UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

FELIPE DE SOUZA FERNANDES

DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIGAS BIAPOIADAS SUBMETIDAS A FLEXÃO/CISALHAMENTO VIA MÉTODO FORM

Caruaru
2019

FELIPE DE SOUZA FERNANDES

DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIGAS BIAPOIADAS SUBMETIDAS A FLEXÃO/CISALHAMENTO VIA MÉTODO FORM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste - CAA, da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Prof.ª Dra. Juliana von Schmalz Torres

Caruaru

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

F363d Fernandes, Felipe de Souza.
Dimensionamento e análise paramétrica de vigas biapoiadas submetidas a flexão/cisalhamento via método Form. / Felipe de Souza Fernandes. – 2019.
95 f. il. : 30 cm.

Orientadora: Juliana von Schmalz Torres
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Engenharia Civil, 2019.
Inclui Referências.

1. Confiabilidade (Engenharia). 2. Concreto armado. 3. Dimensionamento de vigas. 4. Engenharia – métodos estatísticos. I. Torres, Juliana von Schmalz (Orientadora). II. Título.

CDD 620 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-068)

FELIPE DE SOUZA FERNANDES

DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIGAS BIAPOIADAS SUBMETIDAS A FLEXÃO/CISALHAMENTO VIA MÉTODO FORM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste - CAA, da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

A banca examinadora, composta pelos professores abaixo, considera o candidato APROVADO com nota _____.

Caruaru, ____ de junho de 2019.

Banca examinadora:

Profª. Drª. Juliana von Schmalz Torres:_____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Orientadora)

Prof. Dr. José Moura Soares: _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Avaliador)

Prof. Dr. Douglas Mateus de Lima: _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Avaliador)

Prof. Dr. Elder Alpes de Vasconcelos: _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Coordenador da disciplina de TCC)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Maria Lucila de Souza Fernandes e Aldemir Fernandes Vilela, pelo incansável apoio emocional e financeiro, assim como todo carinho e atenção que se dispuseram a dar, sou eternamente grato não só por essa jornada, mas também por tudo que tenho na vida. Também agradeço à minha irmã, Raquel de Souza Fernandes, por ser a minha melhor amiga, e à minha tia Ana, minha segunda mãe, por todos os momentos em que estivemos juntos, bem como a todos os meus incontáveis familiares que dispuseram palavras de apoio em momentos difíceis.

À professora Dra. Juliana Von Schmalz Torres pela oportunidade e excelente orientação, estando sempre disposta a ajudar, além dos momentos de bronca e paciência.

Agradeço também a todos os outros professores do curso de Engenharia Civil da UFPE – CAA, por fazerem sonhos serem possíveis todos os dias, em especial à professora Dra. Maria Isabela Marques da Cunha Vieira Bello, por toda dedicação como coordenadora do curso, e ao professor Dr. José Moura Soares pela incomensurável ajuda no LABGEO.

A todos os meus amigos de faculdade, em especial Matheus Alves, meu irmão de uma outra mãe, com quem morei por quatro longos anos recheados de momentos difíceis e alegrias, Bruno Filipe, pelas madrugadas de estudos e elaboração de projetos, Kennendh Anderson, meu quase-psicólogo, Anderson Ferreira, João Lucas, Letônio Silva, e tantos outros que ajudaram a fazer essa graduação passar mais rápido.

"Existem maus jeitos de vencer – e bons jeitos de perder. O interessante e preocupante é que nem sempre está claro qual é qual. Uma moeda lançada nem sempre cai cara ou coroa, pode ser que nem chegue a cair."

(Grimsley)

RESUMO

As engenharias estão em constante processo de atualização e mudança em seus métodos e tecnologias, beneficiados principalmente pelas linhas de pesquisa. Um dos grandes auxiliares, principalmente à engenharia de estruturas, é a Confiabilidade Estrutural. Incertezas e modelos probabilísticos são parte de como as estruturas, seus materiais e os carregamentos aplicados se comportam na prática, sendo assim necessários métodos de dimensionamento adequados aos mesmos. No presente trabalho, um desses métodos baseados em confiabilidade, o *First Order Reliability Method*, ou FORM, foi utilizado como ferramenta de projeto de vigas de concreto armado biapoiadas submetidas isoladamente a flexão e cisalhamento, bem como combinações desses esforços, afim de determinar os pontos de projeto em busca do índice de confiabilidade. Também são realizados estudos paramétricos com as diversas variáveis envolvidas no problema, como forma de analisar o impacto das mesmas no dimensionamento desse tipo de estrutura, submetida aos tipos de esforços estipulados. A modelagem do problema é feita através do Método da Rigidez Direta, programado em MATLAB, onde são aplicados as ações externas e condições de contorno e feita a análise estática. Também no MATLAB, foi desenvolvido um programa para o dimensionamento inicial da estrutura, de acordo com a física envolvida no problema e as metodologias e limitações propostas pela literatura analisada. A rotina computacional para o projeto baseado em confiabilidade utiliza a função de otimização *fmincon*, disponível no próprio MATLAB, acoplado ao código do FORM disponibilizado por Torres (2009), feitas as devidas adaptações para o caso de viga de concreto submetida à flexão e cisalhamento. Através dos estudos paramétricos, notou-se uma grande influência da armadura de tração na segurança da estrutura para o caso de flexão, onde os valores para a altura da seção transversal variam na ordem de 15% do valor inicial, em comparação ao concreto onde a variação máxima das duas variáveis foi de 1,44%, também em relação ao valor base, para os diferentes modos de falha. A base mostrou-se inexpressiva na busca da segurança para os modos de falha por flexão e cisalhamento, no entanto, para o modo combinado, varia mais que nos outros casos.

Palavras-chave: Confiabilidade estrutural. Concreto armado. FORM. Dimensionamento.

ABSTRACT

Engineering is in a constant uptade process and changes in its methods and technologies, benefited mainly by research lines. One of the greatest supporters, specially in structural engineering, it's Structural Reliability, as uncertainties and probabilistic models are part of how structures, their materials and applied loads behave in practice, thus being necessary dimensioning methods suitable to them. In the present work, one of these reliability-based methods, the First Order Reliability Method, or FORM, was used as a tool for the design of biapoided reinforced concrete beams subjected to flexion and shear, as well as combinations of these efforts, in order to determine the project points in search of the reliability index. Parametric studies are also performed with the various variables involved in the problem, as a way of analyzing their impact on the design of this type of structure, subject to the types of efforts stipulated. The modeling of the problem is done through the Direct Stiffness Method, programmed in MATLAB, where the stresses and boundary conditions are applied and the static analysis is done. Also in MATLAB, a program was developed for the pre-dimensioning of the structure, according to the physics involved in the problem and the methodologies and limitations proposed by the analyzed literature. The computational routine for the reliability-based project uses the *fmincon* optimization function, available in MATLAB itself, coupled with the FORM code provided by Torres (2009), making the appropriate adaptations for the case of concrete beam subjected to bending and shearing. Through the parametric studies, a great influence of the tensile armature in the safety of the structure was noticed for the case of flexion, where the values for the height of the cross section vary in the order of 15% of the initial value, compared to the concrete where the maximum variation of the two variables was 1.44%, also in relation to the base value, for the different failure modes. The base has shown to be inexpressive in the search for safety for the failure modes by bending and shearing, however, for the combined mode, it varies more than in the other cases.

Keywords: Structural reliability. Reinforced concrete. FORM. Dimensioning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Equação de estado limite e domínios de falha e não-falha. 18
Figura 2.2 – Representação gráfica do FORM. 21
Figura 2.3 – Diagrama de cálculo tensão-deformação do concreto com consideração da fluência. 24
Figura 2.4 – Diagrama de tensão-deformação para as barras de armadura passiva. 24
Figura 2.5 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal. 25
Figura 2.6 – Distribuição das tensões no concreto. 26
Figura 2.7 – Analogia de treliça de Mörsch com estribos verticais. 27
Figura 2.8 – Analogia da treliça generalizada. 27
Figura 2.9 – Forças nas barras da treliça. 28
Figura 2.10 – Solicitação na biela inclinada. 28
Figura 2.11 – Disposição dos estribos ao longo da viga. 30
Figura 2.12 – Níveis de abstração referentes a uma estrutura na análise estrutural. 31
Figura 3.1 – Modelo de viga utilizado no problema e seu carregamento. 35
Figura 3.2 – Discretização do modelo e dimensão do elemento linear de barra utilizado. 36
Figura 3.3 – Representação dos esforços atuantes na seção típica da viga. 38
Figura 3.4 – Fluxograma representando o algoritmo concebido para o trabalho. 45
Figura 3.5 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de falha por flexão para o caso de armadura simples. 46
Figura 3.6 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de falha por flexão para o caso de armadura dupla. 47
Figura 3.7 –Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de falha por cisalhamento. 48
Figura 3.8 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de modo de falha combinado. 49
Figura 3.9 – Trecho do código correspondente à implementação da função *fmincon* para o modo de falha por flexão. 50
Figura 3.10 – Trecho do código correspondente à implementação da função *fmincon* para o modo de falha por cisalhamento. 51
Figura 3.11 – Trecho do código correspondente à implementação da função *fmincon* para o modo combinado de falha por flexão e cisalhamento. 51

Figura 4.1 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do concreto. 54
Figura 4.2 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do concreto. 54
Figura 4.3 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do aço. 56
Figura 4.4 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do aço. 56
Figura 4.5 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação do índice de confiabilidade alvo ($\beta alvo$). 57
Figura 4.6 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação do índice de confiabilidade alvo ($\beta alvo$). 58
Figura 4.7 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do concreto. 59
Figura 4.8 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do concreto. 60
Figura 4.9 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do aço. 61
Figura 4.10 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do aço. 61
Figura 4.11 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação do índice de confiabilidade alvo ($\beta alvo$). 62
Figura 4.12 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação do índice de confiabilidade alvo ($\beta alvo$). 63
Figura 4.13 – Comparação dos valores das variáveis de projeto conforme os três diferentes modos de falha. 64

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Comparativo entre a solução analítica e a solução numérica para um diferente número de elementos. 36
Tabela 3.2 – Dados geométricos do problema. 37
Tabela 3.3 – Tabela 7.2 da NBR 6118 (2014) para correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal. 39
Tabela 3.4 – Tabela 17.3 da NBR 6118 (2014) para taxas mínimas de armadura de flexão para vigas. 41
Tabela 3.5 – Valores da armadura longitudinal. 41
Tabela 3.6 – Valores da armadura transversal. 42
Tabela 3.7 – Índices de confiabilidade alvo para os estados limites últimos pelo período de um ano. 43
Tabela 3.8 – Variáveis aleatórias utilizadas no problema. 44
Tabela 4.1 – Estudo para o caso de flexão. 53
Tabela 4.2 – Projeto da viga à flexão alterando-se as propriedades do concreto. 54
Tabela 4.3 – Projeto da viga à flexão alterando-se as propriedades do aço. 55
Tabela 4.4 – Projeto de viga à flexão para diferentes parâmetros de segurança. 57
Tabela 4.5 – Dimensionamento para o exemplo inicial de cisalhamento. 58
Tabela 4.6 – Projeto da viga ao cisalhamento alterando-se as propriedades do concreto. 59
Tabela 4.7 – Projeto da viga ao cisalhamento alterando-se as propriedades do aço. 60
Tabela 4.8 – Projeto de viga ao cisalhamento para diferentes parâmetros de segurança. 62
Tabela 4.9 – Dimensionamento para o exemplo inicial no modo combinado de falha por flexão e cisalhamento. 63

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

1.1 Objetivo geral 14

1.2 Objetivos específicos 14

2 REFERENCIAL TEÓRICO 15

2.1 Variáveis Aleatórias 15

2.1.1 Função de distribuição acumulada de probabilidades 15

2.1.2 Função densidade de probabilidades 16

2.1.3 Valor esperado e medidas de dispersão de variáveis aleatórias 16

2.2 Problema fundamental de confiabilidade 17

2.3 Método FORM 20

2.3.1 Transformação de variáveis 21

2.3.2 Pesquisa do ponto de projeto 22

2.4 Dimensionamento à flexão 23

2.4.1 Hipóteses básicas do dimensionamento 23

2.4.2 Diagrama de tensão-deformação dos materiais 23

2.4.3 Domínios de dimensionamento à flexão 25

2.4.4 Diagrama retangular para o concreto 26

2.5 Método da Rigidez Direta 31

2.6 Revisão bibliográfica 32

3 METODOLOGIA 35

3.1 Modelagem do Problema 35

3.2 Determinação dos Parâmetros Iniciais 36

3.2.1 Dados Geométricos 36

3.2.2 Cálculo da Armadura Longitudinal 37

3.2.3 Cálculo da Armadura Transversal 41

3.2.4 Índice de Confiabilidade 42
3.2.5 Variáveis Aleatórias 43
3.3 Algoritmo de Otimização 44
3.3.1 Modo de falha por flexão 45
3.3.2 Modo de falha por cisalhamento 47
3.3.3 Modo de falha combinado 48
3.3.4 Função *fmincon* 49
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES 52
4.1 Dimensionamento à flexão **52**
4.1.1 Ponto de partida 52
4.1.2 Estudo paramétrico com a resistência característica do concreto 53
4.1.3 Estudo paramétrico com a resistência característica do aço 55
4.1.4 Estudo paramétrico com os índices de confiabilidade segundo o JCSS 56
4.2 Dimensionamento ao cisalhamento 58
4.2.1 Ponto de partida 58
4.2.2 Estudo paramétrico com a resistência característica do concreto 59
4.2.3 Estudo paramétrico com a resistência característica do aço 60
4.2.4 Estudo paramétrico com os índices de confiabilidade segundo o JCSS 61
4.3 Dimensionamento no modo combinado de falha por cisalhamento e flexão 63
5 CONCLUSÕES 65
5.1 Sugestões de trabalhos futuros 66
REFERÊNCIAS 67
APÊNDICE A – FORM adaptado 70
APÊNDICE B – Rotinas auxiliares ao dimensionamento 88

1 INTRODUÇÃO

As metodologias que abordam projetos de estruturas de concreto armado vêm evoluindo ao longo do tempo no mundo, sempre buscando atualizar a norma técnica ABNT NBR 6118 - Projeto de estruturas de concreto armado - Procedimento, em sua mais recente versão, lançada no ano de 2014. Utilizando modelos baseados em estados limites, a norma tem sido bastante eficaz em prever a resposta do material mediante os esforços aplicados, definindo assim níveis de segurança adequados para que sejam elaborados os projetos.

No entanto, tais modelos procuram apenas estimar o comportamento do concreto armado e seus componentes, pois devido à não-linearidade do material e a grande variabilidade em suas características, a resposta do mesmo aos carregamentos não pode ser prevista com certeza, assim como a natureza do próprio carregamento. Tendo em vista o supracitado, modelagens semi-probabilísticas, que levam em conta as flutuações no comportamento da estrutura, são as mais adequadas para basear o projeto.

No entanto, a utilização desse tipo de modelo não permite a avaliação das probabilidades de ocorrência de falhas no sistema estrutural como um todo, ou em elementos isolados (MOHAMED et al., 2001). Assim, a Teoria de Confiabilidade foi desenvolvida, buscando, entre outros resultados, a probabilidade de falha da estrutura, através de distribuições de probabilidade das incertezas relacionadas ao projeto (SAGRILO, 1994). Tal teoria, permite uma revisão e possível calibração dos modelos de cálculo apresentados pela norma técnica.

São diversas as incertezas presentes em problemas de engenharia. Beck (2008) propõe que elas podem ser divididas em *incerteza intrínseca* e *incerteza epistêmica*, sendo a primeira relacionada à natureza do problema, tais como a aleatoriedade dos fenômenos físicos envolvidos (fenômenos naturais e suas respectivas intensidades, variação na resistência de elementos estruturais e etc.) ou eventos excepcionais, podendo ser amenizada pela coleta de informações, porém não pode ser eliminada. Já a incerteza epistêmica está relacionada ao modelo utilizado e a característica das distribuições de probabilidades das variáveis de projeto, podendo ser diminuída através de uma coleta mais ampla de dados sobre os processos envolvidos ou através de um melhor conhecimento do problema.

Para interpretar o termo “análise de confiabilidade”, Sagrillo (1994) propõe as seguintes definições:

“*Confiabilidade* é o grau de confiança (probabilidade subjetiva) de que um sistema não falhe dentro de um período de tempo especificado e respeitadas as condições de operação (de projeto) do mesmo”

"*Probabilidade de falha* é a probabilidade (subjetiva) de que o sistema falhe, não atendendo às especificações de projeto".

Em geral, a análise de confiabilidade busca auxiliar o projetista a quantificar as incertezas presentes no problema através da busca do critério de probabilidade de falha, dando mais segurança às tomadas de decisões (SAGRILO, 1994). Diversos são os métodos de análise de confiabilidade estrutural, dentre eles o que foi utilizado neste trabalho, o método analítico FORM (*First Order Reliability Method*), através da obtenção de informações via Método da Rigidez Direta programado em MATLAB e pelo uso de otimização em programação não-linear, pôde-se definir os pontos de projeto das variáveis escolhidas.

1.1 Objetivo geral

Projetar as dimensões da seção transversal (base e altura) de vigas de concreto armado submetidas à flexão, cisalhamento e a combinação dos dois esforços, através do método de análise de confiabilidade FORM, utilizando para isso um algoritmo de otimização em programação não-linear. Realizar estudos paramétricos com as resistências características do concreto, do aço, bem como com os índices de confiabilidade obtidos através do FORM.

1.2 Objetivos específicos

- ✓ Realizar a modelagem e análise de tensões de um elemento linear de viga, dispondo de suas características geométricas, composição material, condições de apoio e comprimento, via método da rigidez direta, através de código elaborado pelo autor em MATLAB;
- ✓ Realizar o dimensionamento da viga de concreto armado segundo o delineado na ABNT NBR 6118 (2014), considerando que a mesma está submetida a esforços de flexão pura e esforço cortante, obtendo as respectivas armaduras necessárias e as demais variáveis envolvidas no dimensionamento;
- ✓ Realizar o projeto das dimensões da seção transversal da viga em questão através do método FORM em combinação com um algoritmo de programação não-linear, para os modos de falha por flexão, cisalhamento e pela combinação dos anteriores.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

No presente capítulo, é introduzido todo o embasamento teórico necessário ao entendimento do trabalho. Primeiro, é explicado o conceito de variáveis aleatórias, bem como suas propriedades únicas e como devem ser tratadas. Posteriormente, explica-se como o problema em questão no presente trabalho pode ser resolvido por análise de confiabilidade através do FORM, bem como os modelos matemáticos envolvidos na escrita e solução do problema. Também são apresentados alguns trabalhos relevantes sobre o tema de confiabilidade que serviram de inspiração e embasamento para este.

2.1 Variáveis Aleatórias

Tem-se por definição que variáveis aleatórias reais $X(w)$ são funções reais que atribuem para cada ponto amostral w_i de um espaço amostral Ω um valor real x, tal que:

1. o conjunto $\{X \leq x\}$ é um evento para qualquer número real x;
2. a probabilidade dos eventos $\{X = -\infty\}$ e $\{X = +\infty\}$ é nula.

É comum representar uma variável aleatória por uma letra maiúscula, e uma realização desta variável por uma letra minúscula (BECK, 2008).

O domínio da função variável aleatória $X(w)$ é o espaço amostral Ω. Quando este domínio é formado por um número finito ou infinito contável de pontos, diz-se que a variável é do tipo **discreta**. Quando o domínio é formado por um número infinito de pontos, a variável é dita **contínua**. A ocorrência de eventos baseados em variáveis aleatórias só pode ser descrita em termos de probabilidade.

2.1.1 Função de distribuição acumulada de probabilidades

Para um número real x qualquer, o conjunto $\{X \leq x\}$ formado por todos os pontos amostrais w_i tais que $x(w_i) \leq x$ representa um evento. A probabilidade de ocorrência deste evento é um número que depende de x, e que é dado pela função $F_X(x)$ (BECK, 2008). A função **distribuição acumulada** de probabilidades corresponde à probabilidade de que a variável aleatória X assuma qualquer valor inferior ao valor x:

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \tag{2.1}$$

A função de distribuição acumulada de probabilidades possui as seguintes propriedades:

1. $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$;
2. $F_X(\,)$ é invariavelmente crescente;

3. $F_X(\,)$ é contínua pela direita;
4. para $x_1 \leq x_2$ tem-se:

$$P[\{x_1 < X < x_2\}] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

2.1.2 Função densidade de probabilidades

A derivada em relação a x da função distribuição acumulada de probabilidades é chamada de *função densidade de probabilidades*, ou $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{2.2}$$

Como a função distribuição acumulada de probabilidades pode não ser contínua em todo o domínio, faz-se uma distinção entre variáveis aleatórias contínuas e discretas. Tal distinção condiz com o domínio destes tipos de variáveis (BECK, 2008).

Para distribuições acumuladas de probabilidade discretas, a função densidade de probabilidades pode ser escrita como:

$$f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \tag{2.3}$$

onde a função $\delta(x - x_i)$ é uma **delta de Kronecker**, que é infinita em todos os pontos exceto na origem, onde assume valor unitário (1).

Para distribuições acumuladas de probabilidade contínuas, ainda que não diferenciável em alguns pontos, diz-se que a variável é contínua (BECK, 2008). Das propriedades supracitadas e da equação 2.5, à função densidade de probabilidades são conferidas as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = F_X(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(u)du = F_X(x_2) - F(x_1) = P[\{x_1 \leq X \leq x_2\}]$$

2.1.3 Valor esperado e medidas de dispersão de variáveis aleatórias

O valor esperado, ou *média*, de uma variável aleatória é definido como:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \tag{2.4}$$

Pode-se interpretar a função $f_X(x)$ como uma função de densidade de massa no eixo x, então a média seria o centro de gravidade desta massa (BECK, 2008).

A *variância* de uma variável aleatória mede a dispersão da mesma em torno de sua média μ:

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx \tag{2.5}$$

onde, a constante σ é denominada **desvio padrão**, e é raiz quadrada da variância.

Enquanto a média de uma variável aleatória pode ser interpretada como o centro de massa da função, a variância corresponde ao momento de inércia da massa de probabilidades em relação ao eixo da distribuição, e dá uma ideia de concentração da mesma em torno da média (BECK, 2008).

2.2 Problema fundamental de confiabilidade

O principal objetivo da confiabilidade estrutural é a avaliação da segurança de uma estrutura, ou a avaliação da probabilidade de que a mesma não falhe em atender aos objetivos para quais ela foi projetada, durante a sua vida útil (SAGRILO; LIMA, 2002). Existem vários requisitos de serviço ou de segurança que as estruturas devem atender, e cada distinta maneira a qual a estrutura pode chegar a esse estado indesejável é denominada modo de falha, os quais, individualmente, dão origem a um estado limite (BECK, 2008). Tais estados limites são divididos em: estados limites últimos, caracterizando os requisitos mínimos de segurança, e estados limites de serviço, relacionados às condições de utilização da estrutura.

Os estados limites e seus respectivos modos de falha de elementos estruturais podem ser quantificados através de equações chamadas de *equações de estado limite* (BECK, 2008), os mesmos são representados por equações de estado limite $g(\,)$ em função das variáveis de projeto X:

$$g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \tag{2.6}$$

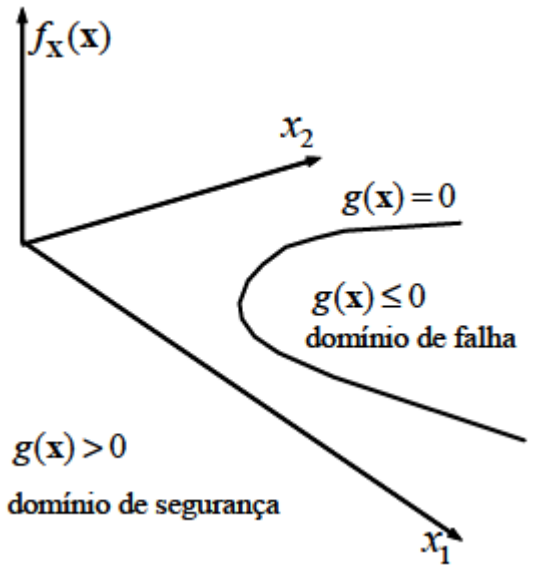
Essas equações são definidas de modo que valores negativos representam falha e valores positivos, o contrário. Assim, as equações de estados limites estabelecem, para cada modo de falha, a fronteira entre os domínios de falha e não-falha:

$$D_f = \{x | g(x) \leq 0\}$$

$$D_s = \{x | g(x) > 0\} \tag{2.7}$$

O domínio de falha é composto por todos os pontos do espaço amostral de X (R^n) que levam à falha da estrutura, já o domínio de segurança é composto pelos pontos que conferem segurança à estrutura. Na Figura 2.1, são apresentados os domínios:

Figura 2.1 – Equação de estado limite e domínios de falha e não-falha.



