



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Alessandra Arcanjo Lisboa de Oliveira

**Caracterização do decaimento temporal de soluções fracas para as equações
tridimensionais de Navier-Stokes**

Recife

2023

Alessandra Arcanjo Lisboa de Oliveira

Caracterização do decaimento temporal de soluções fracas para as equações tridimensionais de Navier-Stokes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Felipe Wergete Cruz

Recife

2023

ALESSANDRA ARCANJO LISBOA DE OLIVEIRA

*CARACTERIZAÇÃO DO DECAIMENTO TEMPORAL DE SOLUÇÕES FRACAS PARA AS
EQUAÇÕES TRIDIMENSIONAIS DE NAVIER-STOKES*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 16/02/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (Examinador Externo)
Universidad de Tarapacá - Chile

À minha mãe, Ivone e ao meu esposo Victor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, com a sua infinita misericórdia, por ter me dado graça e saúde para enfrentar todas as dificuldades. À minha família, e em especial, a minha mãe, Ivone, por ser a minha força nos dias difíceis, pelo incentivo e apoio de sempre. Ao meu esposo, Victor, pelo apoio e carinho durante todo o tempo. À minha filha, Antonella, que ainda na barriga me ajudou a concluir esta fase. Agradeço, ao meu orientador, Felipe Wergete, pela orientação, cuidado e paciência de sempre. Agradeço a minha orientadora da graduação, Yane Lísley, por todos os ensinamentos. Cada conselho seu me ajudou no mestrado. Aos membros da banca pelas formidáveis contribuições na correção deste trabalho, professores Cilon Perusato e Marko Rojas Medar. As minhas amigas, Letianne e Yasmim por nunca me deixarem desistir e por estarem ao meu lado desde da graduação. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta dissertação é um caso particular do artigo (NICHE; PERUSATO, 2022), onde obtivemos taxas de decaimento de soluções fracas (de Leray-Hopf) para as equações de Navier-Stokes incompressíveis tridimensionais. Mais precisamente, caracterizamos a taxa de decaimento no espaço L^2 das soluções em termos do caráter de decaimento, um número associado ao dado inicial que descreve seu comportamento próximo à origem no espaço de frequências. Além disso, usamos o caráter de decaimento e o “método da divisão de Fourier” (“Fourier splitting method”), desenvolvido pela matemática argentina María Elena Schonbek, para obter limites superiores e inferiores para taxas de decaimento das soluções. Por fim, abordamos, também, o comportamento assintótico de soluções, comparando-as com as soluções da equação do calor (o problema linear associado às equações de Navier-Stokes). Além do mais, vale ressaltar que ao longo do texto demonstramos alguns resultados auxiliares tais como sobre o comportamento das soluções fracas, bem como da solução do calor.

Palavras-chaves: comportamento assintótico; equações de Navier-Stokes; taxas de decaimento.

ABSTRACT

This dissertation is a particular case of the article (NICHE; PERUSATO, 2022), where we obtained decay rates of weak solutions (Leray-Hopf) for three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. More precisely, we characterize the decay rate in the L^2 space of the solutions in terms of the decay character, a number associated with the initial data that describes their behavior near the origin in the frequency space. In addition, we use the decay character and the “Fourier division method”, developed by Argentine mathematician María Elena Schonbek, to obtain upper and lower bounds for the decay rates of the solutions. Finally, we also approach the asymptotic behavior of the solutions, comparing them with the solutions of the heat equation (the linear problem associated with the Navier-Stokes equations). In addition, it is worth mentioning that throughout the text we demonstrate some auxiliary results such as the behavior of weak solutions, as well as the solution of heat.

Keywords: asymptotic behavior; Navier-Stokes equations; decay rates.

LISTA DE SÍMBOLOS

p	Pressão;
$:=$	Igualdade válida por definição;
$u(\cdot, t)$	Velocidade de escoamento no instante t ;
u_0	Velocidade Inicial;
$\hat{u}$	Transformada de Fourier da função u ;
$e^{\Delta t}$	Operador-solução da equação do calor (semigrupo do calor);
$L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$	Denota o espaço de funções $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$, com $\operatorname{div} u = 0$;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RESULTADOS PRELIMINARES	12
2.1	ESPAÇOS L^p	12
2.2	ESPAÇOS DE SOBOLEV	15
2.3	DERIVADA FRACA	15
2.4	DEFINIÇÃO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV	15
2.5	EQUAÇÃO DO CALOR	16
2.6	TRANSFORMADA DE FOURIER	21
2.7	CARÁTER DE DECAIMENTO E CARACTERIZAÇÃO DO DECAIMENTO DA PARTE LINEAR	23
3	CARATERIZAÇÃO DO DECAIMENTO DE SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES 3D	28
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes descrevem a velocidade e a pressão de um fluido viscoso incompressível homogêneo no tempo. A circulação sanguínea, correntes marítimas, e a maior parte dos escoamentos de fluidos podem ser descritos pelo estudo dessas equações, por isto o estudo do comportamento das soluções dessas equações se torna de extrema importância. Dessa forma, este trabalho dedica-se a análise do decaimento temporal referente às soluções fracas das equações de Navier-Stokes em espaços tridimensionais, dado por:

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

com a condição inicial,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3).$$

onde, $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço das funções $u = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, sendo $\nabla u(\cdot, t) = 0$, no sentido das distribuições. Aqui, $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ representa a velocidade de escoamento do fluido no ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$ e instante t , e $p = p(x, t)$ representa a pressão em (x, t) . Nesse sentido, é natural perguntar qual a taxa de decaimento e o que ocorre com a solução quando o tempo vai para infinito. Nesta dissertação, vamos considerar que a solução $u(\cdot, t)$ de (1.1) existe para todo $t > 0$, com $n = 3$, a fim de examinar, então, o comportamento da norma $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t \rightarrow \infty$. Com base nisto, a motivação deste estudo deve-se a Jean Leray, que tem um papel fundamental no estudo equações de Navier-Stokes. Em 1934, ele provou (LERAY, 1934) a existência de soluções fracas globais para as equações de Navier-Stokes, $u(\cdot, t) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$, onde

$$u(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), H^1(\mathbb{R}^3))$$

e são fracamente contínuas em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Além disso, é tal que para $s = 0$ quase todo $s > 0$ tem-se que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + 2\mu \int_s^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Ainda, Leray propôs o problema de provar que as soluções fracas das equações de Navier-Stokes decaem para zero, em L^2 , quando o tempo t tende ao infinito (veja (LERAY, 1934)). Isto é, provar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Apenas em 1984, T. Kato provou esse problema (veja (KATO, 1984)), que também, posteriormente, foi resolvido por Masuda (veja (MASUDA, 1984)), e (WIEGNER, 1987)). Mas em 1985, a matemática argentina María Elena Schonbek, aperfeiçou este problema, usando o método de decomposição de Fourier (Fourier splitting method), que foi desenvolvido a fim de obter taxas algébricas de decaimento para leis de conservação parabólicas (veja (SCHONBEK, 1995)). Este método consiste em dividir a região de integração sobre o espaço em dois domínios dependentes do tempo. Desta forma, analisaremos as taxas de decaimento das soluções u para estas equações via o método de decomposição de Fourier. Para isto, estruturamos esta dissertação com base no artigo de (NICHE; PERUSATO, 2022). Também utilizamos os autores (BRANDOLESE, 2016), (BRANDOLESE; SCHONBEK, 2018), (SILVA et al., 2019), (CRUZ; NOVAIS, 2020), (CRUZ et al., 2022), onde no Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos e resultados importantes utilizados no decorrer da dissertação, assumindo que o leitor possui conhecimento prévio de alguns conceitos, faremos uma breve revisão sobre Espaços L^P , que são um dos mais importantes espaços funcionais. Ainda, introduzimos os Espaços de Sobolev, onde serão demonstrados alguns resultados interessantes que usaremos no decorrer deste trabalho. Também abordamos um pouco sobre a Equação do Calor, bem como a Transformada de Fourier. Neste capítulo destacamos o Teorema de Plancherel que garante que caso uma função f é tanto elemento de $L^1(\mathbb{R})$ quanto elemento de $L^2(\mathbb{R})$, então sua Transformada de Fourier também está em $L^2(\mathbb{R})$ e possui a mesma norma $L^2(\mathbb{R})$, a menos de uma constante. Ademais, abordamos o conceito do caráter de decaimento $r^* = r^*(u_0)$, introduzido por Bjorland e Schonbek em (BJORLAND; SCHONBEK, 2009), que descreve a taxa com que a solução de (1.1) com tal dado inicial decai, o que posteriormente foi desenvolvida por Niche e Schonbek (NICHE; SCHONBEK, 2015). Portanto, no Capítulo 3, apresentamos os principais resultados desta dissertação, onde obtemos as taxas de decaimento temporal para as soluções fracas das equações de Navier-Stokes incompressíveis 3D.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

A fim de auxiliar o leitor na compreensão dos capítulos seguintes dividimos este capítulo em alguns subtópicos com os principais resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho, tais como os espaços L^p e espaços de Sobolev, bem como transformada de Fourier e o teorema de Plancherel. Para mais informações, veja (EVANS, 2010), (BRÉZIS, 2011), (JR et al., 2001), (TEMAM, 1977).

