



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CÉFALO HABAKUK LUIZ CONRADO MOREIRA

Impacto da reologia de interface na bifurcação de dedos na célula de Hele-Shaw

Recife

2023

CÉFALO HABAKUK LUIZ CONRADO MOREIRA

Impacto da reologia de interface na bifurcação de dedos na célula de Hele-Shaw

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Dinâmica Não-linear, Caos e Sistemas Complexos

Orientador (a): José Américo de Miranda Neto

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

M838i Moreira, Céfaló Habakuk Luiz Conrado
Impacto da reologia de interface na bifurcação de dedos na célula de Hele-Shaw / Céfaló Habakuk Luiz Conrado Moreira. – 2023.
61 f.: il., fig.

Orientador: José Américo de Miranda Neto.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Dinâmica não-linear, caos e sistemas complexos. 2. Instabilidades hidrodinâmicas. 3. Células de Hele-Shaw. 4. Reologia de interfaces. 5. Modelo de Boussinesq-Scriven. I. Miranda Neto, José Américo de (orientador). II. Título.

515.39 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2023 - 68

CÉFALO HABAKUK LUIZ CONRADO MOREIRA

**IMPACTO DA REOLOGIA DE INTERFACE NA BIFURCAÇÃO DE DEDOS NA
CÉLULA DE HELE-SHAW**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 25/04/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. José Américo de Miranda Neto
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Marcio da Silveira Carvalho
Examinador Externo
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família que tanto me deu apoio e motivação até esse ponto da trajetória. Em especial à minha esposa, Thalia, que sempre esteve do meu lado dando apoio e carinho e às minhas filhas, Alice e Laura, força motriz de meu esforço e trabalho.

Agradeço à minha mãe, que sempre trabalhou muito duro para me ajudar nas minhas conquistas e foi um grande suporte em momentos muito difíceis.

Agradeço aos meus amigos, em especial Alex Ferreira, Allison Pessoa, Rafael Marques e Alisson Andrade que tanto me ajudaram com frutíferas discussões sobre Física e também em muitas outras ocasiões.

Agradeço à Pró-Reitoria de Assistência Estudantil por meio da qual fui beneficiário do Programa de Moradia Estudantil durante minha graduação e parte do mestrado. Os funcionários de lá são exemplos da excelência do serviço público e foram imprescindíveis na minha trajetória.

Agradeço aos professores Fernando Parísio e Márcio Carvalho, membros da banca, por terem aceito ler e avaliar esta dissertação.

Agradeço a todos os professores do DF-UFPE que estiveram presentes na minha caminhada até aqui. Eles realmente inspiraram muito cada qual uma belíssima história na Física. Em particular, agradeço a José Américo, meu orientador, que foi um ótimo mentor durante esses anos de graduação e mestrado. Agradeço ao professor Eduardo O. Dias e ao colega Írio Menezes, com os quais discussões importantíssimas foram feitas sobre esta dissertação.

RESUMO

A instabilidade de Saffman-Taylor ocorre quando um fluido menos viscoso é injetado em um fluido mais viscoso. A interface entre esses fluidos sofre uma deformação e protuberâncias na forma de “dedos” se formam na interface entre os fluidos. Interfaces entre dois fluidos, contendo polímeros, lipídios, proteínas, partículas sólidas ou outros agentes tensoativos, geralmente apresentam uma resposta reologicamente complexa às deformações. Em que pese sua relevância acadêmica e prática para a dinâmica de fluidos e vários outros campos de pesquisa, o papel da reologia de interface na formação de dedos viscosos permanece bastante inexplorado. Uma exceção digna de destaque é o trabalho de Li e Manikantan (LI; MANIKANTAN, 2021), que utilizou análise de estabilidade linear para mostrar que tensões reológicas superficiais agem de modo a estabilizar a formação de dedos viscosos em geometria radial no regime linear. Nesta dissertação, fazemos uma análise perturbativa de modos acoplados de segunda ordem e investigamos a influência da reologia de interface na morfologia dos dedos formados em estágios não lineares iniciais. Em particular, queremos entender como a reologia de interface impacta os emblemáticos fenômenos de alargamento e bifurcação, que ocorrem na formação de dedos viscosos em geometria radial na célula de Hele-Shaw. Descrevemos a interface fluido-fluido newtoniana viscosa usando o modelo de Boussinesq-Scriven e derivamos uma condição generalizada de diferença de pressão de Young-Laplace na interface. Neste contexto, vamos além da descrição puramente linear e usamos a lei de Darcy para obter uma equação diferencial de modos acoplados que descreve a evolução temporal das amplitudes de perturbação até segunda ordem. Nossos resultados fracamente não lineares de modos acoplados indicam que, apesar de sua ação estabilizadora no regime linear, os efeitos da reologia de interface favorecem o alargamento da ponta dos dedos, levando a um aumento na ocorrência de eventos de bifurcação.

Palavras-chave: instabilidades hidrodinâmicas; células de Hele-Shaw; reologia de interfaces; modelo de Boussinesq-Scriven;

ABSTRACT

Saffman-Taylor instability occurs when a less viscous fluid is injected into a more viscous fluid. The interface between these fluids undergoes deformation and protuberances in the form of “fingers” form at the interface between the fluids. Fluid-fluid interfaces, laden with polymers, surfactants, lipid bilayers, proteins, solid particles, or other surface-active agents, often exhibit a rheologically complex response to deformations. Despite its academic and practical relevance to fluid dynamics and various other fields of research, the role of interfacial rheology in viscous fingering remains fairly underexplored. A noteworthy exception is the work by Li and Manikantan (LI; MANIKANTAN, 2021), who used linear stability analysis to show that surface rheological stresses act to stabilize the development of radial viscous fingering at the linear regime. In this work, we perform a perturbative, second-order mode-coupling analysis of the system, and investigate the influence of interfacial rheology on the morphology of the fingering structures at early nonlinear stages of the dynamics. In particular, we focus on understanding how interfacial rheology impacts the emblematic finger tip-widening and finger tip-splitting phenomena that take place in radial viscous fingering in Hele-Shaw cells. We describe the viscous Newtonian fluid-fluid interface by using a Boussinesq-Scriven model, and derive a generalized Young-Laplace pressure jump condition at the fluid-fluid interface. In this framing, we go beyond the purely linear description, and use Darcy’s law to obtain a perturbative mode-coupling differential equation which describes the time evolution of the perturbation amplitudes, accurate to second-order. Our early nonlinear mode-coupling results indicate that regardless of their stabilizing action at the linear regime, interfacial rheology effects favor finger tip-widening, leading to the occurrence of enhanced finger tip-splitting events.

Keywords: hydrodynamic instabilities; Hele-Shaw cell; interfacial rheology; Boussinesq-Scriven model;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Crescimento fractal de colônia de bactérias; (b) Floco de neve; (c) Peixe <i>Siganus Vermiculatus</i> ; (d) Rede fluvial do norte do Brasil	11
Figura 2 – Representação esquemática da célula de Hele-Shaw retangular. Nela um fluido de viscosidade bem inferior desloca um fluido de viscosidade η , onde a separação entre as placas paralelas é b	12
Figura 3 – Realização experimental da instabilidade de Saffman-Taylor numa célula de Hele-Shaw retangular (vista superior). O fluido de menor viscosidade (ar) é bombeado de cima para baixo contra o fluido de maior viscosidade (glicerina). Nas três figuras temos fotos (sequência temporal) ilustrando como os “dedos viscosos” são formados e evoluem no tempo. Como a diferença entre as viscosidades dos fluidos é muito alta, note que há uma notável assimetria entre as partes de cima e de baixo da figura da direita: os longos dedos invasores do fluido menos viscoso são notadamente diferentes dos dedos formados pelo fluido de maior viscosidade. Observe que na geometria retangular tais dedos não tendem a bifurcar-se nas suas pontas.	12
Figura 4 – Representação esquemática da célula de Hele-Shaw radial, onde um fluido de viscosidade maior μ_2 é deslocado por um fluido de viscosidade menor μ_1 . A taxa de injeção do fluido menos viscoso no mais viscoso é Q e a separação entre as placas é b	13
Figura 5 – Experimento ilustrando a instabilidade de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw radial, na qual (a) ar é injetado em glicerina e (b) nitrogênio é injetado em óleo de silicone.	14
Figura 6 – Ocorrência da instabilidade de Saffman-Taylor quando um fluido de menor viscosidade (η_1) empurra um fluido de maior viscosidade (η_2) numa célula de Hele-Shaw (vista superior). Uma pequena perturbação na interface deforma as isobáricas no fluido 2, aumentando o gradiente de pressão nesta região. Pela lei de Darcy $\mathbf{v}_j \sim \nabla p_j$, conseqüentemente temos que a velocidade local aumenta, fazendo com que a perturbação cresça de intensidade com o passar do tempo. Tal mecanismo físico dá origem à instabilidade de Saffman-Taylor.	15

Figura 7 – (a) Representação esquemática de uma molécula anfifílica; (b) Ilustração dos agentes tensoativos (surfactantes) adsorvidos na interface (ar-água); (c) Gráfico ilustrando a concentração de surfactantes na interface.	19
Figura 8 – Título e <i>abstract</i> do trabalho resultante desta dissertação de mestrado.	23
Figura 9 – Representação esquemática do problema de formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw radial de espessura b . O fluido interno (externo) tem viscosidade η_1 (η_2). Os fluidos são separados por uma interface reológica. O fluido 1 é injetado na célula, previamente preenchida com o fluido 2, com taxa de injeção constante Q . A interface circular não perturbada dependente do tempo (círculo tracejado) tem raio $R(t)$, e a perturbação da interface é denotada por $\zeta(\theta, t)$, onde θ é o ângulo azimutal. A interface deformada é representada como $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$. A interface reológica tem tensão superficial γ , viscosidade de cisalhamento superficial η_s e viscosidade dilatacional κ_s	25
Figura 10 – Evolução temporal dos padrões de interface fracamente não lineares gerados resolvendo a Eq. (2.33) para $0 \leq t \leq t_f$, e três valores crescentes do número de Boussinesq (a) $Bq = 0$, (b) $Bq = 15$ e (c) $Bq = 30$. Para um dado Bq , o tempo final t_f é o tempo máximo permitido antes que os cruzamentos não físicos de interfaces ocorram. Esses tempos finais são (a) $t_f = 2754$, (b) $t_f = 5087$ e (c) $t_f = 6499$. Os perfis das interfaces são ilustrados em intervalos de $t_f/10$, onde a interface em $t = t_f$ é representada por uma curva preta mais espessa. O fluido externo viscoso é representado pela região de cor amarelada e o fluido interno de viscosidade desprezível é representado pela região branca. Aqui consideramos o acoplamento não linear de segunda ordem dos modos cossenos, onde o modo fundamental $n = n_{\max}^{\zeta} = 7$, com seu harmônico $2n = 14$. Os outros parâmetros usados são $A = 1$, $Ca = 150$, e $R_0 = 3$. As amplitudes de perturbação iniciais são $a_n(0) = R_0/2500$ e $a_{2n}(0) = 0$	37
Figura 11 – Evolução temporal das amplitudes cosseno redimensionadas para o modo $a_n(t)/R(t)$ (curvas tracejadas) e do modo primeiro harmônico $a_{2n}(t)/R(t)$ (curva contínua). Essas curvas estão associadas aos padrões fracamente não lineares ilustrados na Fig. 10 para valores crescentes do número de Boussinesq $Bq = 0, 15, 30$	41

Figura 12 – Comportamento de $a_{2n}(t)/R(t)$ em relação a $a_n(t)/R(t)$ para a evolução dos padrões mostrados na Fig. 10 para diferentes valores do número de Boussinesq: $Bq = 0, 15, 30$. A linha vertical tracejada é desenhada para $a_n(t)/R(t) = 0.05$ 42

Figura 13 – Evolução temporal dos padrões de interface fracamente não lineares gerados resolvendo Eq. (2.33) para $1 \leq n \leq 25$, $0 \leq t \leq t_f$ e intervalos de tempo iguais $\Delta t = t_f/10$. Os padrões são obtidos para $Bq = 0$ [(a), (d), (g)], $Bq = 15$ [(b), (e), (h)] e $Bq = 30$ [(c), (f), (i)]. Além disso, os valores de t_f são (a) 1076, (b) 1867, (c) 2423, (d) 983, (e) 1726, (f) 2210, (g) 1144, (h) 1958 e (i) 2461. Três conjuntos diferentes de fases aleatórias são usados: conjunto I para [(a)–(c)], conjunto II para [(d)–(f)] e conjunto III para [(g)–(i)]. As ocorrências mais proeminentes de eventos de bifurcação e de alargamento das pontas dos dedos em (c), (f) e (i) para o valor maior de número de Boussinesq ($Bq = 30$) são indicadas por pequenas setas. Aqui $A = 1$, $Ca = 150$ e $R_0 = 3$ 44

Figura 14 – Evolução temporal dos padrões de interface em ordem linear [(a)–(c)] e fracamente não linear [(d)–(f)] para $1 \leq n \leq 25$, $0 \leq t \leq t_f$ e iguais intervalos de tempo $\Delta t = t_f/10$. Os padrões são obtidos para $Bq = 30$. Além disso, os valores de t_f são (a) 2462, (b) 2199, (c) 2435, (d) 2423, (e) 2210 e (f) 2461. Os conjuntos de fases utilizados aqui são iguais àqueles na Fig. 13: conjunto I para (a) e (d), conjunto II para (b) e (e) e conjunto III para (c) e (f). Os demais parâmetros físicos são os mesmos empregados na Fig. 13. Comparando as estruturas lineares [(a)–(c)] com as fracamente não lineares correspondentes [(d)–(f)], é evidente que os dedos não lineares são tipicamente mais largos, tendo uma maior tendência a se dividirem em suas pontas devido à ação das tensões reológicas de interface. 46

SUMÁRIO

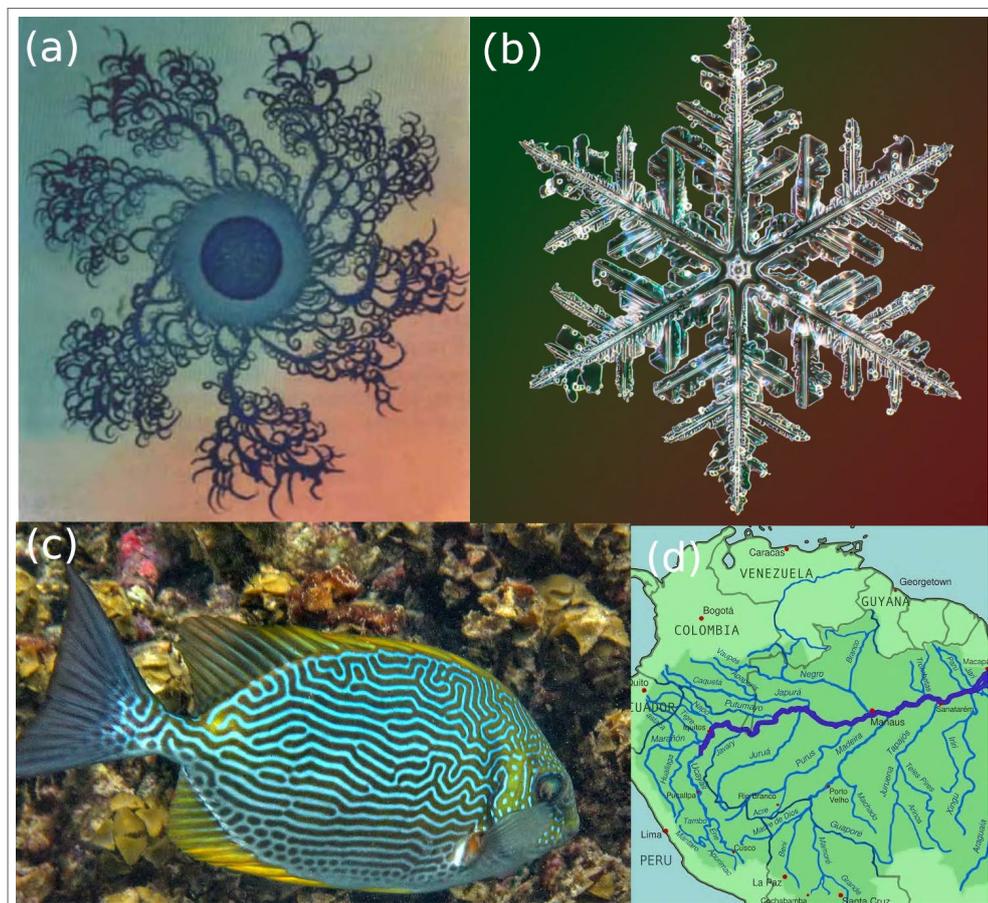
1	INTRODUÇÃO	11
1.1	A INSTABILIDADE DE SAFFMAN–TAYLOR E A CÉLULA DE HELE-SHAW	11
1.2	REOLOGIA DE INTERFACE	17
1.2.1	Agentes tensoativos	18
1.3	BIFURCAÇÃO DE DEDOS E REOLOGIA DE INTERFACE	20
2	EQUAÇÕES PRINCIPAIS E A DINÂMICA DE MODOS ACOPLA- DOS DE SEGUNDA ORDEM	24
2.1	EQUAÇÕES QUE REGEM O ESCOAMENTO NA CÉLULA DE HELE- SHAW COM EFEITOS DE REOLOGIA DE INTERFACE	24
2.2	EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS	32
3	DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	36
4	CONCLUSÕES	48
	REFERÊNCIAS	50
	APÊNDICE A – DERIVADAS ÚTEIS EM COORDENADAS PO- LARES	58
	APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DA REOLO- GIA DE INTERFACE PARA CONDIÇÃO DE CON- TORNO DA PRESSÃO	59
	APÊNDICE C – EXPRESSÕES PARA AS FUNÇÕES DE MODOS ACOPLADOS NÃO LINEARES	61

1 INTRODUÇÃO

1.1 A INSTABILIDADE DE SAFFMAN-TAYLOR E A CÉLULA DE HELE-SHAW

Na natureza é possível identificar a formação de padrões que muitas vezes impressionam tanto leigos quanto cientistas. Esses padrões podem ser encontrados nas mais diversas áreas (veja Fig. 1): em sistemas biológicos, físicos, químicos, etc. Vão desde a formação de colônias de bactérias até a formação de ramificações fluviais. Em particular, padrões complexos e visualmente impactantes ocorrem com frequência em sistemas hidrodinâmicos.

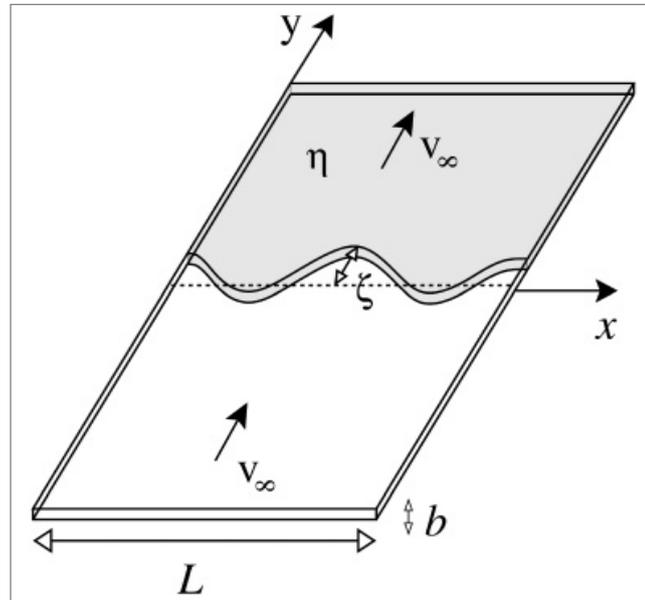
Figura 1 – (a) Crescimento fractal de colônia de bactérias; (b) Floco de neve; (c) Peixe *Siganus Vermiculatus*; (d) Rede fluvial do norte do Brasil



Fonte: (BEN-JACOB, 1993; GUNDERMANN; POPPER; LICHTOWICH, 1983; CHANG,)

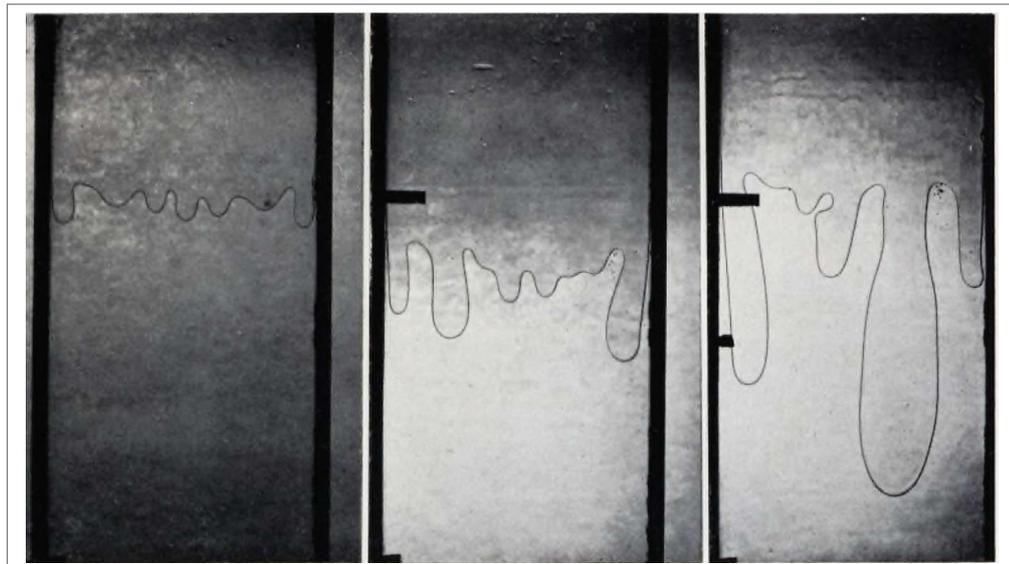
O foco desta dissertação de mestrado é a dinâmica de fluidos em sistemas quase-bidimensionais, o chamado problema de Saffman-Taylor (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987). Este problema investiga a evolução da interface entre dois fluidos, quando confinados no pequeno intervalo entre duas placas planas e paralelas de material transparente (geralmente vidro), um

Figura 2 – Representação esquemática da célula de Hele-Shaw retangular. Nela um fluido de viscosidade bem inferior desloca um fluido de viscosidade η , onde a separação entre as placas paralelas é b .