Fonte: BECK, 2008.

Em geral, as normas técnicas brasileiras apresentam as equações de estado limite envolvendo apenas duas variáveis, resistência (R) e solicitação (S):

$$g(R,S) = R - S = 0 \tag{2.8}$$

Uma vez que R ou S possam ser descritas como variáveis aleatórias, define-se uma medida probabilística de violação dos estados limites, denominada *probabilidade de falha* (BECK, 2008). A mesma é dada por:

$$P_f = P[\{R \leq S\}] = P[\{R - S \leq 0\}] \tag{2.9}$$

A avaliação desta probabilidade dá origem ao **problema fundamental da confiabilidade** (BECK, 2008). A equação acima procura avaliar a probabilidade de que qualquer ponto (r, s) estar dentro do domínio de falha, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$P_f = P\big[(x,y) \in D_f\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) F_R(s) ds \tag{2.9}$$

considerando que as variáveis sejam estatisticamente independentes, sendo $f_S(s)$ a função marginal de densidade de probabilidade da solicitação, e $F_R(s)$ a função de distribuição acumulada de probabilidades da resistência. Integrando a expressão (2.9), a probabilidade de falha é a área sob a curva $f(s)F_R(s)$ (BECK, 2008).

O problema também pode ser avaliado através da variável *margem de segurança* (M), em que valores negativos indicam a falha, e valores positivos a segurança:

$$M = R - S \tag{2.10}$$

Sendo R e S variáveis aleatórias, M também será uma variável aleatória. Neste caso, também avalia-se a probabilidade de falha a partir de M:

$$P_f = P[\{M \leq 0\}] = \int_{-\infty}^{0} f_M(m)dm = F_M(0) \tag{2.11}$$

Se R e S possuem distribuição normal, o problema pode ser resolvido analiticamente. Neste caso, a distribuição de M também será normal.

$$P_f = P[\{M < 0\}] = \int_{-\infty}^{0} f_M(m)dm = F_M(0) \tag{2.12}$$

Seus parâmetros são calculados por:

$$\begin{aligned} \mu_M &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

A variável M pode ser transformada em uma variável normal padrão, que possui média nula e desvio padrão unitário. Essa transformação, mostrada na equação 2.14, permite avaliar as probabilidades associadas à variável através da função de distribuição cumulativa normal padrão, $\Phi(\,)$ (BECK, 2008).

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \tag{2.14}$$

A probabilidade de falha resulta:

$$\begin{aligned} P_f &= P[\{M \leq 0]\} \\ &= P\left[\left\{ Y \leq -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right\}\right] \\ &= \Phi\left[-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Uma medida de probabilidade de falha de Y pode ser geometricamente representada como a distância entre o ponto $m = 0$ e a origem (média) da distribuição de Y. Esta medida é chamada de *índice de confiabilidade* (β):

$$\beta \equiv \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{2.16}$$

A partir dos resultados anteriores, obtém-se uma expressão que relaciona diretamente o índice de confiabilidade à probabilidade de falha:

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta) \tag{2.17}$$

O objetivo principal dos métodos de análise de confiabilidade é a determinação dos parâmetros de projeto, utilizando um índice de confiabilidade β alvo.

2.3 Método FORM

De acordo com o que foi visto anteriormente, o índice de confiabilidade pode ser facilmente determinado para funções estatisticamente independentes e para funções de falha lineares através da distância da função de falha até a origem (SAGRILO e LIMA, 2002). O método FORM (*First Order Reliability Method)* permite o cálculo da probabilidade de falha envolvendo a transformação em variáveis normais padrão vista anteriormente, evitando a integração numérica. Nesta metodologia, o vetor das variáveis aleatórias **U** é transformado em um vetor de variáveis normais padrão **V** estatisticamente independentes e então, a função de falha é escrita no espaço representado pelas mesmas, como g(**V**), chamado espaço das variáveis reduzidas (SAGRILO, 1994).

Neste método, a superfície de falha ($g(\boldsymbol{V}) = 0$) é aproximada por uma superfície linear (hiperplano) no ponto mais próximo à origem (índice de confiabilidade).

$$\beta = |\boldsymbol{V}^*| \tag{2.18}$$

O índice de confiabilidade β se relaciona ao ponto de projeto $\boldsymbol{V}^*$ através da expressão:

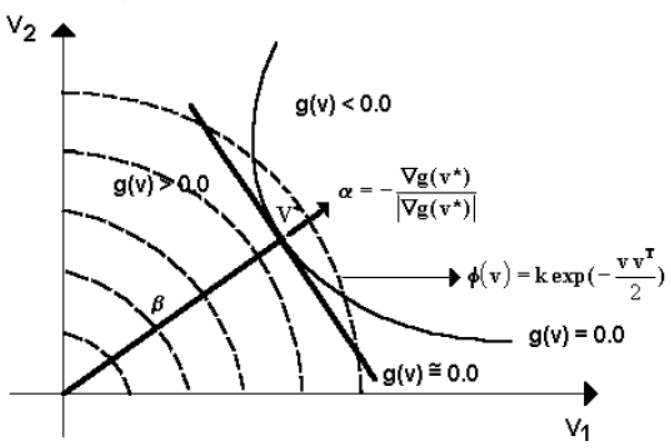
$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{\alpha}^*.\beta \tag{2.19}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}^*$ é o gradiente da superfície de falha no ponto $\boldsymbol{V}^*$. Tem-se também:

$$g(\boldsymbol{V}) = \beta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{2.20}$$

Na Figura 2.2, é ilustrado o procedimento de cálculo da probabilidade de falha pelo método FORM:

Figura 2.2 – Representação gráfica do FORM.



Fonte: Sagrilo e Lima (2002).

Os principais desafios do método são a busca do ponto de projeto $\boldsymbol{V}^*$ e a transformação das variáveis em variáveis normais padrão (SAGRILO e LIMA, 2002). A busca do mesmo pode ser solucionada como um problema de otimização.

2.3.1 Transformação de variáveis

Existem diversos métodos para transformar as variáveis aleatórias **U** em variáveis normais padrão estatisticamente independentes **V**, no entanto, a mais utilizada é a **transformação de Nataf** (KIUREGHIAN; LIU, 1986 apud SAGRILO; LIMA, 2002).

Se **U** contiver somente variáveis normais, correlacionadas entre si ou não, um conjunto de variáveis estatisticamente independentes é obtido a partir da seguinte expressão:

$$\boldsymbol{V} = \Gamma\sigma^{-1}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{m}) \tag{2.21}$$

sendo **m** o vetor com as médias das variáveis **U**, σ é uma matriz diagonal que contém os valores dos desvios padrões das variáveis **U** e $\Gamma = \boldsymbol{L}^{-1}$, sendo **L** a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação de **U** (SAGRILO; LIMA, 2002), expressa por:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1n} & L_{2n} & . & L_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

onde **n** é a dimensão do vetor **U**. Os termos L_{ij} são definidos pelo seguinte algoritmo:

$$L_{11} = 1$$

$$L_{i1} = \rho_{i1} \quad | \quad i = 1, n$$

$$L_{ik} = \frac{1}{L_{kk}}\left(r_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij}L_{kj}\right) \mid 1 < k < i \tag{2.23}$$

$$L_{ij} = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2} \quad | \quad i > 1$$

sendo ρ_{ij} o coeficiente de correlação entre as variáveis U_i e U_j.

Para determinar o ponto de projeto, é necessário obter a matriz Jacobiana de transformação, aplicada à equação 2.21:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}} = \Gamma\sigma^{-1} \tag{2.24}$$

2.3.2 Pesquisa do ponto de projeto

Definidas as variáveis reduzidas, deve ser definida a probabilidade de falha através da pesquisa do ponto $\boldsymbol{V}^*$ mais próximo à origem, o mesmo pode ser formulado como um problema de otimização não-linear (SAGRILO e LIMA, 2002), buscando minimizar o módulo de **V** fazendo $g(\boldsymbol{V}) = 0$.

Dos diversos algoritmos utilizados para a solução desse problema, o mais utilizado é o desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aprimorado por Rackwitz e Fiessler (1978), comumente identificado como HLRF (SAGRILO; LIMA, 2002). O algoritmo é definido pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{V}^{K+1} = \frac{1}{|\nabla g(\boldsymbol{V}^K)|^2}[\nabla g(\boldsymbol{V}^K)^T \boldsymbol{V}^K - g(\boldsymbol{V}^K)]\nabla g(\boldsymbol{V}^K)^T \tag{2.25}$$

sendo $\nabla g(\boldsymbol{V}^K)$ o gradiente da função de falha no espaço reduzido e $g(\boldsymbol{V}^K)$ o valor da função no espaço reduzido, ambos avaliados no ponto $\boldsymbol{V}^K$.

Para a utilização do método, são necessárias as seguintes relações:

$$g(\boldsymbol{V}) = G(\boldsymbol{U})$$

$$\boldsymbol{V} = \Gamma\sigma^{-1}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{m})$$

$$\nabla g(\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{J}^{-1})^T \nabla G(\boldsymbol{U}) \quad (2.26)$$

onde $\nabla G(\boldsymbol{U})$ é o gradiente da função de falha no espaço original, avaliado no ponto **U**.

2.4 Dimensionamento à flexão

2.4.1 Hipóteses básicas do dimensionamento

O dimensionamento da peça à flexão se dá baseado nos critérios da NBR 6118 (2014), para isso, algumas hipóteses básicas são consideradas:

1) Hipótese das seções planas

Admite-se que uma seção plana da peça indeformada, transversal ao seu eixo, permanecerá plana e normal a esse eixo mesmo após as deformações causadas após a aplicação do carregamento.

2) Aderência perfeita

Admite-se que a aderência entre o concreto e o aço seja perfeita, ou seja, não há escorregamento da armadura, fazendo com que a deformação seja a mesma para as barras de aço e o concreto que as envolve.

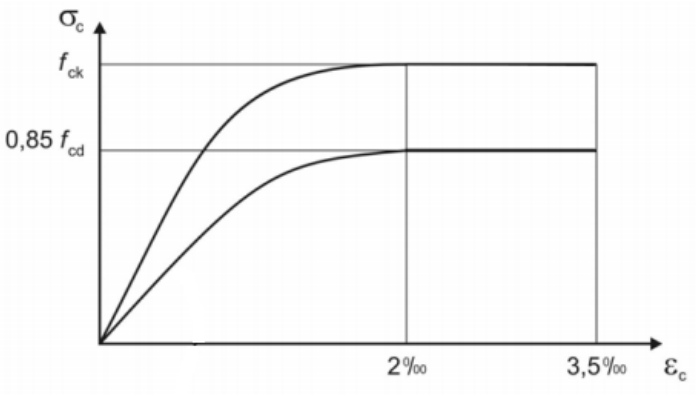
3) Concreto em tração

Despreza-se totalmente a resistência à tração do concreto. Assim, as tensões de tração devem ser resistidas apenas pela armadura. Isso tem base na baixíssima resistência à tração que o concreto possui naturalmente quando comparada à resistência à compressão.

2.4.2 Diagrama de tensão-deformação dos materiais

Devido à sua não-linearidade, o concreto possui o diagrama de tensão-deformação também não linear, o qual é obtido pelo ensaio de compressão simples. Para efeitos de dimensionamento, pode-se utilizar o diagrama parábola-retângulo apresentado pela **Erro! Fonte de referência não encontrada.**:

Figura 2.3 – Diagrama de cálculo tensão-deformação do concreto com consideração da fluência.



Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

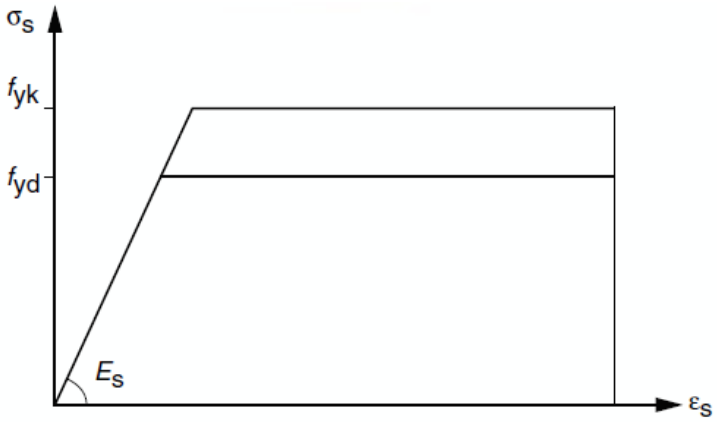
A equação que descreve o diagrama é:

$$\sigma_c = \begin{cases} 0{,}85 f_{cd}\left[2\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)^2\right], & se\ \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \\ 0{,}85 f_{cd}\,, & se\ \varepsilon_0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \\ 0\,, & se\ \varepsilon_c > \varepsilon_u \end{cases} \tag{2.27}$$

onde $\varepsilon_0 = 2‰$, $\varepsilon_u = 3{,}5‰$, ε_c é a deformação específica de compressão e σ_c é a tensão correspondente.

Para o aço, adota-se o comportamento elastoplástico perfeito, com o trecho anterior à tensão de escoamento obedecendo à Lei de Hooke, admitindo o mesmo comportamento para tração e compressão, conforme ilustra a Figura 2.4:

Figura 2.4 – Diagrama de tensão-deformação para as barras de armadura passiva.



Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

onde f_{yk} representa a resistência característica da armadura, f_{yd} a resistência de cálculo, ε_S é a deformação com sua tensão correspondente σ_S. O coeficiente angular da parte inclinada do

diagrama é o módulo de elasticidade E_S, que na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante, pode ser considerado igual a 21.000 kN/cm². A equação que define o diagrama é:

$$\sigma_S = \begin{cases} E_s\varepsilon_S, & se \quad 0 \leq \varepsilon_S \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd}, & se \quad \varepsilon_S \geq \varepsilon_{yd} \end{cases} \tag{2.28}$$

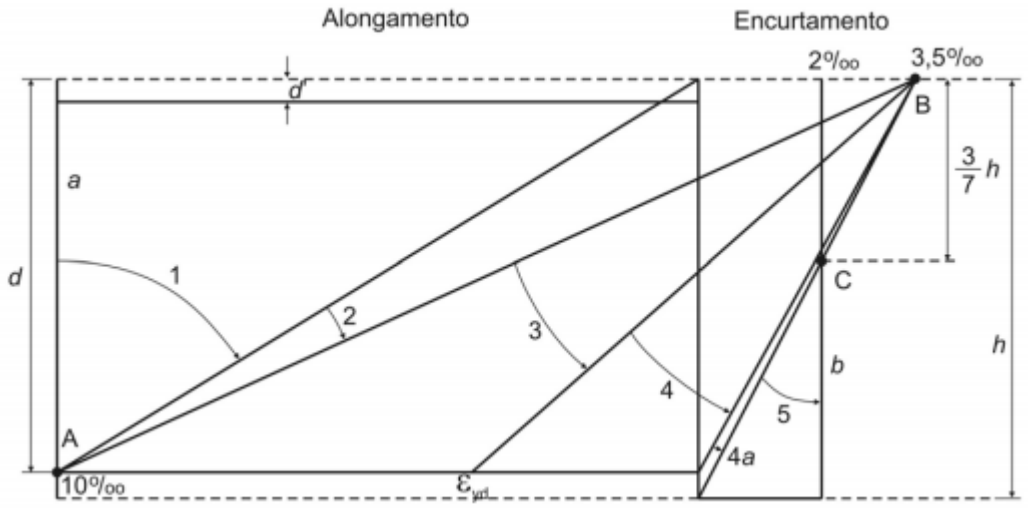
sendo ε_{yd} a deformação de escoamento de cálculo, dada por:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_S} \tag{2.29}$$

2.4.3 Domínios de dimensionamento à flexão

O dimensionamento é feito no estado-limite último, que corresponde à ruína de uma das seções transversais da peça, podendo ela ser por ruptura do concreto ou deformação excessiva das barras de armadura (ARAÚJO, 2014). As diferentes conformações do diagrama de deformação ao longo da altura de uma seção transversal que levam à ruína são apresentadas na Figura 2.5:

Figura 2.5 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal.



Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

Segundo a NBR 6118 (2014), os domínios representam:

Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:

- reta “a”: tração uniforme;
- domínio 1: tração não-uniforme, sem compressão;
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ($\varepsilon_c < \varepsilon_u$ e com o máximo alongamento permitido).

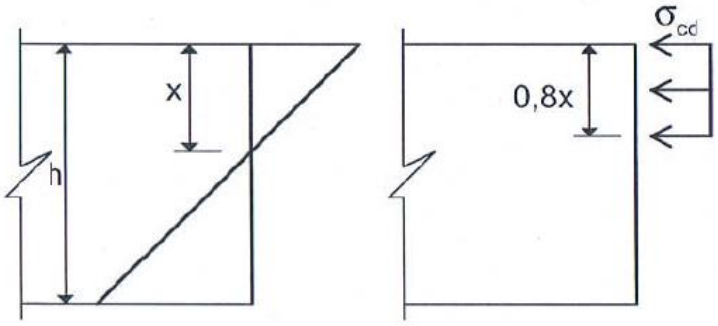
Ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto:

- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ($\varepsilon_S \geq \varepsilon_{yd}$);
- domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\varepsilon_S < \varepsilon_{yd}$);
- domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- domínio 5: compressão não-uniforme, sem tração;
- reta b: compressão uniforme.

2.4.4 Diagrama retangular para o concreto

Para simplificar o cálculo, a norma técnica permite a substituição do diagrama parabólico-retangular de tensão-deformação do concreto por um diagrama retangular equivalente (Figura 2.6).

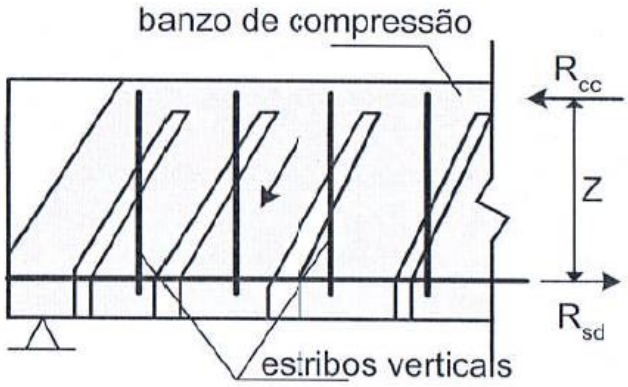
Figura 2.6 – Distribuição das tensões no concreto.



Fonte: Araújo (2014).

Estando submetida a esforços cortantes, as seções da peça estão sujeitas a tensões cisalhantes. A NBR 6118 (2014) sugere um dimensionamento com modelos de cálculo baseados na analogia de treliça para o comportamento das tensões no concreto elaborada por Mörsch, denominada **treliça de Mörsch**, ilustrada na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

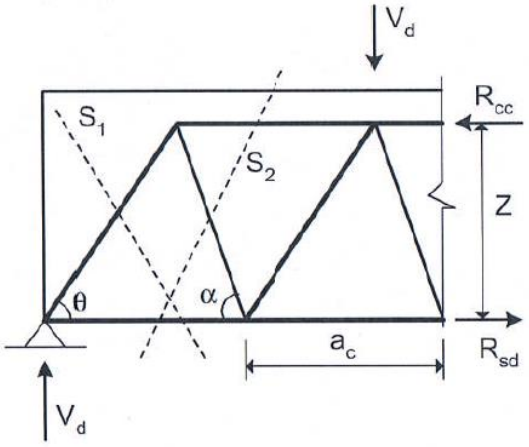
Figura 2.7 – Analogia de treliça de Mörsch com estribos verticais.



Fonte: Araújo (2014).

Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, indica-se um trecho de viga submetido a um esforço cortante V_d e a treliça idealizada em seu interior. O ângulo de inclinação das bielas é igual a θ e os estribos estão inclinados de um ângulo α em relação ao eixo da peça (ARAÚJO, 2014).

Figura 2.8 – Analogia da treliça generalizada.



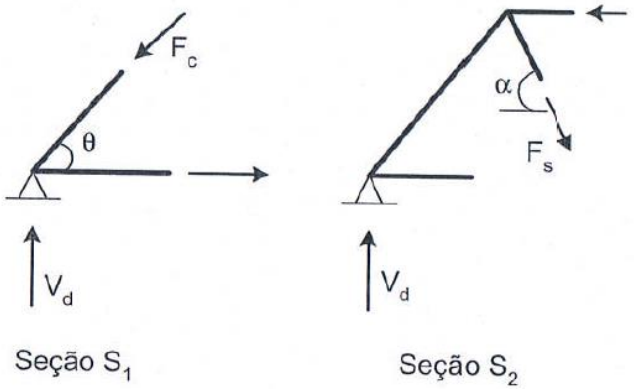
Fonte: Araújo (2014).

Z é o braço de alavanca obtido pelo dimensionamento à flexão. A distância a_c entre duas bielas sucessivas é dada por:

$$a_c = Z(cotg\ \theta + cotg\ \alpha) \tag{2.30}$$

O equilíbrio é dado analisando as seções S_1 e S_2:

Figura 2.9 – Forças nas barras da treliça.



Fonte: Araújo (2014).

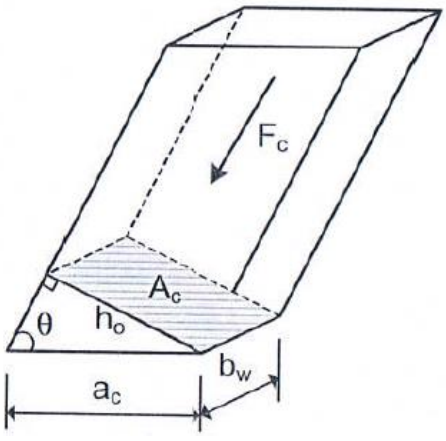
$$F_c = \frac{V_d}{sen\ \theta} \tag{2.31}$$

$$F_s = \frac{V_d}{sen\ \alpha} \tag{2.32}$$

As forças apresentadas na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e nas equações 2.31 e 2.32 representam a força de compressão na biela e nas diagonais da treliça, respectivamente. A força na diagonal da treliça será a força aplicada nos estribos, sendo α a inclinação dos mesmos dentro da peça. Essa força será utilizada para o dimensionamento da armadura transversal.

Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** é apresentada uma das bielas submetidas à força de compressão F_c:

Figura 2.10 – Solicitação na biela inclinada.



Fonte: Araújo (2014).

onde se empregam as seguintes relações:

$$h_0 = a_c sen\,\theta \tag{2.33}$$

$$A_c = a_c b_w \tag{2.34}$$

sendo b_w a largura da base da viga.

A partir da expressão $\sigma_c = F_c/A_c$, aplicam-se as relações supracitadas e as equações 2.30 e 2.31, obtém-se:

$$\sigma_c = \frac{V_d}{b_w Z(cotg\,\theta + cotg\,\alpha)sen^2\theta} \tag{2.35}$$

Particularizando a expressão para $\alpha = 45°$, obtém-se

$$\sigma_c = \frac{V_d}{b_w Z(cotg\,\theta + 1)sen^2\theta} \tag{2.36}$$

Empregando estribos verticais ($\alpha = 90°$), chega-se a:

$$\sigma_c = \frac{V_d}{b_w Z\,cotg\,\theta\,sen^2\theta} \tag{2.37}$$

Comparando as equações 2.36 e 2.37, verifica-se que a compressão no concreto é menor quando se utilizam estribos inclinados a 45°. Entretanto, por razões práticas, empregam-se quase sempre os estribos verticais (ARAÚJO, 2014).

Adotando como aproximação $Z = 0{,}90d$, sendo d a altura útil da viga, a expressão 2.35 pode ser escrita na forma

$$\sigma_c = \frac{1{,}11\,\tau_{wd}}{(cotg\,\theta + cotg\,\alpha)sen^2\theta} \tag{2.38}$$

onde:

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} \tag{2.39}$$

A tensão convencional de cisalhamento (τ_{wd}) deve ser calculada para a menor largura b_w da seção transversal da peça (quando a altura for variável).