2.1 ESPAÇOS L^p

Definição 2.1. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, um multi-índice. Os multi-índices proporcionam uma notação eficiente para escrever derivadas parciais de qualquer ordem. Assim, denotamos por D_α o operador diferencial de ordem, onde o grau $|\alpha|$ de α é a soma das suas componentes:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Ou seja,

$$D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 2.2. Consideremos Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p < +\infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é definido como espaço das classes de equivalência de funções reais p -integráveis no sentido de Lebesgue, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \|u\|_p < \infty\}.$$

Onde,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|^p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.3. Denotamos por $\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|$ e chamamos de supremo essencial de u ao ínfimo do conjunto

$$\{C \in \mathbb{R}^+ : |u(x)| \leq C, \text{ em quase todo ponto } x \in \Omega\}.$$

Definição 2.4. Dizemos que a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L_{loc}^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, $u|_K \in L^p$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

O lema a seguir irá nos auxiliar na demonstração da desigualdade de Hölder.

Lema 2.5. (Desigualdade de Young) Se p e q são números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, para todo par de números reais a e b não negativos, temos que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demonstração:

Se $a = 0$ ou $b = 0$, segue o resultado. Sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos dois casos a considerar:

$$\begin{cases} a^p = b^q \\ a^p \neq b^q \end{cases}$$

Então, no caso em que $a^p = b^q$ temos

$$\begin{aligned} ab &= a(b^q)^{1/q} \\ &= a(a^p)^{1/q} \\ &= a^{p/p} a^{p/q} \\ &= a^{p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \\ &= a^p \\ &= a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

Agora, suponha por absurdo, que $a^p \neq b^q$. Considere, $f(x) = \exp(x)$ e note que $f(x)$ é estritamente convexa, pois a sua segunda derivada é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, para todo t no intervalo $(0, 1)$ e $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$, temos

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Fazendo $t = \frac{1}{p}$, $1-t = \frac{1}{q}$, $x = \ln a^p$ e $y = \ln b^q$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln ab) \\ &= \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \\ &< \frac{\exp(\ln a^p)}{p} + \frac{\exp(\ln b^q)}{q} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

■

Lema 2.6. (Desigualdade de Hölder) Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, de modo que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p, q \leq +\infty$. Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e,

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração: Observe que, se $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_q = 0$ segue o resultado, pois

$$\begin{aligned} \|u\|_p = 0 \text{ ou } \|v\|_q = 0 &\Rightarrow u = 0 \text{ ou } v = 0 \text{ quase sempre} \\ &\Rightarrow uv = 0 \text{ quase sempre} \\ &\Rightarrow \|uv\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Caso $p = 1$ e $q = \infty$

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx = \int_{\Omega} |v(x)| |u(x)| \, dx \quad (2.1)$$

Uma vez que, se $v \in l_{\infty}$ então $|v(x)| \leq \|v\|_{\infty}$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x)| |u(x)| \, dx &\leq \|v\|_{\infty} \int_{\Omega} |u(x)| \, dx \\ &= \|v\|_{\infty} \|u\|_1 = \|u\|_1 \|v\|_{\infty} \end{aligned}$$

Agora, vamos usar a desigualdade anterior, considerando $a = \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$ e $b = \frac{|v(x)|}{\|v\|_q}$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)| |v(x)|}{\|u\|_p \|v\|_q} &\leq \frac{\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_p}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|v(x)|}{\|v\|_q}\right)^q}{q} \\ &= \frac{|u(x)|^p}{p \|u\|_p^p} + \frac{|v(x)|^q}{q \|v\|_q^q}. \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|u(x) \cdot v(x)|}{\|u\|_p \|v\|_q} \, dx &\leq \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{p \|u\|_p^p} \, dx + \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^q}{q \|v\|_q^q} \, dx \\ \frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \int_{\Omega} |u(x) \cdot v(x)| \, dx &\leq \frac{1}{p} \left[\frac{1}{\|u\|_p^p} \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right] + \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\|v\|_q^q} \int_{\Omega} |v(x)|^q \, dx \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\|uv\|_1}{\|u\|_p \|v\|_q} &\leq \left[\frac{1}{\|u\|_p^p} \|u\|_p^p \right] + \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\|v\|_q^q} \|v\|_q^q \right] \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \\ \|uv\|_1 &\leq \|u\|_p \|v\|_q. \end{aligned}$$

■

Introduziremos a seguir um novo conceito de derivada, a ideia de derivadas fracas e os chamados Espaços de Sobolev.

2.2 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção iremos definir os Espaços Sobolev, espaços estes que possuem propriedades que são muito utilizadas em aplicações na teoria das equações diferenciais parciais.

2.3 DERIVADA FRACA

Considere C_c^∞ o espaço das funções $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto em Ω e infinitamente diferenciáveis. Seja $u \in C^1(\Omega)$. Caso $\Phi \in C_c^\infty$, temos, através do método de integração por partes, que

$$\int_{\Omega} u \Phi_{x_j} dx = - \int_{\Omega} u_{x_j} \Phi dx, \text{ com } j = 1, \dots, n.$$

Note que os termos de fronteira são nulos na integração por partes, uma vez que Φ possui suporte compacto em U , então $\Phi = 0$.

Definição 2.7. Sejam $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Dizemos que v é uma derivada parcial fraca de ordem α de u e denotamos por:

$$D^\alpha u = v$$

se, para todo $\Phi \in C_c^\infty$, tem-se que

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \Phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \Phi(x) dx.$$

2.4 DEFINIÇÃO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 2.8. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e m um número natural. O Espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ corresponde a todas as funções $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, a derivada D^α existe no sentido de derivada fraca e pertence a $L^p(\Omega)$. Então, se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u por:

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, \text{ com } 1 \leq p \leq \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\Omega} |D^\alpha u|.$$

2.5 EQUAÇÃO DO CALOR

O estudo das soluções de equações na forma

$$u_t - \epsilon \Delta u = 0 \quad (2.2)$$

teve início no começo do século XIX, e vem sendo estudada até hoje. Estas equações, chamamos de equações do calor homogêneas, que consiste em uma equação de derivadas parciais que representa a difusão do calor em sólidos. Além disso, temos as equações do calor não homogênea

$$u_t - \epsilon \Delta u = f, \quad (2.3)$$

onde f é uma função que representa uma fonte de calor no sistema.

Definição 2.9. A função a seguir é denotada como solução fundamental para equação do calor (**Núcleo do Calor**):

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Agora, usaremos a solução fundamental a fim de encontrar uma solução para o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Notemos que, para $(x, t) \neq (0, 0)$ temos que a função $u(x, t) = \Phi(x, t)$ é solução da equação do calor. Assim, para $y \in \mathbb{R}^n$ fixo, $u(x, t) = \Phi(x - y, t)$ também é solução da equação (2.2). Então, temos que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y, t) g(y) dy \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy. \quad (2.6)$$

Por outro lado, temos que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

é, solução do problema não homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Definição 2.10. A família de operadores $(e^{\Delta t})_{t \geq 0}$ definidos por:

$$e^{\Delta 0}u(x) = u(x), \text{ com } x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$e^{\Delta t}u(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u(y) dy, \text{ com } x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

é chamado de semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.11. Seja $u(x, t) = e^{\Delta t}u_0(x)$ a solução do PVI, onde $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.7)$$

Então,

$$\|D^\alpha e^{\Delta t}u_0(x)\|_{l^q} \leq C \|u_0\|_{L^r} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}}, \text{ para todo } t > 0, \text{ para quaisquer } 1 \leq r \leq q \leq \infty \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

onde a constante $C \in \mathbb{R}^+$ depende somente de r, q, n e $|\alpha|$.

Demonstração: Utilizaremos o resultado acima apenas nos casos em que $|\alpha| = 0$ e $|\alpha| = 1$.

Dessa forma, demonstraremos apenas esses dois casos. Mas o caso geral pode ser encontrado, por exemplo, em (GUADAGNIN, 2005).

- Caso $|\alpha| = 0$, ou seja,

$$\|e^{\Delta t}u_0(x)\|_{l^q} \leq C \|u_0\|_{L^r} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}, \text{ para todo } t > 0.$$

Seja $\Phi(x, t)$ o núcleo do calor . Uma vez que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy \quad (2.8)$$

é solução do PVI(2.7) e para cada $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1, \quad (2.9)$$

Segue, em particular, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = (4\pi t)^{n/2}, \text{ para todo } t > 0.$$

Logo, pela identidade (2.9) e da desigualdade de Young para convolução, obtemos que para $1 \leq r \leq \infty$, vale a seguinte desigualdade

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r} \leq \|u_0\|_{L^r}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.10)$$

Com efeito,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r} = \|\Phi(\cdot, t) * u_0\|_{L^r} \leq \|\Phi(\cdot, t)\|_{L^1} \|u_0\|_{L^r} = \|u_0\|_{L^r}.$$

Afirmção:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2r}} \|u_0\|_{L^r}, \text{ para } 1 \leq r \leq \infty. \quad (2.11)$$

De fato, uma vez que $\Phi(x, t) \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$, para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ temos que, para todo $t > 0$

$$|u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) |u_0(y)| dy \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^1}.$$

Isto é, a desigualdade (2.11) é válida para $r = 1$. Assim, se $1 < r < \infty$ vamos definir p como o expoente conjugado de r , ou seja, $p^{-1} + r^{-1} = 1$. Logo, da desigualdade de Hölder e de (2.9), segue que

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) |u_0(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)^{\frac{1}{p}} \Phi(x - y, t)^{\frac{1}{r}} |u_0(y)| dy \\ &\leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2r}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)^{\frac{1}{p}} |u_0(y)| dy \\ &\leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2r}} \|u_0\|_{L^r}. \end{aligned}$$

concluindo, a afirmação. Ademais, pelas equações (2.10) e (2.11), para $1 \leq r \leq q < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^q}^q &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-r} |u(x, t)|^r dx \\ &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}^{q-r} \|u(\cdot, t)\|_{L^r}^r \\ &\leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2r}(q-r)} \|u_0\|_{L^r}^r \|u_0\|_{L^r}^{q-r} \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2r}(\frac{q}{r}-1)} \|u_0\|_{L^r}^q \end{aligned}$$

Note que, o caso em que $q = \infty$, segue diretamente da desigualdade (2.11). Mostraremos então, o caso em que $|\alpha| = 1$. Para isto, provaremos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \Phi(x, t)| dx = k t^{-|\alpha|/2}, \quad (2.12)$$

onde $k = k(\alpha, n) > 0$.