Fonte: (DIAS; MIRANDA, 2011a)

Figura 3 – Realização experimental da instabilidade de Saffman-Taylor numa célula de Hele-Shaw retangular (vista superior). O fluido de menor viscosidade (ar) é bombeado de cima para baixo contra o fluido de maior viscosidade (glicerina). Nas três figuras temos fotos (sequência temporal) ilustrando como os “dedos viscosos” são formados e evoluem no tempo. Como a diferença entre as viscosidades dos fluidos é muito alta, note que há uma notável assimetria entre as partes de cima e de baixo da figura da direita: os longos dedos invasores do fluido menos viscoso são notadamente diferentes dos dedos formados pelo fluido de maior viscosidade. Observe que na geometria retangular tais dedos não tendem a bifurcar-se nas suas pontas.

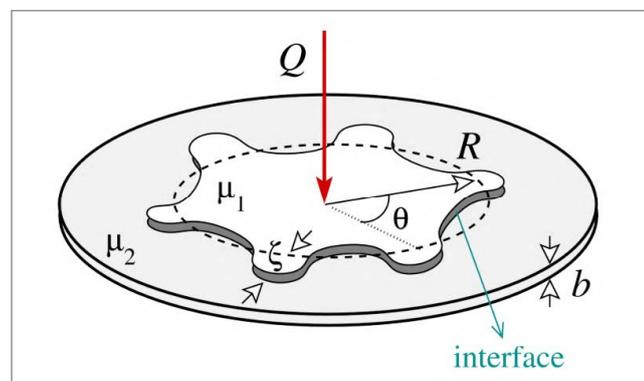


Fonte: (SAFFMAN; TAYLOR, 1958)

dispositivo conhecido como célula de Hele-Shaw. A espessura da célula de Hele-Shaw (distância entre as placas de vidro) normalmente é muito menor que qualquer comprimento considerado

no problema, desta forma o movimento dos fluidos dá-se efetivamente em duas dimensões. O estudo deste problema é agrupado em duas categorias básicas, de acordo com a geometria (arranjo experimental) associada ao fluxo: (i) na chamada geometria retangular, estuda-se a interface entre dois fluidos, quando os mesmos movem-se ao longo de um canal retangular (veja Figs. 2 e 3); (ii) na geometria radial, a célula de Hele-Shaw é inicialmente ocupada por um dos fluidos e, posteriormente, um segundo fluido (menos viscoso) é injetado radialmente, através de um pequeno furo feito no topo da célula (veja Fig. 4 e Fig. 5). Em ambas as geometrias, quando o fluido de menor viscosidade desloca o fluido de maior viscosidade, a interface entre os fluidos desenvolve irregularidades, os chamados “dedos” viscosos (*viscous fingers*), que resultam em padrões geométricos complexos, onde os diversos dedos competem entre si, deformam-se e eventualmente podem bifurcar-se nas suas pontas. Este cenário de formação de complexos padrões na interface que separa os fluidos é o resultado da competição dinâmica entre os efeitos viscosos e de gradientes de pressão (que tendem a deformar a interface), com os efeitos de tensão superficial (que tendem a estabilizar a interface).

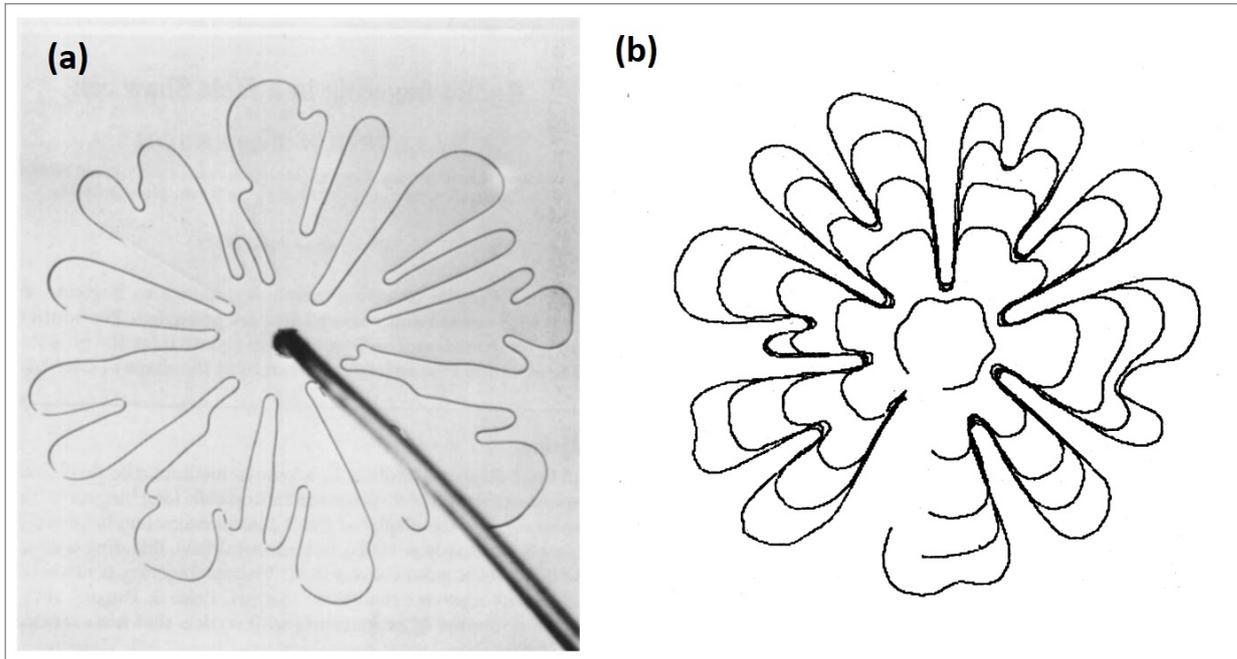
Figura 4 – Representação esquemática da célula de Hele-Shaw radial, onde um fluido de viscosidade maior μ_2 é deslocado por um fluido de viscosidade menor μ_1 . A taxa de injeção do fluido menos viscoso no mais viscoso é Q e a separação entre as placas é b .



Fonte: (FONTANA; GADÉLHA; MIRANDA, 2016)

Para escoamento em célula retangular, a característica mais marcante do sistema é uma quebra de simetria intrínseca: os dedos viscosos formados pelo fluido de menor viscosidade são qualitativamente distintos dos dedos formados pelo líquido de maior viscosidade. Deste modo, seria razoável suspeitar do papel relevante do valor da diferença entre as viscosidades dos fluidos na determinação do grau de assimetria da interface. Já para fluxo em célula radial, nota-se que a interface circular inicial deforma-se e daí formam-se protuberâncias (dedos) que competem entre si, alargam-se e passam a bifurcar-se em suas extremidades (Fig. 5). Em contraste, na célula retangular (Fig. 3), os dedos não tendem a bifurcar em suas extremidades.

Figura 5 – Experimento ilustrando a instabilidade de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw radial, na qual (a) ar é injetado em glicerina e (b) nitrogênio é injetado em óleo de silicone.

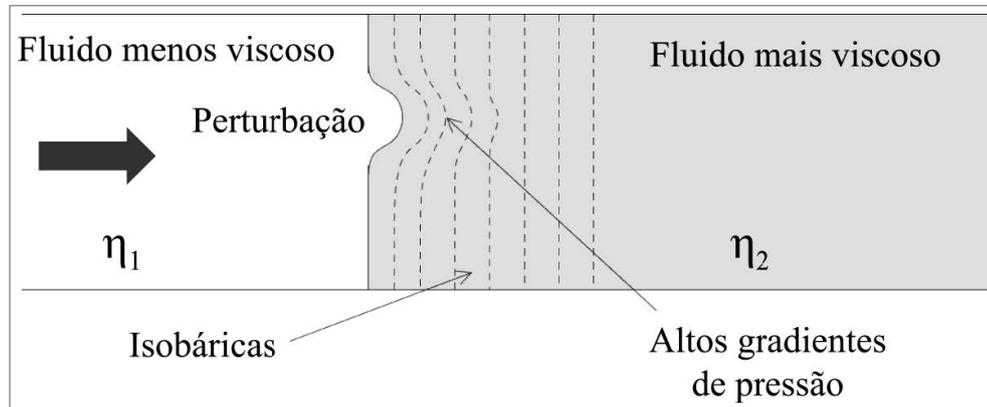


Fonte: (PATERSON, 1981; RAUSEO; BARNES; MAHER, 1987)

Desde o trabalho inicial de Saffman e Taylor (SAFFMAN; TAYLOR, 1958), inúmeros artigos foram publicados sobre a instabilidade hidrodinâmica que leva seus nomes, evidenciando a importância tanto acadêmica, quanto prática deste emblemático problema de dinâmica de fluidos. Neste contexto, muitos estudos analíticos e numéricos têm sido realizados no intuito de investigar a evolução da interface entre fluidos na célula de Hele-Shaw. Nestes trabalhos, há ênfase em dois estágios básicos da evolução do sistema: (a) estudos predominantemente analíticos dos estágios iniciais do escoamento dos fluidos (estágio puramente linear da evolução); (b) estudos majoritariamente numéricos na análise dos estágios avançados (estágio completamente não linear). Os estudos analíticos do estágio inicial concentram-se na construção da análise da estabilidade linear do sistema e, apesar de sua utilidade, não são capazes de explicar os fenômenos não lineares de quebra de simetria, competição e bifurcação citados acima. Por outro lado, estudos numéricos dos estágios avançados de fluxo detectam e exibem tais fenômenos, porém sem apresentar explicações ou mecanismos simples que justifiquem sua origem. Com o intuito de explicar, por argumentos simples, a origem destes fenômenos não lineares, nós seguimos os passos de (MIRANDA; WIDOM, 1998a) para investigar estágios intermediários do escoamento em célula de Hele-Shaw.

Tanto para a geometria retangular, quanto para o arranjo radial em células de Hele-Shaw,

Figura 6 – Ocorrência da instabilidade de Saffman-Taylor quando um fluido de menor viscosidade (η_1) empurra um fluido de maior viscosidade (η_2) numa célula de Hele-Shaw (vista superior). Uma pequena perturbação na interface deforma as isobáricas no fluido 2, aumentando o gradiente de pressão nesta região. Pela lei de Darcy $\mathbf{v}_j \sim \nabla p_j$, conseqüentemente temos que a velocidade local aumenta, fazendo com que a perturbação cresça de intensidade com o passar do tempo. Tal mecanismo físico dá origem à instabilidade de Saffman-Taylor.



Fonte: O autor (2022)

a evolução dinâmica do problema de Saffman-Taylor é descrita pela lei de Darcy (HOMSY, 1987)

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (1.1)$$

onde \mathbf{v}_j denota as velocidades nos fluidos j (onde $j = 1, 2$), p_j representa as pressões nos fluidos, η_j é a viscosidade do fluido j . A distância entre as placas paralelas da célula de Hele-Shaw é denotada por b , que é a menor escala de comprimento do problema. Um quantidade adimensional muito importante é o número de Reynolds, que é uma razão entre as forças inerciais e as forças viscosas. Daí supondo que o escoamento é de baixo número de Reynolds, a lei de Darcy é obtida tomando uma média transversal da equação de Navier-Stokes, desprezando-se a ação dos termos inerciais. Também considera-se que os fluidos são newtonianos (ou seja, suas viscosidades são constantes), imiscíveis (existe uma tensão superficial entre eles) e incompressíveis (a divergência de suas velocidades é nula). Observe-se que, pela própria forma da lei de Darcy, temos que o fluxo em cada fluido é irrotacional.

Na realidade, com a ajuda da lei de Darcy, dada pela Eq. (1.1), podemos extrair uma explicação qualitativa bastante simples para a ocorrência da instabilidade de Saffman-Taylor quando um fluido ($j = 1$) desloca um outro fluido ($j = 2$) que é mais viscoso, e para a ausência desta instabilidade quando temos o fluxo reverso (ou seja, quando o fluido mais viscoso empurra o menos viscoso). Por uma questão de simplicidade, consideraremos que o fluido menos viscoso tem viscosidade desprezível ($\eta_1 \ll \eta_2$). Além disso, como os fluidos são incompressíveis ($\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$), ao calcularmos a divergência em ambos os lados da Eq. (1.1), vemos imediatamente

que o campo de pressão obedece a equação de Laplace ($\nabla^2 p_j = 0$). Como pela lei de Darcy $\eta_j \mathbf{v}_j \sim \nabla p_j$ e já que $\eta_1 \ll \eta_2$, para o fluido 1 temos que $\nabla p_1 \approx 0$, de tal forma que a pressão no fluido menos viscoso é constante. Nestas circunstâncias, consideremos que, devido a uma flutuação qualquer, uma pequena perturbação surja na interface que separa os fluidos, na direção do movimento dos próprios fluidos. A perturbação deforma as isobáricas no fluido mais viscoso, aproximando isobáricas adjacentes e fazendo aumentar ali o gradiente de pressão (veja Fig. (6)). Mas, como a velocidade do fluido em movimento é diretamente proporcional ao gradiente de pressão, a velocidade aumenta e a perturbação na interface passa a mover-se mais rapidamente, favorecendo o surgimento da instabilidade de Saffman-Taylor. Por outro lado, se o fluido mais viscoso empurra o menos viscoso, criando uma perturbação instantânea na interface, a deformação invadirá uma região de pressão aproximadamente constante no fluido 1, de tal forma que o gradiente de pressão será praticamente nulo, fazendo com que a perturbação decaia a zero rapidamente. Logo, no fluxo reverso, não ocorre a instabilidade de Saffman-Taylor.

Além da lei de Darcy, a descrição dinâmica do problema é suplementada por duas condições de contorno na interface entre os fluidos 1 e 2: (i) a diferença de pressão dada pela equação de Young-Laplace

$$p_1 - p_2 = \gamma \kappa, \quad (1.2)$$

onde γ representa a tensão superficial entre os fluidos e κ é a curvatura da interface fluido-fluido no plano da célula de Hele-Shaw; (ii) a condição cinemática

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad (1.3)$$

que expressa a continuidade das componentes normais das velocidades dos fluidos na interface que os separa. Entretanto, observa-se que as componentes tangenciais das velocidades não são contínuas na interface, o que gera uma fina região de vorticidade local na interface, conhecida em mecânica de fluidos como *vortex sheet* (TRYGGVASON; AREF, 1983).

Vale a pena ressaltar que as equações (1.1)-(1.3) são as versões mais simples da evolução do problema. A depender da situação em análise pode ser necessário a inclusão de novos efeitos físicos no problema. Dessa forma, versões mais sofisticadas e complexas destas equações podem ser necessárias. É exatamente o que acontece nesta dissertação: efeitos de reologia de interface são levados em consideração.

1.2 REOLOGIA DE INTERFACE

O primeiro uso do termo *reologia* é creditado a Eugene C. Bingham, por volta de 1920, inspirado no lema do filósofo Heráclito $\pi\alpha\nu\tau\alpha\ \rho\epsilon\iota$ (*panta rhei*), “tudo flui”. Reologia é considerada como a ciência da deformação e fluxo de matéria: ela estuda como materiais respondem às tensões e deformações.

Em particular, um campo de grande interesse tanto teórico quanto prático é a reologia de interface (ou “interfacial”). Ela se ocupa do estudo de propriedades intrínsecas da interface que influenciam o movimento de matéria ou entidades restritas à interface. Essa interface normalmente separa duas fases fluidas volumétricas. Com isso, entender a resposta da interface à deformações e tensões de maneira geral é condição necessária para descrever não apenas o movimento da própria interface, mas também o movimento das próprias fases fluidas volumétricas. Pode-se dizer que a reologia de interface tem como objetivos principais determinar: (i) a forma de uma interface fluida dinâmica; (ii) natureza da resposta à deformação e (iii) a influência quantitativa que tensões interfaciais exercem na hidrodinâmica das fases fluidas contíguas.

As primeiras investigações sobre o que hoje chamamos de reologia de interface originaram-se do problema do movimento de uma gota esférica sujeita à ação da gravidade em um meio viscoso. Nossa intuição nos leva a crer que uma gota esférica fluida nesse tipo de movimento atinja a sua velocidade terminal mais rapidamente que uma esfera sólida de mesmas dimensões. Isso porque, durante o movimento da esfera sólida devemos ter a condição de não deslizamento na superfície. Hadamard (HADAMARD, 1911) e Rybczynski (RYBCZYNSKI, 1911) fizeram uma predição teórica deste fato, que foi uma generalização da bastante conhecida fórmula de Stokes para uma esfera sólida. Todavia, esse comportamento esperado não se verificou experimentalmente. Para gotas com raios suficientemente pequenos, era observado que elas se comportavam como esferas sólidas em meio viscoso.

A fim de elucidar essa discrepância, Boussinesq postulou a existência de uma “viscosidade superficial” no caso da gota fluida esférica (BOUSSINESQ, 1913). Essa viscosidade seria o análogo bidimensional da viscosidade de um fluido tridimensional. Durante o movimento em um meio viscoso, ela enrijeceria a interface da gota de modo a diminuir sua mobilidade e esse efeito se tornaria tanto maior quanto menor fosse o raio da gota esférica.

Enquanto isso, Rayleigh propôs uma explicação quantitativa para a “instabilidade de Bénard” (BÉNARD, 1900; WESFREID, 2017), dando evidências de que os padrões de circulação

celular observados quando uma fina camada de fluido era aquecida por baixo, surgiam de instabilidades criadas por convecção (RAYLEIGH, 1916). Apesar disso ter sido bem aceito naquele momento, mais tarde outros experimentos mostraram que a instabilidade também ocorria em camadas finas aquecidas por cima (BLOCK, 1956; PEARSON, 1958). Foi proposto então que inomogeneidades locais na tensão superficial seriam responsáveis pelo comportamento observado.

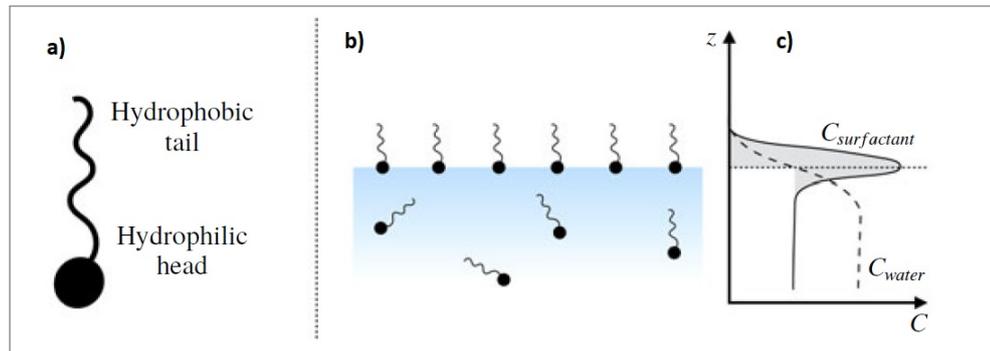
Processos físicos por meio dos quais um gradiente de tensão superficial causa convecção na fase volumétrica já eram conhecidos e eram chamados de “efeitos de Marangoni” (THOMSON, 1855; MARANGONI, 1865). Eles são oriundos de variações na tensão superficial devido à inomogeneidades na temperatura ou na concentração de agentes tensoativos (agentes que alteram as tensões na interface). Na década de 1950, ainda permanecia inexplicada a discrepância entre a equação de Hadamard-Rybczynski, que propunha uma velocidade terminal atingida mais rapidamente para gota esférica fluida, e os experimentos, que mostravam um comportamento similar a uma esfera sólida. Foi proposto que tal discrepância seria causada por variações na tensão superficial da gota por conta de agentes tensoativos, e não por causa de uma viscosidade superficial como proposto por Boussinesq inicialmente.

