Universidade Federal de Pernambuco
Campus Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Matemática - Licenciatura

História da Matemática: Investigando sua abordagem nos livros didáticos de Álgebra Linear

Sérgio Romero Vital dos Santos Filho

Caruaru, 2015

História da Matemática: Investigando sua abordagem nos livros didáticos de Álgebra Linear

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco como pré-requisito parcial para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Sérgio Romero Vital dos Santos Filho
Orientadora: Maria do Desterro Azevedo da Silva

Caruaru, 2015

S237h Santos Filho, Sérgio Romero Vital dos.
História da Matemática: investigando sua abordagem nos livros didáticos de álgebra linear. /. Sérgio Romero Vital dos Santos Filho. - Caruaru: O Autor, 2015.
43f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Maria do Desterro Azevedo da Silva
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2015.
Inclui referências bibliográficas

1. Matemática - História. 2. Livros didáticos. 3. Álgebra linear. I. Silva, Maria do Desterro Azevedo da. (Orientadora). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2015-071)

Sérgio Romero Vital dos Santos Filho

Monografia apresentada como trabalho de conclusão de curso de Matemática-Licenciatura pela Universidade Federal de Pernambuco – Campus Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA), defendida em ___ / ____ / _______ e avaliada pela banca examinadora constituída pelos professores (as):

Orientador: ____

Membro : ____

Membro : ____

RESUMO

O presente trabalho é fruto das inquietações quanto aos obstáculos presentes no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Álgebra Linear, em especial o conceito de espaço vetorial. O obstáculo como a experiência primeira, os obstáculos verbais e geométricos e os obstáculos epistemológicos constituem fortes barreiras para uma aprendizagem efetiva. A partir de uma revisão teórica, entende-se que a abordagem histórica é um instrumento metodológico favorável a superação das dificuldades que surgem na compreensão epistemológica dos conceitos, facilitando a sua significação. Além disso, através desta ferramenta é possível apresentar a lógica matemática em construção, proporcionando uma visão mais ampla das relações entre essa ciência e as outras áreas de conhecimento e das diversas atividades humanas. Nesse sentido propomos aqui, investigar a abordagem histórica dos conteúdos da disciplina Álgebra Linear, em particular o conceito de espaços vetoriais, a partir da análise documental de livros didáticos.

Palavras-chave: História da Matemática; Livro Didático; Álgebra Linear.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear desempenha um papel importante na área das Ciências Exatas e afins, e se destaca devido às inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento científico, inclusive dentro da própria Matemática. Seu conteúdo oferece uma base necessária para a compreensão de diversas disciplinas que englobam o currículo de alguns cursos das Ciências Exatas. Podemos citar disciplinas como: Equações Diferenciais Ordinárias, Estruturas Algébricas, Espaços Métricos e Análise Real.

O estudo da Álgebra Linear constitui uma ferramenta poderosa na compreensão, análise e resolução de questões relacionadas às mais diversas áreas da ciência. Por exemplo, no artigo “Aplicações da Álgebra Linear na engenharia”, a autora Andressa Pescador (2011) mostra aplicações na resolução de problemas ligados a circuitos elétricos, balanceamentos de equações químicas e na construção de estruturas metálicas. Igualmente importante, no trabalho de conclusão de curso de Ana Lice Caroline Speck (2006) encontramos aplicações da Álgebra Linear na programação linear, na economia e nutrição.

Apesar de a Álgebra Linear compor um dos itens básicos e fundamentais do currículo, e de sua constante presença em diferentes atividades que contextualizam a mesma, o seu processo de ensino-aprendizagem é marcado por problemas. Pesquisas mostram que a Álgebra Linear é uma das disciplinas do ensino superior com maior índice de reprovação, na UFPE-CAA o índice de reprovação nos dois últimos períodos (2014.1 e 2014.2) foi em média 46%. Relatos de alunos que são aprovados traz ainda a dificuldade de compreensão da mesma como uma teoria unificadora, e consequentemente não conseguem utilizar seus conceitos para modelar e resolver problemas de outras áreas. Em sua dissertação de mestrado, Celestino (2000) nos mostra quadros gráficos do período de 1993 à 1997 com amostras na UNICAMP, USP e UNESP que apontam índices de reprovação oscilando entre 25% e 50% em Álgebra Linear. Celestino (2000) também cita pesquisas realizadas em outros países mostrando que os alunos apresentam dificuldades na compreensão dos principais conceitos da Álgebra Linear e as consequentes pioras no desempenho e aproveitamento de disciplinas que dependem do seu suporte teórico.

Ao investigar os fatores de reprovação na disciplina Álgebra Linear, Jarbas de Lima Coimbra (2008) identificou alguns aspectos problemáticos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem dos conceitos da mesma. Estes aspectos foram: obstáculos epistemológicos e didáticos, a experiência primeira ou o conhecimento anterior, obstáculos verbais e o conhecimento unitário e pragmático. Segundo Coimbra, uma ferramenta poderosa para superar estes obstáculos é a história da Álgebra Linear. Sobre este assunto, ele discute:

> Durante a pesquisa verifiquei a importância do conhecimento da história da Álgebra Linear para o perfeito entendimento de seus conceitos e o entendimento da disciplina como ideia unificadora. O entendimento da Álgebra Linear como ideia unificadora é muito importante porque não deixa o aluno assimilar a disciplina como uma extensão do calculo vetorial ou da geometria. Talvez para outras disciplinas esse conhecimento histórico não seja tão importante, mas para a Álgebra Linear é fundamental. (COIMBRA, 2008, p.34.)

Entendemos que a abordagem histórica da Álgebra Linear é um caminho para apresentar a lógica matemática em construção, proporcionando uma visão mais ampla das relações entre essa ciência e as outras áreas de conhecimento.

Diante do exposto, colocamos o seguinte questionamento*:* **Que aspectos históricos são apresentados como suporte para a compreensão e significação do conceito de espaço vetorial em livros didáticos de Álgebra Linear?**

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

- Analisar o suporte histórico dado em livros de Álgebra Linear com relação ao conceito de espaço vetorial.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar informações históricas referentes aos conceitos de Álgebra Linear fornecidas em livros didáticos.

- Propor complementos históricos sobre o conceito de espaço vetorial que venham a auxiliar o processo de ensino e aprendizagem.

JUSTIFICATIVA

Diante do alto nível de reprovação e do não entendimento dos principais conceitos da Álgebra Linear por parte dos estudantes que são aprovados, ressaltamos a importância de pesquisas relacionadas a potencializar o seu processo de ensino e aprendizagem. Aqui destacamos a utilização da abordagem histórica da matemática. Sobre os aspectos desta ferramenta didática:

> A História da Matemática constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento. Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.
> Assim, esta História é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria Matemática. Podemos entender por que cada conceito foi introduzido nesta ciência e por que, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. (ALMEIDA, apud, 2009, p. 02).

O uso da História da Matemática é uma ferramenta valiosa, principalmente para a fundamentação epistemológica de certos conceitos. Conceitos abordados com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo, sobre este aspecto destacamos: ”*A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural*”. (BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 1997, p.34). Dessa forma, entendemos que não se pode restringir a conhecer apenas os conteúdos dissertados na ementa das disciplinas, mas também procurar ter uma compreensão geral histórica dos conteúdos propostos.