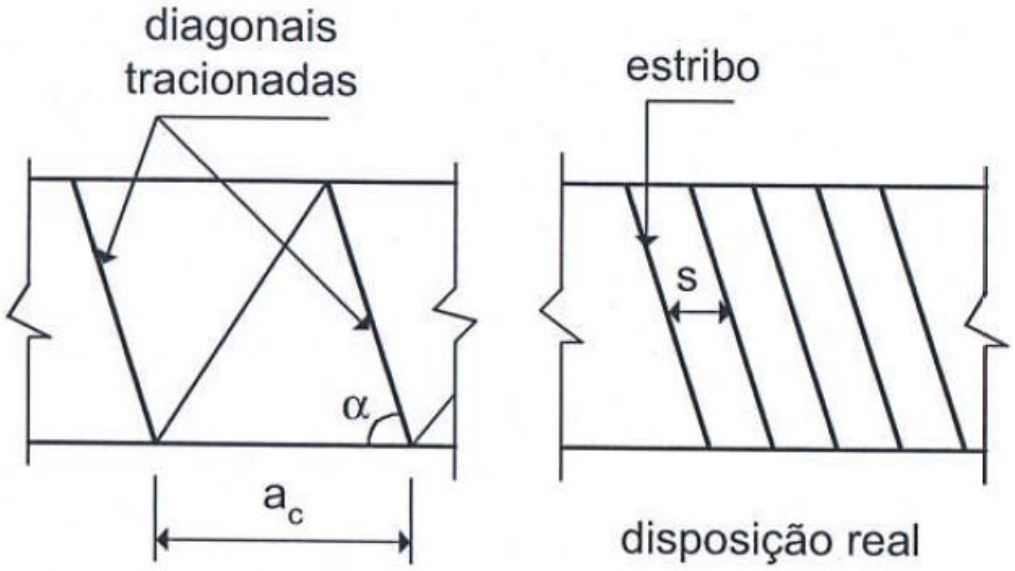
A treliça apresentada na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** é composta por diagonais de tração simples, com um espaçamento igual a a_c. A partir desse modelo, foi obtida a força de tração na diagonal, conforme a equação 2.32. Entretanto, o espaçamento real dos estribos deve ser menor que a_c, para evitar o surgimento de uma fissura não interceptada por

barras da armadura transversal (ARAÚJO, 2014). Assim, é necessário fazer a correspondência entre o modelo idealizado e a situação real.

Na Figura 2.11, indicam-se os estribos da armadura transversal na configuração idealizada e a disposição realmente adotada no projeto. A área da seção transversal de um estribo, considerados todos os seus ramos, é igual a A_{s1} e o espaçamento dos mesmos ao longo do eixo da viga é s. Logo, a área total da armadura no trecho de comprimento a_c é dada por:

$$A_{sw} = \frac{a_c}{s} A_{s1} \tag{2.40}$$

Figura 2.11 – Disposição dos estribos ao longo da viga.



Fonte: Araújo (2014).

A força de tração transversal resistida pelos estribos, no comprimento a_c, é igual a

$$F_{sr} = A_{sw} f_{yd} \tag{2.41}$$

onde f_{yd} é a tensão de escoamento de cálculo do aço.

A condição de equilíbrio é dada por

$$F_{sr} = F_s \tag{2.42}$$

onde F_s é a força de tração solicitante dada na equação 2.32.

Fazendo as substituições necessárias na equação 2.42, obtém-se:

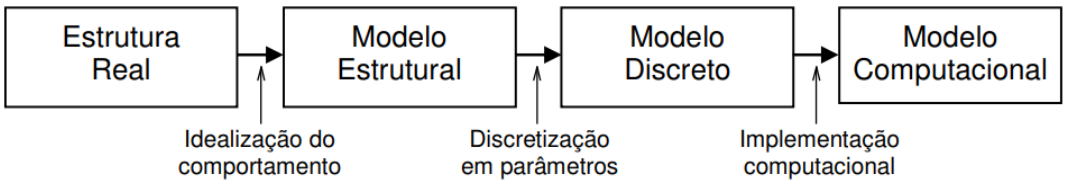
$$\frac{A_{s1}}{s} = \frac{V_d}{Z\, f_{yd}(cotg\ \theta + cotg\ \alpha) sen\ \alpha} \tag{2.43}$$

A equação 2.43 fornece a área de aço necessária em um comprimento s da viga, sendo expressa em cm^2/cm.

2.5 Método da Rigidez Direta

O Método da Rigidez Direta é um procedimento numérico para a análise de estruturas e meios contínuos, e é baseado no conceito de discretização. A ideia consiste em transformar um problema complexo na soma de diversos problemas simples, buscando assim representar, através da análise de comportamentos locais, uma representação do comportamento global da estrutura sob os efeitos das ações desejadas. Essa é a base dos modelos de análise estrutural.

Figura 2.12 – Níveis de abstração referentes a uma estrutura na análise estrutural.



Fonte: Martha (1993).

Quando se trata de análise estrutural, surgem dois ramos de métodos para solução desses tipos de problemas: métodos analíticos e métodos numéricos. Os métodos analíticos consistem na solução analítica das equações diferenciais que regem a física do problema analisado, gerando sempre uma solução exata, no entanto, quando aumenta-se a complexidade do fenômeno a ser estudado, a solução analítica do problema é muito difícil de ser encontrada, necessitando assim de métodos que resultassem em uma aproximação suficientemente precisa da solução. Dentre os métodos numéricos, as formulações matriciais mostram-se convenientes para a organização e solução dos problemas.

Dos precursores ao Método dos Elementos Finitos, destacam-se o Método das Forças (MF) e o Método dos Deslocamentos (MD), que possuem o mesmo conceito supracitado: discretização do problema em elementos globais e, posteriormente, a análise dos efeitos globais, analisando a flexibilidade (MF) ou a rigidez (MD) da estrutura no intuito de determinar os esforços ou deslocamentos incógnitos, respectivamente. No presente trabalho será utilizada uma formulação matricial do MD, que tem por objetivo aproximar a sua metodologia aos procedimentos adotados usualmente nos programas computacionais. Essa versão do MD é conhecida como Método da Rigidez Direta (MRD).

A formulação do MD é de simples entendimento, consiste apenas na análise de elementos lineares simplificando-os por “molas” de rigidez K sob efeito dos carregamentos externos, assim determinando os esforços internos:

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{2.44}$$

Onde F representa o vetor dos carregamentos externos (ações) e u representa os deslocamentos incógnitos.

O problema reside apenas na montagem da matriz de rigidez para a estrutura analisada. Feito isso, aplicam-se as condições de contorno ao problema e determina-se os deslocamentos através de operações matriciais.

2.6 Revisão bibliográfica

Em 2008, Paliga *et al*. apresentaram um modelo para análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através da utilização conjunta do método de simulação de Monte Carlo e do método dos Elementos Finitos, projetando as vigas de acordo com as recomendações da NBR 6118/2003. Após, foi considerado que as armaduras tracionadas de flexão sofreram reduções de 10%, 20% e 30% na sua área de seção transversal, sendo, então, feita uma análise da segurança estrutural remanescente. O projeto de recuperação das vigas danificadas foi feito com base nos procedimentos descritos no *Bulletin 14* da *féderation internationale du béton (fib)*. Os resultados mostraram que a confiabilidade das vigas aumenta consideravelmente após o processo de recuperação.

Ribeiro (2009) realizou a análise de confiabilidade de vigas de concreto armadas com plástico reforçado com fibras (PRF) em substituição ao aço, comumente utilizado, visando a obtenção de resistências mais elevadas, além de uma maior resistência à corrosão. O método de simulação de Monte Carlo foi utilizado para determinar a probabilidade de falha de oitenta e uma vigas em CA-PRF, discutindo os efeitos de diversos parâmetros nos níveis de confiabilidade implícitos em normas técnicas.

Rojas Eraso, no ano de 2011, utilizou o método FORM e a simulação de Monte Carlo para avaliar a probabilidade de falha das vigas principais (longarinas) de uma ponte ferroviária já existente, desenvolvendo rotinas com o auxílio do programa MATLAB para a aplicação do FORM e o método de simulação de Monte Carlo, também realizando um comparativo entre os resultados obtidos com ambos os métodos. Também foi realizada uma análise de sensibilidade para analisar a influência de cada variável na confiabilidade da ponte.

Em 2012, Ribeiro propôs-se a avaliar a confiabilidade de vigas projetadas conforme a NBR 6118/2003 e ao ACI 318 (2008), desenvolvendo um modelo estatístico para a obtenção das resistências de vigas em concreto armado sujeitas ao cisalhamento e, conforme os resultados obtidos, propor um modelo de dimensionamento consistente com as recomendações de projeto da NBR 6118/2003. A avaliação de confiabilidade, via simulação de Monte Carlo, utilizou o modelo de regressão para o cálculo da capacidade resistente das vigas. Os índices encontrados apresentaram pouca uniformidade e valores mínimos inadequados. Um novo modelo de dimensionamento foi proposto para a NBR 6118/2003, que corrigiria as inconsistências supracitadas.

Ainda em 2012, Teixeira, Maffei e Guazzelli questionaram as expressões referentes à verificação da resistência à força cortante de vigas de concreto armado pela norma técnica ANBT NBR 6118/2003, para o caso de vigas de seção circular. Contestaram os valores utilizados para definir a base e altura útil para o caso supracitado, de modo que sejam utilizadas as equações propostas pelos modelos de cálculo descritos na norma. Através de experiências práticas e modelos reduzidos de situações onde elementos de seção circular estariam submetidos ao esforço cortante, foi possível concluir que as equações propostas pela norma se adequam muito bem para o caso.

No ano de 2015, Chaves desenvolveu um algoritmo de geração de observações amostrais de vetores aleatórios para dutos de transporte de petróleo, gás, etanol e derivados do petróleo, submetidos a corrosão, obtendo dados adequados para a utilização à posteriori do método de simulação de Monte Carlo, de modo a verificar a probabilidade de falha dos mesmos. Após a obtenção dos dados de inspeção e avaliação do duto, foi proposta a construção de um intervalo de confiança *Bootstrap* para a probabilidade de falha, bem como o índice de confiabilidade associado ao método FORM. O programa experimental pôde fornecer dados quase que imediatamente após a obtenção, em campo, dos dados de inspeção.

Ainda em 2015, Rocha *et al.* publicaram um estudo avaliativo de vigas portuárias de concreto protendido projetadas segundo os critérios da NBR 6118 (2014), verificando a influência da variação dos parâmetros de projeto sobre a segurança da estrutura. A avaliação da probabilidade de falha foi feita segundo o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM), utilizando rotinas computacionais propostas por Low e Tang (2008). As variáveis aleatórias escolhidas para análise foram: resistência característica à compressão do concreto; resistência característica de ruptura por tração da armadura ativa; relação entre carga permanente e variável, sendo essa última a que apresentou o maior distúrbio nos índices de confiabilidade observados.

Nova (2017) utilizou o método de simulação de Monte Carlo, validados pelo método FORM, para a análise probabilística de pontes de concreto protendido. As variáveis aleatórias de projeto analisadas foram: as resistências dos materiais (concreto e aço), algumas propriedades geométricas e a forma do carregamento aplicado à estrutura. Os dados obtidos das simulações possuem a finalidade de obter novos índices de confiabilidade, afim de compará-los aos valores indicados em normas nacionais e internacionais.

Também em 2018, Nogueira e Rodrigues analisaram a confiabilidade de vigas de concreto armado, modeladas segundo o método dos Elementos Finitos associado a modelos não-lineares de dano e plasticidade para o concreto e o aço, apresentando uma abordagem alternativa para a previsão de falha das estruturas, denominada Técnica dos Múltiplos Modos de Falha. Os resultados obtidos com a aplicação da técnica foram comparados a resultados obtidos de métodos convencionais, observando a importância da influência dos diferentes modos de falha na quantificação da segurança global.

Mais recentemente, em 2018, Xu *et al.* analisaram a confiabilidade nos serviços de manutenção em vigas de concreto armado reforçadas, levando em consideração o histórico de aplicação de cargas de curta duração e a inevitável redução da rigidez global ao longo do tempo na estrutura, devido à fissuração e tensões residuais após o descarregamento. No trabalho, um momento de inércia médio é obtido utilizando o método de simulação de Monte Carlo, no intuito de reproduzir os efeitos históricos de redução da rigidez da estrutura ao longo do tempo. Os resultados são calibrados por dados obtidos experimentalmente. Por fim, verificou-se que, nos projetos de manutenção de vigas de concreto armado, os efeitos das cargas de curta duração devem ser levados em conta para os cálculos, pois possuem efeitos significantes na estrutura. Adicionalmente, observou-se que quanto mais tarde fossem aplicadas as cargas de curta duração, menores são seus efeitos na estrutura como um todo.

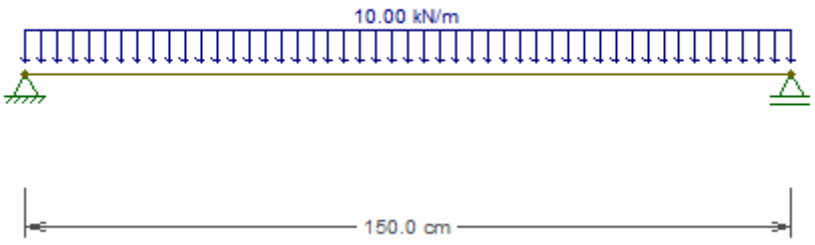
3 METODOLOGIA

No presente capítulo, são detalhados os processos utilizados para o desenvolvimento do projeto baseado em confiabilidade. Inicialmente, é apresentado o problema a ser resolvido, bem como seus parâmetros geométricos (comprimento, altura e base), determinando as variáveis determinísticas e estocásticas relevantes às equações envolvidas no problema, que serão citadas oportunamente ao longo deste item, bem como suas respectivas restrições, de acordo com o referencial teórico e a metodologia a ser apresentada. Feita a análise do problema, determina-se as variáveis de projeto e suas restrições, de acordo com cada modo de falha analisado. O algoritmo de otimização disponível no compilador MATLAB (função *fmincon*) é utilizado em conjunto ao FORM, buscando projetar a estrutura buscando um índice de confiabilidade alvo de acordo com os parâmetros propostos por JCSS (2001), a serem apresentados nos itens a seguir.

3.1 Modelagem do Problema

A modelagem (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**) foi realizada de modo a encaixar-se nas restrições e critérios apresentados pelo referencial teórico, como as restrições de domínios de flexão, e pela metodologia de cada modo de falha (flexão, cisalhamento e modo combinado de falha por flexão e cisalhamento), a ser apresentada nos itens a seguir.

Figura 3.1 – Modelo de viga utilizado no problema e seu carregamento.



Fonte: Autor (2019).

Utilizou-se um modelo de viga biapoiada linear com comprimento total de 1,5 m e carregamento distribuído linear de módulo 10 kN/m, inicialmente. Os esforços internos são encontrados numericamente através do Método da Rigidez direta, utilizando uma discretização com 20 elementos, como apresentada na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, em modelo desenhado no programa Ftool, na qual a solução numérica encontrada foi constatada ser suficientemente precisa através de comparação com a solução analítica do problema. Devido à simplicidade do problema, soluções com menor número de elementos podem ser adotadas,

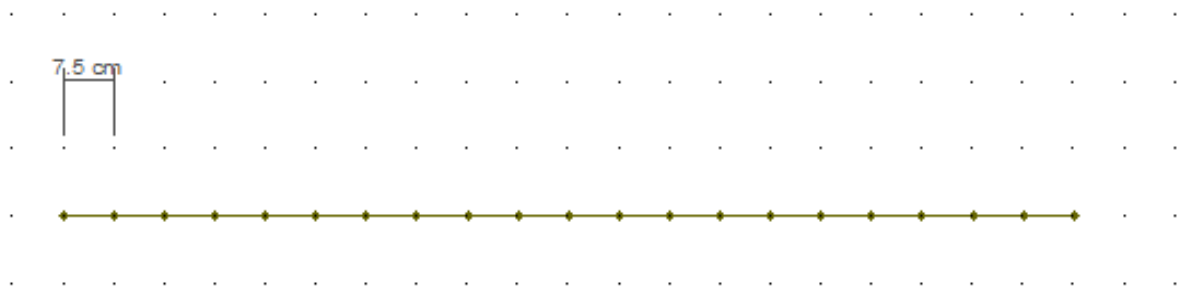
desde que seja conhecido os pontos onde se encontram o momento fletor e o esforço cortante máximos, que são os parâmetros de interesse do problema. Na Tabela 3.1, encontra-se um comparativo entre as soluções numéricas e analíticas para diferentes números de elementos.

Tabela 3.1 – Comparativo entre a solução analítica e a solução numérica para um diferente número de elementos.

Solução Analítica		**Número de Elementos**	**Solução Numérica**	
M_k (kN.m)	V_k (kN)		M_k (kN.m)	V_k (kN)
2,8125	7,5000	3	2,5000	7,5000
		5	2,7000	7,5000
		15	2,8000	7,5000
		20	2,8125	7,5000

Fonte: Autor (2019).

Figura 3.2 – Discretização do modelo e dimensão do elemento linear de barra utilizado.



Fonte: Autor (2019).

Os parâmetros iniciais, determinados no item a seguir determinarão o dimensionamento inicial da estrutura, que posteriormente será utilizado para calcular o índice de confiabilidade a cada passo em busca do índice alvo, utilizado no dimensionamento baseado em confiabilidade.

3.2 Determinação dos Parâmetros Iniciais

As variáveis aleatórias e não aleatórias a serem abordadas e utilizadas nas equações que envolvem o problema proposto precisam de um ponto de partida. De acordo com o referencial teórico utilizado no trabalho (capítulo 2), no FORM algumas dessas variáveis serão inseridas como variáveis aleatórias, outras serão determinadas através de equações, outras terão seus valores iniciais inseridos manualmente de acordo com metodologia específica. No presente item, serão apresentados e detalhados cada um desses parâmetros.

3.2.1 Dados Geométricos

Inicialmente, são determinados os parâmetros geométricos da viga estudada. São eles:

- O comprimento da viga (L);
- As dimensões da seção transversal retangular, altura (h_v) e base (b_v).

O comprimento utilizado foi de 1,5 m, valor adotado por semelhança a estudos já realizados, para fins comparativos, tais como Silva (2014) e Furst (2017), além de encaixar-se nos parâmetros requeridos para as mesmas nas equações propostas por Ribeiro (2012) para as variáveis deste item. Tais restrições serão apresentadas posteriormente no item 3.3.

Da mesma forma, os valores para as dimensões da seção transversal foram adotados, para fins comparativos, possuindo valores semelhantes aos de estudos já realizados. O valor da base da viga deve ao item 13.2.2 da NBR 6118 (2014), que estipula um mínimo de 12 cm de base para vigas comuns de edificações, e de 15 cm para vigas-parede. O valor adotado foi 20 cm. A altura pode ser pré-dimensionada através de diversas metodologias presentes na literatura, no entanto, foi utilizado um valor inicial de 40 cm. Mais explicações quanto aos valores escolhidos para as variáveis apresentadas neste item encontram-se no item 3.3.2. Na Tabela 3.2, estão os valores descritos no presente item.

Tabela 3.2 – Dados geométricos do problema.

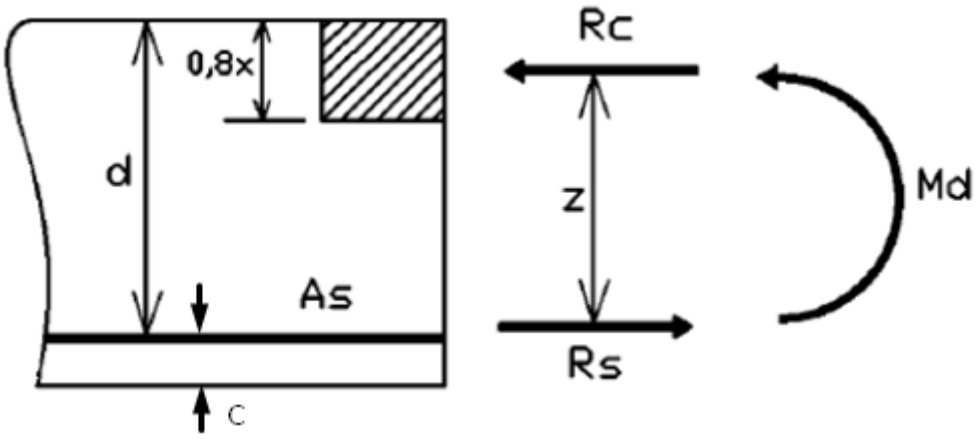
Variável	Dimensão
L	$1{,}50\ m$
h_v	$40\ cm$
b_v	$20\ cm$

Fonte: Autor (2019).

3.2.2 Cálculo da Armadura Longitudinal

Considerando-se inicialmente o caso de flexão, devem ser calculadas as armaduras longitudinais de acordo com as hipóteses explicadas no capítulo 2. Ao submeter a seção transversal de concreto à flexão (momento positivo, como no problema analisado), verifica-se a peça quanto ao estado limite último. Os esforços atuantes possuem a conformação exibida na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Figura 3.3 – Representação dos esforços atuantes na seção típica da viga.



Fonte: Franco (2010).

Sendo:

- R_c a força resultante das tensões de compressão no concreto;
- R_s a força de tração na armadura inferior;
- M_d o momento atuante;
- A_s a linha de centro da armadura longitudinal, representando também a área das armaduras em cm²;
- x a posição da linha neutra;
- d a altura útil da seção, dada por: $d = h_v - c$;
- c o cobrimento nominal.

Para o cálculo da altura útil, deve-se adotar um valor para o cobrimento nominal da peça (c), determinado através da Classe de Agressividade Ambiental do local, como explicado no item 6.4 da NBR 6118 (2014) (Tabela 3.3).

Tabela 3.3 – Tabela 7.2 da NBR 6118 (2014) para correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal.

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV [c]
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje [b]	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo [d]	30		40	50
Concreto protendido [a]	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

[a] Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.

[b] Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal ≥ 15 mm.

[c] Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

[d] No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal ≥ 45 mm.

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

Considerando que a viga estará submetida à classe de agressividade ambiental I, buscando-se trabalhar com o menor possível, o cobrimento nominal utilizado é de $c = 2{,}5\ cm$.

Considerando o caso de armadura simples, tem-se:

$$R_c = 0{,}85\ f_{cd}\ b_v * 0{,}8x \tag{3.1}$$

$$R_s = R_c = A_s * f_{yd} \tag{3.2}$$

$$M_d = R_c * z \tag{3.3}$$

$$z = d - 0{,}4x \tag{3.4}$$

A partir do equilíbrio de momentos na seção representada pela Figura 3.3, é possível encontrar a posição da linha neutra:

$$x = \frac{d}{0{,}8} * \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\ M_d}{0{,}68\ f_{cd}\ b_v\ d^2}}\right) \tag{3.5}$$

Sendo f_{cd} e f_{yd} as resistências de cálculo do concreto e do aço, respectivamente, dadas por:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \tag{3.6}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \tag{3.7}$$

Onde γ_c e γ_s são coeficientes de redução da resistência do concreto e do aço, respectivamente, possuindo valores de 1,4 e 1,15 no caso usual, como é mostrado no item 12.3 da NBR 6118 (2014).

As resistências características do concreto e do aço são variáveis estocásticas e tratadas como variáveis aleatórias para o modelo apresentado no item 3.1, possuindo valores iniciais de 25 MPa e 500 MPa respectivamente.

Caso a linha neutra possua valor maior que 0,45d, será necessário reforçar o concreto também para a compressão, adicionando uma armadura superior (As').

$$As = \begin{cases} x \leq 0{,}45\ d, & \dfrac{0{,}68\ f_{cd}\ b_v\ x}{f_{yd}} \\ x \geq 0{,}45\ d, & \dfrac{0{,}68\ f_{cd}\ b_v * 0{,}45\ d}{f_{yd}} + As' \end{cases} \tag{3.8}$$

$$As' = \begin{cases} x \leq 0{,}45\ d, & 0 \\ x \geq 0{,}45\ d, & \dfrac{M_d - M_{lim}}{f_{yd}(d - d')} \end{cases} \tag{3.9}$$

Sendo M_{lim} e d' dados por:

$$M_{lim} = 0{,}68\ f_{cd}\ b_v * 0{,}45\ d^2 \left(1 - 0{,}8 * \frac{0{,}45}{2}\right) \tag{3.10}$$

$$d' = d - c \tag{3.11}$$

A NBR 6118 (2014) sugere que as ações sejam majoradas através de coeficientes estatísticos determinados pela natureza do carregamento, fazendo assim a combinação de ações no estado limite último. No item 11.7.1 da NBR 6118 (2014), o valor máximo para este valor é 1,4, tanto para as cargas permanentes quanto para as cargas variáveis principais. Afim de analisar o pior caso, este é o valor adotado no trabalho para o coeficiente de majoração das ações.