Essas discussões foram em grande parte esclarecidas pelos trabalhos de Sterling e Scriven (SCRIVEN; STERNLING, 1959; SCRIVEN, 1960), nos quais a teoria de Boussinesq foi generalizada para uma interface de curvatura arbitrária. Nesses estudos é possível verificar-se de maneira mais clara como os efeitos de Marangoni e efeitos devido à viscosidade superficial surgem. Esses dois trabalhos marcaram o início da reologia de interface moderna.

1.2.1 Agentes tensoativos

Nesse ponto de nossa discussão, começa a ficar claro que esses efeitos de fronteira que ocorrem na interface separadora entre fases, sejam eles causados por viscosidade superficial ou gradiente de tensão superficial, acontecem devido à presença de agentes especiais que “habitam” a interface entre dois fluidos. Quando esses agentes são colocados em pequena quantidade em uma fase fluida, eles são adsorvidos à superfície (ou interface), isto é, tendem a ocupar a interface entre os fluidos. Essa interface pode estar separando dois líquidos imiscíveis, ou ser a interface entre um líquido e uma fase gasosa. Essa adsorção altera as características físico-químicas da interface modificando a tensão superficial, viscosidade, elasticidade e outras propriedades da interface.

Figura 7 – (a) Representação esquemática de uma molécula anfifílica; (b) Ilustração dos agentes tensoativos (surfactantes) adsorvidos na interface (ar-água); (c) Gráfico ilustrando a concentração de surfactantes na interface.



Fonte: (MANIKANTAN; SQUIRES, 2020)

Agentes tensoativos, também chamados de surfactantes (em inglês, *surfactant* abreviação de **surface active agent**), possuem o comportamento descrito devido à sua estrutura molecular anfifílica. Eles são moléculas geralmente longas que têm uma “cabeça” polar hidrofílica (ou lipofóbica) e uma “cauda” hidrofóbica (ou lipofílica), veja Fig. 7. A configuração eletrônica dessas moléculas faz com que parte dela tenda a ficar imersa em um meio aquoso e outra parte seja repelida desse meio causando o deslocamento dessas moléculas para a interface entre as duas fases fluidas. Apesar dos agentes tensoativos normalmente reduzirem a tensão superficial, também há ocasiões em que eles podem aumentá-la.

É fácil de se convencer que uma molécula anfifílica possui a tendência de ocupar a interface entre dois fluidos devido à existência de uma parte hidrofílica e outra hidrofóbica na sua estrutura. Mas essa separação clara entre uma porção hidrofílica e hidrofóbica da molécula não é necessária para haver a tendência de ocupar a interface (*surface activity*). A molhabilidade é a capacidade de um fluido aderir à superfície de um sólido, por isso pode ser descrita em termos do ângulo de contato entre o fluido e o sólido. Daí, basta que uma molécula ou partícula quimicamente homogênea possua molhabilidade intermediária em relação aos fluidos de cada um dos lados da interface para que a mesma se acomode na interface (BINKS, 2002).

São exemplos de substâncias com essa propriedade de ocupar a interface entre dois fluidos os sabões, detergentes, demulsificantes, emulsificantes, ácidos graxos, proteínas desnaturadas, alguns tipos de partículas, entre outros agentes tensoativos (FULLER; VERMANT, 2012). Portanto, essas substâncias modificam a complexa resposta reológica da interface, assim como o movimento das fases volumétricas contíguas, sendo essencial para a compreensão da dinâmica tanto da interface quanto a das próprias fases volumétricas.

1.3 BIFURCAÇÃO DE DEDOS E REOLOGIA DE INTERFACE

Um dos aspectos mais marcantes da instabilidade de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw radial é a bifurcação dos dedos formados na interface. Uma variedade de modificações no problema de injeção radial foram propostas ao longo do tempo, mostrando como a morfologia e a dinâmica da interface responde a cada alteração feita. Entre essas modificações estão a incorporação de fluidos não newtonianos (KONDIC; SHELLEY; PALFFY-MUHORAY, 1998; ESLAMI; TAGHAVI, 2017), miscíveis (CHEN; MEIBURG, 1998; SHARMA et al., 2020; SUZUKI et al., 2020) e reativos (PODGORSKI et al., 2007; NAGATSU, 2015), efeitos de campo magnético (JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994; FLAMENT et al., 1998) e elétrico (GAO et al., 2019; ANJOS et al., 2022), taxa de injeção dependente do tempo (LI et al., 2009; DIAS et al., 2012; MORROW; MORONEY; MCCUE, 2019; ARUN et al., 2020; ANJOS et al., 2021), partículas suspensas (KIM; XU; LEE, 2017; LUO; CHEN; LEE, 2018), influência de forças de Coriolis e centrífuga (ALVAREZ-LACALLE; ORTIN; CASADEMUNT, 2004; CHEN; HUANG; MIRANDA, 2011), impacto de efeitos de molhamento (PARK; HOMSY, 1984; JACKSON et al., 2015) e da inércia dos fluidos (RUYER-QUIL, 2001; CHEVALIER et al., 2006; DIAS; MIRANDA, 2011b), bem como a consideração de deslocamentos em células de Hele-Shaw geometricamente modificadas (ZHAO; MAHER, 1990; PARISIO et al., 2001; ZHAO et al., 1992; PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2012; AL-HOUSSEINY; STONE, 2013; BONGRAND; TSAI, 2018). Esses trabalhos tentaram entender como essas diversas mudanças influenciavam a dinâmica e a morfologia da interface. Esses estudos também examinaram possíveis maneiras de controlar, suprimir ou favorecer o desenvolvimento dos padrões, em particular o crescimento da bifurcação dos dedos.

Recentemente, em (LI; MANIKANTAN, 2021), Li e Manikantan examinaram os efeitos de um tópico ainda inexplorado na literatura da formação de dedos viscosos: o impacto da reologia de interface na instabilidade de Saffman-Taylor com injeção radial. Apesar de ser bem conhecido que, em geral, agentes tensoativos atuam de modo a estabilizar interfaces contra ruptura e coalescência em processos naturais e industriais (BHAMLA et al., 2014; LIN; FROSTAD; FULLER, 2018; SACHAN et al., 2017; CHANG et al., 2018; MANIKANTAN; SQUIRES, 2020; LANGEVIN, 2014; ZELL et al., 2014; JAENSSON; VERMANT, 2018; FULLER; VERMANT, 2012), uma descrição quantitativa da influência da reologia de interface em escoamentos viscosos na célula de Hele-Shaw radial era algo que ainda precisava ser estudado. Nesse tipo de sistema, o atrito na interface, devido ao deslizamento de moléculas e partículas umas sobre as outras, produz uma dissipação viscosa (ou viscosidade interfacial), levando a uma complexa reologia de interface.

Em seu trabalho, Li e Manikantan usaram o modelo de Boussinesq-Scriven (BOUSSINESQ, 1913; SCRIVEN, 1960; SCRIVEN; STERNLING, 1959) para representar as tensões reológicas na interface, a qual é considerada como bidimensional e compressível, com viscosidades superficiais dilatacional e de cisalhamento. Eles também consideraram que o fluxo na célula de Hele-Shaw radial era predominantemente radial, desprezando a componente azimutal do vetor normal à interface. Assumindo que o vetor velocidade era predominantemente radial e que a componente radial da velocidade era contínua na interface, eles obtiveram uma condição de contorno de Young-Laplace para o problema. Tal condição expressa o balanço das tensões normais através da interface e leva em consideração a ação da reologia de interface.

Por meio de uma análise de estabilidade linear, Li e Manikantan concluíram que os efeitos da reologia de interface atenuam a instabilidade de formação de dedos viscosos. Fisicamente, o fluxo expande a interface fluido-fluido, a qual por sua vez resiste a essa expansão devido à viscosidade interfacial. Seus resultados mostraram que a taxa de crescimento da instabilidade é diminuída à medida que os efeitos reológicos interfaciais são aumentados, sugerindo que os dedos formados nos padrões da interface seriam mais largos.

Apesar dos avanços e informações úteis obtidas por Li e Manikantan com sua teoria de perturbação linear, não é possível analisar quais seriam os efeitos da reologia de interface no fenômeno intrinsecamente não linear de bifurcação de dedos. Contudo, é bem conhecido que uma teoria de modos acoplados não linear permite a predição e captura dos elementos morfológicos chave em uma gama de problemas de formação de padrões de interface (HOMSY, 1987; MIRANDA; WIDOM, 1998b; MIRANDA; WIDOM, 1998a; BRUSH; SEKERKA; MCFADDEN, 1990; HAAN, 1991; GUO; HONG; KURTZE, 1992; GUO; HONG; KURTZE, 1995; ALVAREZ-LACALLE; CASADEMUNT; ORTÍN, 2001; ALVAREZ-LACALLE et al., 2003). Motivados pelo trabalho de Li e Manikantan, nós empregamos uma análise perturbativa de modos acoplados de segunda ordem a fim de examinar como os efeitos de reologia de interface afetam o fluxo na célula de Hele-Shaw radial. Nosso trabalho estende os estudos lineares de (LI; MANIKANTAN, 2021) para estágios iniciais não lineares do escoamento.

Nesta dissertação, o principal objetivo é obter uma equação diferencial para as amplitudes de perturbação da interface usando análise de Fourier, porém indo além da análise de estabilidade linear, cujos modos de Fourier não se acoplam, focando nas contribuições de segunda ordem. Além de irmos até segunda ordem, levando em consideração que a interface fluido-fluido possui um formato perturbado não circular, obtemos uma condição de contorno de Young-Laplace modificada que generaliza aquela obtida em (LI; MANIKANTAN, 2021). Nós

generalizamos a condição adicionando duas importantes modificações: (i) em vez de considerar um vetor normal à interface apenas radial, assumimos que o mesmo poderia apontar em uma direção arbitrária, possuindo componentes radial e azimutal; (ii) além disso, consideramos que a velocidade do fluido bidimensional que representa a interface é aproximadamente uma média das velocidades do fluido interno e externo, avaliadas na interface. Daí, usamos a lei de Darcy para obter uma equação de movimento para a interface fluido-fluido, incluindo os efeitos de reologia de interface. Tal equação diferencial não linear então é utilizada para investigar como tensões reológicas de interface impactam o icônico fenômeno de bifurcação de dedos viscosos. Mostramos que, em que pese seu efeito estabilizador no regime linear, as tensões reológicas induzem um aumento do crescimento da bifurcação em estágios fracamente não lineares da dinâmica.

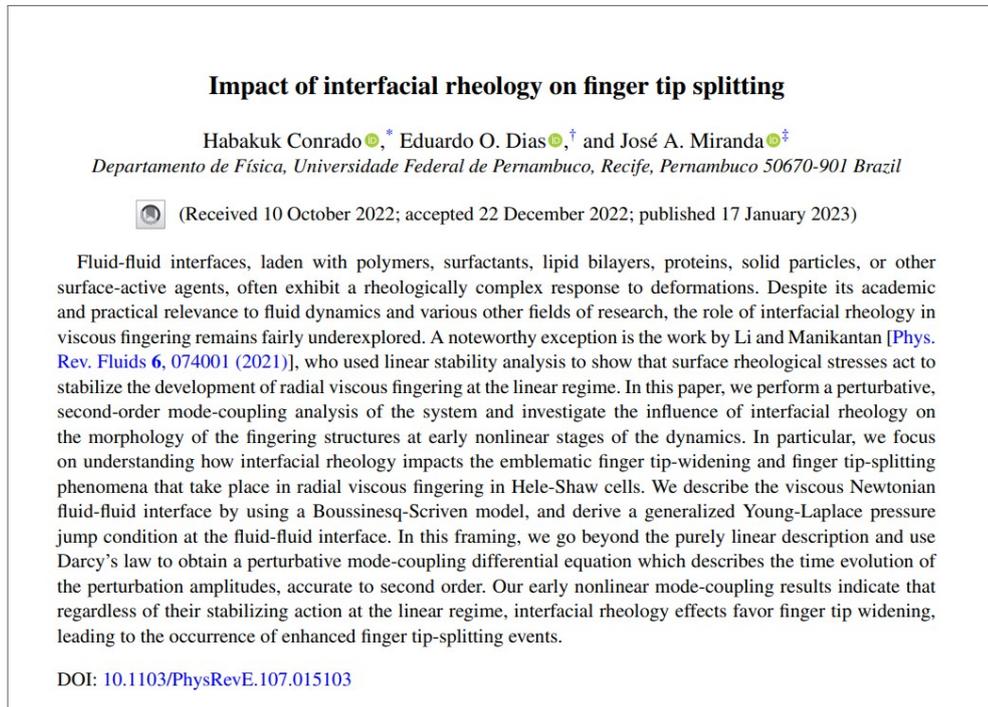
Por fim, vale a pena ressaltar que os resultados teóricos reportados aqui e em (LI; MANIKANTAN, 2021) não são meramente acadêmicos, mas possuem uma conexão direta com aplicações reais que envolvem instabilidades de interface na presença de agentes tensoativos. Um exemplo de importância capital é a extração de petróleo (SHENG, 2011), pois a formação de dedos viscosos é um fator importante na redução da eficiência da retirada de petróleo de reservatórios subterrâneos. Por outro lado, o petróleo bruto é uma mistura complexa de diferentes componentes, como hidrocarbonetos, asfaltenos, resinas, entre outros (LANGEVIN, 2014). Essas substâncias são agentes tensoativos e podem se acoplar fortemente às forças hidrodinâmicas, sendo capazes de alterar a estabilidade da emulsão petróleo-em-água ou água-em-petróleo (CHANG et al., 2018). Portanto, é de importância prática e tecnológica entender como controlar o crescimento de padrões na presença de interfaces reologicamente complexas na extração de petróleo. Outros exemplos interessantes ocorrem com a formação de padrões em certos sistemas biológicos, tais como células vivas e biofilmes (DINSMORE et al., 2002; NOGUCHI; GOMPPER, 2005; ZASADZINSKI et al., 2001), onde uma variedade de problemas relacionam reologia de interface, dinâmica e estrutura. Esses problemas práticos e interdisciplinares contribuem para o impacto em potencial das análises teóricas realizadas aqui e em (LI; MANIKANTAN, 2021).

Como resultado dos estudos realizados durante a elaboração desta dissertação, publicamos o seguinte artigo científico (veja a Fig.8):

- H. Conrado; E. O. Dias; J. A. Miranda; *Impact of interfacial rheology on finger tip splitting*, Phys. Rev. E **107**, n. 1, p. 015103, 2023.

Nos próximos capítulos desta dissertação, examinaremos com mais detalhes como os fenô-

Figura 8 – Título e *abstract* do trabalho resultante desta dissertação de mestrado.



Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

menos de bifurcação de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw radial são afetados pelos efeitos de reologia de interface. No capítulo 2, faremos uma exposição das principais equações que formam a base matemática do problema e calcularemos uma equação diferencial de modos acoplados de segunda ordem para as amplitudes de perturbação da interface. No capítulo 3, utilizaremos essa equação para obter algumas figuras de padrões da interface e discutir as características mais marcantes desses padrões. Por fim, no capítulo 4, faremos uma conclusão desta dissertação apresentando possíveis limitações, melhorias ou variações de nosso modelo.

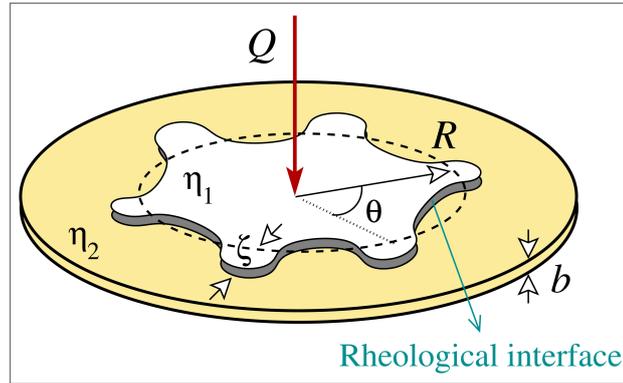
2 EQUAÇÕES PRINCIPAIS E A DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS DE SEGUNDA ORDEM

Dividimos nossa formulação teórica em duas seções. Na seção 2.1, apresentamos as equações que governam o escoamento de dois fluidos em uma célula de Hele-Shaw, considerando a influência da reologia de interface. Na seção 2.2, conforme discutido na introdução, a fim de capturar a influência da reologia de interface no mecanismo de bifurcação, estendemos a análise de estabilidade linear de (LI; MANIKANTAN, 2021) obtendo uma equação diferencial de modos acoplados de segunda ordem que determina a evolução temporal das perturbações da interface.

2.1 EQUAÇÕES QUE REGEM O ESCOAMENTO NA CÉLULA DE HELE-SHAW COM EFEITOS DE REOLOGIA DE INTERFACE

Consideramos uma célula de Hele-Shaw radial com espaçamento constante b contendo dois fluidos viscosos imiscíveis, incompressíveis e newtonianos (Fig. 9). As viscosidades do fluido interno (fluido 1) e do externo (fluido 2) são denotadas como η_1 e η_2 , respectivamente. Para descrever a interface reológica entre os fluidos 1 e 2, adotamos o modelo de Boussinesq-Scriven (LI; MANIKANTAN, 2021; FULLER; VERMANT, 2012; BOUSSINESQ, 1913; SCRIVEN, 1960; SCRIVEN; STERNLING, 1959), onde a interface é um fluido newtoniano bidimensional isotrópico contínuo e compressível, com tensão superficial γ . Além disso, o excesso de tensão viscosa dentro da interface é descrito por duas viscosidades superficiais intrínsecas: viscosidade de cisalhamento superficial η_s e viscosidade dilatacional superficial κ_s . Essas viscosidades interfaciais resultam do "atrito" na interface entre os fluidos. Tal atrito surge quando as entidades tensoativas (moléculas, partículas, etc.) dentro da interface deslizam umas sobre as outras. Neste contexto, η_s expressa a resistência contra a deformação por alongamento, enquanto κ_s resulta da resistência da interface à expansão e compressão. Vale a pena mencionar que, embora a viscosidade dilatacional superficial aparente possa surgir devido ao tempo finito de adsorção (agente tensoativo aderir à interface) ou dessorção (agente tensoativo sair da interface) (LI; MANIKANTAN, 2021; STEBE; BARTHES-BIESEL, 1995), a viscosidade dilatacional superficial intrínseca κ_s é uma propriedade do agente tensoativo. Além disso, η_s e κ_s são, respectivamente, a versão bidimensional da viscosidade do fluido e da viscosidade dilatacional que aparecem na relação constitutiva entre tensão e taxa de deformação (Eq. 2.7).

Figura 9 – Representação esquemática do problema de formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw radial de espessura b . O fluido interno (externo) tem viscosidade η_1 (η_2). Os fluidos são separados por uma interface reológica. O fluido 1 é injetado na célula, previamente preenchida com o fluido 2, com taxa de injeção constante Q . A interface circular não perturbada dependente do tempo (círculo tracejado) tem raio $R(t)$, e a perturbação da interface é denotada por $\zeta(\theta, t)$, onde θ é o ângulo azimutal. A interface deformada é representada como $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$. A interface reológica tem tensão superficial γ , viscosidade de cisalhamento superficial η_s e viscosidade dilatacional κ_s .



Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

Nesta configuração, o fluido 1 é injetado no centro da célula de Hele-Shaw a uma taxa de injeção constante Q (área por unidade de tempo), deslocando o fluido 2, que inicialmente preenche a região entre as placas da célula de Hele-Shaw. Durante este processo de injeção, a instabilidade de Saffman-Taylor causada pela diferença de viscosidade induz deformações na interface fluido-fluido inicialmente circular. Neste cenário, o objetivo final das seções 2.1 e 2.2 é calcular uma equação diferencial não linear para a evolução dessas perturbações na interface.