Da necessidade de investigar acerca da utilização da História da Matemática como recurso didático, pretendemos com esta pesquisa produzir um levantamento bibliográfico dos livros que estão na biblioteca ou constam na bibliografia da disciplina Álgebra Linear do curso Matemática-Licenciatura da UFPE-CAA. Conhecendo a forma como a História está inserida e abordada nos mesmos. Dessa forma, poderemos então propor, ou não, possíveis mudanças na bibliografia do curso, com o objetivo de dar um suporte mais consistente para o corpo docente e discente que vier a trabalhar com a disciplina Álgebra Linear.

Deixamos claro que nossos objetivos se baseiam em investigar a abordagem histórica presente nos livros de Álgebra Linear, e não em apontar qual livro é melhor ou pior, ou se a bibliografia do curso está correta ou incorreta. O que se pretende é por o assunto: A História da Matemática como recurso metodológico no ensino de Álgebra Linear, em discussão.

CAPÍTULO I - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O objetivo deste capítulo é apresentar as potencialidades pedagógicas sobre o uso da história da matemática para o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, teremos uma sustentação teórica consistente para tecermos as analises dos livros didáticos selecionados para pesquisa. Também trazemos aqui uma breve introdução do contexto histórico da História da Matemática na educação matemática.

1.1. A HISTÓRIA COMO RECURSO ORIENTADOR

Pesquisando autores que fundamentassem nossos argumentos acerca das potencialidades pedagógicas a respeito da utilização da História da Matemática na educação, nos deparamos com vários trabalhos que indicam como utilizar a história como recurso orientador para superar os obstáculos aos conhecimentos.

O livro HISTÓRIA DA MATEMÀTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA inicia com uma citação do cientista e inventor Alexandre Graham Bell: “Nunca ande pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros foram”. A partir desta citação, Miguel (2008) argumenta que Bell não teria realizado o seu feito, de criar o telefone, se não tivesse percorrido o caminho já trilhado por outros. Dessa forma, os caminhos percorridos influenciam de algum modo, os que estamos percorrendo e os que devemos percorrer, ou seja, é um recurso orientador para novos estudos.

Com origem grega, a palavra metodologia significa “percorrer um caminho”. A abordagem histórica dos conteúdos matemáticos é um dos caminhos para mediar a construção do conhecimento. Segundo Groenwald et al. (2004), o enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens. O conhecimento da história da matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as ideias originais em toda sua essência (p.47).

1.2. O USO DA HISTÓRIA NA MATEMÁTICA

A História da Matemática é utilizada como recurso didático desde o final do século XIX e início do século XX, mas sua aplicação era feita de forma individual e a gosto dos autores de livros ou professores. Neste período acreditava-se que para estudar matemática era preciso um grande esforço mental e uma grande concentração por parte dos estudantes. Tal esforço era recompensado com leituras de notas históricas ou biografias sobre matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do tema estudado, caracterizando um momento de relaxamento mental. Ou seja, a história era vista como um prêmio recebido após um grande esforço.

Nas primeiras décadas do século XX, houve no Brasil um movimento chamado de “movimento da escola nova”. Neste movimento encontrava-se pela primeira vez uma manifestação explícita em propostas oficiais sobre a importância da História da Matemática para a formação dos alunos. A partir daí, a História da Matemática começou a ser vista como uma ferramenta motivacional.

> E, por fim, com o intuito de aumentar o interesse do aluno, o curso será incidentalmente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da história da matemática bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência. Citação de citação (Portaria Ministerial, de 30-6-1931, apud Miguel, 2008, p.10).

Estes autores se alinham à posição de vários outros que defendem que o conhecimento histórico despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo que lhe está sendo ensinado. Ou seja, para eles, a história exerceria um papel motivador no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Segundo Miguel (2008) a obra *Elemens de géometrie* de Alexis Claude Clairaut (1713-1765), é considerada por muitos autores como aquela que, pela primeira vez, apresenta um posicionamento explícito acerca de uma relação específica entre a História da Matemática e a matemática escolar. Após a obra de Clairaut (1713-1765) foi percebido que a História da Matemática poderia ser utilizada em obras e aulas de matemática com vários objetivos, como por exemplo, para fundamentação de argumentos.

A história da matemática também tem um papel importante para os professores de matemática e para os profissionais que desejam trabalhar com ela. Segundo esse aspecto, temos:

> [...] é possível considerar que a história pode ser um elemento orientador na elaboração de atividades e situações-problema, de seleção e sequenciamento de tópicos de matemática em livros didáticos, sem que elementos históricos sejam explicitamente colocados. Da mesma forma, essa participação implícita da história pode ser percebida na maneira como os tópicos matemáticos são selecionados e sequenciados em propostas para o ensino da matemática em programas oficiais de ensino. A escolha dos tópicos e da sequencia em que são apresentados muitas vezes é orientada pelo modo como os autores interpretam historicamente a produção de tais conhecimentos. De uma forma geral, podemos dizer que a história tem sido para muitos autores também uma fonte de seleção e constituição de sequencias de tópicos de ensino por eles julgadas adequadas (MIGUEL, 2008, p. 44).

A década de 1980 constituiu um marco referencial do reavivamento de interesses em torno das questões históricas relativas à matemática, ao seu ensino e à sua aprendizagem. De fato, em 1983 ocorreu a criação do *International Study group on the Relations between the History and Pedagogy® of Mathematics* (Grupo Internacional de Estudos sobre as Relações entre a História e Pedagogia da Matemática), grupo filiado a

Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI) e criado durante a realização do Workshop História na Educação Matemática, ocorrido na cidade de Toronto (Canadá), em 1983.

Em nosso país, embora o movimento organizado em torno da História da Matemática tenha se intensificado visivelmente, sobretudo a partir da criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) no III Seminário Nacional de História da Matemática, ocorrido em março de 1999, na cidade de Vitória (ES), as motivações, ações e estudos isolados individuais ou de grupos organizados de pesquisa relacionados a essa temática poderiam ser identificados, pelo menos, desde meados da década de 80 do século XX.

1.3. HISTÓRIA, COMPREENSÃO, SIGNIFICAÇÃO E DESMISTIFICAÇÃO DA MATEMÁTICA.

Além do aspecto motivador, a história da matemática reserva um papel esclarecedor do sentido das teorias e dos conceitos matemáticos que deverão ser estudados. Segundo Miguel (2008) mediante todo o processo de ensino e aprendizado que visa a compreensão e a significação, está o levantamento e a discursão dos porquês, isto é, a razão para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte dos estudantes. Jones (1969) acredita na construção de três categorias de porquês: Os porquês cronológicos, os porquês lógicos e os porquês pedagógicos. Os porquês lógicos e cronológicos estão inteiramente relacionados à significação dos conceitos trabalhados. Já os porquês pedagógicos estão relacionados às tomadas de decisão por parte do professor.

> A primeira vista, essa categorização parece nos sugerir que a história só poderia intervir como instrumento para auxiliar na explicação da primeira categoria de porquês, isto é, dos porquês cronológicos. Não é isso, porém, o que pensa Jones. Para ele, a história da matemática não só pode como deve ser o fio condutor que amarraria as explicações que poderiam ser dadas aos porquês pertencentes a qualquer uma das três categorias. É na defesa dessa possibilidade que se revelaria o poder da história para a promoção de um ensino-aprendizagem de

> matemática escolar baseado na compreensão e na significação. (MIGUEL,2008, p. 47).