A norma exige também um valor mínimo para as armaduras longitudinais, como é mostrado na Tabela 3.4:

Tabela 3.4 – Tabela 17.3 da NBR 6118 (2014) para taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Forma da seção	Valores de $\rho_{mín}$ [a] ($A_{s,mín}/A_C$) %														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256
a Os valores de $\rho_{mín}$ estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50, d/h = 0,8 e γ_c = 1,4 e γ_s = 1,15. Caso esses fatores sejam diferentes, $\rho_{mín}$ deve ser recalculado.															

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

Os valores encontrados para a armadura longitudinal para o problema apresentado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** são exibidos na Tabela 3.5:

Tabela 3.5 – Valores da armadura longitudinal.

Variável	Dimensão
As	$0{,}31\ cm^2$
As'	$0{,}00\ cm^2$

Fonte: Autor (2019).

3.2.3 Cálculo da Armadura Transversal

Para o cálculo da armadura transversal seguiu-se o roteiro da NBR 6118 (2014).

A resistência do elemento estrutural, em uma determinada seção transversal, deve ser considerada satisfatória, quando verificadas simultaneamente as seguintes condições:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \tag{3.12}$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_C + V_{sw} \tag{3.13}$$

Onde:

- V_{Sd} é a força solicitante de cálculo, na seção;
- V_{Rd2} é a força resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;
- $V_{Rd3} = V_C + V_{sw}$ é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, onde V_C é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça e V_{sw} a parcela resistida pela armadura transversal.

A NBR 6118 (2014), em seu item 17.4.2, sugere dois modelos de cálculos distintos para diferentes considerações quanto à inclinação das diagonais de compressão em relação ao eixo longitudinal da peça. Para o presente trabalho, considera-se a inclinação das diagonais fixa em

45°, portanto, é utilizado o Modelo de Cálculo I. Admite-se então que a parcela complementar V_C tenha valor constante, independentemente de V_{Sd}.

a) verificação da compressão diagonal do concreto:

$$V_{Rd2} = 0{,}27\ \alpha_{V2}\ f_{cd}\ b_v\ h_v \tag{3.14}$$

Onde:

- $\alpha_{V2} = (1 - f_{ck}/250)$ com f_{ck} expresso em megapascal (MPa);

b) cálculo da armadura transversal:

$$V_{Rd3} = V_C + V_{sw}$$

Onde:

$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} 0{,}9\ f_{yd} \tag{3.15}$$

$$V_C = 0{,}6\ f_{ctd}\ b_v\ h_v \tag{3.16}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} \tag{3.17}$$

$$f_{ctk,inf} = 0{,}7\ f_{ctm} \tag{3.18}$$

$$f_{ctm} = 0{,}3\sqrt{(f_{ck})^{2/3}}\text{ , com } f_{ck} \text{ expresso em MPa} \tag{3.19}$$

Sendo s o espaçamento entre elementos da armadura transversal A_{sw} medidos ao longo do eixo longitudinal da peça. Segundo o item 18.3.3.2 da NBR 6118 (2014), o espaçamento mínimo deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador (em torno de 5 cm), garantindo um bom adensamento da massa. O menor valor máximo permitido por norma para o espaçamento dos estribos é de 24 cm para vigas com altura de 40 cm; adota-se o valor de s = 15 cm. Também nesse item é proposto o valor de 5 mm para o diâmetro mínimo das barras de armadura transversal (ϕ_{sw}).

Na Tabela 3.6 encontra-se o valor obtido para o diâmetro da área de armadura encontrada através da equação 3.15:

Tabela 3.6 – Valores da armadura transversal.

Variável	Dimensão
ϕ_{sw}	$5{,}00\ mm$

Fonte: Autor (2019).

3.2.4 Índice de Confiabilidade

O dimensionamento da peça em termos da base e da altura será feito encontrando o valor correspondente para o índice de confiabilidade para cada passo do algoritmo em que são

alteradas as variáveis de projeto, buscando igualar o valor do índice encontrado ao valor de um índice de confiabilidade alvo. O *Joint Committee on Structural Safety* (JCSS) apresenta diretrizes de projeto para formulação ou revisão de normas técnicas baseadas na confiabilidade estrutural, que estão disponíveis em JCSS (2001). Estre as especificações da referida norma estão os índices de confiabilidade mínimos para projetos estruturais. Para estruturas no estado limite último, a faixa de valores aceitáveis para a probabilidade de falha alvo é da ordem de 10^{-3} a 10^{-6} por ano. Os valores do índice de confiabilidade alvo, para estruturas no estado limite último, são apresentados na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Índices de confiabilidade alvo para os estados limites últimos pelo período de um ano.

Custo relativo da medida de segurança	**Consequências de falha mínima**	**Consequências de falha moderada**	**Consequências de falha elevada**
Alto (A)	β = 3,1 ($P_f = 1 \cdot 10^{-3}$)	β = 3,3 ($P_f = 5 \cdot 10^{-3}$)	β = 3,7 ($P_f = 1 \cdot 10^{-3}$)
Normal (B)	β = 3,7 ($P_f = 1 \cdot 10^{-4}$)	β = 4,2 ($P_f = 1 \cdot 10^{-3}$)	β = 4,4 ($P_f = 5 \cdot 10^{-3}$)
Pequeno (C)	β = 4,2 ($P_f = 1 \cdot 10^{-5}$)	β = 4,4 ($P_f = 5 \cdot 10^{-3}$)	β = 4,7 ($P_f = 1 \cdot 10^{-3}$)

Fonte: JCSS (2001).

O JCSS recomenda para uma estrutura com consequência de falha elevada e um custo pequeno referente à medida de segurança, um valor alvo para o índice de confiabilidade β = 4,7 (probabilidade de falha de $p_f = 10^{-6}$).

Conforme Melchers (1999 *apud* SILVA, 2014), "o índice de confiabilidade (β), para um período igual à vida útil da estrutura, constuma ficar entre 3,0 e 3,5, para edificações comerciais e residenciais".

Para o presente trabalho, serão realizados estudos paramétricos, utilizando índices de confiabilidade distintos segundo a Tabela 3.7.

3.2.5 Variáveis Aleatórias

Determinados todos os parâmetros iniciais do problema, são listadas as variáveis aleatórias que foram definidas para a aplicação do método de confiabilidade FORM e suas respectivas distribuições, como pode-se observar na Tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Variáveis aleatórias utilizadas no problema.

Variável Aleatória	Unidade	Distribuição	Média	Coeficiente de Variação
A_s	cm²	Determinística	Variável	0,015
q	kN/m	Normal	Variável	0,01
f_{cd}	MPa	Normal	17,86	0,15
f_{yd}	MPa	Normal	434,78	0,05

Fonte: Autor (2019).

Para o modo de falha por cisalhamento, a variável A_s é substituída por A_{sw}, que representa a área de armadura transversal, e possui o mesmo tipo de distribuição e coeficiente de variação que a outra.

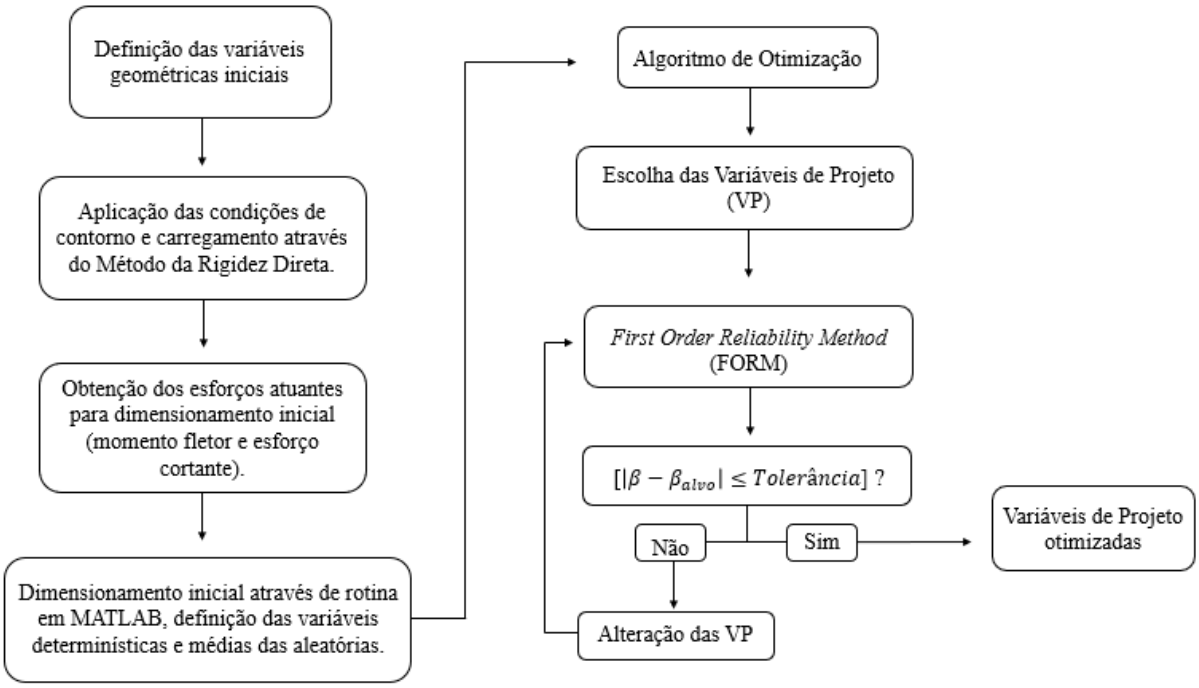
Os coeficientes de variação utilizados são os disponibilizados no JCSS (2001), para o caso de elementos lineares de concreto armado com barras de aço submetidos a cargas distribuídas lineares.

3.3 Algoritmo de Otimização

A finalidade deste trabalho é projetar a base e a altura de uma viga de concreto armado a partir da análise de confiabilidade, otimizando as variáveis escolhidas em busca de um índice de confiabilidade alvo. Existem diversos algoritmos e métodos disponíveis para a realização desse objetivo. O método escolhido foi a função de programação não-linear disponível no próprio MATLAB, *find minimum of constrained nonlinear multivariable function* (fmincon), que consiste em encontrar o mínimo absoluto de uma função com mais de uma variável de projeto. A resolução será feita separadamente para cada caso, flexão, cisalhamento e o modo combinado de falha por flexão e cisalhamento.

O algoritmo concebido possui a estrutura exposta na Figura 3.4:

Figura 3.4 – Fluxograma representando o algoritmo concebido para o trabalho.



Fonte: Autor (2019).

Como pode-se perceber pelo gráfico de fluxo, a função a ser minimizada é a subtração entre o β calculado com o FORM utilizando as variáveis de projeto e as variáveis aleatórias e o β_{alvo} estipulado pelo usuário. Dentro do FORM, por tratar-se de uma variável aleatória, atualiza-se o carregamento, o Método da Rigidez Direta é constantemente acionado, de forma a atualizar o valor dos esforços internos (momento fletor e esforço cortante).

Para cada um dos problemas, o FORM trabalha com uma função de falha, dos modelos da equação 2.10, seguindo o simples modelo de resistência menos solicitação.

3.3.1 Modo de falha por flexão

Para a função de falha no caso da flexão, precisa-se determinar através das equações do problema, a solicitação e a resistência. Nesse caso, a solicitação consiste no momento fletor máximo obtido, e a resistência pode ser determinada através do equilíbrio de momentos na seção transversal onde encontra-se o momento máximo. Como o momento é positivo, podemos determinar a partir da **Erro! Fonte de referência não encontrada.**:

$$M_{res} = R_c * z$$

Ou, para o caso de armadura dupla:

$$M_{res} = R_c * z + R'_s * z' \tag{3.20}$$

$$z' = d - d' \tag{3.21}$$

$$R'_s = f_{yd} * A'_s \tag{3.22}$$

Assim, a função de falha assume a seguinte forma:

$$M = M_{res} - M_d \tag{3.23}$$

O FORM buscará o índice de confiabilidade baseado na equação 3.23, a qual apresenta a função de falha para o problema de flexão. Na Figura 3.5 encontra-se a montagem da equação final de flexão no MATLAB para o caso de armadura simples e, na Figura 3.6, o mesmo caso para armadura dupla.

Figura 3.5 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de falha por flexão para o caso de armadura simples.

```
q = 1;
    [Mk,Vk] = teste_rigidezdireta(q);

    q = U2;
    Mk = q*Mk;
    Vk = q*Vk;

    % As
    if As_linha == 0

    As = U1;
    fcd = (U3/10);
    fyd = (U4/10);
    d = hv - c - D_estribo/10;

    Moment = ((As*fyd*(d-((0.4*As*fyd)/(0.68*fcd*bv)))))-(100*Mk(k));
```

Fonte: Autor (2019).

Figura 3.6 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de falha por flexão para o caso de armadura dupla.

```
else

    As_linha = (As_linha/As)*U1;
    As = U1;

    X_lim = (0.45*(hv-c-(D_estribo/10)));

    fcd = (U3/10);
    fyd = (U4/10);
    d = (hv-c-(D_estribo/10));
    d_linha = (c+(D_estribo/10));

    %Função de falha por flexão;
    Moment = ((0.68*fcd*X_lim*bv*(d-0.4*X_lim))+
             (As_linha*fyd*(d-d_linha)))-(100*Mk(k));
```

Fonte: Autor (2019).

3.3.2 Modo de falha por cisalhamento

Uma análise de confiabilidade em vigas de concreto armado com modo de falha por cisalhamento requer um modelo para estimar a resistência desses elementos, entretanto, como analisado por Ribeiro (2012), a maioria dos modelos utilizados são tendenciosos a uma ou mais variáveis pertinentes ao problema.

Ribeiro (2012) propôs uma equação para corrigir esse problema, com base em um banco de dados filtrado, fez uma regressão linear múltipla estatística, chegando assim a uma expressão para a tensão resistente de cisalhamento das vigas com estribos, τ_{CE}:

$$\tau_{CE} = 2{,}86 - 2{,}80b_v - 0{,}675d + 0{,}412\rho_l + 0{,}00702f_{cd} - 0{,}528\left(\frac{a}{d}\right) + 1{,}4\rho_w f_{yd} \quad (3.24)$$

Onde:

- d e h_v são expressos em metros;
- A taxa de armadura longitudinal $\rho_l = (A_s + A'_s)/(b_v h_v)$ em porcentagem;
- As resistências do concreto (f_{cd}) e da armadura transversal ($\rho_w f_{yd}$) em MPa;
- a/d é a relação entre o vão e a altura útil da viga.

Os limites de validade para os parâmetros dessa equação são:

- Largura da viga (b_v) entre 0,15 e 0,46 m;
- Altura útil da viga (d) entre 0,20 e 1,89 m;
- Taxa de armadura longitudinal entre 0,97 e 2,99%;
- Resistência à compressão do concreto entre 13 e 125 MPa;

- Relação a/d entre 2,49 e 4,50.

Devido à similaridade do problema analisado por Ribeiro (2012) com o presente trabalho, os dados que entrarão no algoritmo de otimização têm como restrições as mesmas listadas para a equação proposta, assim validando a utilização da equação 3.24.

Para a solicitação, utilizou-se a equação 2.37 para a tensão de cisalhamento devido ao esforço solicitante:

$$\tau_{Sd} = \tau_{wd} = \frac{V_d}{b_v d}$$

O modelo R-S assume a seguinte forma:

$$\tau = \tau_{CE} - \tau_{Sd} \tag{3.25}$$

Na Figura 3.7, encontra-se o trecho programado em MATLAB correspondente à montagem da função de falha dentro do loop do FORM.

Figura 3.7 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de falha por cisalhamento.

```
As_cort = U1;

q = 1;
[Mk,Vk] = teste_rigidezdireta(q);

q = U2;
Mk = q*Mk;
Vk = q*Vk;

fcd = (U3);
fyd = (U4);

d = (hv-c-(D_estribo/10));

b = bv;
R = 2.86 - 2.80*b/100 -0.675*d/100 + 0.412*(As+As_linha)/(b*d)*100
    + 0.00702*fcd - 0.528*150/d + 1.4*fyd*As_cort*0.15/(b*d);

S = Vsd/(b*d)*10;

Cortante = R - S;
```

Fonte: Autor (2019).

3.3.3 Modo de falha combinado

A análise isolada dos modos de falha é importante, no entanto, para um melhor entendimento das equações aqui utilizadas em relação ao problema analisado, mostra-se a necessidade de verificar uma combinação das funções de falha. A equação utilizada para a

combinação dos modos de falha por flexão e cisalhamento é obtido a partir das equações 3.23 e 3.25:

$$F = 1 - \left(\frac{\tau_{Sd}}{\tau_{CE}} + \frac{M_d}{M_{res}}\right) \tag{3.26}$$

A montagem da função de falha combinada no MATLAB é exposta na Figura 3.8, onde é feita a combinação das funções expostas nas Figuras 3.5, 3.6 e 3.7.

Figura 3.8 – Trecho do código em MATLAB correspondente à montagem da função de modo de falha combinado.

```
if As_linha == 0

 As = U1;
 fcd = (U3/10);
 fyd = (U4/10);
 d = hv - c - D_estribo/10;
 Moment = ((100*Mk)/(As*fyd*(d-((0.4*As*fyd)/(0.68*fcd*bv)))));
 else

 As_linha = (As_linha/As)*U1;
 As = U1;
 X_lim = (0.45*(hv-c-(D_estribo/10)));
 fcd = (U3/10);
 fyd = (U4/10);
 d = (hv-c-(D_estribo/10));
 d_linha = (c+(D_estribo/10));
 Moment = (100*Mk)/((0.68*fcd*X_lim*bv*(d-0.4*X_lim))+(As_linha*fyd*(d-d_linha)));
 end

 R = 2.86 - 2.80*b/100 -0.675*d/100 + 0.412*(As+As_linha)/(b*d)*100
     + 0.00702*fcd - 0.528*150/d + 1.4*fyd*As_cort*0.15/(b*d);
 S = Vsd/(b*d)*10;
 Cortante = S/R;

 Combinado = 1 - Moment - Cortante;
```

Fonte: Autor (2019).

3.3.4 Função *fmincon*

Determinadas todas as variáveis e equações para o problema, o algoritmo de otimização está pronto para ser utilizado. A função *fmincon* consiste em um solver de programação não-linear, onde, através da manipulação das variáveis de projeto escolhidas, encontra o mínimo do problema especificado por:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \; tal \; que \begin{cases} c(\boldsymbol{x}) \leq 0 \\ ceq(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Aeq} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{beq} \\ \boldsymbol{lb} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{up} \end{cases} \tag{3.27}$$

Onde $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{beq}$ são vetores, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{Aeq}$ são matrizes, $c(\boldsymbol{x})$ e $ceq(\boldsymbol{x})$ são funções que retornam vetores, e $f(\boldsymbol{x})$ é uma função que retorna um escalar. $f(\boldsymbol{x})$, $c(\boldsymbol{x})$ e $ceq(\boldsymbol{x})$ podem ser funções não-lineares. lb e up são vetores que carregam os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente.

O vetor $\boldsymbol{x}$ carrega as variáveis de projeto do problema.

A função $f(\boldsymbol{x})$ a ser minimizada, em ambos os casos (flexão e cisalhamento) é a mesma exposta no gráfico de fluxo (Figura 3.4):

$$f(\boldsymbol{x}) = \beta - \beta_{alvo} \tag{3.28}$$

onde a função será considerada minimizada quando o valor do módulo de $f(\boldsymbol{x})$ for menor que uma tolerância de 10^{-4}.

Como varáveis de projeto, foram escolhidas as dimensões da seção transversal da viga (h_v e b_v), a altura, por ter sido utilizada em trabalhos semelhantes, como o de Silva (2014), e a base por também ser uma das dimensões da seção transversal, em busca de expandir o que foi feito no trabalho supracitado. A cada passo do algoritmo, elas são atualizadas pela função *fmincon*.

Determinadas as variáveis de projeto, o vetor $\boldsymbol{x}$ assume a forma $\boldsymbol{x} = [h_v,\ b_v]$, assim podemos determinar os limites superior e inferior:

$$\boldsymbol{lb} = [0, 0]$$

$$\boldsymbol{ub} = [2\ h_v, 2\ b_v]$$

Tais valores são escolhidos arbitrariamente, apenas como método de controle da solução dentro da realidade física do problema aqui trabalhado.

Nas figuras 3.9, 3.10 e 3.11, estão expostos os trechos de códigos referentes à implementação dos algoritmos de otimização para os modos de falha por flexão, cisalhamento e combinado, respectivamente.

Figura 3.9 – Trecho do código correspondente à implementação da função *fmincon* para o modo de falha por flexão.

```
[bv,hv] = VP;

x0 = [bv,hv];
A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
lb=[15,0];
ub=[2*bv,2*hv];
% [x,fval]=fmincon(@FUNCAO_FORM_2_VARIAVEIS_PROJETO,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
%options=optimset('Algorithm','sqp','Display','off');
options = optimoptions('fmincon','StepTolerance',1e-4);
[x,fval]=fmincon(@FORM_flexao,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

Fonte: Autor (2019).

Figura 3.10 – Trecho do código correspondente à implementação da função *fmincon* para o modo de falha por cisalhamento.

```
[bv,hv] = VP;

x0 = [bv,hv];
A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
lb=[15,20];
ub=[46,189];
% [x,fval]=fmincon(@FUNCAO_FORM_2_VARIAVEIS_PROJETO,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
%options=optimset('Algorithm','sqp','Display','off');
options = optimoptions('fmincon','StepTolerance',1e-6);
[x,fval]=fmincon(@FORM_cisalhamento,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

Fonte: Autor (2019).