Começamos a apresentação das equações pela lei de Darcy (HOMSY, 1987; SAFFMAN; TAYLOR, 1958)

$$\mathbf{u}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (2.1)$$

que descreve o escoamento efetivamente bidimensional na célula de Hele-Shaw, e a condição de incompressibilidade para os fluidos 1 e 2

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad (2.2)$$

onde o índice j é 1 para o fluido interno, e 2 para o fluido externo. Nas Eqs. (2.1) e (2.2), $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j(r, \theta)$ e $p_j = p_j(r, \theta)$ são a velocidade com a média calculada ao longo do eixo z (\bar{u}) e o campo de pressão dos fluidos $j = 1, 2$, respectivamente. Aqui (r, θ) representam as coordenadas polares usuais, para um sistema de coordenadas centrado no ponto de injeção, onde θ representa o ângulo azimutal. Inspeccionando a Eq. (2.1), é possível prontamente notar a natureza irrotacional do escoamento ($\nabla \times \mathbf{u}_j = 0$) de modo que pode-se definir o potencial

de velocidade ϕ_j , onde $\mathbf{u}_j = -\nabla\phi_j$. Da Eq. (2.2) e da definição de ϕ_j , fica claro que os potenciais de velocidade obedecem à equação de Laplace,

$$\nabla^2\phi_j = 0. \quad (2.3)$$

Descrevemos a interface perturbada entre os fluidos 1 e 2 como $r = \mathcal{R}(\theta, t)$. Para obter a equação de movimento para $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\theta, t)$, primeiro reescrevemos Eq. (2.1) em termos de ϕ_j . Então, subtraímos as expressões resultantes para $j = 1$ de $j = 2$, com ambas as equações avaliadas em $r = \mathcal{R}$, e dividimos pela soma das viscosidades dos fluidos. Esse cálculo resulta na equação dinâmica para \mathcal{R} dada por

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)_{\mathcal{R}} = -\frac{b^2(p_1 - p_2)_{\mathcal{R}}}{12(\eta_1 + \eta_2)}, \quad (2.4)$$

onde $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ é o contraste de viscosidade. Examinando Eq. (2.4), verificamos que nós precisamos relacionar ambos os potenciais de velocidade $\phi_j|_{\mathcal{R}}$, bem como a descontinuidade na pressão através da interface $(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}}$ com as perturbações da interface. A primeira dessas relações é obtida da Eq. (2.3) juntamente com a condição de contorno cinemática (HOMSY, 1987), a qual conecta as velocidades dos fluidos com o movimento da própria interface,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right)_{\mathcal{R}}. \quad (2.5)$$

A Eq. (2.5) manifesta o fato de que as componentes normais das velocidades dos fluidos são contínuas através da interface.

Para determinar diferença de pressão $(p_1 - p_2)_{\mathcal{R}}$ na Eq. (2.4), seguiremos passos similares àqueles de (LI; MANIKANTAN, 2021). Convém mencionar que a reologia de interface afeta a equação da dinâmica da interface (2.4) apenas por meio de $(p_1 - p_2)_{\mathcal{R}}$. Começamos descrevendo a equação de conservação de momento de Cauchy bidimensional na interface (SLATTERY; SAGIS; OH, 2007; EDWARDS; BRENNER; WASAN, 1991)

$$\rho_s \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) + \nabla_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_s, \quad (2.6)$$

onde $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ é a derivada material, \mathbf{u} é a velocidade do fluido na interface, ρ_s é a densidade superficial de massa, \mathbf{n} é o vetor normal unitário apontando na direção do fluido externo e $\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1$ é o salto de tensão hidrodinâmica através da interface. Ademais, $\nabla_s = \mathbf{I}_s \cdot \nabla = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \nabla$ é o operador gradiente superficial, com $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ sendo o tensor identidade da superfície. No apêndice A, mostramos algumas identidades úteis envolvendo ∇ e ∇_s em coordenadas polares. A equação (2.6) é o análogo bidimensional da equação de

conservação volumétrica para o momento. Ela expressa a condição de balanço de momento em cada ponto da interface entre os fluidos. Nessa equação, a versão superficial do teorema de transporte de Reynolds é usada para obter do lado esquerdo. Por outro lado, a primeira contribuição no lado direito é uma consequência do contato com os fluidos de um lado e de outro da interface, os fluidos do volume (“bulk”). Finalmente, o último termo é o equivalente bidimensional da divergência do tensor de tensão em um meio tridimensional, representando as forças internas à interface. Portanto, $\boldsymbol{\sigma}_s$ é o tensor de tensão da interface, que é dado por (MANIKANTAN; SQUIRES, 2020; SCRIVEN, 1960)

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \gamma \mathbf{I}_s + \boldsymbol{\tau}_{\text{rheo}}, \quad (2.7)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_{\text{rheo}}$ quantifica a relação entre tensões e taxas de deformação na interface. A Eq. (2.7) é o análogo do tensor de tensão para um fluido tridimensional.

Para obter $(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}}$ da conservação de momento de Cauchy, primeiro substituímos Eq. (2.7) em (2.6), e calculamos a componente normal da expressão resultante, levando a

$$\rho_s \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) \cdot \mathbf{n} = \nabla_s \gamma \cdot \mathbf{n} - \gamma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) + (\nabla_s \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{rheo}}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

A relação constitutiva dada pela generalização de Scriven à aproximação bidimensional, compressível, newtoniana proposta por Boussinesq (MANIKANTAN; SQUIRES, 2020; SCRIVEN, 1960) define o tensor de tensão da superfície $\boldsymbol{\tau}_{\text{rheo}}$ como

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{rheo}} = [(\kappa_s - \eta_s) \nabla_s \cdot \mathbf{u}] \mathbf{I}_s + \eta_s \left[\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \cdot (\nabla_s \mathbf{u})^T \right], \quad (2.9)$$

onde T denota a matriz transposta. Note que para fluidos muito viscosos confinados na geometria da célula de Hele-Shaw, o número de Reynolds é significativamente pequeno (HOMSY, 1987) e, portanto, podemos desprezar a contribuição da inércia do fluido e dos agentes tensoativos $\rho_s D\mathbf{u}/Dt$ na Eq. (2.8). Além do mais, como explicado em detalhes em (LI; MANIKANTAN, 2021), nós fazemos a suposição típica de que a tensão superficial é espacialmente uniforme. Desse modo, a tensão de Marangoni $\nabla_s \gamma$ se anula. Sob essas circunstâncias e substituindo Eq. (2.9) em Eq. (2.8), obtemos uma expressão para a diferença de tensão normal através da interface

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} &= -\gamma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) - (\kappa_s - \eta_s) (\nabla_s \cdot \mathbf{u}) (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \\ &\quad + \nabla_s \cdot \left\{ \eta_s \left[\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \cdot (\nabla_s \mathbf{u})^T \right] \right\} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Neste ponto, vale a pena notar que no contexto do modelo de Boussinesq-Scriven (BOUSSINESQ, 1913; SCRIVEN, 1960; SCRIVEN; STERNLING, 1959) empregado aqui e em (LI; MANIKANTAN, 2021), apesar dos fluidos do volume serem incompressíveis, Eq. (2.2), a interface entre os fluidos é modelada como um fluido compressível (i.e., $\nabla_s \cdot \mathbf{u} \neq 0$) com viscosidades κ_s e η_s (SLATTERY; SAGIS; OH, 2007; EDWARDS; BRENNER; WASAN, 1991). Na verdade, como notado em (EDWARDS; BRENNER; WASAN, 1991), interfaces incompressíveis são raras na prática e a maioria das fases das interfaces são geralmente compressíveis.

Ao contrário de (LI; MANIKANTAN, 2021), nós reescrevemos a Eq. (2.10) em um formato muito mais compacto dado por

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} = -[\gamma + (\kappa_s + \eta_s) \nabla_s \cdot \mathbf{u}] \mathcal{K}, \quad (2.11)$$

onde $\mathcal{K} = \nabla_s \cdot \mathbf{n}$ é a curvatura da interface no plano da célula de Hele-Shaw. Note que a curvatura na direção perpendicular às placas ($\mathcal{K}_\perp = 2/b$) não foi considerada na Eq. (2.11) uma vez que ela é aproximadamente constante (MCLEAN; SAFFMAN, 1981; REINELT, 1987) e, portanto, não afeta significativamente o movimento da interface. Como já foi comentado, no escopo do modelo de Boussinesq-Scriven, a interface entre os fluidos é descrita como uma faixa bidimensional. No entanto, uma vez que \mathcal{K}_\perp é aproximadamente contante, é possível acompanhar a deformação apenas ao longo de uma interface efetivamente unidimensional tendo curvatura \mathcal{K} . Ademais, vale a pena notar que o termo $\eta_s(\nabla_s \cdot \mathbf{u})\mathcal{K}$ na Eq. (2.11) é obtido reescrevendo a última linha da Eq. (2.10) como $-2\eta_s(\nabla_s \cdot \mathbf{u})\mathcal{K}$. O apêndice B dá detalhes destes cálculos. O “salto” na pressão através da interface, $(p_1 - p_2)_\mathcal{R}$, surge da Eq. (2.11) usando o tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}_j$ para um fluido newtoniano viscoso incompressível, o qual possui contribuições das tensões normais viscosas e da pressão (LANDAU; LIFSHITZ, 1959; PANTON, 2013; BATCHELOR, 1967; LANGLOIS; DEVILLE, 2014),

$$\boldsymbol{\sigma}_j = -p_j \mathbf{l}_j + \eta_j [\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T]. \quad (2.12)$$

Substituindo o tensor de tensão (2.12) em Eq. (2.11), temos

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)_\mathcal{R} &= \left[\gamma + (\kappa_s + \eta_s) \nabla_s \cdot \mathbf{u} \right] \mathcal{K} \\ &+ \mathbf{n} \cdot \left\{ \eta_1 [\nabla \mathbf{u}_1 + (\nabla \mathbf{u}_1)^T] - \eta_2 [\nabla \mathbf{u}_2 + (\nabla \mathbf{u}_2)^T] \right\}_\mathcal{R} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A equação acima ilustra como tensão superficial, tensões normais viscosas e a reologia de interface levam a uma condição de salto de pressão através da interface. O primeiro termo

no lado direito, $\gamma\mathcal{K}$, é comumente conhecido como a condição de contorno de pressão de Young-Laplace (HOMSY, 1987). Além disso, observando a Eq. (2.13), é possível verificar que a contribuição da reologia de interface (o termo com $(\kappa_s + \eta_s)$ no lado direito da Eq. (2.13)) leva a uma tensão superficial efetiva dada por $[\gamma + (\kappa_s + \eta_s)\nabla_s \cdot \mathbf{u}]$. Finalmente, o último termo de Eq. (2.13) representa o balanço das tensões normais viscosas na interface.

Note que precisamos da velocidade do fluido na interface, \mathbf{u} , para calcular a contribuição da reologia de interface no salto de pressão na Eq. (2.13). Com isso em mente, os autores de (LI; MANIKANTAN, 2021) estavam interessados na análise de estabilidade linear da dinâmica da interface. No regime linear, como a perturbação da interface é muito menor que o raio da interface, foi assumido em (LI; MANIKANTAN, 2021) que o escoamento é predominantemente radial (i.e., $u_r \gg u_\theta$) na condição de salto de pressão (Eq. 2.13). Consequentemente, em (LI; MANIKANTAN, 2021) também é considerado que o vetor normal a interface $\mathbf{n} \approx \mathbf{e}_r$, onde \mathbf{e}_r é o vetor unitário ao longo da direção radial. Sob essas circunstâncias, usando a condição de contorno cinemática (Eq. 2.5), que impõe a continuidade da componente normal da velocidade dos fluidos através da interface,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1|_{\mathcal{R}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2|_{\mathcal{R}}, \quad (2.14)$$

os autores de (LI; MANIKANTAN, 2021) calculam \mathbf{u} assumindo que é igual à projeção radial das velocidades dos fluidos 1 e 2 avaliados na interface, ou seja, $\mathbf{u} \approx u_r \mathbf{e}_r \approx u_{1r}|_{\mathcal{R}} \mathbf{e}_r \approx u_{2r}|_{\mathcal{R}} \mathbf{e}_r$.

Todavia, à medida que as perturbações da interface crescem, a componente azimutal da velocidade u_θ se torna relevante, de modo que não é possível mais assumir que \mathbf{u} e \mathbf{n} apontem ao longo de \mathbf{e}_r . Na verdade, \mathbf{n} e \mathbf{u} podem apontar em uma direção arbitrária dependendo da deformação da interface. Essa situação mais geral será considerada nesta dissertação, dado que queremos capturar efeitos não lineares da dinâmica da interface e, portanto, analisar a formação de dedos viscosos levemente mais largos do que aqueles de (LI; MANIKANTAN, 2021). Como uma primeira abordagem para considerar um \mathbf{n} arbitrário na instabilidade de dedos viscosos sob a influência da reologia de interface, abaixo nós calculamos \mathbf{u} assumindo um escoamento mais geral que aquele considerado em (LI; MANIKANTAN, 2021).

Primeiro, note que, na realidade, a interface reológica deve ser uma fina camada, de espessura pequena e finita (tipicamente do tamanho das espécies que a constituem) cujo campo de velocidade \mathbf{v} se iguala a \mathbf{u}_1 na fronteira interna (*fluido 1 - camada*) e \mathbf{u}_2 na fronteira externa (*camada - fluido 2*), a saber,

$$\mathbf{v}|_{r=\mathcal{R}_1} = \mathbf{u}_1|_{r=\mathcal{R}_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}|_{r=\mathcal{R}_2} = \mathbf{u}_2|_{r=\mathcal{R}_2}, \quad (2.15)$$

onde \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 são posições das fronteiras interna e externa, respectivamente. Portanto, dado que a espessura da camada é muito menor que qualquer escala de comprimento do sistema (basicamente da largura de uma camada de moléculas), assumiremos que \mathbf{u} pode ser calculado como a média transversal de \mathbf{v} através da camada.

Para calcular o campo de velocidade no interior da camada, \mathbf{v} , definimos como d a espessura da fina camada entre os fluidos 1 e 2. Dado que d é significativamente pequeno, primeiro assumimos que as fronteiras interna e externa da camada são paralelas (com vetor normal \mathbf{n}). Então, definimos r_n como a distância ao longo de \mathbf{n} da fronteira interna para um ponto arbitrário dentro da camada. Desse modo, $r_n = 0$ e $r_n = d$ definem as posições das fronteiras interna e externa, respectivamente. A partir dessas definições e usando o fato de que d é extremamente pequeno, reescrevemos as condições de continuidade da Eq. (2.15) como

$$\mathbf{v}(r_n = 0) \approx \mathbf{u}_1|_{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(r_n = d) \approx \mathbf{u}_2|_{\mathcal{R}}, \quad (2.16)$$

onde é assumimos que $\mathcal{R}_j \approx \mathcal{R}$, com $j = 1, 2$, no lado direito da Eq. (2.15). Dessa forma, examinando a Eq. (2.16) e a continuidade da componente normal dos fluidos na interface efetivamente unidimensional (ver Eq. 2.14), verificamos que a componente normal de \mathbf{v} é aproximadamente constante ao longo de \mathbf{n} , i.e.,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(r_n) \approx v_n = u_{1n}|_{\mathcal{R}} = u_{2n}|_{\mathcal{R}}, \quad (2.17)$$

onde $u_{jn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_j$.

Para calcular a componente tangencial de \mathbf{v} , lembramos que na descrição de uma interface efetivamente unidimensional, a projeção tangencial de \mathbf{u}_j é descontínua ao atravessar a interface, ao contrário da componente normal de \mathbf{u}_j . Essa descontinuidade é bastante explorada no formalismo *vortex-sheet* (TRYGGVASON; AREF, 1983), onde a vorticidade na interface é quantificada pela “intensidade” do vortex-sheet $\mathbf{s} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)|_{\mathcal{R}}$, com \mathbf{s} sendo o vetor unitário tangente a $r = \mathcal{R}(\theta, t)$. Note que \mathbf{s} deveria ser tangente às fronteiras interna e externa uma vez que elas são paralelas e muito próximas uma da outra. Neste caso, da condição de continuidade (2.16), vemos que diferentemente de v_n , $v_s = \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}$ não pode ser vetor constante. Deste modo, uma vez que d é significativamente pequeno, consideremos que v_s é aproximadamente uma função linear de r_n , com condições de contorno dadas por Eq. (2.16), i.e.,

$$v_s(r_n) \approx \frac{(u_{2s} - u_{1s})_{\mathcal{R}}}{d} r_n + u_{1s}|_{\mathcal{R}}, \quad (2.18)$$

onde $u_{js} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}_j$. Note que $v_s(0) = u_{1s}|_{\mathcal{R}}$ e $v_s(d) = u_{2s}|_{\mathcal{R}}$.

Finalmente, considerando que \mathbf{u} é a média transversal de $\mathbf{v}(r_n) = v_n \mathbf{n} + v_s(r_n) \mathbf{s}$ através da camada de interface, nós temos

$$\mathbf{u} \approx \frac{1}{d} \int_0^d \mathbf{v}(r_n) dr_n = \frac{(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)_{\mathcal{R}}}{2}. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) nos diz que, na abordagem de uma interface efetivamente unidimensional, a velocidade do fluido nessa fronteira é aproximadamente a média das velocidades do fluido 1 e 2. Daqui em diante, focaremos exclusivamente na interface efetivamente unidimensional $r = \mathcal{R}(\theta, t)$, usando Eq. (2.19) como a velocidade do fluido nessa fronteira. Com essa expressão para \mathbf{u} em mãos, podemos finalmente concluir nossos cálculos para o salto na pressão em Eq. (2.13).

Substituindo Eq. (2.19) em (2.13), finalmente obtemos $(p_1 - p_2)_{\mathcal{R}}$ no formato desejado para calcular a equação da dinâmica da interface via Eq. (2.4),

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}} &= \left[\gamma + \frac{\kappa_s + \eta_s}{2} [\nabla_s \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)]_{\mathcal{R}} \right] \mathcal{K} \\ &+ \mathbf{n} \cdot \left\{ \eta_1 [\nabla \mathbf{u}_1 + (\nabla \mathbf{u}_1)^T] - \eta_2 [\nabla \mathbf{u}_2 + (\nabla \mathbf{u}_2)^T] \right\}_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A contribuição da reologia de interface mostrada em Eq. (2.20) pode ser reescrita em termos dos potenciais de velocidades usando $\mathbf{u}_j = -\nabla \phi_j$,

$$\begin{aligned} [\nabla_s \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)]_{\mathcal{R}} &= - \frac{n_r^2}{r} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} \right) - n_\theta^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - 2n_r n_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial \theta} \right) \\ &- \frac{n_r^2}{r} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} \right) - n_\theta^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} - 2n_r n_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde n_r e n_θ denotam as componentes radial e azimutal do vetor unitário normal à interface. A influência de tensões normais viscosas em $(p_1 - p_2)_{\mathcal{R}}$ também pode ser expressada em termos de ϕ_j como

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \left\{ \eta_1 [\nabla \mathbf{u}_1 + (\nabla \mathbf{u}_1)^T] - \eta_2 [\nabla \mathbf{u}_2 + (\nabla \mathbf{u}_2)^T] \right\}_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{n} &= \\ 2\eta_2 \left[n_r^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + 2 \frac{n_r n_\theta}{r} \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) + \frac{n_\theta^2}{r} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} \right) \right] & \\ - 2\eta_1 \left[n_r^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + 2 \frac{n_r n_\theta}{r} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{n_\theta^2}{r} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Um cálculo detalhado da Eq. (2.22) é feito no apêndice A de (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021) (veja também apêndice B de (LI; MANIKANTAN, 2021)). Uma expressão equivalente foi

originalmente obtida em (KIM et al., 2009) [veja Eq. (4) dessa referência], mas sua expressão carecia do fator de dois que multiplica os termos $n_r n_\theta$ no lado direito da Eq. (2.22). Além disso, vale a pena pontuar que as referências (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021; KIM et al., 2009) investigaram a influência de tensões normais viscosas na formação de dedos sem considerar a reologia de interface.

A equação (2.20), juntamente com Eqs. (2.21) e (2.22), oferecem uma generalização para a Eq. (10) de (LI; MANIKANTAN, 2021), com vetor normal unitário tendo uma direção arbitrária, e a velocidade do fluido na interface sendo a média de $\mathbf{u}_1|_{\mathcal{R}}$ e $\mathbf{u}_2|_{\mathcal{R}}$. Nós agora temos todos os ingredientes físicos centrais para investigar apropriadamente a dinâmica fracamente não linear da interface $r = \mathcal{R}(\theta, t)$. Isso será feito na seção 2.2.