Diante das experiências como estudante, na maneira como as aulas de matemática são ministradas, com professores, em sua maioria, passando de teorema em teorema, de definição em definição, causa a impressão de que a matemática está pronta e acabada, e que os matemáticos conseguem superar qualquer dificuldade. O autor Kline (1972) defende que ao utilizar a história da matemática os estudantes poderão compreender os obstáculos enfrentados, o processo criativo, as frustações e o longo e árduo caminho que os matemáticos tiveram que trilhar para atingir uma estrutura considerável. Esta forma axiomática, mais preocupadas com o rigor e com o encadeamento lógico de conceitos e proposições, descartam outros elementos de extrema importância para a formação dos estudantes. Sobre este aspecto Miguel discute:

> Dessa forma, podemos entender ser possível buscar na história da matemática apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: (1) a matemática como uma criação humana/ (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEl,2008, p.53).

Dessa forma podemos olhar para a história da matemática como uma importante ferramenta para um ensino da matemática pautado da significação e da compreensão dos conceitos por parte dos estudantes. No livro de Miguel (2008), páginas 61 e 62, há uma lista com dezesseis argumentos, de ordem epistemológica e ética, a favor da utilização da história como metodologia, esta lista pode ser vista nos anexos.

CAPÍTULO II - A RELAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO COM A EDUCAÇÃO

Neste capítulo faremos uma breve introdução à história do livro didático no Brasil, com o objetivo de mostrar que o livro didático sempre foi e é um dos recursos didáticos mais utilizados em nosso país. Também trazemos aqui argumentos sobre o importante papel do livro didático no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

2.1. UMA INTRODUÇÃO A HISTORIA DO LIVRO DIDÁTICO NO BRASIL.

O livro didático é um recurso utilizado no Brasil desde o século XVIII. Neste período a Coroa Portuguesa, preocupada com a defesa da Colônia decidiu impulsionar a formação de militares no Brasil. Assim, foi criada a *Aula de fortificações* com objetivo de treinar oficiais no manuseio de peças de artilharia e com competência para construir fortes. Contudo, surgiram alguns empecilhos para que o novo curso tivesse início. O principal empecilho foi à falta de livros adequados à instrução militar. Segundo Valente (1999) este obstáculo foi superado quando ouve o deslocamento do militar português José Fernandes Pinto Alpoim. Alpoim escreveu dois livros, ao que tudo indica os primeiros livros didáticos de matemática escritos no Brasil: *Exame de artilheiros e Exame de Bombeiros*, em 1744 e 1748, respectivamente. Segundo Juliana Biehl a primeira editora brasileira foi a Impressão Régia do Rio de Janeiro, que teve como seu primeiro livro didático publicado Elementos de Geometria, de Legendre (1752-1833), seu tradutor Manoel Ferreira Guimarães (1777-1738), que na época desempenhou um papel significativo para a divulgação de novas ideias no Brasil.

Apenas a partir da década de trinta que se desenvolveu uma política mais consistente sobre questões relacionadas ao livro didático. Neste período criou-se o Instituto Nacional do Livro (INL), órgão específico para legislar sobre políticas do livro didático, com o intuito de auxiliar para a legitimação do mesmo em caráter nacional, contribuindo para o aumento de sua produção. Porém, segundo GOMES (2014) foi apenas em 1938, por meio do Decreto n.1.006, de 30/12/1938, que foi oficializada e regulamentada a primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro no Brasil. Por meio dela se instituiu uma Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD). Esta comissão tinha por objetivo examinar e julgar os livros didáticos, indicar livros estrangeiros de valor e sugerir abertura de concursos para a produção de livros didáticos ainda não existentes no país.

No período subsequente, conhecido como Regime Militar de 1964 a 1984, foram formados vários acordos. Destacamos aqui os acordos entre o ministério da educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID) em 1966, que impulsionaram a edição de uma grande quantidade de livros didáticos a fim de atender a demando do novo contexto escolar que estava para surgir. THOMAZ (2013, p.29) discute:

> Um dos objetivos principais da nova proposta educacional implantada no Brasil por meio dos acordos MEC/USAID era o de reprimir as ideias educacionais anteriores, baseadas nas europeias, e impor o modelo anglo-saxônico, que na época era considerado de maior eficácia no sentido econômico e técnico (formar um contingente de mão-de-obra técnica para trabalhar na indústria), mas também, principalmente, porque não estimulava a consciência crítica dos alunos[...].

Assim, pode-se observar que o foco desse novo sistema era capacitar de forma técnica, e preparar os brasileiros para o trabalho nas indústrias, e os materiais didáticos, no caso, os livros didáticos, enriqueciam essa nova proposta.

Com o fim do período militar no Brasil, por meio do Decreto nº 91.542, de 19/08/1985 foi criado um novo programa responsável pela compra e distribuição de livros didáticos o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que permanece até os dias atuais. Porém, mesmo com a criação desse novo programa somente a partir dos anos 90 que começou uma discussão mais sistemática pelo MEC, sobre a qualidade do livro didático. Segundo THOMAZ (2013, p.46), "É no ano de 1996 que se inicia o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD 1997. Esse procedimento foi aperfeiçoado, sendo aplicado até hoje".

Após digerir um pouco sobre a história do livro didático percebe-se a importância que o mesmo assumiu com o passar dos anos e a preocupação que se gerou em relação a sua qualidade, se configurando um elemento de destaque.

2.2. O VALOR DO LIVRO DIDÁTICO

No contexto escolar temos disponíveis vários recursos didáticos que podem auxiliar na construção do conhecimento. Dentre eles podemos destacar os jogos, as novas tecnologias, como a internet e os programas de computador, e, é claro, o livro didático. O livro didático assume um papel central e de destaque, sendo considerado o material mais utilizado pelos professores no processo de ensino e aprendizagem. Conforme destaca Biehl e Bayer (2009, p.02) "[...] o livro didático é um dos mais importantes componentes do cotidiano escolar em todos os níveis de ensino".

O livro didático é um importante instrumento para o ensino, sendo um dos meios mais acessíveis de adquirir os conteúdos. Este vem, principalmente, auxiliar no acompanhamento e complementação dos conteúdos vistos em sala, e alguns ainda se comprometem em trazer aplicações, notas históricas, entre outras diferentes abordagens, que motivem os seus leitores. Como discutem Gérard e Roegiers (Biehl e Bayer, apud, 2009, p.03), o livro didático desempenha importantes funções, dentre as quais destacam:

- Favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;
- Propiciar o desenvolvimento de competências, que contribuam para aumentar a autonomia;
- Consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- Auxiliar na auto avaliação da aprendizagem;
- Contribuir para a formação social, cultural desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Em geral, apenas a aula não é suficiente para fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem efetiva. Sendo assim, o livro didático vem auxiliar os estudantes no processo de construção, ampliação, compreensão e interpretação dos conteúdos estudados.

Como vimos historicamente, os livros didáticos foram e ainda são um dos principais recursos didáticos utilizados. Por isso, é de grande relevância estudos que se baseiam no aperfeiçoamento dos mesmos, pois quão mais completo e objetivo, serão de maior valia aos que os utilizam. Desta forma, entendemos que investigando os livros didáticos estaremos contribuindo para o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem.