- Caso em que $|\alpha| = 1$.

Consideremos a seguinte função,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4}} \end{aligned}$$

Daí, observe que $D^\alpha g(x) = p_{|\alpha|}(x) g(x)$, sendo $p_{|\alpha|}(x)$ um polinômio de grau $|\alpha| > 0$.

Como, $0 < g(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $D^\alpha g(x)$ é uma função limitada e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha g(x)| dx := K(\alpha, n) < \infty.$$

Uma vez que,

$$\Phi(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} g(t^{-1/2}x),$$

Então, pela regra da cadeia, obtemos

$$D^\alpha \Phi(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} t^{-|\alpha|/2} D^\alpha g(t^{-1/2}x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \Phi(x, t)| dx &= (4\pi t)^{-n/2} t^{-|\alpha|/2} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha g(t^{-1/2}x)| dx \\ &= (4\pi t)^{-n/2} t^{-|\alpha|/2} t^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha g(y)| dy \\ &= (4\pi)^{-n/2} t^{-|\alpha|/2} K(\alpha, n) \\ &= k(\alpha, n) t^{-|\alpha|/2}, \end{aligned}$$

onde $k(\alpha, n) = (4\pi)^{-n/2} K(\alpha, n)$. Isto prova (2.12). Ademais, pela identidade (2.12) e da desigualdade de Young para convolução, obtemos, para $1 \leq r \leq \infty$, que

$$\|D^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^r} \leq k t^{-|\alpha|/2} \|u_0\|_{L^r}, \quad \forall t > 0. \quad (2.13)$$

com $k = k(\alpha, n) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^r} &= \|D^\alpha \Phi(\cdot, t) * u_0\|_{L^r} \\ &\leq \|D^\alpha \Phi(\cdot, t)\|_{L^1} \|u_0\|_{L^r} \\ &= k t^{-|\alpha|/2} \|u_0\|_{L^r}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $k = k(\alpha, n) > 0$. Como

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Assim, derivando u em relação a x_ℓ para $\ell = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} D_\ell u(x, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{1}{4t}\right) \frac{\partial}{\partial x_\ell} (|x-y|^2) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{1}{4t}\right) 2(x_\ell - y_\ell) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{1}{2t} \langle x-y, e_\ell \rangle\right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy. \end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, segue que

$$\begin{aligned} |D_\ell u(x, t)| &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|}{2t^{1/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |u_0(y)| dy \\ &= \frac{t^{-1/2}}{2(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|}{t^{1/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} |u_0(y)| dy \\ &\leq \frac{k_1 t^{-1/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} |u_0(y)| dy, \end{aligned}$$

onde $k_1 := \max\{\lambda e^{-\lambda^2/8}; \lambda > 0\} \equiv 2e^{-1/2}$. Logo, se $p^{-1} + r^{-1} = 1$, tem-se que

$$\begin{aligned} |\nabla u(x, t)| &\leq \frac{k_1 t^{-1/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8tp}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8tr}} |u_0(y)| dy \\ &\leq \frac{k_1 t^{-1/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} |u_0(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \frac{k_1 t^{-1/2}}{(4\pi t)^{n/2}} (8\pi t)^{n/2p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} |u_0(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \frac{2^{n/2p} k_1 t^{-1/2}}{(4\pi t)^{n/2r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \frac{2^{n/2} k_1 t^{-1/2}}{(4\pi t)^{n/2r}} \|u_0\|_{L^r} \end{aligned}$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Portanto,

$$\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \frac{2^{n/2} k_1}{(4\pi)^{n/2r}} \|u_0\|_{L^r} t^{-\frac{n}{2r} - \frac{1}{2}}, \quad \forall t > 0. \quad (2.14)$$

E ainda,

$$|\nabla u(x, t)|^r \leq \frac{2^{nr/2} k_1^r t^{-\frac{r}{2}}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} |u_0(y)|^r dy,$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Então, pelo teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x, t)|^r dx &\leq \frac{2^{nr/2} k_1^r t^{-\frac{r}{2}}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} |u_0(y)|^r dy \right) dx \\
 &= \frac{2^{nr/2} k_1^r t^{-\frac{r}{2}}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} dx \right) |u_0(y)|^r dy \\
 &= \frac{2^{nr/2} k_1^r t^{-\frac{r}{2}}}{(4\pi t)^{n/2}} (8\pi t)^{n/2} \|u_0\|_{L^r}^r \\
 &= 2^{nr/2} 2^{nr/2} k_1^r t^{-\frac{r}{2}} \|u_0\|_{L^r}^r, \quad \forall t > 0.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\|\nabla u(\cdot, t)\|_L^r \leq 2^n K_1 \|u_0\|_{L^r} t^{-1/2}, \quad \forall t > 0. \quad (2.15)$$

Então, por (2.14), (2.15) e pela desigualdade de interpolação (veja em (RIVERA, 1999)), temos, para $1 \leq r \leq q \leq \infty$, que

$$\begin{aligned}
 \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^q} &\leq \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^r}^{r/q} \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^\infty}^{1-r/q} \\
 &\leq \left(2^{nr/q} k_1^{r/q} \|u_0\|_{L^r}^{r/q} t^{-r/2q} \right) \frac{2^{\frac{n}{2}(1-\frac{r}{q})} k_1^{1-\frac{r}{q}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2r}(1-\frac{r}{q})}} \|u_0\|_{L^r}^{(1-\frac{r}{q})} t^{-(\frac{n}{2r} + \frac{1}{2})(1-\frac{r}{q})} \\
 &= \frac{2^{\frac{n}{2}(1+\frac{r}{q})} k_1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})}} \|u_0\|_{L^r} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) - \frac{1}{2}}, \quad \forall t > 0.
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos a demonstração do teorema para os casos em que $|\alpha| \in \{0, 1\}$. ■

2.6 TRANSFORMADA DE FOURIER

Definição 2.12. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de u , da seguinte forma

$$\mathcal{F}\{u\}(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(x) dx$$

onde, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e i é a unidade imaginária.

Podemos estender a definição da transformada de Fourier para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para isto, vejamos o resultado a seguir:

Teorema 2.13. (Teorema de Plancherel) Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

e

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2}$$

Demonstração: Inicialmente, notemos que se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(x) dx \right|, \text{ por propriedade de integral, temos} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\xi x} u(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, pelo teorema de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{v}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) v(\xi) d\xi. \quad (2.16)$$

Agora, utilizando a solução do calor não homogênea, obtemos a seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}, \text{ para todo } t > 0.$$

Então, por (2.16), para cada $\epsilon > 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(\xi) e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx. \quad (2.17)$$

Seja, então, $z \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e defina $u(x) := \bar{z}(-x)$, onde $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z . Tome também, $v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ como sendo a convolução de z e u , isto é,

$$v(y) = (2\pi)^n (z * u)(y) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} z(y) u(x - y) dy.$$

Então, novamente pelo teorema de Fubini, segue

$$\begin{aligned} \hat{v}(\xi) &= (2\pi)^n (\widehat{z * u})(\xi) \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} \int_{\mathbb{R}^n} z(y) u(x - y) dy dx \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} z(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\xi} u(x - y) dx \right) dy \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} z(y) \hat{u}(\xi) dy \\ &= (2\pi)^n \hat{z}(\xi) \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Logo, $\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} \bar{z}(-x) dx = \bar{\hat{z}}(\xi).$$

E assim, $\hat{v} = (2\pi)^n |\hat{z}|^2$. Sendo v contínua, temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = (2\pi)^n v(0).$$

Fazendo fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$ na equação (2.17), tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y) dy = (2\pi)^n v(0).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{z}|^2 dy = v(0) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} z(x) u(-x) dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx.$$

Ou seja, o teorema de Plancherel nos dá a transformada de Fourier de uma função em L^2 . ■

Lema 2.14. (*Desigualdades de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo*) Para todo $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$, temos as seguintes desigualdades

$$\|\nabla u\|_2 \leq \|u\|_2^{1/2} \|D^2 u\|_2^{1/2} \quad (2.18)$$

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2^{1/4} \|D^2 u\|_2^{3/4}. \quad (2.19)$$

Demonstração: Faremos agora apenas a demonstração da desigualdade (2.18). No caso da desigualdade (2.19), a demonstração pode ser encontrada em (NIRENBERG, 2011) e ((KREISS et al., 2003)). Temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 &= (2\pi)^{-3} \|\widehat{\nabla u}\|_2^2 \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\nabla u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |i\xi \hat{u}|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left((2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\hat{u}(\xi)| \right) \left((2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\widehat{D^2 u}(\xi)| \right) d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (2\pi)^{-3} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (2\pi)^{-3} |\widehat{D^2 u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_2 \|D^2 u\|_2. \end{aligned}$$
■

2.7 CARÁTER DE DECAIMENTO E CARACTERIZAÇÃO DO DECAIMENTO DA PARTE LINEAR

Nesta seção, veremos quais as condições necessárias para garantir as taxas de decaimento.