2.2 EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS

O objetivo desta seção é obter uma equação de modos acoplados de segunda ordem para a interface deformada $r = \mathcal{R}(\theta, t)$. Começamos representando $\mathcal{R}(\theta, t)$ como

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t), \quad (2.23)$$

onde $\zeta = \zeta(\theta, t)$ é a perturbação da interface e

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + \frac{Qt}{\pi}} \quad (2.24)$$

é o raio não perturbado dependente do tempo da interface entre os fluidos, com R_0 sendo o raio não perturbado em $t = 0$. A fim de capturar os estágios não lineares iniciais da dinâmica de $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\theta, t)$, nós consideraremos termos até segunda ordem em ζ . Expandindo a perturbação da interface entre os fluidos em série de Fourier, temos

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta), \quad (2.25)$$

onde $\zeta_n(t)$ são as amplitudes de Fourier complexas com números de onda inteiros n . Dessa forma, a evolução fracamente não linear da interface é descrita pela equação diferencial de modos acoplados para as amplitudes de perturbação $\zeta_n(t)$. Note que na Eq. (2.25) o modo $n = 0$ é incluído para manter a área do formato perturbado independente da perturbação ζ . Então, a conservação de massa impõe que o modo ζ_0 seja escrito em termos dos outros modos com $n \neq 0$ como $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$ (MIRANDA; WIDOM, 1998a). Note que a restrição na área expressada por ζ_0 acopla o modo $n = 0$ com todos os outros $n \neq 0$ e depende

das amplitudes de Fourier ao quadrado, indicando que é uma contribuição intrinsecamente não linear, não necessária na análise de estabilidade linear.

Com a descrição da interface dada pelas Eqs. (2.23)-(2.25), nós voltamos nossa atenção para a equação dinâmica da interface (2.4). Os potenciais de velocidade que aparecem no lado esquerdo da Eq. (2.4) são calculados da Eq. (2.3), cujas soluções são

$$\phi_j = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n \neq 0} \phi_{jn}(t) \left(\frac{r}{R}\right)^{(-1)^{(j+1)|n|}} \exp(in\theta). \quad (2.26)$$

Os potenciais de velocidade se tornam completamente determinados expressando as amplitudes de Fourier $\phi_{jn}(t)$ da Eq. (2.26) em termos das amplitudes de perturbação da interface $\zeta_n(t)$ dadas na Eq. (2.25). Para tanto, usamos a condição de contorno cinemática (2.5), expandindo-a até segunda ordem em ζ . Depois, calculando a transformada de Fourier da expressão resultante e a resolvendo para $\phi_{jn}(t)$ consistentemente até segunda ordem, nós obtemos expressões para $\phi_{jn}(t)$ relacionadas a $\zeta_n(t)$ e sua derivada no tempo $\dot{\zeta}_n(t)$, onde o ponto representa uma derivada total no tempo. Com as soluções para $\phi_{jn}(t)$ colocadas na Eq. (2.26), substituímos ϕ_j na equação da dinâmica da interface (2.4) e na equação do salto de pressão (2.20), sempre mantendo os termos até segunda ordem em ζ .

Neste ponto, nós precisamos substituir a condição de contorno de pressão (2.20) na Eq. (2.4), expressando $\mathcal{K} = \nabla_s \cdot \mathbf{n}$ em termos de ζ . Como mencionado anteriormente, \mathcal{K} designa a curvatura da interface no plano da célula (HOMSY, 1987) e está relacionado a \mathcal{R} por meio de

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{R}^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta}\right)^2 - \mathcal{R} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \theta^2}}{\left[\mathcal{R}^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (2.27)$$

Finalmente, depois de substituir a solução (2.26) e a Eq. (2.20) na equação de movimento (2.4), nós mantemos termos até segunda ordem em ζ e tomamos a transformada de Fourier. Como resultado, obtemos uma equação diferencial de modos acoplados adimensionalizada para as amplitudes de perturbação ($n \neq 0$) dada por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_n &= \lambda(n)\zeta_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left\{ \left[F(n, n') + F_S(n, n') + F_R(n, n') \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \right. \\ &\left. + \left[G(n, n') + G_S(n, n') + G_R(n, n') \right] \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde

$$\lambda(n) = \frac{1}{s(n)} \left\{ \frac{1}{2\pi R^2} (A|n| - 1) - \frac{(A+1)}{2CaR^3} |n| (n^2 - 1) - \frac{1}{12\pi R^4} |n| (|n| - A) - \frac{Bq(A+1)}{48\pi R^5} |n| (n^2 - 2) \right\} \quad (2.29)$$

é a taxa de crescimento linear. Além do mais,

$$s(n) = 1 + \frac{1}{6R^2} |n| (|n| + A) + \frac{Bq(A+1)}{24R^3} |n| \quad (2.30)$$

e o parâmetro

$$Ca = \frac{12\eta_2 Q}{\gamma b} \quad (2.31)$$

é o número de capilaridade global (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021) o qual expressa uma medida relativa entre forças viscosas e de tensão superficial. Finalmente, o parâmetro

$$Bq = \frac{\kappa_s}{\eta_2 b}, \quad (2.32)$$

é o número Boussinesq, que mede importância relativa entre tensões viscosas na superfície e as tensões viscosas no volume (fluido exterior). Assim como em (LI; MANIKANTAN, 2021), aqui consideramos que a viscosidade dilatacional é muito maior que a viscosidade de cisalhamento da superfície, $\kappa_s \gg \eta_s$ (GEORGIEVA et al., 2009; BUZZA; LU; CATES, 1995; STOODT; SLATTERY, 1984). Note que no limite $Bq \rightarrow 0$ em Eq. (2.28), os efeitos da reologia de interface se anulam e são recuperados os resultados de (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021; KIM et al., 2009). Ademais, observe que (LI; MANIKANTAN, 2021) define um número de Boussinesq da Eq. (2.32) usando o símbolo Bq_b . Desse modo, Bq em (LI; MANIKANTAN, 2021) é um número de Boussinesq modificado que é por volta de dez a mil vezes maior que o nosso Bq tal como definido em Eq. (2.32).

Os termos de segunda ordem da Eq. (2.28) caracterizam estágios não lineares iniciais da dinâmica da interface. Entre essas funções, F_R e G_R representam as contribuições da reologia de interface e F_S e G_S originam-se das tensões normais viscosas. As expressões para funções F , F_S , F_R , G , G_S , e G_R são dadas no apêndice C – veja Eqs. (C.1)-(C.6). Na Eq. (2.28), comprimentos estão reescalados por b e velocidades por Q/b . Enfatizamos que todos os parâmetros adimensionais que usamos ao longo desta dissertação são consistentes com quantidades físicas típicas usadas em experimentos reais na célula Hele-Shaw radial (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015).

Finalmente, para ter uma equação de modos acoplados de segunda ordem consistente, nós substituímos os termos de derivada temporal $\dot{\zeta}_{n'}$ no lado direito da Eq. (2.28) por $\lambda(n')\zeta_{n'} + O(\zeta_{n'}^2)$, para obtermos

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_n = & \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left\{ \left[F(n, n') + F_S(n, n') + F_R(n, n') \right] \right. \\ & \left. + \lambda(n') \left[G(n, n') + G_S(n, n') + G_R(n, n') \right] \right\} \zeta_{n'} \zeta_{n-n'}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Esta é a equação de modos acoplados de segunda ordem para a interface entre os fluidos para um escoamento com injeção radial, levando em conta a ação da reologia de interface. Nós apontamos que, ao longo dos anos, estudos numéricos completamente não lineares para vários outros sistemas de formação de padrões (ALVAREZ-LACALLE; CASADEMUNT; ORTÍN, 2001; ALVAREZ-LACALLE et al., 2003; MIRANDA; ALVAREZ-LACALLE, 2005; ANJOS; LI, 2020; ZHAO et al., 2020; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020; OLIVEIRA et al., 2021) validaram o método fracamente não linear usado nesta seção. Esses estudos completamente não lineares revelam que a teoria fracamente não linear descreve com precisão o início da formação de padrões, provendo uma abordagem confiável para prever importantes mecanismos de formação de padrões completamente não lineares.

3 DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, utilizamos nossa teoria perturbativa de modos acoplados de segunda ordem para examinar como o fenômeno de bifurcação é influenciado pelos efeitos de reologia de interface nos estágios não lineares iniciais na célula de Hele-Shaw radial. Para tanto, usamos equações diferenciais acopladas não lineares para as amplitudes de perturbação (Eq. 2.33) e reescrevemos a perturbação da interface, dada na Eq. (2.25), em termos dos modos senos e cossenos

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos n\theta + b_n(t) \sin n\theta], \quad (3.1)$$

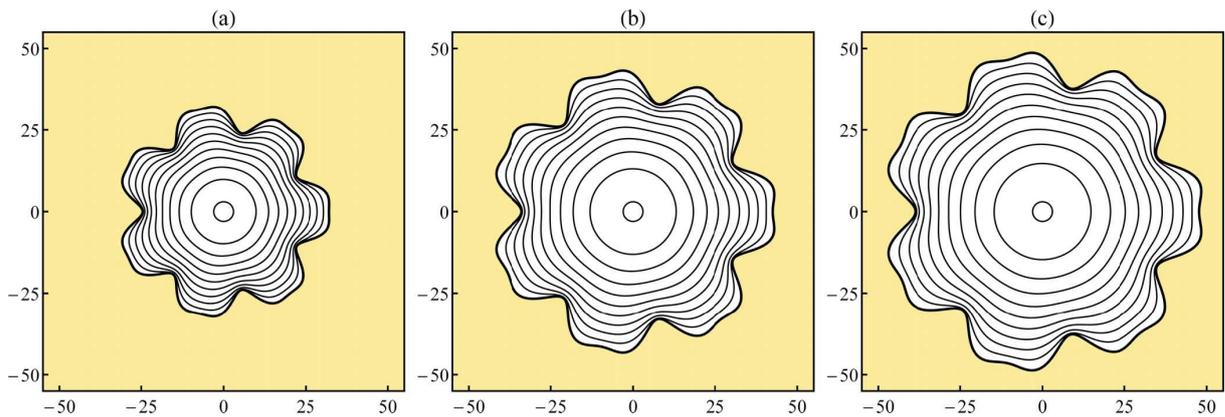
onde $a_n(t) = \zeta_n(t) + \zeta_{-n}(t)$ e $b_n(t) = i[\zeta_n(t) - \zeta_{-n}(t)]$ são variáveis reais. Além disso, temos que

$$\zeta_0 = -\frac{1}{4R} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2(t) + b_n^2(t)]. \quad (3.2)$$

A fim de reproduzir a evolução temporal dos padrões de interface, consideramos o acoplamento não linear de um número finito de modos de Fourier e da Eq. (2.33) obtemos as versões correspondentes das equações diferenciais de modos acoplados para as amplitudes reais $a_n(t)$ e $b_n(t)$. A evolução temporal para $a_n(t)$ e $b_n(t)$ dá a evolução temporal para a própria interface por meio das Eqs. 2.23) e (3.1). O conjunto resultante de equações diferenciais não lineares acopladas para essas amplitudes reais é resolvido numericamente usando o pacote de software Mathematica 12.1.

É bem conhecido, por meio de estudos fracamente não lineares do problema de Saffman-Taylor (MIRANDA; WIDOM, 1998b; MIRANDA; WIDOM, 1998a), que o mecanismo de bifurcação de dedos viscosos em escoamentos na célula de Hele-Shaw pode ser devidamente emulado considerando o acoplamento fracamente não linear de dois modos de Fourier particularmente relevantes: um modo fundamental n e seu primeiro harmônico $2n$. Dessa forma, no contexto de tal acoplamento mais simplificado, os fenômenos de bifurcação são produzidos pela influência não linear do modo fundamental no crescimento do modo harmônico $2n$. Nessa abordagem, o modo fundamental estabelece a morfologia geral de n dedos do padrão, ao passo que o primeiro harmônico $2n$ determina o formato específico da ponta dos dedos (se as pontas dos dedos são estreitas, ou largas, ou se elas bifurcam). Na Fig. 10, usamos este esquema de modos acoplados simples envolvendo apenas os modos n e $2n$ para ganhar intuição sobre como as tensões reológicas da interface agem no desenvolvimento da bifurcação de dedos em estágios iniciais não lineares na célula de Hele-Shaw radial.

Figura 10 – Evolução temporal dos padrões de interface fracamente não lineares gerados resolvendo a Eq. (2.33) para $0 \leq t \leq t_f$, e três valores crescentes do número de Boussinesq (a) $Bq = 0$, (b) $Bq = 15$ e (c) $Bq = 30$. Para um dado Bq , o tempo final t_f é o tempo máximo permitido antes que os cruzamentos não físicos de interfaces ocorram. Esses tempos finais são (a) $t_f = 2754$, (b) $t_f = 5087$ e (c) $t_f = 6499$. Os perfis das interfaces são ilustrados em intervalos de $t_f/10$, onde a interface em $t = t_f$ é representada por uma curva preta mais espessa. O fluido externo viscoso é representado pela região de cor amarelada e o fluido interno de viscosidade desprezível é representado pela região branca. Aqui consideramos o acoplamento não linear de segunda ordem dos modos cossenos, onde o modo fundamental $n = n_{\max}^c = 7$, com seu harmônico $2n = 14$. Os outros parâmetros usados são $A = 1$, $Ca = 150$, e $R_0 = 3$. As amplitudes de perturbação iniciais são $a_n(0) = R_0/2500$ e $a_{2n}(0) = 0$.



Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

Figura 10 ilustra a evolução temporal da interface fluido-fluido para $0 \leq t \leq t_f$, considerando a interação dos modos de Fourier n e $2n$, onde os vários padrões de interface são plotados em iguais intervalos de $\Delta t = t_f/10$, com t_f denotando o maior tempo antes de interfaces sucessivas se cruzarem (GINGRAS; RÁCZ, 1989). Esse cruzamento de interfaces sucessivas não é observado em experimentos em células de Hele-Shaw radial com alto contraste de viscosidade (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015). Como temos $A = 1$, esse é precisamente o nosso caso. Desse modo, o maior tempo antes do cruzamento é usado como limite superior de tempo ($t = t_f$) para a aplicabilidade de nossa descrição perturbativa. Os padrões de interface apresentados na Fig. 10 são produzidos considerando os seguintes valores de parâmetros adimensionais: $A = 1$, $Ca = 150$ e $Bq = 0, 15, 30$. A escolha para esse contraste de viscosidade específico ($A = 1$, onde $-1 \leq A \leq 1$) é motivada principalmente por seu largo uso em experimentos de formação de dedos viscosos em geometria radial (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015) e também porque este alto valor do contraste de viscosidade induz significativa desestabilização da interface, favorecendo a ocorrência de eventos de bifurcação. Além disso, se Ca for muito pequeno, a interface é demasiadamente

estável contra perturbações, fazendo sua evolução temporal ser desinteressante. Contudo, se Ca for muito grande a interface se torna deformada muito rapidamente, criando dificuldades de uma descrição teórica fracamente não linear precisa, uma vez que os cruzamentos indesejáveis (e não físicos) ocorrem rapidamente. Por essas razões, escolhemos um número de capilaridade $Ca = 150$. O número de capilaridade tipicamente varia no intervalo de $O(10) \leq Ca \leq O(10^3)$ (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015). Essa escolha é feita para evitar crescimento excessivo e repentino da interface, levando rapidamente a um regime não linear no qual nossa abordagem perturbativa não seria válida (perturbativamente, devemos ter $|\zeta_n(t)|/R(t) \ll 1$). Também destacamos que não há nada de particularmente especial na escolha de R_0 ($R_0 = 3$, onde $O(1) \leq R_0 \leq O(10)$), além do fato de estar dentro dos valores tipicamente usados nos experimentos de fluxo radial mencionados acima. Finalmente, pontuamos que os valores para o número de Boussinesq que usamos ($Bq = 0, 15, 30$) estão inteiramente de acordo com as magnitudes utilizadas em (LI; MANIKANTAN, 2021). Dessa maneira, os tempos finais para (a), (b) e (c) da Fig. 10 são, respectivamente, $t_f = 2754$, $t_f = 5087$ e $t_f = 6499$. Note que o tempo é reescalado por b^2/Q , uma vez que a velocidade é reescalada por Q/b e comprimento por b .

Para gerar os padrões ilustrados na Fig. 10, nós seguimos (DIAS; MIRANDA, 2013) e escolhemos o modo fundamental como sendo o modo de maior amplitude quando $Bq = 0$, como dado pela análise de estabilidade linear, isto é, $n = n_{\max}^{\zeta}$ tomado no tempo final t_f e obtido maximizando a amplitude de perturbação linear $\zeta_n(t)$. Para os parâmetros considerados na Fig. 10, encontramos $n = n_{\max}^{\zeta} = 7$, portanto $2n = 14$. Foi mostrado em (MIRANDA; WIDOM, 1998a) que quando apenas os modos n e $2n$ são considerados em segunda ordem, não há acoplamento entre as amplitudes dos modos seno b_{2n} e as amplitudes dos modos cosseno a_n . Desta forma, o crescimento de b_{2n} não é influenciado por a_n . Assim, para o cenário simplificado de modos acoplados de segunda ordem mostrado na Fig. 10, o fenômeno de bifurcação pode ser descrito e capturado considerando o acoplamento das amplitudes dos modos cossenos. Portanto, sem perda de generalidade, nas estruturas de formação de padrão apresentadas em Fig. 10, apenas os modos cossenos são considerados e $b_n(t) = b_{2n}(t) = 0$. Ademais, para garantir que as características morfológicas dos padrões apresentados na Fig. 10 sejam espontaneamente induzidas pela dinâmica fracamente não linear e não impostas por altas amplitudes iniciais, nós escolhemos a amplitude inicial do modo harmônico como sendo nula, $a_{2n}(0) = 0$. Desse modo, em $t = 0$, apenas o modo fundamental n tem amplitude não nula, porém pequena,

dada por $a_n(0) = R_0/2500$. Sob tais circunstâncias, utilizando a Eq. (2.33), as equações de movimento para as amplitudes dos modos cossenos $2n$ e n são

$$\dot{a}_{2n} = \lambda(2n)a_{2n} + \frac{1}{2}\Lambda(2n, n)a_n^2, \quad (3.3)$$

e

$$\dot{a}_n = \lambda(n)a_n + \frac{1}{2}\Lambda(n, 2n)a_n a_{2n}, \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda(n, p) &= F(n, p) + F_S(n, p) + F_R(n, p) \\ &+ \lambda(p) [G(n, p) + G_S(n, p) + G_R(n, p)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A evolução temporal das amplitudes $a_n(t)$ e $a_{2n}(t)$ é obtida por meio de solução numérica das equações diferenciais acopladas não lineares (3.3) e (3.4). Dentro do escopo do acoplamento de segunda ordem, sabe-se que uma forte tendência dos dedos ficarem mais largos (mais estreitos) ocorre quando $a_{2n} < 0$ ($a_{2n} > 0$) (MIRANDA; WIDOM, 1998a). Assim, um crescimento negativo para a amplitude cosseno do primeiro harmônico $2n$ significaria uma tendência a favor da bifurcação dos dedos.

Na Fig. 10, nós ilustramos a morfologia dos padrões fracamente não lineares que surgem se efeitos de reologia de interface são desprezados (Fig. 10 (a)) ou levados em consideração (Fig. 10 (b) e (c)). Como é possível notar ao examinar a Fig. 10 (a), situação na qual a reologia de interface é desprezada ($Bq = 0$), nós temos a formação de um padrão de sete dedos determinados pelo modo fundamental $n = 7$. Ao passo que o tempo avança, observa-se que os dedos em crescimento ficam mais largos, levando ao surgimento de estruturas com pontas achatadas que estão na iminência de bifurcarem. Esses processos de alargamento e achatamento são provocados pelo crescimento não linear do modo primeiro harmônico $2n$, antecedendo a ocorrência de bifurcação dos dedos. Essas observações estão de acordo com as previsões teóricas de (MIRANDA; WIDOM, 1998a), bem como com os resultados experimentais de (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015).