CAPÍTULO III - UMA INTRODUÇÃO A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo situaremos o leitor sobre a história da Álgebra Linear, além de propor um complemento histórico sobre o conceito de espaço vetorial.

As bases da Álgebra Linear repousam sobre duas grandes revoluções na matemática ocorridas na primeira metade do século XIX. Uma revolução geométrica e outra algébrica.

3.1. A REVOLUÇÃO GEOMÉTRICA

A primeira grande revolução da primeira metade do século XIX, a revolução geométrica, teve como base a procura por demonstrações do postulado das paralelas de Euclides: "*Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos"* (BOYER, 1974. p. 77). Este postulado foi fonte de pesquisas para os matemáticos por mais de 2000 anos. Entre os matemáticos que contribuíram para os avanços sobre o estudo do postulado das paralelas destacaremos Janos (ou Johann) Bolyai (1802-1860), Nicolai Lobachevsky (1793-1856) e Georg Friedrich Bernhard Reimann (1826-1866).

Bolyai (1802-1860) e Lobachevsky (1793-1856) mostraram, independentemente, que o postulado das paralelas não poderia ser deduzido dos demais postulados de Euclides, e por isso, não poderia ser visto como um teorema. Para isso eles empreenderam o estudo de um quadrilátero onde os ângulos da base são retos e os lados opostos possuem a mesma medida. Com o auxílio dos postulados de Euclides eles mostraram que os outros dois ângulos são congruentes. Logo existem três possibilidades que segundo Howard Eves "*foram classificadas por SACCHERI como hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso."*(EVES, 2004. p. 540).

Bolyai (1802-1860) e Lobachevsky (1793-1856) concluíram facilmente que a *hipótese do ângulo obtuso* é falsa por redução ao absurdo. Mas o mesmo não ocorreu com a *hipótese do ângulo agudo*, este se mostrou muito mais difícil de ser resolvido. Com isso, eles concluíram que poderiam substituir o postulado das paralelas pela *hipótese do ângulo agudo* e criaram uma geometria independente da geometria de Euclides, mas que é igualmente consistente. Tudo que é consistente na geometria euclidiana é igualmente consistente na nova geometria e vice-versa.

Georg Friedrich Bernhard Reimann (1826-1866) mostrou que ao fazer alguns ajustes nos postulados de Euclides pode-se desenvolver outra geometria não-euclidiana igualmente consistente a partir da *hipótese do ângulo obtuso.* Diante da construção dessas geometrias não-euclidianas os matemáticos perceberam que os postulados poderiam ser modificados a seus gostos, desde que sejam consistentes entre si. Desse aspecto temos:

> Uma consequência de alcance muito maior foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais. Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para criação de muitos outros sistemas geométricos. Os postulados da geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto, desde que eles sejam consistentes entre si. As características de "auto evidência" e "veracidade" atribuídas aos postulados desde os tempos dos grados deixaram de ser consideradas pelos matemáticos. Com a possibilidade de inventar geometrias puramente "artificiais", tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico derivado de nossas experiências, como as leis de uma ciência física".(EVES, 2004, p.544)

Sobre a liberdade de adequação ou criação dos postulados por parte dos matemáticos temos a seguinte citação:

> Da mesma maneira que um romancista cria personagens, diálogos e situações dos quais ele é, ao mesmo tempo, autor e senhor, o matemático inventa à vontade os postulados sobre os quais baseia seus sistemas matemáticos. Tanto o romancista como o matemático podem ser influenciados pelo meio ambientes na escolha e tratamento de seu

> material; mas nenhum deles é compelido por uma necessidade extra-humana, eterna, a necessariamente criar certos personagens ou a inventar certos sistemas.(EVES, apud, 2004, p.545).

3.2. A REVOLUÇÃO ALGÉBRICA

A segunda grande revolução, a Algébrica, ocorreu com base nos trabalhos dos matemáticos Geoger Peacock (1791 – 1858), Willian Rowan Hamilton (1805 – 1865) e Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877). Até o início do século XIX a álgebra era vista como uma generalização da aritmética.

A comutatividade da multiplicação sempre foi bastante utilizada na exposição de propriedades dos números, de forma que era quase impensável discutir ou analisar uma álgebra onde $a \times b \neq b \times a$. Contudo, Hamilton (1805 – 1865) ao estudar a representação espacial dos números complexos percebeu que apesar da propriedade comutativa para a multiplicação não ser verificada, a álgebra estudada era inteiramente consistente com a álgebra dos números inteiros e assim ele criou uma nova álgebra, a álgebra dos quartérnios. Grassmann (1809 – 1877) publicou em 1888 a primeira edição de *Ausbehnungslebre* em que desenvolveu classes de álgebra de muito mais generalidade que a de Hamilton. Em vez de considerar quádruplas ordenadas ele considerou n-uplas ordenadas de números reais e chamou estas n-uplas de números hipercomplexos. Agindo de maneira semelhante a Hamilton (1805 – 1865), Grassman (1809 – 1877) criou álgebras diferentes construindo tábuas de multiplicação.

> Desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, Hamilton, Grassmann e Cayley abriram as comportas da álgebra abstrata. De fato, enfraquecendo ou suprimindo vários postulados da álgebra usual, ou substituindo um ou mais postulados por outros, consistentes com os demais, pode-se estudar uma enorme variedade de sistemas, esses sistemas incluem grupóides, quase-grupos, semigrupos, monoides, grupos, anéis, domínios de integridade, reticulados, anéis de divisão, anéis booleanos, corpos, álgebras de Jordan e álgebras de Lie, sendo os dois últimos exemplos de álgebras não-associativas.(EVES, apud, 2004, p.553)

Ao estudar as novas álgebras e geometrias os matemáticos perceberam que todas aquelas que eram consistentes entre si compartilhavam de uma estrutura com propriedades fundamentais. Esta estrutura foi chamada de ESPAÇO VETORIAL. Assim, a vantagem de se estudar os espaços vetoriais de forma abstrata é que estaremos estudando propriedades e leis que são válidas em qualquer espaço vetorial.

CAPÍTULO IV - METODOLOGIA DE PESQUISA

Este capítulo descreve sobre os métodos adotados na realização da pesquisa a fim de que haja um melhor entendimento de como a mesma se compôs.

4.1. DESCRIÇÃO METODOLOGICA

Com base nas características de nossa pesquisa entendemos que a metodologia mais adequada para o alcance dos nossos objetivos é o "estudo de caso". Como afirma Venture:

> Na posição de Lüdke e André , o estudo de caso como estratégia de pesquisa é o estudo de um caso, simples e específico ou complexo e abstrato e deve ser sempre bem delimitado. Pode ser semelhante a outros, mas é também distinto, pois tem um interesse próprio, único, particular e representa um potencial na educação. (VENTURE, 2007, p.2).

Este estudo permite identificar aspectos gerais, a partir da investigação de um caso particular, trazendo a compreensão de uma realidade específica que pode ser generalizada.