Definição 2.15. Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $r \in (-\frac{n}{2}, \infty)$. Definimos o indicador de decaimento $P_r(u_0)$, correspondente a u_0 , por (desde que o limite exista)

$$P_r(u_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-2r-n} \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \quad (2.20)$$

Onde, $B(\rho)$ denota a bola centrada na origem de raio ρ .

Definição 2.16. O caráter de decaimento, denotado por $r^* = r^*(u_0)$,

$$r^* = r^*(u_0) = \begin{cases} \text{o único } r \in (-\frac{3}{2}, \infty), \text{ se } 0 < P_r(u_0) < \infty; \\ -\frac{3}{2}, \text{ se } P_r(u_0) = \infty, \text{ para todo } r \in (-\frac{3}{2}, \infty); \\ \infty, \text{ se } P_r(u_0) = 0, \text{ para todo } r \in (-\frac{3}{2}, \infty). \end{cases} \quad (2.21)$$

Teorema 2.17. Sejam $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $\tilde{u}(t)$ uma solução de $\tilde{u}_t = \mu \Delta \tilde{u}$, com dado u_0 , onde $r^* = r^*(u_0)$ é o caráter de decaimento.

I. Se $-\frac{3}{2} < r^* < \infty$, temos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r^*)} \leq \|\tilde{u}(t)\|^2 \leq C_2(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r^*)}.$$

II. Se $r^* = -\frac{3}{2}$, então existe $C = C(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \geq C(t+1)^{-\epsilon}, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

III. Se $r^* = \infty$, então existe $C = C(m) > 0$ tal que

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \leq C(t+1)^{-m}, \text{ para todo } m > 0.$$

Demonstração:

I. Note que como $-\frac{3}{2} < r^* < \infty$, então $P_r(u_0) \in (0, \infty)$. Assim, tomando $\epsilon = \frac{P_r(u_0)}{2}$ na definição de limite, obtemos que existe $0 < \delta = \rho_0$ tal que $0 < \rho < \rho_0$,

$$\left| \rho^{-2r-n} \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi - P_r(u_0) \right| < \frac{P_r(u_0)}{2}$$

E portanto,

$$k_1 =: \epsilon < \rho^{-2r-n} \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \frac{3P_r(u_0)}{2}.$$

Aplicando Fourier na parte linear,

$$\begin{cases} \partial_t(\hat{u}) = -\mu|\xi|^2\hat{u} \\ \hat{u}(\cdot, 0) = \hat{u}_0. \end{cases}$$

E então solucionando a equação diferencial ordinária, obtemos que

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\mu|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi). \quad (2.22)$$

Logo, por Plancherel (2.13)

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}(t)||^2 &= (2\pi)^{-3} ||\hat{u}(t)||^2 \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\mu|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq (2\pi)^{-3} \int_{B(\rho(t))} e^{-2\mu|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq (2\pi)^{-3} \rho^{2r+3} e^{-2\mu\rho^2(t)} \rho^{-2r-3} \int_{B(\rho(t))} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &> (2\pi)^{-3} k_1 \rho^{2r+3} e^{-2\mu\rho^2(t)}. \end{aligned}$$

Considere, $\rho(t) = \rho_0(t+1)^{-\frac{1}{2}}$. Então, $e^{-2\mu\rho^2(t)} > e^{-2\mu\rho_0^2} = C > 0$. Logo,

$$||\tilde{u}(t)||^2 \geq C \rho^{2r+3}(t) \equiv k(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r^*)}.$$

Além disso, temos a seguinte identidade associada ao problema do calor

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = -\mu\Delta\tilde{u} \\ \tilde{u}(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Pelo método de Fourier Splitting,

$$\frac{d}{dt} ||\tilde{u}(t)||^2 = -2\mu ||\nabla\tilde{u}(t)||^2.$$

Assim, novamente pelo teorema 2.13,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ||\tilde{u}(t)||^2 &= -2\mu(2\pi)^{-3} ||\widehat{\nabla\tilde{u}}(t)||^2 \\ &= -2\mu(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{\tilde{u}}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -2\mu(2\pi)^{-3} \int_{B(\rho)^c} |\xi|^2 |\hat{\tilde{u}}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -2\mu(2\pi)^{-3} \rho^2(t) \int_{B(\rho)^c} |\hat{\tilde{u}}(\xi, t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}(t)\|^2 + 2\mu(2\pi)^{-3} \rho^2(t) \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\tilde{u}}(\xi, t)|^2 &\leq 2\mu(2\pi)^{-3} \rho^2(t) \int_{B(\rho)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\tilde{u}(t)\|^2 + 2\mu(2\pi)^{-3} \rho^2(t) \|\hat{\tilde{u}}(t)\|_{L^2}^2 &\leq 2\mu(2\pi)^{-3} \rho^2(t) \int_{B(\rho)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{u}(t)\|^2 + 2\mu \rho^2 \|\tilde{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq c \rho^2(t) \int_{B(\rho)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Pela definição 2.15 e pela equação (2.22), segue que

$$\int_{B(\rho)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Temos, então, que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}(t)\|^2 + 2\mu \rho^2(t) \|\hat{\tilde{u}}(t)\|_{L^2}^2 &\leq c \rho^{2r+3} \rho^2(t) \rho^{-2r-3} \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi, t)|^2 d\xi. \\ &\leq \tilde{c} \rho^{2r+5}(t). \end{aligned}$$

Tome $\rho(t) = (\frac{m}{t+1})^{\frac{1}{2}}$, com $2\mu m > r + \frac{3}{2}$. Daí, multiplicando pelo fator integrante $(t+1)^{2\mu m}$ obtemos,

$$\frac{d}{dt} [\|\tilde{u}(t)\|^2 (t+1)^{2\mu m}] \leq \tilde{c}(r) (t+1)^{2\mu m - r - \frac{5}{2}}.$$

Assim, integrando de 0 até t , segue

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 (t+1)^{-2\mu m} + \tilde{c}(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r)}.$$

Como $(\frac{3}{2} + r) < 2\mu m$, tomando o mínimo tem-se que

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \leq \tilde{c}(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r)}.$$

Portanto,

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \leq \tilde{c}(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r^*)}, \text{ para } -\frac{3}{2} < r^* < \infty.$$

II. Se $r^* = -\frac{3}{2}$, para qualquer $r \in (-\frac{3}{2}, \infty)$ fixado, então $P_r(u_0) = \infty$. Pela definição de limite, para qualquer $\gamma > 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que $0 < \rho < \rho_0$, temos

$$\rho^{-2r-3} \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi > \gamma.$$

Tomando $\rho(t) = \rho_0(t+1)^{-\frac{1}{2}}$, analogamente obtemos,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t)\|^2 &\geq (2\pi)^{-3} \gamma e^{-2\mu\rho_0^2} \rho^{2r+3}(t) \\ &= (2\pi)^{-3} \gamma e^{-2\mu\rho_0^2} \rho_0^{2r+3} (t+1)^{(-r-\frac{3}{2})} \equiv k_1(r)(t+1)^{(-r-\frac{3}{2})}, \text{ para todo } r \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right). \end{aligned}$$

Então,

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \geq k_2(\epsilon)(t+1)^{-\epsilon} \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Isto é, o decaimento de $\|\tilde{u}(t)\|^2$ é mais lento do que qualquer taxa algébricamente uniforme.

III. Se $r^* = \infty$, para qualquer $r \in (-\frac{3}{2}, \infty)$ fixado, então $P_r(u_0) \equiv 0$. Assim, pela definição de limite, para todo $\delta > 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que para $0 < \rho < \rho_0$ tem-se

$$\rho^{-2r-3} \int_{B(\rho)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \delta.$$

Então, usando o método de Fourier Splitting, como nos itens anteriores,

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \geq k_3(t+1)^{(-r-\frac{3}{2})}, \text{ para todo } r \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Logo,

$$\|\tilde{u}(t)\|^2 \geq k_3(m)(t+1)^{-m}, \text{ para todo } m > 0.$$

Isto é, o decaimento de $\|\tilde{u}(t)\|^2$ é mais rápido do que qualquer taxa algébricamente uniforme.

■

3 CARATERIZAÇÃO DO DECAIMENTO DE SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES 3D

Neste capítulo, iremos abordar algumas estimativas de taxas de decaimento em L^2 para as soluções fracas (de Leray-Hopf) $u(x, t)$ da equação de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (3.1)$$

Em que $(u \cdot \nabla)u$ é dado por

$$[(u \cdot \nabla)u]_j = u_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial u_j}{\partial x_n}$$

e Δu é o laplaciano de u , sendo $u(x, t) \in \mathbb{R}^3$ o campo de velocidade incompressível, ∇p é o vetor gradiente de p , onde $p(x, t) \in \mathbb{R}$ indica a pressão hidrostática. A seguir apresentamos os principais resultados desta dissertação que nos dizem que as soluções das equações decaem ao longo do tempo.