Continuamos, inspecionando a Fig. 10(b) que mostra a evolução da interface quando a reologia de interface é levada em consideração e $Bq = 15$. A característica mais evidente do padrão mostrado na Fig. 10(b) é que, apesar de ainda termos a formação das sete estruturas em forma de dedos, ao contrário do que acontece em Fig.10(a), agora os dedos se tornam mais

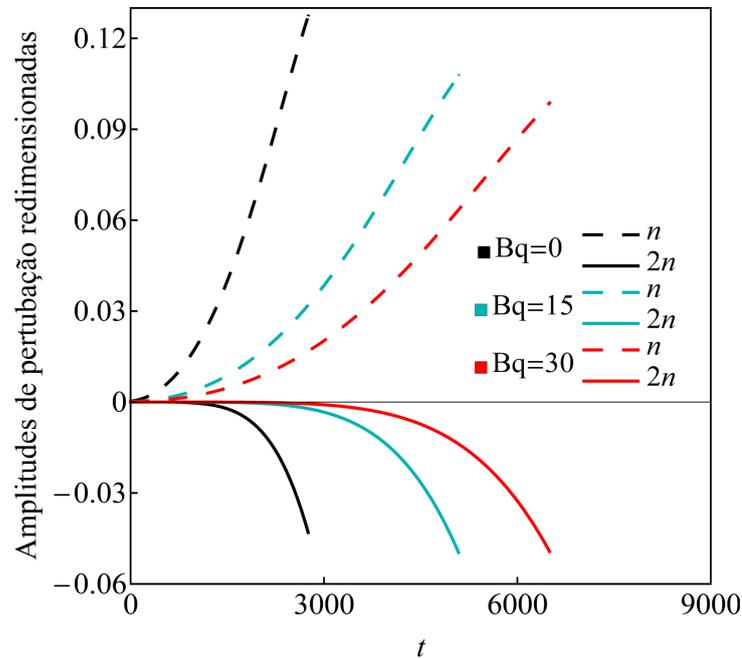
e mais largos e eventualmente bifurcam em suas pontas, claramente exibindo a ocorrência do fenômeno de bifurcação. Esses eventos de bifurcação das pontas dos dedos foram induzidos pela ação das tensões reológicas da interface.

Destacamos que na Fig. 10(a), $t_f = 2754$ e que na Fig. 10(b), $t_f = 5087$. Dessa forma, na Fig. 10(b), quando as tensões reológicas de interface estão presentes, pode-se evoluir a dinâmica até tempos maiores, ainda evitando os indesejáveis cruzamentos entre interfaces sucessivas. Essa é a razão pela qual o padrão obtido em Fig. 10(b) tem um tamanho maior que o padrão mostrado na Fig. 10(a) para $B_q = 0$. Esse efeito estabilizador geral introduzido pelas tensões da reologia de interface está inteiramente de acordo com os resultados de estabilidade linear de (LI; MANIKANTAN, 2021), onde foi encontrado que as tensões reológicas de interface tendem a estabilizar o surgimento de dedos em estágios lineares do fluxo radial. No entanto, se por um lado a reologia de interface de fato retarda o crescimento dos padrões como um todo, por outro lado os dedos gerados tornam-se mais bifurcados que aqueles gerados quando $B_q = 0$. Portanto, as análises da Fig. 10(a) e da Fig. 10(b) indicam que apesar do papel estabilizador detectado na teoria linear, no contexto fracamente não linear, tais tensões reológicas de interface aumentam a instabilidade causadora da bifurcação dos dedos.

Essas conclusões são reforçadas ao examinarmos a Fig. 10(c), que apresenta a evolução do padrão para um número de Boussinesq ainda maior ($B_q = 30$), para o qual $t_f = 6499$. De fato, o aspecto mais evidente do padrão mostrado em Fig. 10(c) é o crescimento de eventos de bifurcação ainda mais intensos que aqueles detectados na Fig. 10(b). Desse modo, valores maiores de B_q resultam em padrões para os quais os dedos tornam-se mais largos, revelando uma tendência maior em favor da bifurcação dos dedos.

Passemos agora à análise da Fig. 11 que compara a evolução temporal das amplitudes de perturbação cosseno para o modo fundamental (primeiro harmônico) $a_n(t)/R(t)$ ($a_{2n}(t)/R(t)$) relacionadas aos padrões fracamente não lineares mostrados na Fig. 10, para três valores crescentes de número de Boussinesq $B_q = 0, 15, 30$. Primeiramente, observamos que independentemente do valor de B_q , o acoplamento fracamente não linear entres os modos n e $2n$ dita o sinal do primeiro harmônico $2n$, este sendo negativo apesar de sua amplitude inicial ser nula, $a_{2n}(0) = 0$. Isso é exatamente o sinal do primeiro harmônico que causa o alargamento, achatamento e, por fim, a bifurcação das pontas dos dedos, conforme originalmente descrito em (MIRANDA; WIDOM, 1998a). Além disso, note que o crescimento atenuado da amplitude do modo fundamental para valores maiores de B_q , permite uma evolução maior dos padrões no tempo sem que ocorram os cruzamentos indesejáveis, como anteriormente mencionado na

Figura 11 – Evolução temporal das amplitudes cosseno redimensionadas para o modo $a_n(t)/R(t)$ (curvas tracejadas) e do modo primeiro harmônico $a_{2n}(t)/R(t)$ (curva contínua). Essas curvas estão associadas aos padrões fracamente não lineares ilustrados na Fig. 10 para valores crescentes do número de Boussinesq $Bq = 0, 15, 30$.

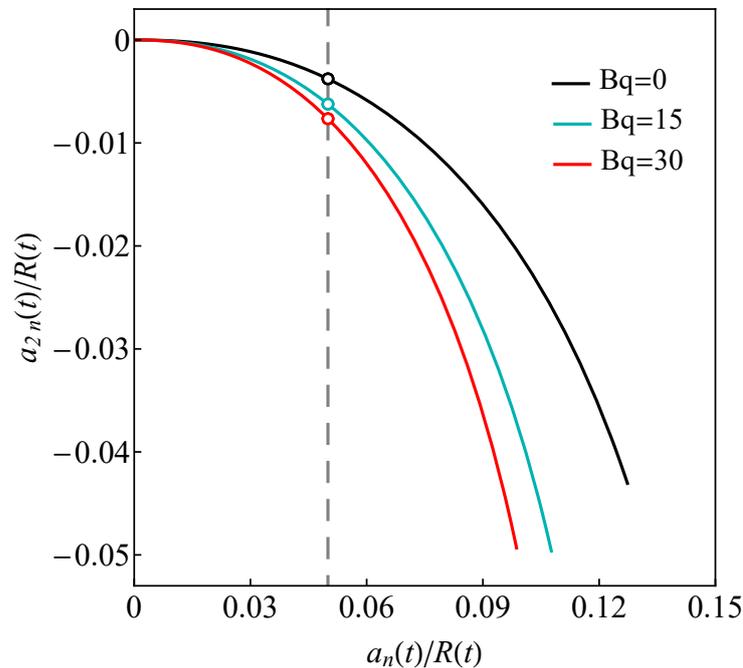


Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

discussão da Fig. 10. Contudo, examinando a Fig. 11 não é fácil concluir que quando $Bq > 0$, os dedos gerados tornam-se mais bifurcados que aqueles com $Bq = 0$, como visto nos padrões da Fig. 10. Ao invés disso, vemos na Fig. 11 uma tendência para as curvas crescerem até tempos maiores quando maiores valores de Bq são considerados, com a razão entre as amplitudes do primeiro harmônico a_{2n} e as do fundamental a_n sem apresentar mudança significativa.

O aumento na bifurcação dos dedos quando efeitos de reologia de interface são mais intensos pode ser quantitativamente verificado na Fig. 12. Nela é ilustrado um gráfico paramétrico expressando o comportamento de $a_{2n}(t)/R(t)$ em relação a $a_n(t)/R(t)$ a medida que o tempo avança no intervalo $0 \leq t \leq t_f$ para as situações de crescimento dos padrões mostradas na Fig. 10. Esse tipo particular de gráfico (para o qual o tempo t é o parâmetro) é útil para comparar as morfologias dos padrões para situações envolvendo diferentes valores de Bq , uma vez que $a_n(t)/R(t)$ é associado com o tamanho médio e a simetria geral das n estruturas em forma de dedos, enquanto $a_{2n}(t)/R(t)$ está ligado ao formato específico da ponta dos dedos (se elas são largas, bifurcadas, estreitas ou mais pontudas). Examinando a Fig. 12, fica evidente que à medida que $a_n(t)/R(t)$ aumenta, $a_{2n}(t)/R(t)$ tende a se tornar mais e mais negativo, favorecendo o alargamento e a bifurcação dos dedos. Ao examinar a

Figura 12 – Comportamento de $a_{2n}(t)/R(t)$ em relação a $a_n(t)/R(t)$ para a evolução dos padrões mostrados na Fig. 10 para diferentes valores do número de Boussinesq: $Bq = 0, 15, 30$. A linha vertical tracejada é desenhada para $a_n(t)/R(t) = 0.05$.



Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

Fig. 12, é possível notar também que, para um dado valor de $a_n(t)/R(t)$, o valor correspondente de $a_{2n}(t)/R(t)$ é mais negativo para um Bq maior. Isso pode ser facilmente identificado na Fig. 12, por exemplo, seguindo os pontos de interseção (círculos abertos) da reta tracejada vertical $a_n(t)/R(t) = 0.05$ com as curvas para diferentes valores de Bq . Essas observações dão suporte às nossas conclusões extraídas da Fig. 10, indicando que os efeitos de reologia de interface atrasam a ocorrência de eventos de bifurcação, porém quando eles se apresentam, são mais intensos para valores maiores do número de Boussinesq Bq .

Apesar da relevância das predições fracamente não lineares extraídas da análise das Figs. 10-12, o cenário contemplado em tais figuras é de certo modo idealizado, pois apenas dois modos particulares estão presentes (fundamental n e primeiro harmônico $2n$) e condições iniciais específicas são consideradas. Isso resulta na emergência de um padrão bastante simétrico de n estruturas em forma de dedos, para o qual a bifurcação surge como característica morfológica mais evidente.

Doravante, nosso principal objetivo é tentar verificar a robustez de nossos resultados fracamente não lineares mostrados nas Figs. 10-12, explorando circunstâncias de formação de padrões mais realistas. Para tanto, seguiremos um modelo bem sucedido originalmente proposto por Cardoso e Woods (CARDOSO; WOODS, 1995) para interfaces em evolução no estágio

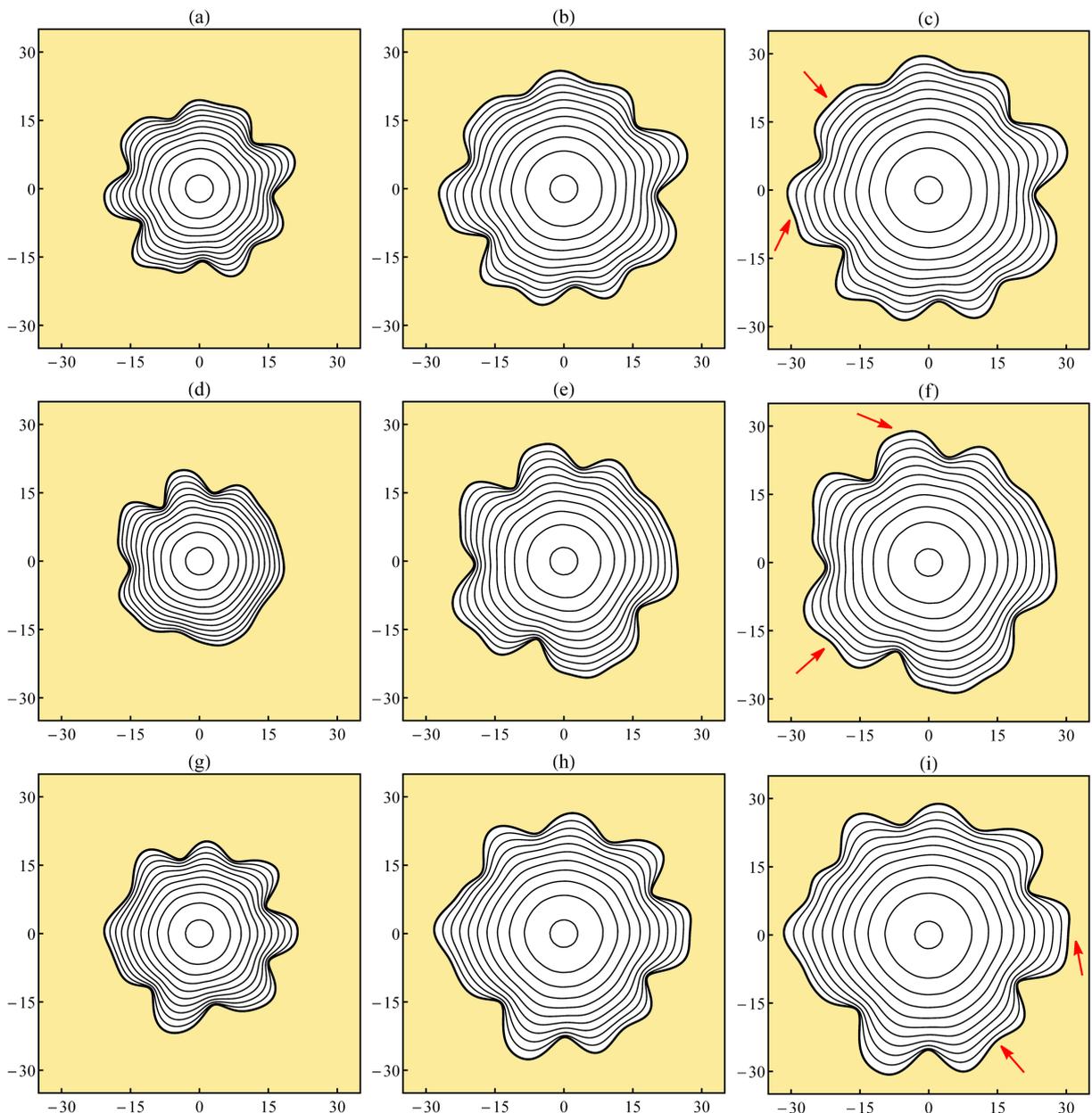
linear (seu “modelo B”) e estendido por Miranda e Widom (MIRANDA; WIDOM, 1998a) para regimes fracamente não lineares. Esse modelo está em consonância com condições típicas de experimentos reais em fluxos na célula de Hele-Shaw radial (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015) e explora o efeito de ruídos de fundo. Esses ruídos podem ser oriundos de irregularidades na espessura b entre as placas ou de inhomogeneidades nas superfícies das placas da célula de Hele-Shaw, ou de flutuações de pressão e temperatura (GINGRAS; RÁ CZ, 1989) na dinâmica da interface em movimento. Levando esses fatos em consideração, o modelo descreve o comportamento da interface que separa os fluidos assumindo a presença de um nível de ruído constante de baixa amplitude durante toda a evolução. Dessa maneira, cada modo de Fourier participante n é perturbado com uma amplitude complexa $\zeta_n(0)$ constante (no tempo), cuja fase aleatória é dependente de n e cuja magnitude constante $|\zeta(0)|$ é independente de n por hipótese. Ao passo que a interface expande radialmente, ela atinge sucessivos raios críticos $R_c(n)$ (obtidos fazendo $\lambda(n) = 0$) para cada modo n , de maneira que uma vez alcançado um $R_c(n)$ particular, a amplitude de perturbação ζ_n começa a variar no tempo. As previsões desse modelo estão em boa concordância com observações experimentais nos regimes lineares (CARDOSO; WOODS, 1995) e fracamente não lineares (MIRANDA; WIDOM, 1998a).

Então, conforme o modelo acima, a medida que o tempo avança, o raio $\mathcal{R}(t) = R(t) + \zeta(t)$ (veja Eq. (2.24) e (2.25)) também avança, o raio não perturbado $R(t)$ atinge o valor $R_c(n)$ para alguns modos. Uma vez atingido o raio crítico $R_c(n)$, o modo n “acorda” e a amplitude de perturbação ζ_n começa a variar no tempo segundo a Eq. (2.33). Os modos mais relevantes para a dinâmica da interface dependerão da escolha dos parâmetros envolvidos.

Em todos os padrões de interface mostrados de agora em diante nesta dissertação, nós não nos restringiremos a incluir apenas dois modos de Fourier, mas consideraremos a participação de todos os modos que estão dentro da banda de instabilidade linear no tempo $t = t_f$, isto é, os modos n_j tais que $\lambda(n_j) > 0$ quando $t = t_f$. A menos que seja dito o contrário, bem como na Fig. 10, no restante desta dissertação continuaremos a considerar o conjunto de parâmetros adimensionais $Ca = 150$, $A = 1$, $R_0 = 3$, os quais estão em linha com valores comumente usados em muitos experimentos de célula de Hele-Shaw radial (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; LI et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015). Além disso, nas Fig. 13 e Fig. 14 tomamos a amplitude de ruído como $|\zeta_n(0)| = R_0/750$.

Sob essas circunstâncias, consideramos toda a faixa $1 \leq n \leq 25$ de modos de Fourier

Figura 13 – Evolução temporal dos padrões de interface fracamente não lineares gerados resolvendo Eq. (2.33) para $1 \leq n \leq 25$, $0 \leq t \leq t_f$ e intervalos de tempo iguais $\Delta t = t_f/10$. Os padrões são obtidos para $B_q = 0$ [(a), (d), (g)], $B_q = 15$ [(b), (e), (h)] e $B_q = 30$ [(c), (f), (i)]. Além disso, os valores de t_f são (a) 1076, (b) 1867, (c) 2423, (d) 983, (e) 1726, (f) 2210, (g) 1144, (h) 1958 e (i) 2461. Três conjuntos diferentes de fases aleatórias são usados: conjunto I para [(a)–(c)], conjunto II para [(d)–(f)] e conjunto III para [(g)–(i)]. As ocorrências mais proeminentes de eventos de bifurcação e de alargamento das pontas dos dedos em (c), (f) e (i) para o valor maior de número de Boussinesq ($B_q = 30$) são indicadas por pequenas setas. Aqui $A = 1$, $Ca = 150$ e $R_0 = 3$.



Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

participantes. Vale lembrar que o modo $n = 0$ é escrito em termos dos outros modos por meio da Eq. (3.2). Apesar de ilustrarmos nossos principais resultados focando em um conjunto representativo de parâmetros, a reprodutibilidade desses resultados é testada gerando-os com o uso de condições iniciais distintas, em particular mudando as fases aleatórias atribuídas a

cada modo (GINGRAS; RÁ CZ, 1989; CARDOSO; WOODS, 1995; MIRANDA; WIDOM, 1998a). Com isso, podemos diretamente verificar a robustez de nossos resultados fracamente não lineares se tais condições iniciais são modificadas.

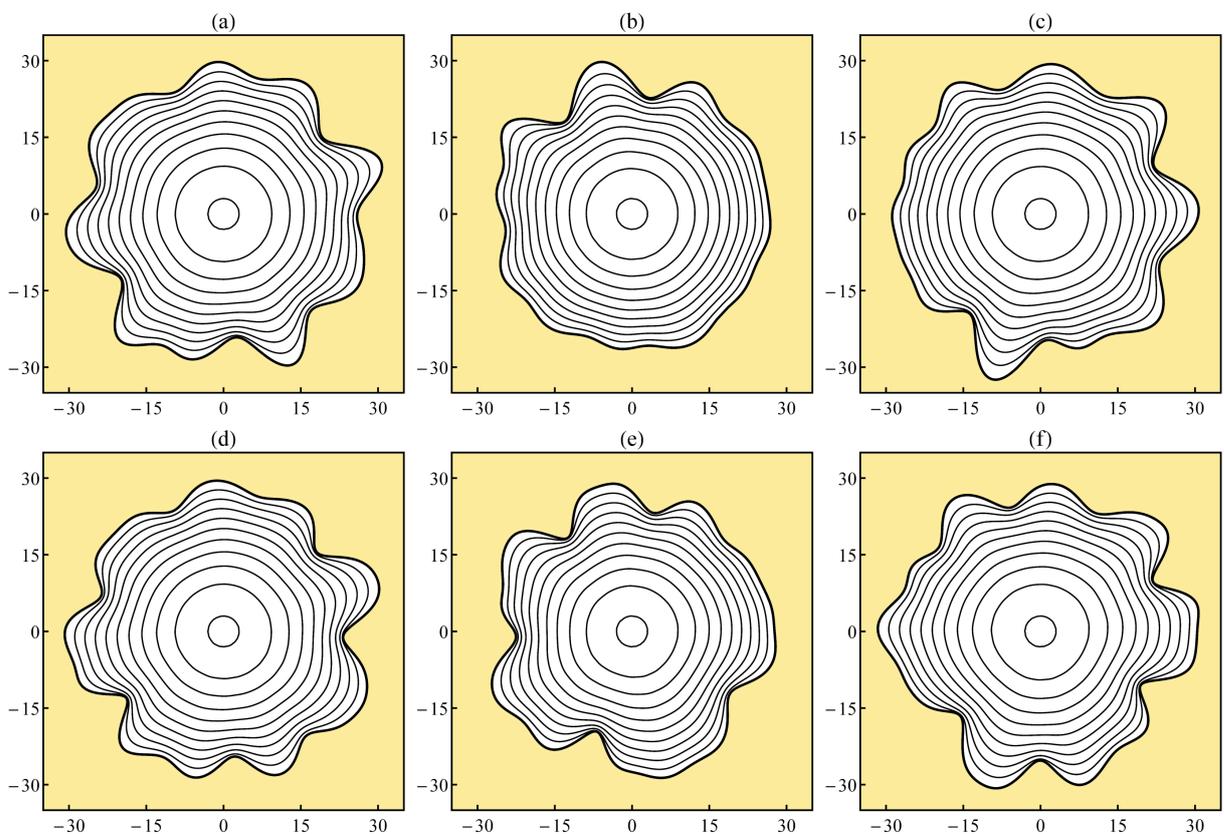
Tendo em mente as importantes informações dadas nos parágrafos anteriores, na Fig. 13 nós ilustramos as evoluções das interfaces de segunda ordem, quando efeitos de reologia de interface são desprezados e quando são considerados. Eles são desprezados nos padrões (a), (d) e (g) da Fig. 13, uma vez que $B_q = 0$ para esses padrões. Já nos padrões (b), (e) e (h) da Fig. 13 temos $B_q = 15$ e nos padrões (c), (f) e (i) da Fig. 13 temos $B_q = 30$. Obviamente, para $B_q = 15$ e $B_q = 30$, os efeitos de reologia de interface são considerados. A fim de melhor amparar nossos resultados teóricos, examinamos três conjuntos de fases aleatórias: um primeiro conjunto I, para os padrões de (a)-(c); um segundo conjunto II, de (d)-(f); por fim, um terceiro conjunto III, de (g)-(i). Vale salientar que os padrões representativos apresentados na Fig. 13 foram selecionados de um grupo de diferentes conjuntos de fases aleatórias. Enfatizamos que para todos os conjuntos de fases testados as características morfológicas gerais do dedos resultantes são similares a essas apresentadas pelos exemplos representativos mostrados na Fig. 13. Os valores dos tempos finais t_f para os padrões gerados na Fig. 13 são: (a) 1076, (b) 1867, (c) 2423, (d) 983, (e) 1726, (f) 2210, (g) 1144, (h) 1958 e (i) 2461. Note que para cada fase considerada os valores de t_f aumentam à medida que B_q se torna maior. Como já foi comentado, isso é uma consequência do efeito linearmente estabilizante induzido pelos efeitos de reologia de interface (LI; MANIKANTAN, 2021), o qual tende a retardar o crescimento dos padrões.