Os livros didáticos para análise serão selecionados pela presença na bibliografia da disciplina Álgebra Linear do curso de Matemática-Licenciatura, que se encontra no anexo 2, ou pela presença no acervo físico da biblioteca da UFPE-CAA. Para analisar os livros utilizaremos como metodologia a análise de conteúdo, uma vez que:

> A análise de Conteúdo é uma técnica para se estudar e analisar a comunicação de maneira objetiva, sistemática e quantitativa. Buscam-se inferências confiáveis de dados e informações com respeito a determinado contexto, a partir dos discursos escritos ou orais de seus fatores. A Análise de Conteúdo pode ser aplicada virtualmente a qualquer forma de comunicação: programas de televisão, rádio, artigos de imprensa, livros, poemas, conversas, discursos, cartas, regulamentos etc. (MARTINS, 2008, p. 33).

Analisaremos os livros didáticos quanto à presença de citações históricas como: datas importantes para o desenvolvimento da teoria, matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento, bem como suas obras, e citações sobre as revoluções citadas aqui anteriormente. Também verificaremos se eles – os livros didáticos - fazem indicações de outros livros ou textos complementares para uma compreensão histórica dos conteúdos abordados.

As análises acima serão feitas nos prefácios ou introduções, capítulo sobre espaços vetoriais, apêndices e bibliografias ou referências dos livros selecionados. Decidimos iniciar nossas análises pelos prefácios, uma vez que é o ponto onde os autores apresentam suas obras e deixam claro os objetivos do livro, bem como as justificativas dos conteúdos presentes no texto e suas concepções matemáticas. Em seguida analisaremos o capítulo sobre espaços vetoriais, pois é o tema a que nos propomos investigar. Analisaremos ainda os apêndices, momento em que os autores fazem complementos aos conteúdos apresentados nos livros. Por fim, investigaremos as bibliografias ou referências dos livros, local onde estão as indicações de livros utilizados para construção de suas obras, bem como indicações de livros relevantes para auxiliar na construção e solidificação da aprendizagem.

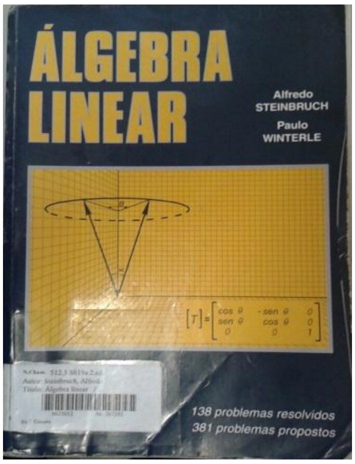
CAPÍTULO V- APRESENTAÇÃO DOS DADOS COLETADOS E DAS RESPECTIVAS ANALISES

Detalhamos neste capítulo as informações examinadas por meio da análise documental, apresentando separadamente cada livro didático e seus respectivos dados coletados.

5.1. COLETA DE DADOS

1º LIVRO ANALISADO:

STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra Linear**, 2º Ed. / STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro consta no acervo físico da biblioteca da UFPE-CAA em um total de dez unidades.

Prefácio: Não há referências históricas.

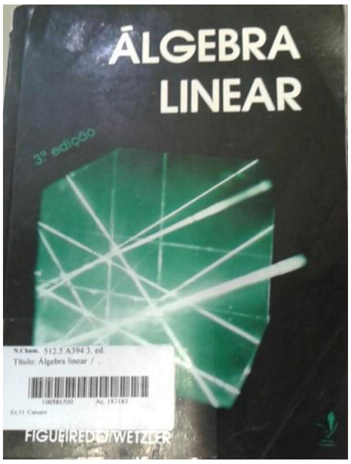
Capítulo sobre Espaços Vetoriais: Não há referências históricas.

Apêndice: Não há referências históricas.

Bibliografia: O livro não possui bibliografia.

2º LIVRO ANALISADO:

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear** / José Luiz Boldrini ... [et al.]. – 3. ed. – São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro consta no acervo físico da biblioteca da UFPE-CAA em um total de cento e sete unidades.

Prefácio: Não há referências históricas.

Capítulo sobre Espaços Vetoriais: Não há referências históricas.

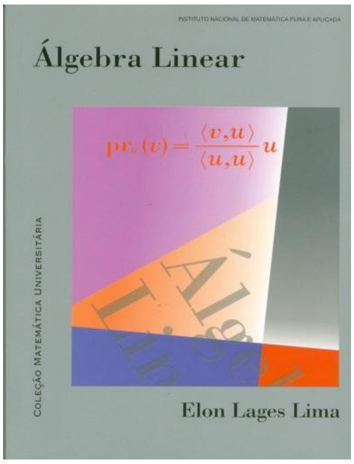
Apêndice: O livro não possui apêndice.

Bibliografia: Na bibliografia identificamos os seguintes livros históricos:

- Boyer. C.B; **História da Matemática**; Editora Edgar Blücher Ltda. Editora da U.S.P. São Paulo 1974.
- Struik, D.J; ***A consise histpry of Mathematics***; Dover, New York, 1967.

3º LIVRO ANALISADO:

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear/ Elon Lages Lima. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro não consta no acervo físico da biblioteca da UFPE-CAA.

Prefácio: Não há referências históricas.

Capítulo sobre Espaços Vetoriais: Não há referências históricas.

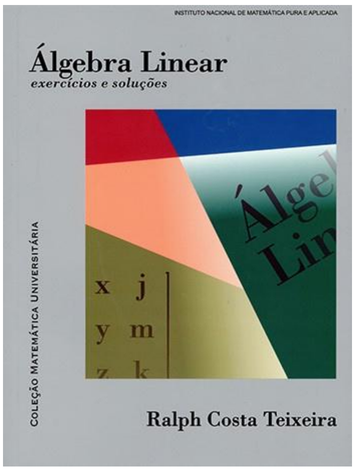
Apêndice: Não possui referências históricas.

Indicações bibliográficas feitas pelo autor: Não há referências históricas.

Bibliografia: O livro não possui bibliografia.

4º LIVRO ANALISADO:

TEIXEIRA, Ralph costa. **Álgebra linear. Exercícios e soluções** / Ralph Costa Teixeira. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro não consta no acervo físico da biblioteca da UFPE-CAA.

Prefácio: Não há referências históricas.

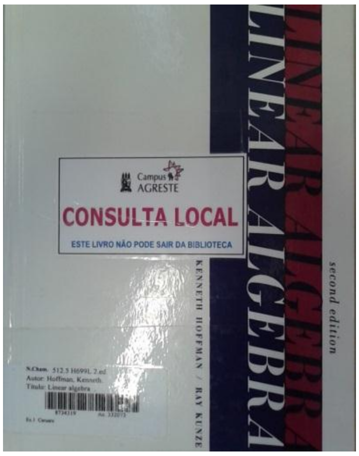
Seção sobre Espaços Vetoriais: Não há referências históricas.

Apêndice: O livro não possui apêndice.

Bibliografia: O livro não possui bibliografia.

5º LIVRO ANALISADO:

HOFFMAN, K.; KUNZE, R., **Linear Algebra.** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro consta no acervo físico da biblioteca da UFPE-CAA em uma unidade.

Prefácio: Não há referências históricas.

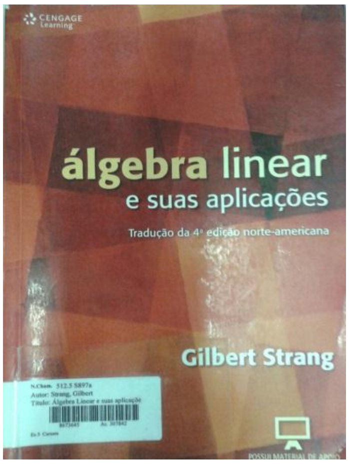
Capítulo sobre Espaços Vetoriais: Não há referências históricas.