Definição 3.1. Seja $f = (f_1, \dots, f_n) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $n \geq 2, 1 < q < \infty$. Considere a decomposição $f = f_0 + \nabla p$ com $p \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla p \in L^q(\mathbb{R}^n)$ unicamente determinados. Definimos, o Projetor de Leray como $\mathbb{P}_h : L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q_\sigma(\mathbb{R}^n)$ como $\mathbb{P}_h[f] := f_0$, sendo $\mathbb{P}_h$ linear, limitado e idempotente (veja (RUDIN, 1973)).

Teorema 3.2. *Sejam u solução fraca do problema (3.1) e $r^*(u_0) = r^*$, o caráter de decaimento de u_0 , com $-\frac{3}{2} < r^* < \infty$. Então, para todo $t > 0$, temos que*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq c(t+1)^{-\min\{\frac{3}{2}+r^*, \frac{5}{2}\}}.$$

Demonstração: Inicialmente vamos verificar a identidade de energia:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \mu \|\nabla u\|^2 = 0 \quad (3.2)$$

Com efeito, calculando o produto interno em L^2 com u obtemos

- Calculando o produto interno de u com u_t :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 u_j^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

- Calculando o produto interno de u com $[(u \cdot \nabla)u]$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)u \cdot u \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_k \right) dx \\ &= \sum_{k,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_k \, dx \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} [((u \cdot \nabla)u, u)]_{L^2} &= - \sum_{k,j=1}^3 u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k \cdot u_k) \, dx \\ &= - \sum_{j,k=1}^3 u_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_j \right) dx \\ &= - \sum_{k,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_k \, dx - \sum_{k,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_j \, dx \\ &= - \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_k \, dx - \sum_{k,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_j \, dx \\ &= -[((u \cdot \nabla)u, u)]_{L^2} = 0 \end{aligned}$$

Além disso,

▪

$$\begin{aligned} (u, \mu \Delta u)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mu \Delta u \cdot u \, dx \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} u \, dx. \end{aligned}$$

Integrando, por partes

$$\begin{aligned} (u, \mu \Delta u)_{L^2} &= -\mu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \\ &= -\mu \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \, dx \\ &= -\mu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \, dx \\ &= -\mu \|\Delta u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Por fim, temos que

▪

$$\begin{aligned} (u, \nabla p)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^3} u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} p \, dx \end{aligned}$$

Como o $\operatorname{div} u = 0$, então $(u, \nabla p)_{L^2} = 0$.

Portanto, a identidade de energia é válida.

Agora, considere $B(t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } |\xi| \leq g(t)\}$, onde g é uma função contínua limitada superiormente por A , não crescente com $g(0) = A$. Note que pelo teorema 2.13, temos

$$\begin{aligned}
 -2\mu \|\nabla u(t)\|^2 &= -2\mu(2\pi)^{-3} \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 \\
 &= -2\mu(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\
 &= -2\mu(2\pi)^{-3} \left(\int_{B(t)} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi + \int_{B(t)^c} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \right) \\
 &\leq -2\mu(2\pi)^{-3} \int_{B(t)^c} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\
 &\leq -2\mu(2\pi)^{-3} g^2(t) \int_{B(t)^c} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Assim, da identidade de energia, temos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\mu(2\pi)^{-3} g^2(t) \int_{B(t)^c} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\mu(2\pi)^{-3} g^2(t) \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi &\leq 2\mu(2\pi)^{-3} g^2(t) \int_{B(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\
 \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\mu g^2(t) \|u(t)\|^2 &\leq 2\mu(2\pi)^{-3} g^2(t) \int_{B(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Daí, multiplicando pelo fator integrante:

$$\exp \left(\int_0^t 2\mu g^2(s) ds \right)$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\exp \left(\int_0^t 2\mu g^2(s) ds \right) \|u(t)\|^2 \right] \leq 2\mu(2\pi)^{-3} g^2(t) \exp \left(\int_0^t 2\mu g^2(s) ds \right) \int_{B(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi. \quad (3.3)$$

Ademais, aplicando Fourier em (3.1),

$$\begin{cases} \widehat{u_t} + (\widehat{u \cdot \nabla})u - \mu \widehat{\Delta u} + \widehat{\nabla p} = 0 \\ \widehat{\operatorname{div} u} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Pois, calculando a transformada obtemos

- Transformada de Fourier de u_t

$$\hat{u}_t = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} u_t dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} u dx \Rightarrow \hat{u}_t = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}.$$

- Transformada de Fourier de $\mu \Delta u$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu \Delta u} &= \mu \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j} dx \\ &= -\mu \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-i\xi x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\ &= -\mu \sum_{j=1}^3 (-i\xi_j) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\ &= -\mu |\xi|^2 \hat{u}. \end{aligned}$$

- Transformada de Fourier de ∇p

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla p} &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} \frac{\partial p}{\partial x_j} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-i\xi x}) p(x, t) dx \\ &= i\xi_j \hat{p}. \end{aligned}$$

- Transformada de Fourier de $\operatorname{div} u$

$$\begin{aligned} \widehat{\operatorname{div} u} &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi x} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx \\ &= - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-i\xi x}) u_j dx = i\xi \hat{u}. \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\partial_t(|\hat{u}|^2) = \partial_t(\hat{u} \cdot \bar{\hat{u}}) = \partial_t \hat{u} \cdot \bar{\hat{u}} + \hat{u} \cdot \partial_t \bar{\hat{u}}.$$

Então, multiplicando a equação por $\bar{\hat{u}}$:

$$\hat{u}_t \cdot \bar{\hat{u}} + \widehat{(u \cdot \nabla) u} \cdot \bar{\hat{u}} - \widehat{\mu \Delta u} \cdot \bar{\hat{u}} + \widehat{\nabla p} \cdot \bar{\hat{u}} = 0. \quad (3.5)$$

Aplicando o conjugado em (3.4) e multiplicando por $\hat{u}$, temos que

$$\overline{\hat{u}_t} \cdot \hat{u} + \overline{\widehat{(u \cdot \nabla) u}} \cdot \hat{u} - \overline{\widehat{\mu \Delta u}} \cdot \hat{u} + \overline{\widehat{\nabla p}} \cdot \hat{u} = 0. \quad (3.6)$$

Agora, somando as equações (3.5) e (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
 \partial_t(|\hat{u}|^2) + 2\mu|\xi|^2 |\hat{u}|^2 &\leq 2|\mathcal{F}\{(u \cdot \nabla) u\}| |\hat{u}| \\
 &= 2|\mathcal{F}\{\operatorname{div}(u \otimes u)\}| |\hat{u}| \\
 &= 2|\xi| |\widehat{u \otimes u}| |\hat{u}| \\
 &\leq 2|\xi| \|u \otimes u\|_{L^1} |\hat{u}| \\
 &\leq 2|\xi| \|u\|^2 |\hat{u}|.
 \end{aligned}$$

Integrando no tempo:

$$|\hat{u}(\xi, t)|^2 \leq |\hat{u}_0(\xi)|^2 + 2|\xi| \int_0^t \|u(s)\|^2 |\hat{u}(\xi, s)| ds.$$

Seja $J_\epsilon(t) = |\hat{u}_0(\xi)|^2 + \epsilon^2 + 2|\xi| \int_0^t \|u(s)\|^2 |\hat{u}(\xi, s)| ds$. Então,

$$|\hat{u}(\xi, t)|^2 < J_\epsilon(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Note que

$$J'_\epsilon(t) = 2|\xi| \|u(t)\|^2 |\hat{u}(\xi, t)|.$$

Assim,

$$J'_\epsilon(t) < 2|\xi| \|u(t)\|^2 (J_\epsilon(t))^{1/2}.$$

Uma vez que, $\frac{d}{dt}(J_\epsilon(t))^{1/2} < |\xi| \|u(t)\|^2$. Então, integrando no tempo,

$$|\hat{u}(\xi, t)| < (J_\epsilon(t))^{1/2} < (J_\epsilon(0))^{1/2} + \int_0^t |\xi| \|u(s)\|^2 ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 |\hat{u}(\xi, t)| &< (|\hat{u}_0(\xi)|^2 + \epsilon^2)^{1/2} + |\xi| \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \\
 &\leq |\hat{u}_0(\xi)| + \epsilon + |\xi| \int_0^t \|u(s)\|^2 ds.
 \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$, com $\epsilon > 0$ segue

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq |\hat{u}_0(\xi)| + |\xi| \int_0^t \|u(s)\|^2 ds.$$

Agora, suponha que

$$\|u(t)\|^2 \leq \tilde{C}(t+1)^{-\alpha}, \text{ para algum } 0 \leq \alpha < 1. \quad (3.7)$$

Então, da desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \int_{B(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi &\leq 2 \int_{B(t)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + 2 \int_{B(t)} |\xi|^2 \left(\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \right)^2 d\xi \\ &\leq 2 \|\hat{u}_0(\xi)\|^2 + 2 \int_{B(t)} |\xi|^2 \left(\int_0^t \tilde{C}(s+1)^{-\alpha} ds \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi &\leq 2 \|\hat{u}_0(\xi)\|^2 + \frac{2\tilde{C}^2}{(1-\alpha)^2} \int_{B(t)} |\xi|^2 ((t+1)^{(1-\alpha)} - 1)^2 d\xi \\ &\leq 2 \|\hat{u}_0(\xi)\|^2 + \frac{2\tilde{C}^2}{(1-\alpha)^2} \int_{B(t)} |\xi|^2 (t+1)^{2(1-\alpha)} d\xi \\ &\leq 2 \|\hat{u}_0(\xi)\|^2 + \frac{2\tilde{C}^2}{(1-\alpha)^2} g^2(t) (t+1)^{2(1-\alpha)} \int_{B(t)} d\xi \\ &= 2 \|\hat{u}_0(\xi)\|^2 + \frac{8\pi\tilde{C}^2}{3(1-\alpha)^2} g^5(t) (t+1)^{2(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} 2 \int_{B(g(t))} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi &= 2g(t)^{2r^*+3} g(t)^{-2r^*-3} \int_{B(g(t))} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &< c_1 2g(t)^{2r^*+3}, \end{aligned}$$

onde $c_1 = c_1(P_r(u_0))$. Considere, agora, $g(t) = \left(\frac{A}{t+1}\right)^{1/2}$, com $A > \max\left\{\frac{3}{4\mu}, \frac{1}{2\mu}(r^* + \frac{3}{2}), \frac{\lambda}{2\mu}\right\}$.