Figura 3.11 – Trecho do código correspondente à implementação da função *fmincon* para o modo combinado de falha por flexão e cisalhamento.

```
[bv,hv] = VP;

x0 = [bv,hv];
A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
lb=[15,0];
ub=[2*bv,2*hv];
options = optimoptions('fmincon','StepTolerance',1e-4);
[x,fval]=fmincon(@FORM_combinado,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

Fonte: Autor (2019).

Assim, ficam determinados todos os parâmetros necessários e o algoritmo da função *fmincon* está pronto para aplicação. No capítulo seguinte, são detalhados e discutidos os resultados encontrados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados pontos de projeto para cada um dos casos analisados, os modos de falha por flexão, cisalhamento e modo combinado de falha por flexão e cisalhamento, bem como os estudos paramétricos realizados com as resistências do concreto e do aço e diferentes índices de confiabilidade alvo. Os mesmos foram obtidos para quatro situações distintas em cada modo de falha, exceto no modo combinado:

- Exemplo inicial ($\beta_{alvo} = 3{,}5$);
- Estudo paramétrico com a resistência do concreto (f_{ck});
- Estudo paramétrico com a resistência do aço (f_{yd});
- Estudo paramétrico com os índices de confiabilidade segundo a JCSS.

Os estudos paramétricos possuem a finalidade de analisar como as variáveis de projeto se comportam com a alteração de determinados parâmetros, buscando um melhor entendimento do projeto baseado em confiabilidade, bem como a validação dos métodos e equações utilizados na elaboração do trabalho.

Posteriormente, é feita a análise pelo modo de falha combinado de flexão e cisalhamento, afim de determinar qual dos dois possui maior impacto no dimensionamento da estrutura como um todo.

O presente trabalho utiliza rotinas de criação do próprio autor para a otimização do problema, bem como adaptações do algoritmo do FORM fornecido por Torres (2009). As rotinas utilizadas podem ser consultadas no Apêndice A. No Apêndice B, é possível consultar o dimensionamento das armaduras longitudinais e transversais, respectivamente, bem como o Método da Rigidez Direta programado em MATLAB. As mesmas rotinas são acionadas em diferentes passos do algoritmo.

4.1 Dimensionamento à flexão

Primeiramente, projeta-se a viga com a função de falha referente à flexão.

4.1.1 Ponto de partida

O ponto de partida toma como base o que foi definido no capítulo anterior, para com os valores iniciais das variáveis determinísticas e estocásticas. Toma-se como base os dimensionamentos à flexão, definido no item 3.2.2, e ao cisalhamento, definido no item 3.2.3, utilizando os valores escolhidos para as dimensões da seção transversal (altura e base),

resistências características do concreto e do aço, e as demais variáveis já explicadas, como o cobrimento nominal e o índice de confiabilidade alvo.

As variáveis de projeto possuem os valores iniciais de:

$$h_v = 40\ cm$$

$$b_v = 20\ cm$$

buscando o índice de confiabilidade:

$$\beta_{alvo} = 3{,}5$$

Na Tabela 4.1, estão apresentados os resultados obtidos para a base e altura, utilizando o dimensionamento inicial descrito no capítulo 3, buscando o índice de confiabilidade de 3,5, bem como os valores iniciais para as variáveis aleatórias e de projeto. Vale salientar que, para o ponto de partida, o índice de confiabilidade encontrado possui valor $\beta = 5{,}5837$, no primeiro passo do algoritmo, relativamente superior ao índice de confiabilidade alvo (β = 3,5).

Tabela 4.1 – Estudo para o caso de flexão.

Variável	**Unidade**	**Ponto de Partida**	**Ponto Final de Projeto**	
			b_v (cm)	h_v (cm)
A_s	cm²	0,31	20,3378	33,3782
A'_s	cm²	0,00		
b_v	cm	20,00		
h_v	cm	40,00		
f_{ck}	MPa	25,00		
f_{yk}	MPa	500,00		

Fonte: Autor (2019).

4.1.2 Estudo paramétrico com a resistência característica do concreto

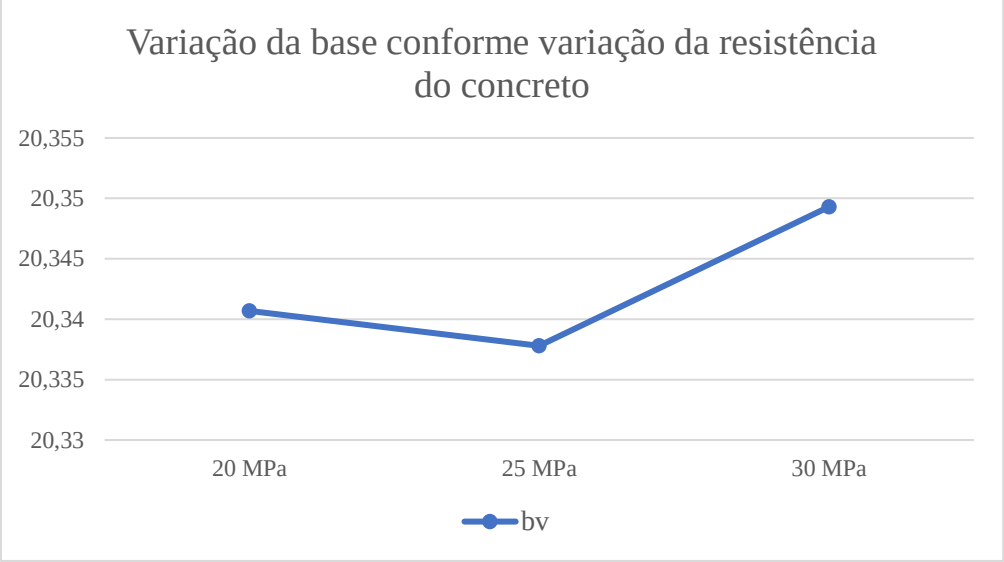
A fim de avaliar a influência da variável referente à resistência do concreto na altura da estrutura, são realizados estudos paramétricos com resistências características de concreto diferentes (C20 e C30), com resistências características (f_{ck}) iguais a 20 e 30 MPa, respectivamente. Na Tabela 4.2 encontram-se os pontos de projeto obtidos para o mesmo índice de confiabilidade alvo de 3,5, variando apenas a resistência característica do concreto. A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** ilustra o que está apresentado na tabela, para a variável de projeto b_v, e a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** ilustra o mesmo que a anterior, porém referente à variável de projeto h_v.

Tabela 4.2 – Projeto da viga à flexão alterando-se as propriedades do concreto.

Resistência Característica do Concreto (MPa)	**Ponto Final de Projeto**	
	b_v (cm)	h_v (cm)
20,0	20,3407	33,4270
25,0	20,3378	33,3782
30,0	20,3493	33,3458

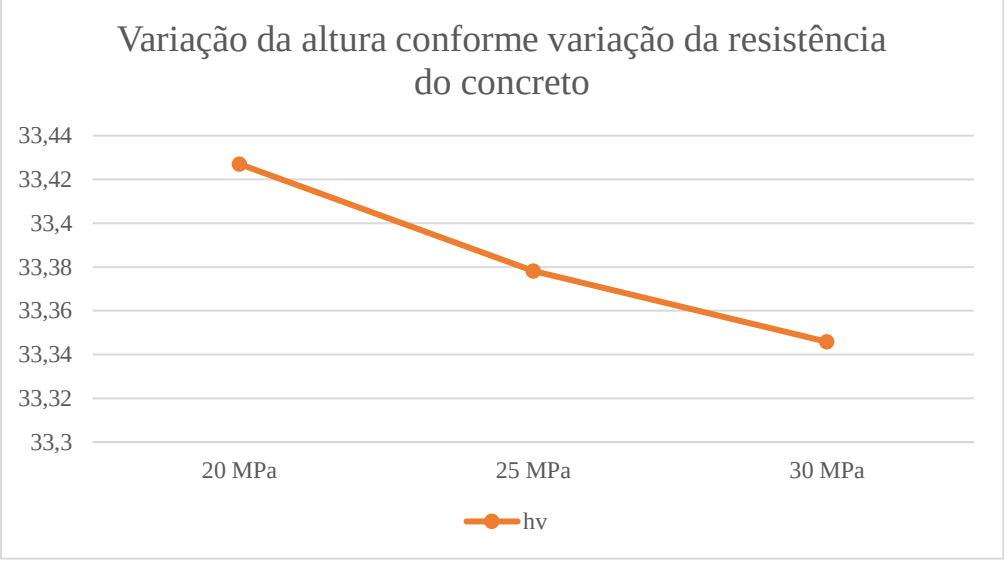
Fonte: Autor (2019).

Figura 4.1 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do concreto.



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.2 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do concreto.



Fonte: Autor (2019).

Percebe-se, pela Figura 4.2, uma relação de proporcionalidade direta entre a resistência do concreto e a segurança da estrutura, pois, para valores maiores da resistência do concreto, são obtidos valores menores para os pontos finais de projeto na altura. Além do mais, a variação da resistência do concreto não parece ter valor significante na busca do ponto de projeto.

4.1.3 Estudo paramétrico com a resistência característica do aço

Também se avalia o impacto da resistência do aço no problema analisado. Para este caso, foram utilizados valores arbitrários de 400, 500 e 600 MPa para a resistência característica do aço (f_{yk}). Na Tabela 4.3 estão os valores encontrados para a base e a altura para cada uma das resistências características do aço supracitadas, ainda com o índice de confiabilidade alvo de 3,5.

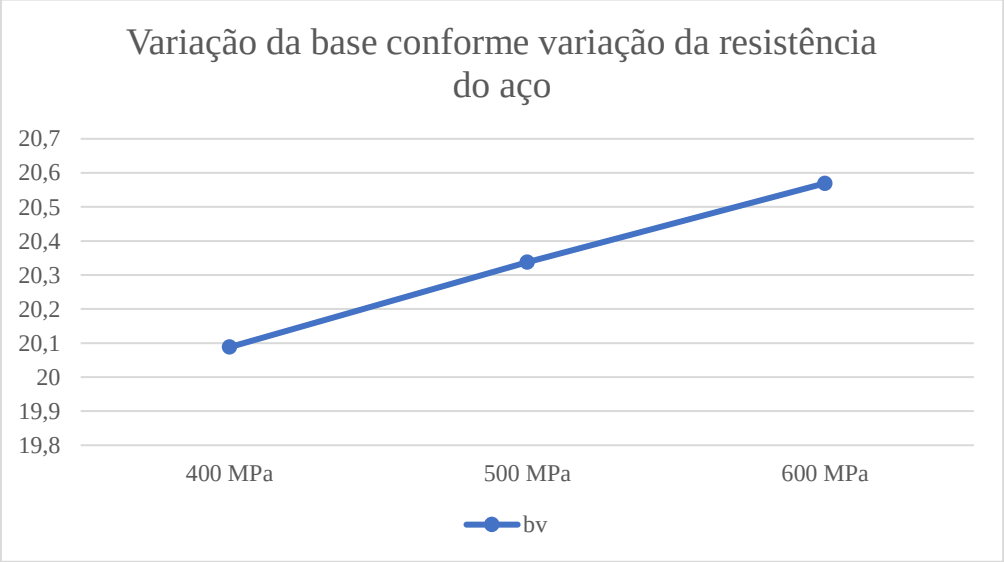
Percebe-se que também há uma relação de proporcionalidade inversa entre o aumento da resistência e o ponto final de projeto para a altura, como ilustra a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, e de proporcionalidade direta com o ponto final de projeto para a base, ilustrada na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**. no entanto, as variações na altura são impactadas cerca de 30 vezes mais pela mudança da resistência característica do aço que as variações no valor da base.

Tabela 4.3 – Projeto da viga à flexão alterando-se as propriedades do aço.

Resistência Característica do Aço (MPa)	**Ponto Final de Projeto**	
	b_v (cm)	h_v (cm)
400,0	20,0881	40,8874
500,0	20,3378	33,3782
600,0	20,5693	28,3829

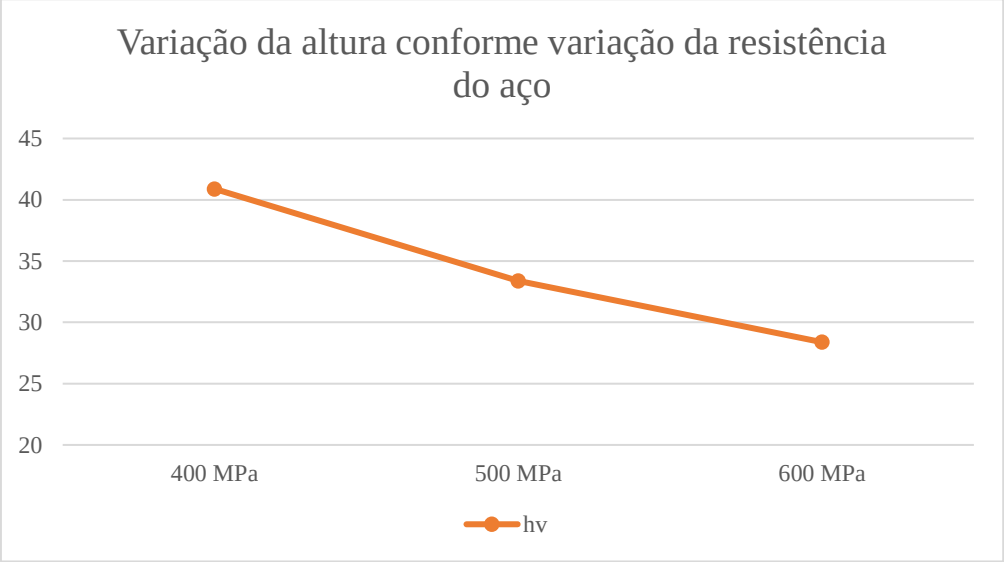
Fonte: Autor (2019).

Figura 4.3 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do aço.



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.4 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do aço.



Fonte: Autor (2019).

4.1.4 Estudo paramétrico com os índices de confiabilidade segundo o JCSS

Por fim, são analisados os valores das variáveis de projeto para diferentes índices de confiabilidade alvo, de acordo com os valores propostos pelo JCSS, apresentados no item 0. Foram escolhidos os valores de índice de confiabilidade referentes ao custo relativo da medida de segurança alto (A), semelhantemente ao caso estudado por Silva (2014), para as consequências de falha mínima, moderada e alta. Na Tabela 4.4 encontram-se os pontos finais de projeto para diferentes índices de confiabilidade alvo. Para maiores índices de confiabilidade alvo, maior é o valor da altura, como ilustra a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, e

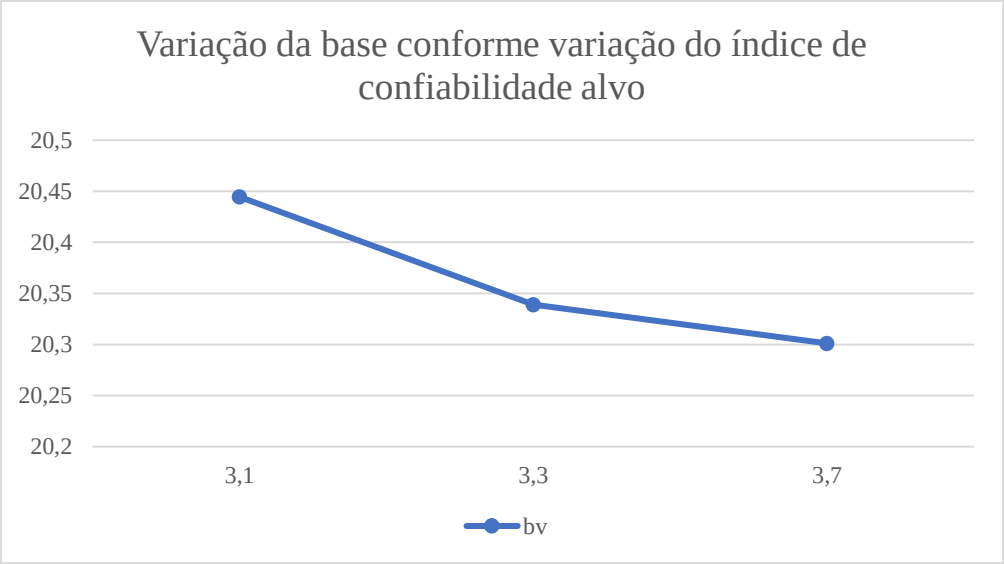
menor o valor da base, como ilustra a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, porém em proporções diferentes. A altura possui variações cerca de 5 vezes maiores que a base.

Tabela 4.4 – Projeto de viga à flexão para diferentes parâmetros de segurança.

Custo relativo da medida de segurança	**Consequências de falha**	**Índice de Confiabilidade Alvo (β_{alvo})**	**Ponto Final de Projeto**	
			b_v (cm)	h_v (cm)
Alto (A)	Mínima	3,1	20,4445	32,2263
	Moderada	3,3	20,3390	32,7988
	Alta	3,7	20,3011	33,9666

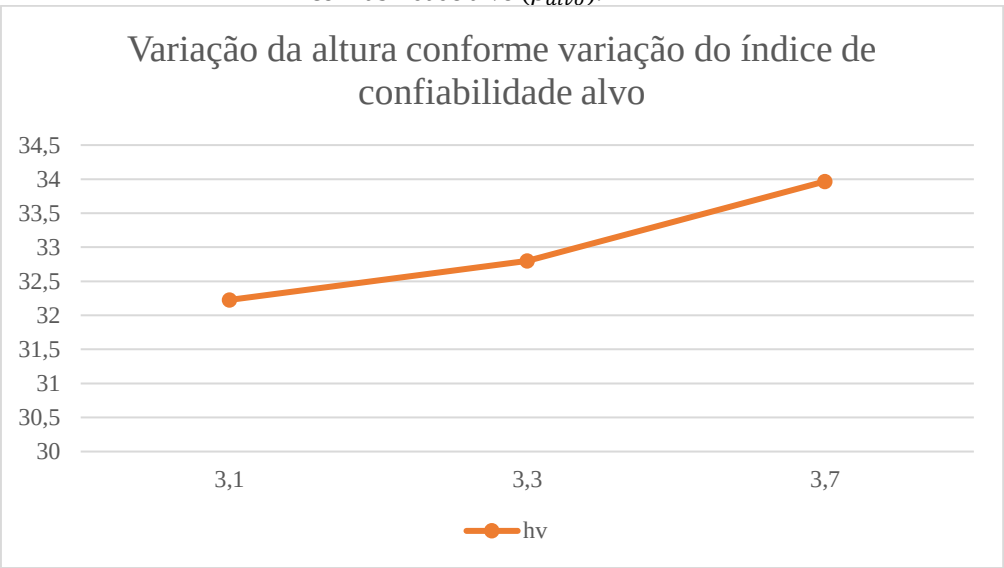
Fonte: Autor (2019).

Figura 4.5 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação do índice de confiabilidade alvo (β_{alvo}).



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.6 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação do índice de confiabilidade alvo (β_{alvo}).



Fonte: Autor (2019).

4.2 Dimensionamento ao cisalhamento

Nesta seção, analisam-se os casos de dimensionamento tendo como base a equação 3.24, proposta por Ribeiro (2012) para a resistência de vigas de concreto armado submetidas ao cisalhamento.

4.2.1 Ponto de partida

Assim como no caso de flexão, analisa-se inicialmente o caso definido no item 3.1. Na Tabela 4.5, é apresentado o ponto de projeto encontrado e o ponto de partida das variáveis aleatórias.

Tabela 4.5 – Dimensionamento para o exemplo inicial de cisalhamento.

Variável	**Unidade**	**Ponto de Partida**	**Ponto Final de Projeto**	
			b_v (cm)	h_v (cm)
ϕ_{sw}	mm	5,00	20,0194	40,0160
q	kN/m	10,00		
f_{ck}	MPa	25,00		
f_{yk}	MPa	500,00		

Fonte: Autor (2019).

Nota-se que os valores obtidos para as variáveis de projeto foram muito parecidos com os valores do ponto de partida. Isso se dá pelo fato de o mesmo estar muito próximo ao alvo, sendo o valor encontrado no primeiro passo do algoritmo para índice de confiabilidade $\beta = 3{,}4884$, e o índice alvo sendo $\beta = 3{,}5$.

4.2.2 Estudo paramétrico com a resistência característica do concreto

Analogamente ao item homônimo para o caso à flexão, a análise também é feita variando a resistência característica do concreto nas mesmas magnitudes. Na Tabela 4.6, encontram-se os pontos de projeto encontrados para os diferentes valores de resistência do concreto.

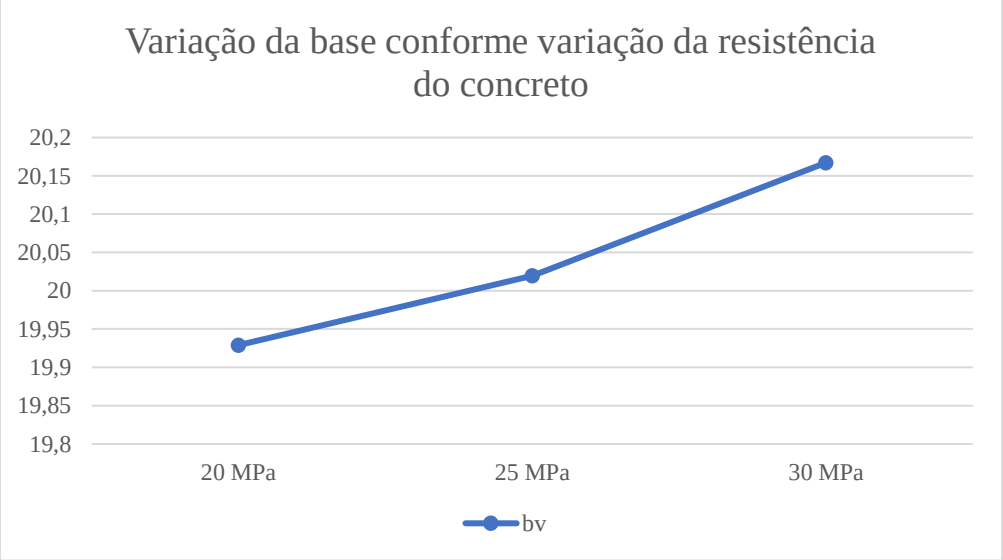
Tabela 4.6 – Projeto da viga ao cisalhamento alterando-se as propriedades do concreto.

Resistência Característica do Concreto (MPa)	**Ponto Final de Projeto**	
	b_v (cm)	h_v (cm)
20,0	19,9290	40,2282
25,0	20,0194	40,0160
30,0	20,1671	39,8472

Fonte: Autor (2019).

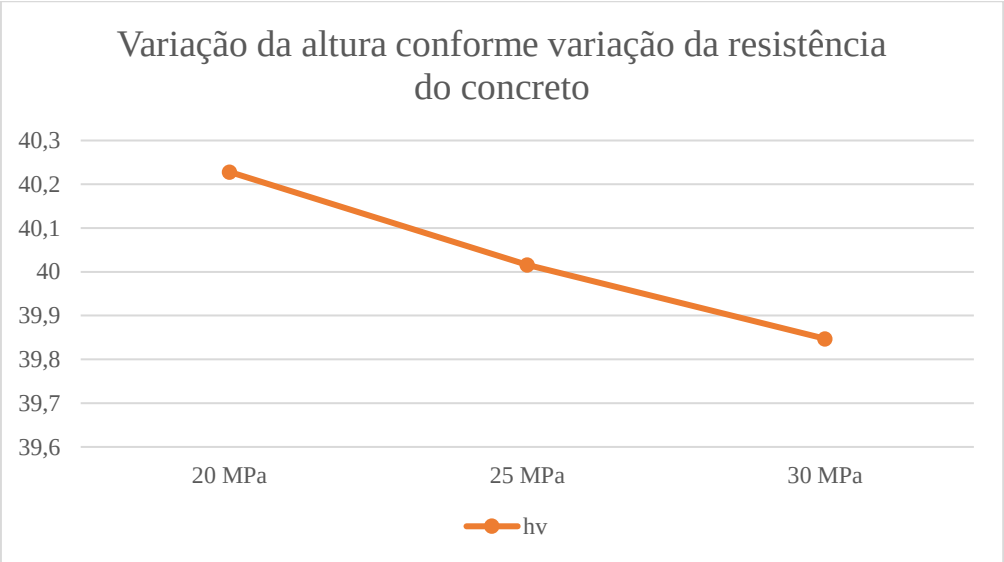
Nesse caso, é possível observar na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** que a altura diminui conforme a resistência do concreto aumenta, e o inverso acontece com a base, como ilustrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Figura 4.7 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do concreto.



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.8 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do concreto.



Fonte: Autor (2019).

4.2.3 Estudo paramétrico com a resistência característica do aço

Da mesma maneira, é feito o estudo paramétrico com o f_{yk}, cujos valores encontram-se na Tabela 4.7.

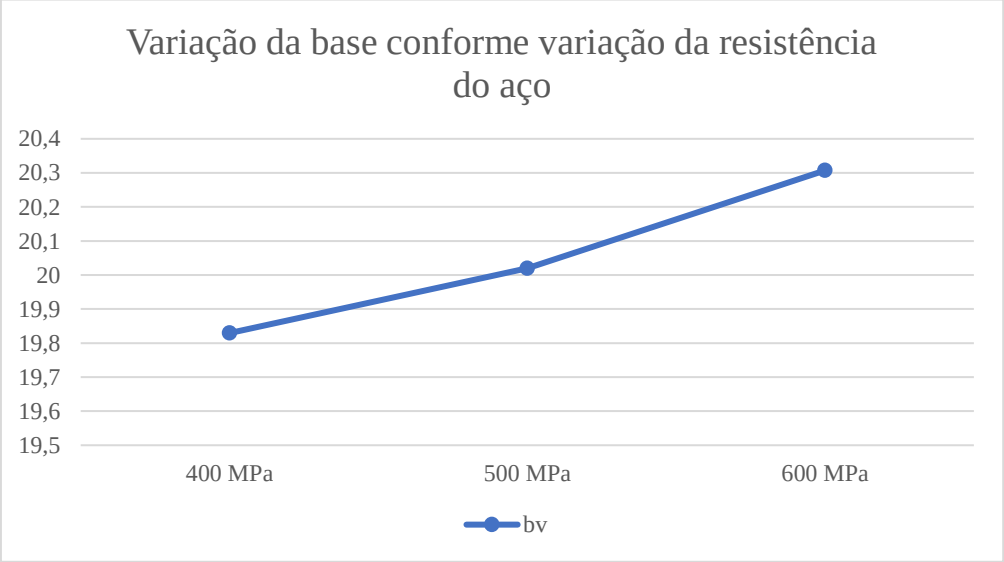
Tabela 4.7 – Projeto da viga ao cisalhamento alterando-se as propriedades do aço.

Resistência Característica do Aço (MPa)	**Ponto Final de Projeto**	
	b_v (cm)	h_v (cm)
400,0	19,8295	40,5082
500,0	20,0194	40,0160
600,0	20,3070	39,6007

Fonte: Autor (2019).

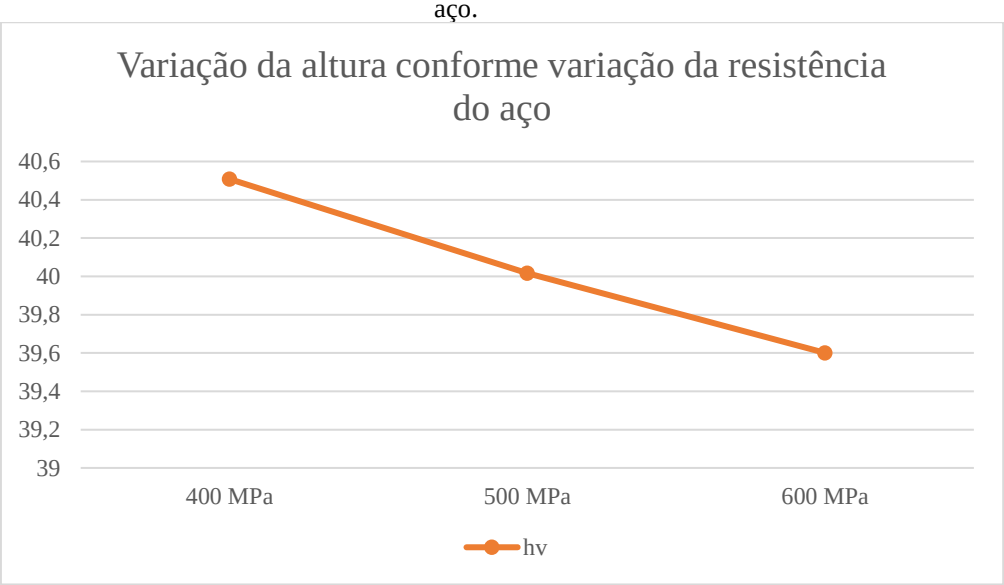
Nesse caso, as variações nas variáveis de projeto são um pouco maiores das apresentadas no item anterior, com a variação nos valores chegando a ser duas vezes maior no caso da altura, isso mostra uma maior influência que a armadura transversal tem em relação ao concreto na contribuição com a resistência ao cisalhamento para este modelo de viga. A base e a altura variam de maneira semelhante ao do item 4.2.2, onde a altura diminui (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**) e a base aumenta (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**), conforme aumenta o valor de f_{yd}.