Examinando as várias estruturas mostradas na Fig. 13, nós observamos a formação típica de padrões de dedos viscosos nos quais sete ou oito dedos principais de vários tamanhos crescem. É possível verificar que para todos os três conjuntos de fases considerados, alguns dos dedos tendem a ficar consideravelmente mais largos e mais achatados em suas pontas à medida que o tempo avança. Em particular, é possível notar que alguns dos dedos de ponta achatada começam a se dividir por meio do mecanismo de bifurcação. Isso pode ser visto focando nos dedos indicados por pequenas setas nas Figs. 13(c), 13(f) e 13(i)

Fica claro também que os fenômenos de alargamento e de bifurcação das pontas dos dedos são bastante favorecidos por valores maiores do número de Boussinesq B_q . Como previsto pela situação simplificada discutida na Fig. 10, na Fig. 13 nós também identificamos a formação de eventos de alargamento e bifurcação das pontas dos dedos induzidos pela ação dos efeitos de reologia de interface. Contudo, diferentemente do que aconteceu na Fig. 10, onde apenas dois

modos de Fourier predeterminados interagem na ausência de qualquer ruído, na Fig. 13, eventos de alargamento e bifurcação continuam a ser observados, porém sob circunstâncias muito mais realistas, nas quais há a presença e interação não linear de todos os modos instáveis presentes, bem como a ação de ruído aleatório. Nossos resultados de modos acoplados de segunda ordem na Fig. 13 revelam que tensões reológicas de interface possuem um papel duplo em relação ao crescimento da interface em fluxos de célula de Hele-Shaw radial: se em ordem linear essas tensões atuam de modo a diminuir o crescimento geral dos padrões, no estágio fracamente não linear elas operam em favor da ocorrência do alargamento e da bifurcação das pontas dos dedos.

Figura 14 – Evolução temporal dos padrões de interface em ordem linear [(a)–(c)] e fracamente não linear [(d)–(f)] para $1 \leq n \leq 25$, $0 \leq t \leq t_f$ e iguais intervalos de tempo $\Delta t = t_f/10$. Os padrões são obtidos para $Bq = 30$. Além disso, os valores de t_f são (a) 2462, (b) 2199, (c) 2435, (d) 2423, (e) 2210 e (f) 2461. Os conjuntos de fases utilizados aqui são iguais àqueles na Fig. 13: conjunto I para (a) e (d), conjunto II para (b) e (e) e conjunto III para (c) e (f). Os demais parâmetros físicos são os mesmos empregados na Fig. 13. Comparando as estruturas lineares [(a)–(c)] com as fracamente não lineares correspondentes [(d)–(f)], é evidente que os dedos não lineares são tipicamente mais largos, tendo uma maior tendência a se dividirem em suas pontas devido à ação das tensões reológicas de interface.



Fonte: (CONRADO; DIAS; MIRANDA, 2023)

Concluimos nossa discussão demonstrando a importância de desenvolver uma análise fra-

camente não linear do sistema a fim de prever e extrair informações úteis sobre o impacto dos efeitos da reologia de interface na morfologia das estruturas de dedos viscosos, em particular na ocorrência de alargamento, achatamento e bifurcação. A Fig. 14 compara a evolução temporal linear [(a)-(c)] e a fracamente não linear [(d)-(f)] dos padrões de dedos viscosos para o caso de maior valor de número de Boussinesq ($Bq = 30$) utilizado na Fig. 13. Na Fig. 14, todos os parâmetros físicos e fases aleatórias são idênticos àqueles usados na Fig. 14. Mais especificamente, na Fig. 14, o conjunto I de fases aleatórias é usado em (a) e (d), o conjunto II em (b) e (e), enquanto o conjunto III é empregado em (c) e (f). Para cada conjunto de fases aleatórias, duas interfaces resultantes (linear e fracamente não linear) são plotadas uma abaixo da outra para facilitar a comparação entre os padrões obtidos usando as abordagens linear e fracamente não linear. Ademais, os valores de tempo final t_f na Fig. 14 são: (a) 2462, (b) 2199, (c) 2435, (d) 2423, (e) 2210 e (f) 2461.

Examinando os padrões lineares mostrados nas Fig. 14[(a)-(c)], observa-se que apesar do fato do maior número de Boussinesq usado na Fig. 13 ter sido utilizado ($Bq = 30$), o alargamento dos dedos e a bifurcação de suas pontas não são mostrados claramente. De fato, em que pese a ação dos efeitos de reologia de interface, a maioria dos dedos gerados a partir da teoria puramente linear são comumente estreitos e pontudos. Por outro lado, observando os padrões fracamente não lineares correspondentes apresentados nas Figs. 14[(d)-(f)], é possível ver que as evoluções não lineares levam à formação de dedos mais largos, cujas pontas se tornam mais achatadas com o passar do tempo. Esses dedos fracamente não lineares se alargam e alguns deles começam a se dividir, bifurcando em suas pontas. Essas observações indicam que a teoria puramente linear não é capaz de descrever apropriadamente os fenômenos basicamente intrinsecamente não lineares de alargamento e bifurcação envolvidos no processo de formação de padrões na presença de efeitos de reologia de interface. Todos esses resultados reforçam a necessidade e importância do desenvolvimento de uma teoria fracamente não linear de segunda ordem para esse sistema físico.

4 CONCLUSÕES

Nesta dissertação de mestrado, investigamos os efeitos da reologia de interface na morfologia das estruturas em forma de dedos que surgem na célula de Hele-Shaw radial, durante os estágios iniciais não lineares da dinâmica. Para enfrentar esse problema não linear de formação de padrões, nós usamos o modelo de Boussinesq-Scriven e calculamos uma condição de contorno de diferença de pressão de Young-Laplace generalizada na célula de Hele-Shaw radial, levando em consideração os efeitos das tensões reológicas de interface. Nosso cálculo de tal importante condição de contorno generaliza uma versão anterior originalmente calculada em (LI; MANIKANTAN, 2021) (a Eq. (10) deles), a qual assume que o vetor normal à interface fluido-fluido aponta apenas ao longo da direção radial e que as componentes radiais das velocidades dos fluidos eram contínuas na interface. Diferentemente do que foi feito em (LI; MANIKANTAN, 2021), consideramos que o vetor unitário normal à interface perturbada aponta ao longo de uma direção arbitrária, isto é, possui ambas as componentes radial e azimutal. Nesse cenário, consideramos uma configuração de escoamento um pouco mais geral que aquela considerada em (LI; MANIKANTAN, 2021). Isso foi feito expressando a velocidade do fluido bidimensional que descreve a interface aproximadamente como a média das velocidades dos fluidos interno e externo, calculadas na interface.

De posse da condição de contorno de diferença de pressão generalizada mencionada acima, realizamos uma segunda extensão do trabalho de Li e Manikantan: em (LI; MANIKANTAN, 2021), eles empregaram uma análise puramente linear do problema, focando na estabilidade da interface fluido-fluido para pequenas perturbações. Ao contrário disso, nesta dissertação, nós fizemos uma abordagem perturbativa, de segunda ordem e concentramos nossa atenção em examinar como os efeitos de reologia de interface influenciam a morfologia e a dinâmica não linear inicial dos padrões emergentes. Esse foi um passo importante, uma vez que é necessário ir além da análise linear (primeira ordem) para capturar apropriadamente os aspectos morfológicos mais importantes, intrinsecamente não lineares dos padrões de formação de dedos viscosos em geometria radial. Nesse contexto, utilizando a lei de Darcy, calculamos uma equação diferencial, não linear, de modos acoplados que descreve a evolução temporal das amplitudes de perturbação da interface até segunda ordem. Nossos resultados fracamente não lineares mostram que as tensões reológicas de interface exercem um duplo papel na evolução da interface. Por um lado, essas tensões tendem a impedir o crescimento geral da interface

e atrasar a formação de perturbações de interface. Por outro lado, também encontramos que aumentando os efeitos de reologia de interface, favorecemos o fenômeno de alargamento dos dedos, aumentando a ocorrência e intensidade dos eventos icônicos de bifurcação de dedos na célula de Hele-Shaw radial.

Apesar do progresso alcançado nesta dissertação e em (LI; MANIKANTAN, 2021), muitos desafios ainda precisam ser enfrentados. Uma primeira melhoria teórica para o futuro seria provavelmente incluir efeitos de gradientes de tensão superficial, as tensões de Marangoni. Outro possível refinamento teórico seria analisar uma interface ainda mais complexa e explorar a influência de efeitos de viscosidades superficiais variáveis (não newtonianas) no comportamento da formação de padrões não lineares do sistema. Um avanço adicional e certamente bem vindo seria o desenvolvimento de simulações numéricas que poderiam permitir checar as previsões lineares e não lineares apresentadas aqui e em (LI; MANIKANTAN, 2021), bem como desvendar comportamentos de formação de padrões ainda inexplorados em estágios completamente não lineares da dinâmica do sistema.

REFERÊNCIAS

- AL-HOUSSEINY, T. T.; STONE, H. A. Controlling viscous fingering in tapered hele-shaw cells. *Physics of Fluids*, v. 25, n. 9, p. 092102, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4819317>>.
- ALVAREZ-LACALLE, E.; CASADEMUNT, J.; ORTÍN, J. Systematic weakly nonlinear analysis of interfacial instabilities in hele-shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 1, p. 016302, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.016302>>.
- ALVAREZ-LACALLE, E.; ORTÍN, J.; CASADEMUNT, J. Low viscosity contrast fingering in a rotating hele-shaw cell. *Physics of Fluids*, v. 16, n. 4, p. 908–924, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1644149>>.
- ALVAREZ-LACALLE, E.; PAUNÉ, E.; CASADEMUNT, J.; ORTÍN, J. Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering. *Physical Review E*, APS, v. 68, n. 2, p. 026308, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.026308>>.
- ANJOS, P. H.; LI, S. Weakly nonlinear analysis of the saffman-taylor problem in a radially spreading fluid annulus. *Physical Review Fluids*, APS, v. 5, n. 5, p. 054002, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.054002>>.
- ANJOS, P. H. A.; ZHAO, M.; LOWENGRUB, J.; LI, S. *Electrically-controlled self-similar evolution of viscous fingering patterns in radial Hele-Shaw flows*. arXiv, 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2111.03102>>.
- ANJOS, P. H. A.; ZHAO, M.; LOWENGRUB, J.; LI, S. Electrically controlled self-similar evolution of viscous fingering patterns. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 7, p. 053903, May 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.7.053903>>.
- ARUN, R.; DAWSON, S. T. M.; SCHMID, P. J.; LASKARI, A.; MCKEON, B. J. Control of instability by injection rate oscillations in a radial hele-shaw cell. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 5, p. 123902, Dec 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.123902>>.
- BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967.
- BEN-JACOB, E. From snowflake formation to growth of bacterial colonies. *Contemporary Physics*, Taylor Francis, v. 34, n. 5, p. 247–273, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00107519308222085>>.
- BÉNARD, H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Gen. Sci. Pure Appl.*, v. 11, p. 1261–1271, 1900.
- BHAMLA, M. S.; GIACOMIN, C. E.; BALEMANS, C.; FULLER, G. G. Influence of interfacial rheology on drainage from curved surfaces. *Soft Matter*, The Royal Society of Chemistry, v. 10, p. 6917–6925, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C3SM52934G>>.
- BINKS, B. P. Particles as surfactants—similarities and differences. *Current opinion in colloid & interface science*, Elsevier, v. 7, n. 1-2, p. 21–41, 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S1359-0294\(02\)00008-0](https://doi.org/10.1016/S1359-0294(02)00008-0)>.

- BISCHOFBERGER, I.; RAMACHANDRAN, R.; NAGEL, S. R. An island of stability in a sea of fingers: emergent global features of the viscous-flow instability. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 11, n. 37, p. 7428–7432, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1039/C5SM00943J>>.
- BLOCK, M. J. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 178, n. 4534, p. 650–651, 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/178650a0>>.
- BONGRAND, G.; TSAI, P. A. Manipulation of viscous fingering in a radially tapered cell geometry. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 97, p. 061101, Jun 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.061101>>.
- BOUSSINESQ, M. Sur l'existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu. *Ann. Chim. Phys.*, v. 29, p. 349–357, 1913.
- BRUSH, L.; SEKERKA, R.; MCFADDEN, G. A numerical and analytical study of nonlinear bifurcations associated with the morphological stability of two-dimensional single crystals. *Journal of crystal growth*, Elsevier, v. 100, n. 1-2, p. 89–108, 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-0248\(90\)90612-O](https://doi.org/10.1016/0022-0248(90)90612-O)>.
- BUZZA, D.; LU, C.-Y.; CATES, M. Linear shear rheology of incompressible foams. *Journal de Physique II*, EDP Sciences, v. 5, n. 1, p. 37–52, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jp2:1995112>>.
- CARDOSO, S. S. S.; WOODS, A. W. The formation of drops through viscous instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 289, p. 351–378, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112095001364>>.
- CHANG, C.-C.; NOWBAHAR, A.; MANSARD, V.; WILLIAMS, I.; MECCA, J.; SCHMITT, A. K.; KALANTAR, T. H.; KUO, T.-C.; SQUIRES, T. M. Interfacial rheology and heterogeneity of aging asphaltene layers at the water–oil interface. *American Chemical Society*, v. 34, May 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.8b00176>>.
- CHANG, K. *Snowflakes as You've Never Seen Them Before*. Disponível em: <<https://www.nytimes.com/2021/03/10/science/snowflakes-photos-nathan-myhrvold.html>>.
- CHEN, C.-Y.; HUANG, Y.-S.; MIRANDA, J. A. Diffuse-interface approach to rotating hele-shaw flows. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 84, p. 046302, Oct 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.046302>>.
- CHEN, C.-Y.; MEIBURG, E. Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. part 1. the homogeneous case. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 371, p. 233–268, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112098002195>>.
- CHEN, J.-D. Growth of radial viscous fingers in a hele-shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 201, p. 223–242, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112089000911>>.
- CHEVALIER, C.; AMAR, M. B.; BONN, D.; LINDNER, A. Inertial effects on saffman–taylor viscous fingering. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 552, p. 83–97, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112005008529>>.

- CONRADO, H.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Impact of interfacial rheology on finger tip splitting. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 107, p. 015103, Jan 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.107.015103>>.
- COUTINHO, Í. M.; ROCHA, F. M.; MIRANDA, J. A. Viscous normal stresses and fingertip tripling in radial hele-shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 104, n. 4, p. 045106, 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.104.045106>>.
- DIAS, E. O.; ALVAREZ-LACALLE, E.; CARVALHO, M. S.; MIRANDA, J. A. Minimization of viscous fluid fingering: A variational scheme for optimal flow rates. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 144502, Oct 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.144502>>.
- DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows. *Physical review E*, APS, v. 83, n. 6, p. 066312, 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.066312>>.
- DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 83, p. 066312, Jun 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.066312>>.
- DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Wavelength selection in hele-shaw flows: A maximum-amplitude criterion. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 88, p. 013016, Jul 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.013016>>.
- DINSMORE, A. D.; HSU, M. F.; NIKOLAIDES, M. G.; MARQUEZ, M.; BAUSCH, A. R.; WEITZ, D. A. Colloidosomes: Selectively permeable capsules composed of colloidal particles. *Science*, v. 298, n. 5595, p. 1006–1009, 2002. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1074868>>.
- EDWARDS, D. A.; BRENNER, H.; WASAN, D. T. *Interfacial Transport Processes and Rheology*. Elsevier, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/C2009-0-26916-9>>.
- ESLAMI, A.; TAGHAVI, S. Viscous fingering regimes in elasto-visco-plastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 243, p. 79–94, 2017. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025716301860>>.
- FLAMENT, C.; PACITTO, G.; BACRI, J.-C.; DRIKIS, I.; CEBERS, A. Viscous fingering in a magnetic fluid. i. radial hele-shaw flow. *Physics of Fluids*, v. 10, n. 10, p. 2464–2472, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.869765>>.
- FONTANA, J. a. V.; GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Development of tip-splitting and side-branching patterns in elastic fingering. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 93, p. 033126, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.033126>>.
- FULLER, G. G.; VERMANT, J. Complex fluid-fluid interfaces: Rheology and structure. *Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering*, v. 3, n. 1, p. 519–543, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-061010-114202>>.
- GAO, T.; MIRZADEH, M.; BAI, P.; CONFORTI, K. M.; BAZANT, M. Z. Active control of viscous fingering using electric fields. *Nature Communications*, v. 10, Sep 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41467-019-11939-7>>.

- GEORGIEVA, D.; SCHMITT, V.; LEAL-CALDERON, F.; LANGEVIN, D. On the possible role of surface elasticity in emulsion stability. *Langmuir*, ACS Publications, v. 25, n. 10, p. 5565–5573, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/la804240e>>.
- GINGRAS, M. J. P.; RÁ CZ, Z. Noise and the linear stability analysis of viscous fingering. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 40, p. 5960–5965, Nov 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.5960>>.
- GUNDERMANN, N.; POPPER, D.; LICHTATOWICH, T. Biology and life cycle of *siganus vermiculatus* (siganidae, pisces). University of Hawaii Press, 1983. Disponível em: <<https://scholarspace.manoa.hawaii.edu/items/0fb9539d-86bb-4e9f-ada0-db431dfc4fe2/full>>.
- GUO, H.; HONG, D. C.; KURTZE, D. A. Surface-tension-driven nonlinear instability in viscous fingers. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 69, p. 1520–1523, Sep 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.1520>>.
- GUO, H.; HONG, D. C.; KURTZE, D. A. Dynamics of viscous fingers and threshold instability. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 51, p. 4469–4478, May 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.51.4469>>.
- HAAN, S. W. Weakly nonlinear hydrodynamic instabilities in inertial fusion. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, American Institute of Physics, v. 3, n. 8, p. 2349–2355, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.859603>>.
- HADAMARD, J. Mouvement permanent lent d'une sphere liquid et visqueuse dans un liquide visqueux. *CR Hebd. Seances Acad. Sci. Paris*, v. 152, p. 1735–1738, 1911.
- HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.19.010187.001415>>.
- JACKSON, D. P.; GOLDSTEIN, R. E.; CEBERS, A. O. Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 50, p. 298–307, Jul 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.50.298>>.
- JACKSON, S. J.; STEVENS, D.; GIDDINGS, D.; POWER, H. Dynamic-wetting effects in finite-mobility-ratio hele-shaw flow. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 92, p. 023021, Aug 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.023021>>.
- JAENSSON, N.; VERMANT, J. Tensiometry and rheology of complex interfaces. *Current opinion in colloid & interface science*, Elsevier, v. 37, p. 136–150, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.09.005>>.
- KIM, H.; FUNADA, T.; JOSEPH, D. D.; HOMSY, G. M. Viscous potential flow analysis of radial fingering in a hele-shaw cell. *Physics of fluids*, American Institute of Physics, v. 21, n. 7, p. 074106, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3184574>>.
- KIM, J.; XU, F.; LEE, S. Formation and destabilization of the particle band on the fluid-fluid interface. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 118, p. 074501, Feb 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.074501>>.
- KONDIC, L.; SHELLEY, M. J.; PALFFY-MUHORAY, P. Non-newtonian hele-shaw flow and the saffman-taylor instability. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 1433–1436, Feb 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.1433>>.