Daí,

$$2 \int_{B(g(t))} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < 2c_1 (A(t+1)^{-1})^{\left(\frac{2r^*+3}{2}\right)} = k_1 (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B(g(t))} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi &\leq k_1 (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)} + \frac{8\pi\tilde{C}^2}{3(1-\alpha)^2} A^{5/2} (t+1)^{-5/2} (t+1)^{2-2\alpha} \\ &\leq k_1 (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)} + k_2 (t+1)^{-\left(\frac{1}{2}+2\alpha\right)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{B(g(t))} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq k_3 (t+1)^{-\min\left\{\frac{1}{2}+2\alpha, \frac{3}{2}+r^*\right\}}. \quad (3.8)$$

Segue de (3.3) e da definição de $g(t)$ que

$$\exp\left(\int_0^t 2\mu g^2(s) ds\right) = \exp\left(\int_0^t 2\mu \frac{A}{s+1} ds\right) = (t+1)^{2\mu A}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(t+1)^{2\mu A} \|u(t)\|^2 \right] &\leq 2\mu(2\pi)^{-3} A k_3 (t+1)^{2\mu A-1} (t+1)^{-\min\left\{\frac{1}{2}+2\alpha, \frac{3}{2}+r^*\right\}} \\ &\leq k_4 (t+1)^{2\mu A-1} (t+1)^{-\min\left\{\frac{1}{2}+2\alpha, \frac{3}{2}+r^*\right\}}. \end{aligned}$$

Então, temos alguns casos:

- Caso $\alpha = 0$. Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} + r^* \leq \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} + r^* \end{array} \right.$$

- I. Se $r^* \leq -1$, temos

$$\frac{d}{dt} \left[(t+1)^{2\mu A} \|u(t)\|^2 \right] \leq k_4 (t+1)^{2\mu A-1} (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)}.$$

Desta forma, integrando no tempo, temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \|u_0\|^2 (t+1)^{-2\mu A} + \frac{k_4}{2\mu A - r^* - \frac{3}{2}} (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)} \\ &\leq k_5 (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)}, \end{aligned}$$

Onde $k_5 = k_5(\mu, r^*, \tilde{C}, \|u_0\|, P_r(u_0))$.

- II.

$$\frac{d}{dt} \left[(t+1)^{2\mu A} \|u(t)\|^2 \right] \leq k_4 (t+1)^{2\mu A-3/2}.$$

Então, integrando

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \|u_0\|^2 (t+1)^{-2\mu A} + \frac{k_4}{2\mu A - 1/2} (t+1)^{-\frac{1}{2}} \\ \|u(t)\|^2 &\leq k_6 (t+1)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pois $A > \frac{1}{2\mu}$ e consequentemente $A > \frac{1}{4\mu}$.

- Caso $\alpha = \frac{1}{2}$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} + r^* \leq \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} + r^* \end{array} \right.$$

- I.

$$\|u(t)\|^2 \leq k_5 (t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)},$$

O que recai no caso anterior.

- II.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(t+1)^{2\mu A} \|u(t)\|^2 \right] &\leq k_4 (t+1)^{2\mu A - \frac{5}{2}} \\ \Rightarrow \|u(t)\|^2 &\leq \|u_0\|^2 (t+1)^{-2\mu A} + \frac{k_4}{2\mu A - \frac{3}{2}} (t+1)^{-\frac{3}{2}} \\ &\leq k_7 (t+1)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_0^t \|u(t)\|^2 ds \leq 2k_7.$$

Em particular,

$$2 \int_{B(t)} |\xi|^2 \left(\int_0^t \|u(t)\|^2 ds \right)^2 d\xi \leq \frac{32\pi k_7^2}{3} g(t)^5.$$

Como,

$$\begin{aligned} \int_{B(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi &\leq 2 \int_{B(t)} |\hat{u}_0(\xi, t)|^2 d\xi + 2 \int_{B(t)} |\xi|^2 \left(\int_0^t \|u(t)\|^2 ds \right)^2 d\xi \\ &\leq k_1(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{32\pi k_7^2}{3} \left(A(t+1)^{-1} \right)^{5/2} \\ &\leq k_1(t+1)^{-(\frac{3}{2}+r^*)} + k_8(t+1)^{-5/2} \\ &\leq k_9(t+1)^{-\min\{\frac{3}{2}+r^*, \frac{5}{2}\}} \end{aligned}$$

Por (3.3), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(t+1)^{2\mu A} \|u(t)\|^2 \right] &\leq 2\mu(2\pi)^{-3} A(t+1)^{-1} (t+1)^{2\mu A} k_9(t+1)^{-\min\{\frac{3}{2}+r^*, \frac{5}{2}\}} \\ &\leq k_{10}(t+1)^{2\mu A-1-\lambda}, \text{ onde } \lambda = \min\left\{ \frac{3}{2} + r^*, \frac{5}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Então, integrando

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 (t+1)^{-2\mu A} + \frac{k_{10}}{2\mu A - \lambda} (t+1)^{-\lambda}.$$

Portanto,

$$\|u(t)\|^2 \leq C(t+1)^{-\lambda}, \text{ com } \lambda = \alpha(r^*). \quad (3.9)$$

■

Para auxiliar na demonstração do teorema a seguir, vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 3.3. *Sejam u solução fraca do problema (3.1) e $r^*(u_0) = r^*$, o caráter de decaimento de u_0 , com $-\frac{3}{2} < r^* < \infty$. Então, para todo $t \geq t_0$ temos*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq c(t+1)^{-\min\{\frac{5}{2}+r^*, \frac{7}{2}\}},$$

onde $t_0 = 2^3 \mu^{-5} (1 + \|u_0\|)^4$.

Demonstração:

Inicialmente, observe que da identidade de energia temos

$$\|u(t)\|^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds = \|u_0\|^2$$

Então, integrando com respeito a variável temporal, obtemos

$$\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds \leq \frac{\|u_0\|^2}{2\mu}, \forall t \geq 0$$

Pelo teorema do valor médio para integrais de Lebesgue, concluímos que existe um conjunto $E \subseteq (0, t_0)$ com medida positiva tal que

$$t_0 \|\nabla u(t)\|^2 \leq \int_0^{t_0} \|\nabla u(s)\|^2 ds, \forall t \in E. \quad (3.10)$$

Em particular,

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq \frac{\|u_0\|^2}{2\mu t_0}, \forall t \in E. \quad (3.11)$$

Além disso, derivando a equação com relação a x_ℓ , onde $D_\ell = \frac{\partial}{\partial x_\ell}$, obtemos

$$\frac{d}{dt} D_\ell(u) + [D_\ell(u \cdot \nabla)u] - \mu \Delta D_\ell u + \nabla D_\ell p = 0 \quad (3.12)$$

Agora, tomando o produto interno em com $D_\ell u$ em $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\left(\frac{d}{dt} D_\ell(u), D_\ell(u) \right) + (D_\ell(u \cdot \nabla)u, D_\ell(u)) - (\mu \Delta D_\ell u, D_\ell(u)) + (\nabla D_\ell p, D_\ell(u)) = 0 \quad (3.13)$$

Como o $\operatorname{div} u = 0$, tem-se que $(D_\ell(u \cdot \nabla)u, D_\ell(u)) = 0$ e $(\nabla D_\ell p, D_\ell(u)) = 0$. Assim, integrando por partes,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_\ell u\|^2 + \mu \|D_\ell(\nabla u)\|^2 = -[(D_\ell(u \cdot \nabla)u, D_\ell u)]$$

Então, multiplicando por 2 e somando sobre $\ell = 1, 2, 3$, temos

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{\ell=1}^3 \|D_\ell u\|^2 \right] + 2\mu \sum_{\ell=1}^3 \|D_\ell(\nabla u)\|^2 = -2 \left[\sum_{\ell=1}^3 (D_\ell(u \cdot \nabla)u, D_\ell u) \right] \quad (3.14)$$

Note ainda que

$$-2 \left[\sum_{\ell=1}^3 (D_\ell(u \cdot \nabla)u, D_\ell u) \right] \leq 2 \|u\|_\infty \|\nabla u\| \|D^2 u\|.$$