Figura 4.9 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação da resistência do aço.



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.10 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação da resistência do aço.



Fonte: Autor (2019).

4.2.4 Estudo paramétrico com os índices de confiabilidade segundo o JCSS

Nesta análise, foram adotados os mesmos parâmetros e a mesma linha de raciocínio do item 4.1.4, para o custo relativo da medida de segurança alto e analisando as consequências de falha mínima, moderada e alta. Os resultados encontram-se na Tabela 4.8, onde encontram-se os valores dos pontos de projeto para os diferentes índices de confiabilidade alvo.

A altura e a base variaram de maneira semelhante ao observado no item 4.1.4, onde a base é inversamente proporcional ao índice alvo, como ilustrado na **Erro! Fonte de referência**

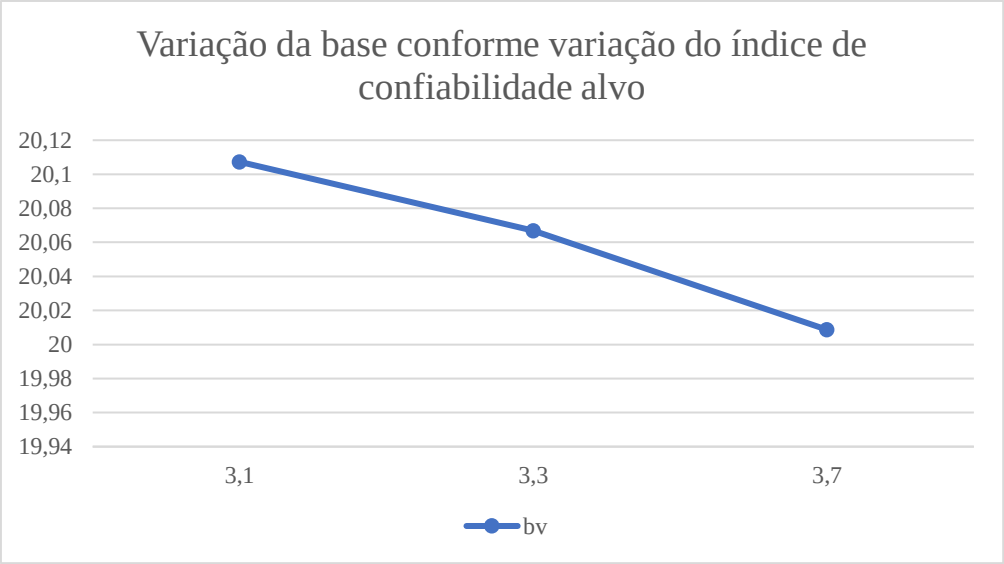
não encontrada., e a altura é diretamente proporcional ao mesmo, como ilustrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Tabela 4.8 – Projeto de viga ao cisalhamento para diferentes parâmetros de segurança.

Custo relativo da medida de segurança	**Consequências de falha**	**Índice de Confiabilidade Alvo (β_{alvo})**	**Ponto Final de Projeto**	
			b_v (cm)	h_v (cm)
Alto (A)	Mínima	3,1	20,1073	39,9041
	Moderada	3,3	20,0669	39,9621
	Alta	3,7	20,0087	40,0916

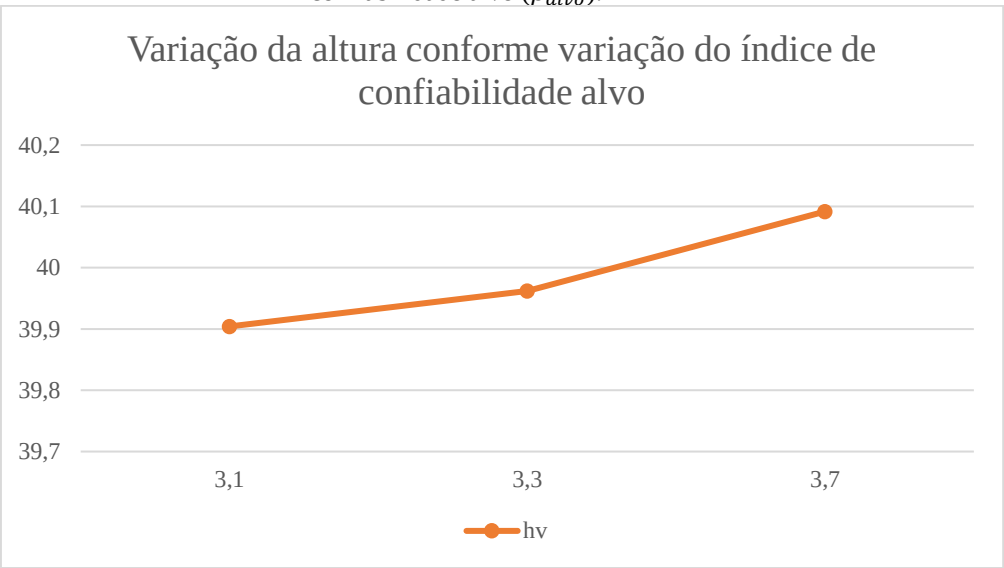
Fonte: Autor (2019).

Figura 4.11 – Variação do valor da variável de projeto referente à base conforme a variação do índice de confiabilidade alvo (β_{alvo}).



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.12 – Variação do valor da variável de projeto referente à altura conforme a variação do índice de confiabilidade alvo (β_{alvo}).



Fonte: Autor (2019).

4.3 Dimensionamento no modo combinado de falha por cisalhamento e flexão

Agora, analisa-se apenas o exemplo inicial, com o índice de confiabilidade alvo (β = 3,5) para a função do modo de falha combinado (equação 3.26), afim de comparar os casos aqui estudados.

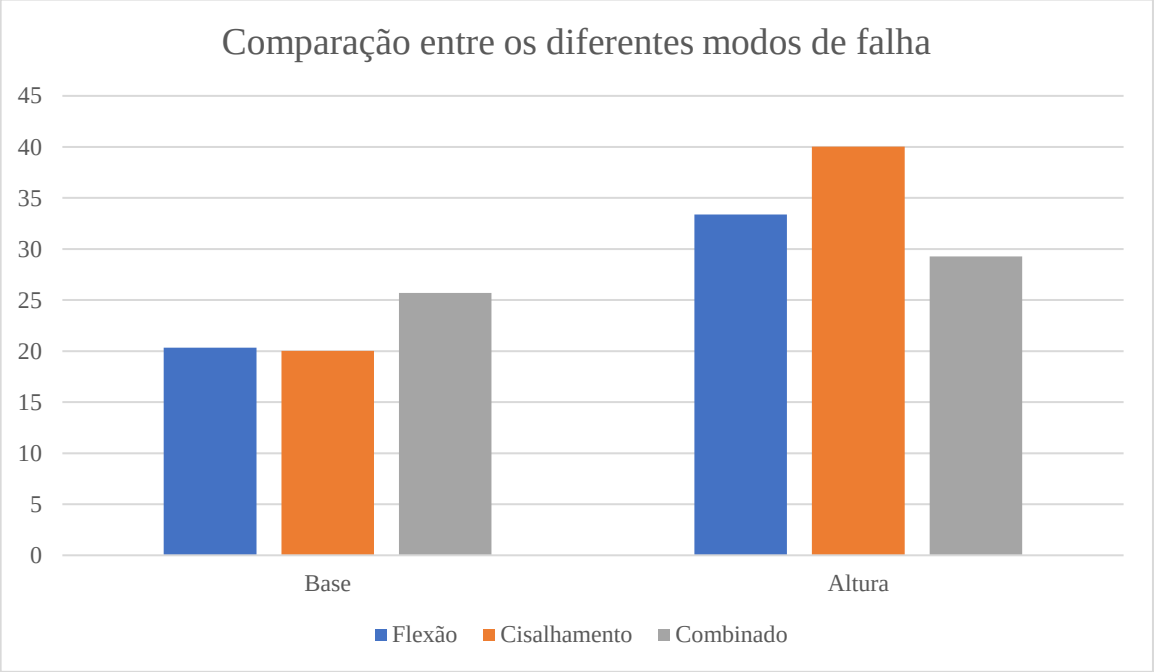
Tabela 4.9 – Dimensionamento para o exemplo inicial no modo combinado de falha por flexão e cisalhamento.

Modo de Falha	**Índice de Confiabilidade Alvo (β_{alvo})**	**Ponto Final de Projeto**	
		b_v (cm)	h_v (cm)
Flexão	3,5	20,3378	33,3782
Cisalhamento		20,0194	40,0160
Combinado		25,7106	29,2879

Fonte: Autor (2019).

Observa-se, através da Tabela 4.9 e da **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, que os valores encontrados para a altura no modo combinado de falha menores que nos modos de falha por flexão e por cisalhamento. No entanto, o valor da base é cerca de 20% maior que o dos outros casos, o que pode indicar uma maior relevância dessa variável quando leva-se em conta ambas as falhas simultaneamente, tendo em vista também que, nos modos de falha por flexão e por cisalhamento, a base permaneceu com seu valor de projeto próximo ao inicial.

Figura 4.13 – Comparação dos valores das variáveis de projeto conforme os três diferentes modos de falha.



Fonte: Autor (2019).

5 CONCLUSÕES

Como ferramenta de auxílio ao dimensionamento de estruturas, a análise de confiabilidade ganha cada vez mais espaço, não só como instrumento de verificação, mas como base de algoritmos de projeção estrutural, bem como outros problemas de engenharia.

O presente trabalho teve como objetivo expandir o entendimento a respeito da relação entre os parâmetros de confiabilidade e equações cotidianas no projeto de estruturas. O FORM apresentou-se uma poderosa ferramenta no cálculo do índice de confiabilidade, possuindo relativamente baixo custo computacional e rápida convergência em seus passos. O projeto baseado em confiabilidade permite ao projetista um melhor entendimento de como as variáveis de projeto relacionam-se com as equações envolvidas na física do problema, além de apontar possíveis inconsistências nas mesmas, sempre buscando maior segurança e economia. A utilização de variáveis de projeto distintas permite ao engenheiro um comparativo mais imediato de para com qual variável deve-se ter maior atenção, tanto na concepção projetual como na execução de tal projeto.

Com relação aos estudos paramétricos, pôde-se observar que os parâmetros analisados possuem impactos de diferentes magnitudes sobre as variáveis de projeto. Com relação à resistência do concreto, observou-se que há relativamente baixa variabilidade nas variáveis de projeto em relação a esta, tanto no caso de flexão, onde as variações foram de 0,014% a 0,056% na base e de 0,10% a 0,15% na altura, para alterações de mesma magnitude no parâmetro analisado, como no caso de cisalhamento, onde as variações foram de 0,45% a 0,74% na base e de 0,42% a 53% na altura, alterações um pouco mais expressivas, mesmo que ainda muito pequenas para os padrões analisados. Na análise tomando como parâmetro tensão de escoamento do aço, o impacto sobre as variáveis no caso de flexão possuiu muita expressividade, onde a variável de projeto correspondente à base variou de 0,14% a 0,23% e a altura variou de 14,97% a 22,50%, comparando os valores obtidos para diferentes tensões de escoamento. Já no caso do cisalhamento, o impacto da armadura dá-se de maneira semelhante ao caso de flexão, porém com valores bastante reduzidos em comparação, com a base variando entre 0,95% e 1,44% e a altura variando entre 1,04% e 1,23%. O estudo realizado para os índices de confiabilidade diferentes mostrou que a altura, onde foram aferidas grandes variações no índice de confiabilidade para relativamente pequenas alterações nessa variável, possui uma maior importância que a base na confiabilidade da estrutura, tanto na flexão como no cisalhamento. Através do modo combinado de falha, observou-se uma maior importância da base em relação aos modos de falha por flexão e por cisalhamento, apesar de não ser possível

aferir claramente qual variável ou qual modo de falha é mais importante no dimensionamento analisando somente este.

5.1 Sugestões de trabalhos futuros

Como sugestão de trabalhos futuros, recomenda-se:

- Utilizar mais do que duas variáveis de projeto, tais como o comprimento da viga e as resistências do concreto e do aço;
- Projetar variáveis que não sejam dados geométricos do problema, tais como os coeficientes de segurança recomendados pela NBR 6118 (2014);
- Projetar a viga a partir de um caso real ou usual de carregamento;
- Analisar a viga por outras funções de falha;
- Analisar a viga fazendo combinações de modos de falha diferentes dos aqui utilizados;
- Aplicar outros métodos de análise de confiabilidade que não o FORM, tais como o método de simulação de Monte Carlo e o *Second Order Reliabilty Method* (SORM) ou Método de Confiabilidade de Segunda Ordem.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, José Milton. **Curso de concreto armado**. Cidade Nova – RS: Rio Grande: Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto armado – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238p.

BECK, Andre T. **Curso de confiabilidade estrutural**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2008. 215 p.

CHAVES, Isabella A. **Análise da confiabilidade estrutural em dutos sujeitos à corrosão através de um intervalo de confiança para o índice de confiabilidade e probabilidade de falha estimado pela técnica *bootstrap***. 2015. 170 p. Tese (Doutorado) - Curso de Métodos Numéricos em Engenharia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

ERASO, Andrea Isabel Rojas. **Análise de confiabilidade de longarinas de pontes ferroviárias de concreto armado**. 2011. 127 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2011.

FRANCO, Rodrigo Martins de**. Avaliação da segurança em seções de concreto armado sob solicitações normais com base na teoria de confiabilidade**. 2010. 123 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. An Exact and Invariant First Order Reliability Format. **Journal Of Engineering Mechanics**, Sydney, Austrália, v. 100, n. 1, p.111-121, jan. 1974.

JCSS. *Joint Committee on Structural Safety*. **Probabilistic Model Code**. 2001. Disponível em: https://www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic_Model_Code. Acesso em: 05 novembro 2018.

MARTHA, Luiz Fernando. **Método da rigidez direta para modelos estruturais lineares e elásticos**. Rio de Janeiro: Pontíficia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, 1993. 84 p.

MOHAMED, A.; SOARES, R.; VENTURINI, W.s.. Partial safety factors for homogeneous reliability of nonlinear reinforced concrete columns. **Structural Safety**, [s.l.], v. 23, n. 2, p.137-156, jan. 2001. Elsevier BV. http://dx.doi.org/10.1016/s0167-4730(01)00009-1.

NOGUEIRA, Caio Gorla; RODRIGUES, Bruno Daniel Leite. Análise de confiabilidade de uma viga em concreto armado considerando modelos não lineares de materiais e a influência de múltiplos modos de falha na avaliação da segurança global. **Integração Engenharia**, Bauru-sp, v. 1, n. 12, p.107-115, jan. 2017.

NOVA, Silvia J. S. **Avaliação da segurança de pontes de concreto protendido sob solicitações normais com base na teoria de confiabilidade**. 2017. 123 f. Dissertação

(Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas, 2017.

PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de Elementos Finitos**. 2008. 248 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2008.

PEREIRA, Victor Wagner Araújo. **Análise de confiabilidade de um pórtico plano de concreto armado**. 2016. 92 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Núcleo de Tecnologia, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Caruaru, 2016.

RACKWITZ, Rüdiger; FLESSLER, Bernd. Structural reliability under combined random load sequences. **Computers & Structures**, [s.l.], v. 9, n. 5, p.489-494, nov. 1978. Elsevier BV. http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(78)90046-9.

RIBEIRO, Adriana B. Projeto semi-probabilístico de vigas de concreto armado com modo de falha por cisalhamento. 2012. 233 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas - PROPEEs, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte, 2012.

RIBEIRO, Sidnea E. C. **Análise da confiabilidade de vigas de concreto armado com plástico reforçado por fibras**. 2009. 151 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais - Ufmg, Belo Horizonte, 2009.

ROCHA, R. G.; REAL, M. V.; MOURA, M. W. **Estudo de confiabilidade de vigas de concreto protendido**. Engevista, Rio de Janeiro, v. 17, n. 4, p.573-587, dez. 2015.

SAGRILO, L. V. S.; LIMA, E. C. P., 2002**. Apostila curso confiabilidade estrutural**, Programa de Engenharia Civil, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

SAGRILO, Luís Volnei Sudati. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando métodos analíticos FORM e SORM**. 1994. 151 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa em Engenharia – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

SILVA, Adiclênio Domingos da. **Projeto baseado em confiabilidade de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples**. 2014. 96 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Núcleo de Tecnologia, Universidade Federal de Pernambuco - Ufpe, Caruaru, 2014.

SILVA, A. D.; TORRES, J. V. S. **Análise de Confiabilidade de Estruturas Reticuladas via Algoritmo FORM**. 2012. In: XX CONIC – Congresso de Iniciação Científica da UFPE, Recife. XX CONIC, 2012.

TEIXEIRA, Pedro Wellington G. N.; MAFFEI, Carlos Eduardo Moreira; GUAZZELLI, Maria Cecília. Resistência à força cortante de vigas de concreto armado com seção transversal circular. **RIEM - IBRACON Structures and Materials Journal, [S.l**.], v. 5, n. 6, set. 2012. ISSN 1983-4195.

XU, Tengfei; CASTEL, Arnaud; GILBERT, R. Ian. On the Reliability of Serviceability Calculations for Flexural Cracked Reinforced Concrete Beams. **Structures**, [s.l.], v. 13, p.201-212, fev. 2018. Elsevier BV. http://dx.doi.org/10.1016/j.istruc.2018.01.001.

APÊNDICE A – FORM adaptado

A) Rotina de dimensionamento à flexão