- LAJEUNESSE, E.; COUDER, Y. On the tip-splitting instability of viscous fingers. *Journal of fluid mechanics*, Cambridge University Press, v. 419, p. 125–149, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112000001324>>.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, Volume 6*. Pergamon Press, 1959. v. 6. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/C2013-0-03799-1>>.
- LANGEVIN, D. Rheology of adsorbed surfactant monolayers at fluid surfaces. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 46, n. 1, p. 47–65, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141403>>.
- LANGLOIS, W. E.; DEVILLE, M. O. *Slow viscous flow, 2nd Edition*. Springer, 2014. v. 173436. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-319-03835-3>>.
- LI, J.; MANIKANTAN, H. Influence of interfacial rheology on viscous fingering. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 6, p. 074001, Jul 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.6.074001>>.
- LI, S.; LOWENGRUB, J. S.; FONTANA, J.; PALFFY-MUHORAY, P. Control of viscous fingering patterns in a radial hele-shaw cell. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 17, p. 174501, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.174501>>.
- LIN, G.; FROSTAD, J. M.; FULLER, G. G. Influence of interfacial elasticity on liquid entrainment in thin foam films. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 3, p. 114001, Nov 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.3.114001>>.
- LUO, R.; CHEN, Y.; LEE, S. Particle-induced viscous fingering: Review and outlook. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 3, p. 110502, Nov 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.3.110502>>.
- MANIKANTAN, H.; SQUIRES, T. M. Surfactant dynamics: hidden variables controlling fluid flows. *Journal of fluid mechanics*, Cambridge University Press, v. 892, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/jfm.2020.170>>.
- MARANGONI, C. *Sull'espansione delle gocce d'un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido*. Fratelli Fusi, 1865. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZoxltwAACAAJ>>.
- MCLEAN, J.; SAFFMAN, P. The effect of surface tension on the shape of fingers in a hele shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 102, p. 455–469, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112081002735>>.
- MIRANDA, J. A.; ALVAREZ-LACALLE, E. Viscosity contrast effects on fingering formation in rotating hele-shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 72, n. 2, p. 026306, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026306>>.
- MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Radial fingering in a hele-shaw cell: a weakly nonlinear analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 120, n. 3-4, p. 315–328, 1998. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(98\)00097-9](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00097-9)>.
- MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Weakly nonlinear investigation of the saffman–taylor problem in a rectangular hele–shaw cell. *International Journal of Modern Physics B*, v. 12, n. 09, p. 931–949, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217979298000521>>.

- MORROW, L. C.; MORONEY, T. J.; MCCUE, S. W. Numerical investigation of controlling interfacial instabilities in non-standard hele-shaw configurations. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 877, p. 1063–1097, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.623>>.
- NAGATSU, Y. Viscous fingering phenomena with chemical reactions. *Current Physical Chemistry*, v. 5, n. 1, p. 52–63, 2015. ISSN 1877-9468/1877-9476. Disponível em: <<https://doi.org/10.2174/1877946805999150818104141>>.
- NOGUCHI, H.; GOMPPER, G. Shape transitions of fluid vesicles and red blood cells in capillary flows. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 102, n. 40, p. 14159–14164, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.0504243102>>.
- OLIVEIRA, R. M.; COUTINHO, Í. M.; ANJOS, P. H.; MIRANDA, J. A. Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields. *Physical Review E*, APS, v. 104, n. 6, p. 065113, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.065113>>.
- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field. *Physical Review Fluids*, APS, v. 5, n. 12, p. 124003, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.124003>>.
- PANTON, R. L. *Incompressible Flow, 4th Edition*. NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. isbn, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9781118713075>>.
- PARISIO, F.; MORAES, F.; MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Saffman-taylor problem on a sphere. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 63, p. 036307, Feb 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.036307>>.
- PARK, C.-W.; HOMSY, G. Two-phase displacement in hele shaw cells: theory. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 139, p. 291–308, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112084000367>>.
- PATERSON, L. Radial fingering in a hele shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 113, p. 513–529, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112081003613>>.
- PEARSON, J. R. A. On convection cells induced by surface tension. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 4, n. 5, p. 489–500, 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112058000616>>.
- PIHLER-PUZOVIĆ, D.; ILLIEN, P.; HEIL, M.; JUEL, A. Suppression of complex fingerlike patterns at the interface between air and a viscous fluid by elastic membranes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 108, p. 074502, Feb 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.074502>>.
- PODGORSKI, T.; SOSTARECZ, M. C.; ZORMAN, S.; BELMONTE, A. Fingering instabilities of a reactive micellar interface. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 76, p. 016202, Jul 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.76.016202>>.
- RAUSEO, S. N.; BARNES, P. D.; MAHER, J. V. Development of radial fingering patterns. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 35, p. 1245–1251, Feb 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.35.1245>>.

RAYLEIGH, L. Lix. on convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 32, n. 192, p. 529–546, 1916. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786441608635602>>.

REINELT, D. Interface conditions for two-phase displacement in hele-shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 183, p. 219–234, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112087002611>>.

RUYER-QUIL, C. Inertial corrections to the darcy law in a hele-shaw cell. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, v. 329, n. 5, p. 337–342, 2001. ISSN 1620-7742. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1620774201013095>>.

RYBCZYNSKI, W. Über die fortschreitende bewegung einer flussigen kugel in einem zahren medium. *Bull. Acad. Sci. Cracovie A*, v. 1, p. 40–46, 1911.

SACHAN, A. K.; CHOI, S. Q.; KIM, K. H.; TANG, Q.; HWANG, L.; LEE, K. Y. C.; SQUIRES, T. M.; ZASADZINSKI, J. A. Interfacial rheology of coexisting solid and fluid monolayers. *Soft Matter*, The Royal Society of Chemistry, v. 13, p. 1481–1492, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C6SM02797K>>.

SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 245, n. 1242, p. 312–329, 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0085>>.

SCRIVEN, L. Dynamics of a fluid interface equation of motion for newtonian surface fluids. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 98–108, 1960. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0009-2509\(60\)87003-0](https://doi.org/10.1016/0009-2509(60)87003-0)>.

SCRIVEN, L.; STERNLING, C. The marangoni effects. *Nature*, Springer, v. 187, n. 4733, p. 186–188, 1959. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/aic.690050421>>.

SHARMA, V.; NAND, S.; PRAMANIK, S.; CHEN, C.-Y.; MISHRA, M. Control of radial miscible viscous fingering. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 884, p. A16, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.932>>.

SHENG, J. J. *Modern chemical enhanced oil recovery: theory and practice*. Gulf Professional Publishing, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/C2009-0-20241-8>>.

SLATTERY, J.; SAGIS, L.; OH, E. *Interfacial Transport Phenomena (Second edition)*. Springer, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-0-387-38442-9>>.

STEBE, K. J.; BARTHES-BIESEL, D. Marangoni effects of adsorption—desorption controlled surfactants on the leading end of an infinitely long bubble in a capillary. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 286, p. 25–48, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112095000632>>.

STOODT, T.; SLATTERY, J. Effect of the interfacial viscosities upon displacement. *AIChE journal*, Wiley Online Library, v. 30, n. 4, p. 564–568, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/aic.690300406>>.

SUZUKI, R. X.; NAGATSU, Y.; MISHRA, M.; BAN, T. Phase separation effects on a partially miscible viscous fingering dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 898, p. A11, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/jfm.2020.406>>.

THOMSON, J. Xlii. on certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor Francis, v. 10, n. 67, p. 330–333, 1855. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786445508641982>>.

TRYGGVASON, G.; AREF, H. Numerical experiments on hele shaw flow with a sharp interface. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 136, p. 1–30, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112083002037>>.

WESFREID, J. E. Henri Bénard: Thermal convection and vortex shedding. *Comptes Rendus Mécanique*, v. 345, n. 7, p. 446–466, 2017. ISSN 1631-0721. A century of fluid mechanics: 1870–1970. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072117300980>>.

ZASADZINSKI, J.; DING, J.; WARRINER, H.; BRINGEZU, F.; WARING, A. J. The physics and physiology of lung surfactants. *Current Opinion in Colloid Interface Science*, v. 6, n. 5, p. 506–513, 2001. ISSN 1359-0294. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359029401001248>>.

ZELL, Z. A.; NOWBAHAR, A.; MANSARD, V.; LEAL, L. G.; DESHMUKH, S. S.; MECCA, J. M.; TUCKER, C. J.; SQUIRES, T. M. Surface shear inviscidity of soluble surfactants. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 111, n. 10, p. 3677–3682, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.1315991111>>.

ZHAO, H.; CASADEMUNT, J.; YEUNG, C.; MAHER, J. V. Perturbing hele-shaw flow with a small gap gradient. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 45, p. 2455–2460, Feb 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.2455>>.

ZHAO, H.; MAHER, J. V. Viscous-fingering experiments with periodic boundary conditions. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 42, p. 5894–5897, Nov 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.42.5894>>.

ZHAO, M.; ANJOS, P. H.; LOWENGRUB, J.; LI, S. Pattern formation of the three-layer saffman-taylor problem in a radial hele-shaw cell. *Physical Review Fluids*, APS, v. 5, n. 12, p. 124005, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.124005>>.

APÊNDICE A – DERIVADAS ÚTEIS EM COORDENADAS POLARES

Em todas as equações que seguem, nós consideramos um vetor unitário normal à interface perturbada que pode apontar em uma direção arbitrária, tendo componentes radial e azimutal, ou seja, $\mathbf{n} = n_r \hat{\mathbf{e}}_r + n_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$:

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla_s = \hat{\mathbf{e}}_r n_\theta \left(n_\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n_r}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{\mathbf{e}}_\theta n_r \left(\frac{n_r}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - n_\theta \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \mathbf{n} = \frac{\partial n_r}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial n_\theta}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial n_r}{\partial \theta} - \frac{n_\theta}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial n_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r}{r}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{u} &= \left(n_\theta^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{n_r n_\theta}{r} u_\theta \right) \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \left(n_\theta^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{n_r n_\theta}{r} u_r \right) \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{n_r^2}{r} u_\theta - n_r n_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r^2}{r} u_r - n_r n_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{n} &= \left(n_\theta^2 \frac{\partial n_r}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial n_r}{\partial \theta} + \frac{n_r n_\theta^2}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \left(n_\theta^2 \frac{\partial n_\theta}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} - \frac{n_r^2 n_\theta}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial n_r}{\partial \theta} - \frac{n_r^2 n_\theta}{r} - n_r n_\theta \frac{\partial n_r}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r^3}{r} - n_r n_\theta \frac{\partial n_\theta}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla_s \cdot \mathbf{u} = n_\theta^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{n_r^2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r^2 u_r}{r} + \frac{1}{r} n_r n_\theta u_\theta - n_r n_\theta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (\text{A.9})$$

e

$$\nabla_s \cdot \mathbf{n} = n_\theta^2 \frac{\partial n_r}{\partial r} + \frac{n_r^2}{r} \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r}{r} - n_r n_\theta \left(\frac{\partial n_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_r}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.10})$$

Fazendo $\mathbf{u} = -\nabla \phi$, $n_r = 1$, e $n_\theta = 0$ em todas as equações acima [(A.1)-(A.10)], recuperamos as equações do apêndice A de (LI; MANIKANTAN, 2021).

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DA REOLOGIA DE INTERFACE PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DA PRESSÃO

Neste apêndice, nós derivamos a relação

$$\left\{ \nabla_s \cdot \left[\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \cdot (\nabla_s \mathbf{u})^T \right] \right\} \cdot \mathbf{n} = -2(\nabla_s \cdot \mathbf{u})\mathcal{K}, \quad (\text{B.1})$$

que surge na passagem de Eq. (2.10) para Eq. (2.11) com η_s sendo uma constante. Começamos escrevendo \mathbf{I}_s em sua representação matricial

$$\mathbf{I}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_r & n_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_\theta^2 & -n_r n_\theta \\ -n_r n_\theta & n_r^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

De Eq. (B.2), expressamos o lado esquerdo de Eq (B.1) como $(\nabla_s \cdot \mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{n}$, onde

$$\mathbf{\Gamma} = \left[\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \cdot (\nabla_s \mathbf{u})^T \right] = \begin{pmatrix} \Gamma_{rr} & \Gamma_{r\theta} \\ \Gamma_{\theta r} & \Gamma_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

com $\Gamma_{r\theta} = \Gamma_{\theta r}$. Usando Eq. (A.2), nós temos

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot \mathbf{\Gamma} &= \left[\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left(n_\theta^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - n_r n_\theta \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \\ &\times \left[\Gamma_{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \Gamma_{r\theta} (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r) + \Gamma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Para os cálculos do lado direito de Eq. (B.4) usamos as relações

$$\begin{aligned} \partial_\theta (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r) &= \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta, \\ \partial_\theta (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta) &= \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r, \\ \partial_\theta (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r) &= -\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta, \\ \partial_\theta (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta) &= -\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e $\partial_r (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = 0$, com $i, j = r, \theta$. Portanto, Eq. (B.4) torna-se

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot \mathbf{\Gamma} &= \left[n_\theta^2 \frac{\partial \Gamma_{rr}}{\partial r} + \frac{n_r n_\theta}{r} \left(2\Gamma_{r\theta} - \frac{\partial \Gamma_{rr}}{\partial \theta} \right) + \frac{n_r^2}{r} \left(\frac{\partial \Gamma_{r\theta}}{\partial \theta} + \Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta} \right) - n_r n_\theta \frac{\partial \Gamma_{r\theta}}{\partial r} \right] \mathbf{e}_r \\ &+ \left[n_\theta^2 \frac{\partial \Gamma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{n_r n_\theta}{r} \left(\Gamma_{\theta\theta} - \Gamma_{rr} - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{n_r^2}{r} \left(\frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\Gamma_{r\theta} \right) - n_r n_\theta \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

e a contração dessa equação com o vetor normal unitário \mathbf{n} pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (\nabla_s \cdot \mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{n} &= n_r n_\theta^2 \frac{\partial}{\partial r} (\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}) + n_\theta (n_\theta^2 - n_r^2) \frac{\partial \Gamma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{n_\theta n_r^2}{r} \left[4\Gamma_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}) \right] \\ &+ \frac{n_r (n_r^2 - n_\theta^2)}{r} \left[(\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \Gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Note que a expressão acima depende apenas de $\Gamma_{r\theta}$ e da diferença $\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}$. Agora, calculando as componentes de Γ usando o apêndice A, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr} &= (\nabla_s \mathbf{u})_{rr} (\mathbf{I}_s)_{rr} + (\nabla_s \mathbf{u})_{r\theta} (\mathbf{I}_s)_{\theta r} + (\mathbf{I}_s)_{rr} [(\nabla_s \mathbf{u})^T]_{rr} + (\mathbf{I}_s)_{r\theta} [(\nabla_s \mathbf{u})^T]_{\theta r} \\
&= 2 \left[\left(n_\theta^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{n_r n_\theta}{r} u_\theta \right) n_\theta^2 - n_r n_\theta \left(n_\theta^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{n_r n_\theta}{r} u_r \right) \right] \\
&= 2n_\theta^2 \left[n_\theta^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + n_r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + n_r n_\theta \left(\frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] = 2n_\theta^2 (\nabla_s \cdot \mathbf{u}), \tag{B.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta} &= 2 [(\nabla_s \mathbf{u})_{\theta\theta} (\mathbf{I}_s)_{\theta\theta} + (\nabla_s \mathbf{u})_{\theta r} (\mathbf{I}_s)_{r\theta}] \\
&= 2 \left[\left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r^2}{r} u_r - n_r n_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) n_r^2 - n_r n_\theta \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{n_r^2}{r} u_\theta - n_r n_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right] \\
&= 2n_r^2 \left[n_\theta^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + n_r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + n_r n_\theta \left(\frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] = 2n_r^2 (\nabla_s \cdot \mathbf{u}), \tag{B.9}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta} &= (\nabla_s \mathbf{u})_{rr} (\mathbf{I}_s)_{r\theta} + (\nabla_s \mathbf{u})_{r\theta} (\mathbf{I}_s)_{\theta\theta} + (\mathbf{I}_s)_{rr} [(\nabla_s \mathbf{u})^T]_{r\theta} + (\mathbf{I}_s)_{r\theta} [(\nabla_s \mathbf{u})^T]_{\theta\theta} \\
&= (\mathbf{I}_s)_{r\theta} (\nabla_s \cdot \mathbf{u}) + n_r^2 \left(n_\theta^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{n_r n_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{n_r n_\theta}{r} u_r \right) + n_\theta^2 \left(\frac{n_r^2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{n_r^2}{r} u_\theta - n_r n_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\
&= -n_r n_\theta \left[(\nabla_s \cdot \mathbf{u}) + n_\theta^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + n_r^2 \left(\frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + n_r n_\theta \left(\frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] \\
&= -2n_r n_\theta (\nabla_s \cdot \mathbf{u}). \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Inspecionando Eqs. (B.8)-(B.10), observamos que

$$\Gamma_{r\theta} = \frac{n_r n_\theta}{n_r^2 - n_\theta^2} (\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}). \tag{B.11}$$

Substituindo essa relação em Eq. (B.7), nós obtemos

$$(\nabla_s \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{n} = \left[n_\theta^2 \frac{\partial n_r}{\partial r} + \frac{n_r^2}{r} \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} + \frac{n_r}{r} - n_r n_\theta \left(\frac{\partial n_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_r}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}}{n_r^2 - n_\theta^2}. \tag{B.12}$$

Para derivar a relação (B.1) de Eq. (B.12), primeiro note que usando Eqs. (B.8) e (B.9), a diferença $\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}$ em Eq. (B.12) pode ser escrita como

$$\Gamma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta} = -2(n_r^2 - n_\theta^2) (\nabla_s \cdot \mathbf{u}). \tag{B.13}$$

Além do mais, de Eq. (A.10), notamos que a expressão entre colchetes de Eq. (B.12) é igual a $\nabla_s \cdot \mathbf{n}$. Finalmente, substituindo $\nabla_s \cdot \mathbf{n}$ e Eq. (B.13) em Eq. (B.12), nós obtemos a relação (B.1),

$$(\nabla_s \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{n} = \left\{ \nabla_s \cdot \left[\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \cdot (\nabla_s \mathbf{u})^T \right] \right\} \cdot \mathbf{n} = -2(\nabla_s \cdot \mathbf{n})(\nabla_s \cdot \mathbf{u}). \tag{B.14}$$

APÊNDICE C – EXPRESSÕES PARA AS FUNÇÕES DE MODOS ACOPLADOS NÃO LINEARES

Neste apêndice, apresentamos as expressões das funções de modos acoplados não lineares de Eq. (2.28), F , F_R , F_S , G , G_S , e G_R :

$$F(n, n') = \frac{1}{s(n)} \left\{ \frac{A|n|}{2\pi R^3} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] - \frac{(A+1)|n|}{2CaR^4} \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \right\}, \quad (\text{C.1})$$

$$F_S(n, n') = \frac{|n|}{12\pi R^5 s(n)} \left[|n'| + n \text{sgn}(n') - A \left(n|n| \text{sgn}(n') - n'^2 + 1 \right) \right], \quad (\text{C.2})$$

$$F_R(n, n') = -\frac{Bq(A+1)|n|}{48\pi R^6 s(n)} \left\{ 3 + n^2[1 + \text{sgn}(nn')] - \frac{7}{2}n'^2 - \frac{5}{2}nn' \right\}, \quad (\text{C.3})$$

$$G(n, n') = \frac{1}{Rs(n)} \{ A|n|[1 - \text{sgn}(nn')] - 1 \}, \quad (\text{C.4})$$

$$G_S(n, n') = \frac{|n|}{6R^3 s(n)} \left\{ n \text{sgn}(n') + |n'| - |n| - A \left[n|n| \text{sgn}(n') - 2nn' + n'^2 - 1 \right] \right\}, \quad (\text{C.5})$$

e

$$G_R(n, n') = -\frac{Bq(A+1)|n|}{24R^4 s(n)} \left\{ n^2[1 + \text{sgn}(nn')] - 2 + 2n'^2 - 4nn' \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Note que a função sgn é igual a ± 1 de acordo com o sinal de seu argumento.