Logo, pela identidade em (3.14) e pelas estimativa anterior, segue que

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + 2\mu \|D^2 u\|^2 \leq 2 \|u\|_\infty \|\nabla u\| \|D^2 u\|.$$

Usando as desigualdades de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (veja o Lema 2.14), temos

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty \|\nabla u\| &= \|u\|_\infty \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \\ &\leq \|u\|^{1/4} \|D^2 u\|^{3/4} \|u\|^{1/4} \|D^2 u\|^{1/4} \|\nabla u\|^{1/2} \\ &= \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|D^2 u\|. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + 2\mu \|D^2 u\| \leq 2\|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|D^2 u\|^2.$$

Agora, fixe $t_1 \in E$. Integrando de t_1 a t , obtemos

$$\|\nabla u(t)\|^2 + 2\mu \int_{t_1}^t \|D^2 u(s)\|^2 ds \leq \|\nabla u(t_1)\|^2 + 2\|u_0\|^{1/2} \int_{t_1}^t \|\nabla u(s)\|^{1/2} \|D^2 u(s)\|^2 ds, \forall t \geq t_1.$$

Observe que da definição de t_0 e da desigualdade (3.11), temos

$$\begin{aligned} 2\|u_0\|^{1/2} \|\nabla u(t)\|^{1/2} &\leq 2\|u_0\|^{1/2} \frac{\|u_0\|^{1/2}}{(2\mu t_0)^{1/4}} \\ &= \frac{2\|u_0\|}{[2^4 \mu^{-4} (1 + \|u_0\|)^4]^{1/4}} \\ &= \mu \frac{\|u_0\|}{1 + \|u_0\|} < \mu. \end{aligned}$$

Ademais, por continuidade, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$2\|u_0\|^{1/2} \|\nabla u(t)\|^{1/2} \leq 2\mu, \forall t \in [t_1, t_1 + \hat{\delta}].$$

Logo, pela desigualdade anterior,

$$\|\nabla u(t)\| \leq \|\nabla u(t_1)\|, \forall t \in [t_1, t_1 + \hat{\delta}].$$

Isto nos mostra que $[t_1, t_1 + \hat{\delta}] \subseteq E$. Desta forma, este argumento pode ser repetido de modo a escolher $t_1 + \hat{\delta}$ como “ponto inicial”. Seguindo o raciocínio, inferimos que $t \in E$ para todo $t \geq t_1$. Assim, já que $t_0 \geq t_1$ tem-se que

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq \frac{\|u_0\|^2}{2\mu t_0}, \forall t \geq t_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|^2 &\leq \frac{\|u_0\|^2}{2\mu t_0} \\ &= \frac{\|u_0\|^2}{[2^4 \mu^{-4} (1 + \|u_0\|)^4]} \\ &= 2^4 \mu^{-4} \frac{1}{(1 + \|u_0\|)^2} \left(\frac{\|u_0\|}{1 + \|u_0\|} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2^{-2} \mu^2}{1 + \|u_0\|} \right)^2 \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|\nabla u(t)\| \leq \frac{2^{-2} \mu^2}{1 + \|u_0\|} \forall t \geq t_0. \quad (3.15)$$

Agora, multiplicando a identidade de energia (3.2) por $(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta}$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|u(t)\|^2 \right] + 2\mu(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u\|^2 = (\alpha(r^*) + \delta)(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta-1} \|u(t)\|^2.$$

Integrando de t_0 até t :

$$\begin{aligned} & (t+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|u(t)\|^2 + 2\mu \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u\|^2 ds \\ &= (t_0+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|u(t_0)\|^2 + (\alpha(r^*) + \delta) \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta-1} \|u(s)\|^2 ds \\ &\leq (t_0+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|u_0\|^2 + c(\alpha(r^*) + \delta) \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta-1-\min\{\frac{3}{2}+r^*, \frac{5}{2}\}} ds \end{aligned}$$

Então,

$$(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|u(t)\|^2 + 2\mu \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u\|^2 ds \leq c_{\|u_0\|_{L^2}, t_0} + \frac{c}{\delta} (\alpha(r^*) + \delta)(t+1)^\delta.$$

Ou seja,

$$(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|u(t)\|^2 + 2\mu \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u\|^2 ds \leq c(t+1)^\delta. \quad (3.16)$$

Onde c depende de $\|u_0\|_{L^2}$, t_0 , δ , $\alpha(r^*)$ e da constante do teorema 3.2. Uma vez que

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + 2\mu \|D^2 u\|^2 \leq 2\|u\|_\infty \|\nabla u\| \|D^2 u\|.$$

Então, multiplicando por $(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u(t)\|^2 \right] + 2\mu(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|D^2 u\|^2 \\ &\leq (\alpha(r^*) + \delta + 1)(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u(t)\|^2 + 2(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|D^2 u\|^2. \end{aligned}$$

Integrando de t_0 até t :

$$\begin{aligned} & (t+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u(t)\|^2 + 2\mu \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|D^2 u\|^2 ds \\ &\leq (t_0+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u(t_0)\|^2 + c \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2\|u_0\|^{1/2} \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u\|^{1/2} \|D^2 u\|^2 ds. \end{aligned}$$

Note que

$$2\|u_0\|^{1/2} \|\nabla u(t)\|^{1/2} \leq 2\|u_0\|^{1/2} \frac{2^{-1}\mu}{(1+\|u_0\|)^{1/2}} < \mu \quad \forall t \geq t_0.$$

Então,

$$(t+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u(t)\|^2 + \mu \int_{t_0}^t (s+1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|D^2 u(s)\|^2 ds$$

$$\leq (t_0 + 1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u(t_0)\|^2 + c \int_{t_0}^t (s + 1)^{\alpha(r^*)+\delta} \|\nabla u(s)\|^2 ds.$$

Pela equação (3.16), temos

$$\begin{aligned} (t + 1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \|\nabla u(t)\|^2 &\leq (t_0 + 1)^{\alpha(r^*)+\delta+1} \frac{2^{-4} \mu^4}{(1 + \|u_0\|)^2} + c(t + 1)^\delta \\ &\leq c + c(t + 1)^\delta \leq c(t + 1)^\delta. \end{aligned}$$

Então,

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq c(t + 1)^{-\alpha(r^*)-1}.$$

Isto é,

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq c(t + 1)^{-\min\{\frac{5}{2}+r^*, \frac{7}{2}\}}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Sendo c uma constante que depende de $\|u_0\|_{L^2}$, t_0 , δ , $\alpha(r^*)$ e da constante do teorema 3.2. ■

A seguir, vamos comparar a evolução das soluções $u(\cdot, t)$ para as equações de Navier-Stokes com as soluções da equação do calor com os mesmos dados iniciais.

Teorema 3.4. *Sejam u solução fraca do problema (3.1) e $\tilde{u}$ a solução da equação do calor, com $r^*(u_0) = r^*$, o caráter de decaimento de u_0 , com $-\frac{3}{2} < r^* < \infty$. Então, para todo $t > 0$, segue que*

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq c(t + 1)^{-\min\{\frac{7}{2}+2r^*, \frac{5}{2}\}}.$$

Ou seja, a solução u das equações de Navier-Stokes é assintoticamente equivalente à solução da equação do calor com os mesmos dados iniciais.

Demonstração: Note que, por Duhamel,

$$u(t) = e^{\mu\Delta t} u_0 - \int_0^t e^{\mu\Delta(t-s)} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds,$$

onde $\mathbb{P}$ é o Projetor de Leray. Então, temos que

$$u(t) = e^{\mu\Delta(t-t_0)} u(t_0) - \int_{t_0}^t e^{\mu\Delta(t-s)} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \int_0^t \|e^{\mu\Delta(t-s)} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s)\| ds \\ &\leq \int_0^t \|e^{\mu\Delta(t-s)} \operatorname{div}(u \otimes u)(s)\| ds \\ &=: \int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Agora, vamos estimar I_1 e I_2 .

I. Estimativa para I_1 , com $c = c(\mu) > 0$

Temos que $\|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\| \leq c(t-s)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\|u(s)\|^2$, onde $Q(s)$ é a parte não linear de (3.1), $Q(s) = (u \cdot \nabla)u$. Então,

$$I_1 = \int_0^{t/2} \|e^{\mu\Delta(t-s)}(u \cdot \nabla)u\| \, ds \leq c \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}}\|u(s)\|^2 \, ds.$$

Mas, pelo teorema 3.2, $\|u(s)\|^2 \leq c(t+1)^{-\alpha(r^*)}$. Então,

$$I_1 \leq c \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}}(s+1)^{-\alpha(r^*)} \, ds.$$

Note ainda que,

$$\begin{aligned} s \leq \frac{t}{2} &\Leftrightarrow -s \geq -\frac{t}{2} \\ &\Leftrightarrow t-s \geq t - \frac{t}{2} \\ &\Leftrightarrow t-s \geq \frac{t}{2} \\ &\Leftrightarrow (t-s)^{-5/4} \leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-5/4} \\ &\Leftrightarrow (t-s)^{-5/4} \leq t^{-5/4}2^{5/4}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c t^{-5/4}2^{5/4} \int_0^{t/2} (s+1)^{-\alpha(r^*)} \, ds \\ &\leq 2^{5/4} c t^{-5/4} \int_0^t (s+1)^{-\alpha(r^*)} \, ds \\ &= 2^{5/4} c t^{-5/4} \int_t^{t+1} s^{-\alpha(r^*)} \, ds \end{aligned}$$