```
clc; clear all
format long

[bv,hv] = VP;

x0 = [bv,hv];
A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
lb=[15,0];
ub=[2*bv,2*hv];
% [x,fval]=fmincon(@FUNCAO_FORM_2_VARIAVEIS_PROJETO,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
%options=optimset('Algorithm','sqp','Display','off');
options = optimoptions('fmincon','StepTolerance',1e-3);
[x,fval]=fmincon(@FORM_flexao,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

FORM – FLEXÃO

```
function [ BETA ] = FORM_VIGA(VARIAVEIS_PROJETO)

D1 = 0.0498673470;D2 = 0.0211410061;D3 = 0.0032776263;D4 = 0.0000380036;D5
= 0.0000488906;D6 = 0.0000053830;

bv = VARIAVEIS_PROJETO(1);
hv = VARIAVEIS_PROJETO(2);

[k,Num,Tol,c,D_estribo,As,As_linha,fyd,fcd,sigma_linha,Mk,As_cort,fywd,fctd
,x_d,Vsd,q] = DADOS_FORM;%(hv,bv);

%fcd = 20/1.4;
%fcd = 25/1.4;
%fcd = 30/1.4;

%fyd = 400/1.15;
%fyd = 500/1.15;
%fyd = 600/1.15;

BETA_TARGET = 3.7;

%for H = 1:7
%    altura(H)=h;

m1 = As+As_linha;cov1 = 0.015;
m2 = q;cov2 = 0.1;
m3 = fcd;cov3 = 0.15;
m4 = fyd;cov4 = 0.05;
m5 = 1.0;cov5 = 0.05;
m6 = 1.0;cov6 = 0.05;

%m1 = hv;cov1 = 0.01;                % Coeficiente 1 0.01
%m2 = bv;cov2 = 0.02;                % Coeficiente 2 0.02
%m3 = fcd;cov3 = 0.15;               % Coeficiente 3
%m4 = fyd;cov4 = 0.10;               % Coeficiente 4 0.10
%m5 = 1.0;cov5 = 0.05;               % Coeficiente 5
```

```
%m6 = 1.0;cov6 = 0.05;                % Coeficiente 6

%R_moment = ((m1*(m12/10)*((m2-m4-(m11/10)-0.6)-
((0.4*m1*m12)/(0.68*m6*m3)))));
%S_moment = 100*Mk(k);
%R_S_moment = R_moment - S_moment;
%fprintf('R_M = %.8f\n',R_moment);
%fprintf('S_M = %.8f\n',S_moment);
%fprintf('R_S_M = %.8f\n\n',R_S_moment);

%S_cort = Vsk(k);
%R_cort = (((0.6*m3*(m2-m4-(m11/10)-1)*(m9/10))+(0.9*(m2-m4-(m11/10)-
1)*(m5/10)*m8)));
%R_S_cort = R_cort - S_cort;
%fprintf('Resistência do Cortante = %.8f\n',R_cort);
%fprintf('Solicitação do Cortante = %.8f\n',S_cort);
%fprintf('Resistência - Solicitação do Cortante = %.8f\n\n',R_S_cort);

% PROPRIEDADES ESTATISTICAS

% ALTURA
M1 = m1;              % Média
COV1 = cov1;              % Covariância
DP1 = M1*COV1;         % Desvio Padrão

% BASE
M2 = m2;              % Média
COV2 = cov2;              % Covariância
DP2 = M2*COV2;         % Desvio Padrão

% fcd
M3 = m3;              % Média
COV3 = cov3;              % Covariância
DP3 = M3*COV3;         % Desvio Padrão

% fyd
M4 = m4;              % Média
COV4 = cov4;              % Covariância
DP4 = M4*COV4;         % Desvio Padrão

% INCERTEZA DO MODELO - RESISTÊNCIA
M5 = m5;              % Média
COV5 = cov5;              % Covariância
DP5 = M5*COV5;         % Desvio Padrão

% INCERTEZA DO MODELO - SOLICITAÇÃO
M6 = m6;              % Média
COV6 = cov6;              % Covariância
DP6 = M6*COV6;         % Desvio Padrão

NUMIT = Num; % NÚMERO TOTAL DE ITERAÇÕES DO FORM

%NOMENCLATURA ADOTADA (IMUTÁVEL)

U1 = M1;
U2 = M2;
U3 = M3;
U4 = M4;
U5 = M5;
```

```
U6 = M6;

%MATRIZ COM TODAS AS VARIÁVEIS QUE PODEM SER ALEATÓRIAS
COMPL = [U1,U2,U3,U4,U5,U6];

%AVALIAÇÃO DAS MEDIAS E DESVIOS PADROES DAS NORMAIS EQUIVALENTES
%--> CRIAÇÃO DOS VETORES NORMAL E UMED QUE GUARDAM OS VALORES DO DESVIO
PADRÃO E DA MÉDIA, RESPECTIVAMENTE

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(1) = DP1;
UMED(1) = M1;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(2) = DP2;
UMED(2) = M2;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(3) = DP3;
UMED(3) = M3;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(4) = DP4;
UMED(4) = M4;

% C*** DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
DPTELN5 = sqrt(log(1+(DP5^2/M5^2)));
MEDTELN5 = log(M5)-DPTELN5^2/2;
% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE PARA Fyd
NORMAL(5) = U5*DPTELN5;
UMED(5) = U5*(1-log(U5)+MEDTELN5);
% C*** DISTRIBUICAO NORMAL
%NORMAL(13) = DP13;
%UMED(13) = M13;

% C*** DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
DPTELN6 = sqrt(log(1+(DP6^2/M6^2)));
MEDTELN6 = log(M6)-DPTELN6^2/2;
% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE PARA Fyd
NORMAL(6) = U6*DPTELN6;
UMED(6) = U6*(1-log(U6)+MEDTELN6);
% C*** DISTRIBUICAO NORMAL
%NORMAL(14) = DP14;
%UMED(14) = M14;


%DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS - (QUADRO ONDE HÁ ALTERAÇÕES)

if As_linha(k) == 0
% ----------------------> LOCAL ONDE SÃO ESCOLHIDAS AS VARIÁVEIS
U = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR U TERÁ VALORES NUMERICOS
syms U1 U2 U3 U4 U5 U6;
ALEATORIA = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR ALEATORIA TERÁ VARIÁVEIS SIMBÓLICAS

else

% ----------------------> LOCAL ONDE SÃO ESCOLHIDAS AS VARIÁVEIS
U = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR U TERÁ VALORES NUMERICOS
syms U1 U2 U3 U4 U5 U6;
```

```
ALEATORIA = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR ALEATORIA TERÁ VARIÁVEIS SIMBÓLICAS

end

% ------------------------------------------------------------->

tam = length (U);   %TAM REPRESENTA A QUANTIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
VERIFICA = U;       %VERIFICA É UM VETOR AUXILIAR USADO NA FORMAÇÃO DOS
VETORES COM OS DESVIOS PADRÕES E MEDIAS

%Criação da matriz com 1 na diagonal principal
LDC = eye(tam,tam);
GAMA = inv(LDC); %inversa de LDC

% LOOP FORM
for ITE = 1:NUMIT

    temp(ITE)=ITE-1;

    if (ITE == 1)
        UITE1 = U1;
    end

    %EXPRESÃO EMPÍRICA

        q = 1;
        [Mk,Vk] = teste_rigidezdireta(q);

        q = U2;
        Mk = q*Mk;
        Vk = q*Vk;

        % As
        if As_linha == 0

        As = U1;
        fcd = (U3/10);
        fyd = (U4/10);
        d = hv - c - D_estribo/10;
        %d = (U1-c-(D_estribo/10));
        %d = (hv-c-(D_estribo/10)-0.6);

        %Moment = U5*((As(k)*fyd*(d-((0.4*As(k)*fyd)/(0.68*fcd*b)))))-
U6*(100*Mk(k));
        Moment = ((As*fyd*(d-((0.4*As*fyd)/(0.68*fcd*bv)))))-(100*Mk(k));

        % As + As_linha
        else

        As_linha = (As_linha/As)*U1;
        As = U1;

        %if x_d(k) == 1
            X_lim = (0.45*(hv-c-(D_estribo/10)));
        %else
        %    X_lim = (0.63*(hv-c-(D_estribo/10)-0.6));
        %end
        fcd = (U3/10);
```

```
        fyd = (U4/10);
        %d = (U1-c-(D_estribo/10));
        d = (hv-c-(D_estribo/10));
        d_linha = (c+(D_estribo/10));
        %b = U2;

        %Moment = U5*((0.68*fcd*X_lim*b*(d_linha-0.4*X_lim))+(As(k)*fyd*(d-
d_linha)))-U6*(100*Mk(k));
        Moment = ((0.68*fcd*X_lim*bv*(d-0.4*X_lim))+(As_linha*fyd*(d-
d_linha)))-(100*Mk(k));
        %Moment = ((0.68*fcd*X_lim*b*(d_linha-0.4*X_lim))+(As*fyd*(d-
d_linha)))-(100*Mk(k));

        end
        anderson = Moment + 100*Mk(k);
        PF = Moment;
        GU = Moment;

    %CALCULO DA DERIVADA DE GU EM RELAÇÃO AS ALEATÓRIAS E SUBSTITUIÇÃO DO
    %VALOR NUMERICO ARMAZENANDO EM GGUVA
    GGUVA=zeros(tam,1);
    for i=1:tam
        GGUVA(i)=vpa(subs(diff(GU,ALEATORIA(i)),ALEATORIA,U),6);
        GGUVA(i)=double(GGUVA(i));
    end
    GGUVA;
    %MATRIZES COM OS VALORES NORMAIS E UMED DAS RESPECTIVAS VARIÁVEIS
ALEATÓRIAS
    UN=zeros(tam,1);
    m1=zeros(tam,1);
    for i=1:tam
        ELEM=find(COMPL==VERIFICA(i)); %ELEM DA A POSIÇÃO QUE ESSE VALOR
ESTA NO VETOR U REPRESENTA QUAL(IS) ALEATORIA(S) FOI/FORAM ESCOLHIDA(S)
        UN(i)=NORMAL(ELEM(1)); %ASSIM PODE-SE CRIAR O VETOR COM OS DESVIOES
PADROES PEGANDO NO VETOR NORMAL O VALOR DE MESMA POSIÇÃO DA NUMERAÇÃO DA
SIMBOLICA
        m1(i)=UMED(ELEM(1)); %PROCESSO IGUAL O VETOR DAS MEDIAS
    end

    %SUBSTITUIÇÃO DA VARIAVEIS ALEATORIAS POR VALORES NUMERICOS
    %M=vpa(subs(M,ALEATORIA,U),5);
    %M=double(M);
    PF=vpa(subs(PF,ALEATORIA,U),6);
    PF=double(PF);
    GU=vpa(subs(GU,ALEATORIA,U),6);

    GU=double(GU);
    anderson = vpa(subs(anderson,ALEATORIA,U),6);
    GV=GU;

    %MATRIZ DIAGONAL CONTENDO OS DESVIOS PADRÕES DAS VARIÁVEIS ALEATÓREAS
    DP1=zeros(tam,tam);
    for i=1:tam
        DP1(i,i)=UN(i);
    end

    J1=GAMA/DP1; %GAMA VEZES A INVERSA DE DP1 SENDO GAMA A INVERSA DE LDC
    IJ1TRAN=(inv(J1)).'; %TRANSPOSTA DA INVERSA DE J1
    GGVVA=IJ1TRAN*GGUVA;
    %fprintf('Gradiente = %.8f\n',GGVVA);
```

```
    GGVVATRA=GGVVA.';
    MODGGVVA=sqrt(sum(GGVVA(:,1).^2)); %modulo de GGVVA
    %fprintf('Módulo do Gradiente = %.8f\n',MODGGVVA);
    alfa1 = GGVVATRA/MODGGVVA;
    I = alfa1.^2;

    V=J1*(U-m1); %PRODUTO ENTRE J1 E A SUBTRAÇÃO DO VETOR U(VALORES
NUMERICOS DAS ALEATÓRIAS) PELO VETOR m1(VALORES MEDIOS DAS ALEATÓRIAS

    VAL1=MODGGVVA^2;
    PROD=GGVVATRA*V;
    VAL2=PROD(1);
    VAL3=VAL2-GU;
    VAL4=GGVVA*VAL3;
    VNEX=VAL4/VAL1;
    PROD2=(VNEX.')*VNEX; %TRANSPOSTA DE VENEX VEZES VNEX RESULTANDO EM UM
NUMERO
    BETA=sqrt(PROD2(1)); %RAIZ DO PROD2
    %Beta=norm(VNEX);

    %VERIFICAÇÃO DE SINAL FEITA APENAS NO PRIMEIRO PONTO
    if (ITE == 1)
        SINAL=GU/(abs(GU));
    end

    BETA_SINAL=BETA*SINAL;
    DIF=VNEX-V;
    TERMO3=J1\DIF; %PRODUTO ENTRE A INVERSA DE J1 E DIF2
    UNEX=TERMO3+U;

    MODV2=sqrt(sum(VNEX.^2)); %RAIZ QUADRADA DA SOMA DOS TERMOS DE VNEX AO
QUADRADO (MODULO DO VETOR)
    MODV1=sqrt(sum(V.^2)); %RAIZ QUADRADA DA SOMA DOS TERMOS DE V AO
QUADRADO (MODULO DO VETOR)
    VERIF=abs((MODV2-MODV1)/(MODV2)); %USADO PARA CONDIÇÃO DE PARADA

    %CALCULO DO SOMATÓRIO DE D*BETA_SINAL SENDO ESTE ELEVADO A UM NUMERADOR
QUE SEGUE O CONTADOR
    D = [D1;D2;D3;D4;D5;D6];
    SOMT=0;
    for i=1:6
        SOMT=SOMT+(D(i)*((BETA_SINAL)^i));
    end;

    EXPCUM = (1+SOMT)^(-16);
    FIZAOB = 1-0.5*EXPCUM;
    PROB = 1-FIZAOB; %PROB REPRESENTA A PROBABILIDADE DE FALHA
    TOL = Tol;

    %ADOÇÃO DO VALOR DE ITERAÇÃO DO U
    for i=1:tam
        U(i) = UNEX(i);
    end

    %CONDIÇÃO DE PARADA QUE PODE SER SATISFEITA ANTES DO NUMERO DE
ITERAÇÕES MÁXIMO
    if (VERIF <= TOL)
        break
    end
```

```
end
UFORM = U;
VARIAVEIS_PROJETO
BETA_SINAL
BETA = double(abs(BETA_SINAL - BETA_TARGET));


end
```

B) Rotina de dimensionamento ao cisalhamento

```
clc; clear all
format long

[bv,hv] = VP;

x0 = [bv,hv];
A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
lb=[15,20];
ub=[46,189];
% [x,fval]=fmincon(@FUNCAO_FORM_2_VARIAVEIS_PROJETO,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
%options=optimset('Algorithm','sqp','Display','off');
options = optimoptions('fmincon','StepTolerance',1e-3);
[x,fval]=fmincon(@FORM_cisalhamento,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

FORM – CISALHAMENTO

```
function [ BETA ] = FORM_VIGA(VARIAVEIS_PROJETO)

D1 = 0.0498673470;D2 = 0.0211410061;D3 = 0.0032776263;D4 = 0.0000380036;D5
= 0.0000488906;D6 = 0.0000053830;

bv = VARIAVEIS_PROJETO(1);
hv = VARIAVEIS_PROJETO(2);

[k,Num,Tol,c,D_estribo,As,As_linha,fyd,fcd,sigma_linha,Mk,As_cort,fywd,fctd
,x_d,Vsd,q] = DADOS_FORM;

BETA_TARGET = 3.7;

%fcd = 20/1.4;
%fcd = 25/1.4;
%fcd = 30/1.4;

%fyd = 400/1.15;
%fyd = 500/1.15;
%fyd = 600/1.15;

%for H = 1:7
%    altura(H)=h;

m1 = As_cort;cov1 = 0.015;
m2 = q;cov2 = 0.1;
m3 = fcd;cov3 = 0.15;
m4 = fyd;cov4 = 0.05;
m5 = 1.0;cov5 = 0.05;
m6 = 1.0;cov6 = 0.05;
```

```
%m1 = hv;cov1 = 0.01;                % Coeficiente 1 0.01
%m2 = bv;cov2 = 0.02;                % Coeficiente 2 0.02
%m3 = fcd;cov3 = 0.15;               % Coeficiente 3
%m4 = fyd;cov4 = 0.10;               % Coeficiente 4 0.10
%m5 = 1.0;cov5 = 0.05;               % Coeficiente 5
%m6 = 1.0;cov6 = 0.05;               % Coeficiente 6

% PROPRIEDADES ESTATISTICAS

% ALTURA
M1 = m1;             % Média
COV1 = cov1;             % Covariância
DP1 = M1*COV1;        % Desvio Padrão

% BASE
M2 = m2;             % Média
COV2 = cov2;             % Covariância
DP2 = M2*COV2;        % Desvio Padrão

% fcd
M3 = m3;             % Média
COV3 = cov3;             % Covariância
DP3 = M3*COV3;        % Desvio Padrão

% fyd
M4 = m4;             % Média
COV4 = cov4;             % Covariância
DP4 = M4*COV4;        % Desvio Padrão

% INCERTEZA DO MODELO - RESISTÊNCIA
M5 = m5;             % Média
COV5 = cov5;             % Covariância
DP5 = M5*COV5;        % Desvio Padrão

% INCERTEZA DO MODELO - SOLICITAÇÃO
M6 = m6;             % Média
COV6 = cov6;             % Covariância
DP6 = M6*COV6;        % Desvio Padrão

NUMIT = Num; % NÚMERO TOTAL DE ITERAÇÕES DO FORM

%NOMENCLATURA ADOTADA (IMUTÁVEL)

U1 = M1;
U2 = M2;
U3 = M3;
U4 = M4;
U5 = M5;
U6 = M6;

%MATRIZ COM TODAS AS VARIÁVEIS QUE PODEM SER ALEATÓRIAS
COMPL = [U1,U2,U3,U4,U5,U6];

%AVALIAÇÃO DAS MEDIAS E DESVIOS PADROES DAS NORMAIS EQUIVALENTES
%--> CRIAÇÃO DOS VETORES NORMAL E UMED QUE GUARDAM OS VALORES DO DESVIO
PADRÃO E DA MÉDIA, RESPECTIVAMENTE

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
```

```
NORMAL(1) = DP1;
UMED(1) = M1;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(2) = DP2;
UMED(2) = M2;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(3) = DP3;
UMED(3) = M3;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(4) = DP4;
UMED(4) = M4;

% C*** DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
DPTELN5 = sqrt(log(1+(DP5^2/M5^2)));
MEDTELN5 = log(M5)-DPTELN5^2/2;
% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE PARA Fyd
NORMAL(5) = U5*DPTELN5;
UMED(5) = U5*(1-log(U5)+MEDTELN5);
% C*** DISTRIBUICAO NORMAL
%NORMAL(13) = DP13;
%UMED(13) = M13;

% C*** DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
DPTELN6 = sqrt(log(1+(DP6^2/M6^2)));
MEDTELN6 = log(M6)-DPTELN6^2/2;
% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE PARA Fyd
NORMAL(6) = U6*DPTELN6;
UMED(6) = U6*(1-log(U6)+MEDTELN6);
% C*** DISTRIBUICAO NORMAL
%NORMAL(14) = DP14;
%UMED(14) = M14;


%DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS - (QUADRO ONDE HÁ ALTERAÇÕES)

if As_linha(k) == 0
% ----------------------> LOCAL ONDE SÃO ESCOLHIDAS AS VARIÁVEIS
U = [U1;U2;U3;U4]; %VETOR U TERÁ VALORES NUMERICOS
syms U1 U2 U3 U4;
ALEATORIA = [U1;U2;U3;U4]; %VETOR ALEATORIA TERÁ VARIÁVEIS SIMBÓLICAS

else

% ----------------------> LOCAL ONDE SÃO ESCOLHIDAS AS VARIÁVEIS
U = [U1;U2;U3;U4]; %VETOR U TERÁ VALORES NUMERICOS
syms U1 U2 U3 U4;
ALEATORIA = [U1;U2;U3;U4]; %VETOR ALEATORIA TERÁ VARIÁVEIS SIMBÓLICAS

end

% ------------------------------------------------------------->

tam = length (U);    %TAM REPRESENTA A QUANTIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
VERIFICA = U;        %VERIFICA É UM VETOR AUXILIAR USADO NA FORMAÇÃO DOS
VETORES COM OS DESVIOS PADRÕES E MEDIAS
```

```
%Criação da matriz com 1 na diagonal principal
LDC = eye(tam,tam);
GAMA = inv(LDC); %inversa de LDC

% LOOP FORM
for ITE = 1:NUMIT

    temp(ITE)=ITE-1;

    if (ITE == 1)
        UITE1 = U1;
    end

    %EXPRESÃO EMPÍRICA

        As_cort = U1;

        q = 1;
        [Mk,Vk] = teste_rigidezdireta(q);

        q = U2;
        Mk = q*Mk;
        Vk = q*Vk;

        fcd = (U3);
        fyd = (U4);
        %d = U1-c-(D_estribo/10);
        d = (hv-c-(D_estribo/10));

        b = bv;
        %b = U2;

        %gama_c = 1.4;

        %fck = fcd*gama_c;

        %fctm = 0.3*(fck*10)^(2/3)/10;
        %fctd = 0.7*fctm/gama_c;
        %Vc = 0.6*fctd*b*d;

        %Vsw = As_cort*39.2*d;

        %Cortante = Vsw + Vc - Vsd
        R = 2.86 - 2.80*b/100 -0.675*d/100 + 0.412*(As+As_linha)/(b*d)*100
+ 0.00702*fcd - 0.528*150/d + 1.4*fyd*As_cort*0.15/(b*d);
        S = Vsd/(b*d)*10;
        Cortante = R - S;
        %anderson = Moment + 100*Mk(k);
        PF = Cortante;
        GU = Cortante;

    %CALCULO DA DERIVADA DE GU EM RELAÇÃO AS ALEATÓRIAS E SUBSTITUIÇÃO DO
    %VALOR NUMERICO ARMAZENANDO EM GGUVA
    GGUVA=zeros(tam,1);
    for i=1:tam
        GGUVA(i)=vpa(subs(diff(GU,ALEATORIA(i)),ALEATORIA,U),6);
        GGUVA(i)=double(GGUVA(i));
    end
```

```
    GGUVA;
    %MATRIZES COM OS VALORES NORMAIS E UMED DAS RESPECTIVAS VARIÁVEIS
ALEATÓRIAS
    UN=zeros(tam,1);
    m1=zeros(tam,1);
    for i=1:tam
        ELEM=find(COMPL==VERIFICA(i)); %ELEM DA A POSIÇÃO QUE ESSE VALOR
ESTA NO VETOR U REPRESENTA QUAL(IS) ALEATORIA(S) FOI/FORAM ESCOLHIDA(S)
        UN(i)=NORMAL(ELEM(1)); %ASSIM PODE-SE CRIAR O VETOR COM OS DESVIOES
PADROES PEGANDO NO VETOR NORMAL O VALOR DE MESMA POSIÇÃO DA NUMERAÇÃO DA
SIMBOLICA
        m1(i)=UMED(ELEM(1)); %PROCESSO IGUAL O VETOR DAS MEDIAS
    end

    %SUBSTITUIÇÃO DA VARIAVEIS ALEATORIAS POR VALORES NUMERICOS
    %M=vpa(subs(M,ALEATORIA,U),5);
    %M=double(M);
    PF=vpa(subs(PF,ALEATORIA,U),6);
    PF=double(PF);
    GU=vpa(subs(GU,ALEATORIA,U),6);
    GU=double(GU);
    %anderson = vpa(subs(anderson,ALEATORIA,U),6);
    GV=GU;

    %MATRIZ DIAGONAL CONTENDO OS DESVIOS PADRÕES DAS VARIÁVEIS ALEATÓREAS
    DP1=zeros(tam,tam);
    for i=1:tam
        DP1(i,i)=UN(i);
    end

    J1=GAMA/DP1; %GAMA VEZES A INVERSA DE DP1 SENDO GAMA A INVERSA DE LDC
    IJ1TRAN=(inv(J1)).'; %TRANSPOSTA DA INVERSA DE J1
    GGVVA=IJ1TRAN*GGUVA;
    %fprintf('Gradiente = %.8f\n',GGVVA);
    GGVVATRA=GGVVA.';
    MODGGVVA=sqrt(sum(GGVVA(:,1).^2)); %modulo de GGVVA
    %fprintf('Módulo do Gradiente = %.8f\n',MODGGVVA);
    alfa1 = GGVVATRA/MODGGVVA;
    I = alfa1.^2;

    V=J1*(U-m1); %PRODUTO ENTRE J1 E A SUBTRAÇÃO DO VETOR U(VALORES
NUMERICOS DAS ALEATÓRIAS) PELO VETOR m1(VALORES MEDIOS DAS ALEATÓRIAS

    VAL1=MODGGVVA^2;
    PROD=GGVVATRA*V;
    VAL2=PROD(1);
    VAL3=VAL2-GU;
    VAL4=GGVVA*VAL3;
    VNEX=VAL4/VAL1;
    PROD2=(VNEX.')*VNEX; %TRANSPOSTA DE VENEX VEZES VNEX RESULTANDO EM UM
NUMERO
    BETA=sqrt(PROD2(1)); %RAIZ DO PROD2
    %Beta=norm(VNEX);

    %VERIFICAÇÃO DE SINAL FEITA APENAS NO PRIMEIRO PONTO
    if (ITE == 1)
        SINAL=GU/(abs(GU));
    end

    BETA_SINAL=BETA*SINAL;
```

```
    DIF=VNEX-V;
    TERMO3=J1\DIF; %PRODUTO ENTRE A INVERSA DE J1 E DIF2
    UNEX=TERMO3+U;

    MODV2=sqrt(sum(VNEX.^2)); %RAIZ QUADRADA DA SOMA DOS TERMOS DE VNEX AO
QUADRADO (MODULO DO VETOR)
    MODV1=sqrt(sum(V.^2)); %RAIZ QUADRADA DA SOMA DOS TERMOS DE V AO
QUADRADO (MODULO DO VETOR)
    VERIF=abs((MODV2-MODV1)/(MODV2)); %USADO PARA CONDIÇÃO DE PARADA

    %CALCULO DO SOMATÓRIO DE D*BETA_SINAL SENDO ESTE ELEVADO A UM NUMERADOR
QUE SEGUE O CONTADOR
    D = [D1;D2;D3;D4;D5;D6];
    SOMT=0;
    for i=1:6
        SOMT=SOMT+(D(i)*((BETA_SINAL)^i));
    end;

    EXPCUM = (1+SOMT)^(-16);
    FIZAOB = 1-0.5*EXPCUM;
    PROB = 1-FIZAOB; %PROB REPRESENTA A PROBABILIDADE DE FALHA
    TOL = Tol;

    %ADOÇÃO DO VALOR DE ITERAÇÃO DO U
    for i=1:tam
        U(i) = UNEX(i);
    end

    %CONDIÇÃO DE PARADA QUE PODE SER SATISFEITA ANTES DO NUMERO DE
ITERAÇÕES MÁXIMO
    if (VERIF <= TOL)
        break
    end



end
UFORM = U;
VARIAVEIS_PROJETO
BETA_SINAL
BETA = double(abs(BETA_SINAL - BETA_TARGET));


end
```

C) Rotina de dimensionamento com o modo combinado de falha

```
clc; clear all
format long

[bv,hv] = VP;

x0 = [bv,hv];
A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
lb=[15,0];
ub=[2*bv,2*hv];
% [x,fval]=fmincon(@FUNCAO_FORM_2_VARIAVEIS_PROJETO,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
%options=optimset('Algorithm','sqp','Display','off');
```

```
options = optimoptions('fmincon','StepTolerance',1e-3);
[x,fval]=fmincon(@FORM_combinado,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