Apêndice: Não há referências históricas.

Bibliografia: Não há referências históricas.

6º LIVRO ANALISADO:

STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e suas aplicações**/ Gilbert Strang; Tradução All tasks; Revisão técnica Germano Abud de Rezende. – São Paulo: Cengage Learning, 2009.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima não consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro consta no acervo da biblioteca da UFPE-CAA em um total de cinco unidades.

Prefácio: Não há referências históricas.

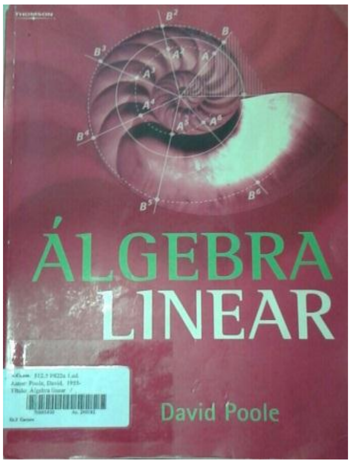
Capítulo sobre Espaços Vetoriais: Não há referências históricas.

Apêndice: Não há referências históricas.

Bibliografia: O livro não possui referências bibliográficas.

7º LIVRO ANALISADO:

POOLE, David. **Álgebra Linear**; Tradutoras técnicas Martha Salermo Monteiro (coord.)... [et al.].-São Paulo: Pioneira Thonson Learning, 2004.



Presença na Bibliografia de Álgebra Linear: O livro acima não consta na bibliografia de Álgebra Linear.

Presença no acervo da biblioteca: O livro consta no acervo da biblioteca da UFPE-CAA em um total de doze unidades.

Prefácio: No prefácio identificamos a seguinte argumentação sobre a utilização da história da matemática como recurso didático:

- É importante que os estudantes aprendam alguma coisa sobre a história da matemática e que venham a percebê-la como um esforço tanto social e cultural quanto científico. Assim, o texto contém pequenos esboços biográficos de muitos dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra linear. Espero que eles ajudem a colocar uma face humana no assunto e a proporcionar aos estudantes um outro modo de se relacionar com a matéria. (POOLE, 2004, p. XIV)

Capítulo sobre Espaços Vetoriais: Identificamos a seguinte citação histórica:

- O matemático alemão *Hermann Grassmann* (1809-1877) é geralmente creditado como o primeiro a introduzir a ideia de um espaço vetorial (apesar de não o ter chamado assim), em 1844. Infelizmente, seu trabalho era muito difícil de ler e não recebeu a atenção que merecia. Uma pessoa que realmente o estudou foi o matemático italiano *Giuseppe Peano* (1858-1932). Em seu livro *Calcolo geométrico*, de 1888, *Peano* tornou claro o trabalho anterior de *Grassmann* e descreveu os axiomas para um espaço vetorial de maneira como hoje os conhecemos. O livro de *Peano* é também digno de nota por introduzir operações em conjuntos. Suas notações $\cup$,$\cap$ e $\in$ (para "união", "interseção", e "é um elemento de") são as que ainda usamos, apenas de não terem sido adotadas de imediato por outros matemáticos. A definição axiomática de um espaço vetorial feita por *Peano* também teve pouca influência por muitos anos. A aceitação só veio em 1918, depois que *Hermann Weyl* (1885-1955) a repetiu em seu livro *Space, time, matter*, uma introdução à teoria geral da relatividade de Einstein." (POOLE, 2004. p.389).

Apêndices: Nos apêndices identificamos resumos biográficos sobre matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do tema do apêndice. Por exemplo, no apêndice C, sobre números complexos, há a seguinte citação:

- O francês Jean-Robert Argand (1768 – 1822) foi contador e matemático amador. Sua interpretação geométrica para os números complexos apareceu em 1806, em um livro que ele publicou por conta própria. No entanto, ele não foi o primeiro a dar tal interpretação. O inspetor dinamarquês Caspar Wessel (1745 – 1818) deu a mesma versão do plano complexo em 1787, mas seu artigo só foi divulgado na comunidade matemática depois de sua morte. (POOLE,2004. p. 587).

Bibliografia: O livro não possui referências bibliográficas.

5.2. ANÁLISE DOS DADOS

Com base nos dados obtidos nos livros didáticos expostos acima, podemos afirmar que os livros de Boldrini (1980), Steinbruch (1987), Lima (2012), Strang (2009), Teixeira (2013) e Hoffman e Kunze (1971) seguem, em grande parte, uma mesma perspectiva de ensino. Esta perspectiva esta baseada na aprendizagem do uso dos conceitos da Álgebra Linear e não em uma aprendizagem que priorize o significado desses conceitos.

Os livros de Boldrini (1980), Steinbruch (1987), Strang (2009) e Hoffman e Kunze (1971) iniciam com as propriedades dos vetores do plano, espaço ou dos sistemas lineares. Argumentam que estas propriedades formam uma estrutura comum a diversos conjuntos de naturezas distintas, e com isso refletem sobre a importância de estudar esta estrutura de forma abstrata. Em seguida definem espaços vetoriais, mostram seguidamente exemplos de conjuntos que são, e conjuntos que não são espaços vetoriais, bem como suas respectivas verificações. Um exemplo pode ser visto nas figuras 1 e 2.

20 Álgebra linear

Exemplos

1) O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Essas são as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Para verificarmos os oito axiomas de espaço vetorial, consideremos $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$. Tem-se:

A_1)
$$\begin{aligned}
(u + v) + w &= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)\\
(u + v) + w &= ((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) + (x_3, y_3)\\
(u + v) + w &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)\\
(u + v) + w &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))\\
(u + v) + w &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\
(u + v) + w &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))\\
(u + v) + w &= u + (v + w)
\end{aligned}$$

A_2)
$$\begin{aligned}
u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)\\
u + v &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\
u + v &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)\\
u + v &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)\\
u + v &= v + u
\end{aligned}$$

A_3) $\exists 0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}
u + 0 &= (x_1, y_1) + (0, 0)\\
u + 0 &= (x_1 + 0, y_1 + 0)\\
u + 0 &= (x_1, y_1)\\
u + 0 &= u
\end{aligned}$$

A_4) $\forall u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\exists(-u) = (-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}
u + (-v) &= (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1)\\
u + (-u) &= (x_1 - x_1, y_1 - y_1)\\
u + (-u) &= (0, 0) = 0
\end{aligned}$$

Figura 1: Recorte (Exemplo de verificação de um espaço vetorial do livro de Steinbruch (1987, p.20))

Espaços vetoriais 21

$$M_1)\quad (\alpha\beta)\, u = (\alpha\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha\beta)\, x_1, (\alpha\beta)\, y_1) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1))$$

$$(\alpha\beta)\, u = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = \alpha(\beta(x_1, y_1))$$

$$(\alpha\beta)\, u = \alpha(\beta u)$$

$$M_2)\quad (\alpha+\beta)\, u = (\alpha+\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha+\beta)\, x_1, (\alpha+\beta)\, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$$

$$(\alpha+\beta)\, u = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1)$$

$$(\alpha+\beta)\, u = \alpha u + \beta u$$

$$M_3)\quad \alpha(u+v) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2))$$

$$\alpha(u+v) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$\alpha(u+v) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \alpha u + \alpha v$$

$$M_4)\quad 1u = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1)$$

$$1u = u$$

Figura 2: Recorte (Exemplo de verificação de um espaço vetorial do livro de Steinbruch (1987, p. 20)).