▪ $r^* = -\frac{1}{2}$, então $\alpha(r^*) = 1$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c t^{-5/4} \ln(t+1) \\ &\leq c t^{-5/4} \ln(t+e) \\ &\leq k(t+1)^{-5/4} \text{ para todo } t \geq t_1. \end{aligned}$$

▪ $-\frac{3}{2} < r^* < -\frac{1}{2}$, então $\alpha(r^*) = \frac{3}{2} + r^* \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{c}{1-\alpha(r^*)} t^{-5/4} (t+1)^{1-\alpha(r^*)} \\ &\leq c t^{-5/4} (t+1)^{-(\frac{1}{2}+r^*)} \\ &\leq k (t+1)^{-5/4} (t+1)^{-(\frac{1}{2}+r^*)} \\ &\leq k(t+1)^{-(\frac{7}{4}+r^*)} \text{ para todo } t \geq t_1. \end{aligned}$$

▪ $r^* > -\frac{1}{2}$, então

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < r^* \leq 1 \Rightarrow \alpha(r^*) = \frac{3}{2} + r^* \\ \text{ou} \\ r^* \geq 1 \Rightarrow \alpha(r^*) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

No primeiro caso,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq k(t+1)^{-(\frac{7}{4}+r^*)} \\ &\leq k(t+1)^{-\frac{5}{4}}, \text{ pois } r^* > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para $r^* \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{c}{1-\alpha(r^*)} t^{-5/4} (t+1)^{1-\alpha(r^*)} \\ &\leq c t^{-5/4} (t+1)^{-3/2} \\ I_1 &\leq c (t+1)^{-11/4} \leq (t+1)^{-5/4} \text{ para todo } t \geq t_1. \end{aligned}$$

De modo análogo, vamos estimar I_2 .

II. Estimativa para I_2 , com $c = c(\mu) > 0$

Observe que, pelo teorema 2.11, temos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|(u \cdot \nabla)u\|_{L^1} ds \\ &\leq c \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u(s)\| \|\nabla u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3, temos que

$$I_2 \leq c \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} (s+1)^{-\frac{\alpha(r^*)}{2}} (s+1)^{-\frac{\beta(r^*)}{2}} ds,$$

onde $\beta(r^*) = 1 - \alpha(r^*)$, $\forall r \in (-\frac{3}{2}, \infty)$. Daí,

$$\begin{aligned} I_2 &= c \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} (s+1)^{-\alpha(r^*)-\frac{1}{2}} ds \\ &\leq c 2^{\alpha(r^*)+\frac{1}{2}} (t+1)^{-\alpha(r^*)-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} ds \end{aligned}$$

Então, integrando obtemos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c 2^{\alpha(r^*)+\frac{1}{2}} 4(t+1)^{-\alpha(r^*)-\frac{1}{2}} t^{1/4} \\ &\leq c t^{(-\alpha(r^*)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})} = c t^{(-\alpha(r^*)-\frac{1}{4})} \\ &\leq c(t+1)^{-\min\{\frac{7}{4}+r^*, \frac{11}{4}\}}, \text{ para todo } t \geq t_1 := 2t_0 \end{aligned}$$

Agora para $t < t_1$, temos

$$\begin{aligned} (t+1)^{\min\{\frac{7}{4}+r^*, \frac{5}{4}\}} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq (t_1+1)^{\min\{\frac{7}{4}+r^*, \frac{5}{4}\}} (\|u(t)\| + \|\tilde{u}(t)\|) \\ &\leq c(\|u_0\| + \|u_0\|) \leq c. \end{aligned}$$

Logo, a desigualdade vale para todo $t \geq 0$.

Dessa forma, obtemos que

- Se $r^* \leq -\frac{1}{2}$, então $I_2 \leq c(t+1)^{-\left(\frac{7}{4}+r^*\right)}$
- Se $r^* \in [-\frac{1}{2}, 1]$, então $I_2 \leq c(t+1)^{-\left(\frac{7}{4}+r^*\right)} \leq c(t+1)^{-\frac{5}{4}}$
- Se $r^* \geq 1$, então $I_2 \leq c(t+1)^{-\frac{11}{4}}$

Portanto, $I_2 \leq c(t+1)^{-\min\{\frac{7}{4}+r^*, \frac{5}{4}\}}$, para todo $t \geq t_1$.

Uma vez que, para $I_1(t)$ temos a mesma estimativa acima e como já mencionamos o caso em que $t \in [0, t_1]$ segue que

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2 \leq c(t+1)^{-\min\{\frac{7}{2}+2r^*, \frac{5}{2}\}}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

■

O teorema a seguir nos dá uma estimativa inferior.

Teorema 3.5. *Sejam u solução fraca do problema (3.1) e $r^*(u_0) = r^*$, o caráter de decaimento de u_0 , com $-\frac{3}{2} < r^* \leq 1$. Então, temos que*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \geq c(t+1)^{-\left(\frac{3}{2}+r^*\right)}.$$

Demonstração: Temos que

$$\|\tilde{u}(t)\| = \|\tilde{u} - u + u\| \leq \|\tilde{u} - u\| + \|u\|$$

Então,

$$\|u(t)\| \geq \|\tilde{u}(t)\| - \|u(t) - \tilde{u}(t)\|$$

Logo,

$$\|u(t)\| \geq c_2(t+1)^{-\left(\frac{3}{4}+\frac{r^*}{2}\right)} - c_1(t+1)^{-\min\{\frac{7}{4}+r^*, \frac{5}{4}\}}, \text{ com } c_2 > c_1.$$

Agora, observe que só teremos uma estimativa inferior quando o decaimento de $\tilde{u}(\cdot, t)$ for mais lento do que o da diferença $u(t) - \tilde{u}(t)$, pois, desta forma, $\|u(t)\| \geq 0$. Daí, para isto ocorrer, devemos ter

$$\frac{3}{4} + \frac{r^*}{2} \leq \min \left\{ \frac{7}{4} + r^*, \frac{5}{4} \right\} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < r^* \leq 1.$$

Então, para $r^* \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right]$, segue

$$\|u(t)\| \geq c_3(t+1)^{\left(\frac{3}{4} + \frac{r^*}{2}\right)} \text{ considerando } c_2 > c_1 + c_3.$$

Portanto,

$$\|u(t)\|^2 \geq c(t+1)^{-(\frac{3}{2} + r^*)}, \text{ para } r^* \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right], \text{ para todo } t \geq 0.$$

■

REFERÊNCIAS

- BJORLAND, C.; SCHONBEK, M. E. Poincaré's inequality and diffusive evolution equations. *Advances in Differential Equations*, Khayyam Publishing, Inc., v. 14, n. 3/4, p. 241–260, 2009.
- BRANDOLESE, L. Characterization of solutions to dissipative systems with sharp algebraic decay. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 48, n. 3, p. 1616–1633, 2016.
- BRANDOLESE, L.; SCHONBEK, M. E. *Large time behavior of the Navier-Stokes flow*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018.
- BRÉZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2011.
- CRUZ, F.; PERUSATO, C.; ROJAS-MEDAR, M.; ZINGANO, P. Large time behavior for mhd micropolar fluids in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 312, p. 1–44, 2022.
- CRUZ, F. W.; NOVAIS, M. M. Optimal L^2 decay of the magneto-micropolar system in $\mathbb{R}^3$. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Springer, v. 71, n. 3, p. 1–26, 2020.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010.
- GUADAGNIN, M. A. Alguns resultados para equação do calor e equações de advecção-difusão. 2005.
- JR, I. J. I.; JR, R. J. I.; IORIO, R.; IORIO, J.; IORIO, V. de M. *Fourier analysis and partial differential equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- KATO, T. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 187, n. 4, p. 471–480, 1984.
- KREISS, H.-O.; HAGSTROM, T.; LORENZ, J.; ZINGANO, P. Decay in time of incompressible flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 5, n. 3, p. 231–244, 2003.
- LERAY, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica*, Springer, v. 63, n. 1, p. 193–248, 1934.
- MASUDA, K. Weak solutions of Navier-Stokes equations. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 36, n. 4, p. 623–646, 1984.
- NICHE, C. J.; PERUSATO, C. F. Sharp decay estimates and asymptotic behaviour for 3D magneto-micropolar fluids. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Springer, v. 73, n. 2, p. 1–20, 2022.
- NICHE, C. J.; SCHONBEK, M. E. Decay characterization of solutions to dissipative equations. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 91, n. 2, p. 573–595, 2015.
- NIRENBERG, L. On elliptic partial differential equations. In: *Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 1–48.
- RIVERA, J. E. M. *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Laboratório Nacional de Computação Científica, 1999.

RUDIN, W. *Functional analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1973.

SCHONBEK, M. The Fourier splitting method. *Advances in geometric analysis and continuum mechanics (Stanford, CA, 1993)*, p. 269–274, 1995.

SILVA, P. B. e; CRUZ, F.; FREITAS, L.; ZINGANO, P. On the L^2 decay of weak solutions for the 3D asymmetric fluids equations. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 267, n. 6, p. 3578–3609, 2019.

TEMAM, R. Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis(book). *Amsterdam, North-Holland Publishing Co.(Studies in Mathematics and Its Applications*, v. 2, p. 510, 1977.

WIEGNER, M. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^n$. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford Academic, v. 2, n. 2, p. 303–313, 1987.