FORM – MODO COMBINADO DE FALHA POR FLEXÃO E CISALHAMENTO

```
function [ BETA ] = FORM_VIGA(VARIAVEIS_PROJETO)

D1 = 0.0498673470;D2 = 0.0211410061;D3 = 0.0032776263;D4 = 0.0000380036;D5
= 0.0000488906;D6 = 0.0000053830;

bv = VARIAVEIS_PROJETO(1);
hv = VARIAVEIS_PROJETO(2);

[k,Num,Tol,c,D_estribo,As,As_linha,fyd,fcd,sigma_linha,Mk,As_cort,fywd,fctd
,x_d,Vsd,q] = DADOS_FORM;

%fcd = 20/1.4;
%fcd = 25.01/1.4;
%fcd = 30/1.4;

%fyd = 400/1.15;
%fyd = 500/1.15;
%fyd = 600/1.15;

BETA_TARGET = 3.5;

%for H = 1:7
%    altura(H)=h;

m1 = As+As_linha;cov1 = 0.015;
m2 = q;cov2 = 0.1;
m3 = fcd;cov3 = 0.15;
m4 = fyd;cov4 = 0.05;
m5 = 1.0;cov5 = 0.05;
m6 = 1.0;cov6 = 0.05;

%m1 = hv;cov1 = 0.01;                % Coeficiente 1 0.01
%m2 = bv;cov2 = 0.02;                % Coeficiente 2 0.02
%m3 = fcd;cov3 = 0.15;               % Coeficiente 3
%m4 = fyd;cov4 = 0.10;               % Coeficiente 4 0.10
%m5 = 1.0;cov5 = 0.05;               % Coeficiente 5
%m6 = 1.0;cov6 = 0.05;               % Coeficiente 6

% PROPRIEDADES ESTATISTICAS

% ALTURA
M1 = m1;             % Média
COV1 = cov1;             % Covariância
DP1 = M1*COV1;        % Desvio Padrão

% BASE
M2 = m2;             % Média
COV2 = cov2;             % Covariância
DP2 = M2*COV2;        % Desvio Padrão

% fcd
M3 = m3;             % Média
COV3 = cov3;             % Covariância
```

```
DP3 = M3*COV3;       % Desvio Padrão

% fyd
M4 = m4;            % Média
COV4 = cov4;            % Covariância
DP4 = M4*COV4;       % Desvio Padrão

% INCERTEZA DO MODELO - RESISTÊNCIA
M5 = m5;            % Média
COV5 = cov5;            % Covariância
DP5 = M5*COV5;       % Desvio Padrão

% INCERTEZA DO MODELO - SOLICITAÇÃO
M6 = m6;            % Média
COV6 = cov6;            % Covariância
DP6 = M6*COV6;       % Desvio Padrão

NUMIT = Num; % NÚMERO TOTAL DE ITERAÇÕES DO FORM

%NOMENCLATURA ADOTADA (IMUTÁVEL)

U1 = M1;
U2 = M2;
U3 = M3;
U4 = M4;
U5 = M5;
U6 = M6;

%MATRIZ COM TODAS AS VARIÁVEIS QUE PODEM SER ALEATÓRIAS
COMPL = [U1,U2,U3,U4,U5,U6];

%AVALIAÇÃO DAS MEDIAS E DESVIOS PADROES DAS NORMAIS EQUIVALENTES
%--> CRIAÇÃO DOS VETORES NORMAL E UMED QUE GUARDAM OS VALORES DO DESVIO
PADRÃO E DA MÉDIA, RESPECTIVAMENTE

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(1) = DP1;
UMED(1) = M1;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(2) = DP2;
UMED(2) = M2;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(3) = DP3;
UMED(3) = M3;

% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL
NORMAL(4) = DP4;
UMED(4) = M4;

% C*** DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
DPTELN5 = sqrt(log(1+(DP5^2/M5^2)));
MEDTELN5 = log(M5)-DPTELN5^2/2;
% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE PARA Fyd
NORMAL(5) = U5*DPTELN5;
UMED(5) = U5*(1-log(U5)+MEDTELN5);
% C*** DISTRIBUICAO NORMAL
%NORMAL(13) = DP13;
```

```
%UMED(13) = M13;

% C*** DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
DPTELN6 = sqrt(log(1+(DP6^2/M6^2)));
MEDTELN6 = log(M6)-DPTELN6^2/2;
% C*** DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE PARA Fyd
NORMAL(6) = U6*DPTELN6;
UMED(6) = U6*(1-log(U6)+MEDTELN6);
% C*** DISTRIBUICAO NORMAL
%NORMAL(14) = DP14;
%UMED(14) = M14;


%DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS - (QUADRO ONDE HÁ ALTERAÇÕES)

if As_linha(k) == 0
% ---------------------> LOCAL ONDE SÃO ESCOLHIDAS AS VARIÁVEIS
U = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR U TERÁ VALORES NUMERICOS
syms U1 U2 U3 U4 U5 U6;
ALEATORIA = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR ALEATORIA TERÁ VARIÁVEIS SIMBÓLICAS

else

% ---------------------> LOCAL ONDE SÃO ESCOLHIDAS AS VARIÁVEIS
U = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR U TERÁ VALORES NUMERICOS
syms U1 U2 U3 U4 U5 U6;
ALEATORIA = [U1;U2;U3;U4;U5;U6]; %VETOR ALEATORIA TERÁ VARIÁVEIS SIMBÓLICAS

end

% ------------------------------------------------------------->

tam = length (U);    %TAM REPRESENTA A QUANTIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
VERIFICA = U;        %VERIFICA É UM VETOR AUXILIAR USADO NA FORMAÇÃO DOS
VETORES COM OS DESVIOS PADRÕES E MEDIAS

%Criação da matriz com 1 na diagonal principal
LDC = eye(tam,tam);
GAMA = inv(LDC); %inversa de LDC

% LOOP FORM
for ITE = 1:NUMIT

    temp(ITE)=ITE-1;

    if (ITE == 1)
        UITE1 = U1;
    end

    %EXPRESÃO EMPÍRICA

        q = 1;
        [Mk,Vk] = teste_rigidezdireta(q);

        q = U2;
        Mk = q*Mk;
        Vk = q*Vk;
```

```
        b = bv;

        % As
        if As_linha == 0

        As = U1;
        fcd = (U3/10);
        fyd = (U4/10);
        d = hv - c - D_estribo/10;
        %d = (U1-c-(D_estribo/10));
        %d = (hv-c-(D_estribo/10)-0.6);

        %Moment = U5*((As(k)*fyd*(d-((0.4*As(k)*fyd)/(0.68*fcd*b)))))-
U6*(100*Mk(k));
        Moment = ((100*Mk)/(As*fyd*(d-((0.4*As*fyd)/(0.68*fcd*bv)))));

        % As + As_linha
        else

        As_linha = (As_linha/As)*U1;
        As = U1;

        %if x_d(k) == 1
            X_lim = (0.45*(hv-c-(D_estribo/10)));
        %else
        %    X_lim = (0.63*(hv-c-(D_estribo/10)-0.6));
        %end
        fcd = (U3/10);
        fyd = (U4/10);
        %d = (U1-c-(D_estribo/10));
        d = (hv-c-(D_estribo/10));
        d_linha = (c+(D_estribo/10));
        %b = U2;

        %Moment = U5*((0.68*fcd*X_lim*b*(d_linha-0.4*X_lim))+(As(k)*fyd*(d-
d_linha)))-U6*(100*Mk(k));
        Moment = (100*Mk)/((0.68*fcd*X_lim*bv*(d-
0.4*X_lim))+(As_linha*fyd*(d-d_linha)));
        %Moment = ((0.68*fcd*X_lim*b*(d_linha-0.4*X_lim))+(As*fyd*(d-
d_linha)))-(100*Mk(k));
        end

        %gama_c = 1.4;

        %fck = fcd*gama_c;

        %fctm = 0.3*(fck*10)^(2/3)/10;
        %fctd = 0.7*fctm/gama_c;
        %Vc = 0.6*fctd*b*d;

        %Vsw = As_cort*39.2*d;

        %Cortante = Vsw + Vc - Vsd
        R = 2.86 - 2.80*b/100 -0.675*d/100 + 0.412*(As+As_linha)/(b*d)*100
+ 0.00702*fcd - 0.528*150/d + 1.4*fyd*As_cort*0.15/(b*d);
        S = Vsd/(b*d)*10;
        Cortante = S/R;

        Combinado = 1 - Moment - Cortante;
```

```
        anderson = Moment + 100*Mk(k);
        PF = Combinado;
        GU = Combinado;

    %CALCULO DA DERIVADA DE GU EM RELAÇÃO AS ALEATÓRIAS E SUBSTITUIÇÃO DO
    %VALOR NUMERICO ARMAZENANDO EM GGUVA
    GGUVA=zeros(tam,1);
    for i=1:tam
        GGUVA(i)=vpa(subs(diff(GU,ALEATORIA(i)),ALEATORIA,U),6);
        GGUVA(i)=double(GGUVA(i));
    end
    GGUVA;
    %MATRIZES COM OS VALORES NORMAIS E UMED DAS RESPECTIVAS VARIÁVEIS
ALEATÓRIAS
    UN=zeros(tam,1);
    m1=zeros(tam,1);
    for i=1:tam
        ELEM=find(COMPL==VERIFICA(i)); %ELEM DA A POSIÇÃO QUE ESSE VALOR
ESTA NO VETOR U REPRESENTA QUAL(IS) ALEATORIA(S) FOI/FORAM ESCOLHIDA(S)
        UN(i)=NORMAL(ELEM(1)); %ASSIM PODE-SE CRIAR O VETOR COM OS DESVIOES
PADROES PEGANDO NO VETOR NORMAL O VALOR DE MESMA POSIÇÃO DA NUMERAÇÃO DA
SIMBOLICA
        m1(i)=UMED(ELEM(1)); %PROCESSO IGUAL O VETOR DAS MEDIAS
    end

    %SUBSTITUIÇÃO DA VARIAVEIS ALEATORIAS POR VALORES NUMERICOS
    %M=vpa(subs(M,ALEATORIA,U),5);
    %M=double(M);
    PF=vpa(subs(PF,ALEATORIA,U),6);
    PF=double(PF);
    GU=vpa(subs(GU,ALEATORIA,U),6);
    GU=double(GU);
    anderson = vpa(subs(anderson,ALEATORIA,U),6);
    GV=GU;

    %MATRIZ DIAGONAL CONTENDO OS DESVIOS PADRÕES DAS VARIÁVEIS ALEATÓREAS
    DP1=zeros(tam,tam);
    for i=1:tam
        DP1(i,i)=UN(i);
    end

    J1=GAMA/DP1; %GAMA VEZES A INVERSA DE DP1 SENDO GAMA A INVERSA DE LDC
    IJ1TRAN=(inv(J1)).'; %TRANSPOSTA DA INVERSA DE J1
    GGVVA=IJ1TRAN*GGUVA;
    %fprintf('Gradiente = %.8f\n',GGVVA);
    GGVVATRA=GGVVA.';
    MODGGVVA=sqrt(sum(GGVVA(:,1).^2)); %modulo de GGVVA
    %fprintf('Módulo do Gradiente = %.8f\n',MODGGVVA);
    alfa1 = GGVVATRA/MODGGVVA;
    I = alfa1.^2;

    V=J1*(U-m1); %PRODUTO ENTRE J1 E A SUBTRAÇÃO DO VETOR U(VALORES
NUMERICOS DAS ALEATÓRIAS) PELO VETOR m1(VALORES MEDIOS DAS ALEATÓRIAS

    VAL1=MODGGVVA^2;
    PROD=GGVVATRA*V;
    VAL2=PROD(1);
    VAL3=VAL2-GU;
    VAL4=GGVVA*VAL3;
    VNEX=VAL4/VAL1;
```

```
    PROD2=(VNEX.')*VNEX; %TRANSPOSTA DE VENEX VEZES VNEX RESULTANDO EM UM
NUMERO
    BETA=sqrt(PROD2(1)); %RAIZ DO PROD2
    %Beta=norm(VNEX);

    %VERIFICAÇÃO DE SINAL FEITA APENAS NO PRIMEIRO PONTO
    if (ITE == 1)
        SINAL=GU/(abs(GU));
    end

    BETA_SINAL=BETA*SINAL;
    DIF=VNEX-V;
    TERMO3=J1\DIF; %PRODUTO ENTRE A INVERSA DE J1 E DIF2
    UNEX=TERMO3+U;

    MODV2=sqrt(sum(VNEX.^2)); %RAIZ QUADRADA DA SOMA DOS TERMOS DE VNEX AO
QUADRADO (MODULO DO VETOR)
    MODV1=sqrt(sum(V.^2)); %RAIZ QUADRADA DA SOMA DOS TERMOS DE V AO
QUADRADO (MODULO DO VETOR)
    VERIF=abs((MODV2-MODV1)/(MODV2)); %USADO PARA CONDIÇÃO DE PARADA

    %CALCULO DO SOMATÓRIO DE D*BETA_SINAL SENDO ESTE ELEVADO A UM NUMERADOR
QUE SEGUE O CONTADOR
    D = [D1;D2;D3;D4;D5;D6];
    SOMT=0;
    for i=1:6
        SOMT=SOMT+(D(i)*((BETA_SINAL)^i));
    end;

    EXPCUM = (1+SOMT)^(-16);
    FIZAOB = 1-0.5*EXPCUM;
    PROB = 1-FIZAOB; %PROB REPRESENTA A PROBABILIDADE DE FALHA
    TOL = Tol;

    %ADOÇÃO DO VALOR DE ITERAÇÃO DO U
    for i=1:tam
        U(i) = UNEX(i);
    end

    %CONDIÇÃO DE PARADA QUE PODE SER SATISFEITA ANTES DO NUMERO DE
ITERAÇÕES MÁXIMO
    if (VERIF <= TOL)
        break
    end



end
UFORM = U;
VARIAVEIS_PROJETO
BETA_SINAL
BETA = double(abs(BETA_SINAL - BETA_TARGET));


end
```

APÊNDICE B – Rotinas auxiliares ao dimensionamento

A) Variáveis de projeto

```
function [bv,hv] = VARIAVEIS_PROJETO

bv = 20;
hv = 40;

end
```

B) Dados de entrada e pré-dimensionamento

```
function
[k,Num,Tol,c,D_estribo,As,As_linha,fyd,fcd,sigma_linha,Mk,As_cort,fywd,fctd
,x_d,Vsd] = DADOS_FORM

Pi =
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062
8620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812
8481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475
6482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737
2458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046
6521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074
4623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949
4639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056
8127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371
0507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072
1134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334
4685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490
4287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111
95909216420199;

f = fopen('momentofletor.txt','r');

a = fscanf(f,'%6c',[1, 9]);

numero_de_pontos = 301;

for i = 1 : numero_de_pontos

    linha = fscanf(f,'%e',[1,3]);
    momento(i,1) = linha(1);
    momento(i,2) = linha(3);
end

Mgk = 0;

for i = 1: numero_de_pontos

    if Mgk <= momento(i,2)
        Mgk = momento(i,2);
    end

end
f = fopen('esforcocortante.txt','r');

a = fscanf(f,'%6c',[1, 9]);
```

```
numero_de_pontos = 301;

for i = 1 : numero_de_pontos

    linha = fscanf(f,'%e',[1,3]);
    momento(i,1) = linha(1);
    momento(i,2) = linha(3);
end

fclose('all');

Vgk = 0;

for i = 1: numero_de_pontos

    if Vgk <= momento(i,2)
        Vgk = momento(i,2);
    end

end

[bw,h] = VP;
c = 2.5; %cm
fi_est = 1; %cm
gama_c = 1.4;
gama_s = 1.15;

gama_g = 1.4;
gama_q = 1.4;

Mgk = Mgk/1000; %kN.m
Mqk = 0; %kN.m

Vgk = Vgk/1000;
Vqk = 0; %kN

As2 = 0;

%Alturas úteis
dlin = c + fi_est/2;
d = h - dlin;

fck = 25; %MPa
fyk = 500; %MPa

%Resistências de cálculo
fcd = fck/(10*gama_c);
fyd = fyk/(10*gama_s);

%Esforços de cálculo
Md = gama_g*Mgk + gama_q*Mqk;
Md = 100*Md;

Vsd = gama_g*Vgk + gama_q*Vqk;
```

```
Md_lim = 0.68*fcd*bw*0.45*d^2*(1 - 0.8*0.45/2);

%Dimensionamento à flexão para o caso de armadura simples
if Md <= Md_lim
    x = (d/0.8)*(1-sqrt(1-2*Md/(0.68*fcd*bw*d^2)));
    As = 0.68*fcd*bw*x/fyd;
    As_linha = 0;
    format short
    %fprintf('A área de armadura tracionada é As = %d cm² \n', As)
else
    x = 0.45*d;
    As1 = 0.68*fcd*bw*x/fyd;
    As2 = (Md - Md_lim)/(fyd*(d - dlin));
    format short
    As = As1 + As2;
    %fprintf('A área de armadura tracionada é %.2f cm² \n', As);
    %fprintf('A área de armadura comprimida é %.2f cm² \n', As2);
end

%Dimensionamento da armadura transversal segundo o modelo de cálculo 2 da
%NBR 6118:

fctm = 0.3*(fck*10)^(2/3)/10;
fctd = 0.7*fctm/gama_c;
Vc = 0.6*fctd*bw*d;

Vsw = Vsd - Vc;

if Vsw < 0
    flag = 0;
    %fprintf('Não é necessário armadura transversal');
    D_estribo = 5;
else
    flag = 1;
    Asw_s = Vsw/(39.2*d);
    D_estribo = sqrt(4*Asw_s*0.15/Pi)*100;
end

%Entradas FORM
k = 1;
Num = 20;
Tol = 0.0001;
As = As;
As_linha = As2;
fyd = fyd*10;
fcd = fcd*10;
sigma_linha = fyd;
Mk = Md/100;
Vsd = Vsd;
As_cort = (D_estribo/10)^2/(4*0.15/Pi);
fywd = 500/gama_s;
fctd = 0.3*0.7/gama_c*fck^(2/3);
x_d = 1;
end
```

C) Método da Rigidez Direta

```
function [Mk,Vk] = teste_rigidezdireta(q)
```

```
[bv,hv] = VP;
bv = bv/100;
hv = hv/100;
L = 1.5;
nelm = 20;
nnos = nelm+1;
ngl = nnos*3;
nnr = 2;
nnc = 0;
nvc = nelm;

for i=1:nelm+1

    if i == 1
        x(i) = 0.0;
    else
        x(i) = x(i-1) + L/nelm;
    end
    y(i) = 0.0;

    no1(i) = i;
    no2(i) = i+1;

    area(i) = bv*hv;
    mom(i) = bv*hv^3/12;
    mod(i) = 200;

end

restr = [1   1    1    0
         nnos    0    1    0];
restr = restr';

IC(nnos*3)=0;
for i=1:nnr,
   nn=restr(1,i);
   IC((nn-1)*3+1)=restr(2,i);
   IC((nn-1)*3+2)=restr(3,i);
   IC((nn-1)*3+3)=restr(4,i);
end

F(ngl)=0.0;
for i=1:nnc,
   n=forcas(1,i);
   F((n-1)*3+1)=forcas(2,i);
   F((n-1)*3+2)=forcas(3,i);
   F((n-1)*3+3)=forcas(4,i);
end
%  Definição das vigas carregadas:
for i = 1:2
    if i == 1

        for j = 1:nvc
            carreg_vig(i,j) = j;
        end
    else
        for j = 1:nvc;
            carreg_vig(i,j) = q;
        end
    end
```

```
end


%  Calcula a matriz de rigidez global pelo processo da rigidez direta

Kg(ngl,ngl)=0.0;
Kg(:,:)=0.0;
S0(nelm,6)=0.0;
Sl(:,:)=0.0;

% Início do Loop
for nel=1:nelm,
   kk(1)=no1(nel);
   kk(2)=no2(nel);
   % Cálculo da matriz de rotação
   dx=x(kk(2))-x(kk(1));
   dy=y(kk(2))-y(kk(1));
   % Cálculo do comprimento do elemento
   L=sqrt(dx^2+dy^2);
   % Cálculo dos cossenos diretores
   cx=dx/L;
   cy=dy/L;
   % Definição da Matriz de Rotação
   R=[ cx  cy  0  0  0  0;
      -cy  cx  0  0  0  0;
      0    0   1  0  0  0
      0    0   0  cx cy 0;
      0    0   0 -cy cx 0;
      0    0   0  0  0  1];
   % Definição da Matriz de Rigidez do elemento de treliça Ke
   for i=1:nvc,
   ne=carreg_vig(1,i);
   if ne==nel
       q=carreg_vig(2,i);
       S0(ne,1)=0;
       S0(ne,2)=q*L/2;
       S0(ne,3)=q*L^2/12;
       S0(ne,4)=0;
       S0(ne,5)=q*L/2;
       S0(ne,6)=-q*L^2/12;
       F((no1(ne)-1)*3+2)=F((no1(ne)-1)*3+2)-q*L/2;
       F((no1(ne)-1)*3+3)=F((no1(ne)-1)*3+3)-q*L^2/12;
       F((no2(ne)-1)*3+2)=F((no2(ne)-1)*3+2)-q*L/2;
       F((no2(ne)-1)*3+3)=F((no2(ne)-1)*3+3)+q*L^2/12;
    end
   end


   E=mod(nel);
   A=area(nel);
   J=mom(nel);
   Ke=[E*A/L  0           0           -E*A/L 0           0;
      0      12*E*J/L^3  6*E*J/L^2   0      -12*E*J/L^3 6*E*J/L^2;
      0      6*E*J/L^2   4*E*J/L     0      -6*E*J/L^2  2*E*J/L;
      -E*A/L 0           0           E*A/L  0           0;
      0      -12*E*J/L^3 -6*E*J/L^2  0      12*E*J/L^3 -6*E*J/L^2;
      0      6*E*J/L^2   2*E*J/L     0      -6*E*J/L^2  4*E*J/L];
   % Cálculo da Matriz rotacionada
   RKeR=R'*Ke*R;
```

```
   % Acumula na matriz de rigidez global Kg
   for i=1:2,
      % Cálculo do número de GLs existentes antes dos GLs relativos ao i°nó
      m=3*(kk(i)-1);
      for j=1:2,
        % Cálculo do número de GLs existentes antes dos GLs relativos ao
i°nó
         n=3*(kk(j)-1);
         k1=0;
         for k=3*i-2:3*i,
            % GL global k1 referente à coor local k
            k1=k1+1;
            l1=0;
            for l=3*j-2:3*j,
               % GL global l1 referente à coor local l
               l1=l1+1;
               Kg(m+k1,n+l1)=Kg(m+k1,n+l1)+RKeR(k,l);
            end
         end
      end
   end

% Fim do Loop de montagem da matriz de rigidez global
end
Kgl=Kg;
% Imposição das restrições de apoio na matriz de rigidez global

for n=1:nnos,
    for j=1:3,
      i=3*(n-1)+j;
      if (IC(i)==1)
         F(i)=0.0;
         % Zerando linhas e colunas dos GLs restritos
            Kg(:,i)=0.0;
            Kg(i,:)=0.0;
            Kg(i,i)=1.0;
      end
   end
end

% Resolução da Equação de Equilíbrio:

U(ngl)=0.0;
U=inv(Kg)*F';


% Obtenção dos esforços
% Def. vetor esforços segundo as coordenadas globais, por elemento
Sg(6)=0.0;
Sg(:)=0.0;
Sgl(nel,6)=0.0;
% Def. vetor esforços por elementos, segundo suas coord. locais
Sl(nelm,6)=0.0;
Sl(:,:)=0.0;
% Def. vetor reações
reac(ngl)=0.0;
reac(:)=0.0;
% Início do Loop
for nel=1:nelm,
   kk(1)=no1(nel);
```

```
   kk(2)=no2(nel);
   % Cálculo da matriz de rotação
   dx=x(kk(2))-x(kk(1));
   dy=y(kk(2))-y(kk(1));
   % Cálculo do comprimento do elemento
   L=sqrt(dx^2+dy^2);
   % Cálculo dos cossenos diretores
   cx=dx/L;
   cy=dy/L;
   % Definição da Matriz de Rotação
   R=[ cx  cy  0  0  0  0;
      -cy  cx  0  0  0  0;
      0    0   1  0  0  0
      0    0   0  cx cy 0;
      0    0   0 -cy cx 0;
      0    0   0  0  0  1];
   % Definição da Matriz de Rigidez do elemento de treliça Ke
   E=mod(nel);
   A=area(nel);
   J=mom(nel);
   Kl=[E*A/L  0           0           -E*A/L 0           0;
      0       12*E*J/L^3  6*E*J/L^2   0      -12*E*J/L^3 6*E*J/L^2;
      0       6*E*J/L^2   4*E*J/L     0      -6*E*J/L^2  2*E*J/L;
      -E*A/L  0           0           E*A/L  0           0;
      0       -12*E*J/L^3 -6*E*J/L^2  0      12*E*J/L^3  -6*E*J/L^2;
      0       6*E*J/L^2   2*E*J/L     0      -6*E*J/L^2  4*E*J/L];
   % Cálculo do vetor dos delocamentos locais segundo as coordenadas
globais ug
   ug(6)=0.0;
   ug(:)=0.0;
   for m=1:2,
      k=3*(kk(m)-1);
      l=0;
      for n=3*m-2:3*m,
         l=l+1;
         ug(n)=U(k+l);
      end
   end
   % Cálculo do vetor dos delocamentos locais segundo as coordenadas locais
ul
   ul=R*ug';
   % Cálculo dos esforços segundo as coordenadas locais ul
   Sl(nel,:)=S0(nel,:)+(Kl*ul)';
   % Cálculo dos esforços segundo as coordenadas globais
   Sg(:)=0.0;
   Sg=(R'*Sl(nel,:)')';
   Sgl(nel,:)=Sg;
   % Cálculo das reações de apoio
   for i=1:2,
      for j=1:3,
         if (IC(3*(kk(i)-1)+j)~=0)
            % Cálculo da coord global m
            m=3*(kk(i)-1)+j;
            n=3*(i-1)+j;
            % Cálculo das reações de apoio
            reac(m)=reac(m)+Sg(n)';
         end
      end
   end
end
```

```
mommax=max(abs(Sl(:,3)));

Mk = mommax;
Vk = reac(2);
end
```