Essa didática, a nosso ver, pode provocar o surgimento de obstáculos ao conhecimento, como os citados por Coimbra, como podemos destacar: o obstáculo da experiência primeira do conteúdo, os obstáculos verbais, os obstáculos geométricos e os obstáculos epistemológicos.

O livro de Lima (2012) tem uma perspectiva um pouco diferente. O autor já no início do livro traz a definição de espaços vetoriais, mostrando exemplos de conjuntos que são, e de conjuntos que não são espaços vetoriais, bem como suas verificações. Os obstáculos ao conhecimento podem ainda surgir com esta metodologia. A figura 3 mostra a introdução ao capítulo de Espaços Vetoriais feita no livro de Lima.

1

Espaços Vetoriais

A noção de espaço vetorial é a base do estudo que faremos; é o terreno onde se desenvolve toda a Álgebra Linear. Esta seção apresenta os axiomas de espaço vetorial, deduz suas conseqüências mais imediatas e exibe os exemplos mais importantes dessa noção.

Um *espaço vetorial* E é um conjunto, cujos elementos são chamados *vetores*, no qual estão definidas duas operações: a *adição*, que a cada par de vetores $u, v \in E$ faz corresponder um novo vetor $u+v \in E$, chamado a *soma* de u e v, e a *multiplicação por um número real*, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in E$ faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v$, ou αv, chamado o *produto* de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas os *axiomas* de espaço vetorial:

comutatividade: $u + v = v + u$;

associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

vetor nulo: existe um vetor $0 \in E$, chamado *vetor nulo*, ou *vetor zero*, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$;

inverso aditivo: para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, chamado o *inverso aditivo*, ou o *simétrico* de v, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;

distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

multiplicação por 1: $1 \cdot v = v$.

Figura 3: Recorte (Introdução do capítulo de Espaços Vetoriais do livro de Lima (2012, p. 01).

O livro de Teixeira (2013) cumpre muito bem aos objetivos que se propõe. No inicio de cada seção faz uma breve revisão sobre o tema do capítulo a que se refere e em seguida traz as resoluções dos problemas do livro de Lima (2012) de forma simples e clara, mas não oferece recursos didáticos que auxiliem na significação dos conceitos estudados. A seção referente a Espaços Vetoriais pode ser vista na figura 4.

Seção 1 Espaços Vetoriais

Definição 1. *Um **espaço vetorial** E é um conjunto cujos elementos (denominados **vetores**) podem ser somados ou multiplicados por escalares (números reais). Estas operações de adição e multiplicação devem satisfazer*

Comutatividade: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
Associatividade: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ *e* $(c_1 c_2)\, v_1 = c_1\,(c_2 v_1)$
Distributividade: $c\,(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$ *e* $(c_1 + c_2)\, v = c_1 v + c_2 v$
Vetor nulo: $v + \vec{0} = v$ *(para um vetor* $\vec{0}$ *independente de* v*)*
Inverso aditivo: $v + (-v) = \vec{0}$ *(para um vetor* $-v$ *que depende de* v*)*
Multiplicação por 1: $1v = v$

para quaisquer vetores $v,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \in E$ *e quaisquer escalares* $c,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

Exemplo 2. *Os conjuntos* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty$ *(o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais),* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *(o conjunto de todas as funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*, isto é, funções de uma variável) são espaços vetoriais.*

Propriedade 3. *Se* E *é um espaço vetorial, para quaisquer* $u, v, w \in E$ *e* $\alpha \in R$*, valem*

$$0.v = \vec{0};\ \alpha.\vec{0} = \vec{0};\ (-1)\,.v = -v$$
$$u + v = u + w \Rightarrow v = w \text{ (“lei do corte”)}$$

Exercícios da Seção 1

1.1. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 12 & 13 & 1 \end{bmatrix} \quad :$$

Figura 4: Recorte (Introdução à seção sobre Espaços Vetoriais do livro de Teixeira (2013, p. 01)).

O livro de Poole (2004) segue abordagens metodológicas que estão em concordância com as novas tendências no ensino da matemática. No prefácio o autor deixa claro que utiliza como metodologias de ensino a investigação matemática, a tecnologia, a resolução de problemas e a História da Matemática. Também argumenta sobre as importantes aplicações dos conceitos estudados em Álgebra Linear na matemática, ciência da computação, física, química, engenharia, biologia, psicologia, geografia e sociologia. Sobre a história da matemática como metodologia o autor fundamenta que:

> É importante que os estudantes aprendam alguma coisa sobre a história da matemática e que venham a percebê-la como um esforço tanto social e cultural quanto científico. Assim, o texto contém pequenos esboços biográficos de muitos dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra linear. Espero que eles ajudem a colocar uma face humana no assunto e a proporcionar aos estudantes um outro modo de se relacionar com a matéria. (POOLE, 2004, p. XIV)

Assim, podemos afirmar que Poole (2004) utiliza a história da matemática como com o objetivo de desmistificação da matemática.

O capítulo sobre espaços vetoriais, do livro em discussão, inicia com a resolução de problemas no estudo sobre os quadrados mágicos, em seguida, traz a definição de espaços vetoriais, apresentando uma citação com indicações dos períodos de desenvolvimento do conceito de espaço vetorial, bem como os matemáticos que contribuíram para esse desenvolvimento. Assim, os leitores poderão fazer pesquisas em outros livros para que possam entender melhor o desenvolvimento da teoria, bem como para uma fundamentação epistemológica mais consistente. O autor finaliza o tópico mostrando exemplos de conjuntos que são e conjuntos que não são espaços vetoriais, bem como suas respectivas verificações, semelhante ao exemplo mostrado nas figuras 1 e 2. Estes conjuntos abordados são de diversas naturezas: conjuntos de matrizes, polinômios, funções, números complexos, inteiros e reais.

Em todos os capítulos do livro de Poole (2004), inclusive nos apêndices o autor inicia com uma citação de algum matemático famoso que está relacionado com o tema do capítulo, bem como resumos biográficos sobre estes matemáticos. O livro, porém, não possui referências bibliográficas, o que surpreende, uma vez que o autor faz citações históricas em todos os capítulos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em todos os cinco livros analisados que constam na bibliografia de Álgebra Linear e no livro de Strang (2009), as únicas referências históricas que identificamos foram às indicações dos dois livros sobre História da Matemática na bibliografia do livro de Boldrini (1980), o que julgamos ser muito pouco, pois em nenhum momento o autor trás indicações sobre os conteúdos trabalhados nos livros, bem como algum argumento que motivasse o leitor a consulta-los.

