$ é completo. E como $0 < 1/|X|$, o carácter causal de $\tilde{X}$ é igual ao de X frente à métrica Lorentziana g. Portanto, o campo $\tilde{X}$ é tipo-tempo e completo. □

Estamos agora em condições de provar o seguinte teorema devido a Geroch(GEROCH, 1970):

Teorema 5.16. *A função $T : M \to R$ definida em (5.6) é uma função do tempo de Cauchy, isto é, cada conjunto $S_x = T^{-1}(x)$ é uma hipersuperfície de Cauchy (Ver definição 4.51). Além disto, fixados um nível $S_0 = T^{-1}(0)$, e um campo tipo-tempo completo $X \in X(M)$, um homeomorfismo pode ser construído*

$$\Psi : M \to R \,\mathrm{x}\, S_0 \ , \ z \longmapsto (T(z), \rho(z)) \tag{5.9}$$

onde, $\rho : M \to S_0$ é a função definida por $\rho(z) =$ único ponto de S_0 cruzado pela curva integral de X partindo de z.

Demonstração. De fato, cada conjunto S_x é uma hipersuperfície de Cauchy pois, dada qualquer curva $\gamma : (a, b) \to M$ tipo-tempo inextensível orientada para o futuro, as relações (5.7)

e o teorema do valor intermediário garantem que existe $t \in (a, b)$ tal que $T(\gamma(t)) = x$, isto é, $\gamma(t) \in S_x$. O fato de T ser crescente ao longo de γ garante que γ não volta a cruzar S_x.

A inversa de Ψ, $\Psi^{-1} : R \,\mathrm{x}\, S_0 \to M$ pode ser construída da seguinte forma: denote por φ_t^X o fluxo de X e suponha X orientado para o futuro. Dados $t_0 \in R$ e $\rho_0 \in S_0$, a curva integral $t \mapsto \varphi_t^X(\rho_0)$ por ρ_0 é tipo-tempo futuro e inextensível. Logo, como antes, vai existir um único $t^* \in R$ tal que $T(\varphi_{t^*}^X(\rho_0)) = t_0$. Então, $\Psi^{-1}(t_0, \rho_0) = \varphi_{t^*}^X(\rho_0)$.

□

REFERÊNCIAS

BERNAL, A. N.; SÁNCHEZ, M. Smooth globally hyperbolic splittings and temporal functions. *arXiv preprint gr-qc/0404084*, 2004.

DIECKMANN, J. Volume functions in general relativity. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 20, n. 9, p. 859–867, 1988.

GEROCH, R. Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 11, n. 2, p. 437–449, 1970.

HAWKING, S. The existence of cosmic time functions. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1969. v. 308, n. 1494, p. 433–435.

HAWKING, S.; SACHS, R. Causally continuous spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 35, n. 4, p. 287–296, 1974.

HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. [S.l.]: Cambridge university press, 1973. v. 1.

MINGUZZI, E.; SÁNCHEZ, M. The causal hierarchy of spacetimes. *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys*, p. 299–358, 2008.

O'NEILL, . B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103*. [S.l.]: Academic press, 1983. v. 103.

SÁNCHEZ, M. Causal hierarchy of spacetimes, temporal functions and smoothness of geroch's splitting. a revision. *arXiv preprint gr-qc/0411143*, 2004.

VICTORIA, M. A. J.; CAJA, M. S. An introduction to lorentzian geometry and its applications. *XVI Escola de Geometria Diferencial, IME, USP*, 2010.

WHITEHEAD, J. H. C. Convex regions in the geometry of paths. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Univ Press, n. 1, p. 33–42, 1932.