O único livro analisado que realmente traz a história da matemática como suporte para os estudantes e professores é o livro de Poole (2004). Este livro nos chama atenção pelo fato de ser visível a preocupação do autor com as diferentes formas de aprendizagem dos alunos. Sobre este aspecto podemos destacar:

> Não existe um único estilo de aprendizado. Em qualquer classe haverá alguns alunos que trabalham bem individualmente e outros que trabalham melhor em grupos, alguns que preferem o aprendizado com base em leituras individuais e outros que prosperam em um ambiente de oficina didática, alguns que apreciam manipulações algébricas, outros adeptos de métodos numéricos (com ou sem um computador) e alguns que exibem forte intuição geométrica. Um bom livro texto usa uma variedade de maneiras para apresentar o material, para que todos os tipos de estudantes possam encontrar um caminho a seguir. Em consonância com essas ideias, apresento os tópicos algebricamente, geometricamente, numericamente e verbalmente. (POOLE, 2004, p. XI).

Como vimos em nossas análises, o livro de Poole (2004) traz metodologias para o processo de ensino e aprendizagem que conseguem atingir um número maior de alunos e consegue proporcionar uma aprendizagem baseada na significação, compreensão e na desmistificação da matemática. Assim, iremos propor a inclusão do livro **Álgebra Linear** de David Poole na bibliografia da disciplina Álgebra Linear da UFPE-CAA. Entendemos que, em parceria com os livros que já constam na bibliografia de Álgebra Linear, o livro de Poole (2004) será uma importante ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem.

Indicaremos também, como leitura complementar, o livro **Introdução à História da Matemática** de Howard Eves. Este livro foi uma fonte de informações valiosa durante nossas pesquisas a cerca da história da Álgebra Linear. Entendemos que as leituras dos tópicos relacionados aos temas da Álgebra Linear, além de auxiliar os alunos a superarem os obstáculos que possam surgir, podem também ser feitas com objetivo de desmistificar a matemática, e assim, proporcionar uma aprendizagem baseada na significação dos conceitos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cláudio A. – **história da matemática: uma investigação nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática nas instiruições de Porto Alegra – RS e região metropolitana.** X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut. **Aspectos históricos de alguns conceitos de Álgebra Linear**; Organizado por Iran Abreu Mendes e Miguel Chaquiam. – Belém: SBHMt, 2009. (Coleção História da Matemática para Professores, 3).

BIEHL E BAYER, Juliana Vocanoglo; Arno. **A escolha do livro didático de matemática.** X Encontro Gaúcho Matemática, 2009.

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear.** 3º. ed. – São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.

BORGES, M. F. **Obstáculos Encontrados Pelos Alunos na Aprendizagem da Álgebra Linear**. Universidade do Estado do Mato Grosso/UNEMAT.

BOYER. C.B; **História da Matemática**; Editora Edgar Blücher Ltda. Editora da U.S.P. São Paulo 1974.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.).

CELESTINO, M.R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Dissertação de Mestrado: PUC-SP, 2000.

COIMBRA, J. L. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear**. Dissertação de Mestrado: Universidade Federal do Pará, 2008.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria a prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996. – (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

D´AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. Escrituras Editora: São Paulo, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro didático de matemática: uso ou abuso?**. Em aberto, Brasília, ano 16, n69, jan/mar; 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues, - Campinas, SP: Editora da *Unicamp*, 2004.

GIL, Antônio Carlos. **Método e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, Daiane. **O livro didático no processo de ensino e aprendizagem da matemática: Considerações de professores de escolas públicas de JI-PARANÁ. 2014.** 49f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná.

GROENWALD, Claudia L. O., SILVA, Carmen K., MORA, Castor D. **Perspectivas em Educação Matemática**.- Canoas: ULBRA, 2004. Actascientiae v.6 n.1 p.37-55, jan/jun.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R., **Linear Algebra.** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

JONES, P.S. **The History of Mathematics as a teaching tool. In: Historical topics for the Mathematics classroom.** Washington, D.C.**:** National council of teachers of mathematics, 1969.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LUDKE, Menga. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS, Gilberto de Andrade. **Estudo de caso: uma estratégia de pesquisa**. 2. ed. – São Paulo: Atlas, 2008.

MENDES, I. & FOSSA,J. & VALDÉS, J.N. **A história como uma agente de cognição na educação matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

MIGUEL, Antonio. **História na Educação Matemática: Propostas e Desafios**. 2º ed.- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PESCADOR, Andressa. **Aplicações da Álgebra Linear na engenharia.** Santa Catarina: UESC, 2011. 9 p.

SPECK, Ana Line Caroline. **Coletânea de Aplicações da Álgebra Linear**. Florianópolis: UFSC, 2006. 66 p.

STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra Linear**, 2º Ed. / STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e suas aplicações.** Tradução All tasks; Revisão técnica Germano Abud de Rezende. – São Paulo: Cengage Learning, 2009.

TEIXEIRA, Ralph costa. **Álgebra linear. Exercícios e soluções**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

THOMAZ, Dilson. **Do livro didático ao aluno: Transposição didática na aula de matemática do ensino médio diurno e noturno.** Disponível em : < http://www.ie.ufmt.br/ppge/dissetações >.

ANEXOS

ANEXO 1 – Lista com argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas da história.

Argumentos de natureza epistemológica

- fonte de seleção e constituição de sequencias adequadas de tópicos de ensino;
- fonte de seleção de métodos adequados de ensino para diferentes tópicos da matemática escolar;
- fonte de seleção de objetivos adequados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar;
- fonte de seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da matemática escolar;
- fonte de busca de compreensão e de significação para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade;
- fonte de identidade de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que se manifestam entre os estudantes no processo de ensino-aprendizagem de Matemática escolar;
- fonte de identificação de mecanismos operatórios cognitivos de passagem a serem levados em consideração nos processos de investigação em educação Matemática e no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar.

Argumentos de natureza ética

- fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido de uma tomada de consciência da unidade da Matemática;
- fonte para a compreensão da natureza e das características distintivas e específicas do pensamento matemático em relação a outros tipos de conhecimento;
- fonte que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação do seu ensino;
- fonte que possibilita a construção de atitudes academicamente valorizadas;

- fonte que possibilita uma conscientização epistemológica;
- fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual;
- fonte que possibilita o desenvolvimento de um pensamento crítico, de uma qualificação como cidadão e de uma tomada de consciência e de avaliação de diferentes usos sociais da Matemática;
- fonte que possibilita uma apreciação da beleza da Matemática e da estética inerente a seus métodos de produção e validação do conhecimento;
- fonte que possibilita a promoção da inclusão social, via resgate da identidade cultural de grupos sociais discriminados no (ou excluídos do) contexto escolar.

ANEXO 02 : BIBLIOGRAFIA DA DISCIPLINA ÁLGEBRA LINEAR DA UFPE – CAA.

ÁLGEBRA LINEAR

DISCIPLINA: (X) OBRIGATÓRIA ( ) ELETIVA

PRÉ-REQUISITOS: Geometria Analítica

CARGA HORÁRIA TOTAL: 60

CARGA HORÁRIA TEÓRICA: 60

CARGA HORÁRIA PRÁTICA: 0

EMENTA: Espaços e subespaços vetoriais, bases e dimensão. Sistemas lineares. Transformações e operadores lineares. Autovalores e autovetores. Produto interno. Operadores auto-adjuntos e ortogonais.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. ; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G., **Álgebra Linear**. Ed. Harbra ltda, 1986.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P., **Álgebra Linear**. Pearson Makron Books, 2006.

LIMA, E., **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.

TEIXEIRA, R., **Álgebra Linear, exercícios e soluções**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2009.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R., **Linear Algebra.** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.